ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ВЛАДИКАВКАЗСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК И ПРАВИТЕЛЬСТВА РЕСПУБЛИКИ
СЕВЕРНАЯ ОСЕТИЯ-АЛАНИЯ

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ, КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ:

тезисы докладов
международной научной конференции
(пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

Владикавказ
2014

ББК 22.16+
УДК 517 + 519.372.8

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование: тезисы докладов международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—179 с.

Сборник содержит тезисы докладов Международной научной конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование» (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.), которая проведена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-31-10120-мол_г.

ISBN 978-5-904695-28-6

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

СЕКЦИЯ I
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

СЕКЦИЯ II
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

СЕКЦИЯ III
ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Пленарные доклады

COMPLEX NONLINEAR ANALYSIS

A. D. Bruno
(Russia, Moscow; KIAM)

We develop a new Calculus based on Power Geometry (PG). Now it allows to compute local and asymptotic expansions of solutions to nonlinear equations of three classes:

A. algebraic,
B. ordinary differential,
C. partial differential,

as well as to systems of such equations. But it can be extended to other classes of nonlinear equations: functional, integral, integro-differential and so on.

Principal ideas and algorithms are common for all classes of equations. Computation of asymptotic expansions of solutions consists of 3 following steps (we describe them for one equation $f = 0$).

1. Isolation of truncated equations $\hat{f}_j^{(d)} = 0$ by means of generalized faces of the convex polyhedron $\Gamma(f)$ which is a generalization of the Newton polyhedron. The first term of the expansion of a solution to the initial equation $f = 0$ is a solution to the corresponding truncated equation $\hat{f}_j^{(d)} = 0$.

2. Finding solutions to a truncated equation $\hat{f}_j^{(d)} = 0$ which is quasihomogenous. Using power and logarithmic transformations of coordinates we can reduce the equation $\hat{f}_j^{(d)} = 0$ to such simple form that can be solved. Among the solutions found we must select appropriate ones which give the first terms of asymptotic expansions.

3. Computation of the tail of the asymptotic expansion. Each term in the expansion is a solution of a linear equation which can be written down and solved.

Indeed PG (or Nonlinear Analysis) is the third level of Differential Calculus (after Classical Analysis and Functional Analysis). Elements of plane PG were proposed by Newton for algebraic equation (1670); and by Briot and Bouquet for ordinary differential equation of the first order (1856). Space PG for a nonlinear autonomous system of ODEs were proposed by the author (1962), and for a linear PDE, by Mikhailov (1963). Thus, now there is exactly *50 years* of the *Newton polyhedron*, but that name was given in 1973 by V. Arnold.

In this paper we intend to give basic notions of PG, present some of its algorithms, results, and applications. It is clear that this calculus cannot be mastered during this presentation. The Calculus was subject for one–year course of lectures “Nonlinear Analysis” in Lomonosov Moscow State University.

ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ: ВЗАИМОСВЯЗЬ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУР

А. В. Абанин
(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Весовые пространства непрерывных и голоморфных функций с равномерными оценками роста играют важную роль в ряде математических разделов, в связи с чем они интенсивно изучались в работах многих авторов, особенно после фундаментальной работы [1]. При этом алгебраические и топологические свойства (LB)-пространств непрерывных функций и их проективных оболочек были практически полностью исследованы к концу 1980-х годов (см. [1, 2]). Поэтому дальнейшие исследования сконцентрировались на пространствах голоморфных функций. Но, несмотря на тридцатилетние усилия, было установлено не так много завершенных результатов, а многие важные проблемы остаются открытыми до сих пор (см. обзор [3]). Ряд новых результатов в данном направлении был недавно установлен в работах [4–6] при жестких ограничениях на исследуемые пространства, часть из которых удается проверить только для областей типа шара и радиальных весов, а часть, вообще, составляет самостоятельные открытые проблемы.

В докладе будут представлены более сильные, чем прежде, результаты, полученные автором совместно с Фам Чонг Тиеном, в которых упомянутые ограничения либо снимаются вовсе, либо значительно ослабляются.

Пусть G — область в $\mathbb{C}^N$. По положительной непрерывной на G функции (весу) образуем банаховы пространства

$$H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_v := \sup_{z\in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\},$$

$$H_{v0}(G) := \left\{ f \in H(G) : \frac{f(z)}{v(z)} \to 0 \text{ при } z \to \partial G \right\}$$

с нормой $\|\cdot\|_v$. По возрастающей последовательности $\mathcal{V}$ весов v_n на G определяем внутренние индуктивные пределы:

$$\mathcal{V}H(G) := \mathrm{ind} H_{v_n}(G, \quad \mathcal{V}_0 H(G) := \mathrm{ind} H_{(v_n)0}(G),$$

являющиеся (LB)-пространствами, а также их проективные оболочки

$$H\overline{V}(G) = \bigcap_{v\in\overline{V}} H_v(G), \quad H\overline{V}_0(G) = \bigcap_{v\in\overline{V}} H_{v0}(G),$$

где

$$\overline{V} := \left\{ v - \text{ вес на } G : \sup_{z\in G} \frac{v_n(z)}{v(z)} < \infty, \ \forall\, n \right\}.$$

Напомним еще, что внутренний индуктивный предел $E = \mathrm{ind} E_n$ последовательности локально выпуклых пространств E_n называется *регулярным*, если каждое ограниченное в нем множество содержится и ограничено в некотором E_n.

Основные наши результаты таковы:

(1) Алгебраическое равенство $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0H(G)$ всегда влечет, что данные пространства относятся к классу (DFS). Обратное утверждение верно при дополнительном ограничении (CD): *Для любого n найдется такое m, что единичный шар пространства $H_{v_n}(G)$ содержится в замыкании по топологии компактной сходимости некоторого шара пространства $H_{(v_m)0}(G)$.*

(2) При условии (CD) алгебраическое равенство $H\overline{V}(G) = H\overline{V}_0(G)$ между проективными оболочками (LB)-пространств $\mathcal{V}H(G)$ и $\mathcal{V}_0H(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда $H\overline{V}(G)$ является полумонтелевским пространством.

(3) Если пространство $\mathcal{V}_0H(G)$ совпадает с проективной оболочкой $H\overline{V}_0(G)$, то оно является регулярным индуктивным пределом.

Литература

1. *Bierstedt K. D., Meise R., Summers W. H.* A projective description of weighted inductive limits // Trans. Amer. Math. Soc.—1982.—Vol. 272.—P. 107–160.
2. *Bierstedt K. D., Bonet J.* Some recent results on $\mathcal{V}C(X)$ // Advances in the Theory of Fréchet Spaces (Istanbul, 1988). NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C.—Berlin: Springer, 1989.—P. 181–194.
3. *Bierstedt K. D.* A survey on some results and open problems in weighted inductive limits and projective description for spaces of holomorphic functions // Bull. Soc. Roy. Sci. Liége.—2001.—Vol. 70.—P. 167–182.
4. *Bonet J., Friz M., Jorda E.* Composition operators between weighted inductive limits of spaces of holomorphic functions // Publ. Math. Debrecen.—2005.—Vol. 67.—P. 333–348.
5. *Bierstedt K. D., Bonet J.* Weighted (LB)-spaces of holomorphic functions: $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0H(G)$ and completeness of $\mathcal{V}_0H(G)$ // Math. Anal. Appl.—2006.—Vol. 323.—P. 747–767.
6. *Bierstedt K. D., Bonet J., Taskinen J.* Weighted inductive limits of spaces of entire functions // Monatsh. Math.—2008.—Vol. 154.—P. 103–120.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МАСЛОВА

Д. Е. Булычев
(Россия, Москва; МГУ)

Наиболее общим методом построения квазиклассических асимптотик в задачах квантовой механики является разработанная В. П. Масловым теория лагранжевых многообразий с комплексным ростком [3], которая включает в себя в качестве частных случаев другие квазиклассические методы, такие, как метод ВКБ и осцилляторное приближение. Данная теория позволяет строить приближенные решения уравнений в частных производных с малым параметром при операторе дифференцирования

$$i\epsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\left(t, x, -i\epsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi, \quad \epsilon\to 0, \quad t\in\mathbb{R}, \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

Эти асимптотики $\psi(x,t)$ в каждый момент времени t имеют следующую структуру. В малой окрестности некоторой к-мерной поверхности (размер окрестности порядка $\sqrt{\epsilon}$) функция ψ имеет быстро осциллирующий вид, вне этой окрестности ψ экспоненциально мала. Частным случаем теории лагранжевых многообразий с комплексным ростком при $k = 0$ является теория комплексного ростка в точке, позволяющая построить асимптотические решения уравнений (1), имеющие в каждый фиксированный момент времени t вид волнового пакета с шириной порядка $\sqrt{\epsilon}$:

$$\psi(x,t) = \epsilon^{-\frac{n}{4}} e^{\frac{i}{\epsilon}S(t)} e^{\frac{i}{\epsilon}P(t)(x-Q(t))} f\left(\frac{x-Q(t)}{\sqrt{\epsilon}}, t\right), \tag{2}$$

отвечающего движению классической частицы вдоль траектории $(P(t),Q(t))\in\mathbb{R}^{2n}$.

Помимо систем, квазиклассических по всем переменным, в квантовой механике рассматриваются также системы квазиклассические по одним переменным и «квантовые» по другим. Уравнение Шредингера, описывающее эволюцию состояния таких систем, имеет вид

$$i\epsilon\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial t} = H\left(-i\epsilon\frac{\partial}{\partial x}, x, -i\frac{\partial}{\partial y}, y\right)\psi(x,y,t) \tag{3}$$

для некоторой функции H, регулярно зависящей от ϵ. Система Гамильтона в этом случае является «многозначной»: каждое из собственных значений операторнозначного символа оператора Гамильтона является функцией Гамильтона. К таким уравнениям применим операторнозначный метод комплексного ростка Маслова [2].

В докладе будет рассмотрено построение формального асимптотического решения для уравнения, возникающего в теории оптических решеток

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + W_0\cos(a\xi) + \frac{\xi^2}{2}\right)\psi, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Различные условия, налагаемые на параметры приводят к использованию двух различных методов. Будут рассмотрены полученные соотношения, описывающие набег фазы S и показывающие, как изменяется форма волнового пакета f со временем, а также системы Гамильтона, решениями которого являются траектории движения классических частиц [1]. Полученные асимптотики будут иметь строгое обоснование, и в одном из случаев малость погрешности будет оценена.

Литература

1. *Булычев Д. Е.* Асимптотические методы Маслова в задачах теории оптических решеток // ВМУ.—2013.—Т. 3, № 5.—С. 14–21.
2. *Маслов В. П.* Теория возмущений и асимптотические методы.—М.: Изд-во МГУ, 1965.—553 с.
3. *Маслов В. П., Шведов О. Ю.* Метод комплексного ростка в задаче многих частиц и квантовой теории поля.—М: Изд-во УРСС, 2000.—360 с.

ПЛОСКИЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РЯД БЛАЗИУСА

В. П. Варин
(Россия, Москва; ИПМ им. М. В. Келдыша РАН)

Разложения функций вблизи особой точки по плоским (т. е. экспоненциально малым) функциям возникают естественным образом в прикладных задачах от проблемы центра-фокуса до проблемы Блазиуса [1].

Дифференциальное уравнение Блазиуса имеет вид

$$y'''(x) + 2\,y(x)\,y''(x) = 0. \tag{1}$$

Проблема Блазиуса состоит в определении начального значения функции $s = y''(0)$ так, что при условиях $y(0) = y'(0) = 0$ выполняется условие на бесконечности $y'(\infty) = 1$ (см. [2]).

Решение $y(x)$ имеет асимптотику при $x \to \infty$:

$$y(x) \asymp (x - b) + (\text{flat asymptotic terms}), \quad b = \text{const}. \tag{2}$$

Блазиус вычислил 2 члена «плоского разложения» в (2) и использовал их для вычисления $s = y''(0)$ путем сращивания степенного разложения функции $y(x)$ в нуле (где она голоморфна) и асимптотического разложения (2). Вейль считал эту процедуру необоснованной (что вполне справедливо) и поставил саму возможность такого сращивания под сомнение [3].

Асимптотический ряд Блазиуса (2) упоминается в литературе только как «некий асимптотический ряд» со ссылкой на Вейля. Кроме того, его традиционно считают расходящимся.

В работе [1] вычислено 3 члена этого ряда в явном виде и показано, как этот ряд можно продолжить неограниченно. Доказана равномерная сходимость асимптотического ряда Блазиуса и показано, что область его сходимости перекрывается с областью сходимости степенного ряда в окрестности нуля, т.е. метод Блазиуса работает.

Литература

1. *Варин В. П.* Плоские разложения и их приложения.—М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2014.—(Препринт № 23).
2. *Varin V. P.* A Solution of the Blasius Problem // Comp. Math. & Math. Phys.—2014.—Vol. 54, № 6.—P. 1025–1036.
3. *Weyl H.* Concerning the differential equations of some boundary-layer problems // Proc. Nat. Acad. Sci.—1941.—Vol. 27.—P. 578–583.

ОБ ОБРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ[1]

А. О. Ватульян (Россия, Владикавказ; ЮМИ),
С. А. Нестеров (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В настоящее время исследования в области функционально-градиентных материалов привлекают все большее внимание ученых. Функционально-градиентные материалы — композиты, обладающие переменными физическими свойствами и позволяющие получить конструкции с заданными свойствами. Но производство неоднородных материалов — сложный технологический процесс. В силу многоступенчатости технологических операций в конечном изделии могут присутствовать отклонения от установленных норм. Знание реальных характеристик изделия позволяет оценить его функциональные свойства и возможность использования. Прямые измерения коэффициентов переноса в случае неоднородных тел невозможны. Поэтому при неразрушающем контроле качества неоднородных материалов требуется решать коэффициентные обратные задачи (КОЗ). Коэффициентные обратные задачи, как правило, нелинейны. Главная трудность при исследовании нелинейных обратных задач — это формулировка операторной связи между искомыми коэффициентами дифференциальных операторов и граничными физическими полями. Количество работ, посвященных реконструкции теплофизических и механических свойств неоднородных материалов довольно велико. Однако большинство работ строится на сведении обратных задач к решению соответствующих экстремальных задач градиентными методами. Следует учесть, что использование градиентных методов минимизации требует существенных затрат машинного времени и обладает рядом других недостатков.

В последние годы в ряде работ развит альтернативный подход к решению КОЗ для неоднородных тел. В этих работах решение нелинейных обратных задач сводится к итерационной процедуре, на каждом шаге которой решается линейная задача. При этом линеаризация осуществляется либо при использовании принципа ортогональности, либо на обобщенной теореме взаимности, либо на применении слабой постановки прямой задачи.

В данной работе для решения коэффициентных обратных задач приводится операторное уравнение, полученное ранее. Это уравнение применяется для решения задач о восстановлении на конечном временном отрезке одномерных теплофизических характеристик кольца и цилиндра конечной длины. Прямые

[1]Работа выполнена в рамках проекта Минобрнауки № 9.665.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности и при поддержке Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН № 1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования».

задачи после обезразмеривания и применения преобразования Лапласа решаются совместным применением преобразования Лапласа и метода Галеркина. Теплофизические характеристики восстанавливались в два этапа. На первом этапе определялось начальное приближение в классе положительных ограниченных линейных функций методом минимизации функционала невязки. На втором этапе определялись поправки реконструируемых функций путем решения соответствующего интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. После нахождения поправок строилось новое приближение, и осуществлялся итерационный процесс уточнения восстанавливаемых характеристик. Критерий выхода из итерационного процесса — достижение некоторого порогового значения функционала невязки. Исследовалось влияние монотонности функций на результат реконструкции.

АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАВНОВЕСНЫХ КАПИЛЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ УСЛОВИЯМИ КОНТАКТА

Ю. Н. Горбачева

(Беларусь, Минск; БелГУ)

Рассматривается проблема нахождения осесимметричных равновесных форм капиллярных поверхностей с нерегулярными условиями контакта на примере двух известных задач капиллярной гидростатики: 1) задача о равновесных формах и устойчивости капли, свисающей с кромки капилляра в гравитационном поле; 2) задача о равновесных формах и устойчивости жидкой перемычки цилиндрического объема, свободная поверхность которой опирается на кромки двух вертикальных коаксиальных цилиндров одинакового радиуса в поле силы тяжести [1]. Для решения поставленной проблемы разработаны два алгоритма ее численного решения: сплайн-схема [2, 3] и конечно-элементная схема.

При построении сплайн-схемы математические модели как капли, так и перемычки строятся из условий гидростатики и состоят из нелинейных параметрических дифференциальных уравнений Юнга-Лапласа второго порядка, которые дополняются краевыми условиями и интегральным условием сохранения объема жидкости. Конструкция итерационной сплайн-схемы основывается на аппроксимации свободной поверхности параметрическими кубическими сплайнами, точно удовлетворяющими уравнениям дифференциальной задачи в узлах сетки. Реализация сплайн-схемы на каждой итерации сводится двум независимым линейным трехдиагональным системам относительно неизвестных параметрических функций, описывающих равновесную форму свободной поверхности. Каждая из систем решается прогонкой, которая является абсолютно устойчивой.

При построении конечно-элементной схемы математические модели как капли, так и перемычки строятся на основании вариационного принципа минимума полной энергии, состоящей из энергии поверхностного натяжения и гравитации. Равновесная поверхность ищется в сферических координатах. Дискретная модель задачи строится с помощью конечно-элементного метода Галеркина [4]. Реализация конечно-элементной схемы сводится к решению большой системы нелинейных алгебраических уравнений с помощью метода Ньютона, для быстрой сходимости которого необходимо задавать хорошее начальное приближение.

Результаты вычислительного эксперимента показали, что и сплайн-схема, и конечно-элементная схема позволяют получать равновесные формы свободной поверхности жидкости для первой (второй) задачи в широком диапазоне определяющих параметров, которыми являются число Бонда и объем капли (высота перемычки). Полученные численно с помощью разработанных схем критические значения объема капли (высоты перемычки) в зависимости от числа Бонда совпадают с данными линейной теории устойчивости [1], что дает основания предполагать, что построенные схемы адекватно реагируют на кризис равновесного состояния, а именно на отрыв капли от кромки капилляра (разрыв перемычки). Следует отметить, что в случае больших и малых чисел Бонда итерационная сплайн-схема оказалась более точна, чем конечно-элементная схема.

Литература

1. *Мышкис А. Д., Бабский В. Г. и др.* Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости.—Киев: Наукова думка, 1992.—592 с.
2. *Polevikov V. K.* Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces // Comp. Methods in Appl. Math.—2004.—Vol. 4, № 1.—C. 66–93.
3. *Горбачева Ю. Н., Полевиков В. К.* Численное решение задачи об устойчивости жидкой перемычки между коаксиальными цилиндрами // Информатика.—2013.— № 4.—С. 36–44.
4. *Dingle N. M., Tjiptowidjojo K., Basaran O. A., Harris M. T.* A finite element based algorithm for determining interfacial tension (γ) from pendant drop profiles // J. of Colloid and Interface Science.—2005.—Vol. 286, № 2.—P. 647–660.

ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ И РЕШЕТОЧНО-НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Д. Т. Дзадзаева (Россия, Владикавказ; СОГУ),
Плиев М. А. (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

В докладе дан обзор некоторых результатов касающихся мажорируемых ортогонально аддитивных операторов, (см. [1, 2, 3]). Пусть V — решеточно нормированное пространство и F — векторное пространство над полем действительных чисел. Оператор $T : V \to F$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(x + y) = T(x) + T(y)$, для любых дизъюнктных $x, y \in V$. Пусть V, W — решеточно нормированные пространства. Пространство мажорируемых ортогонально аддитивных операторов из V в W обозначается через $M_U(V, W)$.

Теорема. *Пусть (V, E) — решеточно нормированное пространство с разложимой нормой, а (W, F) — пространство Банаха — Канторовича. Тогда $M_U(V, W)$ является пространством Банаха — Канторовича.*

Литература

1. *Ben Amor M. A., Popov M.* Laterally continuous part of an abstract Uryson operator // Int. J. of Math. Analysis.—2013.—Vol. 7, № 58.—P. 2853–2860.
2. *Pliev M., Popov M.* Narrow orthogonally additive operators // Positivity.—DOI 10.1007/s11117-013-0268.
3. *Pliev M., Popov M.* Dominated Uryson operators // Int. J. of Math. Analysis.—2014.—Vol. 8, № 22.—P. 1051–1059.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-91339.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕКАНОНИЧЕСКИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

С. Б. Климентов

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Обозначим через $D = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z-плоскости, E, $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга D; $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

Рассмотрим в $\overline{D}$ общую равномерно эллиптическую систему первого порядка в комплексной записи:

$$\partial_{\bar{z}} w - q_1(z)\partial_z w - q_2(z)\partial_{\bar{z}}\overline{w} + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0, \tag{1}$$

где $A(z), B(z) \in L_s(\overline{D})$, $s > 2$, $q_1(z), q_2(z) \in W^1_s(\overline{D})$.

Определение. Будем говорить, что решение $w(z)$ системы (1) принадлежит классу $H_p(q_1, q_2, A, B)$, $p > 0$, если оно для некоторой положительной постоянной $M_p(w) < +\infty$ удовлетворяет условию

$$\mu(\rho, w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left| w\left(\rho e^{i\sigma}\right)\right|^p d\sigma \leqslant M_p(w), \quad 0 \leqslant \rho < 1, \quad \rho e^{i\sigma} = z \in D.$$

Квазиконформным диффеоморфизмом уравнение (1) приводится к каноническому виду. При этом краевое условие Римана — Гильберта соответствующим образом преобразуется, причем в случае разрывного коэффициента краевого условия его индекс, вообще говоря, меняется. В нижеследующей теореме 1 фигурирует индекс преобразованного краевого условия. В предположениях [1] о краевом условии Римана — Гильберта и тех же обозначениях, справедлива

Теорема 1. *Если $\overset{(p)}{\varkappa} \geqslant 0$, то тогда однородная задача Римана — Гильберта имеет точно $\overset{(p)}{\varkappa} + 1$ линейно независимых в вещественном смысле решений класса $H_p(q_1, q_2, A, B)$, $p > 1$, а неоднородная задача разрешима в $H_p(q_1, q_2, A, B)$ при любой правой части краевого условия $g(t) \in L_p(\Gamma)$.*

Если $\overset{(p)}{\varkappa} < 0$, однородная задача не имеет ненулевых решений класса $H_p(q_1, q_2, A, B)$, $p > 1$, а неоднородная разрешима единственным образом тогда и только тогда, когда выполнены $k = -\overset{(p)}{\varkappa} - 1$ (вещественных) линейных условий на свободный член $g(t)$ краевого условия.

«Побочным продуктом» является следующий вариант теоремы Келлога для обобщенного уравнения Бельтрами. Рассмотрим в области D_z уравнение

$$\partial_{\bar{z}} w - q_1(z)\partial_z w - q_2(z)\overline{\partial_z w} = 0, \quad |q_1| + |q_2| \leqslant q_0 = \text{const} < 1, \tag{2}$$

где $q_1(z), q_2(z) \in W^k_p(\overline{D}_z)$, $k = 1, 2, \ldots$, $p > 2$.

Теорема 2. *Пусть* $w = w(z)$ *— гомеоморфное отображение области* $D_z \in W_p^{k+1-\frac{1}{p}}$ *на область* $G_w \in W_p^{k+1-\frac{1}{p}}$*, причем* $w(z)$ *— решение уравнения* (2)*. Тогда* $w(z)$ *продолжается до гомеоморфизма* $\overline{D}_z$ *на* $\overline{G}_w$*, причем* $w(z) \in W_p^{k+1}(\overline{D}_z)$*, а обратное отображение принадлежит классу* $W_p^{k+1}(\overline{G}_w)$*.*

Литература

1. *Klimentov S. B.* Riemann–Hilbert boundary value problem for generalized analytic functions in Smirnov classes // Global and Stochastic Analysis. Mind Reader Publ.—2011.—Vol. 1, № 2.—P. 217–240.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ АНАЛИЗ: ИСТОКИ И РЕЗУЛЬТАТЫ

А. Г. Кусраев

(Россия, Владикавказ; ЮМИ, СОГУ)

1. *Булевозначным анализом* называют аппарат исследования произвольных математических объектов, основанный на сравнительном изучении их вида в двух моделях теории множеств, конструкции которых основаны на различных булевых алгебрах. В качестве этих моделей фигурируют классический канторов рай в форме *универсума фон Неймана* и специально построенный *булевозначный универсум*, в котором теоретико-множественные понятия и утверждения получают нетрадиционные толкования. Одновременное использование двух моделей для изучения одного объекта — фамильная черта так называемых *нестандартных методов* современной математики. В этой связи булевозначный анализ принято относить к разновидностям нестандартного анализа.

2. Своим возникновением булевозначный анализ обязан выдающемуся достижению П. Дж. Коэна, установившему в начале 1960-х годов совместимость отрицания гипотезы континуума CH с аксиомами теории множеств Цермело — Френкеля ZFC. Вместе с более ранним результатом К. Гёделя о совместимости CH с ZFC, установленный П. Дж. Коэном факт означает независимость CH от обычных аксиом ZFC. П. Дж. Коэну удалось предложить новый мощный способ построения моделей ZFC, названный им *методом форсинга* [1]. Стремление облегчить трудности в восприятии результатов и методов П. Дж. Коэна привело Д. Скотта и Р. Соловея к построению *булевозначных моделей* ZFC, обладающих привлекательной наглядностью с точки зрения классических математиков и в то же время приспособленных для получения теорем о независимости. Аналогичные модели были построены в тот же период П. Вопенкой, см. [2, 3].

3. *Проблема континуума* была впервые поставлена Г. Кантором в 1878 г. Она состоит в том, верна или не верна следующая гипотеза континуума: *любое подмножество множества действительных чисел либо конечно, либо счетно, либо континуально.* Д. Гильберт, выступая с докладом на Втором международном конгрессе по математике, который состоялся в Париже в 1900 г., дал перечень основных нерешенных проблем в математике, которые предстоит решать в XX в. Список возглавляла проблема континуума Кантора. Оставаясь открытой до 1961 г., она дала толчок глубоким исследованиям в основаниях математики.

4. Первые математические труды Г. Кантор относились к теории чисел. Он защитил докторскую диссертацию (PhD) в 1867 г. Затем по предложению Э. Гейне он занялся *проблемой единственности тригонометрического ряда*: *если тригонометрический ряд сходится к нулю, то следует ли отсюда, что все коэффициенты ряда равны нулю?* В 1970 г. Г. Кантор получил положительное решение этой проблемы. При этом имелась в виду сходимость во всех точках, но можно подразумевать сходимость во всех точках вне некоторого — *исключительного* — множества. Тогда ответ существенно зависит от свойств этого исключительного множества. Изучение свойств исключительных множеств, предпринятое в работе [4], привело впоследствии Г. Кантора к одному из его наиболее фундаментальных и оригинальных открытий — идее *трансфинитных чисел.* В дальнейшем Г. Кантор тригонометрическими рядами не занимался. С публикации [5] начинается цикл его теоретико-множественных работ. Гипотеза континуума была впервые высказана им в работе [6].

5. Первые шаги в булевозначном анализе принадлежат Е. И. Гордону [7] и Г. Такеути [8]. Дальнейший прогресс отражен в [3, 9]. В следующей таблице приведены некоторые проблемы, решенные методами булевозначного анализа.

Проблема	**Постановка (автор, год)**	**Посредством БА сводится к**	**Решение (автор, год)**
Внутренняя характеризация субдифференциалов	С. С. Кутателадзе, 1976	Слабо компактные выпуклые множества функционалов	Кусраев Кутателадзе 1982
Дезинтегрирование в пространствах Канторовича	А. Д. Иоффе В. Л. Левин M. Neumann 1972/1977	Теоремы Хана — Банаха и Радона — Никодима	Кусраев 1984
Проблема Капланского: однородность AW^*-алгебр типа I	I. Kaplansky 1953	Однородность алгбры $B(H)$, где H гильбертово пространство	Ozawa 1984
Проблема Викстеда: Порядковая ограниченность d-гомоморфизмов	A. Wickstead 1983	Функциональное уравнение Коши	Гутман, 1995 Кусраев, 2006
Магарамово расширение положительного оператора	W. Luxemburg A. Schep 1978	Схема Даниеля построения интеграла	Акилов Колесников Кусраев, 1988
Классификация инъективных банаховых решеток	H. P. Lotz D. I. Cartwright 1975	Классификация AL-пространств (L_1 пространств)	Кусраев 2012

Литература

1. *Коэн П. Дж.* Теория множеств и континуум-гипотеза.—М.: Мир, 1973.—347 с.
2. *Bell J. L.* Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—N. Y. etc.: Clarendon Press, 1985.—xx+165 p.
3. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.—526 с.
4. *Cantor G.* Über die Ausdehenung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reien // Math. Ann.—1872.—Bd. 5.—S. 123–132.
5. *Cantor G.* Uber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen // J. Reine und Angew. Math.—1874.—Bd. 77.—S. 258–262.
6. *Cantor G.* Ein Beitrag zur Mannigfaltigketslehre // J. reine und angew. Math.—1878.—Bd. 84.—S. 242–258.
7. *Гордон Е. И.* Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 237, № 4.—С. 773–775.
8. *Takeuti G.* Two Applications of Logic to Mathematics.—Tokyo–Princeton: Iwanami Publ. and Princeton Univ. Press, 1978.—137 p.
9. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: SMI, 2013.—328 с.

ОБ АСИМПТОТИКЕ ТОЧЕК КОМПЛАНАРНОСТИ В ТЕОРЕМЕ ПЕАНО

Ю. Г. Никоноров

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

В этом докладе представляется начало исследования асимптотики точек промежуточного значения в классической теореме Пеано. Соответствующий круг вопросов возник в результате исследования задач, связанных с гипотезой В. К. Ионина об асимптотике точек среднего значения в первой интегральной теореме о среднем и различным ее обобщениям (см. подробности в работе [1], а также в более поздних работах [2–4, 6] и в библиографии к ним).

Здесь мы пытаемся найти адекватную формулировку соответствующим аналогам для кривых в многомерном евклидовом пространстве. Начнем обсуждение с несколько необычной формулировки теоремы Пеано о промежуточном значении для системы функций.

Теорема (теорема Пеано). *Пусть функции $f_1, \dots, f_{n+1} : (a,b) \to \mathbb{R}$ дифференцируемы m раз, где $1 \leqslant m \leqslant n$. Тогда для любых точек $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ из интервала (a,b) существует такая точка $\eta \in (x_1, x_{n+1})$, что выполнено равенство*

$$\det \begin{pmatrix} f_1^{(m)}(\eta) & \cdots & f_{n+1}^{(m)}(\eta) \\ f_1(x_2) - f_1(x_1) & \cdots & f_{n+1}(x_2) - f_{n+1}(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x_{n+1}) - f_1(x_1) & \cdots & f_{n+1}(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_1) \end{pmatrix} = 0.$$

Доказательство этой теоремы получается последовательным применением теоремы Ролля к специальным образом подобранной функции. В оригинальной работе Пеано (см. с. xxii в [5]) акцентируется внимание только на случае $m = n$.

Обозначим через $\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ верхнюю грань таких точек η на отрезке $[x_1, x_{n+1}] = [m, M]$. Очень общая постановка интересующего нас вопроса такова: *Что можно сказать про асимптотику величины $\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ при $|x_{n+1} - x_1| \longrightarrow 0$?* Понятно, что поставленный таким образом вопрос нуждается в конкретизации.

Дадим естественную геометрическую интерпретацию для случая $m = 1$. Евклидово пространство $\mathbb{E}^{n+1}$ отождествляется с $\mathbb{R}^{n+1}$ посредством выбора некоторой декартовой системы координат. По условию теоремы Пеано имеется параметрическая дифференцируемая кривая $\gamma : (a,b) \to \mathbb{E}^{n+1}$, где $\gamma(t) = \big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_{n+1}(t)\big)$ и $n+1$ точка $\gamma(x_1)$, $\gamma(x_2)$, …, $\gamma(x_{n+1})$ на ней. Число η характеризуется тем, что касательный вектор к кривой γ в точке $\gamma(\eta)$ параллелен (некоторой) гиперплоскости π, проходящей через точки $\gamma(x_i)$, $i = 1, \dots, n+1$ (поскольку эти точки не обязаны быть в общем положении, то через них может проходить несколько гиперплоскостей). Для наперед выбранных точек $\gamma(x_i)$ точку $\gamma(\eta)$ с указанным свойством будем называть *точкой компланарности.* Точка η заведомо годится, если $\gamma'(\eta)$ — нулевой вектор. Чтобы избежать таких тривиальных случаев, *будем предполагать в дальнейшем, что* $\gamma'(t) \neq 0$ *при* $t \in (x_1, x_{n+1})$.

Далее мы фиксируем точку x_1 и рассматриваем вопрос о получении нетривиальных асимптотических характеристик величины $\xi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ (верхней грани на отрезке $[x_1, x_{n+1}]$ точек η с указанным свойством) при $x_{n+1} \to x_1$. Сразу следует отметить, что при $n \geqslant 2$ *стремление* x_{n+1} *к* x_1 *можно организовать по-разному*, поскольку можно наложить какие-то дополнительные ограничения на поведение промежуточных точек $x_2, \ldots, x_n$.

В докладе обсуждаются некоторые результаты и разнообразные примеры, а также ставятся нерешенные задачи.

Литература

1. *Никоноров Ю. Г.* Об интегральной теореме о среднем // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 6.—С. 150–152.
2. *Иванов В. В., Никоноров Ю. Г.* Асимптотика точек Лагранжа в формуле Тейлора // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 36, № 1.—С. 86–92.
3. *Никоноров Ю. Г.* Асимптотика точек касания плоских кривых // Мат. тр.—2011.—Т. 14, № 1.—С. 141–157.
4. *Никоноров Ю. Г.* Асимптотика точек среднего значения в теореме Шварца для разделенных разностей // Мат. тр.—2014.—Т. 17, № 1.—С. 145–174.
5. *Genocchi A.* Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale, pubblicato con aggiunte dal Dr. Giuseppe Peano.—Turin: Bocca, 1884.—xxxii+338 p.—(In Italy).
6. *Nikonorov Yu. G.* Asymptotic behavior of support points for planar curves // J. Math. Anal. Appl.—2012.—Vol. 391, № 1.—P. 147–158.

МНОГОМЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВИНЕРА-ХОПФА И ТЕПЛИЦА В НЕКОТОРЫХ СЧЕТНО-НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. Э. Пасенчук (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Т. Н. Пасенчук (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Обозначим через $s(Z^n)$, $n \in N$ линейное пространство относительно покоординатных линейных операций, состоящее из всевозможных последовательностей, занумерованных элементами Z^n. Определим на элементах $s(Z^n)$ оператор проектирования $P_+ : (P_+\phi)_j = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}(1 + \operatorname{sign} j_k)\phi_j$, $j = (j_1, j_2, \ldots, j_n) \in Z^n$, предполагая при этом, что $\operatorname{sign} 0 = 1$. Положим $P_- = I - P_+$ и $Q = JP_+J$, $(J\phi)_j = \phi_{-j}$, $j \in Z^n$. В пространстве $s(Z^n)$ выделим подпространство $l\{m\} = \Big\{\phi = \{\phi_j\}_{j\in Z^n} : \sum_j (|j| + 1)^m |\phi_j| < \infty\Big\}$. Это подпространство является банаховым пространством относительно линейных операций, заимствованных из $s(Z^n)$ и нормы $\|\phi\|_m = \sum_j (|j|+1)^m |\phi_j|$. В линейном пространстве $l\{\infty\} = \bigcap_{m\in Z^n_+} l\{m\}$ введем топологию счетно-нормированного пространства с порождающей системой норм $\|\phi\|_m$, $m \in Z^n_+$. Положим: $l_\pm\{m\} = P_\pm(l\{m\})$, $\tilde{l}_-\{m\} = Q(l\{m\})$, $m \in Z^n \bigcup\{\infty\}$. Каждому элементу $\phi \in l\{m\}$ поставим в соответствие функцию $a(\xi) = \sum_{j\in Z^n} a_j \xi^j$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \Gamma^n$. Положим $W_m(\Gamma^n) = L(l\{m\})$, $W^\pm_m(\Gamma^n) = L(l_\pm\{m\})$,$\tilde{W}^-_m(\Gamma^n) = L(\tilde{l}_-\{m\})$. В случае конечного m в пространствах $W_m(\Gamma^n)$, $W^\pm_m(\Gamma^n)$ введением нормы $|a(\xi)|_m = \|L^{-1}(a(\xi))\|_m$ определена топология банаховых пространств. В пространствах $W_\infty(\Gamma^n)$, $W^\pm_\infty(\Gamma^n)$, $\tilde{W}^-_\infty(\Gamma^n)$ определена счетно-нормированная топология с определяющим набором норм $|\bullet|_m$, $m \in Z^n$.

Пусть $a = \{\alpha_j\} \in S(Z^n)$ определим, пока формально, оператор Винера-Хопфа $W_a : l_+\{m\} \to l_+\{m\}$, $m \in Z^n \bigcup\{\infty\}$ при помощи формулы

$$(W_a\phi)_j = \sum_{k\in Z^n_+} \alpha_{j-k}\phi_k, \quad j \in Z^n_+. \tag{1}$$

Если $a \in l\{m\}$, то нетрудно видеть, что оператор W_a ограничен и ему может быть поставлена в соответствие функция $a(\xi) = L(a)$. Функцию $a(\xi)$ называют символом оператора W_a. В этом случае оператор (1) подобен оператору Теплица $T_a : W^+_m(\Gamma^n) \to W^+_m(\Gamma^n)$, действующему по формуле

$$(T_a\Phi^+)(\xi) = P^+ a(\xi)\Phi^+(\xi), \quad \xi \in \Gamma^n, \tag{2}$$

где $\Phi^+(\xi) = L(\phi)$.

Выделим в пространстве $s(Z^n)$ подпространство $QCs(Z^n)$, состоящее из последовательностей $a = \{\alpha_j\}_{j\in Z^n}$: $\alpha_j = 0$, $j \notin (Z_- \bigcup\{0\})^n$ и $|\alpha_j| \leqslant C(|j| + 1)^{m_0}$ для некоторых $C > 0$, $m_0 \in Z_+$.

Теорема 1. *Оператор $W_a : l_+\{\infty\} \to l_+\{\infty\}$, для которого порождающая последовательность $a \in Qs(Z^n)$, ограничен тогда и только тогда, когда найдутся $c > 0$ и $m_0 \in Z_+$ так, что $|\alpha_j| \leqslant c(|j| + 1)^{m_0}$, т. е. когда $a \in QCs(Z^n)$.*

Пусть $a \in QCs(Z^n)$, положим $a(\xi) = \sum_j \alpha_j \xi^j$, $\xi \in (D^-)^n$ и

$$(T_a\phi)(\xi) = \left(P^+(a \circ \phi)\right)(\xi), \tag{3}$$

где $P^+(a(\xi) \circ \phi(\xi)) = L(W_a\phi)$.

Оператор (3) будем называть оператором Теплица, а функцию $a(\xi) = L(a)$, $\xi \in (D^-)^n$ — его символом.

Теорема 2. *Пусть $a(\xi) \in L(QCs(Z^n))$. Для операторов $W_a : l_+\{\infty\} \to l_+\{\infty\}$ и $T_a : W^+_\infty(\Gamma^n) \to W^+_\infty(\Gamma^n)$ следующие условия равносильны*

1) W_a, T_a — нетеровы;

2) W_a, T_a — обратимы;

3) $a(\xi) \in GL(QCs(Z^n))$.

Пусть $a(\xi) = a(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$ функция, аналитическая в области $(D^-)^n$. Рассмотрим следующие n семейств функций $a_k(t, \lambda) = a(t, \ldots, t, \lambda t, t, \ldots, t)$, $t \in D^-$; $\lambda \in \Gamma$; $k = 1, 2, \ldots, n$, порожденных функцией $a(\xi)$. Функции $a_k(t, \lambda)$, $t \in D^-$; $\lambda \in \Gamma$; $k = 1, 2, \ldots, n$ будем называть кследамиǌ функции $a(\xi)$.

Пусть функция $a(t) \in W_\infty(\Gamma)$ имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков. Назовем суммарным числом нулей и будем обозначать n_a количество нулей этой функции на Γ с учетом кратностей. Сингулярным индексом функции $a(t)$ назовем следующий функционал $\kappa_c(a) = v.p.\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{a'(t)}{a(t)}\,dt$.

