МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ — ФИЛИАЛ ВНЦ РАН
СЕВЕРО-ОСЕТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ К. Л. ХЕТАГУРОВА
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
РЕГИОНАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР ЮФУ

ПОРЯДКОВЫЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ:

Тезисы докладов
XV Международной научной конференции
(с. Цей, 15–20 июля 2019 г.)

Владикавказ
2019

ББК 22.12 + 22.18
УДК 510.12

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XV Международной научной конференции (с. Цей, 15–20 июля 2019 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2019.—243 с.

Сборник содержит тезисы докладов XV Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (с. Цей, 15–20 июля 2019 г.), которая проведена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

ISBN 978-5-904695-42-2

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

СЕКЦИЯ I

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

СЕКЦИЯ II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

СЕКЦИЯ III

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

СЕКЦИЯ IV
СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Пленарные доклады

КОМПОЗИЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Абанин
(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Рассматривается задача о топологической структуре пространства композиционных операторов, действующих на пространствах Бергмана голоморфных в единичном круге функций с весовой sup-нормой, снабженных нормированной операторной топологией. Ранее она изучалась в основном для пространства $\mathcal{C}(H^\infty)$ композиционных операторов на пространстве H^∞ ограниченных голоморфных функций в единичном круге [1, 2]. Так, в [1] были установлены следующие результаты:

1) множество всех компактных композиционных операторов на H^∞ образует компоненту связности в $\mathcal{C}(H^\infty)$;

2) множество всех композиционных операторов на H^∞, отличающихся от данного композиционного оператора, линейно связно, но может не быть компонентой в $\mathcal{C}(H^\infty)$;

3) условие

$$\int_0^{2\pi} \log\left(1 - \left|\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right|\right) d\theta = -\infty \tag{1}$$

необходимо для того, чтобы композиционный оператор $C_\varphi : f \in H^\infty \mapsto f \circ \varphi$ был изолирован в $\mathcal{C}(H^\infty)$.

Отметим, что Дж. Шапиро и К. Сундберг в [3] высказали гипотезу о том, что множество тех композиционных операторов на пространстве Харди H^2, которые отличаются от данного композиционного оператора на компактный, составляет компоненту в $\mathcal{C}(H^2)$. Таким образом, результат [1] из п. 2) означает, что для $\mathcal{C}(H^\infty)$ аналог гипотезы Дж. Шапиро и К. Сундберга неверен. Далее, в работе [2] было доказано, что на самом деле условие (1) является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы композиционный оператор C_φ был изолированным в $\mathcal{C}(H^\infty)$.

В статье [4] было проведено исследование задачи о переносе результатов из [1] на случай весовых композиционных операторов на весовых пространствах вида

$$H_v = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \ \|f\|_v = \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\},$$

задаваемых радиальными весами v на единичном круге. Сразу отметим, что на пространстве $\mathcal{WC}(H_v)$ всех весовых композиционных операторов на H_v такая постановка не имеет большого смысла, так как это пространство линейно связно и, таким образом, само является (единственной) компонентой. В то же время, применение результатов [4] к пространству $\mathcal{C}(H_v)$ композиционных операторов (безвесовой случай) не позволяет установить полные аналоги ни одного из перечисленных выше результатов из [1].

В докладе будут представлена модификация методов из [1] и [3], разработанная автором совместно с Фам Тронг Тиеном и Ле Хай Хоем, которая позволяет такие аналоги установить. Более того, с ее помощью удалось доказать и аналоги результатов 1)–2) для пространства всех ненулевых весовых композиционных операторов на H_v. При этом мы существенно опираемся на результаты и подходы из работ [5] и [6].

Литература

1. *MacCluer B. D., Ohno S., Zhao R.* Topological structure of the space of composition operators on H^∞ // Integr. Equ. Oper. Theory.—2001.—Vol. 40.—P. 481–494.
2. *Hosokawa T., Izuchi K., Zheng D.* Isolated points and essential components of composition operators on H^∞ // Proc. Amer. Math. Soc.—2001.—Vol. 130.—P. 1765–1773.
3. *Shapiro J. H., Sundberg C.* Isolation amongst the composition operators // Pacific J. Math.—1990.—Vol. 145.—P. 117–152.
4. *Bonet J., Lindström M., Wolf E.* Topological structure of the set of weighted composition operators on weighted Bergman spaces of infinite order // Integr. Equ. Oper. Theory.—2009.—Vol. 65.—P. 195–21.
5. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Differentiation and integration operators on weighted spaces of holomorphic functions // Math. Nachr.—2017.—Vol. 290, № 8–9.—P. 1144–1162.
6. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Compactness of classical operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions // Collect. Math.—2018.—Vol. 69.—P. 1–15.

ПОРЯДКОВО НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ОПЕРАТОРЫ УРЫСОНА НА ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Н. М. Абасов
(Россия, Москва; МАИ (НИУ))

Современное развитие теории упорядоченных пространств и операторов, действующих в них, характеризизуется глубоким синтезом ряда нетривиальных математических дисциплин. В начале 80-х годов прошлого столетия в теорию векторных решеток проникли принципиально новые идеи, идущие из математической логики [1]. Методы и достижения возникшей синтетической теории, названной булевозначным анализом, показали свою эффективность при решении ряда трудных аналитических проблем [2].

Одной из таких задач посвящен настоящий доклад. Рассматривается пространство ограниченных, экстенсиональных, (to)-непрерывных (см. [3]) отображений, определенных на тихоновском пространстве со значениями в произвольной порядково полной векторной решетке, снабженное равномерной векторной нормой. С разных точек зрения рассматриваются, как линейные порядково непрерывные операторы, так и нелинейные, ортогонально аддитивные операторы (см. [4–6]), определенные на упомянутом пространстве. Исследованы также некоторые вопросы, связанные с естественно возникающими при этом модулярными и регулярными векторнозначными вероятностными мерами. В доказательстве основных результатов ключевую роль играют методы булевозначного анализа.

Литература

1. *Гордон Е. И.* К теоремам о сохранении соотношений в K-пространствах // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 5.—С. 55–65.
2. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.—560 с.
3. *Абасов Н. М.* Модулярные и регулярные вероятностные меры (вероятности) и их применения // Теория операторов, комплексный анализ и мат. моделирование: тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016.—С. 41–42.
4. *Abasov N., Pliev M.* On extensions of some nonlinear maps in vector lattices // J. Math. Anal. Appl.—2017.—Vol. 455.—P. 516–527.
5. *Abasov N., Pliev M.* Disjointness preserving orthogonally additive operators in vector lattices // Banach J. of Math. Anal.—2018.—Vol. 12, № 3.—P. 730–750.
6. *Pliev M., Ramdane K.* Order unbounded orthogonally additive operators in vector lattices // Mediterr. J. Math.—2018.—Vol. 15, № 2.—20 pp.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ В КОНУСАХ[1]

С. Н. Асхабов
(Россия, Грозный; ЧГУ, ЧГПУ)

Изучается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки

$$u^{\alpha}(x) = \int\limits_0^x k(x-t)u'(t)\,dt + f(x), \quad u(0)=0,\ x>0,\ \alpha>1, \tag{1}$$

в котором ядро $k(x)$ и неоднородность $f(x)$ удовлетворяют условиям:

$$k(x)\in C^1[0,\infty), \quad k'(x) \text{ не убывает на } [0,\infty),\ k(0)=0 \text{ и } k'(0)>0, \tag{2}$$

$$f(x)\in C^1[0,\infty), \quad f(x) \text{ не убывает на } [0,\infty) \text{ и } f(0)=0. \tag{3}$$

Решения уравнения (1) разыскиваются в классе $Q_0^1 = \{u(x) : u(x)\in C^1(0,\infty),$ $u(0)=0$ и $u(x)>0$ при $x>0\}$. Наряду с уравнением (1) рассматиривается интегральное уравнение

$$u^{\alpha}(x) = \int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt + f(x), \quad x>0,\ \alpha>1, \tag{4}$$

в конусе $Q_0 = \{u(x) : u(x)\in C[0,\infty), u(0)=0$ и $u(x)>0$ при $x>0\}$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (3). *Если* $u(x)\in Q_0^1$ *и является решением интегро-дифференциального уравнения* (1), *то* $u(x)\in Q_0$ *и является решением интегрального уравнения* (4). *Обратно, если уравнение* (4) *имеет решение* $u(x)\in Q_0$, *то* $u(x)\in Q_0^1$ *и является решением уравнения* (1).

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (3). *Если* $u(x)\in Q_0$ *и является решением интегрального уравнения* (4), *то*

$$F(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\,k'(0)x\right]^{1/(\alpha-1)} \leqslant u(x) \leqslant \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\,k(x) + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right]^{1/(\alpha-1)} \equiv G(x).$$

Из леммы 2 следует, что решения интегрального уравнения (4) естественно разыскивать в классе $P = \{u(x) : u(x)\in C[0,\infty), F(x)\leqslant u(x)\leqslant G(x)\}$.

Рассмотрим нелинейный интегральный оператор свертки T:

$$(Tu)(x) = \left(\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt + f(x)\right)^{1/\alpha}, \quad \alpha>1.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-41-200001.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (3). *Тогда класс P инвариантен относительно нелинейного оператора T.*

Исследование интегрального уравнения (4) будет основано на принципе сжимающих отображений. Введем в связи с этим следующий класс: $P_b = \{u(x) : u(x) \in C[0,b], F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\}$, где функции $F(x)$ и $G(x)$ определены выше, а $b > 0$ — произвольное число.

Далее предполагается, что $f(x)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$C = \sup_{0<x\leqslant b} \frac{f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)}{x} < \infty. \tag{5}$$

По аналогии с методом Белицкого (см., например, [2, с. 218]) введем во множестве функций P_b расстояние по формуле

$$\rho_b(u_1, u_2) = \sup_{0<x\leqslant b} \frac{|u_1(x) - u_2(x)|}{x^{1/(\alpha-1)}e^{\beta x}}, \quad \beta > 0.$$

Выберем теперь число $c \in (0, b)$ такое, что $k'(c) < \alpha k'(0)$ и положим

$$\beta = \frac{1}{k'(0)} \sup_{c\leqslant x\leqslant b} \frac{k'(x) - k'(0)}{x}.$$

Справедлива следующая лемма (ср. [3]).

Лемма 4. *Пусть функция $k(x)$ удовлетворяет условию* (2). *Тогда для любого $x \in [0, b]$ справедливо неравенство $k'(x)e^{-\beta x} \leqslant k'(c)$.*

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2), (3) *и* (5). *Тогда оператор T действует из P_b в P_b и является сжимающим, причем*

$$\rho_b(Tu_2, Tu_1) \leqslant \frac{k'(c)}{\alpha k'(0)}\, \rho_b(u_2, u_1) \quad (\forall\, u_1(x), u_2(x) \in P_b).$$

На основании принципа сжимающих отображений и теоремы 1, используя связь между уравнениями (4) и (1), установленную в лемме 1, доказывается

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (2), (3) *и* (5). *Тогда интегро-дифференциальное уравнение* (1) *имеет в Q_0^1 (и в P_b при любом $b > 0$) единственное решение $u^*(x)$. Это решение можно найти в пространстве P_b методом последовательных приближений по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. При этом справедлива оценка скорости сходимости*

$$\rho_b(u_n, u^*) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\, \rho_b(Tu_0, u_0), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $q = k'(c)/[\alpha k'(0)] < 1$, а $u_0(x) \in P_b$ есть начальное приближение.

Литература

1. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свертки.—М.: Физматлит, 2009.—304 с.
2. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
3. *Okrasinski W.* On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain nonlinear convolution equation // Annal. Polon. Math.—1979.—Vol. 36, № 1.—P. 61–72.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

А. О. Ватульян
(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН),
В. О. Юров
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Неоднородные в радиальном направлении цилиндрические структуры все чаще используются при моделировании реальных объектов (трубопроводы, покрытия, сосуды). При описании распространения волн в таких структурах на высоких частотах требуются модели, учитывающие законы изменения упругих модулей внутри тела (расчеты для структур с осредненными характеристиками часто не дают верной информации). Кроме того, важными являются задачи об определении законов изменения по измеренным на границе волновым полям.

1. Рассмотрена задача о распространении волн в неоднородном в радиальном направлении цилиндрическом волноводе, как некоторая модель, находящая применение в неразрушающем контроле трубопроводов. Границы волновода свободны от напряжений, за исключением ограниченной кольцевой области на внешней границе, где прикладывается равномерно распределенная нагрузка. Рассмотрен стационарный режим осесимметричных колебаний. Для нахождения полей перемещений на внешней границе волновода к уравнениям колебаний в цилиндрической системе координат и граничным условиям применяется интегральное преобразование Фурье вдоль продольной координаты, при этом задача в пространстве трансформант сведена к канонической системе дифференциальных уравнений первого порядка. Матрица коэффициентов системы представима в виде квадратичного матричного пучка относительно частотного параметра и параметра преобразования Фурье. Решение этой системы осуществляется численно методом пристрелки в широкой области изменения спектральных параметров. Изучено дисперсионное множество задачи. Построены асимптотические представления ветвей дисперсионного множества в окрестности частотной оси. Поля перемещений на внешней границе волновода построены путем обращения интегрального преобразования Фурье с использование теоремы о вычетах, причем вычеты находятся численно с помощью анализа некоторых вспомогательных краевых задач.

2. Также рассмотрена задача для неоднородного цилиндрического волновода с кольцевым отслоением, моделируемым математическим разрезом. Введены скачки радиальных и продольных перемещений на отслоении — функции раскрытия. Основная идея исследования состоит в формулировке системы интегральных уравнений относительно введенных скачков на отслоении. Через отслоение проводится поверхность, делящая волновод на два волновода. Сформулированы две краевых задачи для каждого волновода. Для исследования

двух специально сформулированных краевых задач осуществляется интегральное преобразование Фурье. Задачи в трансформантах решаются методом пристрелки, причем краевые задачи составлены таким образом, что трансформанты функций раскрытия и внешней нагрузки не содержатся в граничных условиях. Таким образом, символы Фурье ядер интегральных операторов находятся численно. Осуществляя обратное преобразование Фурье и учитывая граничные условия на берегах, получена искомая система интегральных уравнений первого рода с разностными ядрами относительно функций раскрытия. Проведен анализ структуры ядер, показано, что часть ядер регулярны, часть имеет гиперсингулярные особенности, соответственно ядра понимаются в смысле конечного значения по Адамару. Эта система решена с использованием идей метода граничных элементов и метода коллокаций. Функции раскрытия считаются постоянными на элементе, а точки коллокаций находятся в серединах элементов. Система интегральных уравнений сведена к решению линейной алгебраической системы, коэффициенты которой являются интегралами по контуру в комплексной плоскости, которые выбираются в соответствии с принципом предельного поглощения. Представлен набор вычислительных экспериментов по нахождению функций раскрытия для различных законов неоднородности волновода, места приложения нагрузки, частоты колебаний. На втором этапе в исследовании этой задачи построены поля перемещений на внешней границе для волновода с отслоением, изучено влияние различных факторов на структуру волновых полей.

3. Для неоднородного волновода сформулирована обратная задача по нахождению переменного в радиальном направлении модуля сдвига по информации о поле перемещений на внешней границе при заданном коэффициенте Пуассона. Колебания, как и ранее, возбуждаются за счет действия в кольцевой области равномерно распределенной нагрузки. В задаче определения модуля сдвига считается заданным поле смещений на поверхности волновода. На первом этапе решения обратной задачи ищется начальное приближение для искомой функции в рамках минимизации функционала невязки при постоянном модуле. Далее, нелинейная обратная задача решается на основе сочетания процедуры линеаризации в пространстве трансформант Фурье. Возникающие краевые задачи при нулевой и первой степенях формального параметра (однородная и неоднородная) служат для определения волновых полей и формулировки операторного уравнения для поправки. Использование условия разрешимости и формулировка сопряженной задачи позволяет сформулировать уравнение Фредгольма первого рода с гладким ядром для отыскания поправки к начальному приближению искомой функции. Для нахождения ядра в интегральном уравнении и аппроксимации его вырожденным осуществляется нахождение вычетов в полюсах второго порядка, причем для этого опять используются вспомогательные краевые задачи. На основе такого подхода сформирован итерационный процесс по восстановлению искомой функции. Проанализирована сходимость процесса в зависимости от числа итераций. Решены обратные задачи по восстановлению функций с возрастающим, убывающим и немонотонным законам изменения.

О ПОЛНОТЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ, ПОРОЖДЕННЫХ УРАВНЕНИЯМИ С ПРОИЗВОДНЫМИ В СРЕДНЕМ[1]

Ю. Е. Гликлих
(Россия, Воронеж; ВГУ)

Предварительные сведения о производных в среднем справа D, слева D_*, симметрических D_S (текущих скоростей) и квадратичных D_2 можно найти в [1].

Основной целью доклада является нахождение условий полноты стохастического потока, порожденного уравнениями с указанными производными.

Уравнение с производными в среднем справа имеет вид

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t, \xi(\cdot)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(\cdot)), \end{cases} \tag{1}$$

с производными в среднем слева — вид

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t)), \end{cases} \tag{2}$$

и с текущими скоростями — вид

$$\begin{cases} D_S\xi(t) = v(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t)). \end{cases} \tag{3}$$

Используется понятие непрерывности потока на бесконечности, введенное Л. Шварцем, а также понятие собственного отображения в числовую ось (собственной функции).

Теорема 1. *Пусть поток $\xi(s)$, порожденный уравнением* (1), *непрерывен на бесконечности. Он полон тогда и только тогда, когда на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ существует собственная функция $u(t, x)$ такая, что*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}\right) u < C$$

для некоторой константы $C > 0$, где $\mathcal{A}$ — генератор потока.

Теорема 2. *Если на $\mathbb{R}^n$ существует гладкая собственная функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что $\widetilde{\mathcal{L}}\varphi < C$ для некоторой константы $C > 0$ при всех $t \in [0, +\infty)$ и $x \in \mathbb{R}^n$, где $\widetilde{\mathcal{L}}$ — генератор обратного потока, то все решения обратной задачи Коши для уравнения* (2) *с детерминированными начальными условиями существуют на любом интервале* $[0, T]$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00048.

Теорема 3. *Для того чтобы одновременно прямой поток* $\xi(s)$ *и обратный поток* $\tilde{\xi}(s)$*, порожденные уравнением* (3)*, были непрерывны на бесконечности и полны, необходимо и достаточно, чтобы на* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *существовали положительные гладкие собственные функции* $u(t,x)$ *и* $\tilde{u}(t,x)$ *такие, что выполняются неравенства*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{A}\right)u<C \quad \text{и} \quad \left(-\frac{\partial}{\partial t}+\widetilde{\mathcal{A}}\right)\tilde{u}<\widetilde{C}$$

для некоторых положительных констант C *и* $\widetilde{C}$*, где* $\mathcal{A}$ *и* $\widetilde{\mathcal{A}}$ *— генераторы прямого и обратного потока, соответственно.*

Литература

1. *Gliklikh Yu. E.* Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics.— London: Springer-Verlag, 2011.—460 p.

ON TEACHING CALCULUS ON THE BASE OF NONSTANDARD ANALYSIS

E. I. Gordon
(USA, Charleston, Illinois; EIU)

In the 60th of the last century A. Robinson proved the possibility of introducing in Calculus infinitesimal numbers (actual infinitesimals) on the modern level of mathematical rigor. In this way, intuitively clear but non-rigorous formulations of the basic definitions and theorems of Calculus obtained the status of rigorous mathematical statements. The proofs of theorems that use actual infinitesimals are often much simpler and more intuitively clear, than classical proofs. The analysis using the actual infinitesimals is called the "Non-Standard Analysis" (NA). The first Calculus textbook that used actual infinitesimals was written by famous American logician H. J. Keisler [1]. The book was used for teaching freshmen students in some US colleges and even high schools in the early 70th. In the first decade of our century, this book was used for teaching Calculus by O'Donovan and his colleagues in some high schools in Switzerland. The results of their experiments were presented in the paper [2]. These experiments showed that students, who studied Calculus with actual infinitesimals in high schools experienced no difficulties in moving to a rigorous standard analysis at the university, while those who studied an analysis based on an informal standard approach in school experienced serious difficulties during transition to a rigorous standard study of analysis at the university. These authors also used an axiomatic approach to NA that is different to the model-theoretic approach of A. Robinson. One more textbook on elementary Calculus with NA [3] was published in 2015.

The basic notions of NA and the textbooks on elementary Calculus mentioned will be discussed in my talk. No preliminary knowledge of NA or mathematical logic is needed.

References

1. *Keisler H. G.* Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach, 2nd Ed.—Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1986.
2. *O'Donovan R.* Teaching analysis with ultrasmall numbers // Math. Teaching-Research J.—2009.—Vol. 3, № 3.—P. 1–22.
3. *Hrbacek K., Lessman O., O'Donovan R.* Analysis with Ultrasmall Numbers.—Boca Raton, London, New York: CRS Press Taylor & Francis Group, 2015.

О ГОТОВНОСТИ ВЫПУСКНИКОВ ШКОЛ К ИЗУЧЕНИЮ КУРСА МАТЕМАТИКИ НА ОСНОВЕ ФГОС ВО

Ю. А. Дробышев (Россия, Калуга; Калужский филиал ФУ),
И. В. Дробышева (Россия, Калуга; Калужский филиал ФУ)

В ФГОС среднего общего образования представлены требования к результатам овладения выпускниками школ основной образовательной программой, включающие три группы результатов: предметные, метапредметные и личностные. Рассмотрение их в контексте проблемы успешности осуществления учебной математической деятельности студентов означает, что студент-первокурсник, имеющий в аттестате положительную отметку по математическим дисциплинам и успешно сдавший ЕГЭ по математике, должен владеть понятийным аппаратом и методами решения задач основных содержательных линий школьного курса математики, уметь ставить цель деятельности и реализовывать ее, владеть навыками учебно-исследовательской и проектной деятельности, самостоятельного поиска информации, уметь ясно, логично и точно излагать свою точку зрения и др.

В тоже время, анализ результатов учебной математической деятельности первокурсников, в том числе самостоятельной, позволил выдвинуть гипотезу о том, что значительная их часть не владеет знаниями и умениями, соответствующими заявленным в ФГОС среднего общего образования результатам, в объеме, необходимом для продолжения образования в вузе. Другими словами, имеет место существенный разрыв между реальными и планируемыми в образовательном стандарте результатами обучения выпускников. Его устранение является необходимым условием овладения вузовским курсом математики, общекультурными и общепрофессиональными компетенциями.

С целью проверки выдвинутой гипотезы и последующего поиска мер, направленных на решение обозначенной проблемы, была разработана программа исследования первокурсников, включающая диагностику уровня усвоения ими основных понятий и способов действий, включенных в содержание школьного курса математики, а также сформированности метапредметных умений, значимых при обучении математике и проявляющихся в:

1) деятельности по поиску способов решения задач, составлении и реализации планов;

2) открытии новых математических фактов на основе индуктивных и дедуктивных рассуждений, их обосновании, представлении и применении;

3) самостоятельном поиске информации, ее адаптации и представлении;

4) контроле и оценивании результатов деятельности.

Предметная диагностика, являясь первым этапом программы исследования, предшествует началу изучения курса высшей математики. Она проводится в рамках двух аудиторных самостоятельных работ, первая из которых — это онлайн тестирование. Тестовые задания, предлагаемые студентам, условно разделены на четыре группы. Первую из них составляют задания, ориентированные на проверку осознанности усвоения основных математических понятий. Это задания множественного выбора, проверяющие усвоение определений понятий в части их существенных признаков и логической структуры. Задания на соответствие обеспечивают правильность выполнения действия подведение под определение понятия, в них требуется установить соответствие между термином, обозначающим понятие, его представлением в символической (графической) форме и соответствующим примером.

Вторую группу составляют тестовые задания, выполнение которых сводится к выбору и установлению правильной последовательности действий, соответствующей реализации правила (алгоритма).

Третья группа — задания с открытым ответом. Их выполнение предполагает использование определенного способа действия, свойства. Ответы к этим заданиям, как правило, состоят из двух частей: первая — промежуточный результат (значение числителя дроби, дискриминант квадратного уравнения, значение производной в точке и т. д.), вторая — окончательный результат (значение дроби, разность между большим и меньшим корнями квадратного уравнения, величина угла между касательной к графику функции и осью абсцисс и т. д.).

Четвертая группа — это конструктивные задания. Их выполнение свидетельствует о сформированности действия выведения следствий из того факта, что объект принадлежит понятию. Такие задания в частности позволяют выявить наличие у студентов представлений об элементарных функциях, их свойствах, графиках, способах построения, видах уравнений.

Вторая часть предметной диагностики состоит в нахождении студентами решений многошаговых задач на основе применения комбинации правил и свойств. Решение этих задач связано с использованием аппарата как одного из разделов (тем) школьного курса математики, так и нескольких. Однако, используемые при этом методы и приемы известны студентам.

По результатам предметной диагностики делается два вывода относительно мер коррекции усвоения школьного курса математики. Первый состоит в определении перечня тем (вопросов), усвоение которых практически всеми студентами находится на низком уровне. Работа по коррекции усвоения данных элементов содержания осуществляется в рамках факультативного курса. Второй вывод связан с определением для каждого студента дополнительной совокупности элементов содержания, которыми он не овладел. В рамках индивидуальных и групповых консультаций проводится работа по коррекции уровня усвоения данными элементами содержания.

Исследование сформированности метапредметных умений осуществляется на основе выполнения и защиты студентами серии учебно-исследовательских проектов, содержание которых также связано со школьным курсом математики. В докладе будут раскрыты особенности данных проектов и представлены примеры предметных диагностических заданий.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА ИЗ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПАМЯТЬЮ

Д. К. Дурдиев
(Узбекистан, Бухара; БухГУ)

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности с интегральным членом типа свертки в правой части:

$$u_t - \Delta u = \int\limits_0^t K(t-\tau)\Delta u(x,\tau)\,d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$: $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Задачу определения функции $u(x,t)$, удовлетворяющей уравнениям (1), (2) при известных функциях $K(t)$ и $\varphi(x)$ назовем прямой задачей.

В обратной задаче предполагается неизвестным ядро $K(t)$, $t > 0$, интеграла в (1) и требуется найти его по дополнительной информации о решении прямой задачи:

$$u\big|_{x=0} = f(t), \quad t > 0,\ f(0) = \varphi(0). \tag{3}$$

Через $B^6(\mathbb{R}^n))$ обозначим класс 6 раз непрерывно дифференцируемых и ограниченных со всеми производными в $\mathbb{R}^n$ функций.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $f(t) \in C^3[0,T]$, $T > 0$, $\varphi(x) \in B^6(R^n)$ *и выполнено условие* $(\Delta^2\varphi(0) - f''(0))/\Delta\varphi(0) \geqslant 0$. *Тогда найдется такое число* T^*, *что на отрезке* $[0,T]$, $T \in (0,T^*)$, *существует единственное непрерывное решение обратной задачи* (1)–(3).

Теорема может быть доказана согласно методу работы [1].

Литература

1. *Дурдиев Д. К., Рашидов А. Ш.* Обратная задача определения ядра в одном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 1.—С. 110–116.

ON THE BREZIS–LIEB LEMMA AND ITS EXTENSIONS

E. Yu. Emelyanov
(Turkey, Ankara; METU)

This talk presents main results of our joint work with Dr. M. A. A. Marabeh (Palestine Technical University — Kadoorie). It consists of three parts. The first one provides a necessary short introduction following to [1–4]. The second part shows how to find an appropriate extension of Brezis–Lieb's lemma to nets. It is done by employing the unbounded order convergence [5–7]. We identify a wide class of Banach lattices in which the Brezis–Lieb lemma holds true. This gives also its net-version in L^p for $p \in [1, \infty)$. In the last part, an operator version of the Brezis–Lieb lemma in certain convergence vector lattices is presented and discussed (cf. also [8, 9]).

References

1. *Brezis H., Lieb E.* A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals // Proc. Amer. Math. Soc.—1983.—Vol. 88, № 3.—P. 486–490.
2. *Nakano H.* Modulared Semi-Ordered Linear Spaces.—Tokyo: Maruzen Co., 1950.—P. i+288.
3. *Niculescu C. P.* An overview of absolute continuity and its applications // Internat. Ser. Numer. Math. Vol. 157.—Basel: Birkhauser, 2009.—P. 201–214.
4. *Riesz F.* Sur la convergence en moyenne // Acta Sci. Math.—1929.—Vol. 4, № 1.—P. 58–64.
5. *Emelyanov E. Yu., Marabeh M. A. A.* Two measure-free versions of the Brezis–Lieb lemma // Vladikavkaz Math. J.—2016.—Vol. 18, № 1.—P. 21–25.
6. *Gao N., Troitsky V. G., Xanthos F.* Uo-convergence and its applications to Cesáro means in Banach lattices // Israel J. Math.—2017.—Vol. 220, № 2.—P. 649–689.
7. *Gao N., Xanthos F.* Unbounded order convergence and application to martingales without probability // J. Math. Anal. Appl.—2014.—Vol. 415, № 2.—P. 931–947.
8. *Dabboorasad Y. A. M., Emelyanov E. Y.* Unbounded convergence in the convergence vector lattices: a survey // Vladikavkaz Math. J.—2018.—Vol. 20, № 2.—P. 49–56.
9. *Marabeh M. A. A.* Brezis – Lieb lemma in convergence vector lattices // Turkish J. Math.—2018.—Vol. 42, № 3.—P. 1436–1442.

КОРОТКОВОЛНОВАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ ТИПА ПАТЛАКА — КЕЛЛЕРА — СЕГЕЛЯ

К. И. Ильин
(Великобритания, Йорк; Университет Йорка),
А. Б. Моргулис
(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Мы рассматриваем известную модель (Говорухин, Моргулис, Тютюнов, 2000) активной среды, состоящей из двух «видов», из которых один — условный «хищник» — наделен способностью к детерменированному крупномасштабному движению в поиске другого вида — «жертв»[1]. Безразмерные уравнения движения имеют вид

$$\partial_t u = \partial_x(\varkappa q + f) - \nu u + \delta_u \partial_x^2 u, \tag{1}$$

$$\partial_t p = \partial_x(\delta_p \partial_x p - pu), \tag{2}$$

$$\partial_t q = q(1 - q - p) + \delta_q \partial_x^2 q. \tag{3}$$

где p, q — концентрации хищников и жертв, соответственно, u — адвективная скорость хищников, f — внешний сигнал, δ_p, δ_q, δ_u, $\varkappa$, ν — положительные числовые параметры. Систему, возникающую при $f = 0$, мы называем *однородной*.

Подстановка $u = \varkappa\partial_x\phi$ преобразует систему (1)–(3) в систему, состоящую из уравнения (3) и следующих двух уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_t\phi &= q + \varkappa^{-1} f - \nu\phi + \delta_u \partial_x^2 \phi, \\ \partial_t p &= \partial_x(\delta_p \partial_x p - \varkappa p \partial_x \phi). \end{aligned} \tag{4}$$

Транспорт хищников описывает второе из уравнений (4). При этом слагаемое $-\varkappa p\partial_x\phi$ отвечает за их адвекцию, которая таким образом подчиняется известному закону Патлака — Келлера — Сегеля, первоначально установленному для хемотаксиса, и в настоящее широко используемого для моделирования различных активных сред (см. обзор Bellomo et al., 2015). Такой тип массопереноса рассматривается также как разновидность нелинейной кросс-диффузии.

В нашем случае хищник ориентируется не на численность жертв q, а на вырабатываемый ими сигнал ϕ, т. е. имеет место *непрямой таксис к жертве* (indirect prey-taxis, Tello & Wrozek, 2016); коэффициент $\varkappa$ играет роль коэффициента подвижности хищников. Выработка сигнала ϕ описывается первым из уравнений (4), с учетом сигнала f, подаваемого извне.

В нашем сообщении речь идет о гомогенизации системы (1)–(3) в предположении, что внешний сигнал имеет вид

$$f = f(x, t, \xi, \tau), \quad \xi = \omega x, \ \tau = \omega t, \ \omega \to \infty, \tag{5}$$

[1]Полные ссылки и другие подробности смотрите в препринте: Ilin K., Morgulis A. A remark on the disorienting of species due to the fluctuating environment.—arXiv:1808.02091.