Теорема 3. *Пусть*

$$c(\xi) = (a \circ b^{-1})(\xi), \quad a \in \tilde{W}^-_\infty(\Gamma^n), \quad b \in \tilde{W}^-_\infty(\Gamma^n) \bigcap GL(QCs(Z^n)).$$

Каждый из операторов $W_c : l_+\{\infty\} \to l_+\{\infty\}$, $T_c : W^+_\infty(\Gamma^n) \to W^+_\infty(\Gamma^n)$ с символом $c(\xi)$ нетеров (обратим) тогда и только тогда, когда «следы» функций $a(\xi), b(\xi)$ удовлетворяют условиям:

1. *$a_k(t, \lambda) \neq 0$, $t \in D^-$, $\lambda \in \Gamma$; $b_k(t, \lambda) \neq 0$, $t \in D^-$, $\lambda \in \Gamma$,*

2. *каждая из функций $a_k(t, \lambda)$, $b_k(t, \lambda)$ имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков при любом фиксированном $\lambda \in \Gamma$,*

3. *суммарные числа нулей и сингулярные индексы функций $a_k(t, \lambda)$ связаны соотношениями*

$$\kappa_c(a_k(\lambda)) + n_{a_k(\lambda)} = 0, \quad \kappa_c(b_k(\lambda)) + n_{b_k(\lambda)} = 0, \quad \lambda \in \Gamma,\ k = 1, 2, \ldots n.$$

При выполнении условий 1)–3) обратные операторы имеют вид:

$$(W_c)^{-1} = W_{c^{-1}}, \quad (T_c)^{-1} = T_{c^{-1}}.$$

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ ПЭЛИ [1]

Е. М. Семенов

(Россия, Воронеж; ВГУ)

Банахово пространство E измеримых на $[0,1]$ функций с мерой Лебега называется перестановочно-инвариантным (кратко r. i.) или симметричным, если E есть банахова решетка с естественным отношением порядка и у равноизмеримых функций нормы одинаковы. Как обычно, мы также будем предполагать, что E сепарабельно или максимально, т. е. E совпадает со вторым двойственным пространством E'', и что $\|\text{æ}_{[0,1]}\|_E = 1$, где $\text{æ}_e(t)$ есть характеристическая функция измеримого подмножества $e \subset [0,1]$. Тогда $L_\infty \subset E \subset L_1$ и $\|x\|_{L_1} \leqslant \|x\|_E \leqslant \|x\|_{L_\infty}$ для всех $x \in L_\infty$. В любом r. i. пространстве ограничены операторы подобного преобразования аргумента $\sigma_\tau x(t) = x(t/\tau)$ для $t \in [0, \min(1,\tau)]$ и $\sigma_\tau x(t) = 0$ для $t \in (\min(1,\tau), 1]$, $\tau > 0$. Числа

$$\alpha_E = \lim_{\tau \to 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}, \quad \beta_E = \lim_{\tau \to \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}$$

называются индекса Бойда r. i. пространства E. Всегда $0 \leqslant \alpha_E \leqslant \beta_E \leqslant 1$.

Система функций

$$\chi_0^0(t) = 1, \quad \chi_n^k(t) = \text{æ}_{((k-1)2^{-n},(k-\frac{1}{2})2^{-n})}(t) - \text{æ}_{((k-\frac{1}{2})2^{-n},k2^{-n})}(t),$$
$$1 \leqslant k \leqslant 2^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

называется системой Хаара. Обозначим через Ω множество индексов системы Хаара, а через $c_{n,k}(x)$ коэффициенты Фурье — Хаара функции $x \in L_1$. Функция

$$Px(t) = \left(\sum_{n,k \in \Omega} \Big(c_{n,k}(x) \chi_n^k(t) \Big)^2 \right)^{1/2}$$

называется функцией Пэли функции x, а пространство с нормой $\|x\|_{P(E)} = \|Px\|_E$ называется пространством Пэли. Если $0 < \alpha_E \leqslant \beta_E < 1$, то $P(E)$ и E совпадают как множества и их нормы эквивалентны. Поэтому основное внимание уделено r. i. пространствам, для которых $\alpha_E = 0$ или $\beta_E = 1$.

Пространство $P(E)$ является r. i. тогда и только тогда, когда $E = L_2$ с совпадением норм, $P(E)$ является r. i. пространством с точностью до эквивалентности тогда и только тогда, когда $0 < \alpha_E \leqslant \beta_E < 1$. Вложение $P(E) \subset E$ ($P(E) \supset E$) справедливо тогда и только тогда, когда $\alpha_E > 0$ ($0 < \alpha_E \leqslant \beta_E < 1$). Поэтому вложение $P(E) \supset E$ влечет совпадение $P(E)$ и E как множеств и эквивалентность их норм. Оператор ортогонального проектирования на линейную оболочку системы Радемахера ($r_n(t) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi t$) имеет единичную норму в любом пространстве Пэли $P(E)$. Найдены критерии сепарабельности и рефлексивности пространств Пэли.

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14–01–00141.

Секция I

Математический анализ и его приложения

STOCHASTIC INTEGRATION IN VECTOR LATTICES[1]

Grobler Ja. J.
(South Africa, Potchefstroom; NWU (Potchefstroom Campus))

We consider a perfect Dedekind complete vector lattice $\mathfrak{E}$ on which there exists a conditional expectation. We define the notion of an adapted stochastic process on this space and in particular that of a Brownian motion $(B_t)_{t\in[a,b]}$. Using a Bochner integral approach, we show how to define the Itô integral $\int_a^b X_t\,dB_t$ for all stochactic processes $(X_t)_{t\in[a,b]}$ belonging to a space $L^2([a,b],\mathcal{L}^2)$ which is a subset of the set consisting of measurable adapted stochastic processes on $\mathfrak{E}$. This work is a necessary step in the development of probability theory and in particular stochastic processes in vector lattices (see for instance the literature quoted below).

Reference

1. *Grobler J. J.* Continuous stochastic processes in Riesz spaces: the Doob-Meyer decomposition // Positivity.—2010.—Vol. 14.—P. 731–751.
2. *Grobler J. J.* Doob's optional sampling theorem in Riesz spaces // Positivity.—2011.—Vol. 15.—P. 617–637.
3. *Grobler J. J.* Jensen's and martingale inequalities in Riesz spaces // Indagationes Math.—2014.—Iss. 24.—P. 275–295.
4. *Grobler J. J.* The Kolmogorov–Čentsov theorem and Brownian motion in vector lattices // J. Math. Anal. Appl.—2014.—Vol. 410.—P. 891–901.
5. *Grobler J. J.* Corrigendum to The Kolmogorov–Čentsov theorem and Brownian motion in vector lattices // J. Math. Anal. Appl.—2014.—Vol. 410.—P. 891–901.—(DOI: 10.1016/j.jmaa.2014.05.068).
6. *Kuo W.-C., Labuschagne C. C. A., Watson B. A.* Discrete-time stochastic processes on Riesz spaces // Indagationes Math.—2004.—Iss. 15.—P. 435–451.
7. *Kuo W.-C., Labuschagne C. C. A., Watson B. A.* Conditional expectation operators on Riesz spaces: Discrete-time stochastic processes on Riesz spaces // J. Math. Anal. Appl.—2005.—Vol. 303.—P. 509–521.
8. *Labuschagne C. C. A., Watson B. A.* Discrete time stochastic integrals in Riesz spaces // Positivity.—2010.—Vol. 14.—P. 859–875.

[1]This research was done in collaboration with C. C. A. Labuschagne.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

MEASURE ON CONJUGATION LOGICS

M. C. Matvejchuk
(Russia, Kazan; KSTU)

Let H be a complex Hilbert space with the Hilbert product $(\cdot,\cdot)$. Let $B(H)$ be the set of all bounded operators on H. Let J be a *conjugation* operator in H [1], i. e. 1) $J^2 = I$, 2) $(Jx, Jy) = (y, x)$, for all x, $y \in H$. Note by 1), and 2), $J(\lambda x + \beta y) = \overline{\lambda} Jx + \overline{\beta} Jy$, for all λ, $\beta \in \mathcal{C}$ and for all x, $y \in H$.

Put $\langle x, y\rangle := (Jx, y)$. For any $A \in B(H)$ there exists unique $A^{\#} \in B(H)$ such that $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^{\#}y\rangle$ for all x, $y \in H$. An operator $A \in B(H)$ is said to be *J-self-adjoint*, if $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$, $\forall\, x, y \in H$. Any bounded J-self-adjoint projection (=idempotent) P is said to be *J-projection*.

Let $\mathcal{M}$ be a von Neumann algebra on H, let $\mathcal{M}' := \{B \in B(H) : AB = BA, \forall\, A \in \mathcal{M}\}$, and let $\mathcal{Z} := \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ be the the center of $\mathcal{M}$. Let us denote by $\mathcal{M}^{Jc}$ ($\mathcal{M}^{or}$) the set of all J-self-adjoint (orthogonal, respectively) projections from $\mathcal{M}$. Any one-dimensional J-projection has the form $(\cdot, Jx)x$, where $(x, Jx) = 1$. With respect to the standard relations, namely: the ordering $P \leqslant_1 Q$ iff $PQ = QP = P$, the orthogonal relation $P \perp Q$ iff $PQ = QP = 0$, and the orthocomplementation $P^{\perp} := I - P$ for all P, Q the set $\mathcal{M}^{Jc}$ is a *quantum logic* of projections. The logic $\mathcal{M}^{Jc}$ is said to be *conjugation* logic.

A von Neumann algebra $\mathcal{M}$ on H is said to be a *von Neumann J-algebra* if $A \in \mathcal{M}$ implies $A^{\#} \in \mathcal{M}$. Let $\mathcal{M}$ be a von Neumann J-algebra. Then: i) its center $\mathcal{Z}$ and $\mathcal{M}'$ are von Neumann J-algebras also.

Well-known classification of von Neumann algebras in a Krein space [2]. A similar classification is possible in a space with conjugation operator. Namely [3].

A commutative von Neumann J-algebra $\mathcal{Z}$ is said to be a *type* (A) algebra if $P = P^{\#}$ for all $P \in \mathcal{Z}^{or}$. A commutative von Neumann J-algebra $\mathcal{Z}$ is said to be a *type* (B) algebra if $\mathcal{Z}$ contains a pair F, $F^{\#} \in \mathcal{Z}^{or}$ such that $F + F^{\#} = I$. A von Neumann J-algebra $\mathcal{M}$ is said to be of *type* (A) (*type* (B)) if its center $\mathcal{Z}$ is of type (A) algebra (of type (B) algebra, respectively).

Let B be a quantum logic of projections. The function $\mu : B \to \mathcal{R}$ is said to be the *measure*, if $\mu(p) = \sum_i \mu(p_i)$ for any representation $p = \sum_i p_i$, $p_i p_j = 0$, $i \neq j$. (The sum being understood in the weakly sense). Non negative measure μ is said to be *probability measure* (=*state*) if $\mu(I) = 1$. Let μ be a non negative measure. It is clear that if $\mu(I) > 0$ then $\frac{\mu(\cdot)}{\mu(I)}$ is a probability measure.

We are starting with Lemma 1.

Lemma 1 [3]**.** *Let $\mathcal{Z}$ be a commutative von Neumann J-algebra. Then there exists unique maximal projection $E \in \mathcal{Z}^{or}$ such that $P \leqslant_1 E$, $P \in \mathcal{Z}^{pr}$ implies $P = P^{\#}$. In addition there exists* (*non unique, in general!*) *projection $F \in \mathcal{Z}^{pr}$ such that $F + F^{\#} = I - E$.*

By Lemma 1, if the set of points of the spectrum of $\mathcal{Z}$ is equal to three, then $\mathcal{Z} = \{\lambda E + \beta F + \gamma F^{\#},\ \lambda, \beta, \gamma \in \mathcal{C}\}$. Here E, F from Lemma 1.

Let $\mathcal{M}$ be a von Neumann J-algebra of type (B). A pair F, $F^{\#}$ of orthogonal projections in $\mathcal{Z}$ satisfying $F + F^{\#} = I$ is assumed to be fixed. Set $\mathcal{B} := FB(H)F + F^{\#}B(H)F^{\#}$. It is clear that $\mathcal{B}$ is a von Neumann J-algebra of type (B) and $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$.

Theorem 2. *Let $\mathcal{Z}$ be a commutative von Neumann J-algebra and the set of points of the spectrum of $\mathcal{Z}$ is equal to three. Then the probability measure μ on the conjugation logic $(\mathcal{Z}')^{Jc}$ exists if and only if:*

1) *or* $\dim EH < \infty$ *and* $\dim E^{\perp}H = \infty$. *Then* $\mu(P) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(EP)$ *if* $n := \dim EH \geqslant 3$;

2) *or* $\dim EH = \infty$ *and* $\dim E^{\perp}H < \infty$. *Then* $\mu(P) = \frac{1}{m}\mathrm{tr}(E^{\perp}P)$ *if* $m := \dim E^{\perp}H \geqslant 6$;

3) *or* $\dim H < \infty$. *Let* $3 \leqslant \dim EH \equiv n$, $6 \leqslant \dim E^{\perp}H \equiv m$, *Then there exists unique number* $a \in [0,1]$ *such that*

$$\mu(P) = \frac{a}{n}\mathrm{tr}(EP) + \frac{1-a}{m}\mathrm{tr}\left(E^{\perp}P\right), \quad \forall\, P. \tag{1}$$

Note that formula (1) is reminiscent of the formula of the paper [4] for the Krein space.

The theorem can be extended to arbitrary von Neumann J-algebra.

Reference

1. *Azizov T. Ya., Iokhvidov I. S.* Linear operators in space with an indefinite metric.—M.: Nauka, 1986.—(Eng. transl.—Wiley, New York, 1989.).
2. *Mel'tser M. M.* On a classification of von Neumann *J*-algebra // Funct. Anal. Appl.—1979.—Vol. 13, № 4.—P. 83–84.—[In Russian].—(Eng. transl.—1979.—Vol. 13, № 4.—P. 305–307.).
3. *Vladova E., Matvejchuk M., Ogai Yu.* On classification of von Neumann algebras in space with conjugation operator // Rus. Mathem.—2014.—№ 4.—P. 1–8.
4. *Marjan Matvejchuk.* Semiconctant measures on hyperbolic logics // Proceed. Amer. Mathem Soc.—1997.—Vol. 125, № 1.—P. 245–250.

CONFORMAL MODULES OF PLANE DOMAINS AND THEIR DISTORTION[1]

S. R. Nasyrov

(Russia, Kazan; KFU)

In recent years, investigation of conformal modules $m(D)$ of doubly-connected plane domains D has attracted increasing interest; in particular, it concerns domains with polygonal boundaries (see, e. g., [2, 3]).

The module is invariant under conformal mappings and is quasiinvariant under quasiconformal ones: *if f is a H-quasiconformal mapping of D onto $\widetilde{D}$, then*

$$\frac{1}{H}\, m(D) \leqslant m(\widetilde{D}) \leqslant H\, m(D).$$

One of the simpliest H-quasiconformal mappings is the stretching along the real axis $f_H : x + iy \mapsto Hx + iy$, $H > 1$. Prof. M. Vuorinen suggested the problem: Investigate how the conformal module of D is changed under the map f_H; in particular, what is asymptotics of the module of $f_H(D)$ as $H \to \infty$?

First we consider a doubly-connected plane domains D satisfying the following conditions: D is of finite area S; the complement of D consists of two components C_1 and C_2, $\operatorname{dist}(C_1, C_2) = d$, and the bounded component contains two points $z_1 = x_1 + iy_1$ and $z_2 = x_2 + iy_2$ such that $|x_1 - x_2| = \delta$.

Theorem 1. *Let $D_H = f_H(D)$. Then*

$$\frac{d^2}{SH} \leqslant m(D_H) \leqslant \frac{S}{4\delta^2 H}.$$

As a corollary, we obtain that under assumptions of Theorem 1

$$m(D_H) \simeq H^{-1}, \quad H \to \infty.$$

Now we will find sufficiently large set of domains D for which $m(D_H) \sim \text{const} \cdot H^{-1}$, $H \to \infty$. Moreover, we will describe the miltiplicative constant in the condition via geometric characteristics of D.

Consider a doubly-connected plane domain D bounded by two curves $\{x + iy : |y| = f(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}$, and $\{x + iy : |y| = g(x),\ c \leqslant x \leqslant d\}$, $c < a < b < d$. Here f is continuous on $[a, b]$; g is continuous on $[c, d]$; $f(x) < g(x)$, $x \in [a, b]$; $f(x) > 0$, $x \in (a, b)$, $g(x) > 0$, $x \in (c, d)$, and $f(a) = f(b) = g(c) = g(d) = 0$. Denote $D_H = f_H(D)$.

Theorem 2. *We have*

$$m(D_H) \sim \frac{1}{2cH}, \quad H \to \infty,$$

[1]The research is supported by Russian Foundation for Basic Research, projects №№ 12-01-97015, 14-01-00351.

where

$$c = \int\limits_a^b \frac{dx}{g(x) - f(x)}.$$

The statement of Theorem 2 admits generalizations for more wide classes of domains. In some particular cases, when boundary curves of D are homothetic rectangles with sides parallel to the coordinate axes or homothetic diamonds with vertices on the axes, asymptotic formulas for $m(D_H)$ were obtained in [1, 3].

We also consider some interesting examples and applications of Theorem 2.

Reference

1. *Dautova D. N.* Asymptotics of modules of diamond-shaped frames // Proc. XII scient. school-conf. for young researchers «Lobachevskiye Chteniya–2013». Proc. of Math. Center after N. I. Lobachevskii.—Kazan: Kazan Math. Soc., 2013.—Vol. 47.—P. 39–40.
2. *Kühnau R.* The conformal module of quadrilaterals and of rings // Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory.—Amsterdam: Elsevier, 2005.—Vol. 2.—P. 99–129.
3. *Nasyrov S. R.* Riemann–Schwarz reflection principle and asymptotics of modules of rectangular frames // Computational Methods and Function Theory.—2014.—13 p.

ПОРЯДКОВО НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И КОНСТРУКЦИЯ ЭКСТЕНСИОНАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Н. М. Абасов
(Россия, Москва; «МАТИ» — РГТУ)

В последнее время меры со значениями в векторных решчтках привлекают внимание многих математиков (см., например, [3] и большое число ссылок, приведенные там, в том числе по векторозначным мерам). Объясняется это прежде всего тем, что такие меры появляются в функциональном анализе естественно.

Мы даем конструкцию одного класса борелевых мер со значениями в K-пространстве. Пусть X некоторое вполне регулярное (или тихоновское) пространство, $\mathfrak{B}(X)$ — его борелева σ-алгебра, а E — K-пространство с единицей $\mathbf{1}$, совпадающей с единицей умножения в нем (см. [2]). Векторзначная борелева вероятность $P : \mathfrak{B}(X) \longrightarrow E$ ($P(X) = 1$) называется экстенсиональной, если из равенства перемешиваний характеристических функций борелевых множеств следует равенство соответствующих перемешиваний вероятностей соответствующих борелевых множеств, на подходящих элементах базы пространства E (см. [1]).

Обозначим через $C_b(X, E)$ пространство ограниченных отображений, переводящих сходящиеся сети пространства X, в порядко сходящиеся сети пространства E. Приводится конструкция, рассматриваемых экстенсиональных, вероятностных борелевых мер P с помощью порядково непрерывных операторов, определенных на $C_b(X, E)$ со значениями в E.

Литература

1. *Абасов Н. М.* Экстенсиональные, K-значные меры в булевозначном анализе // Порядковый анализ и смежные вопросы мат. моделирования: тез. докл. междунар. науч. конф. (Владикавказ, 19–24 июля 2013 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2013.— С. 46.
2. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматлит, 1961.—408 с.
3. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление.—М.: Наука, 2007.— 559 с.

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ[1]

Х. Х. Бурчаев (Россия, Грозный; ЧГУ),
В. Г. Рябых (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Г. Ю. Рябых (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $T = \{t : |t| = 1\}$, $t = e^{i\theta}$ — единичная окружность, A — множество всех функций, аналитических в D.

Будем говорить, что функция $g \in A$, непрерывная на $\bar{D}$, принадлежит а) классу λ_α, $0 < \alpha < 1$, если $|g(te^{ih}) - g(t)| = o(|h|^\alpha)$ (малое условие Липшица); б) классу λ_*, если $|g(te^{ih}) - 2g(t) + g(te^{-ih})| = o(|h|^\alpha)$ (малое условие Зигмунда).

Рассматривается линейный функционал l_ω, $\omega \in A$, над H_p (пространство Харди), $0 < p < \infty$, вида

$$l_\omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_T x(t)\overline{\omega(t)}\, d\theta, \quad x \in H_p.$$

Функция $f \in H_p$ называется экстремальной для l_ω, если $\|f\| = 1$, $l_\omega(f) = \|l_\omega\|$.

Ставится такая задача: изучить свойства экстремальной функции $f(z)$ при заданных ограничениях на ядро $\omega(z)$ (в различных терминах). Подобная задача (или близкая к ней) исследована в ряде работ, в основном, — для $1 \leqslant p < \infty$. Нами рассматривается общий случай $l_\omega \in H_p^*$, $0 < p < \infty$, при достаточно гладком $\omega(z)$.

Пусть $F(z)$ — внешняя, $b(z)$ — внутреняя функция функции $f(z)$.

Теорема 1 [2]. *Пусть $l_\omega \in H_p^*$, $1 \leqslant p < \infty$, $n \geqslant 1$, $\omega^{(n-1)} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha < 1$, тогда $(|F(t)|^p)^{(n-1)} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$. Если $\omega^{(n-1)}(z)$ удовлетворяет условию Зигмунда, то $(|F(t)|^p)^{(n-1)}$ удовлетворяет этому условию.*

Теорема 2. *Пусть $l_\omega \in H_p^*$, $0 < p < 1$. Если при $1/(n+1) < p < 1/n$, $n \geqslant 1$, $\alpha = 1/p - n$ ($p = 1/(n+1)$) производная $\omega^{(n-1)} \in \lambda_\alpha$ (λ_*), то экстремальная функция существует.*

Теорема 3. *Не каждый функционал $l_\omega \in H_p^*$, $0 < p \leqslant 1$, где $\omega(z)$ — многочлен, имеет единственную экстремальную функцию.*

Теорема 4. *Для любого $N = 0, 1, \ldots$ существует многочлен $\omega_N(z)$ степени N, такой, что $l_{\omega_N} \in H_p^*$, $0 < p \leqslant 1$, имеет единственную экстремальную функцию.*

Теорема 5. *$l_\omega \in H_p^*$, $0 < p < 1$. Если при $1/(n+1) < p < 1/n$ ($p = 1/(n+1)$), производная $\omega^{(n-1)} \in \lambda_\beta$, $\alpha = 1/p - n < \beta < 1$ ($\omega^{(n)} \in \lambda_\mu$, $0 < \mu < 1$), то $f^{(n-1)} \in \lambda_\beta$ ($f^{(n)} \in \lambda_\mu$).*

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00065.

Теорема 6. $l_\omega \in H_p^*$, $0 < p < 1$, $\omega(z)$ *— многочлен N-ой степени. Тогда при* $1/(n+1) < p < 1/n$ *функции* $F^p(z)$ *и* $F^p(z)b(z)$ *являются многочленами степени не выше* $2N$. *Если* $p = 1/(n+1)$, *то экстремальная функция* $f(z)$ *— многочлен степени не выше* $(2n+2)N$.

Теорема 7. *Если* $l_\omega \in H_p^*$, $0 < p < \infty$, *функция* $\omega(z)$ *аналитична в* $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, R > 1\}$, *то экстремальная функция аналитична в* D_R.

Теоремы 3, 4 и 6, 7 устанавливаются методом погружения H_p в более широкий класс.

Литература

1. *Carleson L., Jacobs S.* Best approximation by analytic functions // Arciv Math.—1972.—№ 10.—P. 219–229.
2. *Рябых В. Г.* Приближение аналитических функций неаналитическими // Мат. сб.—2006.—Т. 197, № 2.—С. 86–94.
3. *Ferguson T. J.* Extremal problems in Bergman spaces and extension of Ryabykh's theorem // A dissertation submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (Mathematics).—Michigan: Univ. of Michigan, 2011.
4. *Кабайла В.* Некоторые задачи интерполяции в классе H_δ при $\delta < 1$ // Исследования по соврем. проблемам теории функций компл. переменного.—М.: Физматлит, 1961.—С. 180–187.
5. *Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Аналитичность в $\mathbb{C}$ экстремальных функций функционала, образованного полиномом, над пространством Бергмана // Исследования по математическому анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 204–214.—(Мат. форум. Т. 8, ч. 1.).

СИНТЕЗ В ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ЯДРЕ ДВУХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ, ОБРАЗУЮЩИХ СИСТЕМУ ЕДИНИЧНОГО РАНГА

Т. А. Волковая

(Россия, Славянск-на-Кубани; КубГУ (филиал))

Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbf{C}$; $H_\Omega(\theta)$ — опорная функция области Ω в смысле комплексного анализа; H — пространство функций, аналитических в Ω, с топологией равномерной сходимости на компактах; $\pi(z)$ — целая функция минимального типа при порядке $\rho = 1$. Будем предполагать, что функция $\pi(z)$ является целой функцией вполне регулярного роста при некотором уточненном порядке $\rho(r) \to \rho \in (0,1)$ с всюду положительным индикатором. Легко убедиться, что в этом случае существует такая константа $\kappa \geqslant 1$, что вне некоторого множества нулевой относительной меры выполняются оценки $\kappa^{-1}|z| \leqslant \hat{\mu}(|\pi(z)|) \leqslant \kappa|z|$, где $\hat{\mu}(r) = \nu(\ln r)$, ν — обратная к функции $\mu(r) := r^{\rho(r)}$.

Рассматриваем линейный дифференциальный оператор бесконечного порядка $\pi(D)$ как оператор действующий из H в H. Легко убедиться, что он является непрерывным. Говорят, что замкнутое $\pi(D)$-инвариантное подпространство $W \subseteq H$ *допускает спектральный синтез*, если оно совпадает с замыканием в H линейной оболочки корневых элементов оператора $\pi(D)$, содержащихся в W.

Пусть $S := \{S_1, S_2\}$ — система линейных непрерывных функционалов на H с характеристическими функциями $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ соответственно. Рассмотрим замкнутое $\pi(D)$-инвариантное подпространство

$$W_S := \left\{ f \in H : \left\langle S_n, \pi(D)^k f \right\rangle = 0,\ S_n \in S,\ k \in \{0, 1, \dots\} \right\} \subseteq H.$$

Если $S_1 = S_2$, т. е. система S состоит из одного функционала, то подпространство W_S допускает спектральный синтез ($\pi(\zeta) = \zeta^p$ [1], $\pi(\zeta) \in \mathbf{C}[\zeta]$ [2], общий случай [3]). Ниже мы сформулируем одно достаточное условие (в терминах функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$), при котором подпространство $W_S \subseteq H$ будет допускать спектральный синтез и в случае $S_1 \neq S_2$.

Во-первых, считаем, что целые функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ допускают представления $\mathcal{F} = \varphi f F$ и $\mathcal{G} = \varphi g G$ соответственно, где φ, f, F, g, G — некоторые целые функции. Считаем, что функции f, F, g, G являются π-симметричными, т. е. представляются в виде композиций $f := \hat{f} \circ \pi$, $F := \hat{F} \circ \pi$, $g := \hat{g} \circ \pi$, $G := \hat{G} \circ \pi$, где $\hat{f}$, $\hat{F}$, $\hat{g}$, $\hat{G}$ — тоже некоторые целые функции. Пусть $\hat{\Lambda} := \{\hat{\lambda}_i\}$, $\hat{\Gamma} := \{\hat{\gamma}_i\}$ — последовательности нулей функций $\hat{F}$ и $\hat{G}$ соответственно, занумерованные какимлибо образом. Считаем, что все элементы последовательностей $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Gamma}$ лежат вне единичного круга и

$$\Delta := \max \left\{ \sup_{n \in \mathbf{N}} \frac{n}{\hat{\mu}(|\hat{\lambda}_n|)};\ \sup_{n \in \mathbf{N}} \frac{n}{\hat{\mu}(|\hat{\gamma}_n|)} \right\} < +\infty.$$

Во-вторых, считаем, что для индикаторов $h_{f\mathcal{G}}$, $h_{g\mathcal{F}}$ функций $f\mathcal{G} = \varphi fgG$ и $g\mathcal{F} = \varphi fgF$ и некоторой ограниченной тригонометрически выпуклой 2π-периодической функции $h(\theta)$ выполнены равномерные по θ оценки $\max\{h_{f\mathcal{G}}(\theta), h_{g\mathcal{F}}(\theta)\} < h(\theta) < H_\Omega(\theta)$.

Теорема. *Если для некоторого $\delta > 0$, удовлетворяющего условию $h(\theta) + \delta < H_\Omega(\theta)$, нулевые множества $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Gamma}$ можно упорядочить так, что выполнено неравенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln S_n}{\hat{\mu}(t_n)} < -\kappa^{1+2\rho} \left(2\kappa \frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{2}{1-\rho}} (h+\delta),$$

где

$$S_n := \sum_{i \geqslant n} \left| \frac{1}{\hat{\gamma}_i} - \frac{1}{\hat{\lambda}_i} \right|, \quad t_n := \max_{i=1,\dots,n} \max\left\{|\hat{\lambda}_i|, |\hat{\gamma}_i|\right\},$$

$$h = h_{\max} - \min\{h_{\min}; 0\}, \ h_{\max} := \max_\theta h(\theta), \ h_{\min} := \min_\theta h(\theta),$$

то замкнутое $\pi(D)$-инвариантное подпространство $W_S \subseteq H$ допускает спектральный синтез.

Литература

1. *Мерзляков С. Г.* О подпространствах аналитических функций, инвариантных относительно оператора кратного дифференцирования // Мат. заметки.—1986.—Т. 40, № 5.—С. 635–639.
2. *Красичков-Терновский И. Ф.* Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности // Мат. сб.—1991.—Т. 182, № 11.—С. 1559–1588.
3. *Письменный Р. Г.* Главные подмодули и инвариантные подпространства аналитических функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Славянск-на-Кубани, 2010.—104 с.

$L_p - L_q$ — ОЦЕНКИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ЯДРАМИ

М. Н. Гуров (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
В. А. Ногин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Получены $L_p - L_q$ — оценки для широкого класса операторов типа потенциала

$$(K_\theta^\alpha \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta(t)\, e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}}\, \varphi(x-t)\, dt, \tag{1}$$

где $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$, а характеристика $\theta(t)$ задается одним из трех способов:

i) $\theta(t) = a(t')$;

ii) $\theta(t) = a(t')b(|t|)$;

iii) $\theta(t) = a(t')c(|t|)$.

Здесь $a(t')$ $(t' = t/|t|)$ — однородная нулевой степени бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ функция, для которой выполняется условие элиптичности, т. е. $a(t') \neq 0$, $t' \in S^{n-1}$; функция $b(|t|) \in C^{m;\gamma}(\dot{R}^1_+)$ (см. [1, с. 261]); $c(|t|)$ — бесконечно дифференцируемая ограниченная функция, для которой выполняются условия $c(0) \neq 0$ и $c(\infty) \neq 0$.

Для символов операторов с характеристикой, задаваемой равенством i), получены общие представления, на основании которых при помощи техники $p-q$ мультипликаторов описаны выпуклые множества $(1/p\ ; 1/q)$ — плоскости, для точек которых упомянутые операторы ограничены из L_p в L_q. Для указанных операторов в случае $0 < \operatorname{Re}\alpha < n(n-1)/(2(n+1))$ описана $\mathcal{L}$-характеристика.

На основании полученных результатов для операторов (1) с характеристикой i) получены $L_p - L_q$ — оценки для операторов типа потенциала с характеристиками i) и ii).

Литература

1. *Samko S. G.* Hypersingular integrals and their applications. Internat.—London: Taylor & Frances, 2002.—358 p.—(Analytical Methods and Special Functions; Vol. 5).

ПРОБЛЕМА МАЖОРАЦИИ ДЛЯ УЗКИХ АБСТРАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ УРЫСОНА[1]

Д. Т. Дзадзаева
(Россия, Владикавказ; СОГУ)

Ортогонально аддитивные операторы, действующие между векторными решетками, введенные в 1990 г., и в настоящее время остаются объектом интенсивных исследований (см. [1, 2, 3]). Пусть E — векторная решетка и F — векторное пространство над полем действительных чисел. Оператор $T : E \to F$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(x + y) = T(x) + T(y)$ для любых дизъюнктных $x, y \in E$. Порядково ограниченный, оргтогонально аддитивный оператор $T : E \to F$ называется *абстрактным оператором Урысона*. Пусть E, F — векторные решетки, где E безатомна. Оператор $T : E \to F$ называется *порядково узким*, если для любого $e \in E$ существует сеть разбиений $e = f_\alpha \sqcup g_\alpha$ такая, что $(T(f_\alpha) - T(g_\alpha)) \xrightarrow{\text{o}} 0$.

Теорема. *Пусть E, F — векторные решетки, где F — порядкова полна, а E — решетка с проекциями на главные полосы, $T : E \to F$ — абстрактный, порядково узкий оператор Урысона, $0 \leqslant S \leqslant T$. Тогда S — порядково узкий оператор.*

Литература

1. *Ben Amor M. A., M. Popov* Laterally continuous part of an abstract Uryson operator // Int. J. of Math. Analysis.—2013.—Vol. 7, № 58.—P. 2853–2860.
2. *M. Pliev, M. Popov* Narrow orthogonally additive operators // Positivity.—DOI 10.1007/s11117-013-0268.
3. *M. Pliev, M. Popov* Dominated Uryson operators // Int. J. of Math. Analysis.—2014.— Vol. 8, № 22.—P. 1051–1059.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-91339.

ОБ ОПЕРАТОРЕ ПОММЬЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯХ

О. А. Иванова (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
С. Н. Мелихов (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Начиная с середины прошлого века достаточно интенсивно исследуется и применяется оператор Поммье $\triangle_0$, действующий в пространстве Фреше всех функций, аналитических на открытом подмножестве $\bar{\mathbb{C}}$ (М. Г. Хапланов, М. Поммье, Ю. А. Казьмин, Н. И. Нагнибида, Ю. Ф. Коробейник, С. С. Линчук, Н. Е. Линчук, И. Димовский, В. Христов, Ю. С. Линчук, В. Б. Шерстюков и др.).

В докладе пойдет речь об операторе *типа Поммье* $\triangle_0$, действующем в некотором локально выпуклом пространстве E аналитических функций одного комплексного переменного и определяемом следующим образом:

$$\triangle_0(f)(t) := \frac{f(t) - g_0(t)f(0)}{t}, \quad t \neq 0,$$

$$\triangle_0(f)(0) := f'(0) - g_0'(0)f(0),$$

где $f \in E$. При этом функция $g_0 \in E$ такова, что $g_0(0) = 1$. (Первоначально в определении оператора Поммье $g_0 \equiv 1$.)

Изучены свойства оператора $\triangle_0 : E \to E$ и решены следующие задачи, связанные с $\triangle_0$:

1) описаны его коммутанты и циклические элементы;

2) показано, что $\triangle_0$ — это общий вид линейного непрерывного левого обратного к оператору умножения на независимую переменную, действующему в E.

С помощью оператора типа Поммье $\triangle_0$, действующего в счетном индуктивном пределе весовых пространств Фреше целых функций, определяется и исследуется интерполирующий функционал, являющийся аналогом интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева.

ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЯХ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ В КУСОЧНО-ПОСТОЯННОМ ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

М. Д. Ковалёв

(Россия, Москва; МГУ)

Рассматривается одномерная задача перечисления стационарных состояний квантовой частицы в потенциальном поле. Назовем участки постоянного потенциала слоями. В случае их конечного числа крайние слои с необходимостью неограничены. В слое с постоянным потенциалом U_j стационарное состояние квантовой частицы описывается одномерным уравнением Шредингера [1]

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + U_j\Psi = E\Psi,$$

где $\Psi(x)$ — волновая функция, m — масса частицы, E — ее энергия, $\hbar$ — постоянная Планка, x — координата. Стационарным состояниям частицы отвечают решения краевой задачи для этого уравнения, а соответствующие собственные значения энергии E в физике называются энергетическими уровнями частицы в поле. В нашей задаче при конечном числе слоев число энергетических уровней конечно. Чтобы получить собственные функции задачи, хорошо известные решения этих линейных с постоянными коэффициентами дифференциальных уравнений в слоях (экспоненты или синусоиды) сшиваются по условиям непрерывности их и их первых производных на границах слоев. Краевые условия состоят в том, что в крайних неограниченных слоях решение должно быть стремящейся к нулю на бесконечности экспонентой. Пусть потенциалы в крайних слоях равны U_1 и U_{n+1}. Стационарные состояния возможны, лишь если имеется внутренний слой с потенциалом меньшим $\min(U_1, U_{n+1})$.

Основным результатом автора является эффективная формула для подсчета числа энергетических уровней квантовой частицы в произвольном кусочно постоянном потенциальном поле с конечным числом участков постоянного потенциала. Также были получены формулы [2] в актуальной ныне задаче определения числа TE- и TM-мод в многослойных оптических волноводах. Математически последняя задача мало чем отличается от задачи об энергетических уровнях квантовой частицы [3].

Имеются эффективные численные методы решения обоих этих (квантовой и оптической) задач [4]. Однако, в квантовой задаче часто получаются очень близко расположенные друг к другу энергетические уровни. Это осложняет их нахождение численными методами. Значение полученных автором формул состоит в том, что знание числа уровней является серьезным подспорьем при нахождении всех энергетических уровней. Знание числа оптических мод в волноводе в оптической задаче едва ли не более важно, чем знание числа энергетических уровней частицы в квантовой задаче.

Литература

1. *Давыдов А. С.* Квантовая механика.—М.: Наука, 1973.
2. *Ковалев М. Д.* Формулы для числа собственных электромагнитных мод в многослойном планарном волноводе // Физические основы приборостроения.—2011 (спец. вып.).—С. 100–111.
3. *Ковалев М. Д.* Многослойная модель в оптике и квантовой механике // ЖВМ и МФ.—2009.—Т. 49, № 8.—С. 1–14.
4. *Голант Е. И., Голант К. М.* Новый метод расчета спектра и радиационных потерь вытекающих мод многослойных оптических волноводов // Журн. техн. физики.—2006.—Т. 76, вып. 8.—С. 99–107.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

КОНФОРМНО-ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ[1]

М. В. Куркина (Россия, Ханты-мансийск; ЮГУ),
Е. Д. Родионов (Россия, Барнаул; АлтГУ),
В. В. Славский (Россия, Ханты-мансийск; ЮГУ)

Определение. Обозначим через $P_1(R^n)$ множество неотрицательных функций $f : R^n \to R^+$ таких, что конформно-плоская метрика $ds^2 = dx^2/f^2(x)$, $x \in R^n$, имеет неотрицательную одномерную секционную кривизну [1, 2]

$$K(f,\xi) = f(x)d^2f(\xi,\xi) - \frac{1}{2}\|\nabla f\|^2\|\xi\|^2 \geqslant 0.$$

Здесь градиент $\|\nabla f\|^2$ и норма $\|\xi\|$ вычисляется относительно евклидова пространства R^n, вектор ξ произвольный.

Теорема. *Пусть $f \in P_1(R^n)$ тогда для любых трех точек $\{x, x_1, x_2\} \in R^n$ выполняется неравенство*

$$\sqrt{f(x)} \leqslant \sqrt{f(x_1)}\frac{\|x_2 - x\|}{\|x_2 - x_1\|} + \sqrt{f(x_2)}\frac{\|x - x_1\|}{\|x_2 - x_1\|}.$$

Определение. Назовем неотрицательную функцию $g(x)$ на R^n *конформно-выпуклой*, если для любых трех точек $\{x, x_1, x_2\} \in R^n$ выполняется неравенство

$$g(x) \leqslant g(x_1)\frac{\|x_2 - x\|}{\|x_2 - x_1\|} + g(x_2)\frac{\|x - x_1\|}{\|x_2 - x_1\|}.$$

Множество конформно-выпуклых функций на R^n обозначим через $\mathbf{P}$.

Конформно-выпуклые функции обладают следующими свойствами:

1) $g(x) = \mathrm{const} \in \mathbf{P}$;
2) $g_1, g_2 \in \mathbf{P} \Rightarrow \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \in \mathbf{P}$, $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$;
3) $g_1, g_2 \in \mathbf{P} \Rightarrow \max\{g_1, g_2\} \in \mathbf{P}$;
4) $g \in \mathbf{P}$ и $g(x_1) = g(x_2) = 0$, где $x_1 \neq x_2$, тогда $g(x) \equiv 0$;
5) $g(x) = O(\|x - a\|^\alpha)$, $\alpha > 1 \Rightarrow g(x) \equiv 0$.

Пример. Функция $\delta(x) = \lambda_1\|x - x_1\| + \lambda_2\|x - x_2\| \in \mathbf{P}$, где $x_1, x_2 \in R^n$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, конформно-выпуклая (это следует из неравенства Птолемея). Функцию такого вида назовем диполем.

В случае плоскости двумерная метрика $ds^2 = dx^2/\delta^4(x)$ имеет положительную Гауссову кривизну и в каждой точке имеется направление с нулевой одномерной кривизной. Отвечающая этой метрике выпуклая двухмерная поверхность в трехмерном евклидовом пространстве представляет собой поверхность вращения циклоиды (см. рис. 1).

[1]Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ, грант НШ-2263.2014.1, гранта Правительства РФ, госконтракт № 14.B25.31.0029, Министерства образования и науки РФ, код проекта 1148.

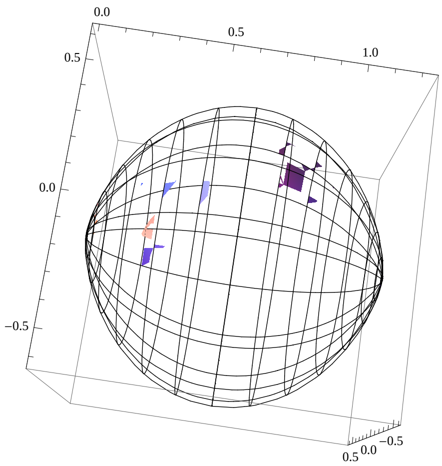


Рис. 1. Поверхность с метрикой диполя

Литература

1. *Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Однородные пространства: теория и приложения.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
2. *Родионов Е. Д., Славский В. В.* Одномерная секционная кривизна римановых многообразий // Докл. РАН.—2002.—Т. 387, № 4.—С. 454–457.