и $\delta_u = \nu_1\omega^{-1}$, $\delta_p = \nu_2\omega^{-1}$, $\nu_1 = \text{const} > 0$, $\nu_2 = \text{const} > 0$. Главное приближение выглядит так:

$$q(x,t) = \bar{q}(x,t) + O\big(\omega^{-1}\big), \quad \omega \to +\infty, \tag{6}$$

$$u(x,t) = \bar{u}(x,t) + \widetilde{u}_0(x,t,\tau,\xi) + O\big(\omega^{-1}\big), \quad \omega \to +\infty, \tag{7}$$

$$p(x,t) = \bar{p}(x,t)P(x,t,\tau,\xi) + O\big(\omega^{-1}\big), \quad \omega \to +\infty, \tag{8}$$

где $\xi = \omega x$ и $\tau = \omega t$. При этом функции $\widetilde{u}_0$, P, $\bar{u}$, $\bar{q}$ и $\bar{p}$ определяются из уравнений

$$\partial_\tau \widetilde{u}_0 = \partial_\xi\big(f + \nu_1 \partial_\xi \widetilde{u}_0\big), \quad \langle \widetilde{u}_0 \rangle = 0, \tag{9}$$

$$\partial_\tau P = \partial_\xi\big(\nu_2 \partial_\xi P - P(\bar{u} + \widetilde{u}_0)\big), \quad \langle P \rangle = 1, \tag{10}$$

$$\partial_t \bar{u} = \partial_x\big(\varkappa \bar{q} + \bar{f}\,\big) - \nu \bar{u}, \quad \bar{f} = \langle f \rangle, \tag{11}$$

$$\partial_t \bar{p} + \partial_x\big(\bar{p}\big(\bar{u} + \langle \widetilde{u}_0 P \rangle\big)\big) = 0, \tag{12}$$

$$\bar{q}_t = \bar{q}\big(1 - \bar{p} - \bar{q}\big) + \delta_q \partial_x^2 \bar{q}, \tag{13}$$

причем уравнения (9) и (10) рассматриваются на торе $\mathbb{T}^2$ и косые скобки обозначают стандартное усреднение на торе. Как видно из уравнения (12), имеется дополнительный дрейф хищников со скоростью, равной $\langle \widetilde{u}_0 P \rangle$, и именно он отвечает за эффект коротковолнового сигнала. При данной f дрейф однозначно определяется $\bar{u}$. Поэтому уравнения (11), (12) и (13) представляют собой замкнутую систему относительно неизвестных средних $\bar{u}$, $\bar{q}$ и $\bar{p}$. Эту систему мы называем *гомогенизированной*.

Однородная система (1)–(3) имеет *однородные равновесия*[2], в которых $p \equiv p_e$, $q \equiv q_e$, $u = 0$, $p_e = \text{const} > 0$, $q_e = \text{const} > 0$, $p_e + q_e = 1$. Оказывается, при определенных условиях, гомогенизированная система (11)–(13) также имеет однородные равновесия $\bar{p} \equiv p_e$, $\bar{q} \equiv q_e$, $\bar{u} = 0$, $p_e = \text{const} > 0$, $q_e = \text{const} > 0$, $p_e + q_e = 1$. Каждому такому равновесию соответствует квазиравновесие — коротковолновый режим с нулевой средней скоростью и постоянными средними численностями хищников и жертв.

Существует пороговое значение подвижности хищников, $\varkappa_c = \varkappa_c(\delta_u, \delta_p, \delta_q, \nu) > 0$ такое, что при $\varkappa < \varkappa_c$ все однородные равновесия однородной системы устойчивы по линейному приближению в том смысле, что система, возникающая при линеаризации однородной системы возле любого однородного равновесия, не имеет ненулевых решений вида $\mathrm{e}^{i\alpha x + \lambda(\alpha)t}(\hat{u}(\alpha), \hat{p}(\alpha), \hat{q}(\alpha))$, где $\operatorname{Re}\lambda(\alpha) \geqslant 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. В случае гомогенизированной системы такое же утверждение имеет место при условии $K\varkappa < \varkappa_c(0,0,\delta_q,\nu)$, где $\varkappa_c(0,0,\delta_q,\nu) > 0$, и $K = K(f, \nu_1, \nu_2) > 0$.

Стабилизирующий эффект коротковолнового внешнего сигнала (5) проявляется в том, что величина $K(Af, \nu_1, \nu_2)$ убывает при возрастании амплитуды $A > 0$. Мы указываем частные, но все же довольно широкие классы сигналов, таких, что $K(Af, \nu_1, \nu_2) \to 0$ *экспоненциально* при $A \to \infty$.

[2]В однородной системе $f = 0$.

ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ РОДА $p \geqslant 0$

С. Б. Климентов
(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Цель доклада — обзор результатов по теории изгибаний поверхностей рода $p \geqslant 0$ и положительной внешней кривизны.

Первые примеры замкнутых поверхностей рода $p > 0$ и положительной внешней кривизны были сконструированы А. В. Погореловым [1, гл. 6, § 12]. В этой работе А. В. Погорелов доказал жесткость таких поверхностей при точечной внешней связи и сформулировал гипотезу о жесткости без каких-либо условий при $p > 1$.

Эта гипотеза была доказана В. Т. Фоменко [2]. Дальнейшее изучение таких поверхностей, замкнутых и с краем, было продолжено В. Т. Фоменко и его учениками (Е. В. Тюриков, С. Б. Климентов, Ю. П. Золотухин). В докладе приводится обзор этих работ.

Приведем здесь один недавний результат автора доклада [3].

Теорема. *Пусть S и S' — изометричные регулярные поверхности в $\mathbb{E}^3$, класса C^k_α, $k \geqslant 3$, $0 < \alpha < 1$, с краями и рода $p \geqslant 0$. Предположим, что их гауссова кривизна удовлетворяет условию*

$$K \geqslant k_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Если эти поверхности содержат соответствующие друг другу по изометрии C^k_α-регулярные конгруэнтные дуги γ and γ', то поверхности S и S' конгруэнтны.

Литература

1. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.—М.: Наука, 1969.—760 с.
2. *Фоменко В. Т.* О жесткости и однозначной определенности замкнутых поверхностей рода $p \geqslant 1$ в римановом пространстве // Докл. АН СССР.—1973.—Т. 213, № 1.—С. 45–48.
3. *Климентов С. Б.* Об однозначной определенности локально выпуклых поверхностей положительной кривизны рода $p \geqslant 0$ с краем // Сиб. мат. журн.—2019.—Т. 60, № 1.—С. 109–117.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА[1]

А. И. Кожанов
(Россия, Новосибирск; ИМ СО РАН)

В докладе излагаются новые результаты существования и единственности регулярных решений (решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) для уравнений смешанного типа высокого порядка:

1) аналогов уравнений Келдыша и Лаврентьева — Бицадзе;

2) аналогов параболо-гипрболических уравнеий высокого порядка;

3) уравнений с кратными характеристиками с переменным направлением эволюции.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-51-41009.

ЗАДАЧА О РАСПАДЕ РАЗРЫВА ДЛЯ ЦЕПОЧКИ ВОЛЬТЕРРА

Р. Ч. Кулаев (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН, СОГУ),
А. Б. Шабат (Россия, Черноголовка; ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН)

Рассматриваются уравнения цепочки Вольтерра [1]:

$$\dot{b}_n = b_n(b_{n+1} - b_{n-1}), \quad b_n = b_n(t),\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Изучаются свойства *положительных* решений задачи Коши для цепочки Вольтерра с начальными данными в виде ступеньки:

$$b_n(0) = \begin{cases} a, & n < 0, \\ c, & n = 0, \\ b, & n > 0, \end{cases} \tag{2}$$

где a, b, c — заданные неотрицательные числа, и ее частный случай на полуоси:

$$\begin{gathered} b_0(t) = 0, \quad \dot{b}_n = b_n(b_{n+1} - b_{n-1}), \quad t > 0, \\ b_n(0) = 1,\ n \geqslant 1, \end{gathered} \tag{3}$$

соответствующий выбору $a = c = 0$. Качественно рассматриваемая задача напоминает задачу Гуревича — Питаевского для уравнения Кортевега — де Фриза [2]. Обсуждаются вопросы существования решения и условия замыкания цепочки Вольтерра.

Решение задачи Коши (1), (2) можно представить в виде степенного ряда

$$b_n(t) = b_n(0) + \frac{b_n^{(1)}(0)}{1!}\, t + \cdots + \frac{b_n^{(k)}(0)}{k!}\, t^k + \cdots \tag{4}$$

Однако для этого степенного ряда неясным пока остается вопрос о радиусе сходимости, аналитическом продолжении и характере особых точек на границе его круга сходимости. Поэтому более подходящим методом доказательства разрешимости задачи Коши нам видится метод последовательных приближений. Структура правых частей дифференциальных уравнений цепочки Вольтерра позволяет сформулировать теорему о локальной разрешимости задачи Коши для бесконечной системы (1) с начальными условиями $\{b_n(0)\} \in l^\infty$.

Рассматривается замыкание цепочки (3), задаваемое условиями

$$b_n b_{n+1} = 1, \quad n \geqslant N, \tag{5}$$

при некотором фиксированном $N \geqslant 2$. Например, в простейшем случае $N = 2$ система уравнений (1) принимает вид

$$\dot{b}_1 = b_1 b_2, \quad \dot{b}_2 = 1 - b_1 b_2, \quad t > 0,$$

и сводится к уравнению Риккати

$$\dot{b}_1 + b_1^2 = (t+2)b_1,$$

решение которого определено на всей полуоси и выражается через интеграл вероятности. При $N > 2$ для замкнутой цепочки (3) устанавливаются два закона сохранения.

Теорема. *Формулы*

$$I_N^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} b_i - (N+t),$$

$$I_N^{(2)} = 2\sum_{i=1}^{n} i \log(b_{2i-1}b_{2i}) + \sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=i+2}^{N} b_i b_j - n(N+t)^2$$

определяют законы сохранения цепочки Вольтерра (3) *с условием замыкания* (5).

Первый закон сохранения является следствием условия замыкания, а второй следует из лагранжевости замкнутой системы. Кроме того, первый закон сохранения гарантирует возможность продолжения на всю полуось решений замкнутой цепочки (3) в общем случае $N \geqslant 2$. Вообще же, как показывают численные эксперименты, в задаче (3) можно выделить три отрезка времени:

1) начальный $0 \leqslant t < R$, где R — радиус сходимости ряда Тейлора (4);
2) период линейного роста $b_1(t)$;
3) промежуток квазистационарного роста, когда $\dot{b}_1(t) \approx 0$ и $b_1(t) \approx 4$.

Литература

1. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование.—М.: Наука, 1976.—288 с.
2. *Гуревич А. В., Питаевский Л. П.* Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны // Журн. эксперим. и теорет. физики.—1973.—Т. 65, № 2.—С. 590–604.

FUNCTIONAL REPRESENTATION OF INJECTIVE BANACH LATTICES

A. G. Kusraev
(Russia, Vladikavkaz; VSC RAS)

The aim of this work is to survey recent results on functional representation of injective Banach lattices obtained in [1, 2]. The main results assert that AL-spaces and Dedekind complete AM-spaces with unit are the *'building blocks'* for any injective Banach lattice. In other words, we present a concrete functional description of injective Banach lattices similar to that of Kakutani–Maharam representation theorem for AL-spaces, see [3, Theorem 26.4.7]. We attack the problem by means of the *Boolean-valued transfer principle* from AL-spaces to injective Banach lattices established in [1, 4]: *every injective Banach lattice embeds into an appropriate Boolean-valued model, becoming an AL-space.* According to this fact and fundamental principles of Boolean-valued models, each theorem about AL-spaces within Zermelo–Fraenkel set theory has its counterpart for the original injective Banach lattice interpreted as a Boolean-valued AL-space. This approach, called *Boolean valued analysis*, stems from [5] and [6].

References

1. *Kusraev A. G.* Boolean Valued Analysis Approach to Injective Banach Lattices.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2011.—28 p.—(Preprint; № 1).
2. *Kusraev A. G.* Boolean-valued analysis and injective Banach lattices // Dokl. Ross. Akad. Nauk.—2012.—Vol. 444, № 2.—P. 143–145.
3. *Semadeni Z.* Banach Spaces of Continuous Functions. Vol. 1.—Warszawa: Polish Sci. Publ., 1971.—584 p.
4. *Kusraev A. G.* Boolean valued transfer principle for injective Banach lattices // Siberian Math. J.—2015.—Vol. 25, № 1.—P. 57–65.
5. *Gordon E. I.* Real numbers in Boolean-valued models of set theory and K-spaces // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1977.—Vol. 237, № 4.—P. 773–775.
6. *Takeuti G.* Two Applications of Logic to Mathematics.—Tokyo–Princeton: Iwanami and Princeton Univ. Press, 1978.—137 p.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ[1]

Г. Г. Магарил-Ильяев
(Россия, Москва, МГУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН),
Е. О. Сивкова
(Россия, Москва; МПГУ)

Пусть на банаховом пространстве X задана сильная полугруппа операторов $T(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, т. е. $T(t)\colon X \to X$ — линейный непрерывный оператор для каждого $t \geqslant 0$, $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2)$ для любых $t_1 \geqslant 0$ и $t_2 \geqslant 0$, $T(0) = I$ (тождественный оператор) и $T(t)f \to f$ при $t \to 0+$ в метрике X для каждого $f \in X$.

Мы ставим следующую задачу. Пусть приближенно известны значения операторов $T(t_1)$ и $T(t_2)$, $0 \leqslant t_1 < t_2$, т. е. известны элементы $g_i \in X$, $i = 1, 2$, такие, что для некоторого $f \in X$

$$\left\|T(t_i)f - g_i\right\|_X \leqslant \delta_i, \quad \delta_i > 0,\ i = 1, 2.$$

Как по этой информации восстановить (по возможности, наилучшим образом) значение оператора $T(\tau)$, где $\tau \neq t_i$, $i = 1, 2$?

Точная постановка такова. Любой метод восстановления φ, сопоставляющий паре $(g_1, g_2) \in X \times X$ элемент из X (предполагаемое значение $T(\tau)$) есть отображение $\varphi\colon X \times X \to X$. Погрешностью данного метода назовем величину

$$e(\tau, \varphi) = \sup_{\substack{f \in X,\, g_i \in X,\, i=1,2,\\ \|T(t_i)f - g_i\|_X \leqslant \delta_i,\, i=1,2}} \left\|T(\tau)f - \varphi(g_1, g_2)\right\|_X$$

(зависимость от фиксированных t_i и δ_i, $i = 1, 2$, не отмечаем).

Нас интересует величина

$$E(\tau) = \inf_{\varphi} e(\tau, \varphi),$$

где нижняя грань берется по всем отображениям $\varphi\colon X \times X \to X$, которую назовем *погрешностью оптимального восстановления*, и те методы $\widehat{\varphi}$, на которых эта нижняя грань достигается, т. е.

$$E(\tau) = e(\tau, \widehat{\varphi}\,).$$

Такие методы назовем *оптимальными методами восстановления.*

Оставаясь в рамках абстрактной полугруппы операторов, можно дать некоторые оценки для погрешности оптимального восстановления. Но вычислить

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-01-00649.

точное значение этой величины и найти оптимальные методы восстановления удается лишь для ряда конкретных полугрупп операторов. Здесь мы рассмотрим следующую полугруппу операторов.

Пусть $a(\cdot)$ — непрерывная неотрицательная функция на $\mathbb{R}$ такая, что $a(0) = 0$ и $a(\xi) \to +\infty$ при $\xi \to \pm\infty$. Пусть F — преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$. Для каждого $t \geqslant 0$ определим оператор $T_a(t)\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, действующий в образах Фурье по формуле

$$F[T_a(t)f](\xi) = e^{-ta(\xi)}F[f](\xi) \quad \text{для п. в. } \xi \in \mathbb{R}.$$

Простая проверка показывает, что семейство $T_a(t)$, $t \geqslant 0$, является сильной полугруппой операторов в $L_2(\mathbb{R})$.

Пусть $0 \leqslant t_1 < \tau < t_2$ и $\delta_i > 0$, $i = 1, 2$. Положим

$$\lambda_1 = \frac{t_2 - \tau}{t_2 - t_1}\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\frac{-2(\tau - t_1)}{t_2 - t_1}}, \quad \lambda_2 = \frac{\tau - t_1}{t_2 - t_1}\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\frac{2(t_2 - \tau)}{t_2 - t_1}}.$$

Теорема. *Пусть* $0 \leqslant t_1 < \tau < t_2$ *и* $\delta_1 > \delta_2 > 0$. *Тогда*

$$E(\tau) = \sqrt{\lambda_1\delta_1^2 + \lambda_2\delta_2^2}\,.$$

Функция $\xi \mapsto \lambda_1 e^{-2t_1 a(\xi)} + \lambda_2 e^{-2t_2 a(\xi)} - e^{-2\tau a(\xi)}$ *неотрицательна для всех* $\xi \in \mathbb{R}$, *и для любой функции* $\omega(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})$ *такой, что для п. в.* $\xi \in \mathbb{R}$

$$\left|\omega(\xi) - \frac{\lambda_2 e^{-(\tau - t_1)a(\xi)}}{\lambda_1 e^{(t_2 - t_1)a(\xi)} + \lambda_2 e^{-(t_2 - t_1)a(\xi)}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\, e^{t_2 a(\xi)}}{\lambda_1 e^{(t_2 - t_1)a(\xi)} + \lambda_2 e^{-(t_2 - t_1)a(\xi)}}\sqrt{\lambda_1 e^{-2t_1 a(\xi)} + \lambda_2 e^{-2t_2 a(\xi)} - e^{-2\tau a(\xi)}},$$

метод $\widehat{\varphi}_\omega\colon L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, *определенный в образах Фурье для п. в.* $\xi \in \mathbb{R}$ *формулой*

$$F[\widehat{\varphi}_\omega(g_1, g_2)](\xi) = \big(e^{-(\tau - t_1)a(\xi)} - \omega(\xi)e^{-(t_2 - t_1)a(\xi)}\big)F[g_1](\xi) + \omega(\xi)F[g_2](\xi),$$

является оптимальным.

Следует отметить, что, например, задача оптимального восстановления решения уравнения теплопроводности [1] и решения задачи Дирихле для верхней полуплоскости [2] сводятся к задаче оптимального восстановления указанной полугруппы операторов при специальных значениях функции $a(\cdot)$.

Литература

1. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб.—2009.—Т. 200, № 5.—С. 37–54.
2. *Абрамова Е. В.* Восстановление решения задачи Дирихле по неточным граничным данным // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 1.—С. 3–13.

ПРИЕМЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА УРОКА МАТЕМАТИКИ

И. Е. Малова
(Россия, Брянск, БГУ им. И. Г. Петровского; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Результаты обучения математике зависят от деятельности преподавателя; ожидаемые результаты могут быть как у всех, так и у отдельных обучающихся, могут быть предметными и метапредметными, могут быть краткосрочными и долгосрочными. К сожалению, достижению полноценно результативного освоения математики всеми учащимися не всегда помогают учебники, поскольку они часто не учитывают как психолого-педагогические основы обучения, так и обоснованные наработки в области методики обучения математике. Например, в учебниках приводятся решения задач без обсуждения того, как догадаться о способе ее решения, какой опыт работы с одной задачей следует учитывать при работе с другой (или с другим математическим объектом). Одним из возможных способов улучшения результатов обучения может быть следование современным направлениям решения методических задач, освоение учителем инструментов их решения, иллюстрация приемов использования этих инструментов.

Сравним два понятия: математическая деятельность преподавателя и его методическая деятельность.

Поскольку два понятия относятся к понятию деятельности сравнение надо проводить по компонентам деятельности. Выберем два: объект деятельности и критерий достижения цели.

Для математической деятельности объектами являются математические объекты (определение, теорема, задача, математический текст и др). Критерием достижения цели в математической деятельности является правильность математических действий.

Поскольку учителю также необходима правильность своих математических действий, объектами его методической деятельности являются математические объекты. Но основным отличием методической деятельности от математической является наличие в деятельности учителя методических задач, связанных с другим человеком, а не с самим собой. Постановке методических задач помогают вопросы «Как добиться, чтобы обучающиеся ...?».

Выделим три методические задачи:

1) как добиться успешности обучающихся в применении математических знаний;

2) как добиться успешности обучающихся в поисковой (исследовательской или творческой) деятельности;

3) как добиться успешности обучающихся в проявлении умений «познавать, делать, жить, жить вместе», названных ЮНЕСКО принципами образования XXI века?

Обозначим три современных направления, ведущих к решению этих задач: деятельностный подход; личностно ориентированное обучение; гуманитаризация образования. Эти направления связаны со структурой педагогического процесса по Г. Е. Сенькиной [1]. Кроме того, на ее основе определяется методическая деятельность учителя математики как деятельность по организации педагогического процесса, направленная на полноценно результативное освоение учащимися математики [2].

Что делать преподавателю, отвечающему за методическую подготовку учителя? Предлагаем учить тому, что необходимо на каждом уроке; показывать образцы реализации технологий; развивать методическое мышление через разработку студентами диалоговых компьютерных презентаций по вопросам школьного курса математики; организовывать лекции и занятия так, чтобы на собственном опыте студенты поняли достоинства указанных направлений.

Инструментами реализации деятельностного подхода являются понятия: мотив, цель, ориентировочная основа деятельности; для реализации личностно ориентированного обучения добавляется учебный диалог; для осуществления гуманитаризации обучения математике добавляются приемы метапредметной деятельности. Выделим некоторые приемы конструирования и анализа урока. Приемы мотивации: «Мотивация интересом»; «Мотивация опытом»; «Мотивация успехом».

Приемы постановки целей урока: «Цели как итоги»; «Цели как план»; «Цели как триада: деятельность-математика-способ достижения».

Приемы введения ориентировочных основ деятельности (ООД): «Задача-обобщение этапов-ООД»; «ООД и последующая реализация»; «ООД и параллельная реализация». Приемы анализа урока: «Почему учитель ...?»; «Почему учащиеся ...?»; «Меняется цель — меняется этап».

Литература

1. *Алимухамбетова* (*Сенькина*) *Г. Е.* Теория педагогического процесса как основа формирования готовности школьников к познавательной деятельности.—Алматы: Гылым Аркалык, 1994.—131 с.
2. *Малова И. Е.* Непрерывная методическая подготовка учителя математики с позиций субъектной согласованности: Монография.—Брянск: Изд-во Брянск. ИПКРО, 2006.—164 с.

SEMANTIC READING IN MATHEMATICS EDUCATION

A. Kh. Naziev
(Russia, Ryazan; RSU S. A. Esenin, Ryazan Institute ED)

The author already published several papers about semantic reading in mathematics and mathematics teaching (see References). The first paper contained a short instruction on what semantic reading is, and several examples of its application to school algebra, geometry, probability theory, and calculus. The second paper is dealing with problem-solving with the help of equations. In the third paper, a more instructive definition of the semantic reading given, and several more complicated examples collected. The fourth paper is wholly devoted to the semantic reading in the context of the history of mathematics. In the proposed article, we intend to give a survey of our previous work and add some new considerations.

References

1. *Naziev A.* Semantic reading in mathematics teaching // Методички Аспекти Наставе Математике III: Зборник радова са трећег међународног научног скупа одржаног 14–15 јуна 2014 године на Факултету педагошких наука Универзитета у Крагујевцу.—Jagodina: Универзитет у Крагујевцу, 2014.—P. 107–119.
2. *Naziev A.* Descartes and Newton on Problem Solving with the Help of Equations // EDULEARN 17 Proceedings. 9th International Conference on Education and New Learning Technologies, July 3rd–5th, 2017.—Barcelona: IATED Academy, 2017.—P. 4149–4155.
3. *Naziev A.* Semantic Reading in Mathematics and Mathematics Teaching // BRAIN — Broad Research in Artificial Intelligence and Neuroscience.—2018.—Vol. 9, № 4.—P. 100–114.
4. *Naziev A.* Semantic Reading in the Context of the History of Mathematics // BRAIN — Broad Research in Artificial Intelligence and Neuroscience.—2019.—Vol. 10, № 2.—P. 174–184.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ КИЛЛИНГА ПОСТОЯННОЙ ДЛИНЫ

Ю. Г. Никоноров
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Этот доклад основан на недавних работах [1] и [2], которые посвящены исследованию свойств векторных полей Киллинга постоянной длины и их естественных обобщений на римановых многообразиях. Напомним, что векторные поля Киллинга на заданном римановом многообразии характеризуются тем, что порождают однопараметрические группы изометрий этого многообразия.

Подробный обзор известных результатов, связанных с киллинговыми векторными полями постоянной длины (КВППД) на римановых многообразиях, можно найти в работах [3, 4]. Важные свойства киллинговых векторных полей постоянной длины на компактных однородных римановых пространствах установлены в работе [5]. Интересные результаты о КВППД на некоторых специальных римановых многообразиях получены недавно в работах [6] и [7].

Рассмотрим произвольное связное риманово многообразие (M, g) и некоторую группу Ли G, действующую эффективно на (M, g) изометриями. Отождествим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G с соответствующей алгеброй Ли векторных полей Киллинга на (M, g) следующим образом. Для произвольного $U \in \mathfrak{g}$ рассмотрим $\exp(tU) \subset G$, $t \in \mathbb{R}$, однопараметрическую группу изометрий (M, g), и определим векторное поле Киллинга $\widetilde{U}$ стандартной формулой

$$\widetilde{U}(x) = \frac{d}{dt} \exp(tU)(x)\Big|_{t=0}.$$

Ясно, что отображение $U \to \widetilde{U}$ линейно и инъективно, но $[\widetilde{U}, \widetilde{V}] = -\widetilde{[U,V]_{\mathfrak{g}}}$, где $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ — скобка Ли в $\mathfrak{g}$ и $[\cdot,\cdot]$ — скобка Ли векторных полей на M.

Каждый $X \in \mathfrak{g}$ определяет линейный оператор $\operatorname{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (оператор присоединенного действия), действующий согласно формуле $Y \mapsto [X, Y]$. Если рассмотреть X как векторное поле Киллинга на (M, g), то различные ограничения геометрического сорта на X влекут специальные (в частности, спектральные) свойства соответствующего оператора $\operatorname{ad}(X)$.

В этом докладе мы сфокусируемся на свойстве X иметь постоянную длину, а также на более общем свойстве иметь ограниченную длину (последнее означает, что длина векторного поля X ограничена некоторой универсальной константой на всем рассматриваемом многообразии, или, другими словами, функция $x \in M \mapsto g_x(X, X)$ ограничена).

Приведем один из основных результатов работы [1].

Теорема 1 [1]. *Для каждого поля Киллинга постоянной длины $X \in \mathfrak{g}$ на римановом многообразии (M, g) спектр оператора $\operatorname{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ является чисто мнимым, т. е. лежит в $\mathbf{i}\mathbb{R}$.*

Этот результат является новым лишь для некомпактных алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и лишь для X, не лежащих в центре $\mathfrak{g}$. Действительно, для каждой компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует скалярное произведение, относительно которого все операторы присоединенного действия кососимметричны (это свойство является характеристическим для компактных алгебр Ли), поэтому спектр любого такого оператора лежит в $\mathbf{i}\mathbb{R}$. Также отметим, что оператор $\mathrm{ad}(X)$ тривиален для каждого вектора X из центра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. С другой стороны, известны примеры КВППД $X \in \mathfrak{g}$ для некомпактных $\mathfrak{g}$ [1]. В частности, соответствующий линейный оператор $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ может быть нетривиальным и нильпотентным.

Теорема 1 была существенно обобщена в недавней работе [2]. Мы ограничимся здесь рассмотрением лишь одного результата из этой работы.

Теорема 2 [2]. *Для каждого ограниченного поля Киллинга $X \in \mathfrak{g}$ на римановом многообразии (M, g) спектр оператора $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ является чисто мнимым, т. е. лежит в $\mathbf{i}\mathbb{R}$.*

В работах [1] и [2] получены более детальные результаты о спектре операторов присоединенного действия, порожденных киллинговыми полями постоянной длины или ограниченными киллинговыми полями. Обсуждению этих свойств посвящена оставшаяся часть доклада.

Литература

1. *Nikonorov Yu. G.* Spectral Properties of Killing Vector Fields of Constant Length.—arXiv:1902.02500.—(Preprint).
2. *Xu M., Nikonorov Yu. G.* Algebraic Properties of Bounded Killing Vector Fields.—arXiv:1904.08710.—(Preprint).
3. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* Killing vector fields of constant length on Riemannian manifolds // Sib. Math. J.—2008.—Vol. 50, № 3.—P. 395–407.
4. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* Clifford–Wolf homogeneous Riemannian manifolds // J. Differ. Geom.—2009.—Vol. 82, № 3.—P. 467–500.
5. *Nikonorov Yu. G.* Killing vector fields of constant length on compact homogeneous Riemannian manifolds // Ann. Glob. Anal. Geom.—2015.—Vol. 48, № 4.—P. 305–330.
6. *Wolf J. A., Podestà F., Xu M.* Toward a classification of Killing vector fields of constant length on pseudo-Riemannian normal homogeneous spaces // J. Differ. Geom.—2017.—Vol. 105, № 3.—P. 519–532.
7. *Xu M., Wolf J. A.* Killing vector fields of constant length on Riemannian normal homogeneous spaces // Transform. Groups.—2016.—Vol. 21, № 3.—P. 871–902.

ФОРМУЛА СЛЕДОВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОТ ПАР НЕКОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

В. В. Пеллер
(США, Ист-Лансинг; Университет штата Мичиган)

Теория возмущений операторов в гильбертовых пространствах является одним из центральных разделов современного анализа, имеющим важные физические приложения. В ранних работах И. М. Лифшица и М. Г Крейна в связи с задачами квантовой статистики возникла теория так называемой функции спектрального сдвига (ф. с. с.). Тесным образом с ф. с. с. связана формула следов Лифшица — Крейна. В настоящее время данная тематика активно развивается (см. [1–3]). В докладе речь идет о возможных обобщениях формулы следов Лифшица — Крейна:

$$\operatorname{trace}(f(B) - f(A)) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,\xi(t)\,dt,$$

где A и B — самосопряженные операторы с ядерной разностью, f — достаточно хорошая функция, а ξ — функция спектрального сдвига, которая определяется операторами A и B.

Рассматривается следующая задача: *возможен ли аналог формулы следов Лифшица — Крейна для функций от пар некоммутирующих самосопряженных операторов*.

Доклад основан на совместной работе с А. Б. Александровым и Д. С. Потаповым [4].

Литература

1. *Coine C., Le Merdy C., Potapov D., Sukochev F.,Tomskova A.* Peller's problem concerning Koplienko–Neidhardt trace formulae: the unitary case // J. Funct. Anal.—2016.—Vol. 271, № 7.—P. 1747–1763.
2. *Carey A., Gesztesy F., Potapov D., Sukochev F., Tomilov Y.* On the Witten index in terms of spectral shift functions // J. Anal. Math.—2017.—Vol. 132, № 1.—P. 1–61.
3. *Peller V. V.* The Lifshits–Krein trace formula and operator Lipschitz function // Proc. Amer. Math. Soc.—2016.—Vol. 144.—P. 5207–5215.
4. *Aleksandrov A. B., Peller V. V., Potapov D. S.* On a Trace Formula for Functions of Noncommuting Operators.—arXiv:1901.09495v1.

APPROXIMATION OF STABLE MANIFOLDS FOR FRACTIONAL EQUATIONS[1]

S. I. Piskarev
(Russia, Moscow; MSU)

We consider the approximation of well-posed Cauchy problem

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_t^\alpha u)(t) &= Au(t) + f(u(t)), \quad t \geqslant 0, \\ u(0) &= u^0, \end{aligned} \tag{1}$$

where $\mathbf{D}_t^\alpha$ is the Caputo–Dzhrbashyan derivative, the operator A generates analytic and compact resolvent family $S_\alpha(\cdot, A)$ and function $f(\cdot)$ is smooth enough in both arguments.

The fractional integral of order $\alpha > 0$ is defined by

$$(J^\alpha q)(t) := (g_\alpha * q)(t), \quad t > 0,$$

where

$$g_\alpha(t) := \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0, \end{cases}$$

and $\Gamma(\alpha)$ is the Gamma function. The Riemann–Liouville derivative of order $\alpha > 0$ is

$$(D_t^\alpha q)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^m (J^{m-\alpha} q)(t),$$

and the Caputo–Dzhrbashyan fractional derivative of order $\alpha > 0$ is defined by

$$(\mathbf{D}_t^\alpha q)(t) = (D_t^\alpha q)(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{q^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}.$$

We consider the discretization of semilinear fractional equation (1) on a general approximation scheme [1]. Under compact convergence of resolvents we establish the semidiscrete approximation theorem for the smooth function $f(\cdot)$ like in [2]. Then we are developing a general approach to establish a semidiscrete approximation of stable manifolds in the vicinity of hyperbolic equilibrium points as in [3].