ПРОБЛЕМА МАЖОРАЦИИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫХ ПОЛИНОМОВ[1]

З. А. Кусраева

(Россия, Владикавказ, ЮМИ)

Рассматривается проблема компактной мажорации для однородных ортогонально аддитивных полиномов, действующих между банаховыми решетками. Проблема компактной мажорации для линейных операторов в L^2 была поставлена в [1] и в в общем виде решена в [2]. Дальнейшая история отражена в [3]. Необходимые сведения из теории банаховых решеток см. в [4].

Ортогонально аддитивные полиномов в векторных и банаховых решетках интенсивно изучаются в последние годы (см., например, [5–7]). Проблема мажорации в классе однородных полиновом сформулирована в [8].

Проблема мажорации для полиномов. Если P и Q — однородные полиномы, действующего между банаховыми решетками, причем $0 \leqslant P \leqslant Q$ и полином Q компактен, то будет ли компактным полином P?

Приведем нужные определения. Всюду ниже E и F — банаховы решетки. Пусть k-целое число $\geqslant 1$. Отображение $P : E \to F$ называется *s-однородным полиномом*, если существует полилинейный оператор $\varphi : E^s \to F$ такой, что $P(x) = \varphi(x, \dots, x)$ для всех $x \in E$. При этом φ называют *порождающим оператором* для P.

Однородный полином $P : E \to F$ называют:

- *ортогонально аддитивным*, если для любых $x, y \in E$ соотношение $|x| \wedge |y| = 0$ влечет $P(x + y) = P(x) + P(y)$;
- *ограниченным*, если $\|P\| := \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|P(x)\| < \infty$;
- *компактным*, если множество $P(B)$ относительно компактно в F, где $B := \{x \in E : \|x\| \leqslant 1\}$.
- *положительным*, если положительным является порождающий его полилинейный оператор φ, т. е. $\varphi(x_1, \dots, x_s) \geqslant 0$, для любых $0 \leqslant x_1, \dots, 0 \leqslant x_s \in E$.

Положительность полинома P записывается в виде $0 \leqslant P$. Если $0 \leqslant Q - P$, то говорят что Q *мажорирует* P и пишут $P \leqslant Q$.

Банахова решетка E называется p-выпуклой ($1 \leqslant p < \infty$), если существует константа $M < \infty$ такая, что для любого конечного набора $\{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ и имеет место неравенство:

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \right\| \leqslant M \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{1/p}.$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00623-а.

Говорят, что норма в нормированной решетке E *порядково непрерывна*, если $\lim_\alpha \|x_\alpha\| = 0$ для любой убывающей сети (x_α) со свойством $\inf_\alpha x_\alpha = 0$.

Теорема. *Пусть $1 \leqslant p \in \mathbb{R}$, $p \leqslant s \in \mathbb{N}$. Предположим, что E — p-выпуклая банахова решетка, не содержащая подрешеток, изморфных l_s, а F — банахова решетка с порядково непрерывной нормой. Если s-однородные ортогонально аддитивные полиномы P и Q из E в F таковы, что $0 \leqslant P \leqslant Q$ и Q компактен, то P также компактен.*

Доказательство основано на теореме о линеаризации ортогонально аддитивных полиномов из [7], которая сводит проблему к результату о компактной мажорации Доддса — Фремлина из [2].

Литература

1. *Simon B.* Analysis with weak trace ideals and the number of bounded states of Schrödinger operators // Trans. Amer. Math. Soc.—1976.—Vol. 224, № 4.—P. 367–380.
2. *Dodds P., Fremlin D.* Compact operators in Banach lattices.—Israel J. Math.—1979.—Vol. 34.—P. 287–320.
3. *Flores J., Hernandez F. L., Tradacete P.* Domination problems for strictly singular operators and other related classes // Positivity.—2011.—Vol. 5, № 4.—P. 595–616.
4. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer, 1991.
5. *Benyamini Y., Lassalle S., Llavona J. G.* Homogeneous orthogonally additive polynomials on Banach lattices // Bull. London Math. Soc.—2006.—Vol. 38, № 3.—P. 459–469.
6. *Bu Q., Buskes G.* Polynomials on Banach lattices and positive tensor products // J. Math. Anal. Appl.—2011.—Vol. 388.—P. 845–862.
7. *Кусраева З. А.* О представлениии ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн.—2011.—Т. 52, № 2.—С. 315–325.
8. *Kusraev A.* Domination problem for positive operators in Banach lattices // Математический анализ и мат. моделирование.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2011.—С. 33–40.

ПРИБЛИЖЕНИЕ КУСОЧНО ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА

М. Г. Магомед-Касумов (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Пусть $f(x)$ — некоторая суммируемая 2π-периодическая функция. Средние Валле-Пуссена определяются как средние арифметические частичных сумм Фурье:

$$V_m^n(f,x) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} S_{n+k}(f,x), \quad n \geqslant 0,\ m \geqslant 1,$$

где

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt.$$

В данной работе исследуется скорость сходимости средних Валле-Пуссена $V_m^n(f,x)$ для кусочно гладких функций $f(x)$ из класса $W_\infty^{2,\mathbb{A}}$, который вводится следующим образом.

Напомним, что пространством Соболева $W_p^r([a,b])$ называется множество $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$, а $f^{(r)}(x) \in L^p([a,b])$. Через $\|f\|_\infty$ будем обозначать $ess\sup_{[0,2\pi]} f(x)$. Пусть дано конечное разбиение отрезка $[0,2\pi]$

$$\mathbb{A} = \{0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_q = 2\pi\}.$$

Через $W_\infty^{2,\mathbb{A}}$ обозначается класс 2π-периодических функций, которые на каждом отрезке $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ можно превратить в функцию из $W_\infty^2([\theta_i,\theta_{i+1}])$ путем переопределения ее на концах. Другими словами, если $f(x) \in W_\infty^{2,\mathbb{A}}$, то, во-первых, $\|f''\|_\infty < \infty$ и, во-вторых, на каждом отрезке $[\theta_i,\theta_{i+1}]$ функцию $f'(x)$ можно сделать абсолютно непрерывной, изменив ее разве что лишь в двух точках — концах отрезка.

Лемма 1. *Для функций вида* $(r > 0)$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^r}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^r}$$

имеет место оценка $(\varepsilon > 0)$

$$|f(x) - V_m^n(f,x)| \leqslant \frac{1}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{1}{m(n+1)^r}, \quad x \in [\varepsilon, 2\pi-\varepsilon].$$

Лемма 2. *Справедливы следующие неравенства* ($m \geqslant 1$, $n \geqslant 0$)

$$\int\limits_0^{2\pi} |\mathcal{K}_{r,m}^n(u)|\,du \leqslant \begin{cases} c(r)\Big(\frac{m}{n+1}\Big)^{r-1}, & r > 1, \\ 32\ln(1+\frac{m}{n+1}) + 58, & r = 1. \end{cases}$$

где $\mathcal{K}_{r,m}^n(u) = m^{r-1}\sum_{\ell=n}^{n+m-1}\sum_{k=\ell+1}^{\infty}\frac{\cos(ku+\frac{\pi r}{2})}{k^r}$.

Теорема. *Для функций $f(x)$ из класса $W_\infty^{2,\mathbb{A}}$ справедлива следующая оценка остатка при приближении суммами Валле-Пуссена:*

$$|f(x) - V_m^n(f,x)| \leqslant \left[\frac{4}{\pi\sin^2\frac{\varepsilon}{2}} + 144\right]\cdot\frac{M_f}{m(n+1)}, \quad x \in \bigcup_{i=0}^{q-1}\Big[\theta_i + \varepsilon, \theta_{i+1} - \varepsilon\Big],$$

где $m \geqslant 1$, $n > 0$, $M_f = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty, \|f''\|_\infty\}$, а ε — любое положительное число.

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена на классах типа Соболева с переменным показателем // Вестн. Дагестанского научного центра.—2012.—№ 45.—С. 5–16.

ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА БАНАХОВОЗНАЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

Н. Ю. Нестеров

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть G — область в $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{B}$ — банахово пространство. Весом будем называть некоторую фиксированную функцию $v : G \to (0, \infty)$. Обозначим через $\mathcal{A}(G, \mathfrak{B})$ пространство Фреше всех аналитических на G функций, действующих в $\mathfrak{B}$, наделенное топологией τ_{co} равномерной сходимости на компактах. Рассмотрим его весовой подкласс:

$$\mathtt{A}_v(G) := \left\{ f : G \to \mathfrak{B},\ f \in \mathcal{A}(G, \mathfrak{B}) :\ \|f\|_v = \sup_{z \in G} \frac{\|f(z)\|_{\mathfrak{B}}}{v(z)} < \infty \right\}.$$

Это пространство является банаховым, когда вес v локально ограничен сверху на G.

Для указанных пространств исследуются задачи о нетривиальности и бесконечномерности. В частности, справедлива

Лемма 1. *Нетривиальный класс $\mathtt{A}_v(G)$ для любых точек $z \in G$ содержит функции, отличные от 0 в этих точках, тогда и только тогда, когда вес v локально отграничен от 0 в G.*

Далее, как в [2], введено понятие ассоциированного веса

$$\widetilde{v}(z) := \sup\Big\{ \big\|f(z)\big\|_{\mathfrak{B}} :\ f \in \mathtt{A}_v(G),\ \|f\|_v \leqslant 1 \Big\}, \quad z \in G,$$

с весом v и показано, что он задает то же пространство, что и v, причем с сохранением нормы. Ассоциированный вес $\widetilde{v}$ является локально липшицевой на G функцией. Это позволяет ограничиться при рассмотрении пространств $\mathtt{A}_v(G)$ только локально липшицевыми весами.

Отметим, что супремум в определении ассоцированного веса достигается, то есть для любого $z \in G$ существует такая функция $f \in \mathtt{A}_v(G)$ с $\|f\|_v \leqslant 1$, что $\|f(z)\|_{\mathfrak{B}} = \widetilde{v}(z)$.

Также изучается вопрос о вложении одного пространства в другое, непрерывности и компактности вложений.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

$\mathcal{Y}1$: $\mathtt{A}_v(G)$ *(непрерывно) вложено в* $\mathtt{A}_w(G)$;

$\mathcal{Y}2$: $\displaystyle\sup_{z \in G} \frac{\widetilde{v}(z)}{w(z)} < \infty$;

$\mathcal{Y}3$: $\displaystyle\sup_{z \in G} \frac{\widetilde{v}(z)}{\widetilde{w}(z)} < \infty$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-31083.

Опираясь на работу [3], сформулируем критерий компактности вложений:

Теорема 2. $\mathtt{A}_v(G)$ *компактно вложено в* $\mathtt{A}_w(G)$ *тогда и только тогда, когда любая ограниченная последовательность* $\{f_n\} \subseteq \mathtt{A}_v(G)$, *такая, что* $f_n \to 0$ *в топологии* $\tau_{\mathtt{co}}$, *сходится к нулю в* $\mathtt{A}_w(G)$.

Наконец, перенося результаты из [1], акцентируем внимание на следующей связи между весами и компактностью вложений:

Теорема 3. *Пусть* G — *область в* $\mathbb{C}$. *Для компактности вложения* $\mathtt{A}_v(G)$ *в* $\mathtt{A}_w(G)$ *достаточно, чтобы* $\lim\limits_{z\to\partial G} \dfrac{\widetilde{v}(z)}{w(z)} = 0$, *т. е. чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал компакт* K *в* G, *такой, что* $\dfrac{\widetilde{v}(z)}{w(z)} < \varepsilon$ *для любого* $z \in G \setminus K$. *В случае, когда* $G \neq \mathbb{C}$ *и дополнение* G *не имеет одноточечных компонент, данное условие является и необходимым.*

Вопрос о справедливости необходимой части теоремы 3 в случае, когда G совпадает с $\mathbb{C}$, является открытым.

Литература

1. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Painleve null sets, dimension and compact embedding of weighted holomorphic spaces // Stud. Math.—2012.—Vol. 213, Issue 2.—P. 169–187.
2. *Bierstedt K. D., Bonet J., Taskinen J.* Associated weights and spaces of holomorphic functions // Stud. Math.—1998.—Vol. 127.—P. 137–168.
3. *García D., Maestre M., Sevilla-Peris P.* Weakly compact composition operators between weighted spaces // Note di Mat.—2005/2006.—Vol. 25.—P. 205–220.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ПЛОТНОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ И МАРТИНГАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ[1]

Павлов И. В. (Россия, Ростов-на-Дону; РГСУ),
Назарько О. В. (Россия, Ростов-на-Дону; РГСУ)

Настоящий доклад является развитием доклада [1], основанного на статье авторов, представленной для публикации в номер 288 Трудов Математического института им. В. А. Стеклова.

Пусть $\big(\Omega, \mathbf{F}\big)$ — фильтрованное пространство с дискретным временем, где Ω — произвольное множество, а $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ — возрастающая последовательность σ-алгебр на нем. Семейство $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ вероятностных мер $Q^{(n)}$, определенных на $\mathcal{F}_n$, называется деформацией 1-го рода (D1), если при всех $n \in N = 0, 1, 2, \ldots$ выполняются соотношения абсолютной непрерывности $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \ll Q^{(n)}$. Пусть задан случайный процесс $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. D1 $\mathbf{Q}$ назовем мартингальной деформацией для процесса $\mathbf{Z}$, если процесс $(Z_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ есть деформированный мартингал 1-го рода (определение деформированных мартингалов и их обобщений можно найти в [2]).

Пусть $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ и $\forall n \in N$ σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ порождена разбиением Ω на не более чем счетное число атомов. Через $\mathcal{D}_n$ будем обозначать множество всех атомов σ-алгебры $\mathcal{F}_n$. На описанной структуре мы будем строить деформации (мартингальные деформации) $\mathbf{Q}$ 1- го рода, порожденные адаптированным неотрицательным процессом $h = (h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ (то есть такие, для которых выполняется равенство $dQ^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} = h_n dQ^{(n)}$). Значение с. в. h_n на атоме $D \in \mathcal{D}_n$ мы обозначаем $h_n(D)$. При этом необходимо выполнение условия $h_0(\Omega) = 1$.

Рассмотрим марковский момент τ, заданный формулой $\tau = \inf\{n \geqslant 0 : h_n = 0\}$. Будем считать, что процесс h удовлетворяет условию: $h_n = 0$ при $n \geqslant \tau$. Кроме того, мы требуем выполнения естественного условия: $h_n \not\equiv 0$, $\forall\, n \in N$.

Пусть $D_{n+1} \in \mathcal{D}_{n+1}$. Через D_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, обозначим атом из $\mathcal{D}_k$ такой, что $D_k \supset D_{n+1}$. Ясно, что $\Omega = D_0 \supset D_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_n \supset D_{n+1}$. Обозначим через $(D^i_{n+1})_{1 \leqslant i < m+1}$ совокупность всех атомов из $\mathcal{D}_{n+1}$ таких, что $\sum_{i=1}^{m} D^i_{n+1} = D_n$. Отметим, что m может равняться ∞ и что среди атомов $(D^i_{n+1})_{1 \leqslant i < m+1}$ присутствует D_{n+1}.

Деформацию $\mathbf{Q}$ 1-го рода с процессом плотностей h назовем невырожденной, если $\forall\, n \in N$, $\forall\, D_n \in \mathcal{D}_n$: $h_n(D_n) > 0$ выполняются неравенства $Q^{(n+1)}(D^i_{n+1}) > 0$, $1 \leqslant i < m+1$.

Теорема 1. *Пусть $\forall\, n \in N$ и $\forall\, D_n$ такого, что $D_n \in \mathcal{D}_n$ и $h_n(D_n) > 0$, выполняются либо равенства*

$$\inf_{1 \leqslant i < m+1} h_{n+1}(D^i_{n+1}) = \sup_{1 \leqslant i < m+1} h_{n+1}(D^i_{n+1}) = 1,$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 13-01-00637а и № 13-07-13159.

либо неравенства

$$\inf_{1\leqslant i<m+1} h_{n+1}(D^i_{n+1}) < 1 < \sup_{1\leqslant i<m+1} h_{n+1}(D^i_{n+1}).$$

Тогда существуют невырожденные D1 с процессом плотностей h. Такие деформации можно конструировать, решая $\forall\, n \in N$ и $\forall\, D_n \in \mathcal{D}_n$, $h_n(D_n) > 0$, следующие системы неравенств:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} h_{n+1}(D^i_{n+1})x_i = 1, \\ x_i > 0,\ \forall\, i < m+1. \end{cases}$$

Чтобы получить мартингальную деформацию, в каждую такую систему нужно добавить уравнение вида $\sum_{i=1}^m Z_{n+1}(D^i_{n+1})x_i = Z_n(D_n)$.

В докладе также (при общих условиях на фильтрацию) будут изложены результаты, связанные с построением D1 с помощью согласованных последовательностей вероятностных мер.

Литература

1. *Павлов И. В., Назарько О. В.* Характеризация процессов плотностей и построение деформированных стохастических базисов 1-го рода // XXII Междунар. конф. «Математика. Экономика. Образование».—Ростов н/Д.: Изд-во Сев.-Кавк. НЦ ВШ, 2014.—С. 111.
2. *Павлов И. В., Назарько О. В.* Обобщение теоремы Дуба о свободном выборе для деформированных субмартингалов // Успехи мат. наук.—2013.—Т. 68, № 6.—С. 184–185.

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Д. А. Полякова

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

В работе рассматриваются неквазианалитические пространства ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на конечном интервале $I=(-a,a)$ в $\mathbb{R}$, задаваемые весовыми функциями ω:

$$\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)=\left\{f\in C^\infty(I):\ (\forall\, q\in(0,1))\,(\forall\, l\in(0,a))\ \sup_{j\in\mathbb{N}_0}\sup_{|x|\leqslant l}\frac{\left|f^{(j)}(x)\right|}{e^{q\varphi^*_\omega(j/q)}}<\infty\right\}.$$

Здесь $\varphi^*_\omega(y):=\sup\{xy-\omega(e^x):x\geqslant 0\}$, $y\geqslant 0$, — функция, сопряженная по Юнгу к $\omega(e^x)$.

В пространствах $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ изучается оператор свертки T_μ с символом μ и соответствующее ему уравнение свертки

$$T_\mu f=g,\quad f,g\in\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I). \tag{1}$$

Символ μ представляет собой целую функцию, являющуюся мультипликатором пространства

$$H^1_{(\omega),I}=\left\{f\in H(\mathbb{C}):\ (\exists\, q\in(0,1))\,(\exists\, l\in(0,a)):\ \sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|f(z)|}{e^{q\omega(z)+l|\operatorname{Im} z|}}<\infty\right\},$$

которое изоморфно пространству $\left(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)\right)'_\beta$, сильному сопряженному с $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$.

Уравнения свертки (1) включают в себя как частный случай дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^\infty a_k f^{(k)}=g,\quad f,g\in\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I). \tag{2}$$

Ранее в [1] были установлены необходимые и достаточные условия на символ μ, при которых уравнение (1) разрешимо в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ при любой правой части $g\in\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$.

В настоящей работе устанавливается вид частного решения уравнений (1) и (2). Именно, по символу μ разрешимого уравнения свертки (1) строится последовательность $\{\nu_j\}_{j=1}^\infty$ комплексных чисел такая, что система $\left\{e^{-i\nu_j x}\right\}_{j=1}^\infty$ является абсолютно представляющей в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$, и доказывается

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-31083.

Теорема 1. *Пусть функция* $g \in \mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ *разложена в абсолютно сходящийся в* $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ *ряд* $g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \, e^{-i\nu_j x}$. *Тогда функция* $f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{\mu(\nu_j)} \, e^{-i\nu_j x}$ *принадлежит* $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ *и является решением уравнения свертки* (1).

Отдельно рассматривается важный с точки зрения приложений случай обобщенных проективных классов Жевре, соответствующих весам вида $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, где $\rho(t) \to \rho \in (0,1)$ — некоторый уточненный порядок. Для данных пространств по символу μ, заданному своими простыми нулями, систему $\{\nu_j\}_{j=1}^{\infty}$ удается построить конструктивно, причем числа ν_j выбираются неотрицательными.

Заметим, что доказанная Теорема 1 вместе с результатами работы [2], где был построен базис в пространстве решений однородного уравнения свертки $T_\mu f = 0$, позволяет выписать общее решение уравнений (1) и (2) в пространстве $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$.

Отметим также работу [3], в которой изучался вопрос о существовании у уравнений (1) и (2) решения, линейно и непрерывно зависящего от правой части.

Литература

1. *Абанина Д. А.* Разрешимость уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале // Сиб. мат. журн.—2012.—Т. 53, № 3.—С. 477–494.
2. *Абанина Д. А.* Экспоненциально-полиномиальный базис в пространстве решений однородного уравнения свертки на классах ультрадифференцируемых функций // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, № 3.—С. 3–17.
3. *Полякова Д. А.* О линейном непрерывном правом обратном к оператору свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций // Мат. заметки.—2014.—Т. 96, вып. 4.—С. 548–566.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

О СПЕКТРЕ РЕШЕТЧАТЫЙ МОДЕЛИ СВЕТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С НЕПОДВИЖНЫМ АТОМОМ И НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ ОДНОГО ФОТОНА

Т. Х. Расулов

(Узбекистан, Бухара; БухГУ)

В хорошо известной модели светового излучения (так называемой модели «спин-бозон», см. [1, 2]) предпологается, что атом, который может находиться в двух состояниях — основном с энергией $-\varepsilon$ и возбужденном с энергией ε, испускает и поглащает фотоны, переходя из одного состояния в другое. Рассмотрим «урезанный» модель, отличающиеся от оператор энергии такой системы тем, что возможное число бозонов не перевосходит 1. Гильбертовым пространством состояний такой модели служит пространство $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, где $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}^2$ — двумерное комплексное пространство и $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}, \mathbb{C}^2)$ гильбертово пространства квадратично-интегрируемых функций, определенных на d-мерном торе $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ со значениями в $\mathbb{C}^2$.

Оператор H в $\mathcal{H}$ задается как блочно-операторная матрица

$$H := \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} \\ H_{01}^* & H_{11} \end{pmatrix}$$

с матричными элементами $H_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i \leqslant j$, $i, j = 0, 1$:

$$H_{00} f_0^{(\sigma)} = \varepsilon\sigma f_0^{(\sigma)}, \quad H_{01} f_1^{(\sigma)} = \alpha \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(s)\, f_1^{(-\sigma)}(s)\, ds,$$

$$\big(H_{11} f_1^{(\sigma)}\big)(x) = (\varepsilon\sigma + w(x)) f_1^{(\sigma)}(x), \quad \sigma = \pm.$$

Здесь $f = \{f_0^{(\sigma)}, f_1^{(\sigma)}, \sigma = \pm\} \in \mathcal{H}$, $\varepsilon > 0$, $w(x)$ — энергия фотона с импульсом x, $v(\cdot)$ — вещественнозначная непрерывная функция на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $\alpha > 0$ — «параметр взаимодействия». При этом оператор H является ограниченным и самосопряженным оператором в $\mathcal{H}$.

Операторы H_{01} и H_{01}^* называются *операторами уничтожения* и *рождения*, соответственно. Так они являются двумерными, в силу теоремы Вейля о сохранение существенного спектра при конечномерных возмущениях, существенный спектр оператора H совпадает с множеством $[-\varepsilon; -\varepsilon + M] \cup [\varepsilon; \varepsilon + 2M]$, где $M := \max_{x \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w(x)$.

Далее предположим, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(s)}{w(s)}\, ds < \infty, \quad \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(s)}{M - w(s)}\, ds < \infty$$

и положим

$$\alpha_1 := \sqrt{2\varepsilon} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(s)}{w(s)}\, ds \Bigg)^{-1/2}, \quad \alpha_2 := \sqrt{M} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(s)}{M + 2\varepsilon - w(s)}\, ds \Bigg)^{-1/2},$$

$$\alpha_3 := \sqrt{M+2\varepsilon}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(s)}{M-w(s)}\,ds\Bigg)^{-1/2},$$

$$\alpha_{\min} := \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \alpha_{\max} := \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}.$$

Теорема 1. *При всех $\alpha > 0$ оператор H имеет не менее одно и не более четырех собственных значений. В частности, если $\alpha \in (0; \alpha_{\min}]$, то оператор H имеет единственный простой собственное значение, который лежит левее $-\varepsilon$, а при $\alpha \in (\alpha_{\max}; +\infty)$ оператор H имеет по две собственных значений, лежащих левее $-\varepsilon$ и правее $M+\varepsilon$ соответственно.*

В теореме 1, собственное значение E_0 оператора H который существует при всех $\alpha > 0$ обычно называется основное состояние и компоненты соответствующего собственного вектора имеет вид

$$f_0^{(+)} = 0, \quad f_0^{(-)} = \mathrm{const} \neq 0, \quad f_1^{(+)}(x) = -\frac{\alpha v(x) f_0^{(-)}}{\varepsilon + w(s) - E_0}, \quad f_1^{(-)}(x) = 0.$$

В непрерывном случае [1, 2] существенный спектр соответствующий модели состоит из полуоси $[-\varepsilon, \infty)$, а в данном случае существенный спектр оператора H есть объеденение двух отрезков конечной длины, причем они непересаекается при $\varepsilon > M/2$. Отметим, что в этом случае оператор H не имеет собственных значений, лежащих в лакуне $(M-\varepsilon, \varepsilon)$.

Литература

1. *Spohn H.* Ground state of the spin-boson Hamiltonian // Comm. Math. Phys.—1989.—Vol. 123.—P. 277–304.
2. *Жуков Ю. В., Минлос Р. А.* Спектр и рассеяния в модели «спин-бозон» с не более чем тремя фотонами // Теор. и мат. физика.—1995.—Т. 103, № 1.—С. 63–81.

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ[1]

В. Г. Рябых (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Г. Ю. Рябых (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Обозначения: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $T = \{e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$; пространство Харди H_p — подпространство $L_p(T)$, порожденное алгебраическими полиномами вида $\sum_{k=0}^{n} c_k e^{ik\theta}$, $c_k \in \mathbb{C}$; $l_\omega(x) = \frac{1}{2\pi}\int_T x(e^{i\theta})\overline{\omega(e^{i\theta})}d\theta$, $x \in H_p$, $\omega \in H_q$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, — линейный функционал над H_p; f — экстремальная функция (э. ф.) функционала $l_\omega \in H_p^*$, если $l(f) = \|l\|$ и $\|f\|_{L_p} = 1$; $f(z) = F(z)B(z)$, $z \in D$, где F — внешняя, а B — внутреняя функции; α_k — нули э. ф. f.

В работе Макинтайра и Рогозинского [1] для функционалов $l_\omega \in H_p^*$, $1 \leqslant p < \infty$, где $\omega(z)$ — рациональная функция с полюсами вне $\bar{D}$, был найден общий вид их экстремальных функций, т. е. формула, содержащая конечно число числовых параметров, являющихся нулями искомой экстремальной функции, с указанием верхней границы их количества для заданного ω.

В статье Рябых [2] найдено полное описание множества экстремальных функций из H_1. Продолжением приведенных выше исследований является

Теорема. *Для того чтобы у $l_\omega \in H_p^*$, $1 < p < \infty$, функция f с нулями α_k в D и $\|f\| = 1$, была экстремальной функцией, достаточно, а при $1 < p \leqslant 2$ и необходимо выполнения условий:*

$$\|l_\omega\| F^{p/2}(z)B(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\overline{F^{1-p/2}(t)}\,\omega(t)}{t-z}\,dt,$$

$$\|l_\omega\| F^{p/2}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\overline{F^{1-p/2}(t)B(t)}\,\omega(t)}{t-z}\,dt,$$

$$\int\limits_T \frac{\overline{F^{1-p/2}(t)}\,\omega(t)}{t-\alpha_k}\,dt = 0.$$

На основании этой теоремы удалось найти точное решение экстремальных задач для функционалов $l(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k x(d_k)$ и $l(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k x^{(k)}(0)$, $A_k \in \mathbb{C}$, $d_k \subset D$, $l(x) \in H_p^*$, $1 < p < \infty$, и вычислить норму этих функционалов.

Литература

1. *Macintyre A. J., Rogozinski W. W.* Extremal problems in the theory of analytic functions // Acta Math.—1950.—№ 82.—P. 275–325.
2. *Рябых В. Г.* Необходимое и достаточное условие существования линейного функционала над H_1 // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 6.—С. 1351–1360.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00065.

ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ РЕШЕНИЙ ТРИВИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МОНЖА-АМПЕРА

И. Х. Сабитов

(Россия, Москва; МГУ)

Известно, что существуют такие классы функций и решения таких уравнений, для которых изолированные особенности оказываются устранимыми особыми точками. Таковы, например, ограниченные голоморфные функции или решения многих эллиптически уравнений. Мы рассматриваем аналогичный вопрос для решений тривиального уравнения Монжа-Ампера, которое для функции $z = z(x, y) \in C^2$ имеет вид

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0. \tag{1}$$

Геометрически решения этого уравнения дают поверхность $S : z = z(x, y)$ с нулевой гауссовой кривизной, которая является линейчатой развертывающейся поверхностью, состоящей из прямолинейных образующих с общей вдоль каждой их них касательной плоскостью к поверхности. Строение поверхностей с таким строением хорошо изучено даже в классе гладкости C^1, где они известны под названием нормальные развертывающиеся поверхности, см. [1], и мы получаем часть результатов также и для таких поверхностей.

Мы доказываем следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть нормальная развертывающаяся поверхность $z = z(x, y)$ определена над кругом с проколотым центром $D_0 : 0 < x^2 + y^2 \leqslant r$ и принадлежит там классу C^1. Тогда функция $z(x, y)$ непрерывно продолжается в точку* $(0, 0)$.

Обращаем внимание, что от функции $z(x, y)$ априори не требуется даже ограниченности.

Теорема 2. *Пусть решение $z(x, y) \in C^2$ уравнения* (1) *определено над областью D_0 и имеет в D_0 ограниченные вторые производные. Тогда его первые производные непрерывно продолжаются точку в* $(0, 0)$.

Теорема 3. *Пусть функция $z(x, y) \in C^1$ задает над кругом $D : x^2 + y^2 \leqslant R^2$ гладкую нормальную развертывающуюся поверхность $S : z = z(x, y)$, принадлежит в D_0 классу C^2 и удовлетворяет там уравнению* (1). *Тогда вторые производные функции $z(x, y)$ непрерывно продолжаются в точку* $(0, 0)$.

Теорема 4. *Пусть решение $z = z(x, y)$ уравнения* (1) *принадлежит классу $C^{n-1}(D) \cup C^n(D_0)$, $n > 2$. Тогда функцию $z(x, y)$ можно непрерывно продолжить в функцию класса $C^n(D)$.*

Что касается строения поверхности в случае теоремы 1, мы доказываем, что если нет C^1-гладкости, тогда поверхность с изолированной особой точкой является конусом.

Литература

1. *Sabitov I. Kh.* Isometric Immersions and Embeddings of Locally Euclidean Metrics / Ed. by A. T. Fomenko.—Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009.—276 p.—(Reviews in Math. and Math. Physics;Vol. 13, Part 1).

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

КИЛЛИНГОВЫ f-СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВАХ ПОРЯДКА k

А. С. Самсонов

(Беларусь, Минск; БелГУ)

Введение

Класс **Kill f** киллинговых f-структур является одним из классов структур обобщенной эрмитовой геометрии. Киллинговы f-структуры определены и исследовались в [2, 3].

В то же время на регулярных Ф-пространствах, в частности, на однородных Ф-пространствах порядка k, существуют нетривиальные примеры f-структур. Это так называемые канонические f-структуры. Для канонических f-структур на однородных Ф-пространствах G/H порядка $k = 4, 5$ с естественно редуктивной метрикой известно [1], например, что критерием принадлежности классу **Kill f** является локальная симметричность пространств G/H.

В данной работе указаны теоремы принадлежности классу **Kill f** канонических f-структур на однородных Ф-пространствах порядка $k = 4, 5$ с серией «диагональных» метрик. Отметим, что эти метрики включают как естественно редуктивные, так и отличные от них. Кроме того, из указанных теорем следует, что локальная симметричность пространств G/H, вообще говоря, не является критерием киллинговости f-структур для «диагональных» метрик, а это служит отличием от естественно редуктивного случая.

Полученные результаты

Определяющее условие [2] для класса **Kill f** можно записать, например, в виде:

$$\nabla_X(f)X = 0,$$

где ∇ — связность Леви-Чивита (псевдо)риманова многообразия (M, g), $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Далее будем рассматривать канонические f-структуры на однородных Ф-пространствах G/H порядка k, снабженных серией «диагональных» метрик. Необходимые обозначения и ссылки на источники см., например, в [4].

С помощью вспомогательных формул из [4] для функций Номидзу связности ∇, канонических f-структур и коммутаторных соотношений на однородных Ф-пространствах порядка k было проанализировано определяющее условие класса киллинговых f-структур. Для однородных Ф-пространств порядка $k = 4$ доказана

Теорема 1. *Пусть $M = G/H$ — однородное Ф-пространство порядка $k = 4$ с «диагональной» метрикой, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G является полупростой и компактной. Каноническая базовая f-структура f_1 на M принадлежит классу* **Kill f** *тогда и только тогда, когда выполняется условие:*

$$[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_1] = \{0\} \quad \textit{или} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{3}{4}.$$

Для порядка $k = 5$ и канонических базовых f-структур f_1 и f_2 получены следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть $M = G/H$ — однородное Ф-пространство порядка $k = 5$ с «диагональной» метрикой, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G является полупростой и компактной. Каноническая базовая f-структура f_1 на M принадлежит классу* **Kill f** *тогда и только тогда, когда выполняются оба условия:*

1) $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_1$;
2) $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2$ *или* $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{3}{4}$.

Теорема 3. *Пусть $M = G/H$ — однородное Ф-пространство порядка $k = 5$ с «диагональной» метрикой, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G является полупростой и компактной. Каноническая базовая f-структура f_2 на M принадлежит классу* **Kill f** *тогда и только тогда, когда выполняются оба условия:*

1) $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2$;
2) $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_1$ *или* $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{3}{4}$.

Отметим, что одним из следующих шагов развития указанных результатов является получение необходимых и достаточных условий принадлежности классу **Kill f** для канонических базовых f-структур на однородных Ф-пространствах произвольного порядка k с серией «диагональных» метрик.

Автор благодарен научному руководителю В. В. Балащенко за полезные обсуждения в ходе написания данной работы.

Литература

1. *Балащенко В. В.* Естественно редуктивные киллинговы f-многообразия // Успехи мат. наук.—1999.—Т. 54, № 3.—С. 151–152.
2. *Гриценс А. С.* О геометрии киллинговых f-многообразий // Успехи мат. наук.—1990.—Т. 45, № 4.—С. 149–150.
3. *Гриценс А. С.* О строении киллинговых f-многообразий // Изв. ВУЗов. Математика.—1992.—№ 6.—С. 49–57.
4. *Самсонов А. С.* Приближенно келеровы и эрмитовы f-структуры на однородных Ф-пространствах порядка k в случае специальных метрик // Сиб. мат. журн.—2011.—Т. 52, № 6.—С. 1373–1388.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ АВТОМОРФНЫХ ФОРМ

О. А. Сергеева

(Россия, Кемерово; КемГУ)

Пусть D — ограниченное открытое множество в $\overline{\mathbb{C}}$, конформно эквивалентное единичному кругу, G — конечнопорожденная разрывная группа конформных преобразований множества D на себя такая, что $D/G = F$ – компактная риманова поверхность (к. р. п.) рода $h \geqslant 2$. Обозначим через $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ группу характеров (одномерных представлений) ρ из G в $\mathbb{C}^*$ с операцией умножения.

Определение. Мультипликативной автоморфной формой порядка q с характером ρ на F ((q,ρ)-формой) называется однозначная функция φ на D с условием $\varphi(Az)A'(z)^q = \rho(A)\varphi(z), A \in G, z \in D, D/G = F$. При этом (q,ρ)-форма и $(q,\frac{1}{\rho})$-форма считаются ρ-двойственными, а (q_1,ρ)-форма и (q_2,ρ)-форма — q-двойственными формами для $q = q_1 + q_2$. Формы одновременно q- и ρ-двойственные называются (q,ρ)-двойственными формами.

Для целого $q \geqslant 2$ рассмотрим нормированные пространства $A^p_{q,\rho}(D,G)$ голоморфных (q,ρ)-форм ϕ, интегрируемых со степенью p, $1 \leqslant p \in \mathbb{R}$, с нормой: $\|\phi\|^p = \iint\limits_{D/G} \lambda(z)^{2-pq} \left|\frac{\phi(z)}{f_1(z)}\right|^p |dz \wedge d\overline{z}| < \infty$, где $\lambda(z)$ – коэффициент метрики Пуанкаре в D, f_1 – мультипликативная единица для несущественной составляющей в разложении Фаркаш-Кра [1] для ρ.

Для (q,ρ)-форм, имеющих общий порядок q и общий характер ρ: $\phi_1 \in A^p_{q,\rho}(D,G)$ и $\phi_2 \in A^{p'}_{q,\rho}(D,G)$, с $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$, определено билинейное спаривание [2]:

$$(\phi_1,\phi_2)_{q,\rho,G,D} = \frac{i}{2}\iint\limits_{D/G} \lambda(z)^{2-2q}\frac{\phi_1(z)\overline{\phi_2(z)}}{|f_1(z)|^2}\,dz \wedge d\overline{z}.$$

Для (q,ρ)-двойственных форм на D рассмотрим соответствующее билинейное спаривание: $\langle\varphi,\psi\rangle_{q_1,q_2,D,G} = \frac{i}{2}\iint\limits_{D/G} \mu_q(z)\varphi(z)\psi(z)\,dz \wedge d\overline{z}$, где μ_q – фиксированный обобщенный коэффициент Бельтрами класса $C(D)$ для $q = q_1 + q_2$, $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ [2].

Пусть C — квазиокружность в $\overline{\mathbb{C}}$, $D_1 = \mathrm{Int}\, C$, $D_2 = \mathrm{Ext} C$; G — конечнопорожденная квазифуксова группа первого рода дробно-линейных преобразований $\overline{\mathbb{C}}$ с инвариантной кривой C такая, что D_1/G — к. р. п. рода $h \geqslant 2$. Рассмотрим интегральные операторы:

$$\left(\mathcal{B}^{\mathrm{hom}}_C\varphi\right)(z) = \frac{i}{2}\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q_1}\overline{\varphi(\zeta)}}{(\zeta - z)^{2q_1}\overline{f_1(\zeta)}f_1(z)}\,d\zeta \wedge d\overline{\zeta},$$

$$\left(\mathcal{B}_C^{\mathrm{ord}}\varphi\right)(z) = \frac{i}{2}\iint\limits_{D_1} \frac{\mu_q(\zeta) f_1(z)}{(\zeta - z)^{2q_2} f_1(\zeta)}\varphi(\zeta)\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}, \quad q = q_1 + q_2,$$

где $z \in D_2$, φ – это голоморфная (q_1, ρ)-форма на D_1 относительно группы G, т. е. $\varphi \in A^p_{q_1,\rho}(D_1, G)$. Эти операторы устанавливают связь между пространствами двойственных голоморфных (q, ρ)-форм [2].

Теорема 1. *Для $\rho \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ оператор $\mathcal{B}_C^{\mathrm{hom}}$ является непрерывным антилинейным отображением между пространствами ρ-двойственных форм: $\mathcal{B}_C^{\mathrm{hom}} : A^p_{q,\rho}(D_1, G) \to A^p_{q,\frac{1}{\rho}}(D_2, G)$, $p \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p < \infty$, с нормой $\|\mathcal{B}_C^{\mathrm{hom}}\| \leqslant k_q$, где $k_q = \frac{4^{2(q-1)}2\pi}{q}$. Кроме того, для ρ-двойственных форм $\varphi \in A^p_{q,\rho}(D_1, G)$ и $\psi \in A^{p'}_{q,\frac{1}{\rho}}(D_2, G)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, верно*

$$\left(\mathcal{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi, \psi\right)_{q,\frac{1}{\rho},D_2,G} = \overline{\left(\varphi, \mathcal{B}_{-C}^{\mathrm{hom}}\psi\right)}_{q,\rho,D_1,G}.$$

Теорема 2. *Для $\rho \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ оператор $\mathcal{B}_C^{\mathrm{ord}}$ является непрерывным линейным отображением между пространствами q-двойственных форм: $\mathcal{B}_C^{\mathrm{ord}}$: $A^p_{q_1,\rho}(D_1, G) \to A^p_{q_2,\rho}(D_2, G)$, $p \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p < \infty$, с нормой $\|\mathcal{B}_C^{\mathrm{ord}}\| \leqslant K k_{q_2}$, где K – константа из оценки $|\mu_q| \leqslant K\lambda^{2-q}$ для $q = q_1 + q_2$, $k_{q_2} = \frac{4^{2(q_2-1)}2\pi}{q_2}$. Кроме того, для ρ-двойственных форм $\varphi \in A^p_{q_1,\rho}(D_1, G)$ и $\psi \in A^{p'}_{q_1,\frac{1}{\rho}}(D_2, G)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, верно $\left\langle \mathcal{B}_C^{\mathrm{ord}}\varphi, \psi\right\rangle_{q_2,q_1,D_2,G} = \left\langle \varphi, \mathcal{B}_{-C}^{\mathrm{ord}}\psi\right\rangle_{q_1,q_2,D_1,G}$.*

Теорема 3. *$\rho \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ и q-двойственных форм $\varphi \in A^p_{q_1,\rho}(D_1, G)$ и $\psi \in A^{p'}_{q_2,\rho}(D_2, G)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, справедлива:*

$$\left(\mathcal{B}_C^{\mathrm{ord}}\varphi, \psi\right)_{q_2,\rho,D_2,G} = \left\langle \varphi, \mathcal{B}_{-C}^{\mathrm{hom}}\psi\right\rangle_{q_1,q_2,D_1,G}.$$

Reference

1. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann Surfaces // Graduate Texts in Math.—Berlin: Springer-Verlag, 1992.—Vol. 71—366 p.
2. *Сергеева О. А.* Модифицированные операторы Берса и двойственность голоморфных мультипликативных автоморфных форм // Сиб. мат. журн.—2009.—Т. 50, № 4.—С. 902–914.

УЛЬТРАФИЛЬТРЫ И ПРЕДЕЛЫ ПО КУРАТОВСКОМУ

К. В. Сторожук
(Россия, Новосибирск; ИМ СО РАН, НГУ)

Пусть $\{X_n \mid\in \mathbb{N}\}$ — семейство подмножеств топологического пространства X. Замкнутое множество $Ls\{X_n\}$, состоящее из всех точек x таких, что для каждой окрестности $U \in N(x)$ множество $\{n \mid U \cap X_n \neq \emptyset\}$ бесконечно, будем называть верхним топологическим пределом семейства $\{X_n\}$, см., например, Куратовский [1].

Утверждение 1 [2, теорема 5.1]**.** *Пусть X — банахово пространство, $A_n : X \to \mathbb{R}^k$, $n = 1, 2, \ldots$ — последовательность линейных операторов, сходящихся по норме к оператору A. Существует замкнутое подпространство L такое, что* $\operatorname{codim} L \leqslant k$ *такое, что* $L \subset Ls\{\ker A_n\} \subset \ker A$.

Утверждение 2 [2, теорема 5.2]**.** *Пусть X — банахово пространство, $\{L_n\}$ — последовательность замкнутых подпространств X,* $\operatorname{codim} L_n \leqslant k$. *Тогда $Ls\{L_n\}$ содержит замкнутое подпространство $L \subset X$,* $\operatorname{codim} L \leqslant k$.

Доказательства утверждений 1 и 2 имеются в [2].

Мы заменим последовательности произвольными сетями и банахово пространство топологическим векторным пространством.

Теорема. *Пусть X — топологическое векторное пространство, $\{L_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — семейство подпространств,* $\operatorname{codim} L_\alpha \leqslant k \in \mathbb{N}$. *Существует подпространство L,* $\operatorname{codim} L \leqslant k$ *такое, что для любого $x \in L$ найдется множество $\{x_\alpha \in L_\alpha\}$, такое, что x — его предельная точка.*

В частности, утверждение 2 оказывается справедливым для нормированных пространств и пространств Фреше.

Литература

1. *Куратовский К.* Топология. Т. 1.—М.: Мир, 1966.—594 с.
2. *Арутюнов А. В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи.—М.: Факториал, 1997.—255 с.

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ СИММЕТРИЧЕСКИХ ЛЕНТОЧНЫХ ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ

А. А. Батальщиков (Россия, Москва; «Стэл КС»),
С. М. Грудский (Mexico, Ciudad de Mexico; CINVESTAV),
E. Ramrez de Arellano (Mexico, Ciudad de Mexico; CINVESTAV),
В. А. Стукопин (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Следуя подходу, развитому для эрмитовых комплексных ленточных матриц в работе [1] и основанному на анализе нулей их определителя, мы строим асимптотические разложения для собственных векторов симметричных ленточных теплицевых матриц с комплексными элементами.

Для заданной функции $a(t)$ из L^1 на единичной окружности $\mathbf{T}$ комплексной плоскости мы обозначим через a_l l-ый коэффициент Фурье

$$a_l = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} a(e^{ix})e^{-ilx}dx,$$

$l \in \mathbf{Z}$, а через $T_n(a)$ $n \times n$ теплицеву матрицу $(a_{j-k})_{j,k=1}^n$. Функцию a называют символом теплицевой матрицы $T_n(a)$.

Рассмотрим символ

$$a(t) = \sum_{k=-r}^{r} a_k t^k, \qquad a_k = a_{-k},\ t \in \mathbb{T}$$

при условии $r \geqslant 1$ и $a_r \neq 0$. Будем предполагать, что этот полином представляет собой четную функцию относительно угловой переменной φ:

$$a(e^{\mathrm{i}\varphi}) = a(e^{-\mathrm{i}\varphi}), \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Рассмотрим кривую $\mathcal{R}(a) := a(\mathbb{T})$.

Мы будем также предполагать, что:

(1) множество $\mathcal{R}(a)$ не имеет пересечений (в частности, $a(1) \neq a(-1)$),

(2) $a'(t) \neq 0$ for $t \in \mathbb{T} \setminus \{-1, 1\}$,

(3) $a''(\pm 1) \neq 0$.

Введем функцию $g(\varphi) := a(e^{\mathrm{i}\varphi})$.

Предельное множество собственных чисел матрицы $T_n(a)$ при $n \to \infty$ совпадает с образом единичной окружности $\mathcal{R}(a)$ под действием символа — функции a. Другими словами, собственные числа $\lambda_{j,n}$ с ростом n оказываются во все более малых окрестностях $\mathcal{R}(a)$. В связи с этим для достаточно малого $\delta > 0$ введем множества

$$\Omega_\delta := \{\varphi \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(\varphi) < \pi, |\mathrm{Im}(\varphi)| < \delta\}, \quad \mathcal{R}_\delta(a) := g(\Omega_\delta).$$

Рассмотрим уравнение

$$a(z) - \lambda = 0, \quad \lambda \in \mathcal{R}(a) \backslash \{a(1), a(-1)\}.$$

Это уравнение имеет $2r$ корней в комплексной плоскости, которые мы рассмотрим в порядке невозрастания модулей. С учетом симметрии мы можем записать:

$$\{u_1(\lambda),\, u_2(\lambda),\, \ldots,\, u_{r-1}(\lambda),\, u_r(\lambda),\, 1/u_r(\lambda),\, 1/u_{r-1}(\lambda), \ldots,\, 1/u_2(\lambda),\, 1/u_1(\lambda)\}\,.$$

Таким образом, каждому корню, лежащему вне единичной окружности $\mathbb{T}$, u_k $(1 \leqslant k \leqslant r-1)$, соответствует корень $1/u_k$ лежащий внутри $\mathbb{T}$. В силу условий 1 и 2 мы имеем ровно два корня, лежащих на $\mathbb{T}$. Именно, это корни $u_r(\lambda) = e^{\mathrm{i}\varphi(\lambda)}$ и $1/u_r(\lambda) = e^{-\mathrm{i}\varphi(\lambda)}$, $\varphi \in (0, \pi)$.

Введем функции:

$$h_\lambda(z) = \prod_{k=1}^{r-1}\left(1 - \frac{z}{u_k(\lambda)}\right), \quad z \in \mathbb{C},\ \lambda \in \mathcal{R}_\delta = g(\Omega_\delta),$$

$$\theta(\varphi) = \mathrm{i}\log\frac{h_\lambda(e^{\mathrm{i}\varphi})}{h_\lambda(e^{-\mathrm{i}\varphi})}, \quad \varphi \in \Omega_\delta.$$

Введем еще обозначения:

$$d_0 := d_0(\lambda) = (-1)^r a_r \prod_{k=1}^{r-1} u_k(\lambda),$$

$$d_1 := d_1(\lambda) = \frac{1}{h_\lambda(e^{\mathrm{i}\varphi})h_\lambda(e^{-\mathrm{i}\varphi})}\prod_{k=1}^{r-1}\prod_{m=1}^{r-1}\left(1 - \frac{1}{u_k(\lambda)u_m(\lambda)}\right)^{-1}.$$

Пусть $w_{j,m} := w_{j,m}(\lambda_{j,n})$ обозначает the m-ую компоненту собственного вектора, соответствующего собственному значению $\lambda_{j,n}$.

Сформулируем главный результат данной работы.

Теорема 1. *Пусть n достаточно большое натуральное число, $\lambda_{j,n}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ — собственное значение. Положим $\lambda := \lambda_{j,n}$. Тогда для m-й компоненты j-го собственного вектора $T_n(a)$ имеет место следующее, равномерное по λ, асимптотическое равенство*

$$w_{j,m}(\lambda) = a_{j,m}(\lambda) + b_{j,m}(\lambda) + c_{j,m}(\lambda) + O(e^{-\delta_1 n}), \quad m = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где

$$a_{j,m}(\lambda) = \frac{(-1)^j e^{-\mathrm{i}m\varphi}e^{\mathrm{i}\theta(\lambda)}}{h_\lambda(e^{\mathrm{i}\varphi})} - \frac{(-1)^j e^{\mathrm{i}m\varphi}e^{-\mathrm{i}\theta(\lambda)}}{h_\lambda(e^{-\mathrm{i}\varphi})},$$

$$b_{j,m}(\lambda) = (-1)^j \sum_{\nu=1}^{r-1}\left[\frac{2\mathrm{i}\sin(\varphi)}{u_\nu^m(\lambda)} \cdot \frac{1}{(u_\nu(\lambda) - e^{\mathrm{i}\varphi})(u_\nu(\lambda) - e^{-\mathrm{i}\varphi})(h_\lambda(u_\nu(\lambda)))'}\right],$$

$$c_{j,m}(\lambda) - \sum_{\nu=1}^{r-1}\left[\frac{2\mathrm{i}\sin(\varphi)}{u_\nu^{n-m+1}(\lambda)} \cdot \frac{1}{(u_\nu(\lambda) - e^{\mathrm{i}\varphi})(u_\nu(\lambda) - e^{-\mathrm{i}\varphi})(h_\lambda(u_\nu(\lambda)))'}\right].$$

Литература

1. *Böttcher A., Grudsky S., Maksimenko E.* On the structure of the eigenvectors of large Hermitian Toeplitz band matrices // Operator Theory: Advances and Applications.—2010.—Vol. 210.—P. 15–36.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

ОГРАНИЧЕННОСТЬ МАКСИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ХАРДИ — ЛИТТЛВУДА В ОБОБЩЕННЫХ ГРАНД-ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

С. М. Умархаджиев

(Россия, Грозный; АН ЧР)

Неотрицательная измеримая функция w в пространстве $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Макенхаупта A_p, $1 < p < \infty$, (кратко: $w \in A_p$), если существует $C > 0$ такое, что для любого куба $Q \subset \mathbb{R}^n$ с ребрами, параллельными координатным осям, выполняется соотношение

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q [w(x)]^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} \leqslant C < \infty.$$

Известно [1], что оператор Харди — Литлвуда

$$Mf(x) := \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

ограничен в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n, w)$ тогда и только тогда, когда $w \in A_p$.

Определение. Пусть $1 < p < \infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ и w — вес на Ω. *Обобщенным гранд-пространством Лебега* $L_a^{p)}(\Omega, w)$ будем называть пространство, определяемое нормой

$$\|f\|_{L_a^{p)}(\Omega,w)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega,wa^{\varepsilon})}.$$

Пусть δ — некоторое число из интервала $(0, p-1)$. Определим δ-норму в обобщенном гранд-пространстве Лебега следующим образом:

$$\|f\|_{\delta L_a^{p)}(\Omega,w)} = \sup_{0<\varepsilon\leqslant\delta} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega,wa^{\varepsilon})}.$$

Лемма 1. *Пусть $a \in L^p(\Omega, w)$. Тогда для любого числа $\delta \in (0, p-1)$ нормы $\|f\|_{L_a^{p)}(\Omega,w)}$ и $\|f\|_{\delta L_a^{p)}(\Omega,w)}$ эквивалентны.*

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $1 < p < \infty$, и w — вес на Ω. Пусть сублинейный оператор T ограничен в пространстве $L^p(\Omega, w)$ и в пространстве $L^{p-\varepsilon_0}(\Omega, wa^{\varepsilon_0})$ для некоторого числа $\varepsilon_0 \in (0, p-1)$ и некоторого веса $a \in L^p(\Omega, w)$. Тогда оператор T ограничен в обобщенном гранд-пространстве Лебега $L_a^{p)}(\Omega, w)$.*

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$. Максимальный оператор Харди — Литлвуда M ограничен в обобщенном гранд-пространстве Лебега $L_a^{p)}(\mathbb{R}^n, w)$, $a \in L^p(\mathbb{R}^n, w)$, если $w \in A_p$ и существует число $\delta > 0$ такое, что $wa^{\delta} \in A_{p-\delta}$.*

Теорема 3. *Пусть неотрицательная функция a принадлежит пространству $L^p(\Omega, w)$. Если максимальный оператор Харди — Литтлвуда M ограничен в обобщенном гранд-пространстве Лебега $L_a^{p)}(\Omega, w)$, $1 < p < \infty$, то существует число $\delta \in (0, p-1)$ такое,что*

$$wa^{\delta} \in A_{p-\delta}.$$

Литература

1. *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc.—1972.—Vol. 165.—P. 207–226.
2. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On Iwaniec-Sbordone spaces on sets which may have infinite measure // Azerb. J. Math.—2011.—Vol. 1, № 1.—P. 67–84.
3. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On Iwaniec-Sbordone spaces on sets which may have infinite measure: addendum // Azerb. J. Math.—2011.—Vol. 1, № 2.—P. 143–144.
4. *Умархаджиев С. М.* Обобщение понятия гранд-пространства Лебега // Изв. вузов. Математика.—2014.—№ 4.—С. 42–51.
5. *Умархаджиев С. М.* Ограниченность потенциала Рисса в весовых обобщенных гранд-пространствах Лебега // Владикавк. мат. журн.—2014.—Т. 2, вып. 2.—С. 62–68.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ H_λ-ОПЕРАТОРОВ ПРИ СИНТЕЗЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

В. Г. Фетисов (Россия, Владикавказ; ЮМИ),
И. И. Панина (Россия, Шахты; ИСОП ДГТУ)

Как известно [1], задача синтеза системы состоит в нахождении таких значений ее параметров, которые обеспечивают оптимальную структуру системы. В приложениях наиболее важными являются нелинейные динамические системы. Исследование вопроса о синтезе существенно упрощается при использовании H_λ-операторов.

В работе нами рассматриваются так называемые суперлинейные H_λ-операторы, подчиняющиеся условию:

$$T(\lambda u) = \lambda Tu, \|T(u+th) - Tu; E_1\| \leqslant \|T(th); E_1\| + o(\|th; E_0\|),$$

где $\lambda \in R$, $t \in R$, $u, th \in E_0$, E_0 и E_1 — линейные топологические пространства. Примерами могут служить:

1. Всякий непрерывный выпуклый функционал Γ. Достаточно выбрать t_0 настолько малым, чтобы число $\Gamma(u+th)$ имело одинаковый знак с $\Gamma(u)$ при $|t| \leqslant t_0$. Из выпуклости функционала Γ вытекает $|\Gamma(u+th) - \Gamma(u)| \leqslant |\Gamma(u) + \Gamma(th) - \Gamma(u)| = |\Gamma(th)|$ при всех $|t| \leqslant t_0$.

2. Оператор Урысона $Tu(\tau) = \int_{\Omega_0} K[\tau, s, u(s)]\, d\mu(s)$, рассматриваемый в паре F-квазинормированных пространств $(E_0(\Omega_0), E_1(\Omega_1))$ при условиях: a) $K(\tau, s, \lambda u) = \lambda K(\tau, s, u)$, $\lambda \in R$; b) $|K(\tau, s, u+th) - K(\tau, s, u)| \leqslant |K(\tau, s, th)| + o(th)$.

3. Оператор суперпозиции $fu(s) = f[s, u(s)]$, где f — нормальный интегрант, однородный по u при каждом s и кроме того, $|f(s, u+th) - f(s, u)| \leqslant |f(s, th)| + o(th)$.

Для рассматриваемых нелинейных динамических систем перспективной является идея мажорирования операторов, восходящая к акад. Канторовичу и развитая в работах проф. Кусраева (см. подробнее [1]).

Не менее важной задачей является и процесс построения внешней среды (иными словами, нахождения такого топологического пространства, в котором оператор, входящий в рассматриваемую нелинейную систему, обладает нужными для исследователя свойствами).

К настоящему времени при операторном подходе к синтезу нелинейных динамических систем основой для построения их среды, как показано нами в [1], служат локально ограниченные функциональные пространства, из которых наиболее широкой топологией обладают пространства Орлича.

Пусть $R^+ = \{x \in R | x \geqslant 0\}$ — поле вещественных неотрицательных чисел, C — пространство непрерывных функций, M — пространство измеримых по

Лебегу функций, $L^p(R)(0 < p < \infty)$ — пространство суммируемых функций $u(t)$ действительного аргумента $t \in R$ с p-интегрируемым модулем, для которых:

$$L^p(R) = \left\{ u(t) : u(t) \in M,\ t \in R,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} [u^*(t)u(t)]^{\frac{p}{2}}\, dt < +\infty \right\},$$

где $u^*(t)$ — эрмитово сопряженная функция к исходной измеримой функции $u(t) \in M$. F-норма элемента $u(t) \in L_\infty(R)$ определяется по формуле:

$$\|u; L_\infty(R)\| = \mathrm{vraimax} \sqrt{u^*(t)u(t)}, \quad \forall\, t \in R^+.$$

Локально ограниченное пространство Орлича $L^{*\Phi}$ состоит из измеримых по Лебегу функций $u(t)$, определенных на компактном множестве $\Omega \subset R^n$, порождаемое неотрицательной неубывающей функцией Юнга Φ, интегральным модуляром $\Gamma_\Phi(u) = \int_\Omega \varphi[u(t)]\, dt < +\infty$.

Обозначим через $\Phi(x, y)$ произвольную седловую функцию Юнга, через $\Gamma_\Phi(x, y)$ — интегральный модуляр. $L^{*\Phi}$ — локально ограниченное F-квазинормированное пространство Орлича, где

$$\left\|x; L^{*\Phi}\right\| = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \Gamma_\Phi\left(\frac{|(x, \cdot)|}{\varepsilon}\right) \leqslant \varepsilon \right\},$$

являющееся искомой средой для многих типов динамических систем, содержащих суперлинейный оператор T.

Литература

1. *Фетисов В. Г., Филиппенко В. И., Козоброд В. Н.* Операторы и уравнения в линейных топологических пространствах.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2006.—432 с.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

РЕЗОЛЬВЕНТЫ СИММЕТРИЧЕСКОГО МИНИМАЛЬНОГО КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И КРАТНОСТЬ СПЕКТРА ЕГО САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЙ

В. И. Филиппенко

(Россия, Шахты; ИСОП ДГТУ)

Основное содержание настоящей работы является продолжением предыдущих исследований автора (см., например, [1, 2]).

Пусть $\mathbf{F} = (f_{i,j}) - (n \times n)$ — матрица, составленная из комплекснозначных функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f_{i,j} = 0$ в интервале $\mathbb{I} = (a, b)$, если $2 \leqslant i + 1 < j \leqslant n$;

2) $f_{i,j}$ — локально суммируемы, т.е.$f_{i,j} \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{I})$ для $1 \leqslant i, j \leqslant n$;

3) $f_{i,i+1} \neq 0$ в $\mathbb{I}$ для $1 \leqslant i \leqslant n - 1$.

Определим квазипроизводные $y^{[k]}$ следующим образом:

$$y^{[0]} = y, \quad y^{[i]} = f_{i,i+1}^{-1}\left[(y^{[i-1]})' - \sum_{j=1}^{i} f_{i,j} y^{[j-1]}\right], \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Пусть $AC(\mathbb{I})$ — множество функций абсолютно непрерывных на любом компактном подынтервале промежутка $\mathbb{I}$.

Квазидифференциальное выражение γ определим формулой

$$\gamma(y) = \left(y^{[n-1]}\right)' - \sum_{i=1}^{n} f_{n,i} y^{[i-1]}$$

для y таких, что $y^{[i-1]} \in AC(\mathbb{I})$, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть $\mathbf{F}$ удовлетворяет также следующему условию симметричности $\mathbf{F} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}^*\mathbf{J}$, где $\mathbf{F}^* = (\overline{f_{j,i}})$ и $\mathbf{J}$ — числовая $(n \times n)$–матрица, $\mathbf{J} = ((-1)^i \delta_{i,n+1-j})$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant n$, а $\delta_{k,l}$ — символ Кронекера.

Для любых функций y и z, к которым применима квазидифференциальная операция γ, имеет место формула

$$\gamma(y)\overline{z} + (-1)^{n+1} y\overline{\gamma(z)} = \{y, z\}',$$

где $\{y, z\} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n+1-j} y^{[j]} \overline{z^{[n-j-1]}}$.

Положим $\tau = \gamma$, если n четно, и $\tau = \pm i\gamma$, если n нечетно. Операция τ порождает минимальный симметрический оператор T_0 в гильбертовом пространстве $H = L^2(a, b)$.

Обобщенная резольвента $R_\lambda(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$ оператора T_0 является интегральным оператором. Получена соответствующая формула для ядра $K(x, s; \lambda)$ резольвенты $R_\lambda(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$.

Обозначим через $K^{[j,k]}(x,s;\lambda)$ квазипроизводные этого ядра j-го порядка по x и k-го порядка по s $(j,k=0,1,\ldots,n-1)$. Положим

$$m_{j,k}(\lambda)=\frac{1}{2}\left(K^{[j-1,k-1]}(x_0,x_0-0;\lambda)+K^{[j-1,k-1]}(x_0,x_0+0;\lambda)\right),$$

где $x_0\in(a,b)$. Матричную функцию $M(\lambda)=\|m_{jk}(\lambda)\|_1^n$ будем называть характеристической матрицей обобщенной резольвенты R_λ.

Теорема 1. *Характеристическая матрица $M(\lambda)$ любой обобщенной резольвенты R_λ оператора T_0 является регулярной функцией параметра λ в верхней и нижней комплексных полуплоскостях, причем $M(\overline{\lambda})=M^*(\lambda)$. Для любого λ из верхней полуплоскости матрица $\operatorname{Im}M(\lambda)$ является эрмитово-неотрицательной.*

Теорема 2. *Оператор $E_{\alpha,\beta}=\frac{E_\beta+E_{\beta+0}}{2}-\frac{E_\alpha+E_{\alpha+0}}{2}$ при любых вещественных α и β является интегральным. Его ядро определяется по формуле*

$$K(x,s;\alpha,\beta)=\int\limits_\alpha^\beta y'(x,\lambda)\,dT(\lambda)\,y(s,\lambda),$$

где

$$T(\lambda)=\frac{1}{\pi}\lim_{\tau\longrightarrow+0}\int\limits_0^\lambda \operatorname{Im}M(\sigma+i\tau)\,d\sigma.$$

При этом

$$\int\limits_a^b|K(x,s;\alpha,\beta)|^2\,ds<\infty,\quad \int\limits_a^b|K(x,s;\alpha,\beta)|^2\,dx<\infty,\quad a<x<s<b.$$

Здесь $y'(x,\lambda)$ — вектор-строка, составленная из квазипроизводных функции $y(x,\lambda)$ от нулевого до $(n-1)$-го порядка.

Получена оценка ранга матрицы M.

Литература

1. *Филиппенко В. И.* Резольвенты линейного оператора, порожденного квазидифференциальным выражением // Иссл. по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2004.—С. 304–322.
2. *Филиппенко В. И.* Линейные квазидифференциальные операторы в гильбертовом пространстве // Исслед. по функц. анал. и его прил.—М.: Наука, 2005.—С. 293–344.

О ВЛОЖЕНИЯХ ОБОБЩЕННЫХ ВЕСОВЫХ ГРАНД-ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА, ПОРОЖДЕННЫХ КВАЗИСТЕПЕННЫМИ N-ФУНКЦИЯМИ

А. Ф. Чувенков

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В русле идей статей [1, 2, 4] результаты расширения пространств Лебега переносятся на весовые пространства Орлича.

Рассматривается класс функций $f(x)$ на произвольном открытом множестве $\Omega \subseteq R^n$ с весом $\omega(x)$

$$K_M(\Omega,\omega) = \left\{ f\colon \rho(f,M,\omega) = \int\limits_{\Omega} M(|f(x)|)\omega(x)\,dx < \infty \right\}$$

и пространство Орлича с нормой Колмогорова (Люксембурга), порождаемые квазистепенной N-функцией $M(u)$. Обозначим через $p = \min\{p_1, p_2\}$ — показатель, определяющий убывание (в нуле) или рост (в бесконечности) N-функции $M(u)$, где $p_1 = \inf_{u>0} \varphi_M(u)$, $p_2 = \sup_{u>0} \varphi_M(u)$, $\varphi_M(u) = \frac{uM'(u)}{M(u)}$. Предполагаем, $1 < p < \infty$, что равносильно выполнению Δ_2-условия для N-функций M и дополнительной к ней.

Определим обобщенное весовое гранд-пространство Орлича, порожденное дополнительным весом $a(x) \in K_M(\Omega,\omega)$, следующим образом:

$$K^a_{M)}(\Omega,\omega) =$$

$$= \left\{ f \in K_M(\Omega,\omega) : \|f\|_{M),a} = \sup_{0<\delta<1-1/p} \left[\varrho(f, M^{1-\delta}, \delta M^{\delta}(a)\omega) \right]^{\frac{1}{1-\delta}} < \infty \right\}.$$

Представляется ряд теорем вложения для определенных выше обобщенных весовых гранд-пространств Орлича с различными показателями роста (убывания) квазистепенных N-функций и различными весами.

Литература

1. *Iwaniec T., Sbordone C.* On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // Arch. Rational Mech. Anal.—1992.—№ 119.—P. 29–143.
2. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On Iwanies-Sbordone spaces on sets which may have infinite measure // Azerb. J. of Math.—2011.—Vol. 1, № 1.—P. 67–84.
3. *Симоненко И. Б.* Интерполяция и экстраполяция линейных операторов в пространствах Орлича // Мат. сб.—1964.—Т. 4, № 63 (105).—С. 536–553.
4. *Умархаджиев С. М.* Обобщение понятия гранд-пространства Лебега // Изв. вузов. Математика.—2014.—№ 4.—С. 42–51.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, РАЗРЕШИМОСТЬ И ПРИЛОЖЕНИЕ

П. Л. Шабалин (Россия, Казань; КГАСУ),
Р. Б. Салимов (Россия, Казань; КГАСУ)

Рассмотрена однородная краевая задача Гильберта теории аналитических функций для полуплоскости D с двусторонним завихрением на бесконечности в ситуации, когда коэффициенты краевого условия

$$a(t)\Re\Phi(t) - b(t)\operatorname{Im}\Phi(t) = 0,\ t \in L = \partial D,$$

имеют разрывы первого рода в точках двух монотонных последовательностей $\{t_k\}$, $\{t_{-k}\}$, сходящихся к $+\infty$ и $-\infty$ соответственно и таких, что ряды $\sum_{k=1}^{\infty} 1/t_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(-t_{-k})$ сходятся. Обозначим символом $\varphi(t)$ абсолютно непрерывную составляющую функции $\nu(t) = \arg[a(t)+ib(t)]$, ветвь которой на каждом интервале непрерывности выбрана так, что функция скачков $h(t) = \nu(t) - \varphi(t)$ не убывает. Потребуем, чтобы положительные числа κ_k (κ_{-k})– дробные части величин разрывов функции $h(t)/\pi$ в точках t_k (t_{-k}) соответственно, образовывали расходящиеся ряды и введем кусочно-постоянные функции $n_+^*(t)$, $n_-^*(t)$ формулами

$$n_+^*(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ \sum\limits_{j=1}^{k-1} \kappa_j, & t_{k-1} \leqslant t < t_k, \end{cases}$$

$$n_-^*(t) = \begin{cases} 0, & t < -t_{-1}, \\ \sum\limits_{j=1}^{k-1} \kappa_{-j}, & -t_{-k+1} \leqslant t < -t_{-k}. \end{cases}$$

Рассмотрены следующие два случая.

a) Функция $\varphi(t)$ имеет в бесконечно удаленной точке особенность вида

$$\varphi(t) = \begin{cases} \nu^- \ln^\alpha |t| + \tilde{\nu}(t), & t \in (-\infty, -1), \\ \nu^+ \ln^\alpha t + \tilde{\nu}(t), & t \in (1, +\infty); \end{cases}$$

для функций $n_+^*(t)$, $n_-^*(t)$ справедливы следующие асимптотические формулы

$$n_+^*(t) = \Delta_+ \ln^{\kappa_+} t + O(1), \quad n_-^*(t) = \Delta_- \ln^{\kappa_-} t + O(1), \quad t \to +\infty,$$

$0 < \alpha < 3$, $0 < \kappa_+ < 3$, $0 < \kappa_- < 3$.

b) Функция $\varphi(t)$ имеет в бесконечно удаленной точке особенность вида

$$\varphi(t) = \begin{cases} \nu^- |t|^\rho + \tilde{\nu}(t), & t \in (-\infty, -1), \\ \nu^+ t^\rho + \tilde{\nu}(t), & t \in (1, +\infty); \end{cases}$$

и

$$n_+^*(t) = \Delta_+ t^{\kappa_+} + O(1), \quad n_-^*(t) = \Delta_- t^{\kappa_-} + O(1), \quad t \to +\infty,$$

$0 < \rho < 1$, $0 < \kappa_+ < 1$, $0 < \kappa_- < 1$.

Для этих случаев получены формулы общего решения однородной задачи Гильберта и проведено полное исследование разрешимости [1, 2]. Частное решение подобной задачи применено для построения формулы конформного отображения полуплоскости с заданными прообразами вершин на вещественной оси на полигональную область с заданными углами при неизвестных вершинах в случае счетного множества вершин.

Литература

1. *Salimov R. B., Shabalin P. L.* Solvability of the Riemann–Hilbert boundary value problem with a two — side curling at infinity point of order less than 1 // Complex Variables and Elliptic Equations.—2014.—P. 1–19.—(URL: 10.1080/17476933.2013.876417).
2. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* Однородная задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и логарифмической особенностью индекса // Изв. вузов. Математика—2013.—№ 12.—С. 83–88.

СОБСТВЕННОЕ π-ИСЧЕРПАНИЕ ПЛОСКОСТИ

А. Б. Шишкин
(Россия, Краснодар; КубГУ)

Пусть G — открытое множество в $\mathbf{C}$, $O(G)$ — пространство локально аналитических в G функций с топологией равномерной сходимости на компактах, π — фиксированный элемент $O(G)$. Рассматриваем $O(G)$ как топологический модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$ многочленов от π.

Для любого $\lambda \in \pi(G)$ символом $\tilde{\lambda}$ обозначаем множество $\{z \in G : \pi(z) = \lambda\}$; $O(\tilde{\lambda})$ — кольцо ростков локально аналитических на $\tilde{\lambda}$ функций; $O_\pi(\tilde{\lambda})$ — подкольцо $O(\tilde{\lambda})$, состоящее из композиций $u \circ \pi$, $u \in O(\lambda)$. Рассматриваем $O(\tilde{\lambda})$ как модуль над кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda})$. Говорим, что замкнутый подмодуль $I \subseteq O(G)$ допускает локальной описание, если

$$I = \bigcap_{\lambda \in \pi(G)} (I(\tilde{\lambda}) \cap O(G)),$$

где $I(\tilde{\lambda})$ — подмодуль $O(\tilde{\lambda})$, порождаемый I.

Пусть $O^*(G)$ — сильное сопряженное пространство; $P(G)$ — интерпретация $O^*(G)$ в терминах преобразований Лапласа L_G; $\pi^* : O^*(G) \to O^*(G)$ — оператор, сопряженный умножению на функцию π; $\pi(D) : P(G) \to P(G)$ — дифференциальный оператор $L_G \circ \pi^* \circ L_G^{-1}$. Пространство $O^*(G)$ рассматриваем как топологический модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi^*]$ многочленов от π^*, а пространство $P(G)$ рассматриваем как топологический модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi(D)]$ многочленов от $\pi(D)$. Подмодули в $O^*(G)$ и в $P(G)$ называем инвариантными подпространствами. Говорят, что замкнутое инвариантное подпространство $V \subseteq O^*(G)$ (соответственно $W \subseteq P(G)$) допускает спектральный синтез, если оно совпадает с замыканием в $O^*(G)$ (соответственно в $P(G)$) линейной оболочки корневых элементов оператора π^* (соответственно $\pi(D)$), содержащихся в V (соответственно W).

Говорим, что открытое множество G допускает собственное π-исчерпание, если существуют открытые множества $G^{(n)} \subseteq \mathbf{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющие условиям:
- $G^{(1)} \subseteq G^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq G$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} G^{(n)} = G$;
- $\Lambda^{(n)} := \pi(G^{(n)})$ — односвязные области в $\mathbf{C}$;
- отображения $\pi : G^{(n)} \to \Lambda^{(n)}$ являются собственными.

Предложение 1. *Если открытое множество G допускает собственное π-исчерпание, то всякий замкнутый подмодуль в $O(G)$ допускает локальное описание.*

Предложение 2. *Если односвязная область G допускает собственное π-исчерпание, то всякое замкнутое инвариантное подпространство в $O^*(G)$ (соответственно в $P(G)$) допускает спектральный синтез.*

Неотрицательную функцию μ, определенную в окрестности $+\infty$, будем называть уточненным весом порядка $\rho \in [0, +\infty)$, если она возрастает, дифференцируема в окрестности $+\infty$ и

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\mu(r)}{\ln r} = \infty, \quad \lim_{r \to +\infty} \frac{\mu'(r)r}{\mu(r)} = \rho.$$

Если μ — уточненный вес порядка ρ, то функция $\rho(r) := \frac{\ln \mu(r)}{\ln r}$ является уточненным порядком. При $\rho > 0$ верно и обратное, то есть для любого уточненного порядка $\rho(r) \to \rho \in (0, +\infty)$ функция $\mu(r) := r^{\rho(r)}$ является уточненным весом.

Говорим, что множество $E \subset \mathbf{C}$ имеет нулевую относительную меру, если множество $|E| := \{|z| : z \in E\}$ имеет нулевую относительную меру. Далее будем предполагать, что $G = \mathbf{C}$, π — целая функция, удовлетворяющая условию: существуют уточненный вес μ порядка $\rho \in (0, +\infty)$, уточненный вес $\hat{\mu}$ порядка $\hat{\rho} \in [0, +\infty)$ и константа $\kappa \geqslant 1$ такие, что вне некоторого множества нулевой относительной меры выполняются оценки

$$\kappa^{-1}\mu(|z|) \leqslant \hat{\mu}(|\pi(z)|) \leqslant \kappa\mu(|z|). \tag{1}$$

Сужение целой функции π на открытое множество $G^{(n)} \subseteq \mathbf{C}$ является собственным отображением на $\pi(G^{(n)})$ тогда и только тогда, когда справедлива следующая импликация: если последовательность $z_k \in G^{(n)}$ не имеет в $G^{(n)}$ предельных точек, то последовательность $\pi(z_k)$ не имеет предельных точек в $\pi(G^{(n)})$. Используя это описание собственных отображений, можно доказать следующую лемму.

Лемма. *Если целая функция π удовлетворяет условию* (1), *то комплексная плоскость допускает собственное π-исчерпание.*

Из этой леммы вытекают следующие предложения.

Предложение 3. *Всякий замкнутый подмодуль в $O(\mathbf{C})$ допускает локальное описание.*

Предложение 4. *Всякое замкнутое инвариантное подпространство в $O^*(\mathbf{C})$ (соответственно в $P(\mathbf{C})$) допускает спектральный синтез.*

Секция II

Дифференциальные уравнения и математическое моделирование

ON PERTURBATION OF HAMILTONIAN NORMAL FORM

A. B. Batkhin
(Russia Moscow; KIAM)

Let $H(\mathbf{q},\mathbf{p})$ be a Hamiltonian with n DOF and the origin $\mathbf{q}=\mathbf{p}=0$ is a stationary point of corresponding system of canonical equations. So $H(\mathbf{q},\mathbf{p})$ is expanded into series over canonical variables $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$

$$H = H_2 + H_3 + \ldots + H_k + \ldots,$$

where H_k is homogeneous polynomial of order k.

Let all eigenvalues $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n})$ of matrix A of quadratic form H_2 are different and they can be grouped into pairs $\lambda_i = -\lambda_{n+i}$.

There exists a linear complex canonical transformation of coordinates [1] after which each term of H_k is written in complex form $h_{\mathbf{s}} z_1^{s_1} \cdots z_n^{s_n} \bar{z}_1^{s_{n+1}} \cdots \bar{z}_n^{s_{2n}}$, $\sum s_i = k$.

Definition. Hamiltonian

$$\widehat{H}(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}) = \sum h_{\mathbf{s}} z_1^{s_1} \cdots z_n^{s_n} \bar{z}_1^{s_{n+1}} \cdots \bar{z}_n^{s_{2n}}, \quad \sum s_i \geqslant 2$$

is called *normal form* of the original $H(\mathbf{q},\mathbf{p})$ if

1. its quadratic form
$$\widehat{H}_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \bar{z}_i,$$
2. in expansion remain only those terms of high order which vector power exponent $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_{2n}) \in \mathbb{N}^{2n}$ satisfies *resonance condition* $\langle \mathbf{s}, \Lambda \rangle = 0$.

Terms with such power exponents that $s_i = -s_{n+i}$ are called *secular terms*, other terms are called *resonance*.

Let matrix A of quadratic form H_2 is perturbed as follows $A = A^{(0)} + \varepsilon A^{(1)}$, where ε is a small parameter. If Hamiltonian H is analytical at the origin then its coefficients $\hat{h}_{\mathbf{s}}$ of NF are smoothly depended on original coefficients $h_{\mathbf{s}}$ of its expansion. In perturbed NF only those therms remain which indices satisfy resonance equation $\langle \mathbf{s}, \Lambda(\varepsilon) \rangle = 0$. So, coefficients of secular terms would be smooth function of ε and $\lim_{\varepsilon\to 0} \hat{h}_{\mathbf{s}}(\varepsilon) = \hat{h}_{\mathbf{s}}$. The resonance coefficients $\hat{h}_{\mathbf{s}}$ can be destroyed by small perturbation ε. For small ε eigenvalues and eigenvectors of perturbed quadratic form can be presented as series over ε:

$$\lambda_i(\varepsilon) = \lambda_i^{(0)} + \varepsilon \lambda_i^{(1)} + \ldots, \quad \mathbf{x}(\varepsilon) = \mathbf{x}_i^{(0)} + \varepsilon \mathbf{x}_i^{(1)} + \ldots$$

There exists an iterative procedure for computing corrections in the case of simple eigenvalues (see [2]).

We propose following enhancement of the standard algorithm for the case of multiple eigenvalues with linear elementary divisors.

- Corrections to the eigenvalues can be obtained from the Poiseux series over integer powers of perturbation parameters ε. Let $P(\lambda, \varepsilon)$ is characteristic polynomial of the perturbed matrix $A(\varepsilon)$. Using Newton polygon one can compute a Poiseux series for each root of the equation $P(\lambda, \varepsilon) = 0$ in following form: $\lambda_i = \lambda_i^{(0)} + \varepsilon\lambda_i^{(1)} + \dots$

- Let $\mathbf{x}_j^{(0)}, j = 1, \dots, k$ are linearly independent eigenvectors of the value $\lambda_i^{(0)}$ with multiplicity k. One can compose a set of linear combinations $\mathbf{z}_j = \beta_{jl}\mathbf{x}_j^{(0)}, l = 1, \dots, k$, where coefficients β_{jl} are elements of an orthogonal matrix B. If corrections $\lambda_i^{(1)}$ for each multiple root $\lambda_i^{(0)}$ are different, then it is possible to compose a set of conditions to determine such values of coefficients β_{jl} that computed by standard algorithm corrections to the eigenvalues would coincide with corrections obtained at the previous step.

This algorithm is applied for studying stability of certain multi parameter system of Hamilton.

Reference

1. *Bruno A. D.* The Restricted 3-Body Problem: Plane Periodic Orbits.—Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1994.—362 p.
2. *Lancaster P., Tismenetsky M.* Theory of Matrices.—San Diego: Acad. Press, 1985.—570 p.

АСИМПТОТИКА ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. А. Абиев

(Казахстан, Тараз; ТарГУ)

Рассматривается следующая система нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} y_t + y_x &= \varepsilon f(t,x,y,z), \\ \varepsilon(z_t + z_x) + az &= \varepsilon g(t,x,y,z), \end{aligned}$$

где $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, $y = y(t,x)$, $z = z(t,x)$, $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$, f, g — периодичны по t, x с периодом $T > 0$, непрерывны по всем своим аргументам и непрерывно дифференцируемы по аргументам y, z.

Используя результаты [1], можно доказать следующее.