References

1. *Vainikko G.* Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem) // Nonlinear Analysis.—1978.—Vol. 2, № 3.—P. 647–687.
2. *Liu R., Li M., Piskarev S.* Approximation of semilinear fractional Cauchy problem // Comput. Methods Appl. Math.—2015.—Vol. 15, № 2.—P. 203–212.
3. *Siegmund S., Piskarev S.* Approximations of stable manifolds in the vicinity of hyperbolic equilibrium points for fractional differential equations // Nonlinear Dynamics.—2019.—Vol. 94, № 4.—P. 3150–3161.

[1]The author was partially supported by grant of Russian foundation for basic research, project № 17-51-53008.

ОПЕРАТОРНОЕ РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

М. А. Плиев
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Многие классические неравенства анализа, справедливые для чисел и функций, допускают обобщение для некоммутативных матриц и операторов. В последние годы операторные аналоги различных классических формул были установлены в ряде работ (см. [1–3]). Стоит отметить, что в прямой перенос известных формул для некоммутативных переменных часто бывает невозможен. Так обстоит дело с хорошо известным неравенством треугольника для модуля $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, справедливым как в числовых полях $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, так и в классических функциональных пространствах непрерывных и измеримых функций $C[0,1]$ и $L_p[0,1]$ $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$. Данное неравенство в общем случае нарушается уже в простейшей некоммутативной алгебре $M_2(\mathbb{C})$ квадратных 2×2 комплексных матриц. В докладе будет представлен следующий результат.

Теорема. *Пусть $\mathcal{A}$ — локальная C^*-алгебра, $\mathcal{M}$ — гильбертов A-модуль, $x, y \in \mathcal{M}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) $|x + y| = |x| + |y|$;
(2) $\langle x, y\rangle = |x|\,|y|$.

Литература

1. *Ando T., Hayashi A.* A characterization of the operator-valued triangle equality // J. Operator Theory.—2007.—Vol. 58, № 2.—P. 51–53.
2. *Arambasic L., Rajic R.* On the C^*-valued triangle equality and inequality in Hilbert C^*-modules // Acta Math. Hungar.—2008.—Vol. 119, № 4.—P. 373–380.
3. *Hart R.* A characterization of the operator-valued triangle equality // Filomat.—2006.—Vol. 20.—P. 51–53.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТЁПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ БОЛЬШИХ РАЗМЕРОВ

В. А. Стукопин
(Россия, Ростов-на-Дону, ДГТУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Данный доклад является обзором результатов, полученных автором совместно с А. Батальщиковым, С. Грудским, С. Золотых, С. Нечаевым и К. Половниковым и посвященных асимптотикам собственных значений и собственных векторов тёплицевых матриц больших размеров. Условно эти результаты можно разбить на следующие четыре группы:

1) результаты, посвященные асимптотическим формулам для собственных чисел и собственных векторов ленточных несамоспряженных тёплицевых матриц с симметрическим символом [1, 2];

2) результаты, связанные с описанием предельного спектра и нахождению асимптотик собственных функций несамосопряженных ленточных тёплицевых матриц с символом специального вида, именно являющимся степенью полинома Лорана первой степени ([3–5]);

3) результаты об асимптотике спектра тёплицевых несамосопряженных симметрических тёплицевых матриц с символом ослабленной гладкости [6];

4) физические приложения.

Кроме того, можно упомянуть результаты, относящиеся к распределению собственных значений тёплицевых матриц с символом Хартвига — Фишера, а также результаты, относящиеся к геометрии предельного спектра ленточных тёплицевых матриц. Результаты, относящиеся к распределению собственных чисел [7], нельзя, строго говоря, считать новыми, но возможно представляет интерес, используемый при получении основного результата, факт о связи тёплицевых и циклических матриц. В определенной степени сказанное выше относится и к результатам геометрии предельного спектра [8, 9] — эти результаты не являются в полной мере законченными, но могут быть полезны при дальнейшем исследовании. Все эти результаты частично опубликованы в приведенных ниже работах [1–9], частично готовятся к публикации или являются темой текущего и незаконченного исследования (пункт 4).

Тёплицевы матрицы являются актуальной темой исследования уже на протяжении почти целого столетия, выступающие в качестве простого, важного и глубоко нетривиального примера, лежащего на стыке линейной алгебры, спектральной теории операторов, комплексного анализа и математической физики. Первые результаты в этой области появились в начале прошлого века и относились к теории бесконечномерных тёплицевых операторов. В начале 50-х гг. прошлого века появились ставшие знаменитыми работы Сегё, относящиеся к функциям распределения и предельному спектру самосопряженных тёплицевых матриц больших размеров. Эти работы были вызваны необходимостью исследования модели Изинга, вычисление статистической суммы которой было сведено к вычислению определителя тёплицевой матрицы большого размера. Собственно с этого момента и началось исследование спектральных свойств тёплицевых матриц больших (строго говоря растущих) размеров с заданным символом. Наиболее тонкие с аналитической точки зрения задачи в этой области относятся к нахождению асимптотических формул для собственных чисел и собственных векторов тёплицевых матриц больших размеров с равномерными оценками остаточных членов. В работах [1, 2] впервые были получены формулы, допускающие равномерную оценку остаточного члена, для соответственно собственных чисел и собственных векторов несамосопряженных ленточных тёплицевых матриц больших размеров. В работе [6] такого рода оценки были получены для несамосопряженных тёплицевых мариц с символом ослабленной гладкости. Такого рода формулы имеют важные приложения в физике, в частности они позволяют вычислять хаусдорфову размерность пространства конформаций одномерной модели разомкнутой цепочки взаимодействующих молекул, взаимодействие которых убывает по степенному закону. Вычисление хаусдорфовой размерности — это в настоящее время незаконченный проект совместно с А. Батальщиковым, С. Грудским, С. Нечаевым и К. Половниковым. Предварительный результат состоит в существовании хаусдорфовой размерности пространства конформаций и явном вычислении значений размерности в зависимости от класса рассматриваемых символов соответствующих тёплицевых матриц. Интересной и возможно новой задачей представляется попытка связать асимптотические формулы с геометрией предельного спектра несамосопряженных тёплицевых матриц. Такого рода результатам посвящены работы [3–5].

Литература

1. *Batalshchikov A. A., Grudsky S. M., Stukopin V. A.* Asymptotics of eigenvalues of symmetric Toeplitz band matrices // Linear Algebra Appl.—2015.—Vol. 469.—P. 464–486.
2. *Batalshchikov A. A., Grudsky S. M., Ramirez de Arellano, Stukopin V. A.* Asymptotics of eigenvectors of large symmetric banded Toeplitz matrices // Integr. Equ. Oper. Theory.—2015.—Vol. 83, № 3.—P. 301–330.
3. *Золотых С. А., Стукопин В. А.* К вопросу о числе компонент связности дополнения предельного спектра ленточных тёплицевых матриц // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 2.—С. 41–48.
4. *Золотых С. А., Стукопин В. А.* Асимптотика собственных значений простых многопетлевых ленточных тёплицевых матриц специального вида // Мат. заметки.—2017.—Т. 102, № 4.—С. 619–623.
5. *Батальщиков А. А., Золотых С. А., Стукопин В. А.* К вопросу об асимптотике собственных значений ленточных тёплицевых матриц специального типа // Мат. форум. Т. 12. Исслед. по математике и мат. образованию.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2018.—С. 11–18.—(Итоги науки. Юг России).
6. *Batalshchikov A. A., Grudsky S. M., Malisheva I. S., Mihalkovich S. S., Ramirez de Arellano E., Stukopin V. A.* Asymptotics of eigenvalues of large symmetric Toeplitz matrices with smooth simple-loop symbols // Linear Algebra Appl.—2019.—arxiv: math 1903.10551.—(in Print).
7. *Батальщиков А. А., Стукопин В. А.* О распределении собственных значений тёплицевых матриц с символом Хартвига — Фишера // Вестн. ДГТУ.—2011.—Т. 6.—С. 812–820.
8. *Золотых С. А., Стукопин В. А.* Об описании предельного спектра ленточных тёплицевых матриц // Вестн. ДГТУ.—2012.—Т. 8, № 2.—С. 5–11.
9. *Золотых С. А., Стукопин В. А.* О вычислении предельного спектра ленточных тёплицевых матриц // Мат. форум. Т. 7. Исслед. по мат. анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2013.—С. 80–87.—(Итоги науки. Юг России).

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Х. Г. Умаров
(Россия, Грозный; АН ЧР)

Для нелинейного дифференциального уравнения соболевского типа, моделирующего крутильные колебания бесконечного стержня, с учетом сил диссипации и дисперсии в вязкоупругой среде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial t^2} - \left(\alpha\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} + \beta\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t} + \gamma\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + \delta\,\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \\ + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\,u = \lambda\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3,$$

где α, β, γ, δ, μ, λ — заданные числовые параметры, исследована разрешимость задачи Коши в пространстве непрерывных функций на всей числовой оси.

Найден явный вид решения соответствующего линейного уравнения.

Установлен временной отрезок существования классического решения задачи Коши для нелинейного уравнения и получена оценка нормы этого локального решения.

Рассмотрены условия существования глобального решения и разрушения решения на конечном отрезке.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА

В. Е. Федоров
(Россия, Челябинск; ЧелГУ)

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство. Обозначим через $\mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ множество всех линейных замкнутых плотно определенных в $\mathcal{Z}$ операторов, действующих в пространство $\mathcal{Z}$, для которых

(i) при всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0,\ \mu \neq a_0\}$ имеем $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;

(ii) для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ найдется такое $K = K(\theta, a) > 0$, что для всех $\mu \in S_{\theta,a}$

$$\left\| R_{\mu^\alpha}(A) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{K(\theta, a)}{|\mu^{\alpha-1}(\mu - a)|}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\int_b^c \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t)\, d\alpha = Az(t) + g(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

где D_t^α — дробная производная Герасимова — Капуто, $c \in (1, 2)$, $b \in (0, c)$, $\omega : (b, c) \to \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{A}^c(\theta_0, a_0)$, $g : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{Z}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, и задачу Коши для него

$$z^{(k)}(0) = z_k, \quad k = 0, 1. \tag{2}$$

Введем обозначения:

$$W_d^h(\lambda) := \int_d^h \omega(\alpha) \lambda^\alpha\, d\alpha, \quad b_1 := \max\{b, 1\},$$

$$Z_0(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_{\theta,a}} e^{\lambda t}\, \frac{W_b^c(\lambda)}{\lambda} \left(W_b^c(\lambda) I - A \right)^{-1} d\lambda,$$

$$Z_1(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_{\theta,a}} e^{\lambda t}\, \frac{W_{b_1}^c(\lambda)}{\lambda^2} \left(W_b^c(\lambda) I - A \right)^{-1} d\lambda,$$

$$Z(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_{\theta,a}} e^{\lambda t} \left(W_b^c(\lambda) I - A \right)^{-1} d\lambda$$

при некоторых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$. При $K > 0$, $\beta \geqslant 0$ обозначим через $E(K, \beta; \mathcal{Z})$ множество таких функций $z : \overline{\mathbf{R}}_+ \to \mathcal{Z}$, что $\|z(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant K e^{\beta t}$ при всех $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$. Кроме того, используем обозначение

$$E(\mathcal{Z}) := \bigcup_{K>0} \bigcup_{\beta \geqslant 0} E(K, \beta; \mathcal{Z}).$$

Теорема 1. *Пусть* $c \in (1,2)$, $A \in \mathcal{A}^c(\theta_0, a_0)$, $W_b^c(\lambda)$ *и* $W_{b_1}^c(\lambda)$ *аналитичны в секторе* S_{θ_1,a_1} *при некоторых* $\theta_1 \in (\pi/2, \theta_0]$, $a_1 \geqslant a_0$ *и удовлетворяют условиям*

$$(\forall\, \lambda \in S_{\theta_1,a_1})\ \big(W_b^c(\lambda)\big)^{1/c} \in S_{\theta_0,a_0},$$

$$(\exists\, C_1, C_2 > 0)\,(\exists\, \varepsilon \in (0, c-1))\,(\forall\, \lambda \in S_{\theta_1,a_1})\ C_1|\lambda|^{1+\varepsilon} \leqslant |W_b^c(\lambda)| \leqslant C_2|\lambda|^c,$$

$$(\exists\, C_3 > 0)\,(\forall\, \lambda \in S_{\theta_1,a_1})\ \big|W_b^{b_1}(\lambda)\big| \leqslant C_3|\lambda|,$$

$$z_0, z_1 \in D_A,\ \ g \in C\big(\overline{\mathbb{R}}_+; D_A\big) \cap E(D_A).$$

Тогда функция

$$z(t) = Z_0(t)z_0 + Z_1(t)z_1 + \int\limits_0^t Z(t-s)\, g(s)\, ds$$

является единственным решением задачи (1), (2) *в* $E(\mathcal{Z})$.

Для $c \in (0,1]$ может быть получен аналогичный результат, при этом задача Коши содержит одно условие $z(0) = z_0$. Аналогичные задачи с ограниченным оператором A изучены в [1, 2].

Общие результаты использованы при исследовании однозначной разрешимости некоторых начально-краевых задач для уравнений в частных производных распределенного порядка по времени. Простейшим примером задачи, удовлетворяющей условиям теоремы 1, является начально-краевая задача для ультрамедленной диффузии [3] или задача

$$\int\limits_b^c \omega(\alpha) D_t^\alpha \left(2 + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) u(s,t)\, d\alpha = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\,(s,t) + \frac{\partial^4 u}{\partial s^4}\,(s,t), \quad (s,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\,(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\,(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$u(s,o) = u_0(s), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\,(s,0) = u_1(s), \quad s \in \Omega.$$

Литература

1. *Стрелецкая Е. М., Федоров В. Е., Дебуш А.* Задача Коши для уравнения распределенного порядка в банаховом пространстве // Мат. заметки СВФУ.—2018.—Т. 25, № 1.—С. 63–72.
2. *Fedorov V. E., Streletskaya E. M.* Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces // Electron. J. Differ. Equ.—2018.—Vol. 2018, № 176.—P. 1–17.
3. *Kochubei A. N.* Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion // J. Math. Anal. Appl.—2008.—Vol. 340.—P. 252–280.

HYPERBOLIC B-POTENTIALS AND SINGULAR WAVE OPERATOR

E. L. Shishkina
(Russia, Voronezh; VSU)

Suppose that R^n is the n-dimensional Euclidean space,

$$R^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n,\ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\},$$

$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ is a multi-index consisting of positive fixed real numbers γ_i, $i = 1, \ldots, n$, and $|\gamma| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$.

We consider fractional powers of the hyperbolic expression with Bessel operators

$$L_\gamma = B_{\gamma_1} - B_{\gamma_2} - \cdots - B_{\gamma_n}, \quad B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \gamma_i > 0,\ i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Negative real powers of L_γ we will call *hyperbolic B-potentials.*

Hyperbolic B-potentials $I^\alpha_{P\pm i0,\gamma}$ are defined by formulas

$$(I^\alpha_{P\pm i0,\gamma} f)(x) = \frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{H_{n,\gamma}(\alpha)} \int\limits_{R^n_+} (P \pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} ({}^\gamma T^y_x f)(x)\, y^\gamma\, dy, \quad y^\gamma = \prod_{i=1}^n y_i^{\gamma_i}, \tag{2}$$

where

$$\gamma' = (\gamma_2, \ldots, \gamma_n), \quad |\gamma'| = \gamma_2 + \cdots + \gamma_n, \quad H_{n,\gamma}(\alpha) = \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2^{n-\alpha}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)},$$

${}^\gamma T^y_x$ is multidimensional generalized translation (see [1]), $(P \pm i0)^\lambda_\gamma$ are weighted generalized functions generated by quadratic form $P = x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2$ (see [2]). Boundedness and inversion of (2) was obtained.

The theory of fractional powers of elliptic operators with Bessel operator

$$B_\nu = D^2 + \frac{\nu}{x}D, \quad D = \frac{d}{dx}$$

acting instead of some second derivatives in Δ was developed in [3].