Пусть $u(t,x) = \varphi(x-t)$, $v(t,x) \equiv 0$ — одно из бесчисленных периодических решений системы

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= 0, \\ v &= 0, \end{aligned}$$

удовлетворяющее тождеству $\int_0^T f(s, x-t+s, \varphi(x-t), 0)\, ds \equiv 0$. Тогда имеют место следующие асимптотические оценки:

$$\|y - u\| = O(\varepsilon), \quad \|z - v\| = O(\varepsilon).$$

Литература

1. *Иманалиев М. И., Абиев Н. А.* О существовании ветвящегося периодического решения и его асимптотике для одной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Исследования по интегро-дифференц. уравнениям.—1999.—Вып. 28.—С. 8–18.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ МОНОТОННОГО ТИПА[1]

С. Н. Асхабов

(Россия, Грозный; ЧГУ)

Методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов получены теоремы о существовании и единственности решений для различных классов нелинейных дискретных уравнений типа свертки в пространствах ℓ_p, состоящих из вещественных числовых последовательностей $u = \{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ таких, что $\|u\|_p = \left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p} < \infty$ при $1 \leqslant p < \infty$ и $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in Z} |u_n| < \infty$ при $p = \infty$, где Z есть множество всех целых чисел. Обозначим $p' = p/(p-1)$.

Лемма 1. *Пусть $p \in (1,\infty)$, $h \in \ell_1$ и $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \cdot \cos(k\cdot t) \geqslant 0$, $\forall t \in [0,\pi]$. Если $b \in \ell_\infty$ при $1 < p \leqslant 2$ и $b \in \ell_{2p/(p-2)}$ при $2 < p < \infty$, то дискретный оператор типа свертки $Bu = b_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k h_{n-k} u_k$, $n \in Z$, действует непрерывно из ℓ_p в $\ell_{p'}$ и положителен.*

Введем в рассмотрение нелинейный дискретный оператор оператор Немыцкого. Пусть вещественная функция $F(k,t)$ определена при $k \in Z$, $t \in R$ и является непрерывной по t при каждом фиксированном k. Тогда дискретный оператор Немыцкого F, порожденный функцией $F(k,t)$, определяется по правилу: $Fu = \{(Fu)_k\}_{k=-\infty}^{\infty} = \{F(k,u_k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $\forall u = \{u_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell_p$.

Теорема 1. *Пусть $p \in (1,\infty)$ и выполнены условия леммы 1. Если нелинейность $F(k,t)$ при любом $k \in Z$ удовлетворяет условиям:*

1) $|F(k,t)| \leqslant a_k + d_1 \cdot |t|^{p-1}$, *где* $a \in \ell_{p'}^{+}$, $d_1 > 0$;

2) $F(k,t_1) \leqslant F(k,t_2)$ *при* $t_1 < t_2$;

3) $F(k,t)\cdot t \geqslant d_2 \cdot |t|^p$, *где* $d_2 > 0$,

то при любом $f \in \ell_{p'}$ уравнение

$$F(n,u_n) + b_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k h_{n-k} u_k = f_n, \quad n \in Z, \tag{1}$$

имеет решение $u^* \in \ell_p$. Решение u^* единственно, если нелинейность $F(k,t)$ строго возрастает по t.

Лемма 2. *Пусть $p \in (1,\infty)$, $h = \{h_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell_1$ и $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \cdot \cos(k\cdot t) \geqslant 0$, $\forall\, t \in [0,\pi]$. Если $b \in \ell_{2p/(2-p)}$ при $1 < p < 2$ и $b \in \ell_\infty$ при $2 \leqslant p < \infty$, то дискретный оператор типа свертки B действует непрерывно из $\ell_{p'}$ в ℓ_p и положителен.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00422-а.

Теорема 2. *Пусть $p \in (1,\infty)$, выполнены условия леммы 2 и нелинейность $F(k,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 со строгим знаком неравенства в условии 2). Тогда при любом $f \in \ell_p$ уравнение*

$$u_n + b_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k h_{n-k} F(k, u_k) = f_n, \quad n \in Z, \tag{2}$$

имеет единственное решение $u^* \in \ell_p$.

Теорема 3. *Пусть $p \in (1,\infty)$ и выполнены условия леммы 1. Если нелинейность $F(k,t)$ при любом $k \in Z$ удовлетворяет условиям:*

4) $|F(k,t)| \leqslant g_k + d_3 \cdot |t|^{1/(p-1)}$, *где* $g \in \ell_p^+$, $d_3 > 0$;

5) $F(k,t_1) < F(k,t_2)$ *при* $t_1 < t_2$;

6) $F(k,t) \cdot t \geqslant d_4 \cdot |t|^{p/(p-1)}$, *где* $d_4 > 0$,

то при любом $f \in \ell_p$ уравнение

$$u_n + F\left(n,\ b_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k h_{n-k} u_k\right) = f_n, \quad n \in Z, \tag{3}$$

имеет единственное решение $u^* \in \ell_p$.

Заметим, что аналоги теорем 1–3, установленных в данной работе при любых $p \in (1,\infty)$, доказаны в [1], в зависимости от рассматриваемого класса нелинейных дискретных уравнений типа свертки, либо только при $1 < p \leqslant 2$, либо только при $2 \leqslant p < \infty$.

Аналогичные результаты установлены для трех различных классов нелинейных интегральных уравнений типа свертки (соответствующих дискретным уравнениям (1)–(3)), содержащих оператор P_{01}^{φ}, введенный А. М. Нахушевым [2].

Литература

1. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свертки.—М.: Физматлит, 2009.—304 с.
2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А. К. Баззаев

(Россия, Владикавказ; ВИУ)

1. Постановка задачи

В прямоугольнике $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < \ell,\ 0 < t \leqslant T\}$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \partial_{0x}^{\beta} u + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \beta_1(t)u - \mu_1(t),\ x = 0, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x} = \beta_2(t)u - \mu_2(t),\ x = \ell, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{3}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \dfrac{u_\tau(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \partial_{0x}^{\beta} u = \dfrac{1}{\Gamma(2-\beta)} \displaystyle\int_0^x \dfrac{u_{\eta\eta}(\eta,t)d\eta}{(x-\eta)^{\beta-1}}$ — соответственно регуляризованные дробные производные по времени порядка $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$ и по пространственной координате x порядка $\beta,\ 1 < \beta \leqslant 2$; $\beta_1,\ \beta_2 \geqslant \beta_* > 0$.

2. Разностная схема

Дифференциальной задаче (1) — (3) поставим в соответствие разностную схему

$$\begin{gathered} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha} \right) y_t^s = \\ \frac{1}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{s=0}^{i} \left(x_{i-s+1}^{2-\beta} - x_{i-s}^{2-\beta} \right) (\sigma \widehat{y}_{\overline{x}x,s} + (1-\sigma) y_{\overline{x}x,s}) + \varphi_i, \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{cases} (y_{x,0} - \beta_1 y_0)^{(\sigma)} = -\mu_1, \\ -(y_{\overline{x},N} + \beta_2 y_N)^{(\sigma)} = -\mu_2, \end{cases} \tag{5}$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma \widehat{y} + (1-\sigma) y,$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{6}$$

где $\widehat{y} = y^{j+1},\ y = y^j,\ y_{x,0} = (y_1 - y_0)/h,\ y_{\overline{x},N} = (y_N - y_{N-1})/h,\ \beta_1,\ \beta_2 \geqslant \beta_* > 0$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.

Схема (4)–(6) имеет порядок аппроксимации $O(h+\tau)$.

3. Устойчивость разностной схемы

С помощью принципа максимума (см. [1]) для решения разностной задачи (4)(–6) (для простоты рассмотрен случай при $\sigma = 1$) получена априорная оценка

$$\|y^{j+1}\|_{C_h} \leqslant \|u_0(x)\|_{C_h} + \frac{2}{\beta_*}\left(\max_{0\leqslant k\leqslant j}|\mu_1(t_k)| + \max_{0\leqslant k\leqslant j}|\mu_2(t_k)|\right) +$$

$$+\frac{\ell^{\beta-1}\Gamma(2-\beta)}{\beta_*}\max_{0<t'\leqslant(j+1)\tau}\|\varphi(x,t')\|_{C_h}, \qquad (0.1)$$

из которой следует равномерная сходимость разностной схемы (4) – (6) со скоростью $O(h+\tau)$, $\|y\|_{C_h} = \max\limits_{x\in\omega_h}|y(x)|$.

Литература

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656 с.

ГЕОМЕТРИЯ КАНОНИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И СТРУКТУР НА ОДНОРОДНЫХ k-СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. В. Балащенко

(Беларусь, Минск; БелГУ)

Классические аффинорные структуры (почти произведения, почти комплексные, f-структуры К. Яно и др.) на гладких многообразиях естественно порождают два или более (действительных либо комплексных) взаимно дополнительных распределений. Такие распределения важны во многих разделах дифференциальной геометрии и ее приложениях, например, в проблеме контактной линеаризации и классификации уравнений Монжа-Ампера (см. [1]).

Особый интерес представляют инвариантные распределения на однородных многообразиях, в частности, на однородных k-симметрических пространствах G/H, которые порождаются автоморфизмами порядка k группы Ли G. Такие пространства обладают богатым запасом *канонических* аффинорных структур, порождающих *канонические* распределения на G/H [2]. Примечательной особенностью является то, что все канонические структуры и канонические распределения инвариантны не только относительно группы Ли G, но и всех обобщенных симметрий порядка k на G/H. Отметим важную роль канонических структур и канонических распределений при изучении эллиптических интегрируемых систем (см. [3]).

Нами получена характеризация канонических распределений на римановых однородных k-симметрических пространствах в смысле их принадлежности следующим типам: $\boldsymbol{AF}$ (анти-слоение), $\boldsymbol{F}$ (слоение), $\boldsymbol{TGF}$ (вполне геодезическое слоение) [4]. В частности, установлены критерии для этих типов на k-симметрических пространствах порядков $k = 4, 5, 6$. Приведем результаты для случая $k = 6$.

Теорема. *Пусть G/H — однородное 6-симметрическое пространство, где G — компактная полупростая группа Ли. Пусть g — инвариантная диагональная риманова метрика на G/H, задаваемая характеристическим набором $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ относительно разложения канонического редуктивного дополнения $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3$, где подпространства $\mathfrak{m}_i$, $i = 1, 2, 3$ порождают базовые канонические распределения на G/H. Тогда:*

1. *$\mathfrak{m}_2$ and $\mathfrak{m}_3$ принадлежат типу $\boldsymbol{TGF}$.*

2. *$\mathfrak{m}_1$ принадлежит типу $\boldsymbol{TGF}$ тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{h}$.*

3. *$\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ принадлежит типу $\boldsymbol{AF}$ тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих двух условий:*

(*a*) $\lambda_1 = \lambda_2$;

(*b*) $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_1$.

4. *$\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ принадлежит типу $\boldsymbol{F}$ тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_1$. Это условие является также критерием принадлежности типу $\boldsymbol{TGF}$.*

5. $\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_3$ *принадлежит типу* $\boldsymbol{AF}$ *тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих двух условий:*

(*a*) $\lambda_1 = \lambda_3$;

(*b*) $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_3] = 0$.

6. $\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_3$ *принадлежит типу* $\boldsymbol{F}$ *тогда и только тогда, когда выполняются оба следующих условия:* $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_3] = 0$. *Это условие является также критерием принадлежности типу* $\boldsymbol{TGF}$.

7. $\mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3$ *принадлежит типу* $\boldsymbol{AF}$ *тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих двух условий:*

(*a*) $\lambda_2 = \lambda_3$;

(*b*) $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3] = 0$.

8. $\mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3$ *принадлежит типу* $\boldsymbol{F}$ *тогда и только тогда, когда* $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3] = 0$. *Это условие является также критерием принадлежности типу* $\boldsymbol{TGF}$.

Литература

1. *Kushner A. G.* Almost product structures and Monge-Ampèr equations // Lobachevskii J. Math.—2006.—Vol. 23.—P. 151–181.
2. *Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Однородные пространства: теория и приложения.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
3. *Khemar I.* Elliptic integrable systems: a comprehensive geometric interpretation.—Nancy: Universite Henri Poincare, 2012.—217 p.—(Memoirs of the AMS; Vol. 219, № 1031).
4. *Balashchenko V. V.* Canonical distributions on Riemannian homogeneous k-symmetric spaces // J. of Geometry and Physics. Available online 21 April 2014.—URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.04.008.

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ФОНОВОЙ СОЦИАЛЬНОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ

Басаева Е. К. (Россия, Владикавказ, ЮМИ),
Каменецкий Е. С. (Россия, Владикавказ, ВНЦ),
Хосаева З. Х. (Россия, Владикавказ, ВНЦ)

Одной из причин протестной активности населения является воздействие потока информации. Степень информационного воздействия существенно зависит от текущего состояния общества, которое можно назвать фоновой напряженностью. Представляет интерес количественная оценка фоновой напряженности общества по статистическим индикаторам. Поскольку оценка состояния общества по одному статистическому индикатору, подверженному случайным флуктуациям и, возможно, преднамеренным или непреднамеренным искажениям, недостаточно достоверна, желательно использовать несколько независимых индикаторов.

Для РФ в качестве независимых индикаторов социальной напряженности мы предлагаем: число самоубийств, число убийств и покушений на убийства и разность коэффициентов разводимости и брачности. Коэффициенты корреляции между рассматриваемыми временными рядами для РФ очень высоки: от 0.85 до 0.94.

Поскольку количественные значения индикаторов различаются по порядку величин, то для их лучшего сопоставления необходима нормировка. Приняв максимальную напряженность за рассматриваемый период равной 0.45, а минимальную — 0.05, получим следующее выражение для нормировки:

$$P_i = 0.05 + \frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \cdot 0.4,$$

где x_i, $x_{\min}$ и $x_{\max}$ — текущее, наименьшее и наибольшее значения нормируемого индикатора за рассматриваемый период времени.

Представляет интерес выявление факторов, от которых зависит социальная напряженность общества. Разумно предположить, что одним из основных факторов будет изменение экономической ситуации, которое будем оценивать по темпу роста ВВП. Для того чтобы связать изменение ВВП с фоновой социальной напряженностью можно использовать следующую простую модель:

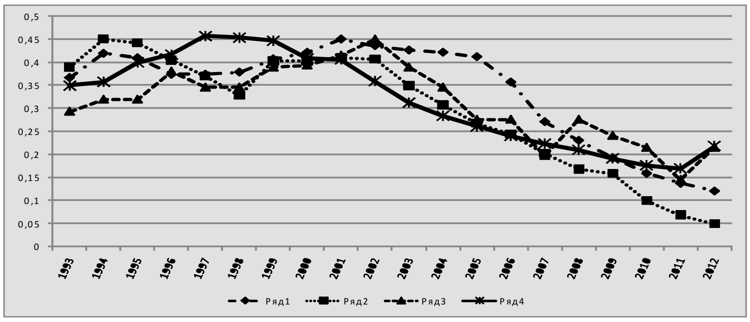
$$\frac{\triangle P}{\triangle t} = \gamma(P_{\text{э}} - P),$$

где $P_{\text{э}}$ — величина напряженности, к которой стремится общество при постоянном темпе роста ВВП, а γ — константа, характеризующая скорость адаптации общества к меняющейся экономической ситуации. Значение $P_{\text{э}}$ — должно стремиться к нулю при стремительном росте ВВП и к единице при его быстром падении. Возможным видом зависимости $P_э$ от темпов роста ВВП является следующая:

$$P_э = \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(b\frac{\triangle E}{E}\right)\right)\right]^n.$$

Отметим, что расчеты лучше совпадают с динамикой нормированных индикаторов, если использовать темп роста ВВП с лагом в три года.

На рисунке представлено сравнение результатов расчета по модели с нормированными значениями индикаторов. (Ряд 1 — нормированные значения разностей разводов и браков; Ряд 2 — нормированные количества самоубийств; Ряд 3 — нормированные количества убийств; Ряд 4 — результаты расчетов по модели.)



Видно, что предложенная модель удовлетворительно описывает основную тенденцию изменения напряженности общества в РФ в течение рассматриваемого периода (1994–2012 гг.), отличавшегося относительной политической стабильностью.

Заметим, что рассмотренное фоновое значение социальной напряженности неоднозначно связано с протестной активностью населения.

ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ С ВЕСАМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В. Д. Бейбалаев

(Россия, Махачкала; ДГИНХ)

Работа посвящена исследованию устойчивости по начальным данным и по правой части разностной схемы с весами для уравнения теплопроводности с оператором дробного дифференцирования.

Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения для уравнения теплопроводности с операторами дробного дифференцирования.

Задача. В области $D = \{(x,t) : 0 < x < R,\ 0 < t < T\}$ найти решение уравнения

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) = C(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию и краевым условиям

$$\begin{gathered} u(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(R,t) = \mu_2(t), \end{gathered} \tag{2}$$

где

$$0 < \alpha \leqslant 1, \quad C(x,t) \geqslant 0, \quad \partial_{0t}^{\alpha}(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u(x,s)}{(t-s)^{\alpha}}\, ds$$

— частная дробная производная Caputo. Здесь $u(x,t)$ — температура, $C(x,t) \geqslant 0$ — коэффициент теплопроводности, $f(x,t)$ — удельная плотность тепловыделения за счет внутренних источников.

Численный метод решения краевой задачи для уравнения теплопроводности с операторами дробного дифференцирования. Решение задачи (1), (2) найдем численным методом. Для этого в области $\overline{D}\{(x,t) : 0 < x < R,\ 0 < t < T\}$ введем сетку

$$\overline{W}\Big\{(x_m,t_n):\ x_m = mh,\ t_n = n\tau,\ m = 0,1,\ldots,M,\qquad h = \frac{R}{M},\ n = 0,1,2,\ldots,N,\ \tau = \frac{T}{N}\Big\}$$

с шагом h по x и по t.

Для производной дробного порядка имеет место следующая разностная аппроксимация:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{n} \frac{u(x,t_{k+1}) - u(x,t_k)}{\tau^{\alpha}} \cdot ((n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha}) + R_n, \tag{3}$$

где $R_n \leqslant \frac{Mt_n^{1-\alpha}\tau}{\Gamma(2-\alpha)} = O(\tau)$, ξ — некоторая промежуточная точка между s и t_k.

А для частной производной $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ имеет место аппроксимация:

$$\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)_m = \frac{u(x_{m+1},t) - 2u(x_m,t) + u(x_{m-1},t)}{h^2} + O(h^2). \tag{4}$$

Воспользовавшись разностными аппроксимациями (3) и (4) получим разностную задачу с весами

$$\begin{gathered}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\sum_{k=0}^{n+1}\left(u_m^{k+1} - u_m^k\right)\left((n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha}\right) = \\ = C_m^n\left(\sigma\Lambda u_m^{n+1} + (1-\sigma)\Lambda u_m^n\right) + \varphi_m^n,\end{gathered} \tag{5}$$

$$u_0^n = \mu_1(t_n), \quad u_m^n = \mu_2(t_n), \quad u_m^0 = \psi(x_m), \tag{6}$$

где

$$C_m^n = C(x_m, t_n), \quad f_m^n = f(x_m, t_n),$$

$$\Lambda u_m^{n+1} = \frac{u_{m+1}^{n-1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}, \quad \Lambda u_m^n = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}.$$

Разностную схему (5) запишем в операторном виде

$$\begin{gathered}(E + \sigma\cdot\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha A)u^{n+1} = (B + (1-\sigma)\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha A)u^n + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha\varphi^n - \\ - \sum_{k=1}^{n-2}(u^{k+1} - u^k)\left((n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha}\right).\end{gathered} \tag{7}$$

где

$$u^n = (u_1^n, u_2^n, \ldots, u_{N-1}^n), \quad \varphi^n = (\varphi_1^n, \varphi_2^n, \ldots, \varphi_{N-1}^n)^T,$$

$$u^0 = (u_0(x_1), u_0(x_2), \ldots, u_0(x_{N-1}))^T, \quad (Au)_m = -C_m^n\frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m+1}}{h^2},$$

$$\begin{pmatrix} 2-2^{1-\alpha} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2-2^{1-\alpha} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-2^{1-\alpha} \end{pmatrix}$$

Устойчивость разностной схемы по начальным данным. Разрешимость уравнения (7) относительно u^{n+1} эквивалентна обратимости оператора $E + \sigma\cdot\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha A$. Оператор $E + \sigma\cdot\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha A$ будет иметь обратный, если потребовать $1 + \sigma\cdot\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha\lambda_k > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, где $\lambda_k > 0$ собственные числа оператора A.

Получена оценка

$$1 + \sigma\cdot\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha\lambda_s \geqslant \frac{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha\lambda_s}{2} + \frac{2^{1-\alpha} - 1}{2} > 0. \tag{8}$$

Следовательно,

$$\|\overline{u}^{n+1}\| \leqslant \|\overline{u}^n\|. \tag{9}$$

Это означает устойчивость разностной схемы по начальным данным.

Устойчивость по правой части и сходимость. Для правой части

$$\widetilde{u}_m^{n+1} = \sum_{s=1}^{M-1} [q_s \hat{\varphi}_s(t_n)] \mu_s(x_m)$$

получена оценка

$$\|\widetilde{u}^{n+1}\| \geqslant \frac{\tau}{\varepsilon} \|\varphi^n\|. \tag{10}$$

Имеем

$$\left\| \overline{\overline{u}}^{n+1} \right\| \leqslant \sum_{s=1}^{M-1} \left(\frac{1}{1 + \sigma \cdot \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha \lambda} \right)^2 (\triangle_\tau^\alpha c_s(t_n))^2, \quad \left\| \overline{\overline{u}}^{n+1} \right\| \leqslant \frac{g\tau^\alpha}{\varepsilon}, \tag{11}$$

где $g = \mathrm{const}$.

Используя неравенство треугольника

$$\left\| u^{n+1} \right\| \leqslant \left\| \overline{u}^{n+1} \right\| + \left\| \widetilde{u}^{n+1} \right\| + \left\| \overline{\overline{u}}^{n+1} \right\|$$

и оценки (9), (10) и (11) и учитывая условие $\tau n \leqslant T$, получаем неравенство

$$\left\| u^{n+1} \right\| \leqslant \left\| \overline{u}^0 \right\| + \frac{T}{\varepsilon} \max_{0 \leqslant j \leqslant n} \left\| \varphi^j \right\| + \frac{g\tau^\alpha}{\varepsilon}. \tag{12}$$

Таким образом, если выполнено условие (12), то разностная задача (5), (6) устойчива по начальным данным и по правой части.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Элементы дробного исчисления и их применение.—Нальчик, 2003.—299 с.
2. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы.—М.: Наука, 1989.—430 с.
3. *Бейбалаев В. Д.* Математическая модель переноса в средах с фрактальной структурой // Мат. моделирование.—М., 2009.—Т. 21., № 5.—С. 55–62.
4. *Назаралиев М. А., Бейбалаев В. Д.* Численные методы решения краевой задачи для уравнения теплопереноса с производной дробного порядка // Вестн. ДГУ.—2008.—Вып. 6.—С. 46–53.
5. *Бейбалаев В. Д.* Одношаговые методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка // Вестн. ДГУ.—2011.—Вып. 6.—С. 67–72.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ЧЕБЫШЕВА

З. В. Бесаева

(РЮО, Цхинвал; ЮОГУ)

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение 1-го рода:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_0(t)}{t-x}\,dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}K(x,t)\,\varphi_0(t)\,dt=f(x), \tag{1}$$

Уравнению (1) соответствует решение вида [2]

$$\varphi_0(t)=\frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ достаточно гладкая на отрезке $[-1;1]$.

Заменим неизвестную функцию $\varphi(t)$ ее разложением в ряд Чебышева:

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\,T_{k-1}(t), \tag{3}$$

где $T_{k-1}(t)$ — многочлен Чебышева первого рода [4], C_k — неопределенные коэффициенты. Подставим полученное разложение в уравнение (1) и после несложных преобразований получим

$$\sum_{k=2}^{n}C_k\,U_{k-2}(x)+\sum_{k=1}^{n}C_k\cdot\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}K(x,\bar{x}_j)\,T_{k-1}(\bar{x}_j)=f(x), \tag{4}$$

где $U_{k-2}(x)$ — многочлен Чебышева второго рода, $\bar{x_j}=\cos\frac{2j-1}{2n}\pi$.

Единственность решения зависит от условия [2, 3]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=C. \tag{5}$$

Придавая t значения $-1+ih$, $h=\frac{2}{n+1}$, $i=1,\dots,n-1$, получим

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=2}^{\infty}C_k\,U_{k-2}(x_i)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}C_k\cdot\frac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^{m}K(x_i,\bar{x}_j)\,T_{k-1}(\bar{x}_j)=f(x_i),\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}C_k\cdot\frac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^{m}T_{k-1}(\bar{x}_j)=C.\end{cases} \tag{6}$$

В дальнейшем будем рассматривать приближенное значение функции $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(t) \approx \sum_{k=1}^{n} C_k\, T_{k-1}(t).$$

Тогда система (6) примет вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=2}^{n} C_k\, U_{k-2}(x_i) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \frac{1}{m} \sum\limits_{j=1}^{m} K(x_i, \bar{x}_j)\, T_{k-1}(\bar{x}_j) = f(x_i), \\ \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \cdot \frac{1}{m} \sum\limits_{j=1}^{m} T_{k-1}(\bar{x}_j) = C. \end{cases} \tag{7}$$

Решение системы (7) относительно неизвестных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ дает приближенное решение уравнения (1):

$$\varphi_0(t) \approx \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} C_k\, T_{k-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Литература

1. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов.—М: Наука, 1967.—500 с.
2. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М: Янус, 1995.—520 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М: Наука, 1968.—511 с.
4. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.—М: Наука, 1983.—384 с.
5. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены.—М: Наука, 1970.—415 с.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

А. И. Бодренко

(Россия, Волгоград; ВолГУ)

Для заданного натурального числа $n > 1$ рассмотрим $(n+1)$-мерное и n-мерное евклидовы пространства E^{n+1} и E^n. Введем в E^{n+1} декартову прямоугольную систему координат $(y^1, \ldots, y^{n+1})$, в E^n — декартову прямоугольную систему координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Обозначим через K_r открытый шар радиуса $r > 0$ в E^n.

Пусть Φ — односвязная ориентируемая гиперповерхность с краем $\partial\Phi$ в E^{n+1}. Пусть

1) $h : \Phi \to K_r$ — гомеоморфизм Φ на K_r;

2) обратное отображение $h^{-1}(x) \equiv (f^1(x), \ldots, f^{n+1}(x))$, где $x = (x^1, \ldots, x^n) \in K_r$, удовлетворяет условию: $f^\alpha \in C^{3,s}(\overline{K}_r)$, $s \in (0,1)$, $\alpha = \overline{1, n+1}$.

Тогда Φ можно задать системой уравнений

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \ldots, x^n), \quad (x^1, \ldots, x^n) \in K_r, \quad \alpha = \overline{1, n+1},$$

где $f^\alpha \in C^{3,s}(\overline{K}_r)$.

Пусть Φ не имеет действительных асимптотических направлений, то есть все главные кривизны Φ имеют в каждой точке одинаковый знак. Не ограничивая общности, ориентируем Φ единичным вектором нормали так, чтобы средняя кривизна гиперповерхности Φ была положительной в каждой точке. Пусть все главные кривизны гиперповерхности Φ строго положительны на Φ. Обозначим через (n^α) координаты единичного вектора нормали гиперповерхности Φ в точке $(y^\alpha) \in \Phi, H = nh_1/2$, где h_1 — средняя кривизна гиперповерхности Φ в точке (y^α). Векторы $\{y^\alpha_{,i}\}_{i=1}^n$ образуют базис касательного пространства к Φ в точке (y^α), где символ i'' означает ковариантную производную в метрике гиперповерхности Φ. Пусть $g_{ij} = \delta_{\alpha\beta} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j}$ — метрический тензор гиперповерхности Φ, где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Пусть g^{kl} — тензор, обратный к g_{ij}, $g = det||g_{ij}||, b_{ij}$ — тензор второй квадратичной формы гиперповерхности Φ. Так как все главные кривизны гиперповерхности Φ положительны, то вторая квадратичная форма $b_{ij}dx^i dx^j$ гиперповерхности положительно определена, и, следовательно, $det||b_{ij}|| > 0$. Обозначим через b^{*ij} тензор, обратный к тензору b_{ij}: $b^{*ij} b_{ik} = \delta^j_k$, где δ^j_k — символ Кронекера.

Рассмотрим дифференциальный оператор L, записываемый в координатной форме на Φ в виде:

$$L = -\frac{1}{2H\sqrt{g}} \partial_k(\sqrt{g} b^{*ik} \partial_i) + 1.$$

Сформулируем задачу К: Требуется найти на Φ решение f класса $C^{2,s}(\Phi)$ уравнения:

$$Lf = \mu f + \gamma,$$

при условии:

$$\frac{\partial f}{\partial N} \equiv b^{*ik}\partial_i(f)\cos(\bar{n}, x_k)_{|\partial\Phi} = \psi,$$

где μ — действительное число, $\gamma \in C^{0,s}(\Phi)$, $n^k \equiv \cos(\bar{n}, x^k)$ — координаты вектора внешней нормали к поверхности ∂K_r в соответствующей точке. $cos(\bar{n}, x_k)$ — направляющие косинусы вектора внешней конормали: $cos(\bar{n}, x_k) = g_{ik}n^i$ к поверхности ∂K_r в соответствующей точке. Не ограничивая общности, можем считать, что функция ψ удовлетворяет условиям: $\psi \in C^{1,s}(\Phi)$ и $\psi \in C^{1,s}(\partial\Phi)$.

Исследуем разрешимость краевой задачи K (см. [1, гл. 2]).

Теорема. *Существует не более чем счетное множество действительных чисел $\mu_s (s = 1, 2, \ldots)$ $1 = \mu_1 < \mu_2 < \ldots$, не имеющее конечных предельных точек и такое, что задача K для $\mu \neq \mu_s (s = 1, 2, \ldots)$ имеет единственное решение f класса $C^{2,s}(\Phi)$.*

Литература

1. *Бодренко А. И.* Проблема Минковского в римановом пространстве. Деформации поверхностей.—Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Acad. Publ., 2013.—144 с.

ПОДМНОГООБРАЗИЯ С РЕКУРРЕНТНЫМИ НОРМАЛЬНЫМИ ВЕКТОРНЫМИ ПОЛЯМИ

И. И. Бодренко

(Россия, Волгоград; ВолГУ)

Пусть F^n — n-мерное ($n \geqslant 2$) гладкое подмногообразие в $(n+p)$-мерном ($p \geqslant 1$) пространстве постоянной кривизны $M^{n+p}(\widetilde{c})$. В геометрии погруженных многообразий важное место занимают исследования, касающиеся подмногообразий $F^n \subset M^{n+p}(\widetilde{c})$ со специальными свойствами второй фундаментальной формы.

Обозначим через b вторую фундаментальную форму F^n, через D — нормальную связность, через $\overline{\nabla}$ — связность Ван дер Вардена — Бортолотти.

Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется параллельной (в связности $\overline{\nabla}$), если $\overline{\nabla} b = 0$. Подмногообразия с $\overline{\nabla} b = 0$ называются параллельными. Параллельные подмногообразия F^n в пространствах постоянной кривизны $M^{n+p}(\widetilde{c})$ являются внешне-геометрическими аналогами локально симметрических пространств, то есть римановых пространств с ковариантно постоянным тензором кривизны R.

Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется рекуррентной, если на F^n существует 1-форма μ такая, что $\overline{\nabla} b = \mu \otimes b$.

Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется циклически рекуррентной [1], если на F^n существует 1-форма μ такая, что

$$\overline{\nabla}_X b(Y,Z) = \mu(X) b(Y,Z) + \mu(Y) b(Z,X) + \mu(Z) b(X,Y)$$

для любых векторных полей X, Y, Z, касательных к F^n.

Подмногообразие $F^n \subset M^{n+p}(\widetilde{c})$ с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой $b \neq 0$ будем называть циклически рекуррентным подмногообразием [1].

Класс циклически рекуррентных подмногообразий содержит подклассы параллельных подмногообразий и не параллельных рекуррентных подмногообразий, но не исчерпывается ими. Некоторые свойства гиперповерхностей F^n с циклически рекуррентной не параллельной второй фундаментальной формой в евклидовых пространствах E^{n+1} установлены в [2].

В терминах второй фундаментальной формы b подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\widetilde{c})$ определяются специальные классы нормальных векторных полей. В [1] описаны параллельные нормальные поля вдоль геодезических на циклически рекуррентных подмногообразиях F^n в пространствах постоянной кривизны $M^{n+p}(\widetilde{c})$.

Нормальное векторное поле $b(T,T)$, определенное для любого единичного векторного поля T, касательного к F^n, называется полем вектора нормальной кривизны на $F^n \subset M^{n+p}(\widetilde{c})$.

Пусть γ — кривая на F^n, T_γ — единичное векторное поле, касательное к γ. Определим поле вектора нормальной кривизны вдоль γ как $b(T_\gamma, T_\gamma)$.

Определение. Поле вектора нормальной кривизны $b(T_\gamma, T_\gamma)$, заданное вдоль кривой γ на подмногообразии $F^n \subset M^{n+p}(\widetilde{c})$, называется рекуррентным, если существует функция f на F^n, $f(x) \neq 0, \forall x \in F^n$, такая, что

$$D_{T_\gamma}(f(x)b(T_\gamma, T_\gamma)) = 0, \quad \forall\, x \in \gamma.$$

Замечание. Понятие рекуррентного вектора нормальной кривизны для подмногообразия F^n в евклидовом пространстве E^{n+p} введено в [3].

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть F^n — подмногообразие без асимптотических направлений в пространстве постоянной кривизны $M^{n+p}(\widetilde{c})$. F^n является циклически рекуррентным подмногообразием тогда и только тогда, когда вдоль любой геодезической $\gamma \subset F^n$ поле вектора нормальной кривизны $b(T_\gamma, T_\gamma)$ является рекуррентным.*

Литература

1. *Бодренко И. И.* Обобщенные поверхности Дарбу в пространствах постоянной кривизны.—Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Acad. Publ., 2013.—200 с.
2. *Bodrenko I. I.* A generalization of Bonnet's theorem on Darboux surfaces // Math. Notes.—2014.—Vol. 95, № 6.—P. 760–767.
3. *Фоменко В. Т.* Об одном обобщении поверхностей Дарбу // Мат. зам.—1990.—Т. 48, № 2.—С. 107–113.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ, ВЫБРАСЫВАЕМЫХ АВТОТРАНСПОРТОМ

М. В. Волик

(Россия, Владикавказ; ЮМИ;
Владикавказ; Финансовый университет)

В данной работе математическое моделирование распространения загрязняющих веществ, выбрасываемых автотранспортом, в городской застройке с домами одинаковой высоты проводилось с помощью свободно распространяемого пакета OpenFoam и удаленного доступа к суперкомпьютеру Web-лаборатории UniHUB (www.unihub.ru) по программе «Университетский кластер» (www.uniclaster.ru).

Решаемая в OpenFOAM задача обязательно содержит: начальные и граничные условия; расчетную сетку, а также физические свойства и параметры интегрирования уравнений [1]. Предполагалось, что движущийся воздух является несжимаемой жидкостью. Для проведения вычислительных экспериментов использовался стандартный решатель pimpleFoam для турбулентного течения жидкости, в котором применяется алгоритм связи скорости и давления Pimple. Система уравнений включала уравнение неразрывности и уравнение изменения импульса. Турбулентность моделировалась с использованием стандартной $K-\varepsilon$ модели, для которой решались уравнения для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации. В пакете OpenFOAM можно строить свои решатели для задач механики сплошной среды. В рамках данной работы разработан собственный решатель myPimpleFoam, который позволяет также решать уравнение для определения концентрации загрязняющих веществ.

Вычислительный эксперимент проводился в двумерной постановке для интервала времени от 0 до 1500 с. (с шагом 0.001 с.) Расчетная сетка представляет собой прямоугольную область с шагом по пространству 1 м и включает в себя типичную конфигурацию городской застройки с домами одинаковой высоты, равной 15 м. Ширина улицы принималась равной одной высоте домов, расстояние от входной границы до подветренной стороны застройки — десяти высотам, от наветренной стороны застройки до выходной границы — двадцати высотам, от нижней границы расчетной области до верхней границы — шести высотам. Исследуются следующие городские застройки: одна улица и две параллельные улицы, в которых ширина застройки между улицами составляла одну высоту домов.

Результаты расчетов для обоих случаев показали, что внутри уличных каньонов образуются воздушные вихри, движущиеся против часовой стрелки, причем скорость воздуха в улице, расположенной второй по течению, значительно ниже. Над застройкой наблюдается также многовихревая структура, которая сносится потоком в сторону выходной границы и затрудняет проветривание улиц.

Концентрация загрязняющих веществ на высоте 2 м от нижней границы расчетной области максимальна ближе к наветренной стороне улиц. Кроме того, проводится сравнение концентрации загрязняющих веществ на высоте пять, десять и пятнадцать метров от нижней границы, которое показало, что с увеличением расстояния концентрация загрязняющих веществ уменьшается, но остается максимальной на наветренной стороне.

Также получено, что загрязняющие вещества в небольшой концентрации выносятся из улиц вверх, видимо, за счет вихревой структуры над застройкой.

Литература

1. *Крапошин М. В., Самоваров О. И., Стрижак С. В.* Пакет OpenFoam: численное моделирование задач МСС // Материалы школы-семинара «Основы использования OpenFoam, Salome, ParaView».—URL: https://unihub.ru/tools/unicfdc1/svn/trunk/Version2

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

МОДЕЛИ СОЧЕТАНИЯ ЧАСТНЫХ И ОБЩИХ ИНТЕРЕСОВ

О. И. Горбанева
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Будем рассматривать одноуровневую систему управления, состоящую из двух равноправных элементов A_1 и A_2. Каждый из этих уровней имеет некоторое количество ресурсов r_1 и r_2 соответственно. Часть средств каждый из этих распорядителей передает для целевого использования, оставшуюся часть оставляет себе на нецелевые расходы. Оба распорядителя участвуют в доходе от целевой деятельности и имеют свои функции выигрыша. Модель строится в виде игры двух лиц в нормальной форме, в которой ищется равновесие по Нэшу. В функцию выигрыша каждого игрока включаются два слагаемых: доход от нецелевой деятельности и соответствующая доля дохода от целевой деятельности системы. Функции выигрыша имеют следующий вид:

$$g_1(u_1,u_2) = a_1(r_1-u_1) + b\,c(u_1+u_2) \to \max_{u_1},$$
$$g_2(u_1,u_2) = a_2(r_2-u_2) + (1-b)\,c(u_1+u_2) \to \max_{u_2}$$

при ограничениях

$$0 \leqslant u_i \leqslant r_i, \quad i=1,2,$$

и условиях на функции a, b, и c

$$a_i \geqslant 0; \quad \frac{\partial a_i}{\partial u_i} \leqslant 0, \quad \frac{\partial a_i}{\partial u_{j\neq i}} \geqslant 0, \quad i=1,2,$$
$$b_i \geqslant 0; \quad \frac{\partial b_i}{\partial u_i} \geqslant 0, \quad i=1,2, \quad \frac{\partial c}{\partial u_i} \geqslant 0, \quad i=1,2.$$

Здесь u_i — доля ресурсов, выделенных i-м уровнем на развитие системы (соответственно, $r_i - u_i$ — остается на нецелевое использование ресурсов в личных интересах), g_i — функция выигрыша i-го игрока, a_i — функция частного выигрыша i-го игрока, b_i — доля от дохода общей деятельности, получаемая i-м игроком; c — целевой доход системы.

Рассмотрим случай, когда функции доходов от целевой и нецелевой деятельности участников степенные с показателем, меньшим единицы. В этом случае функции выигрыша имеют вид

$$g_1(u_1,u_2) = a_1(r_1-u_1)^\alpha + b\,c(u_1+u_2)^\alpha \to \max_{u_1},$$
$$g_2(u_1,u_2) = a_2(r_2-u_2)^\alpha + (1-b)\,c(u_1+u_2)^\alpha \to \max_{u_2}$$

при ограничениях

$$0 \leqslant u_i \leqslant r_i, \quad i=1,2.$$

Равновесие по Нэшу содержит три исхода:
1) внутренняя точка области

$$\left(\frac{r_1(\sqrt[1-\alpha]{b(1-b)c}+\sqrt[1-\alpha]{a_2 b})-\sqrt[1-\alpha]{a_1(1-b)}r_2}{\sqrt[1-\alpha]{b(1-b)c}+\sqrt[1-\alpha]{a_2 b}+\sqrt[1-\alpha]{a_1(1-b)}};\right.$$

$$\left.\frac{r_2(\sqrt[1-\alpha]{b(1-b)c}+\sqrt[1-\alpha]{a_1(1-b)})-\sqrt[1-\alpha]{a_2 b}r_1}{\sqrt[1-\alpha]{b(1-b)c}+\sqrt[1-\alpha]{a_2 b}+\sqrt[1-\alpha]{a_1(1-b)}}\right)$$

при условиях:

$$a_1<\frac{r_1^{1-\alpha}(\sqrt[1-\alpha]{b(1-b)c}+\sqrt[1-\alpha]{a_2 b})^{1-\alpha}}{(1-b)r_2^{1-\alpha}},$$

$$a_2<\frac{r_2^{1-\alpha}(\sqrt[1-\alpha]{b(1-b)c}+\sqrt[1-\alpha]{a_1(1-b)})^{1-\alpha}}{br_1^{1-\alpha}}.$$

В этом случае лишь часть средств каждому участнику выгодно направить на общие цели, оставшуюся часть — на частные.

2) $\left(0;\frac{r_2(\sqrt[1-\alpha]{b(1-b)c}}{\sqrt[1-\alpha]{b(1-b)c}+\sqrt[1-\alpha]{a_2}}\right)$ — точка на границе области при условии

$$a_1>\frac{r_1^{1-\alpha}(\sqrt[1-\alpha]{b(1-b)c}+\sqrt[1-\alpha]{a_2 b})^{1-\alpha}}{(1-b)r_2^{1-\alpha}}.$$

В этом случае второму игроку выгодно лишь часть средств направить на общие цели, оставшуюся часть — на частные, в то время как первый игрок не выделяет средства на общие цели совсем.

3) Этот случай симметричен предыдущему.

Литература

1. *Gorbaneva, O. I., Ougolnitsky G. A.* A problem of purpose-resource use in two-level control systems // Game Theory and Management.—2013.—P. 78–81.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ ПРИ НАЛИЧИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ[1]

В. В. Дударев (Россия, Владикавказ; ЮМИ),
Р. М. Мнухин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Одной из актуальных задач современной механики является проблема диагностики предварительного напряженного состояния (ПНС). Такое состояние обычно возникает в технологических изделиях в результате термической, механической, химической обработки или режима эксплуатации. Наличие областей с высоким уровнем предварительных (остаточных) напряжений может привести к преждевременному износу или поломке объекта. Наряду со стержнями элементом многих сооружений, конструкций и машин остаются трубы, которые испытывают различное силовое воздействие. Наиболее развитым и востребованным методом неразрушающей диагностики ПНС является метод акустической диагностики [2]. В рамках этого метода идентификация свойства исследуемого объекта осуществляется по данным об изменении его акустических характеристик.

В работе в качестве объекта исследования рассматривается упругий цилиндр с внутренним радиусом $r_1 > 0$ и внешним радиусом $r_2 > r_1$. Считается, что в активной фазе нагружения внутри цилиндра действует давление. Величина давления может достигать значений, при которых возникает область необратимых пластических деформаций. После снятия давления в стенках цилиндра наводится плоское остаточное напряженное состояние. На основе принципа суперпозиции получен вид законов изменения компонент $\sigma^0_{rr}(r)$, $\sigma^0_{\varphi\varphi}(r)$ этого напряженного состояния для моделей упругопластического и упрочняющегося материала. Для определения значений этих компонент в рамках акустического подхода на внешнем радиусе цилиндра прикладывается периодическая равномерно распределенная осесимметричная нагрузка с частотой ω. Уравнения колебаний и определяющие соотношения соответствуют модели Е. Треффтца [1]. Получена приближенная формула для определения радиуса пластических деформаций. Дана оценка точности этой формулы для различных значений уровня внутреннего давления на примере тонкостенного цилиндра. Решение прямой задачи об определении радиальной компоненты смещения u_r при известных законах изменения остаточных напряжений сведено к решению системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Численное решение этой задачи получено с помощью метода пристрелки. Построены амплитудно-частотные характеристики $u_r(r_2, \omega)$ для различного уровня внутреннего давления в окрестности первого и второго резонанса. Выявлено существенное влияние наличия пластической зоны на эти характеристики.

[1]Работа выполнена в рамках гос. задания Минобрнауки России № 9.665.2014/К и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 13-01-00196, № 14-01-31393.

Приведены значения первых двух резонансных частот в зависимости от уровня внутреннего давления и радиуса пластических деформаций для тонкостенного цилиндра. С помощью метода линеаризации получена аналитическая формула для определения значений собственной частоты колебаний по известным законам изменения компонент σ^0_{rr}, $\sigma^0_{\varphi\varphi}$ и форме свободных колебаний объекта при отсутствии остаточного напряженного состояния. Дана оценка точности этой формулы. Представлены рекомендации по осуществлению реконструкции уровня внутреннего давления по данным об изменении значений резонансных частот колебаний цилиндра.

Авторы выражают благодарность профессору А. О. Ватульяну за предложенные подходы к исследованию задачи.

Литература

1. *E. Trefftz* Zur theorie der stabilitat des elastischen gleichgewichts // J. of Appl. Math. and Mechanics / Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik.—1933.—Vol. 12, № 2.—P. 160–165.
2. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела.—М: Физматлит, 2007.—223 с.
3. *Ватульян А. О., Дударев В. В., Богачев И. В.* Об определении предварительного напряженного состояния в трубе // Докл. Акад. наук.—2014.—Т. 456, № 3.—С. 299–301.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКОМ n-МЕРНОМ ТОРЕ

М. Е. Залыгаева
(Россия, Воронеж; ВГУ)

В данной работе используется вариант лагранжева подхода к описанию движения жидкости, предложенный В. И. Арнольдом [1], Д. Эбином и Дж. Марсденом [2]. Их идеи и результаты получили развитие в работах Ю. Е. Гликлиха [3, 4], где было показано, что описание движения вязкой жидкости включает в себя стохастические возмущения потока идеальной жидкости. Такое описание (как подробно показано в [3]) с использованием некоторых дополнительных конструкций и аппарата стохастического анализа приводит к классическим уравнениям Бюргерса, Рейнольдса и Навье-Стокса. Уравнение Бюргерса возникает при переходе от лагранжева описания к эйлерову в касательном пространстве в единице группы диффеоморфизмов, а уравнение Рейнольдса и Навье-Стокса — в касательном пространстве в единице группы диффеоморфизмов, сохраняющих объем, соответственно.

Будем рассматривать жидкости, у которых вязкий член (обычно представляющий собой оператор Лапласа) имеет общий вид дифференциального оператора второго порядка с матрицей $\tilde{\mathfrak{B}} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathfrak{B}}^{ij})\frac{\partial}{\partial x^i \partial x^j}$, зависящий от некоторой временной переменной t.

В результате, конструктивно строится векторное поле, которое будет удовлетворять аналогу уравнения Рейнольдса и Навье-Стокса.

Литература

1. *Arnol'd V.* Sur la géométrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits // Ann. Inst. Fourier.—1966.—№ 1.—P. 319–361.
2. *Ebin D. G, Marsden J.* Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid // Annals of Math.—1970.—№ 1.—P. 102–163.
3. *Gliklikh Yu. E.* Solutions of Burgers, Reynolds and Navier-Stokes equations via stochastic perturbations of inviscid flows // J. of Nonlinear Math. Physics.—2010.—№ 1.—P. 15–29.
4. *Gliklikh Yu. E.* Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics.—London: Springer-Verlag, 2011.—460 p.

ИЗГИБАНИЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ НА ПЛОСКОСТИ С СОХРАНЕНИЕМ ИНДЕКСА

Е. С. Запутряева

(Россия, Москва; МПГУ)

В 70-х годах прошлого века возникла область геометрии, изучающая изометрические деформации многоугольников. Среди наиболее известных вопросов в этой области — задача о распрямлении простой ломаной с сохранением длин сторон и без появления самопересечений, и задача о приведении многоугольника без самопересечений к выпуклому положению с сохранением длин сторон (обе эти задачи в литературе образно называются задачей плотника – carpenter's rule problem), которые были решены относительно недавно, см. [1]. Мы занимаемся обобщением этой задачи на случай многоугольников с самопересечениями. В [2] доказано, что любой многоугольник можно изгибанием привести к изометричному ему выпуклому, при этом дополнительных условий на деформации, кроме требования сохранения длин сторон, не ставится. Мы же рассматриваем деформации с дополнительным требованием инвариантности такой топологической характеристики многоугольника, как индекс. Для стержневых шарнирных механизмов такая постановка задачи приобретает механический смысл: изучаются движения механизма с запретом на «проскальзывание» любого стержня через соседний. Примеры показывают, что не любые два изометричных n-угольника одного индекса допускают наложение друг на друга с условием сохранения индекса в ходе изгибания. Поэтому представляет интерес изучить, какие многоугольники наложимы, а какие — нет, и как следует проводить сохраняющее индекс изгибание, чтобы перевести некоторый данный многоугольник в другой, изометричный первому. Ранее нами было получено аналитическое решение этой задачи для четырехугольников [3]. Для многоугольников с большим числом сторон нахождение аналитического решения представляется очень трудной задачей, поэтому мы предлагаем алгоритм, применение которого к двум изометричным многоугольникам одинакового индекса либо дает соединяющее их изгибание (с сохранением индекса), либо «отрицательный» ответ – многоугольники нельзя соединить сохраняющим индекс изгибанием. Алгоритм построен на индукции по числу сторон многоугольника (для треугольников вопрос решается тривиально). Мы используем представление конфигурационного пространства (КП) n-угольника с данными длинами сторон в n-мерном кубе со стороной 2π, где каждому многоугольнику соответствует точка, координаты которой в кубе равны величинам внутренних углов многоугольника. Сохранение индекса многоугольника в ходе изгибания интерпретируется как запрет на выход на грани куба. Таким образом, переформулируем задачу: даны две точки на конфигурационном пространстве (оно представляется в кубе как $(n-3)$-мерная поверхность уровня некоторой функции). Требуется найти лежащий на КП путь между этими двумя точками, который не выходит на грани куба. Чтобы свести алгоритм к многоугольникам с меньшим числом сторон, мы приводим их к положению с равными малыми диагоналями, в кубе это будут точки, лежащие в одной гиперплоскости, параллельной грани куба. Однако, так как мы хотим, чтобы наш алгоритм давал необходимое и достаточное условие наложимости многоугольников, нам требуется не просто привести один из данных многоугольников к положению, в котором какой-то из его углов совпадает с соответствующим во втором многоугольнике, а найти *всех* возможных представителей компонент КП в гиперплоскости, соответствующей требуемому значению угла. Для этого мы аналитически рассчитываем перестройки поверхностей уровня, которые происходят в КП при изменении данного угла, и при разветвлениях учитываем все возможные варианты пути на нужный уровень. Таким образом, из первого n-угольника мы получаем несколько $(n-1)$-угольников в нужной гиперплоскости, в которые можно попасть, не выходя на грани куба. С каждым из этих многоугольников проводится проверка по индукции. В результате алгоритм дает либо путь внутри куба, соединяющий исходные точки (нужное нам изгибание), либо достоверный ответ, что такого пути не существует.

Литература

1. *Connelly R., Demaine E., Rote G.* Straightening polygonal arcs and convexifying polygonal cycles // Discrete and Computational Geometry.—2003.—Vol. 30, № 5.—P. 205–239.
2. *Lenhart W. J., Whitesides S.* Reconfiguring closed polygonal chains in Euclidian d-space // Discrete and Computational Geometry.—1995.—Vol. 13.—P. 123–140.
3. *Запутряева Е. С.* Изгибания четырехугольников на плоскости с сохранением индекса // Мат. сб.—2014.—Т. 205, № 5.—С. 55–76.

ИССЛЕДОВАНИЕ СМЕШАННОГО КРАЕВОГО УСЛОВИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. В. Казак (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Н. Н. Солохин (Россия, Ростов-на-Дону; РГСУ)

1. Пусть S — односвязная поверхность положительной гауссовой кривизны $K \geqslant k_0 > 0$ с краем ∂S, однозначно проектирующаяся на плоскость Oxy и заданная функцией $z = f(x,y)$ класса $C^{3,\mu}$, $0 < \mu < 1$, $\partial S \in C^{1,\mu}$, $0 < \mu < 1$. В работе В. Т. Фоменко [1] изучалось смешанное граничное условие

$$\alpha(\overline{U}, \bar{\ell}) + \beta(\overline{V}, \bar{L}) = \sigma \ \text{ на } \ \partial S, \tag{0.1}$$

где $\overline{U} = \overline{U}(x,y) = \{\xi(x,y), \eta(x,y), \zeta(x,y)\} \in C^{3,\mu}$, $\overline{V} = \overline{V}(x;y)$ — векторы смещения и вращения бесконечно малого изгибания поверхности, векторные поля $\bar{\ell}$, $\bar{L}$ и функции α, β, σ принадлежат классу C^{μ}, $0 < \mu < 1$.

Граничное условие (0.1) называется квазикорректным с p степенями свободы, если однородное условие ($\sigma = 0$) совместимо с p линейно независимыми бесконечно малыми изгибаниями поверхности S, а неоднородное условие совместимо с бесконечно малыми изгибаниями для любой функции σ. Векторное поле $\vec{\ell}$ называется собственным, если условие (0.1) не является квазикорректным.

В данной работе продолжены исследования, начатые в работе [1].

Основное уравнение $d\bar{r}d\overline{U} = 0$ бесконечно малых изгибаний поверхностей, заданных векторной функцией $\bar{r} = \bar{r}(x,y) = \{x, y, f(x,y)\} \in C^{3,\mu}$ приводят к виду

$$w_{\bar{z}} + q_1 w_z + q_2 \bar{w}_{\bar{z}} = 0, \tag{0.2}$$

используя комплексную функцию изгибания $w(z) = \lambda + i\mu$, где $\lambda = \xi + p\zeta$, $\mu = \eta + q\zeta$, $p = f_x$, $q = f_y$, $q_1 = q_2 = -\dfrac{r - t + 2is}{2(r+t)}$, $r = p_x = f_{xx}$, $s = p_y = q_x = f_{xy}$, $t = q_y = f_{yy}$, причем $|q_1| + |q_2| \leqslant 1 - K_0^2 = q_0 = \mathrm{const} < 1$.

Для семейства векторных полей $\bar{\ell} = \bar{k} + \varepsilon c_1 \bar{\ell}_0$ краевое условие (0.1) примет вид

$$\mathrm{Re}\left\{\overline{a(t)} w_t + \varepsilon \overline{b(t)} w\right\} = \sigma. \tag{0.3}$$

В работе доказана теорема:

Пусть $n = \mathrm{Ind}(\alpha + i\beta)$. Тогда для всех значений углов $\gamma_\varepsilon = \mathrm{arcctg}\left[f_{\bar{\ell}_1} + \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\mathrm{ctg}\,\gamma_1 - f_{\bar{\ell}_1}\right)\right]$, где γ_1 — заданная функция, $f_{\bar{\ell}_1}$ — производная проекции вектора $\bar{\ell}$ на плоскость Oxy, краевая задача (0.2), (0.3) квазикорректна при $n \geqslant 0$ с $2n + 3$ степенями свободы для всех значений $\varepsilon \in (-\infty; \infty)$ за исключением быть может счетного множества ε_k, $k = 1, 2, \ldots$ Этим значениям соответствуют собственные векторные поля условия (0.1).

2. Будем считать, что касательная плоскость к поверхности S в точке $(0,0)$ параллельна плоскости Oxy, а в самой точке (0,0) выполняется условие усиленной омбиличности [2]:

$$(f_{11} - f_{22} + 2f_{12})(x+iy)^{-1} \in C^{1,\mu}.$$

В этом случае получаем краевую задачу

$$\begin{cases} W\hat{U} = \sum\limits_{k,n=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^k}(a_{n_k}\frac{\partial \hat{U}}{\partial x^n}) + \sum\limits_{n=1}^{2} l_n \frac{\partial \hat{U}}{\partial x^n} = 0, \\ f_\rho f_{\rho\rho}^{-1}\hat{U}_\rho + \hat{U} = F. \end{cases} \tag{0.4}$$

Второй подход к решению смешанной краевой задачи позволяет выделить другие, отличные от вышеуказанных, семейства векторных полей $\overline{\ell}_\varepsilon$, для которых условие (0.1) квазикорректно почти для всех $\varepsilon \in (-\infty;\infty)$ за исключением быть может счетного множества ε_k, $k = 1, 2, \ldots$

Литература

1. *Фоменко В. Т.* О квазикорректности внешних связей в теории бесконечно малых изгибаний // Сиб. мат. журн.—1974.—Т. 15, № 1.—С. 152–161.
2. *Фоменко В. Т.* Бесконечно малые изгибания выпуклых поверхностей при втулочных связях // Мат. сб.—Т. 67, № 2.—1965.—С. 310–328.
3. *Казак В. В., Солохин Н. Н.* О квазикорректности смешанного краевого условия для одного класса поверхностей // Современные проблемы математики и механики.—М.: Изд-во МГУ, 2011.—Т. 4., вып. 2.—С. 212–216.
4. *Казак В. В.* Исследование условия обобщенного скольжения для одного класса поверхностей положительной кривизны // Мат. заметки.—1975.—С. 115–121.

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТОВ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ИНВАРИАНТНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ НА МЕТРИЧЕСКИХ ГРУППАХ ЛИ [1]

П. Н. Клепиков (Россия, Барнаул; АлтГУ),
Е. Д. Родионов (Россия, Барнаул; АлтГУ),
О. П. Хромова (Россия, Барнаул; АлтГУ)

Пакеты аналитических расчетов являются одним из основных вычислительных инструментов компьютерного моделирования и находят применение в различных областях науки. Естественно использование подобных универсальных систем и при решении задач однородной римановой геометрии, в том числе для исследования гармоничности инвариантных тензорных полей на однородных римановых многообразиях и, в частности, на группах Ли, поскольку изучение этих полей может быть сведено к их исследованию в алгебрах Ли.

В настоящей работе разработаны алгоритмы и комплексы программ в системах аналитических расчетов Maple и Mathematica, позволяющие вычислять компоненты тензоров кривизны Римана, Риччи, одномерной кривизны, Схоутена-Вейля, скалярной кривизны, тензоров конформной и концитркулярной кривизн, находить компоненты их дивергенций на конечномерных группах Ли с левоинвариантными римановыми метриками.

С привлечением данных алгоритмов решены задачи: о почти гармоническом тензоре Схоутена-Вейля и гармонической свертке тензора Схоутена-Вейля по направлению произвольного вектора на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой [1–3]; о гармоничности тензора Вейля на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой [5–8]; о гармоничности тензора концикулярной кривизны левоинвариантных (псевдо)римановых метрик трехмерных групп Ли [9]; о гармоничности тензора концикулярной кривизны левоинвариантных римановых метрик четырехмерных групп Ли [10].

Литература

1. *Гладунова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В.* О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Докл. АН.—2008.—Т. 419, № 6.—С. 735–738.
2. *Гладунова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В.* О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, № 3.—С. 3–16.

[1]Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ, грант НШ-2263.2014.1, Правительства РФ, госконтракт № 14.B25.31.0029, Министерства образования и науки РФ, код проекта: 1148, а также программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «АлтГУ», проект № 2014.312.1.4.

3. *Gladunova O. P., Rodionov E. D., Slavskii V. V.* Harmonic Tensors on Three-Dimensional Lie Groups with Left-Invariant Lorentz Metric // J. of Math. Scien.—2014.—Vol. 198, № 5.—P. 505–545.
4. *Воронов Д. С., Родионов Е. Д.* Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // Докл АН.—2010.—Т. 432, № 3.—С. 301–303.
5. *Гладунова О. П., Славский В. В.* Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных унимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // Докл. АН.—2010.—Т. 431, № 6.—С. 736–738.
6. *Гладунова О. П., Славский В. В.* О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли // Мат. тр.—2011.—Т. 14, № 1.—С. 1–20.
7. *Родионов Е. Д., Славский В. В., Хромова О. П.* О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных неунимодулярных разложимых группах Ли // Изв. АлтГУ: математика и механика.—2014.—№ 1/1.—(В печати).
8. *Родионов Е. Д., Славский В. В., Хромова О. П.* О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных неунимодулярных неразложимых группах Ли // Изв. АлтГУ: математика и механика.—2014.—№ 1/2.—(В печати).
9. *Клепиков П. Н., Хромова О. П.* Применение пакетов аналитических вычислений к исследованию конциркулярно-гармонических свойств 3-мерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Сб. научных статей международной школы-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае».—Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2013.—Ч. I.—С. 133–139.
10. *Клепиков П. Н., Хромова О. П.* Четырехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны // Изв. АлтГУ: математика и механика.—2014.—№ 1/2.—(В печати).

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

ГЛОБАЛЬНАЯ ЛЯПУНОВСКАЯ ПРИВОДИМОСТЬ ДВУМЕРНЫХ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ СИСТЕМ[1]

А. А. Козлов (Беларусь, Новополоцк; ПГУ),
И. В. Инц (Беларусь, Новополоцк; ПГУ)

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными матрицами коэффициентов. Наряду с этой системой рассмотрим также произвольную фиксированную систему

$$\dot{z} = C(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

с локально интегрируемой и интегрально ограниченной матрицей C. Если существует управление $u = U(t)x$, в котором $(m \times n)$-матрица $U(t)$ является измеримой и ограниченной при всех $t \geqslant 0$, такое, что система

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

замкнутая этим управлением, будет асимптотически эквивалентна системе (2), т. е. будет существовать преобразование Ляпунова [2, с. 153–154], связывающее системы (2) и (3), то говорят [1], что система (3) обладает *свойством глобальной ляпуновской приводимости.* Так как при этом все ляпуновские инварианты системы (3) с управлением U и системы (2) совпадут, свойство глобальной ляпуновской приводимости иногда также называют [4] *свойством глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов.*

Вопрос о наличии свойства глобальной ляпуновской приводимости у систем (2) решается, как правило, в предположении равномерной полной управляемости исходной системы (1). Напомним, что система (1) называется *равномерно вполне управляемой* [1], если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ на отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$ найдется измеримое и ограниченное управление u, при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leqslant \gamma \|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

В работе [4] доказана глобальная управляемость полной совокупности асимптотических инвариантов двумерной системы (3) с кусочно равномерно непрерывной матрицей B при условии равномерной полной управляемости соответствующей системы (1). На основании этих результатов было также показано [5], что для периодических систем (1) равномерная полная управляемость является необходимым и достаточным условием глобальной ляпуновской приводимости

[1]Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект № Ф13М–055.

системы (3). Следует однако отметить, что применение подхода, предложенного в этих работах, даже для систем с кусочно-непрерывными коэффициентами может приводить к неограниченному росту нормы искомого управления U на положительной полуоси, что, исходя из постановки задачи, является недопустимым. Таким образом, возникла задача обобщения вышеуказанных результатов на более широкие классы систем (1). В работе [3] эту задачу удалось разрешить лишь для двумерных систем (1) с нулевой матрицей A и локально интегририруемой и интегрально ограниченной матрицей B. В общем же случае — для равномерно вполне управляемых систем (1) с локально интегририруемыми и интегрально ограниченными коэффициентами — вопрос оставался открытым.

Теорема 1. *Пусть $n = 2$, $m \in \{1, 2\}$. Если система (1) равномерно вполне управляема, то система (3) обладает свойством глобальной управляемости полной совокупности асимптотических инвариантов.*

Литература

1. *Tonkov E. L.* Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control system // Proceedings of the Steklov Institute of Math.—2000.—Suppl. 1.—P. 228–253.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.—М.: Наука, 1998.—480 с.
3. *Козлов А. А.* О частном случае глобальной ляпуновской приводимости двумерных систем // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта.—2008.—№ 3 (49).—С. 105–110.
4. *Макаров Е. К., Попова С. Н.* О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Диф. уравнения.—1999.—Т. 35, № 1.—С. 97–106.
5. *Попова С. Н.* Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Диф. уравнения.—2003.—Т. 39, № 12.—С. 1627–1636.

ПОРТФЕЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НА БАЗЕ КОМБИНИРОВАННЫХ ЭНТРОПИЙНЫХ МЕР РИСКА

О. В. Кондратьева
(Россия, Уфа; УГАТУ)

Рассматриваются комбинированные энтропийные меры риска в качестве метода измерения финансового риска при формировании портфеля ценных бумаг. Экспериментально определяется значение векторных параметров $r_1 = (\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$ и $r_2 = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda)$ выпуклых комбинаций энтропийной и альтернативных индексных мер риска, при которых формируется оптимальный по критерию будущей доходности портфель.

Наиболее часто применяемым показателем оценивания рыночных рисков является Value-at-Risk (VaR) — критерий допустимых потерь, который был разработан в конце 1980-х годов сотрудниками банка JPMorgan. Одной из мер риска, удовлетворяющих условиям когерентности, является CVaR (ConditionalValue-at-Risk). CVaR_α определена, как математическое ожидание доходов при условии, что доходы не превысят значение VaR_α.

Энтропийная мера риска определена как $\rho_\gamma(X) = \frac{1}{\gamma}\ln E[e^{-\gamma V(X)}]$ Фельмером и Шидом, где $\gamma > 0$ — коэффициент неприятия инвестором финансового риска, E — математическое ожидание возможных потерь.

В качестве меры риска предлагается использовать величины $E - M_{1_{r1}}$, $E - M_{2_{r2}}$ — выпуклые комбинации энтропийной меры риска и альтернативных комплексных индексных мер M_1 и M_2, предложенных в:

$$E - M_{1_{r1}} = \lambda\rho_\gamma(X) + (1-\lambda)\left(-\frac{Var_\alpha^-(X)}{Var_\alpha^+(X)} - \beta\frac{E[V(X) - E(V(X))^3]}{\sigma^3}\right)$$

$$E - M_{2_{r2}} = \lambda\rho_\gamma(X) + (1-\lambda)\times$$
$$\times\left(-\delta\frac{M_0}{CVar_\alpha^+(X)} - \frac{CVar_\alpha^-(X)}{CVar_\alpha^+(X)} - \beta\frac{E[V(X) - E(V(X))^3]}{\sigma^3}\right)$$

Используем подход Марковица к оптимизации сочетания доходность-риск и разделяем временные промежутки, на которых измеряются риск и доходность портфеля. Пусть рассматриваются длительный (обучающий) временной промежуток T и последующий короткий временной промежуток τ. Оценим риск портфелей на промежутке T различными способами: CVaR, ρ_γ, M_1, M_2, $E - \mathrm{CVaR}_r$, $E - M_{1_{r1}}$, $E - M_{2_{r2}}$. Сформируем на этой основе портфели акций и сравним доходности этих портфелей на промежутке τ. Для реализации динамического режима решение о составе портфеля принимается итерационно с определенным временным лагом, и кумулятивно высчитывается доходность нового портфеля. В качестве исходных данных использовались котировки обыкновенных акций четырех эмитентов российских компаний. Каждый портфель варьировался по долям акций в нем, в результате было сгенерировано 286 различных по структуре портфелей. Портфели генерировались методом прямого перебора с шагом 0.1. Обучающий интервал T равнялся полугоду, промежуток τ равнялся неделе, параметры α и γ изменялись в интервале $[0.01; 0.2]$ с шагом 0.01, δ — в интервале $[1; 10]$ с шагом 1, λ — в интервале $[0; 1]$ с шагом 0.1.

Получены следующие результаты:

1. Использование энтропийной меры приводит к формированию более доходного портфеля по сравнению с другими мерами риска: $V(X)^*_{\mathrm{CVaR}} = 1.6678$, $V(X)^*_{E-\mathrm{CVaR}} = 1.6842$, $V(X)^*_{M_1} = 1.6139$, $V(X)^*_{E-M_1} = 1.6254$, $V(X)^*_{M_2} = 2.0143$, $V(X)^*_{E-M_2} = 2.1649$.

2. Применение комбинированных энтропийно-квантильных мер риска приводит к формированию эффективных портфелей ценных бумаг.

3. Рекомендовано использовать для расчета комбинированных мер риска параметры: $\alpha_{M_1} = 0.03$, $\alpha_{M_2} = 0.04$, $\alpha_{\mathrm{CVaR}} = 0.18$, $\beta_{M_1} = 1$, $\beta_{M_2} = 3$, $\delta = 10$, $\gamma = 0.09$, $\lambda_{M_1} = 0.5$, $\lambda_{M_2} = 0.9$, $\lambda_{\mathrm{CVaR}} = 0.3$.

Литература

1. *Artzner P., Delbaen F. L., Eber J.-M., Heath D.* Coherent measures of risk // Math. Finance.—1999.—№ 3.—P. 203–228.
2. *Бронштейн Е. М., Кондратьева О. В.* ПУправление портфелем ценных бумаг на основе комбинированных энтропийных мер риска // Известия РАН. Теория и системы управления.—2013.—№ 5.—С. 172–176.
3. *Бронштейн Е. М., Шапошникова А. Г.* Портфельная оптимизация на основе комплексных индексных мер риска // Аудит и финансовый анализ.—2010.—№ 5.
4. *Фельмер Г., Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время.—М.: МЦНМО, 2008.

О ФУНКЦИИ ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Р. Ч. Кулаев
(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$Lu = F(x), \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

заданное на геометрическом графе Γ, с граничными условиями

$$u(a) + \alpha(a) D^3 u(a) = 0, \quad \vartheta(a) u'(a) - \beta(a) u''(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma. \tag{2}$$

При этом под дифференциальным уравнением (1) на графе мы подразумеваем, следуя [1], набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа и набор условий согласования во внутренних вершинах.

В данной работе мы рассматриваем уравнение, порождаемое системой дифференциальных уравнений на ребрах γ_i графа

$$(p_i(x) u_i'')'' - (q_i(x) u_i')' = f_i(x), \quad x \in \gamma_i \subset \Gamma, \tag{3}$$

с коэффициентами, определяемыми функциями $p \in C^2[\Gamma]$, $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x) > 0$, $q \in C^1[\Gamma]$, $q(x) \geqslant 0$, $f \in C[\Gamma]$, и дополняемое в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$ равенствами

$$\begin{gathered} u_i(a) = u_k(a), \quad u_i'(a) = \alpha_{ki}(a) u_k'(a) + \alpha_{ji}(a) u_j'(a), \\ \sum_{i \in I(a)} p_i(a) \alpha_{ki}(a) u_i''(a) = 0, \quad \sum_{i \in I(a)} p_i(a) \alpha_{ji}(a) u_i''(a) = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

и условиями с третьими производными

$$\sum_{i \in I(a)} D^3 u_i(a) + \delta(a) u(a) = \widetilde{f}(a), \quad a \in J(\Gamma), \quad D^3 u = (pu'')' - qu', \tag{5}$$

где $J(\Gamma)$ — множество всех внутренних вершин графа Γ, $I(a)$ — множество индексов всех ребер, примыкающих к вершине $a \in J(\Gamma)$.

Левая часть Lu уравнения (1) — это левые части уравнений (3) на ребрах вместе с равенствами (4) и левыми частями условий (5), а правая часть $F(x)$ на ребрах графа совпадает с правыми частями (3), а во внутренних вершинах графа — с правыми частями (5). В условиях (4), (5) все производные считаются в направлении от вершины $a \in J(\Gamma)$; k, j — фиксированные (базисные) индексы из $I(a)$, $i \in I(a)$; $\alpha_{ki}(a)$, $\alpha_{ji}(a)$ и $\delta(a)$, $\widetilde{f}(a)$ — заданные числа, причем $\alpha_{kk}(a) = \alpha_{jj}(a) = 1$ и $\alpha_{kj}(a) = \alpha_{jk}(a) = 0$, $\delta(a) \geqslant 0$; для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ и каждого индекса $i \in I(a)$ хотя бы одна из констант $\alpha_{ji}(a)$, $\alpha_{ki}(a)$

отлична от нуля, причем для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ можно задать базисные индексы $j, k \in I(a)$ так, что для некоторого индекса $i \in I(a) \setminus \{j, k\}$ одновременно будут выполняться неравенства $\alpha_{ji}(a) \leqslant 0$, $\alpha_{ki}(a) \leqslant 0$, одно из которых строгое. Также полагаем, что граф Γ является деревом и к каждой внутренней вершине примыкает не менее трех ребер.

Решением дифференциального уравнения (1) будем называть всякую функцию, удовлетворяющую на каждом ребре графа соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению (3), а в каждой внутренней вершине — условиям (4), (5).

Определим для каждой вершины $a \in \partial\Gamma$ пару функций $w_a(x)$ и $v_a(x)$, которые являются решениями однородного уравнения (1) на Γ, удовлетворяющими на $\partial\Gamma \setminus a$ соответствующим краевым условиям из (2), а в вершине a — условиям

$$\begin{aligned} w_a(a) + \alpha(a) D^3 w_a(a) = 1, \quad & \vartheta(a) w_a'(a) - \beta(a) w_a''(a) = 0, \\ v_a(a) + \alpha(a) D^3 v_a(a) = 0, \quad & \vartheta(a) v_a'(a) - \beta(a) v_a''(a) = 1. \end{aligned}$$

Поскольку краевая задача (1), (2) невырождена (см. [2]), то функции $w_a(x)$, $v_a(x)$ определены однозначно.

Пусть $u_a(x) = w_a(x)$ при $\alpha(a) \neq 0$ и $u_a(x) = v_a(x)$ при $\alpha(a) = 0$.

Теорема. *Для положительности функции Грина краевой задачи* (1), (2) *на* $\Gamma \times \Gamma$, *необходимо и достаточно, чтобы для всех граничных вершин графа, кроме быть может одной, функции* $u_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, *положительны на всем графе* Γ.

Литература

1. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2004.—272 с.
2. *Кулаев Р. Ч.* О разрешимости краевой задачи для уравнения четвертого порядка на графе // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 1.—С. 27–34.

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА

Н. И. Лобанова
(Россия, Зеленокумск; МОУ ДОД «ЦВР»)

В конусе пространства непрерывных функций $C[0,\infty)$ изучается нелинейное интегральное уравнение вольтерровского типа:

$$u^{\alpha}(x) = \int\limits_0^x k(x,t)\,u(t)\,dt + f(x), \quad \alpha > 1, \quad x \geqslant 0. \tag{1}$$

Основное внимание уделено случаю ядра, зависящего от разности аргументов: $k(x,t) = k(x-t)$. Уравнения вида (1) с разностным ядром возникают в теории инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду, а также при описании процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом (см., например, [1–3]). В связи с этими и другими приложениями интерес представляют неотрицательные непрерывные решения уравнения (1). В случае неубывающего (не обязательно непрерывного) на полуоси $[0,\infty)$ невырожденного в нуле ядра детальное исследование уравнения (1) приведено в монографии [1]. В предположении, что ядро и неоднородность $f(x)$ являются неотрицательными непрерывными функциями, существование и единственность неотрицательного непрерывного решения уравнения (1) доказаны в [3]. В данной работе рассматривается, в основном, случай вырожденного в нуле разностного ядра, а именно предполагается, что $k(x,t) = k(x-t)$, $k(x) \in C^1[0,\infty)$, $k(0) = 0$, $k'(0) > 0$ и $k'(x)$ не убывает на $[0,\infty)$. В частности, используя лемму 5.1 и замечание 5.1 из [2], а также лемму 18.3 из [1], получены априорные оценки снизу и сверху для решения уравнения (1) в предположении, что неоднородность $f(x)$ не убывает и абсолютно непрерывна на полуоси $[0,\infty)$, причем $f(x) > 0$ при $x > 0$. С помощью этих априорных оценок строится нелинейное полное метрическое пространство $P_f^0[0,b]$, инвариантное относительно нелинейного оператора свертки $Tu = (k * u + f)^{1/\alpha}$. Применяя метод весовых метрик (аналог метода Белецкого), без ограничений на область существования решения доказывается, что уравнение (1) при $k(x,t) = k(x-t)$ имеет в пространстве $P_f^0[0,b]$ единственное решение и (основной результат) это решение может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа, для которых получена оценка скорости сходимости. Некоторые из этих результатов распространены на случай общего, не обязательно разностного, ядра $k(x,t)$.

Литература

1. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свертки.—М: Физматлит, 2009.—304 с.

2. *Okrasinski W.* On a nonlinear Volterra equation // Math. Meth. in the Appl. Sci.—1986.—Vol. 8, № 3.—P. 345–350.
3. *Lipovan O.* On the asymptotic behavior of solutions to some nonlinear integral equations of convolution type // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A: Math. Analysis.—2009.—Vol. 16.—P. 147–154.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

УСТОЙЧИВОСТЬ ГОФРИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ[1]

С. С. Макаров (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Ю. А. Устинов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Оболочечные конструкции широко применяются в судостроении, авиастроении, приборостроении, ракетной технике, строительстве, машиностроении и во многих других отраслях промышленности. При проектировании тонкостенных оболочечных конструкций одним из основных шагов является расчет на устойчивость.

Один из фундаментальных фактов, установленных И. И. Воровичем [1, 2] в 1950-е гг. в области теории оболочек состоит в том, что проблему устойчивости пологих оболочек (и тем более непологих) нельзя решать методом линеаризации в окрестности безмоментного напряженного состояния (методом Эйлера для стержня) и для ее решения следует рассматривать полную нелинейную формулировку. В этих же работах, в частности, формулируются условия существования обобщенного решения нелинейных уравнений для пологих оболочек, и доказывается сходимость различных прямых методов (Ритца, Галеркина, МКЭ) к этому обобщенному решению.

Данная работа посвящена новому, в этом классе задач, численно-аналитическому методу исследования устойчивости оболочек вращения с периодической геометрической структурой — методу Флоке — Ляпунова. Исследования устойчивости проводились на основе новых (по форме) нелинейных уравнений равновесия, которые были получены в рамках гипотез Кирхгофа — Лява.

Разработанный алгоритм исследования устойчивости оболочек вращения с периодической геометрической структурой, основанный на теории Флоке — Ляпунова состоит из следующих этапов:

1) Решение нелинейной осесимметричной задачи путем численного интегрирования нелинейной системы шести дифференциальных уравнений, полученой из уравнений равновесия.

2) Построение линеаризованной системы ОДУ на основе методов теории возмущений в классе периодических по окружной координате гармонических функций.

3) На основе решений восьми задач Коши для линеаризованной системы, построение матрицианта $\mathbf{A}$, компоненты которого являются функциями продольной безразмерной координаты x и параметра «нагрузки»(q).

4) Формирование матрицы монодромии $\mathbf{M} = \mathbf{A}(T, q)$, где T — длина периода.

5) «Продолжение» матрицы монодромии на всю оболочку с помощью матрицы $\mathbf{B} = \mathbf{M}^n$, где n — число периодов оболочки.

[1]Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности, проект № 9.665.2014.

6) Выбор минора матрицы **B** на основе граничных условий на торцах оболочки

Критическое значение «нагрузки» определяется из условия обращения в ноль выбранного минора.

Задача определения точек бифуркации равновесия была решена для двух типов гофрированных оболочек находящихся под действием гидростатического давления. На торцах оболочек были заданы граничные условия типа шарнирное опирания или жесткая заделка.

Сравнительный анализ эффективности предлагаемого метода с методом начальных параметров показал, что метод, основанный на теории Флоке — Ляпунова значительно эффективней с точки зрения временных затрат особенно при исследовании устойчивости достаточно «длинных» оболочек.

Предложенный метод позволил оценить влияние «краевого эффекта» на значения критической нагрузки.

Литература

1. *Ворович И. И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек.—М.: Наука, 1989.—373 с.
2. *Ворович И. И.* Некоторые математические вопросы нелинейной теории оболочек: Дисс. ... докт. физ.-мат. наук.—Л.: ЛГУ, 1958.—368 с.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИЗУЧЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

Е. Ю. Машков
(Россия, Курск; КГУ)

Под сингулярным стохастическим уравнением леонтьевского типа в R^n мы понимаем выражение [1]

$$\tilde{A}\xi(t) = \int\limits_0^t \tilde{B}\xi(s)\,ds + \int\limits_0^t f(s)\,ds + \tilde{w}(t),$$

где $\tilde{B} + \lambda\tilde{A}$ — сингулярный пучок матриц размера $m \times n$, $\xi(t)$ — искомый случайный процесс, $\tilde{w}(t)$ — винеровский процесс в R^n, $f(t)$ — достаточно гладкая n-мерная вектор-функция.

Сингулярное стохастическое уравнение леонтьевского типа в общей форме крайне неудобно для исследования, поэтому мы с помощью преобразования Кронекера (см. [2]) и последующей замены метрики пространства приводим его к более простому виду, а потом изучаем получившееся уравнение. Специфика подобных уравнений требует рассмотрения производных достаточно высоких порядков свободных членов — в данном случае, детерминированного слагаемого и винеровского процесса. Производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций, которые крайне трудны для использования в конкретных уравнениях. Это обстоятельство делает прямое исследование нашего уравнения сложным.

Предлагаемый метод исследования данного уравнения основан на применении аппарата производных в среднем по Нельсону от случайных процессов [3], для описания которых не задействованы обобщенные функции. А именно, мы применяем симметрические производные в среднем (текущие скорости) винеровского процесса. Текущие скорости, в соответствии с общей идеологией теории производных в среднем по Нельсону, являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов. В результате для изучаемого уравнения мы получаем физически осмысленные формулы для решений в терминах симметрических производных в среднем случайных процессов.

Итак, мы рассмотрели уравнение леонтьевского типа с сингулярным пучком матриц коэффициентов. Имеются также уравнения леонтьевского типа с регулярным пучком матриц коэффициентов, которые рассматривались в работах [4–7].

Литература

1. *Машков Е. Ю.* Сингулярные стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов // Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Сер. Математика. Физика.—2014.—Вып. 34, № 5(176).—С. 49–60.