References

1. *Shishkina E. L.* On the boundedness of hyperbolic Riesz B-potential // Lith. Math. J.—2016.—Vol. 56, № 4.—P. 540–551.
2. *Shishkina E. L.* On weighted generalized functions associated with quadratic forms // Probl. Anal. Issues Anal.—2016.—Vol. 5 (23), № 2.—P. 52–68.
3. *Lyakhov L. N., Shishkina E. L.* Generalized Riesz B-potentials of the mixed type // Dokl. Akad. Nauk.—2006.—Vol. 73, № 1.—P. 42–45.

LESLIE PREY-PREDATOR MODEL IN DISCRETE TIME

S. K. Shoyimardonov
(Uzbekistan, Tashkent; TUIT)

We consider (as in [1]) the discrete time Leslie's prey-predator model, which has the following form

$$V: \begin{cases} x^{(1)} = x(a-1-bx-cy) \\ y^{(1)} = y\Big(d-1-\alpha\,\dfrac{y}{x}\Big). \end{cases} \tag{1}$$

where $R^2_+ = \{(x,y)\in R^2 : x>0, y\geqslant 0\}$ is a domain of the operator V and $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$, $\alpha>0$.

The set M is called an *invariant* with respect to operator V if $V(M)\subset M$.

Theorem 1. *The following sets are invariant with respect to operator V:*

(1) $M_1 = \big\{(x,y)\in R^2_+ \,\big|\, y=0\big\}$.

(2) *If $1<d\leqslant 2, 1<a\leqslant 2$ then*

$$M_2 = \left\{0<x<\frac{\alpha(a-1)}{b\alpha+cd-c},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{(d-1)x}{\alpha}\right\}.$$

The restriction of the system (1) on M_1 is topologically conjugate to the famous quadratic family (see [2]).

Definition [2]. Let $f: A\to A$ and $g: B\to B$ be two maps. f and g are called topologically conjugate if there exists a homeomorphism $h: A\to B$ such that, $h\circ f = g\circ h$.

In the system (1), if $y=0$ then $x^{(1)} = f_{a,b}(x) := x(a-1-bx)$.

Proposition 1. *Two maps $F_\mu(x) := \mu x(1-x)$ and $f_{a,b}(x)$ are topologically conjugate for $\mu = 3-a$.*

Theorem 2. *Let $2<a<4$.*

(i) *$f_{a,b}(x) = x(a-1-bx)$ has an attracting fixed point $p_0 = \frac{a-2}{b}$ and repelling fixed point 0.*

(ii) *If $0<x<\frac{a-1}{b}$ then*

$$\lim_{n\to\infty} f^n_{a,b}(x) = p_0.$$

Consequently, the dynamical system on M_1 is reduced to a well-known system. The following theorem gives the limit points of the system on invariants M_i, $i=2,3$.

Theorem 3. *Let $\big(x^{(0)}, y^{(0)}\big)\in M_2$ be an initial point and $1<d\leqslant 2$.*

(i) *If $1<a\leqslant 2$ then*

$$\lim_{n\to\infty}\big(x^{(n)}, y^{(n)}\big) = (0,0).$$

(ii) *If $2<a<4$ then*

$$\lim_{n\to\infty}\big(x^{(n)}, y^{(n)}\big) = \lambda_1 = \Big(\frac{a-2}{b},\, 0\Big).$$

References

1. *Rozikov U. A., Shoyimardonov S. K.* Ocean ecosystem discrete time dynamics generated by l-Volterra operators // Int. J. Biomath.—2019.—Vol. 12, № 2, 1950015.—24 p. DOI: 10.1142/S1793524519500153.
2. *Devaney R. L.* An Introduction to Chaotic Dynamical System.—Westview Press, 2003.—336 p.

Секция I

Функциональные пространства и теория операторов

НАИЛУЧШЕЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ПО НЕТОЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ[1]

Е. В. Абрамова (Россия, Москва; НИУ «МЭИ»),
Е. О. Сивкова (Россия, Москва; МПГУ)

Рассматривается задача Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x_1,\dots,x_d,y) \in \mathbb{R}^{d+1},\ y>0, \\ u(x,0) = f(x), & \text{для п. в. } x \in \mathbb{R}^d,\ f(\cdot) \in L_2\left(\mathbb{R}^d\right), \end{cases}$$

заключающаяся в нахождении такой гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ в верхнем полупространстве, что $u(\cdot,y) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ для любого $y>0$, $u(\cdot,y) \to f(\cdot)$ при $y \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$ и $\sup_{y>0} \|u(\cdot,y)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} < \infty$. В этой ситуации решение поставленной задачи единственно [1].

Пусть приближенно известны значения гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ на n ($n \in \mathbb{N}$) гиперплоскостях $y = y_i$, $i = 1,\dots,n$, где $0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n$. Точнее говоря, известны функции $z_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такие, что

$$\big\|u(\cdot,y_i) - z_i(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta_i, \quad i = 1,\dots,n,$$

где $\delta_i > 0$, $i = 1,\dots,n$.

По этой информации мы хотим восстановить решение задачи Дирихле на гиперплоскости $y = Y > 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Точная постановка задачи такова. Любой метод восстановления сопоставляет наблюдаемому набору $(z_1(\cdot),\dots,z_n(\cdot)) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$ функцию из $L_2(\mathbb{R}^d)$ и тем самым есть некоторое отображение $\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^n \to L_2(\mathbb{R}^d)$. Погрешностью данного метода φ назовем величину

$$e\big(Y,\overline{y},\overline{\delta},\varphi\big) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d),\, \overline{z}(\cdot)\in (L_2(\mathbb{R}^d))^n, \\ \|u(\cdot,y_i)-z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta_i,\, i=1,\dots,n}} \big\|u(\cdot,Y) - \varphi(\overline{z}(\cdot))\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $\overline{y} = (y_1,\dots,y_n)$, $\overline{\delta} = (\delta_1,\dots,\delta_n)$ и $\overline{z}(\cdot) = (z_1(\cdot),\dots,z_n(\cdot))$.

Величину

$$E\big(Y,\overline{y},\overline{\delta}\,\big) = \inf_{\varphi} e\big(Y,\overline{y},\overline{\delta},\varphi\big),$$

где нижняя грань берется по всем отображениям $\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^n \to L_2(\mathbb{R}^d)$, назовем *погрешностью оптимального восстановления*, а те методы $\widehat{\varphi}$, на которых нижняя грань достигается — *оптимальными методами восстановления.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-01-00649.

Перед формулировкой теоремы приведем некоторые определения. На плоскости с координатами y и t рассмотрим множество

$$M = \operatorname{co}\big\{(y_i,\, \ln(1/\delta_i)),\, i=1,\dots,n\big\} + \big\{(y,0):\, y \geqslant 0\big\},$$

представляющее собой алгебраическую сумму выпуклой оболочки конечного числа точек и полупрямой.

Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[0,+\infty)$ по правилу: $\theta(t)=\max\{y:(t,y)\in M\}$, причем $\theta(t)=-\infty$, если множество в фигурных скобках пусто. Ясно, что $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная на $[t_1,+\infty)$. Пусть $t_{s_1}<\ldots<t_{s_k}$ — ее точки излома (считаем, что t_1 — также точка излома, т. е. $t_1=t_{s_1}$).

Пусть $Y\in(y_{s_j},y_{s_{j+1}})$, $1\leqslant j\leqslant k-1$. Положим

$$\lambda_1=\frac{y_{s_{j+1}}-Y}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}\left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}}\right)^{\frac{-2(Y-y_{s_j})}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}},\quad \lambda_2=\frac{Y-y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}\left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}}\right)^{\frac{2(y_{s_{j+1}}-Y)}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}.$$

Пусть F — преобразование Фурье в $\mathbb{R}^d$ и $a(\cdot)\in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Оператор $\Lambda\colon \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$, определенный в образах Фурье для любого $g(\cdot)\in\mathbb{R}^d$ и п. в. $\xi\in\mathbb{R}^d$ по формуле $F[\Lambda g](\xi)=a(\xi)F[g](\xi)$, является линейным и непрерывным.

Теорема. *Пусть $Y\in(y_{s_j},y_{s_{j+1}})$, $1\leqslant j\leqslant k-1$. Тогда*

$$E\big(Y,\overline{y},\overline{\delta}\,\big)=e^{-\theta(Y)}.$$

Функция $\xi\mapsto\lambda_1e^{-2y_{s_j}|\xi|}+\lambda_2e^{-2y_{s_{j+1}}|\xi|}-e^{-2Y|\xi|}$ неотрицательна для всех $\xi\in\mathbb{R}^d$, и для любой функции $a(\cdot)\in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ такой, что для п. в. $\xi\in\mathbb{R}^d$

$$\left|a(\xi)-\frac{\lambda_2e^{-(Y-y_{s_j})|\xi|}}{\lambda_1e^{(y_{s_{j+1}}-y_{s_j})|\xi|}+\lambda_2e^{-(y_{s_{j+1}}-y_{s_j})|\xi|}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,e^{y_{s_{j+1}}|\xi|}}{\lambda_1e^{(y_{s_{j+1}}-y_{s_j})|\xi|}+\lambda_2e^{-(y_{s_{j+1}}-y_{s_j})|\xi|}}\sqrt{\lambda_1e^{-2ay_{s_j}|\xi|}+\lambda_2e^{-2y_{s_{j+1}}|\xi|}-e^{-2Y|\xi|}}\,,$$

метод $\widehat{\varphi}_a\colon(L_2(\mathbb{R}^d))^n\to L_2(\mathbb{R}^d)$, который в образах Фурье действует для п. в. $\xi\in\mathbb{R}$ по формуле

$$F\big[\widehat{\varphi}_a(\overline{z}(\cdot))\big](\xi)=\Big(e^{-(Y-y_{s_j})|\xi|}-a(\xi)e^{-(y_{s_{j+1}}-y_{s_j})|\xi|}\Big)F[z_{s_j}](\xi)+a(\xi)F[z_{s_{j+1}}](\xi),$$

является оптимальным.

Отметим, что все найденные оптимальные методы линейны и что они используют информацию об измерениях только на двух гиперплоскостях, причем не обязательно ближайших к Y.

Литература

1. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.—М.: Мир, 1974.—331 с.

АДДИТИВНОСТЬ ЙОРДАНОВЫХ *-ОТОБРАЖЕНИЙ НА AJW-АЛГЕБРАХ

А. А. Адизов
(Узбекистан, Ташкент; ТУИТ)

В работах [1, 2] было введено понятие йорданова *-отображения между AJ-алгебрами как взаимно-однозначного отображения, сохраняющего инволюцию и йорданово произведение $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$. Было доказана, что если A и B — алгебры фон Неймана и не содержат абелевых прямых слагаемых, то всякое йорданово *-отображение A и B линейно, т. е. является йордановым изоморфизмом. В работе [1] была поставлена задача — получить аналог этого результата для AJW-алгебр, решение которой получена в работах [3, 4, 5]. В работе [6] Д. М. Топпинг ввел и изучил понятие AJW-алгебры в рамках класса йордановых алгебр самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. В работах Ф. Н. Арзикулова [7, 8] понятие AJW-алгебры вводится и исследуется в рамках класса JB-алгебр. Эти алгебры являются вещественными неассоциативными аналогами AW^*-алгебр (абстрактных алгебр фон-Неймана), введенных И. Капланским [9]. Таким образом, класс AJW-алгебр является промежуточным между двумя известными классами алгебр:

$$JBW \subset AJW \subset JB.$$

Следовательно, возникает вопрос получить аналогичный результат для случая AJW-алгебр, решению которого посвящается настоящая работа.

В работе [7] для AJW-алгебр доказана эквивалентность следующих утверждений.

(A) Для всякого подмножества $S \subseteq A_+$ существует проектор $e \subseteq A$ такой, что $S^\perp = U_\varepsilon(A)$, где $(\forall\, a, b \in A)$ $U_a b = 2a \circ (a \circ b) - a^2 \circ b$, $S^\perp := \{a \in A : (\forall\, s \in A)\ U_a c = \theta\}$, где $U_\varepsilon(A) = \{U_\varepsilon(A) : a \in A\}$.

(B) Для всякого подмножества $S \subseteq A$ существует проектор $e \subseteq A$ такой, что ${}^\perp S_+ = U_\varepsilon(A_+)$, ${}^\perp S := \{x \in A_+ : U_a x = \theta,\, a \in S\}$ и $U_\varepsilon(A) = \{U_\varepsilon(A) :\, a \in A\}$.

(C) Выполнены следующие два условия: (1) в частично упорядоченном множестве проекторов любое подмножество попарно ортогональных элементов имеет точную верхнюю грань в этом множестве; (2) любая максимальная сильно ассоциативная подалгебра порождается своими проекторами.

Определение 1. JB-алгебру A, удовлетворяющую одному (а значит, и любому) из эквивалентных утверждений (A)–(C), будем называть AJW-алгеброй.

Определение 2. Взаимно-однозначное отображение φ между A и B назовем йордановым отображением, если оно мультипликативно, т. е. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для всех $a, b \in A$.

Сразу отметим, что йорданово отображение в общем случае не аддитивно. В качестве примера можно взять $A = B = R$ — поле действительных чисел;

$\varphi(a) = |a|a$, $a \in R$. Однако, если рассмотреть AJW-алгебры без абелевых центральных идемпотентов, то как и в случаях AW^*-алгебр и JBW-алгебр, всякое йорданово отображение аддитивно, т. е. имеет место следующий результат, доказательству которого посвящена настоящая работа.

Теорема. *Пусть A и B — AJW-алгебры, причем A не содержит центральных абелевых идемпотентов. Тогда всякое йорданово отображение φ между A и B является йордановым изоморфизмом.*

Литература

1. *Hakeda J.* Additivity of Jordan *-maps on AW^*-algebras // Proc. Amer. Math. Soc.—1986.—Vol. 96, № 3.—P. 413–420.
2. *Hakeda J., Saito K.* Additivity of Jordan *-maps between operator algebras // J. Math. Soc. Jap.—1986.—Vol. 38, № 3.—P. 403–408.
3. *Аюпов Ш. А., Адизов А. А.* Аддитивность мультипликативных отображений JBW-факторов типа I // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук.—1990.—№ 6.—С. 11–16.
4. *Аюпов Ш. А., Адизов А. А.* Линейность мултипликативных отображений йордановых банаховых алгебр // Докл. АН УзССР.—1990.—№ 10.—С. 5–6.
5. *Аюпов Ш. А., Адизов А. А., Желябин В. Н.* Мултипликативные отображения упорядоченных йордановых алгебр // Мат. заметки.—1992.—Т. 51, № 2.—С. 3–8.
6. *Topping D.* Jordan algebras of self-adjoint operators // Mem. Amer. Math. Soc.—1965.—Vol. 53, № 6.—P. 255–265.
7. *Арзикулов Ф. Н.* Об абстрактных JW-алгебрах // Сиб. мат. журн.—1998.—№ 1.—С. 20–27.
8. *Arzikulov F. N.* AJW-algebras of the tupe I and their classification // Sib. Adv. Math.—1998.—Vol. 8, № 2.—P. 30–48.
9. *Kaplansky I.* Projections in Banah algebras // Ann. Math.—1951—Vol. 53, № 2.—P. 235–249.

INDIVIDUAL ERGODIC THEOREM IN NONCOMMUTATIVE ATOMIC SYMMETRIC SPACES

A. N. Azizov (Uzbekistan, Tashkent; NUUz),
V. I. Chilin (Uzbekistan, Tashkent; NUUz)

The study of noncommutative individual ergodic theorems in the space of measurable operators affiliated with a semifinite von Neumann algebra $\mathcal{M}$ equipped with a faithful normal semifinite trace τ was initiated by F. Yeadon. In [1], he derived, as a corollary of a non-commutative maximal ergodic inequality in $L^1(\mathcal{M},\tau)$, an individual ergodic theorem for the linear positive $L^1 - L^\infty-$contraction acting in the non-commutative L^1-space $L^1(\mathcal{M},\tau)$. The study of individual ergodic theorems beyond $L^1(\mathcal{M},\tau)$ started much later with another fundamental paper by M. Junge and Q. Xu [2], where, among other results, individual ergodic theorem was extended to the case with a positive Dunford-Schwartz operator acting in the non-commutative L^p-space $L^p(\mathcal{M},\tau)$, $1 < p < \infty$. In [3] and [4] an individual ergodic theorem was proved for a positive Dunford–Schwartz operator acting in a non-commutative Lorentz and Orlicz spaces. In the case when an algebra $\mathcal{M}$ is an algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ of all bounded linear operators, acting in Hilbert space $\mathcal{H}$, the individual ergodic theorem was obtained in [5] for arbitrary Dunford-Schwartz operator (not necessary positive) acting in fully symmetric ideals $J \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ of compact operators. In this note we consider the case, when an algebra $\mathcal{M}$ is an atomic von Neumann algebra.