2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.—М.: Физматлит, 1967.—575 с.
3. *Гликлих Ю. Е.* Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики.—М.: Комкнига, 2005.—416 с.
4. *Машков Е. Ю.* Об одном уравнении леонтьевского типа с белым шумом // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней мат. школы «Понтрягинские чтения – XXV» (Воронеж, 3–9 мая 2014 г.).—Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2014.—С. 118–122.
5. *Машков Е. Ю.* Каноническая форма Шура и стохастические уравнения леонтьевского типа // Материалы междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2014» (Воронеж, 26–31 января 2014 г.).—Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2014.—С. 215–218.
6. *Гликлих Ю. Е., Машков Е. Ю.* О приведении стохастических уравнений леонтьевского типа к каноническому виду // Измерения: состояние, перспективы развития. Материалы междунар. научно-практ. конф. (Челябинск, 25–27 сентября 2012 г.).—Челябинск: ИЦ ЮУрГУ, 2012.—Т. 1.—С. 73–75.
7. *Гликлих Ю. Е., Машков Е. Ю.* Стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов // Вест. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование.—2013.—Т. 6, № 2.—С. 25–39.
8. *Машков Е. Ю.* О развертке решения стохастического уравнения леонтьевского типа на риманово многообразие // Вест. фак-та прикл. матем. и механики ВГУ.—2013.—Вып. № 1.—С. 160–168.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

А. Б. Моргулис (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ),
К. И. Ильин (UK, York; The University of York)

Рассматриваются течения вязкой несжимаемой и однородной жидкости в переменной области, которая перемещается в пространстве и деформируется периодически, но без среднего перемещения и деформации. Граничные условия исключают как протекание жидкости сквозь границу области течения, так и скольжение первой вдоль второй (условие прилипания). Пульсации области течения характеризуется тремя масштабами, которые обозначаются L, A, Ω. Это — средний размер области течения, а также амплитуда и частота ее изменений, соответственно. Безразмерные амплитуда и частота определяются как

$$A/L \stackrel{\text{def}}{=} \delta, \quad \Omega(\nu/L^2)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon^{-2},$$

где ν — динамическая вязкость жидкости. Течению, вынуждаемомому пульсациями жидкой области, соответствуют масштаб скорости $U = A\Omega$ и число Рейнольдса $Re = (LU)/\nu = LA\Omega/\nu = \delta/\varepsilon^2$.

В предлагаемом докладе обсуждаются вибрационные течения, возникающие при малой амплитуде и высокой частоте пульсаций жидкой области, то есть, при $\delta << 1$ и $\epsilon^2 << 1$. Известно много различных приближений таких течений[2]. Различия обусловлены дополнительными предположениями о связи $\varepsilon \to +0$ и $\delta \to +0$. Во всяком случае, поле скорости в главном приближении потенциально вне тонкого пограничного слоя у вибрирующих стенок (стоксов слой) и осциллирует с нулевым средним. В старших приближениях возникает средняя скорость, и создаваемая ей средняя медленная циркуляция жидкости охватывает всю жидкую область. Этот средний вихревой поток (steady streaming) представляет наиболее интересную особенность вибрационных течений однородной вязкой несжимаемой жидкости. В частности, среднее течение влияет, вообще говоря, на долговременный дрейф материальных частиц.

В предлагаемом докладе представлена асимптотика вибрационных течений при $\varepsilon \to +0$, $\delta \to +0$, $A/l = \delta/\varepsilon \equiv \text{const} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{Re_s}$, так что толщина стоксова слоя — одного порядка с амплитудой вибраций, и $Re = \delta/\varepsilon^2 \to \infty$. При этом средняя скорость потока оказывается оказывается величиной порядка $\delta \sim \varepsilon$. Средняя скорость такого масштаба способна вызвать дрейф материальных частиц на

[1]Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности, задание № 1.1398.2014/К.

[2]В целях экономии места мы не приводим подробных ссылок. Их можно найти в статьях авторов, указанных в списке литературы, и доступных через страницы авторов в социальной сети ResearchGate

расстояние порядка L за время (размерное) $t \sim (\delta^2/\Omega)^{-1} = Re_s^{-1} L^2 \nu^{-1}$, где величина L^2/ν имеет смысл масштаба времени вязкой релаксации.

Рассмотрение вибрационных течений при $\delta^2/\varepsilon^2 = Re_s \sim 1$ и вывод уравнений среднего движения на физическом уровне строгости в различных частных случаях можно найти в статьях Craik и Leibovich (1976), Duck и Smith (1979), Haddon и Riley, (1979). Наш подход более формален и универсален; именно, строится асимптотика решений общей системы Навье — Стокса в пульсирующей области с условием прилипания к границе. Для этой цели используется метод Вишика — Люстерника. Ранее такой подход применял В. Левенштам (2000) для интегрирования уравнений гидродинамики в неподижной области в поле вибрирующих сил.

В нашем случае при построении асимптотики выводится и записывается в явной форме замкнутая система уравнений и граничных условий для скорости среднего течения в неподвижной отсчетной области, без дополнительных предположений об этой области и о законе пульсаций. На этой основе дачтся единообразная трактовка ряда важных частных случаев.

Литература

1. *Ilin K., Sadiq M. A.* Steady viscous flows in an annulus between two cylinders produced by vibrations of the inner cylinder // Preprint.—2010.—(arXiv:1008.4704v2 [physics.flu-dyn]).
2. *Ilin K., Morgulis A.* Steady streaming between two vibrating planes at high Reynolds numbers // Preprint.—2011.—(arXiv:1108.2710v1 [physics.flu-dyn]).
3. *Ilin K., Morgulis A.* On The Steady Streaming Induced By Vibrating Walls // SIAM J. Appl. Math.—2012.—Vol. 72, № 5.—P. 1406–1427.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДОХОДОВ ТРАНСПОРТНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Ю. В. Никонорова (Россия, Волгодонск; филиал ДГТУ)

В настоящее время все большее число коммерческих предприятий интересуется применением достижений современной науки для обеспечения максимального экономического эффекта. Например, автотранспортное предприятие Ростовской области ИП Задорожнюк В. Н. «Транс Люкс» заинтересовалось возможностью применения эконометрических методов исследования для определения наличия зависимости между доходами предприятия и некоторыми показателями хозяйственной деятельности. Для исследования была представлена информация за 12 лет поквартально, начиная с 2003 по 2013 г., включительно. Информация включала в себя данные по доходам предприятия, расходам, количеству транспортных единиц (автобусов), количеству работающих на предприятии. Администрацию интересовало наличие зависимости между указанными показателями.

В ходе решения задачи было исследовано 45 кварталов. Исследование включало в себя нахождение линейной зависимости между доходами предприятия и количеством автобусов, доходами и расходами, доходами и количеством работающих, а также проверку статистической значимости найденных моделей. Была сделана попытка найти сезонные колебания во временном ряде доходов предприятия. Для этого была построена аддитивная и мультипликативная модель временного ряда, составлена автокорреляционная функция, содержащая автокорреляцию временного ряда первого, второго и третьего порядков. Для расчетов применялась программа Excel.

Расчеты показали следующие результаты:

1. Наличие линейной зависимости между полученными доходами и количеством автобусов. Вид функции: $Y = -59287 + 94090 \cdot X$, где Y — доходы предприятия (руб.), X — количество автобусов (ед.). Коэффициент при X является статистически значимым, его доверительный интервал $[65961, 122218]$.

2. Наличие линейной зависимости между полученными доходами и расходами. Функция, связывающая эти показатели имеет следующий вид: $Y = 108304,5 + 1,3822 \cdot X$, где Y — доходы (руб.), X — расходы (руб.). Коэффициент при X является статистически значимым, его доверительный интервал $[0,98, 1,78]$.

3. Отсутствие линейной зависимости между полученными доходами и количеством работающих на предприятии.

4. Наличие автокорреляции уровней временного ряда первого порядка, ее значение составляет 0,83, что свидетельствует о наличии линейной тенденции доходов предприятия, зависящих от времени. Линейная функция, описывающая тенденцию временного ряда имеет вид: $Y = 246013 + 28635 \cdot T$, где Y — доходы (руб.), T — номер квартала, $T = 1 \ldots 45$.

5. По кварталам сезонные колебания отсутствуют как в аддитивной модели вида $Y = T + S + E$, так и в мультипликативной модели вида $Y = T \cdot S \cdot E$, где T — трендовое значение дохода, S — сезонные колебания, E — случайная ошибка.

Литература

1. *Елисеева И. И.* Эконометрика: учебник для вузов.—М.: Финансы и статистика, 2002.—344 с.
2. *Фетисов В. Г., Величко Н. П., Рубцова. С. В.* Эконометрика: практикум.—Шахты: Изд-во ГОУ ВПО «ЮРГУЭС», 2009.—82 с.

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ВИДЕ ФОРМАЛЬНЫХ РЯДОВ

О. В. Новикова

(Россия, Ставрополь; СКФУ)

В работе [1] показано, как комплекснозначное нелинейное уравнение в частных производных

$$\overline{p}_t - ip_{xx} + 2ip(p^2 + \overline{p}^2) = 0$$

с помощью автомодельных преобразований сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$\begin{gathered}-k(k+1)^2 g + (k+1)^2 g'\xi + 4(k+1)(k+7)g^2\xi^{k+2} + 24(k+1)gg'\xi^{k+3} - \\ - 4(k+3)\big(k+3+(k+1)(3k+7)\big)g\xi^{2k+2} - 4(k+3)(11k+25)g'\xi^{2k+3} + \\ + 48(k+3)(g^3 - g'')\xi^{2k+4} + 16(6g^2g' - g''')\xi^{2k+5} = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

с неизвестной функцией $g(\xi)$, $k \neq -1$ — свободный целочисленный параметр.

Опишем основные этапы решения уравнения с параметром вида (1) в виде формальных рядов.

I. Определение вида ряда.

1) Представление функции $g(\xi)$ в виде:

$$g = \sum_{n=N}^{\infty} a_n\, \xi^n, \tag{2}$$

где $a_n = \mathrm{const}$, N — неизвестное целое число.

2) Оценка старших степеней ряда с помощью соотношения

$$g \sim a_N \xi^N + \dots$$

и подстановка заданной оценки в уравнение (1).

3) Анализ степеней на наименьшее значение и случаев совпадения наименьшей степени с другими, определение связи между параметрами N и k.

II. Определение коэффициентов ряда.

1) Нахождение старших коэффициентов (которые возникают при ξ в наименьшей степени) и значения степеней, порождающих свободные коэффициенты. Поиск проводится с помощью подстановки в уравнение (1) соотношения

$$g \sim a_N \xi^N + a_{r+N}\xi^{r+N},$$

где r — целое число, указывающее на порядок возникновения произвольных коэффициентов.

2) Определение остальных коэффициентов.

2.1) Подстановка ряда (2) с найденным значением N и его производных в уравнение (1).

2.2) Построение вспомогательных таблиц, отражающих значения степеней полученного уравнения в зависимости от параметра k.

2.3) Анализ возрастания и совпадения степеней, выделение интервалов или значений степеней, имеющих определенную закономерность нахождения коэффициентов от параметра k.

2.4) Рассмотрение равенств на каждом интервале и нахождение соответствующих коэффициентов ряда.

2.5) Вывод рекуррентной формулы для вычисления последующих коэффициентов на конечном интервале.

Уравнение (1) имеет решение в виде ряда (2), когда связь между параметрами N и k следующая:

1) $N = -1$, $k < -1$;

2) $N = -k - 2$, $k > -1$.

Решение представлено в работах [1, 2].

Литература

1. *Новикова О. В.* Автомодельные решения комплекснозначного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных // Вестн. Сев.-Кавк. федерального ун-та. Науч. журн.—2014.—№ 1 (40).—С. 13–20.
2. *Новикова О. В.* Некоторые автомодельные решения комплекснозначного нелинейного дифференциального уравнения солитонного типа // Материалы Междунар. молодежного науч. форума «ЛОМОНОСОВ-2014».—М.: МАКС Пресс, 2014.—(1 электрон. опт. диск (CD-ROM)).

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ОБЪЕМНОЙ ДОЛИ ЧАСТИЦ В ВИБРОКИПЯЩЕМ СЛОЕ

Н. С. Орлова
(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Процесс виброкипения гранулированных материалов, создаваемый в результате колебаний полки, на которой располагается материал, широко используется в различных технических аппаратах, например, в газоочистительных аппаратах, аппаратах для сушки различных материалов и так далее, которые могут иметь различную конструкцию, в том числе и многополочную [2]. Поэтому очень часто для определения конструктивных параметров и режимов работы таких аппаратов используют результаты математического моделирования. В работе [1] представлены результаты моделирования движения виброкипящего слоя между двумя колеблющимися полками. Для описания движения виброкипящего слоя использовались двухжидкостная модель на основе закона Дарси и гидродинамическая модель гранулярного газа. На основе результатов моделирования были получены рекомендуемые значения параметров аппарата для очистки газов, обеспечивающих наибольшую площадь поверхности контакта фаз (газовой и твердой) [1]. Были рекомендованы следующие значения основных параметров, влияющих на распределение частиц в виброкипящем слое: амплитуда колебаний полок $A = 3 - 6$ мм, частота колебаний полок $f = 20 - 50$ Гц, толщина слоя засыпки $H = 50 - 80$ мм, расстояние между полками $L = 100 - 160$ мм, размер частиц $d = 1 - 1.5$ мм.

Важную роль в определении рекомендуемых значений параметров играли такие характеристики виброкипящего слоя, как среднее и максимальное значения объемной доли частиц в слое. В работе [1] приведены результаты вычислительных экспериментов на основе различных моделей по определению максимального значения объемной доли частиц α_{smax} в виброкипящем слое в зависимости от различных значений входных параметров, в том числе не входящих в рекомендуемый диапазон.

Для инженерных расчетов целесообразно аппроксимировать результаты вычислительных экспериментов в виде простой зависимости максимального значения объемной доли частиц α_{smax} от входных параметров. С этой целью предлагается следующая формула:

$$\alpha_{\mathrm{smax}} = \frac{H}{L} - 2.5\frac{A}{L} + \frac{L}{15Af}\sqrt{\frac{g}{H}}, \tag{1}$$

где g — ускорение свободного падения.

В расчетах использовались слои частиц (диаметром 1 мм) с толщиной засыпки $H = 30 - 102$ мм при различных значениях расстояния между полками L, амплитуды A и частоты колебаний полок f. Результаты вычислительных экспериментов сравнивались с результатами расчетов по формуле (1). По результатам исследования, оказалось, что формула (1) охватывает даже больший диапазон приведенных параметров: $L/H = 1.8 - 3.8$; $A = 1.5 - 6$ мм, $f > 20$ Гц. При этом величина ошибки по отношению к вычислительным экспериментам не превышает 8 процентов.

Важно отметить, что в вычислительных экспериментах при постоянных значениях H, L, A и при частотах больше 50 Гц с увеличением частоты распределение частиц между двумя полками и максимальное значение объемной доли частиц практически не отличаются от соответствующего распределения и максимального значения, полученных при 50 Гц. Если обратить внимание на второй член в формуле (1), в его знаменателе стоит частота колебаний полок. Очевидно, что с увеличением значения частоты при постоянных значениях H, L и A второй член в формуле уменьшается, и при частотах больше 50 Гц его значения становятся пренебрежимо малыми. Поэтому значения α_{smax}, полученные при частотах больше 50 Гц (при постоянных H, L и A), мало отличаются от соответствующего значения, полученного при частоте 50 Гц.

Литература

1. *Орлова Н. С.* Разработка и исследование математических моделей виброкипящего слоя.—Saarbrucken: LAP LAMBERT Acad. Publ., 2013.—172 с.
2. *Свердлик Г. И., Выскребенец А. С., Фомин А. Н.* Способ очистки газов. Патент РФ № 2132222.—БИ № 18.—1999.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ФРАКТАЛОВ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ ЭТНОПОЛИТИЧЕСКИХ КРИЗИСОВ

А. Ф. Оськин
(Беларусь, Полоцк; ПГУ)

Целью настоящей работы была попытка применения методов фрактального анализа временных рядов для прогнозирования развития кризисных ситуаций в социальных системах. В качестве основного индикатора, характеризующего характер временного ряда, мы использовали широко применяемый во фрактальном анализе показатель Хёрста H [1].

Как известно, значения этого показателя для произвольного временного ряда лежит в интервале от нуля до единицы, и может быть интерпретировано следующим образом:

- $H = 0,5$ соответствует белому шуму, т. е. некоторому случайному процессу;
- $0 <= H < 0,5$ соответствует ряду с антиперсистентностью. Такой ряд меняет направление чаще, чем ряд случайных независимых величин;
- $0,5 < H <= 1$ соответствует ряду с персистентностью. Такой временной ряд характеризуется эффектом долговременной памяти и имеет склонность следования трендам.

Набор данных для анализа был сформирован нами на основе коллекции, представленной на Web-ресурсе проекта кInternational Crisis Behavior (ICB) Projectњ. Проект был инициирован в 1975 г., сотрудниками Центра международного развития и управления конфликтами (Center for International Development and Conflict Management), созданного при университете штата Мэриленд. В рамках проекта были обработаны и систематизированы данные о международных кризисах. Текущая, десятая версия коллекции, опубликованная в июле 2010 г., содержит сведения о 455 международных кризисах, 35 затяжных конфликтах, и 1000 участников кризисов, начиная с конца Первой мировой войны и до 2007 г.

Из представленной коллекции мы отобрали данные о кризисах в России–СССР за период с 1918 по 2004 гг. Получившийся набор данных оказался представлен 44 записями, т. е. 44 кризисными точками. Интенсивность кризиса характеризовалась единственной переменной, принимающей значение от единицы до четырчх. При этом единице соответствует отсутствие вооруженных столкновений, двойке — незначительные столкновения, тройке — значительные столкновения и четверке — полномасштабная война.

Далее обработка велась по следующему алгоритму:

1. Сглаживание полученного ряда;
2. Расчет показателя Хёрста;

3. Анализ полученного значения и вывод о характере ряда;

4. Построение прогноза на основе полученных результатов.

Анализ проводился в среде приложения AutoSignal for Windows Version 1.6 компании SYSTAT.

Полученный в результате проведчнного анализа показатель Хёрста оказался равным 0,88 (точное значение — 0,877046). Такое значение свидетельствует о том, что ряд обладает персистентными свойствами, характеризуется наличием долговременной памяти и имеет склонность к следованию трендам. В этом случае для построения прогноза может быть использован гармонический анализ. Оказалось, что ряд хорошо аппроксимируется суммой трех синусоид, причем вклад первой гармоники с периодом в 28 лет и амплитудой равной 0,77, составляет 95,5%. На основе этой гармоники и был выполнен прогноз возникновения кризисов в России в ближайшие 50 лет.

Литература

1. *Кликушин Ю. Н.* Метод фрактальной классификации сложных сигналов // Журн. радиоэлектроники.—2000.—Т. 4.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ФОРМИРОВАНИЯ ПОКОЛЕНИЙ В РАННЕМ ОНТОГЕНЕЗЕ БЫСТРО РАЗМНОЖАЮЩИХСЯ ВИДОВ[1]

Переварюха А. Ю.
(Россия, Санкт-Петербург; СПбИИА РАН)

В докладе представляются математические модели в виде систем ОДУ предназначенные для анализа эффективности воспроизводства популяций быстро размножающихся видов на основе дополненной современными представлениями теории формирования пополнения запасов рыб Бивертона-Холта. Новые модели, описывающие нелинейные особенности динамики численности поколений рыб на ранних стадиях развития, рассматриваются в вычислительной среде как непрерывно-событийные динамические системы.

Неоднократно отмечалось по данным о нересте осетровых рыб, что при существенном снижении плотности запаса эффективность воспроизводства резко уменьшается. Задачу описания разнообразных сложных форм зависимости предлагаем решать при введении дополнительных функционалов с подобранной ограниченной областью значений $E(\Theta) = [l, 1)$, $l > 0$ в правую часть уравнения убыли численности с двумя коэффициентами мгновенной смертности.

Анализ опубликованных данных о воспроизводстве находящейся на грани выживании популяции волжского осетра позволил сделать вывод о сильном действии эффекта Олли [1]. Это нелинейное явление выражается в том, что если плотность популяции в большом ареале обитания становится ниже оптимальной, то непропорционально резко падает эффективность воспроизводства. Оценка смещения максимума распределения веса молоди при увеличенной сверхнорматива плотности позволил предложить модель в виде системы ОДУ с функционалом $\Theta(S)$, описывающую убыль поколения на интервале уязвимости $t \in [0, T]$.

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -(\alpha w(t) N(t) + \Theta(S)\beta)\, N(t), \\ \frac{dw}{dt} = \frac{g}{N^k + \zeta}\,, \Theta(S) = \frac{1}{1 - \exp(-cS)}, \end{cases} \tag{0.1}$$

где S — величина нерестового запаса; $w(t)$ — отражает условный уровень размерного развития поколения, влияющий на увеличение пищевых потребностей; g — параметр, учитывающий ограниченность количества доступных кормовых объектов; убывающая функция $\Theta(S) \to 1$ при $S \to \infty$ и не влияет на вычисление $N(T)$ если численность запаса достаточно велика. Ключевую роль в модели играет определение длительности специфичного для вида интервала уязвимости, в среднем для осетровых при заводском воспроизводстве период не превосходит $T = 45$ сут. Введение в первое дифференциальное уравнение системы

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований «Мой первый грант», проект № 14-01-31020.

быстро убывающей функции $\Theta(S)$ отражает снижение эффективности воспроизводства при деградации популяции, связанное с уменьшением вероятности встречи особей в местах размножения. ζ — параметр, учитывающий ограничение темпов развития, не зависящие от численности; c — параметр, характеризующий степень выраженности эффекта Олли; α — мгновенный коэффициент компенсационной смертности; β — мгновенный коэффициент декомпенсационной смертности. Начальные условия (1) определяются $N(0) = \lambda S$, $w(0) = \bar{w}/\sqrt{\lambda}$, где λ — средняя плодовитость популяции.

Дальнейшее развитие моделей с точки зрения теории этапности развития организмов привело к созданию непрерывно-дискретных моделей в виде системы ОДУ с изменяемой правой частью. Алгоритмически представлять для исследования подобные модели наилучшим образом возможно в форме описанного в работе [2] формализме гибридного автомата с предикативными переходами.

Особенности гибридной структуры модели удобно использовать при оценках последствий различных антропогенных воздействий на благополучие популяций. Для получения сравнительных характеристик различных стратегий эксплуатации биоресурсов можно исследовать в вычислительной среде парные наборы модельных сценариев вмешательства в саморегулируемые популяционные процессы.

Литература

1. *Allee W. C., Bowen E.* Studies in animal aggregations: mass protection against colloidal silver among goldfishes // J. of Experimental Zoology.—1932.—Vol. 2.—P. 185–207.
2. *Колесов Ю. Б., Сениченков Ю. Б.* Моделирование систем. Динамические и гибридные системы.—СПб: БХВ, 2006.—224 с.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

ЛОКАЛЬНО ЗАДАННЫЕ ИЗОМЕТРИИ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В. А. Попов

(Россия, Москва; Финансовый университет)

Рассмотрим псевдориманово аналитическое многообразие M и изометрию $\varphi : U \to V$ между его открытыми подмножествами. Возникает вопрос, при ках условиях отображение φ аналитически продолжается до изометрии $\varphi : M \to M$ всего многообразия. Такое продолжение возможно всегда для инфинитеземальных изометрий.

Теорема 1. *Векторное поле Киллинга, заданное в некоторой окрестности U произвольной точки x аналитического псевдориманова многообразия M аналитически продолжается в некоторую окрестность любой другой точки $y \in M$.*

Принципиальная невозможность продолжения инфинитеземальной изометрии до изометрии многообразия M в целом в общем случае заключается в том, что пара, состоящая из алгебры Ли ζ и ее стационарной подалгебры $\eta \subset \zeta$ может не порождать однородного многообразия. Точнее, при условии продолжаемости каждой локальной однопараметрической группы, порожденной векторным полем $X \in \zeta$, возникает группа изометрий G многообразия M и орбита $K \subset M$ этой группы. А это возможно не всегда.

Результат теоремы 1 позволяет отождествить алгебру Ли ζ всех векторних полей Киллинга, заданных в некоторой окрестности точки $x \in M$, с алгеброй Ли всех векторных полей Килилнга на псевдоримановом аналитическом многобразии M. Пусть $\eta \subset \zeta$ — стационарная подалгебра, $X \in \eta$ тогда и только тогда, когда $X(x) = 0$. Пусть G — односвязная группа Ли с алгеброй Ли ζ и $H \subset G$ — подруппа, порождчнная подалгеброй $\eta \subset \zeta$. Экспоненциальное отображение задачт изометрическое действие группы G в некоторой окрестности U точки x, определенное для всех элементов $g \in W$ из некоторой окрестности 0 в G. Продолжение этих изометрий на все M опредилило бы орбиту $K = G(x)$ как дифференцироемое подмногообразие многообразия M, диффеоморфное фактор группе G/H. Однако фактор группа G/H является диференцируемым многообразием тогда и только тогда, когда подгруппа H замкнута в G. В случае псевдориманова многообразия удается найти довольно общее условие на метрику, при выполнении которого подгруппа H замкнута в G. Это неожиданное условие состоит в том, что алгебра ζ не имеет центра.

Теорема 2. *Пусть ζ — алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на псевдоримановом аналитическом многобразии M, $\eta \subset \zeta$ стационарная подалгебра, G — односвязная группа Ли с алгеброй Ли ζ. $H \subset G$ — подгруппа, порожденная подалгеброй $\eta \subset \zeta$. Тогда если ζ не имеет центра, то H замкнута в G.*

Метрики со свойством отсутствия центра у алгебры Ли всех векторних полей Киллинга охватывают как наиболее неоднородные метрики, не допускающие ни одной инфинитеземельной изометрии, так и наиболее однородные метрики — метрики симметрических пространств.

Данную работу можно рассматривать как естественное продолжение работы [1].

Литература

1. *Popov V. A.* On analytic extensions of Riemannian manifolds // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences. Collective vol. prepared on the materials presented at the International conf. «Tarapov's reading».—Kharkov:, 2011.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ИНТЕГРАЛОВ ПОПЕРЕЧНЫХ МЕР МИНКОВСКОГО

Н. В. Рассказова

(Россия, Рубцовск; РИИ АлтГТУ)

Математическое моделирование — процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта. Математическое моделирование применяется в самых различных областях знаний, в том числе его можно также применять и для решения геометрических задач.

Пусть $P = ABCDA'B'C'D'$ — прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{E}^3$ с ребрами длины $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|AA'| = c$, где $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$.

Через $D(P)$ обозначим геодезический диаметр параллелепипеда P (точнее, его поверхности) — максимальное геодезическое (внутреннее) расстояние между парой точек на поверхности параллелепипеда. В [9] Ю. Г. Никоноровым и Ю. В. Никоноровой была получена явная формула для расчета $D(P)$.

Сопоставим параллелепипеду P следующие интегралы поперечных мер Минковского W_i, $i = 0, 1, 2, 3$ [8]: $W_0(P) = V(P)$, $W_1(P) = F(P)/3$, $W_2(P) = M(P)/3$, $W_3(P) = \mathrm{const} = 4\pi/3$, где $V(P) = abc$ — объем, $F(P) = 2(ab+ac+bc)$ — площадь поверхности, $M(P) = \pi(a + b + c)$ — интеграл средней кривизны.

Интересной задачей является нахождение экстремальных значений интегралов поперечных мер Минковского (исключая тривиальный случай константы $W_3 = 4\pi/3$) для прямоугольного параллелепипеда P с заданным геодезическим диаметром.

Параллелепипед P можно моделировать тройкой чисел (a, b, c), где $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$. Используя формулы для вычисления геодезического диаметра [9], были разработаны алгоритмы для численного решения приведенной задачи. Моделирование проводилось с помощью математической системы Maple, а затем была разработана программа для ЭВМ [4].

Опираясь на результаты моделирования, в дальнейшем были получены теоретические доказательства найденных экстремальных значений интегралов поперечных мер Минковского [5, 6]. Для площади поверхности экстремальные значения были получены ранее Ю. Г. Никоноровым и Ю. В. Никоноровой в [9].

Литература

1. *Вялый М. Н.* Кратчайшие пути по поверхности параллелепипеда // Мат. просв. Сер 3, 9.—М.: Изд-во МЦНМО, 2005.—С. 203–206.
2. *Голованов Н. Н.* Геометрическое моделирование.—М.: Физматлит, 2002.—472 с.
3. *Никоноров Ю. Г., Никонорова Ю. В.* О внутреннем расстоянии на поверхности параллелепипеда // Тр. Рубцовского индустриального ин-та.—2000.—Т. 9.—С. 222–228.

4. *Рассказова Н. В.* Программа для ЭВМ «Экстремальные значения интегралов поперечных мер Минковского для параллелепипедов» // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, № 2013619348 от 02.10.2013.
5. *Рассказова Н. В.* Экстремальные значения интеграла средней кривизны на множестве параллелепипедов с заданным геодезическим диаметром // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, вып. 2.—С. 78–82.
6. *Рассказова Н. В.* Экстремальные значения объема на трехмерных параллелепипедах с заданным геодезическим диаметром // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, вып. 4.—С. 44–47.
7. *Сантало Л. А.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности.—М.: Наука, 1983.—360 с.
8. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.—М.: Наука, 1966.—416 с.
9. *Nikonorov Yu. G., Nikonorova Yu. V.* The intrinsic diameter of the surface of a parallelepiped // Discrete and Computational Geometry.—2008.—Vol. 40.—P. 504–527.

ДЛИННОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА ВТОРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

С. В. Ревина

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Рассматривается двумерное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$, описываемое системой уравнений Навье — Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} = -\nabla p + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t), \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0.$$

Поле внешних сил предполагается периодическим по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами L_1 и L_2 соответственно. Средняя по прямоугольнику периодов скорость считается заданной. Предполагается, что один из пространственных периодов $L_2 = 2\pi/\alpha$, волновое число $\alpha \to 0$.

В [1] построена длинноволновая асимптотика задачи устойчивости стационарных сдвиговых течений

$$\boldsymbol{V} = (0, V)(x_1, \alpha x_2),$$

обобщающих классическое течение Колмогорова с синусоидальным профилем скорости. Выведены рекуррентные формулы и дан алгоритм нахождения k-го члена асимптотики.

В настоящей работе выведены рекуррентные формулы для нахождения k-го члена длинноволновой асимптотики линейной сопряженной к задаче устойчивости стационарных двумерных сдвиговых течений вязкой жидкости с ненулевым средним $\langle V\rangle \neq 0$. Показано, что если отклонение скорости от ее среднего по периоду значения является нечетной функцией, то коэффициенты разложения собственных функций являются четными при четных степенях и нечетными при нечетных степенях. Начато рассмотрение нелинейной задачи.

1. *Ревина С. В.* Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений // Журн. выч. математики и мат. физики.—2013.—Т. 53, № 8.— С. 1387–1401.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДУ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

Л. И. Сазонов

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

В теории параболических уравнений хорошо известны результаты о существовании и асимптотическом поведении высокочастотных периодических решений [1, 2].

В данной работе рассматривается линейное ОДУ в банаховом пространстве

$$\mathcal{A} \equiv \frac{du}{dt} + Au + \frac{1}{\omega}Bu + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} e^{ik\omega t}M_k u = f(t),$$

где A — генератор аналитической полугруппы, B и M_k — ограниченные операторы со специальными свойствами, $f(t)$ — вектор-функция вида $\sum_{|k|\geqslant 0} e^{ik\omega t} f_k$, ω — большой параметр.

Исследован невырожденный случай, когда $\lambda = 0$ является регулярным значением оператора A. При достаточно больших ω доказано существование $2\pi/\omega$ — периодического решения. Указаны условия, при которых решение допускает асимптотическое представление относительно большого параметра.

Литература

1. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода усреднения для абстрактных параболических уравнений // Мат. сб.—1970.—Т. 81 (123), № 1.—С. 53–61.
2. *Левенштам В. Б.* Метод усреднения и эффективное построение старших приближений метода усреднения // Изв. вузов. Математика.—1978.—№ 3.—С. 48–55.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ОДНОГО ИЗ ТРЕХМЕРНЫХ ПАРАЛЛЕЛОЭДРОВ

В. И. Субботин

(Россия, Новочеркасск; ЮРГПУ (НПИ))

Трехмерными параллелоэдрами называют замкнутые выпуклые многогранники в трехмерном евклидовом пространстве, разбивающие пространство параллельными копиями. Известно, что существуют только пять таких параллелоэдров, один из которых — удлиненный ромбический додекаэдр — в данном докладе характеризуется в классе замкнутых выпуклых многогранников.

Определение 1. Вершина многогранника называется ромбической, если ее звезда состоит из равных одинаково расположенных ромбов.

Определение 2. Ромбическая вершина называется симметричной, если она расположена на оси вращения многогранника.

Определение 3. Ромбическая вершина называется изолированной, если ее звезда не имеет общих элементов со звездой любой другой ромбической вершины многогранника; при этом каждая ромбическая грань принадлежит звезде некоторой ромбической вершины.

Теорема. *Замкнутый выпуклый многогранник в трехмерном евклидовом пространстве является удлиненным ромбическим додекаэдром тогда и только тогда, когда у него существуют симметричные ромбические вершины, которые все изолированы, а через каждую грань, не являющуюся ромбом, проходит ось вращения многогранника.*

Литература

1. *Долбилин Н. П.* Параллелоэдры: ретроспектива и новые результаты // Тр. Московского мат. общества.— 2012.—Т. 73, № 2.—С. 259–276.

ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ КВАЗИКОРРЕКТНОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

Е. В. Тюриков
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Безмоментная теория тонких упругих оболочек (мембранная теория) с гладкими боковыми поверхностями разрабатывалась в середине прошлого столетия (достаточно полная библиография содержится в [3]). Наиболее законченный и содержательный вариант этой теории построен И. Н. Векуа [1, 2] для оболочек с серединной поверхностью положительной гауссовой кривизны и границей класса регулярности $C^{1,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$. В это же время А. Л. Гольденвейзер [3] указал на необходимость постановки и изучения основных граничных задач мембранной теории И. Н. Векуа для оболочек с кусочно–гладкими боковыми поверхностями. К этому ряду задач можно отнести также смешанную граничную задачу, поставленную И. Н. Векуа [1]. Автором в работе [4] указанные задачи рассмотрены как частные случаи обобщенной граничной задачи о реализации безмоментного напряженного состояния равновесия оболочки (задача R) с срединой односвязной $W^{3,p}$–регулярной поверхностью S $(p > 2)$ положительной гауссовой кривизной и кусочно–гладким краем L в предположении, что в каждой точке границы задана проекция σ вектора усилий на направление заданного вдоль L и принадлежащего поверхности S векторного поля $\overline{r}$, имеющего разрывы первого рода в угловых точках C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ границы L. В математической постановке задача R есть разрывная граничная задача Римана–Гильберта для обобщенных аналитических функций. Установлен следующий критерий безусловной разрешимости (относительно проекции σ как функции точки границы L): задача R безусловно разрешима тогда и только тогда, когда $3(n-1) \geqslant \sum_{i=1}^{n} k^{(i)}$, где $k^{(i)}$ для каждого i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — кусочно-постоянная целочисленная функция односторонних пределов векторного поля $\overline{r}$ в точке C_i, вполне определенная поверхностью S и принимающая значения $0, 1, 2$, при малых значениях величин внутренних углов в этой точке.

Для достаточно широких классов поверхностей с помощью данного критерия получены достаточные условия квазикорректности, а также существенной квазикорректности [5] задачи R. Указаны классы поверхностей, для которых достаточные условия допускают геометрическую формулировку.

Литература

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.—М: Физматгиз, 1959.—512 с.
2. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек.—М., 1982.

3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек.—М: Наука, 1976.
4. *Тюриков Е. В.* Обобщенная граничная задача И. Н. Векуа мембранной теории выпуклых оболочек // Исслед. по мат. анализу, диф. уравнениям и их приложениям.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А.—2010.—Т. 4.—С. 290–297.
5. *Тюриков Е. В.* О квазикорректности обобщенной граничной задачи мембранной теории выпуклых оболочек // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IV: тез. докл. междунар. науч. конф. (Ростов-на-Дону, 27 апрель–1 май 2014).—2014.—С. 117.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЕ

П. С. Углич

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Рассмотрены прямая и обратная задачи об установившихся осесимметричных колебаниях упругой пластины с предварительными напряжениями.

Разработан вычислительный аппарат для решения прямой задачи. Для ее решения предложены два метода. Первый основан на сведении исходной задачи к краевой задаче для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений и ее численном решении методом пристрелки, второй - на использовании метода Ритца. Приведен сравнительный анализ результатов полученных с помощью проекционного метода Ритца и метода пристрелки.

Для решения обратной задачи предложен подход на основе проекционного метода Галеркина. Приведены результаты вычислительных экспериментов на основе метода Галеркина для различных законов распределения предварительных напряжений и граничных условий. Серия вычислительных экспериментов показала применимость проекционного подхода к решению обратной задачи о реконструкции предварительных напряжений.

Литература

1. *Nedin R., Vatulyan A.* Concerning one approach to the reconstruction of heterogeneous residual stress in plate // Z. angew. Math. Mech.—2014.—Vol. 94, № 1–2.—С. 142–149
2. *Аникина Т. А., Ватульян А. О., Углич П. С.* Определение характеристик неоднородной пластины // Вычислительные технологии.—2012.—Т. 17, № 6.—С. 26–36.
3. *Биргер И. А.* Остаточные напряжения.—М.: Машгиз, 1963.—232 с.
4. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела.—М.: Физматлит, 2007.—222 с.
5. *Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуща О. И.* Введение в акустоупругость.—М.: Машиностроение, 1970.—734 с.
6. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки.—М.: Физматгиз, 1963.—635 с.
7. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем.—Киев: Наукова думка, 1980.—152 с.

ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В АНИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ЯРКО ВЫРАЖЕННОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ[1]

Х. Г. Умаров

(Россия, Грозный; ЧГУ)

Для модельного представления Баренблатта — Желтова — Кочиной фильтрации жидкости в анизотропном трещиновато-пористом полупространстве с ярко выраженной горизонтальной проницаемостью:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \omega\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t}\right) - \chi\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \chi_0 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

найден явный вид решения смешанной начально-краевой задачи

$$v|_{t=0} = \varphi\left(x, y, z\right), \quad (x, y) \in R^2, \quad z \geqslant 0,$$

$$v|_{z=0} = \mu\left(x, y, t\right), \quad (x, y) \in R^2, \quad t \in [0, T],$$

сведением рассматриваемой задачи фильтрации к исследованию абстрактной смешанной задачи в банаховом пространстве.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00422-а.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА РАЗЛИЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ[1]

Ю. С. Федяев

(Россия, Орел; ОГУ)

Плоскопараллельную стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости в недеформируемом анизотропном однородном слое пористой среды постоянной толщины с тензором проницаемости K описывают обобщенный потенциал φ и функцией тока ψ. Они удовлетворяют в области фильтрации D системе уравнений:

$$v_x = K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Здесь x, y — декартовы координаты в плоскости основания слоя, v_x, v_y — проекции скорости фильтрации. Компоненты тензора проницаемости K_{ij}, $i, j = 1, 2,$ — постоянные величины.

Область фильтрации D ограничивает контур питания L_1 или непроницаемая граница L_2, которые в общем случае будем обозначать L. Граница L является прямой линией. На границе L_1 должно выполняться условие

$$\varphi^+(z,t) = \text{const}, \quad z \in L_1, \tag{2}$$

а на L_2 — условие

$$\psi^+(z,t) = \text{const}, \quad z \in L_2. \tag{3}$$

Здесь $z = x + iy$, t — время, символ «$+$» («$-$») означает предельное значение функции при подходе к границе со стороны (с противоположной стороны) орта нормали к ней. Нормаль направлена внутрь области D.

В области фильтрации D присутствует подвижная граница Γ_t. Она делит область фильтрации на части D_1 и D_2. В области D_1 движется жидкость вязкости μ_1 и плотности ρ_1, а в области D_2 — жидкость вязкости μ_2 и плотности ρ_2. Полагаем, что при движении одна жидкость полностью замещает другую и на границе раздела жидкостей капиллярные силы пренебрежимо малы. Тогда условия непрерывности давления и расхода жидкости на этой границе имеют вид:

$$\begin{gathered} \mu_1\varphi^+(z,t) - \mu_2\varphi^-(z,t) = (\rho_2 - \rho_1)\Pi(z,t), \\ \psi^+(z,t) = \psi^-(z,t), \quad z \in \Gamma_t, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\Pi(z,t)$ — потенциал массовой силы. Нормаль направлена в область D_1.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-97522 р_центр_а.

Положение границы Γ_t на плоскости z в любой момент времени $t > 0$ задаем параметрическим уравнением (s — параметр)

$$z = z(t, s) \quad (x = x(t, s),\ y = y(t, s)), \quad z \in \Gamma_t. \tag{5}$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение границы Γ_t известно

$$z_0 = z(0, s) \quad (x_0 = x(0, s),\ y_0 = y(0, s)), \quad z \in \Gamma_0. \tag{6}$$

Дифференциальные уравнения движения границы Γ_t имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_t. \tag{7}$$

Таким образом, задано положение границ Γ_0, L, тензор проницаемости K. Необходимо найти положение границы Γ_t (5) при $t > 0$. Решение задачи состоит в интегрировании системы уравнений (1), (7) с учетом граничных условий (2)–(4) и начальных условий (6).

Поставленная задача сводится к решению системы интегрального уравнения и дифференциальных уравнений движения границы Γ_t [1]. Граница L учитывается с помощью теоремы сопряжения на прямой.

Для исследования движения границы Γ_t построен численный алгоритм на основе метода дискретных особенностей. С его помощью изучено влияние анизотропии грунта, границ области фильтрации, различия физических свойств жидкостей на движение границы раздела жидкостей.