Let $\mathcal{M}$ be a semifinite von Neumann algebra with a unit $\mathbf{1}$, let τ be a faithful normal semifinite trace on $\mathcal{M}$, and let $L^0(\mathcal{M},\tau)$ be an $*$-algebra of all τ-measurable operators affiliated with $\mathcal{M}$. For each $x^* = x \in L^0(\mathcal{M},\tau)$ we denote by $e_\lambda(x) = \{x \leqslant \lambda\}$ the spectral projector corresponding to the interval $(-\infty,\lambda]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, where $\mathbb{R}$ is the field of real numbers.

Let $L_\tau(\mathcal{M})$ be the $*$-subalgebra in $L^0(\mathcal{M},\tau)$ of all operators $x \in L^0(\mathcal{M},\tau)$ such that $\tau(\mathbf{1} - e_\lambda(|x|)) < \infty$ for some $\lambda = \lambda(x) > 0$. If $x \in L_\tau(\mathcal{M})$, then a non-increasing rearrangement $\mu_t(x)$ of an operator x is defined by the equality

$$\mu_t(x) = \inf\big\{\lambda > 0 : \tau(\mathbf{1} - e_\lambda) \leqslant t\big\}, \quad t > 0.$$

A non-zero linear subspace $E \subset L_\tau(\mathcal{M})$ with a Banach norm $\|\cdot\|_E$ is called a fully symmetric space if the conditions

$$x \in E,\ y \in L_\tau(\mathcal{M}), \quad \int\limits_0^s \mu_t(y)\,dt \leqslant \int\limits_0^s \mu_t(x)\,dt, \quad \text{for all} \quad s > 0,$$

imply that $y \in E$ and $\|y\|_E \leqslant \|x\|_E$.

It is known that $L^1(\mathcal{M},\tau) \cap \mathcal{M} \subset E \subset L^1(\mathcal{M},\tau) + \mathcal{M}$ for any symmetric space E, where

$$L^1(\mathcal{M},\tau) = \left\{x \in L_\tau(\mathcal{M}) : \|x\|_1 = \int\limits_0^\infty \mu_t(x)\,dt < \infty\right\}.$$

A linear operator $T : L^1(\mathcal{M},\tau)+\mathcal{M} \to L^1(\mathcal{M},\tau)+\mathcal{M}$ is called a Dunford–Schwartz operator (writing: $T \in DS$), if

$$\|T(x)\|_1 \leqslant \|x\|_1 \text{ for all } x \in L^1(\mathcal{M},\tau) \quad \text{and} \quad \|T(x)\|_{\mathcal{M}} \leqslant \|x\|_{\mathcal{M}} \text{ for all } x \in \mathcal{M}.$$

It is known that, $T(E) \subset E$ and $\|T\|_{E\to E} \leqslant 1$ for all $T \in DS$ and for any fully symmetric space E.

The following theorem is the variant of the individual ergodic theorem for fully symmetric space $(E, \|\cdot\|_E)$, in the case when $\mathcal{M}$ is an atomic von Neumann algebra.

Theorem 1. *Let $\mathcal{M}$ be an arbitrary atomic von Neumann algebra with a faithful normal semifinite trace τ, and let $(E, \|\cdot\|_E) \subset L_\tau(\mathcal{M})$ be a fully symmetric space, $\mathbf{1} \notin E$. Then for any operator $T \in DS$ and for any $x \in E$ there exists $\widehat{x} \in E$, such that the sequence $\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(x)\}$ converges to $\widehat{x}$ almost uniformly, that is, for given $\varepsilon > 0$ there exists a projection $p \in \mathcal{M}$, such that $\tau(\mathbf{1}-p) < \varepsilon$ and*

$$\left\|\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(x) - \widehat{x}\right)p\right\|_{\mathcal{M}} \to 0 \quad as \quad n \to \infty.$$

As mentioned above, in the case when an algebra $\mathcal{M}$ is an algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ of all bounded linear operators, acting in Hilbert space $\mathcal{H}$, the statement of the Theorem 1 was obtained in [5].

Now we give application of Theorem 1 to non-commutative atomic Orlicz spaces.

Let Φ be an Orlicz function, that is, $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ is left-continuous, convex, increasing function such that $\Phi(0) = 0$ and $\Phi(u) > 0$ for some $u \neq 0$.

Let $L^\Phi(\mathcal{M},\tau) = \{x \in L_\tau(\mathcal{M}) : \Phi(a^{-1}|x|) \in L^1(\mathcal{M},\tau) \text{ for some } a > 0\}$ be the non-commutative Orlicz space, and let $\|x\|_\Phi = \inf\{a > 0 : \|\Phi(a^{-1}|x|)\|_1 \leqslant 1\}$ be the Luxemburg norm in $L^\Phi(\mathcal{M},\tau)$ (see [4]). It is well-known that $(L^\Phi(\mathcal{M},\tau), \|\cdot\|_\Phi)$ is a fully symmetric space and $\mathbf{1} \notin L^\Phi(\mathcal{M},\tau)$.

As corollary of Theorem 1 we obtain that for any atomic von Neumann algebra $\mathcal{M}$ with a faithful normal semifinite trace τ, and for each $T \in DS$, $x \in L^\Phi(\mathcal{M},\tau)$ there exists $\widehat{x} = \widehat{x}(T,x) \in L^\Phi(\mathcal{M},\tau)$, such that the averages $\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(x)\}$ converges to $\widehat{x}$ almost uniformly. This statement significantly strengthens [4, Theorem 3.2] in the case when $\mathcal{M}$ is an atomic von Neumann algebra.

References

1. *Yeadon F. J.* Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras. I // J. London Math. Soc. (2).—1977.—Vol. 16, № 2.—P. 326–332.
2. *Junge M., Xu Q.,* Noncommutative maximal ergodic theorems // J. Amer. Math. Soc.—2007.—Vol. 20, № 2.—P. 385–439.
3. *Chilin V. I., Litvinov S. N.* Ergodic theorems in fully symmetric spaces of τ-measurable operators // Studia Math.—2015.—Vol. 228, № 2.—P. 177–195.
4. *Chilin V. I., Litvinov S. N.* Individual ergodic theorems in noncommutative Orlicz spaces // Positivity.—2017.—Vol. 21, № 1.—P. 49–59.
5. *Azizov A. N., Chilin V. I., Litvinov S. N.* Ergodic theorems in Banach ideals of compact operators.—arXiv: 1902.00759v2 [math.FA] 3 Mar 2019.

THE SURJECTIVITY OF CONVOLUTION OPERATORS ON HOLOMORPHIC WEIGHTED SPACES IN BOUNDED CONVEX DOMAINS[1]

T. M. Andreeva
(Russia, Rostov-on-Don, SFEDU; Vladikavkaz, SMI VSC RAS)

Let G be a domain in $\mathbb{C}$ and $H(G)$ the space of all holomorphic functions in G. For a continuous function (a weight) $v : G \to \mathbb{R}$ define the Banach space

$$H_v(G) := \Big\{ f \in H(G) : \|f\|_v := \sup_{z \in G} |f(z)| e^{-v(z)} < \infty \Big\}.$$

For an increasing sequence of weights $V = (v_n)$ define the inductive limit $\mathcal{V}H(G) := \operatorname{ind} H_{v_n}(G)$.

Let μ be an analytic functional on $\mathbb{C}$ carried by a convex compact set K. With some restrictions on weight sequence which are equal to those used by V. V. Napalkov [1] we study the continuity and surjectivity problem of the convolution operator

$$\mu * f(z) : \ f \mapsto \mu_w f(z+w)$$

that maps $\mathcal{V}H(G+K)$ into (onto) $\mathcal{V}H(G)$. We establish the surjectivity criteria for convolution operator in terms of its Laplace (Fourier–Borel) transform $\hat{\mu}(\zeta) := \mu_z e^{\langle z \cdot \rangle}$ via the appropriate description of functional weighted spaces that are conjugated to $\mathcal{V}H(G+K)$ and $\mathcal{V}H(G)$.

The main results are the following:

1) we obtain a criterion of continuity for the convolution operator

$$\mu * : \mathcal{V}H(G+K) \to \mathcal{V}H(G);$$

2) we establish a functional criterion of surjectivity for convolution operator in terms of the closure of an image of the multiplication operator $f \mapsto \hat{\mu} f$ that is conjugate to $\mu *$;

3) for the case $v_n(z) = n|z|^\alpha$, $\alpha > 0$ we find out the criterion of surjectivity for convolution operator in terms of regular growth of $\hat{\mu}$ (the lower estimate on $|\hat{\mu}|$ outside some exceptional sets).

Similar research was presented in [2] for the spaces of functions that are holomorphic in convex domains and have a polynomial growth near the boundary (the weight sequence $v_n(z) = n \ln(1 + |z|)$).

References

1. *Napalkov V. V.* Spaces of analytic functions of prescribed growth near the boundary // Math. USSR-Izv.—1988.—Vol. 30, № 2.—P. 263–281.
2. *Abanin A. V., Ishimura R., Khoi L. H.* Convolution operators in $A^{-\infty}$ for convex domains // Arkiv för Matematik.—2012.—Vol. 50.—№ 1.—P. 1–22.

[1]The research was supported by the Presidential Program for Support of Young Candidates of Sciences under grant MC-1056.2018.1, agreement № 075-02-2018-433.

ЛИНЕЙНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ АФФИНОРНЫХ СТРУКТУР И ОДНОРОДНЫЕ Ф-ПРОСТРАНСТВА[1]

В. В. Балащенко
(Беларусь, Минск; БГУ)

Аффинорной структурой называют тензорное поле типа $(1,1)$ на гладком многообразии, реализованное в виде поля эндоморфизмов, действующих в касательном расслоении к данному многообразию. К числу классических аффинорных структур традиционно относят почти комплексные структуры J ($J^2 = -id$), структуры почти произведения P ($P^2 = id$), f-структуры К. Яно ($f^3 + f = 0$) и ряд других. В то же время имеется немало работ, в которых изучаются аффинорные структуры, определяемые иными полиномиальными условиями. Например, в работах [1, 2] введен в рассмотрение класс так называемых *«золотых» структур*, которые задаются посредством аффинора F, удовлетворяющего уравнению $F^2 = F + id$. Такое условие инициировано квадратным уравнением $x^2 - x - 1 = 0$, положительный корень которого $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ есть известное золотое сечение (число Фидия).

Позднее в работе [3] рассмотрен более общий класс аффинорных структур так называемого *металлического семейства*, для которого инициирующее квадратное уравнение имеет вид $x^2 - px - q = 0$ (p и q — натуральные числа), а его положительный корень $\sigma_{p,q}$ называется (p,q)-*металлическим* числом. Частными случаями являются: золотое число ($p = q = 1$); серебряное число ($p = 2$, $q = 1$); бронзовое число ($p = 3$, $q = 1$); медное число ($p = 1$, $q = 2$) и др. Аффинорная структура F на многообразии M называется *металлической структурой*, если она удовлетворяет уравнению $F^2 = pF + qI$, где p и q — натуральные числа, $I = id$ [3]. Такие структуры обобщают структуры «золотого типа» (случай $p = q = 1$), входят в свою очередь в широкий класс полиномиальных структур на гладких многообразиях и имеют степень 2, а потому обладают рядом примечательных свойств. Прежде всего отметим, что структуры металлического семейства тесно связаны со структурами почти произведения P ($P^2 = id$) на многообразии M следующим образом.

Любая структура почти произведения P порождает две металлические структуры на многообразиии M:

$$F_1 = \frac{p}{2}\,I + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)P, \quad F_2 = \frac{p}{2}\,I - \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)P.$$

[1]Работа выполнена при частичной поддержке государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2020» (2016–2020), подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем», проект «Геометрические структуры на алгебраических, топологических, гладких многообразиях и группах Ли».

Обратно, любая металлическая структура F на M определяет две структуры почти произведения:

$$P = \pm\left(\frac{2}{2\sigma_{p,q} - p} F - \frac{p}{2\sigma_{p,q} - p} I\right).$$

Рассмотрим общий способ построения аффинорных структур, которые обобщают структуры металлического семейства и, в то же время, сохраняют основные свойства и характеристики этих структур.

Пусть на гладком многообразии M задана структура почти произведения P. Аффинорную структуру F вида $F = F(a,b) = aP + bI$, где $I = id$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, будем называть *линейной деформацией* структуры P. Такая структура F является полиномиальной, поскольку удовлетворяет уравнению: $F^2 - 2bF + (b^2 - a^2)I = 0$. Очевидно, что все структуры металлического семейства являются частным случаем линейных деформаций $F = F(a,b)$, а именно:

$$a = \pm\frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2}, \quad b = \frac{p}{2}.$$

Более того, основные понятия и установленные в серии работ факты, относящиеся к структурам металлического семейства, можно обобщить на класс структур вида $F = F(a,b)$.

Получено описание всех линейных деформаций $F = F(a,b)$ канонических структур почти произведения P на однородных k-симметрических пространствах (однородных Ф-пространствах порядка k [4]). Поскольку к настоящему времени имеется значительная информация о канонических структурах P и соответствующих канонических распределениях на однородных k-симметрических пространствах (см. [5]), то несложно адаптировать и переформулировать эти утверждения в терминах канонических структур $F = F(a,b)$.

Наконец, отметим один результат общего характера.

Теорема. *Пусть на гладком многообразии M имеется структура почти произведения P. Тогда тензор Нейенхейса N_F ее линейной деформации $F = F(a,b) = aP + bI$ пропорционален тензору Нейенхейса N_P ассоциированной структуры P. Более точно, $N_F(X,Y) = a^2 N_P(X,Y)$ для всех векторных полей X и Y на M. Отсюда следует, что структуры $F = F(a,b)$ и P интегрируемы либо неинтегрируемы одновременно.*

Литература

1. *Crasmareanu M., Hretcanu C.-E.* Golden differential geometry // Chaos, Solitons and Fractals.—2008.—Vol. 38.—P. 1229–1238.
2. *Hretcanu C.-E., Crasmareanu M.* Applications of the Golden ratio on Riemannian manifolds // Turk. J. Math.—2009.—Vol. 33.—P. 179–191.
3. *Hretcanu C.-E., Crasmareanu M.* Metallic structures on Riemannian manifolds // Rev. Union Mat. Argentina.—2013.—Vol. 54, № 2.—P. 15–27.
4. *Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Однородные пространства: теория и приложения: монография.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
5. *Balashchenko V. V.* Canonical distributions on Riemannian homogeneous k-symmetric spaces // J. Geom. Phys.—2015.—Vol. 87.—P. 30–38.

О ЧИСЛОВОЙ ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА С ДВУМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Б. И. Бахронов (Узбекистан, Бухара; БухГУ),
Т. Х. Расулов (Узбекистан, Бухара; БухГУ)

Для операторов в гильбертовом пространстве в различных приложениях оказывается важным понятие *числовой области значений* (или *поля значений*).

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство и $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный оператор с областью определения $D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$. Множество

$$W(\mathcal{A}) := \big\{(\mathcal{A}x, x) : \, x \in D(\mathcal{A}), \; \|x\| = 1\big\}$$

называется *числовой областью значений* оператора $\mathcal{A}$.

В общем случае множество $W(\mathcal{A})$ не является ни открытым, ни замкнутым, даже если оператор $\mathcal{A}$ замкнут. Из определения видно, что множество $W(\mathcal{A})$ является подмножеством комплексной плоскости и геометрические свойства множества $W(\mathcal{A})$ дает некоторые информации об операторе $\mathcal{A}$.