Литература

1. *Пивень В. Ф.* Обобщенный сингулярный интеграл Коши для граничных задач двумерных течений в анизотропно-неоднородном слое пористой среды // Диф. уравнения.— 2012.—Т. 48, № 9.—С. 1292–1307.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ПОДВЕСНОЙ ЧАСТИ СТИРАЛЬНОЙ МАШИНЫ БАРАБАННОГО ТИПА

В. Г. Фетисов (Россия, Владикавказ; ЮМИ),
И. В. Фетисов (Россия, Москва; «Пневмакс»)

К настоящему времени мало исследованы такие вопросы, как:

– учет особенностей конструктивных параметров современных стиральных машин, особенностей схем компоновки их колебательных систем и использования современных систем виброзащиты, в том числе систем виброизоляции, а также современных способов и методов снижения вибрации, в частности, специальных режимов вращения барабана;

– учет научно-обоснованных величин смещений центра масс текстильных изделий при отжиме в поперечной и продольной плоскостях барабана и соответствующих значений внешних возмущающих сил, приложенных к подвесной части стиральных машин;

– учет случайного характера колебаний подвесной части.

В совокупности вышеописанных причин и факторов заключается главная причина сложности динамических процессов, протекающих в стиральных машинах при отжиме, как в нелинейных колебательных системах, что осложняет исследование задач синтеза в случае многомерных комплексных моделей.

Задачей оптимального структурно-параметрического синтеза системы является нахождение таких значений ее параметров и структуры, которые обеспечивают требуемую работоспособность и долговечность.

Процесс случайных колебаний подвесной части машины, характер и уровень вибраций неуравновешенного ротора подвесного блока напрямую зависят от конструктивных параметров стирального барабана и режима функционирования машины в целом.

Большинство математических моделей, описывающих динамику поведения стиральной машины барабанного типа, основано на предположении о детерминированном воздействии на подвесную часть и постоянстве параметров. Однако в данном случае сложность описания процесса обусловлена наличием переменной массы изделий при отжиме, случайным характером их распределения по периферии барабана, изменением величины эксцентриситета центра масс текстильных изделий при отжиме и изменением ряда других параметров.

В первой части работы нами рассмотрен один из методов, позволяющих изучить поведение общего решения исходной системы уравнений «в целом» без перехода к одному дифференциальному уравнению, решения которых, как правило, приводит к громоздким в вычислительном отношении процедурам.

Вторая часть работы посвящена выбору оптимальных параметров в рассматриваемой задаче со многими критериями. При выборе наилучшего варианта решения приходится учитывать много различных требований, предъявляемых к подвесной части стиральной машины, и среди этих требований встречаются и противоречащие друг другу.

Нахождение оптимальных решений на основе качественных методов, развиваемых нами, позволяет более достоверно исследовать динамику стиральных машин барабанного типа с целью выбора их рациональных конструктивных параметров, обеспечивающих минимальный уровень вибрации подвесной части машины.

В частности, было показано, что глобальный минимум функции амплитуд случайных колебаний с учетом всех значений массы изделий из принятого диапазона при отжиме отвечает значению коэффициента длины стирального барабана, равному 0,7.

В [1] вторым из авторов была решена модельная задача структурного синтеза динамики случайных колебаний подвесной части стиральной машины с горизонтально расположенным неуравновешенным ротором, которая заключалась в исследовании случайных воздействий на вибрационные характеристики стиральных машин барабанного типа при отжиме по известным вероятностным характеристикам входного воздействия и дальнейшей фильтрации процесса по схеме Калмана — Бьюси.

Литература

1. *Фетисов И. В.* Решение модельной задачи о случайных колебаниях подвесной части стиральной машины // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии.— 2012.—№ 4.—С. 84–95.

G-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ R-ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБЩЕГО ВИДА

В. Т. Фоменко (Россия, Таганрог; филиал РГЭУ (РИНХ)),
В. В. Сидорякина (Россия, Таганрог; филиал РГЭУ (РИНХ))

п. 1. Рассматриваются двумерные поверхности F^2 класса $C^{3,\alpha}$, $0<\alpha<1$, в четырехмерном евклидовом пространстве E^4, заданные уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u^1,u^2)$, $(u^1,u^2) \in D$, где D — некоторая плоская область. Говорят, что поверхность F^2 допускает G-преобразование в поверхность F^{*2}, если в соответствующих точках M и M^* поверхностей F^2 и F^{*2} нормальные плоскости N^2_M и N^{*2}_M параллельны.

Будем считать, что уравнение поверхности F^{*2} имеет вид $\bar{r}^* = \bar{r}(u^1,u^2) + \bar{z}(u^1,u^2)$, где векторное поле $\bar{z}$ есть поле смещений точек поверхности F^2 при ее G-преобразовании.

Ставится следующая задача: выяснить, допускает ли заданная поверхность F^2 в E^4 G-преобразования и, если допускает, то как их найти.

п. 2. Будем рассматривать G-преобразования поверхностей $F^2(R)$ в E^4, заданных уравнением

$$\bar{r} = \left\{\alpha(u^1,u^2),\, \beta(u^1,u^2),\, \varphi(u^1,u^2),\, \psi(u^1,u^2)\right\}, \quad (u^1,u^2) \in D,$$

где функции α, β, φ, ψ удовлетворяют в плоской области D уравнениям:

$$\partial_1\alpha = \partial_2\beta, \quad \partial_2\alpha = -\partial_1\beta; \quad \partial_1\varphi = \partial_2\psi, \quad \partial_2\varphi = -\partial_1\psi.$$

Такие поверхности называем R-поверхностями общего вида. Индикатриса кривизны поверхности $F^2(R)$ в нормальной плоскости N^2_M поверхности в точке M есть окружность радиуса $R = R(M)$ с центром в точке M, при этом координаты (u^1,u^2) являются изотермическими для поверхности $F^2(R)$.

Имеет место следующая

Лемма. *На всякой R-поверхности общего вида $F^2(R)$ существует поле ортонормированных реперов $\{\bar{n}_3,\bar{n}_4\}$ в нормальных плоскостях N^2_M такое, что для любой точки M поверхности $F^2(R)$ коэффициенты вторых квадратичных форм $b^3_{ij}du^idu^j$ и $b^4_{ij}du^idu^j$ и линейной формы кручения μ_idu^i имеют вид:*

$$b^3_{11} = -b^3_{22}, \quad b^3_{12} = 0, \quad b^4_{11} = b^4_{22} = 0, \quad b^4_{12} = b^3_{11} \neq 0, \quad \mu_i = \partial_i \ln b^3_{11}, \quad i = 1,2,$$

$$b^3_{11} = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\pm\sqrt{(\partial_1\alpha)^2 + (\partial_2\alpha)^2 + (\partial_1\varphi)^2 + (\partial_2\varphi)^2}},$$

где

$$A = \partial^2_{11}\alpha\partial_1\varphi - \partial^2_{12}\alpha\partial_2\varphi - \partial_1\alpha\partial^2_{11}\varphi + \partial_2\alpha\partial^2_{12}\varphi,$$

$$B = -\partial^2_{11}\alpha\partial_2\varphi - \partial^2_{12}\alpha\partial_1\varphi + \partial_2\alpha\partial^2_{11}\varphi + \partial_1\alpha\partial_2\alpha\partial^2_{12}\varphi.$$

п. 3. Пусть R-поверхность $F^2(R)$ общего вида в E^4 подвергнута G-преобразованию и переведена в поверхность F^{*2}, заданную уравнением $\bar{r}^* = \bar{r} + \bar{z}$.

Выведем систему уравнений относительно векторного поля $\bar{z}$, описывающую G-преобразование поверхности $F^2(R)$.

Положим $\bar{z} = a^i \partial_i \bar{r} + v^\sigma \bar{n}_\sigma$, где по индексам i и σ ведется суммирование от 1 до 2 и от 3 до 4, соответственно.

Известно [1], что функции a^i и v^σ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a^\gamma b^3_{i\gamma} + \partial_i v^3 + v^4 \mu_i = 0, \quad i = 1, 2, \\ a^\gamma b^4_{i\gamma} + \partial_i v^4 - v^4 \mu_i = 0, \quad i = 1, 2. \end{cases} \tag{1}$$

Имеет место

Теорема. *Система дифференциальных уравнений* (1) *для R-поверхностей общего вида сводится в области D к системе уравнений Коши — Римана*

$$\partial_1 X = \partial_2 Y, \quad \partial_2 X = -\partial_1 Y,$$

где $X = \frac{v^3}{b^3_{11}}$, $Y = \frac{v^4}{b^3_{11}}$, при этом

$$a^1 = -\frac{1}{b^3_{11}}\big(\partial_1 v^3 + \mu_1 v^4\big), \quad a^2 = -\frac{1}{b^3_{22}}\big(\partial_2 v^3 + \mu_2 v^4\big).$$

Следствие. *Каждое G-преобразование R-поверхности в E^4 порождает в области D аналитическую функцию $X + iY$. Обратно, каждая аналитическая функция в области D порождает G-преобразование R-поверхности.*

Литература

1. *Фоменко В. Т., Бикчантаев И. В.* Применение обобщенных аналитических функций на римановых поверхностях к исследованию G-деформаций двумерных поверхностей в E^4 // Мат. сб.—1988.—Т. 136 (178), № 4 (8).—С. 561–573.

ДВЕ ТЕОРЕМЫ О ВЕСОВЫХ СФЕРИЧЕСКИХ СРЕДНИХ

Э. Л. Шишкина
(Россия, Воронеж; ВГУ)

Будем рассматривать функции $u(x)$, определенные в области

$$\mathbb{R}_n^+=\{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_n,\ x_1>0,\dots,x_n>0\}.$$

Следуя [1, с. 21], такие функции называем *четными* по x_i, если $u'_{x_i}(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)=0$. Рассмотрим многомерный обобщенный сдвиг [2] вида

$$f\to(T^y f)(x)=\prod_{i=1}^{n}\left(T_{x_i}^{y_i}f\right)(x),$$

где каждый из одномерных обобщенных сдвигов $T_{x_i}^{y_i}$ определен формулой

$$(T_{x_i}^{y_i}f)(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\pi} f\left(x_1,\dots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\alpha_i},x_{i+1},\dots,x_n\right)\sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\,d\alpha_i.$$

Введем обозначения: $n=m'+m''$, $m',m''\in\mathbb{N}$; $\gamma'=(\gamma'_1,\dots,\gamma'_{m'})$, $\gamma'_i>0$, $i=1,\dots,m'$, $|\gamma'|=\gamma'_1+\ldots+\gamma'_{m'}$, $\gamma''=(\gamma''_1,\dots,\gamma''_{m''})$, $\gamma''_j>0$, $j=1,\dots,m''$, $|\gamma''|=\gamma''_1+\ldots+\gamma''_{m''}$; $x=(x',x'')$, $x'\in\mathbb{R}^+_{m'}$, $x''\in\mathbb{R}^+_{m''}$, $\mathbb{R}^+_n=\mathbb{R}^+_{m'}\times\mathbb{R}^+_{m''}$.

B-ультрагиперболическим уравнением будем называть уравнение

$$\sum_{i=1}^{m'}\left(B_{\gamma'_i}\right)_{x'_i}u(x)=\sum_{j=1}^{m''}\left(B_{\gamma''_j}\right)_{x''_j}u(x),\quad B_{\gamma_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1}$$

Пусть $u(x)=u(x',x'')\in C^2(\mathbb{R}^+_n)$ и является четной функцией по каждому из своих переменных x_i, $i=1,\dots,n$. Рассмотрим весовые сферические средние вида

$$\left(M_u^{\gamma'}\right)_{x'}(x',x'',r)=\frac{1}{|S_1^+(m')|_{\gamma'}}\int\limits_{S_1^+(m')}T_{x'}^{r\xi}\,u(x',x'')\,\xi^{\gamma'}\,dS(\xi),$$

$$\left(M_u^{\gamma''}\right)_{x''}(x',x'',s)=\frac{1}{|S_1^+(m'')|_{\gamma''}}\int\limits_{S_1^+(m'')}T_{x''}^{s\zeta}\,u(x',x'')\,\zeta^{\gamma''}\,dS(\zeta),$$

где $S_1^+(n)=\{x\in\mathbb{R}^+_n:|x|=1\}$, константы $|S_1^+(m')|_{\gamma'}$ и $|S_1^+(m'')|_{\gamma''}$ см. в [3].

Теорема 1. *Пусть функция* $u{=}u(x',x'') \in C^2(\mathbb{R}_n^+)$ *и четная по каждой из своих переменных* $x_1,\ldots,x_n$, *является решением уравнения* (1) *и пусть выполняется условие* $m'+|\gamma'|=m''+|\gamma''|$. *Тогда*

$$\big(M_u^{\gamma'}\big)_{x'}(x',x'',r)=\big(M_u^{\gamma''}\big)_{x''}(x',x'',r). \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть функция* $u{=}u(x',x'') \in C^2(\mathbb{R}_n^+)$ *и четная по каждой из своих переменных* $x_1,\ldots,x_n$ *и пусть для всякой точки* $(x',x'')\in\mathbb{R}_n^+$ *и для всякого* $r\geqslant 0$ *выполнено условие* (2), *тогда, если* $m'+|\gamma'|=m''+|\gamma''|$, *то функция* $u(x',x'')$ *удовлетворяет уравнению* (1) *в* $\mathbb{R}_n^+$.

Литература

1. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические задачи.—М: Наука, 1997.—199 с.
2. *Ляхов Л. Н.* B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами.—Липецк: ЛГПУ, 2007.—232 с.
3. *Ляхов Л. Н., Половинкин И. П., Шишкина Э. Л.* Об одной задаче И. А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 4.—С. 516–528.

Секция III

Информационные технологии

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО УСТРОЙСТВА МИНИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ[1]

Ю. А. Бахвалов (Россия, Новочеркасск; ЮРГПУ (НПИ)),
В. В. Гречихин (Россия, Новочеркасск; ЮРГПУ (НПИ)),
А. Л. Юфанова (Россия, Новочеркасск; ЮРГПУ (НПИ))

В настоящее время, наряду с необходимостью обеспечения энергетической эффективности создаваемых электромеханических устройств, большое значение придается снижению их массогабаритных показателей. Рассмотрим решение этой проблемы на основе решения обратной трехмерной задачи стационарного магнитного поля.

Требуется спроектировать устройство минимального объема, обеспечивающее при заданном рабочем зазоре Δ электромагнитную силу взаимодействия между сердечником и якорем F^n с относительной погрешностью $\delta(F_p)$. Считаем известными конструкцию устройства, материалы ферромагнетиков и постоянного магнита (ПМ).

Необходимо в общем случае определить все размеры, намагниченность $\overrightarrow{M}$ ПМ, ампервитки обмотки управления iw, которые обеспечат заданную силу F_p и минимум объема конструкции

$$V = V_s + V_p = V_s + 2a^2h, \tag{1}$$

где V_s — объем сердечника с обмоткой управления и ПМ; V_p — объем якоря; $2a$, a и h — длина, ширина и высота якоря соответственно.

На первом этапе определим начальные приближения варьируемых параметров, используя приближенные формулы теории электрических аппаратов и теории магнитных цепей.

Далее применяем алгоритм решения условно корректных задач обратной задачи для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$

Шаг 1. Решаем прямую задач расчета магнитного поля ПМ и обмотки управления, вычисляем электромагнитную силу F^n. В соответствии с условием задачи F^n должна принадлежать интервалу

$$F_p(1 - \delta(F_p)) \leqslant F^n \leqslant F_p(1 + \delta(F_p)).$$

Минимум объема устройства будет обеспечен при $F^n = F_p(1 - \delta(F_p))$.

Шаг 2. Проверяем выполнение условия окончания итерационного процесса

$$|F^n - F_p(1 - \delta(F_p))| =< \epsilon F_p, \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке проектов 2819 и 2833 в рамках базовой части государственного задания 2014/143.

где ϵ — вычислительная погрешность, $\epsilon \approx 10^{-6}$.

Практически имеем ограничения типа равенства $F^n - F_p(1-\delta(F_p)) = 0$. Если условие (2) выполняется, то решение получено, можно перейти к вычислению объема по формуле (1). Если (2) не выполняется, то переходим к следующему шагу.

Шаг 3. Минимизируя функционал $J^n = [F^n - F_p(1-\delta(F_p))]$ одним из методов оптимизации, находим следующие $(n+1)$-е значения варьируемых параметров и возвращаемся к шагу 1.

Рассмотрим применение методики на упрощенном примере. Пусть варьируемой величиной является размер h, все остальные параметры известны.

Решая задачу, будем получать последовательность $h^0 > h^1 > h^2 > \ldots > h^n > \ldots > h_{\min}$, используя формулу для $h:\ h^{n+1} = h^n - p\frac{\partial J^n}{\partial h}(h)$, где p — постоянный шаг.

При этом минимальный объем вычисляется по формуле

$$V = V_s + V_p = V_s + 2a^2 h_{\min}.$$

Приведем результаты решения сформулированной выше задачи при следующих параметрах: сила $F^n = 155,5$ Н; относительная погрешность $\delta(F_p) = 1\%$; зазор $\Delta = 2 \cdot 10^{-3}$ м; марка стали Steel 1010; намагниченность ПМ $M = 1000$ кА/м; $a = 20 \cdot 10^{-3}$ м; $iw = 9800$ А.

Принято $h = 10 \cdot 10^{-3}$ м. На пятом шаге $h^5 = 8,8 \cdot 10^{-3}$ м. Далее можно вычислить минимальный объем $V_{\min}$.

Выводы: в работе показано, что проектирование электромеханических устройств минимального объема можно эффективно выполнять на основе решения обратной задачи стационарного магнитного поля.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

СИСТЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ИЗУЧЕНИИ ОЛИГОПОЛИЧЕСКОГО РЫНКА

В. А. Богачев (Россия, Ростов-на-Дону; РГУПС),
Т. В. Богачев (Россия, Ростов-на-Дону; РГЭУ (РИНХ))

Рассматривается задача о территориальном переделе рынков сбыта продукции в результате перехода от дуополии к олигополии с одинаковыми средними транспортными издержками для всех участников. Предполагается, что предприятие появляющегося на рынке третьего участника более затратно, чем предприятия двух выступавших ранее. Тем не менее может произойти существенное территориальное сокращение рынков сбыта последних, причем у более затратного — кардинальное. Цель работы состоит в нахождении местоположений предприятия третьего участника таких, что более затратный из двух выступавших ранее остается лишь с ограниченной территорией для сбыта своей продукции.

В геометрической модели рассматриваемой микроэкономической ситуации основными объектами исследования, проводимого средствами программной среды Maxima, являются линии на плоскости, разделяющие рынки сбыта предприятий. Существенно то обстоятельство, что среди всех частных случаев овала Декарта, за исключением полупрямой, только гипербола (получающаяся при одинаковых средних транспортных издержках для всех предприятий) представляет собой неограниченную линию на плоскости. В дуополии рынки сбыта каждого из предприятий соответственно представляют собой неограниченные множества на плоскости.

Сначала на рынке присутствуют 1-е и 2-е предприятия с отпускными ценами продукции p_1 и p_2 и средними транспортными издержками q по ее доставке. Цена произведеной каждым предприятием продукции в произвольной точке плоскости складывается из ее отпускной цены и транспортных расходов на перевозку ее единицы из предприятия в эту точку. При расстоянии L между предприятиями и в предположении, что $0 < p_2 - p_1 < Lq$, рынки их сбыта разделены правой ветвью соответствующей гиперболы, в фокусах которой находятся указанные предприятия.

Переход к олигополии выразится в появлении 3-го предприятия с отпускной ценой продукции $p_3 > p_2$. Несмотря на более высокую отпускную цену его продукции, чем у выступавших ранее предприятий, их рынки сбыта при этом могут существенно сократиться. Для произвольных значений параметров L, p_1, p_2, p_3 и q, удовлетворяющих приведенным выше неравенствам, найдена область местоположений 3-го предприятия, при которых 2-е предприятие фактически выдавливается с рынка. Вся территория, кроме ограниченной области, заключенной между дугами двух ветвей соответствующих гипербол, оказывается поделенной 1-м и 3-м предприятиями.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО РАНЖИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ

А. А. Будаева
(Владикавказ, Россия; СКГМИ)

Сравнение многокритериальных объектов обычно сводится к их ранжированию, однако, поскольку существуют различные технологии ранжирования, результаты использования этих технологий могут оказаться неоднозначными. Примерами могут служить различные технологии обработки результатов голосования либо различные стратегии исключения противоречий в экспертных оценках при использовании технологий ранжирования, базирующихся на бинарном сравнении объектов [1].

Таким образом, актуальность задачи выбора оптимальной технологии ранжирования не вызывает сомнений. Под оптимальной ниже понимается такая технология ранжирования объектов, результаты которой минимально отличаются от результатов ранжирования тех же объектов другими технологиями. Предлагаемый далее формализм опирается на следующие обозначения и определения:

i — индекс технологии ранжирования;

π_i — ранжирование объектов, отвечающее i-й технологии ранжирования;

$q_{k,i}$ — число, стоящее на k-м месте в перестановке π_i;

d — индекс оптимальной технологии ранжирования;

$L_{i,j}$ — расстояние Хемминга между перестановками n чисел, полученными с помощью i-й и j-й технологий ранжирования.

Легко убедиться, что для любой перестановки n чисел π_i справедливо:

$$\begin{cases} \forall\, i, \forall\, k \neq t : (q_{k,i} + q_{t,i})^2 \geqslant 1; \\ \forall\, i, \forall\, k : 1 \leqslant q_{k,i} \leqslant n. \end{cases} \tag{1}$$

В соответствии с введенными выше обозначениями требуется выбрать такую d-ю технологию ранжирования, для которой справедлива система:

$$\begin{cases} \forall\, i \neq j : L_{i,j} = \sum\limits_k \mathrm{signum}|q_{k,i} - q_{k,j}|; \\ \forall\, i : L_i = \sum\limits_j L_{i,j}; \\ L_d = \min\limits_i L_i. \end{cases} \tag{2}$$

Из (2) следует простой алгоритм выбора оптимальной технологии ранжирования, при этом полагаем, что каждой i-й технологией ($i = 1, 2,$ Ж, n) уже получено упорядочение объектов, которому соответствует перестановка π_i.

Предлагаемая методика была использована при ранжировании регионов ЮФО на основе официальных данных Федеральной службы государственной статистики об уровне их социально-экономического развития в динамике за 2005–2008 гг. Сложность задачи обусловливалась значительным количеством (более 90) разнородных критериев. Применение указанного подхода позволило выделить оптимальные технологии ранжирования для поставленной задачи, при которых достигалось минимальное несоответствие перестановок, и, в конечном счете, получить однозначные результаты ранжирования [2].

Выводы

Предложенный выше подход позволяет в ряде случаев с единых позиций подойти к определению оптимального управления и администрирования решением многокритериальных задач ранжирования объектов: оптимальным считается управление, присущее наилучшему объекту. Использование при этом алгоритмов выбора оптимальной технологии ранжирования дает возможность повысить однозначность решения задач ранжирования объектов, а ряде случаев и гарантировать однозначное их упорядочение.

Литература

1. *Будаева А. А., Гроппен В. О.* Принятие решений: теория, технология, приложения.—Владикавказ: Изд-во Фламинго, 2009.—184 с.
2. *Вагин В. С., Гроппен В. О., Позднякова Т. А., Будаева А. А.* Многокритериальное ранжирование объектов методом эталонов как инструмент оптимального управления // Устойчивое развитие горных территорий.—2010.—№ 1.—С. 47–56.

АВТОМАТИЗАЦИЯ БИЗНЕС ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ТЕХНОЛОГИИ MICROSOFT SHAREPOINT DESIGNER 2007

О. С. Бурякова
(Россия, Шахты; ИСОП ДГТУ)

Комбинация работы инструментов СУБД Access и SharePoint дает уникальные возможности для современного решения важных задач бизнеса. Microsoft SharePoint Designer 2007 является эффективным приложением поверх платформы SharePoint. Возможности этой программы позволят организации автоматизировать бизнес процессы даже на расстоянии; расширить решение рабочих вопросов за счет интерактивности доступной информации; использовать шаблоны некоторых документов для сокращения затрачиваемого времени. Серверная часть может быть построена на основе программы Office SharePoint Server 2007. Там будет располагаться веб-узел, доступ к которому, будет происходить через программу Microsoft Office Access.

В свою очередь сама база данных может быть выполнена в Microsoft Office Access 2007, что является доступным и оптимальным вариантом. Программа СУБД Access предоставляет несколько вариантов интеграции с Office SharePoint Server 2007. Среди них: импорт данных с веб-узла, публикацию данных на узле SharePoint, создание списка SharePoint, использование в качестве внешнего источника данных SharePoint, копирование базы данных на новые узлы SharePoint, осуществление автономного доступа к данным SharePoint. Все эти способы работы с базой данных позволят усовершенствовать работу на расстоянии во всех филиалах по стране. Причем в качестве единиц передачи могут выступать как отдельные таблицы, так и вся база в целом. Важным обстоятельством является доступ к узлу. Список лиц определяет администратор, и уровень доступа указывает также он. Среди уровней доступа либо полный доступ, либо участие без изменения структуры, либо только чтение данных.

Кроме всего прочего импортировать можно не только данные базы данных, но и документы HTML, папки Outlook и др.

Параметры экспорта выбираются в зависимости от поставленной цели. При экспорте данных Access создается резервная копия, будь то таблица, запрос и др. Для предполагаемой базы данных удобно при ежедневном обмене информации между Access и SharePoint создавать запросы к базе и, таким образом, формировать отчет на конец квартала, например. Параллельно осуществляется сохранение шагов экспорта.

Автономная работа со списком SharePoint с помощью Microsoft Officce Access может осуществляться вне рабочего места: дома, на прогулке, в пути. Для этих целей создается автономная копия списков SharePoint, с которыми осуществляются необходимые операции, после чего надо синхронизировать изменения или повторно подключиться к узлу.

Работа с формами и отчетами осуществляется на узле аналогично работе с ними непосредственно в базе.

Описанная технология интегрированной работы базы данных на основе Microsoft Office Access 2007 и SharePoint, Office SharePoint Server 2007 для автоматизации бизнес процессов является оптимальным и недорогим вариантом. При этом сохраняются главные достоинства: необходимые данные будут представлены на web-узле; доступ к ним будет контролироваться администратором; представленная информация будет структурирована и упорядочена. К основному недостатку стоит отнести сложности, связанные с одновременной работой с данными на узле нескольких пользователей, внесении ими изменений.

Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:
тез. докл. международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

СОЗДАНИЕ ВИРТУАЛЬНОГО ТУРА

Е. Б. Ивушкина (Россия, Шахты; ИСОП ДГТУ),
О. В. Некрасова (Россия, Шахты; ИСОП ДГТУ)

Виртуальные туры — один из самых эффективных и убедительных на данный момент способов представления информации, поскольку они позволяют совершать увлекательные виртуальные экскурсии и создают у зрителя полную иллюзию присутствия. Виртуальный тур обладает интерактивностью. Для создания виртуального тура этнографического туристского комплекса «Донской казачий хуторок» опишем процесс создания цилиндрической панорамы, которую использовали для представления данного визуального проекта. Это проект казачьих жилищных застроек на туристской смотровой площадке, начиная с сооружения самой древней землянки и заканчивая почти современным куренем. В нашем случае панорама — круговая картина, обманывающая зрителя, который будет представлять себя помещенным в центре смотровой площадки, и, поворачиваясь по кругу, сможет ощутить себя окруженным местностью, изображенной вокруг него. Поэтому для построения панорамных изображений необходимо использовать несколько необычную перспективу выгнуто-вогнутую, аналогичную сферической. Это было условие, необходимое для выполнения дальнейшей визуализации уже в так называемом цифровом формате. Перспектива выполняемого вручную рисунка должна напоминать искажение изображения, получаемого через мощную линзу, например, как через специальный объектив фотоаппарата. Такого рода перспективу очень трудно, практически невозможно выдержать идеально, так как человеческий глаз и руки сильно отличаются от современных технических средств, таких как монтаж фотографий с помощью компьютерной обработки. Поэтому художник в данном случае при помощи живописных средств создает иллюзию пространства на плоском листе бумаги. В результате мы получаем изображение, которое можно обозначить новационным. Для проекта виртуального тура художник нарисовал панораму будущего объекта. Полученный эскиз изображен на рис. 1.

Рис. 1. Панорама, нарисованная художником

Виртуальные туры собираются из предварительно созданных панорам в специализированных приложениях — построителях туров. В большинстве случаев программа для разработки виртуальных туров ориентирована на собственный формат панорамных файлов. В данном случае использовался инструмент фирмы Easypano, Inc. – Tourweaver. Easypano Tourweaver представляет собой инструмент для быстрого создания профессиональных виртуальных туров, в котором удачно сочетаются широкие функциональные возможности с простотой и удобством работы. В приложении Tourweaver возможен импорт панорам с цифровых панорамных камер, а также панорам созданных в сторонних приложениях (Panorama Factory, 3D Studio Max, Adobe Photoshop и др.) и нарисованных вручную. Пакет предназначен для профессионалов, но дружественный интерфейс программы, подробная справочная система, включение в поставку учебных туров позволяют работать с ней и новичкам. Созданные в среде этого приложения виртуальные туры обладают уникальными навигационными возможностями: помимо классического управления кнопками и мышью при просмотре панорам и перемещении от одной панорамы к другой, здесь встроена поддержка диалоговой карты с эффектом компаса, предоставляющим дополнительные возможности для управления туром.

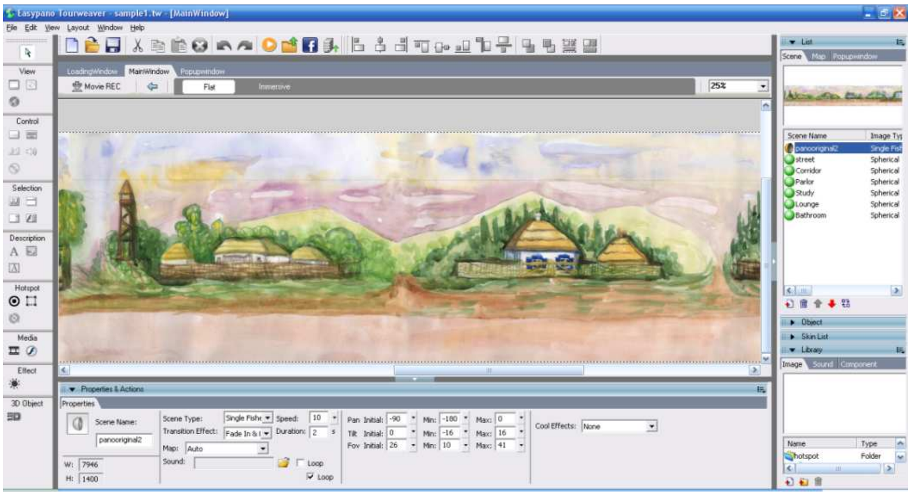


Рис. 2. Добавление панорамы

Получившийся файл имеет расширение .exe, поэтому проблем с его просмотром не возникает, а туры, экспортированные в Java Applet, просматриваются обычным образом в Интернет-браузере с установленным Flash player. При этом файлы BMP-изображений будут конвертированы в JPEG-формат с определяемой пользователем степенью сжатия. Для просмотра туров, сохраненных в собственном формате программы, необходим обозреватель Easypano Tourweaver viewer.

К ВОПРОСУ АВТОМАТИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫМ КОНТРАКТОМ В ВУЗЕ

И. Б. Кушнир (Россия, Шахты; ИСОП ДГТУ),
А. В. Симакина (Россия, Шахты; ИСОП ДГТУ)

Реалии отечественного высшего образования приводят к необходимости выявлять и применять на практике управления профессиональные мотиваторы, активно развивая различные формы стимулирования труда. Изменить мотивационные установки работников профессорско-преподавательского состава (ППС) и ориентировать их на достижение стратегических целей ВУЗа, призван эффективный контракт, как инструмент управления кадровым потенциалом бюджетной организации [1].

В данной статье акцентировано внимание на проблематике получения оперативной актуальной информации о деятельности профессорско-преподавательского состава на основе создания в вузе информационной системы. Использование современных информационных технологий преследует цель получение оценки персонала и мониторинга полученных результатов.

Эффективный контракт — это трудовой договор с работником, у которого в разделе «Обязанности работника» внесены дополнительные требования, отражающие основные показатели эффективной деятельности, призванные решать приоритетные стратегические задачи развития высшего образования — попадание российских вузов в международные рейтинги [2]. Заключая эффективный контракт с вузом, преподаватель принимает на себя обязательства на определенный временной период, в течение которого должны быть выполнены определенные объемы работ, например, опубликованы научные статьи в высокорейтинговых российских и зарубежных журналах, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus. Ежегодно, по итогам работы за истекший учебный год, рассчитывается индивидуальный рейтинг преподавателя, в основу которого положено определение результативности его работы и личного вклада в выполнение контрольных показателей деятельности вуза, с которым преподаватель заключил эффективный контракт. При этом порядок определения рейтинга преподавателя напрямую не увязан с теми видами работ, которые были «прописаны» в эффективном контракте. Заключенные контракты хранятся в «бумажном» виде в отделе кадров, что затрудняет оперативный доступ к информации о запланированных видах работ и сроках их выполнения.

В тоже время процедура аттестации требует наличия полной, достоверной и оперативной информации о деятельности преподавателя. Сбор, ежегодное обновление и анализ информации кадровой службой позволяют разработать гибкие механизмы управления на основе моделирования критериальных значений показателей результативности и качества деятельности преподавателей.

А для этого, прежде всего, необходимо разработать на базе интегрированного программного комплекса 1С: Зарплата и управление персоналом функциональную подсистему, позволяющую вести трудовые договора в форме эффективного контракта сотрудников и отслеживать выполнение запланированных в них видов работ. Эти возможности создают фундамент процветания вуза в динамичном, изменчивом мире современной конкуренции.

Литература

1. *Боровская М. А., Масыч М. А., Шевченко И. К.* Эффективный контракт в системе стимулирования научно-педогогических работников // Высшее образование России.—2013.—№ 5.—С. 13–20.
2. Трудовой договор (эффективный контракт) в образовательных организациях дополнительного образования // Реализация Федерального закона «Об образовании в Российской Федерации».—URL: http://273-фз.рф/obuchenie/moduli/dopolnitelnoe-obrazovanie/9-03.

ПРОЦЕДУРА ПРОВЕРКИ УЧЕБНЫХ ПЛАНОВ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ «ПЛАНЫ»

К. А. Михайлов (Россия, Шахты; ИСОП ДГТУ),
Н. А. Михайлова (Россия, Шахты; Лаборатория ММИС)

В данной работе представлено описание модернизации процедуры проверки учебных планов с учетом (возможных) изменений в законодательстве в области образования. Процедура проверки реализована в программном комплексе «ПЛАНЫ» (руководитель И. М. Мальцев) [1] и является качественным инструментом для проведения экспертизы соответствия содержания и качества подготовки обучающихся и выпускников.

Основными пунктами проверки были требования, изложенные в федеральных государственных образовательных стандартах (ФГОС) высшего профессионального образования (ВПО) и в Типовом положении об образовательном учреждении ВПО. Постановление правительства РФ от 29 марта 2014 г. № 245 устанавливает новый порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования и отменяет Типовое положение. Кроме того, планируется замена стандартов ФГОС ВПО на модернизированные стандарты ФГОС высшего образования (ВО). После проведения сравнительного анализа требований к показателям в учебном плане для ФГОС ВПО и новым ФГОС ВО возникла необходимость корректировки проверки учебных планов.

При запуске проверки появляется окно, в котором пользователям необходимо заполнить некоторые значения параметров проверки согласно данному ФГОС ВО. Результаты выводятся в отдельном окне html-формата.

Данная разработка была успешно представлена на Всероссийских семинарах «Подготовка к переходу на ФГОС 3+. Планирование и реализация учебного процесса», проводимых в Москве, Санкт-Петербурге, Воорнеже, Белгороде и других городах.

Литература

1. *Мальцев И. М.* Развернутое руководство по использованию программного комплекса PLANY.—URL: http://www.mmis.ru/Portals/0/Plany.pdf.

СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Л. К. Умархаджиева

(Россия, Грозный; ГГНТУ)

Математическое образование в техническом, в частности, в нефтяном вузе базируется на знаниях элементарной математики и имеет своей главной задачей сформировать определенную совокупность математических знаний, умений и навыков, образующих математическую культуру конкретного специалиста; положить основу для изучения общепрофессиональных и специальных дисциплин, использующих математический аппарат.

Основными целями преподавания математики студентам технических вузов являются: выработка первичных навыков математического исследования прикладных вопросов — перевода профессиональной задачи на математический язык, выбора оптимального метода ее исследования и интерпретации результата исследования; Выработка навыков доведения решения задачи до практически приемлемого результата — числа, графика и т. д. использование для этого необходимых вычислительных средств: калькулятора, компьютера, таблиц и справочников.

В настоящее время существенным недостатком математического образования в технических вузах можно считать традиционность подхода к содержанию и формам математической подготовки, выражающуюся в излишней дидактичности излагаемого материала и в несоответствии методов и средств обучения современному уровню информатизации общества.

Решение профессионально направленных задач и задач по специальности методом математического моделирования требует достаточно времени, особенно в том случае, если например, интегралы, возникшие в результате решения задачи сложны, и студентам надо напоминать метод, с помощью которого можно найти эти интегралы.

Для существенной экономии времени на реализацию вычислительной части задачи, можно применить специальные программы типа Mathcad, Maple, Matlab и т. п., с помощью которых можно за очень небольшой промежуток времени точно или приближенно вычислять производные, интегралы, находить решение дифференциальных уравнений и т. п., то есть осуществлять почти все действия, которым мы обучаем студентов на практических занятиях. Более того, упомянутые программы позволяют без особых временных затрат интерпретировать результата решения задачи.

Из множества программ компьютерной математики наиболее практичной с точки зрения освоения и применения является система Mathcad. Большие возможности в символьных преобразованиях и вычислениях имеет система Maple. Maple это пакет для аналитических вычислений на компьютере, содержащий более двух тысяч команд, которые позволяют решать задачи алгебры, геометрии, математического анализа, дифференциальных уравнений, статистики, математической физики.

Облегчая решение сложных математических задач, обе системы снимают психологический барьер при изучении математики. Грамотное применение систем компьютерной математики в учебном процессе обеспечивает повышение фундаментальности математического и технического образования, содействует подлинной интеграции теории и практики.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

CINVESTAV — Departamento de Mathematicas CINVESTAV
NWU (Potchefstroom Campus) — North-West University (Potchefstroom Campus)
KFU — Kazan (Volga Region) Federal University
KIAM — Keldysh Institute of Applied Mathematics
KSTU — Kazan State Technical University
АлтГУ — Алтайский государственный университет
АН ЧР — Академия наук Чеченской Республики
БелГУ — Белорусский государственный университет
ВИУ — Владикавказский институт управления
ВГУ — Воронежский государственный университет
ВНЦ — Владикавказский научный центр РАН и РСО-А
ВолГУ — Волгоградский государственный университет
ГГНТУ — Грозненский государственный нефтяной технический университет
ДГИНХ — Дагестанский государственный институт народного хозяйства
ДГТУ — Донской государственный технический университет
ИМ СО РАН — Институт математики имени С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН
ИПМ им. М. В. Келдыша РАН — Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
ИСОП ДГТУ — Институт сферы обслуживания и предпринимательства (филиал) Донского государственного технического университета
КГАСУ — Казанский государственный архитектурно-строительный университет
КГУ — Курский государственный университет
КемГУ — Кемеровский государственный университет
КубГУ — Кубанский государственный университет
КубГУ (филиал) — Филиал Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани.
Лаборатория ММИС — Лаборатория математического моделирования и информационных систем
«МАТИ» — РГТУ — «МАТИ» — Российский государственный технологический университет имени К. Э. Циолковского
МГУ — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
МОУ ДОД «ЦВР» — Муниципальное образовательное учреждение дополнительного образования детей «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района»
МПГУ — Московский педагогический государственный университет
МФЭИ — Московский финансово-экономический институт
НГУ — Новосибирский государственный университет
ОГУ — Орловский государственный университет
ПГУ — Полоцкий государственный университет
«Пневмакс» — ООО «Пневмакс»
РГСУ — Ростовский государственный строительный университет
РГУПС — Ростовский государственный университет путей сообщения

РГЭУ (РИНХ) — Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)
РИИ АлтГТУ — Рубцовский индустриальный институт (филиал) Алтайского государственного технического университета имени И. И. Ползунова
СКГМИ — Северо-Кавказский горно-металлургический институт
СКФУ — Северо-Кавказский федеральный университет
СОГУ — Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова
СПбИИА РАН — Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
«Стэл КС» — ООО «Стэл — Компьютерные Системы»
ТарГУ — Таразский государственный университет им. М. Х. Дулати
УГАТУ — Уфимский государственный авиационный технический университет
филиал ДГТУ — филиал Донского государственного технического университета в г. Волгодонске
филиал РГЭУ (РИНХ) — филиал Ростовского государственного экономического университета (РИНХ) в г. Таганроге «Таганрогский педагогический институт им. А. П. Чехова»
Финансовый университет — Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
ЧГУ — Чеченский государственный университет
ЮГУ — Югорский государственный университет
ЮМИ — Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук и Правительства Республики Северная Осетия-Алания
ЮОГУ — Юго-Осетинский государственный университет им. А. А. Тибилова
ЮРГПУ (НПИ) — Южно-Российский государственный политехнический университет им. М. И. Платова (Новочеркасский политехнический институт)
ЮФУ — Южный федеральный университет

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ, КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ:

тезисы докладов
международной научной конференции
(пос. Дивноморское, 7–13 сентября 2014 г.)

Компьютерная верстка:
М. С. Биченова,
И. С. Гаприндашвили
Зав. редакцией: В. В. Кибизова

ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

ISBN 978-5-904695-28-6