Понятие числовой области значений впервые введено в работе [1] для матриц и доказано, что числовая область значений матрицы содержит все ее собственные значения. Далее, в работе [2] показано, что числовая область значений оператора является выпуклой. Вслед за этим в работе [3] доказано, что спектр любого линейного ограниченного оператора содержится в замыкании числовой области значений этого оператора. В работе [4] для 2×2-операторной матрицы H, ассоциированной с системой не более чем двух квантовых частиц на d-мерной решетке, изучена ее числовая область значений. Оператор H действует в прямой сумме ноль-частичного и одночастичного подпространств фоковского пространства. Структура замыкания числовой области значений $W(H)$ этого оператора подробно исследовано в терминах его матричных элементов при всех размерностях тора $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Выделены случаи, когда множество $W(H)$ замкнуто. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы спектр оператора H совпадала с множеством $W(H)$. Для подробной информации о числовой области значений линейных операторов и матриц см. [5].

В данной работе рассматривается ограниченная самосопряженная модель Фридрихса $\mathcal{A}$ с двумерным возмущением и установлено соотношение между спектром и числовой областью значений этой модели. Найдены достаточные условия для того, чтобы спектр оператора $\mathcal{A}$ совпадал со множеством $W(\mathcal{A})$.

Пусть $\mathbb{T}^3 \, :\equiv \, (-\pi; \pi]^3$ — трехмерный тор и $L_2(\mathbb{T}^3)$ гильбертова пространство квадратично-интегрируемых (комплексно-значных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$. Рассмотрим ограниченный и самосопряженный модель Фридрихса $\mathcal{A}$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$ по формуле $\mathcal{A} := \mathcal{A}_0 - \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2$, где операторы $\mathcal{A}_0$ и V_α, $\alpha = 1, 2$, определяются по формулам:

$$(\mathcal{A}_0 f)(p) = u(p) f(p), \quad (V_\alpha f)(p) = v_\alpha(p) \int\limits_{\mathbb{T}^3} v_\alpha(t) f(t)\, dt, \quad \alpha = 1, 2.$$

Здесь $\mu_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2,$ — параметры взаимодействия, $u(\cdot)$ и $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1, 2,$ — вещественнозначные, непрерывные функции на $\mathbb{T}^3$. Причем, функция $u(\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $p_1 \in \mathbb{T}^3$ и единственный невырожденный максимум в точке $p_2 \in \mathbb{T}^3$, а функция $v_\alpha(\cdot)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка в окрестности точки $p_\alpha \in \mathbb{T}^3$. Предположим также, что $\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\{v_1(\cdot)\} \cap \mathrm{supp}\{v_2(\cdot)\}) = 0$.

Оператор возмущения $-\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2$ оператора $\mathcal{A}_0$ является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ совпадает с существенным спектром оператора $\mathcal{A}_0$. Известно, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_0) = [E_1; E_2]$, где числа E_1 и E_2 определяются следующим образом: $E_1 := \min_{p\in\mathbb{T}^3} u(p)$, $E_2 := \max_{p\in\mathbb{T}^3} u(p)$.

Из последних фактов следует, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}) = [E_1; E_2]$.

Для формулировки основных результатов положим

$$\mu_\alpha^0 := (-1)^{\alpha+1} \left(\int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{v_\alpha^2(t)\, dt}{u(t) - E_\alpha} \right)^{-1}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Один из основных результатов данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Если $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$, $\alpha = 1, 2$, то оператор $\mathcal{A}$ не имеет собственных значений, лежащих вне своего существенного спектра. Следовательно, для спектра оператора $\mathcal{A}$ имеет место равенство $\sigma(\mathcal{A}) = [E_1; E_2]$.*

Следующая теорема описывает структуру числовой области значений $W(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 2. *Пусть $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$, $\alpha = 1, 2$. Верны следующие утверждение:*
a) *если $v_\alpha(p_\alpha) = 0$, $\alpha = 1, 2$, то $W(\mathcal{A}) = [E_1; E_2]$;*
b) *если $v_1(p_1) = 0$ и $v_2(p_2) \neq 0$, то $W(\mathcal{A}) = [E_1; E_2)$;*
c) *если $v_1(p_1) \neq 0$ и $v_2(p_2) = 0$, то $W(\mathcal{A}) = (E_1; E_2]$;*
d) *если $v_\alpha(p_\alpha) \neq 0$, $\alpha = 1, 2$, то $W(\mathcal{A}) = (E_1; E_2)$.*

Надо отметить, что [4] если $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$ и $v_\alpha(p_\alpha) = 0$ при некотором $\alpha \in \{1, 2\}$, то число $z = E_\alpha \in \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$ является пороговым собственным значением оператора $\mathcal{A}$; если $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$ и $v_\alpha(p_\alpha) \neq 0$ при некотором $\alpha \in \{1, 2\}$, то число $z = E_\alpha \in \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$ является виртуальным уровнем оператора $\mathcal{A}$.

Литература

1. *Toeplitz O.* Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer // Math. Z.—1918.—Vol. 2, № 1–2.—P. 187–197.
2. *Hausdorff F.* Der Wertvorrat einer Bilinearform // Math. Z.—1919.—Vol. 3, № 1.—P. 314–316.
3. *Wintner A.* Zur Theorie der beschrankten Bilinearformen // Math. Z.—1929.—Vol. 30, № 1.—P. 228–281.
4. *Расулов Т. Х, Дилмуродов Э. Б.* Исследование числовой области значений одной операторной матрицы // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки.—2014.—Т. 35, № 2.—С. 50–63.
5. *Gustafson K., Rao D. K. M.* Numerical Range: The Field of Values of Linear Operators and Matrices.—Berlin: Springer, 1997.—205 p.

О ПРИМЕНЕНИИ КРИТЕРИЕВ ПОРЯДКА ПРИ ПОСТРОЕНИИ ВЕРТИКАЛЬНОГО $\mathbb{R}$-ДЕРЕВА

А. И. Булыгин
(Россия, Архангельск; САФУ)

В работе показано, что на множестве X может быть введена метрика d, по отношению к которой X является вертикальным $\mathbb{R}$-деревом. При доказательстве основных теорем, на вертикальном $\mathbb{R}$-дереве задается отношение частичного порядка.

Первый пример построения весьма нетривиального $\mathbb{R}$-дерева был представлен П. С. Урысоном в заметке [1]. Само понятие $\mathbb{R}$-дерева было введено Жаком Титсом в 1977 году. Значительную роль $\mathbb{R}$-деревья играют в ряде утверждений, касающихся асимптотической геометрии гиперболических пространств.

Примеры применения $\mathbb{R}$-деревьев приведены в работе [2]. Полезный критерий $\mathbb{R}$-дерева в терминах метрических полурешеток доказан в статье [3]. Проблема построения вертикального $\mathbb{R}$-дерева рассмотрена в статье автора [4].

Определение 1. Нетривиальное геодезическое пространство (X, d) называется $\mathbb{R}$-*деревом*, если объединение любых двух отрезков $[xy]$ и $[yz]$ в X, пересечение которых есть их общий конец y, является вновь отрезком $[xz]$.

Определение 2. Пусть (X, d) — локально полное подобно однородное неоднородное $\mathbb{R}$-дерево. Оно называется *вертикальным*, если на каждом отрезке $[xy]$, параметризованном натуральной параметризацией $\gamma : [a, b] \to Y$ так, что $\gamma(a) = x$ и $\gamma(b) = y$, функция радиуса полноты $c(\gamma(t))$ является пилообразной.

Определение 3. Пусть на метрическом пространстве (X, d) задано отношение частичного порядка $\preceq$. Предположим, что упорядоченное множество $(X, \preceq)$ является $\vee$-*полурешеткой* ($\wedge$-*полурешеткой*), т. е. для любых двух точек $x, y \in X$ существует их точная верхняя (соответственно, нижняя) грань $x \vee y$ (соответственно, $x \wedge y$). Упорядоченное метрическое пространство $(X, d, \preceq)$ называется *метрической* $\vee$-*полурешеткой* (соответственно, *метрической* $\wedge$-*полурешеткой*), если пара $(X, \preceq)$ является верхней (соответственно, нижней) полурешеткой.

Для построения примера вертикального $\mathbb{R}$-дерева множество X представляется как лабиринт, имеющий единственный вход и бесконечно много выходов. При этом каждая точка в X отождествляется с *маршрутом*, ведущим в нее из входа. Также вводится понятие *экзит-маршрута*, который ведет к одному из выходов лабиринта.

Каждый маршрут (экзит-маршрут) на множестве X задается парой функций $M = (f, \varphi)$. Их смысл состоит в том, что f связана с радиусом полноты на X, а φ задает ветвление.

В первую очередь на X определяется частичный порядок. Будем говорить, что маршрут $\widehat{M} = (\widehat{f}, \widehat{\varphi})$ длины $\widehat{a}$ предшествует маршруту $M = (f, \varphi)$ длины a

и обозначать $\widehat{M} \preceq M$, если $\widehat{a} \leqslant a$, $f|_{[0,\widehat{a}]} = \widehat{f}$, функции φ и $\widehat{\varphi}$ определены на множествах A и $\widehat{A}$ соответственно, причем $\widehat{A} \subset A$ и $\varphi|_{\widehat{A}} = \widehat{\varphi}$. На языке лабиринта отношение $\widehat{M} \preceq M$ означает, что любой маршрут от входа до точки M обязательно пройдет через точку $\widehat{M}$.

Теорема 1. *Частично упорядоченное множество $(X, \preceq)$ является нижне-полулинейной $\wedge$-полурешеткой.*

При доказательстве данной теоремы для любых двух маршрутов $M = (f, \varphi)$, $\overline{M} = (\bar{f}, \bar{\varphi})$ однозначно определяется маршрут M_0, удовлетворяющий отношениям $M_0 \preceq M$ и $M_0 \preceq \overline{M}$. Отсюда получено, что $(X, \preceq)$ — это $\wedge$-полурешетка.

Далее на множестве X задается метрика d, которая для произвольных маршрутов $M_1, M_2 \in X$ определяется равенством

$$d(M_1, M_2) = d(M_1, M_1 \wedge M_2) + d(M_1 \wedge M_2, M_2).$$

Функция d удовлетворяет аксиомам метрики, а пространство (X, d) является метрической $\wedge$-полурешеткой по отношению к порядку $\preceq$.

Лемма 1. *Пространство (X, d) является геодезическим.*

Если для маршрутов M_i длин a_i, $i = \overline{1,2}$, выполнено $M_1 \preceq M_2$, то отрезок $[M_1 M_2]$ задается отображением $\gamma : [0, a_2 - a_1] \to X$,

$$\gamma(t) = M_2\big|_{[0, a_1 + t]}.$$

Если же маршруты M_1 и M_2 не связаны порядком $\preceq$, то соединяющий их отрезок есть

$$[M_1 M_2] = [M_1 M_0] \cup [M_0 M_2],$$

где $M_0 = M_1 \wedge M_2$.

Из теоремы 1 и леммы 1, получаем

Следствие 1. *Пространство (X, d) является $\mathbb{R}$-деревом.*

Далее в работе доказано, что

Теорема 2. *Пространство X является локально полным подобно однородным неоднородным $\mathbb{R}$-деревом. При этом X вертикально, но не строго вертикально.*

Литература

1. *Урысон П. С.* Пример метрического пространства, нигде не удовлетворяющего второй аксиоме счетности // Труды по топологии и другим областям математики. Т. II. М.—Л.: Гостехиздат, 1951.—С. 778–780.
2. *Bestvina M.* $\mathbb{R}$-trees in topology, geometry and group theory // Handbook of Geometric Topology / Ed. by R. J. Daverman, R. B. Sher.—Amsterdam: Elsevier Sci., 2002.—P. 55–91.
3. *Андреев П. Д.* Полулинейные метрические полурешетки на $\mathbb{R}$-деревьях // Изв. вузов. Математика.—2007.—№ 6.—С. 3–13.
4. *Andreev P. D., Bulygin A. I.* On the vertical similarly homogeneous $\mathbb{R}$-trees // Lobachevskii J. Math.—2019.—Vol. 40, № 2.—P. 127–139.

НАСЛЕДОВАНИЕ ГЛАДКОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА A_p, $0 < p < \infty$[1]

Х. Х. Бурчаев (Россия, Грозный; ЧГУ),
Г. Ю. Рябых (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $d\sigma$ — плоская мера Лебега; $0 < \beta < 1$, $\Lambda_\beta A = A_\infty \cap \operatorname{Lip}(\beta, T = \partial D)$ (классы Липшица); $l_g \in (A_p)^*$:

$$l_g(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_D f(z)\bar{g}(z)\, d\sigma, \quad f \in A_p.$$

Функцию $\mathcal{F}$ называем *экстремальной* для функционала l_g, если $\mathcal{F} \in A_p$, $l_g(\mathcal{F}) = \|l_g\|$ и $\|\mathcal{F}\| = 1$. Через $\mathcal{B}$ обозначаем произведение Бляшке, $\mathcal{H}$ — внешняя функция.

Теорема 1. *Если $1 \leqslant p < \infty$ и $g^{(n-1)} \in \Lambda_\beta A$, $n \geqslant 1$, то $\mathcal{F} = \mathcal{BH}$, где $(|\mathcal{H}(t)|^p)^{(n-1)} \in \operatorname{Lip}(\beta, T)$.*

Теорема 2. *Если $1 \leqslant p < 2$ и $g \in \Lambda_\beta A$, то $\mathcal{F} = \mathcal{BH}$, $\mathcal{H} \in \Lambda_\beta A$.*

Теорема 3. *Пусть $2/(m+1) < p < 2/m$, $m \geqslant 2$ и $g^{(m-2)} \in \Lambda_\beta A$, $\beta = 2/p - m + \nu < 1$, $\nu > 0$. Тогда $\mathcal{F} = \mathcal{BH}$, где $\mathcal{F}^{(m-2)} \in \Lambda_\beta A$.*

Теорема 4. *Если $0 < p < \infty$ и g — полином, то функция $\mathcal{F}(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$.*

Методы доказательств теорем 1, 2, 3 и 4 (см. [1–5]) работают и в пространствах Харди H_p, $0 < p < \infty$.

Литература

1. *Захарюта В. П., Юдович В. И.* Общий вид линейного функционала в H'_p // Успехи мат. наук.—1964.—Т. 19, № 2 (116).—С. 139–142.
2. *Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г.* Общий вид линейного ограниченного функционала в метрическом пространстве H'_p, $0 < p < 1$ // Сиб. мат. журн.—1975.—Деп в ВИНИТИ 17.03.75, 730-75.
3. *Beneteau C., Khavinson D.* A survey of linear extremal problems in analytic functional spaces // Complex Analysis and Potential Theory.—2012.—P. 33–46.—(CRM Proc. Lecture Notes; Vol. 55).
4. *Duren P. L., Romberg B. W., Shields A. L.* Linear functionals on H_p spase with $0 < p < 1$ // J. Reine Angew Math.— 1969.—Vol. 238.—P. 32–60.
5. *Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Об одной экстремальной задаче в H_p, $0 < p < \infty$ // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 3.—С. 510–525.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00017.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА[1]

Р. М. Гаджимирзаев
(Россия, Махачкала; ДНЦ РАН)

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$. Через $\mathcal{L}_n^\alpha(x) = \sqrt{\rho(x)}\, l_n^\alpha(x)$ ($l_n^\alpha(x)$ — ортонормированный полином Лагерра, $n = 0, 1, \ldots$) обозначим функции Лагерра, которые при $\alpha > -1$ ортонормированы относительно скалярного произведения

$$\left\langle \mathcal{L}_n^\alpha, \mathcal{L}_k^\alpha \right\rangle = \int\limits_0^\infty \mathcal{L}_n^\alpha(x) \mathcal{L}_k^\alpha(x)\, dx.$$

В работе [1] для заданного $r \in \mathbb{N}$ была введена система функций

$$\lambda_{r,r+n}^\alpha(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^x (x-t)^{r-1} \mathcal{L}_n^\alpha(t)\, dt, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$\lambda_{r,n}^\alpha(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots, r-1,$$

ортонормированная на $[0, \infty)$ относительно скалярного произведения типа Соболева

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)\, g^{(\nu)}(0) + \int\limits_0^\infty f^{(r)}(x)\, g^{(r)}(x)\, dx$$

и порожденная системой функций $\{\mathcal{L}_n^\alpha(x)\}_{n=0}^\infty$.

В настоящей работе мы рассмотрим частный случай системы $\{\lambda_{r,n}^\alpha(x)\}_{n=0}^\infty$ при $r = 1$ и $\alpha = 0$:

$$\lambda_0(x) = \lambda_{1,0}^0(x) = 1,$$

$$\lambda_{1+n}(x) = \lambda_{1,1+n}^0(x) = \int\limits_0^x \mathcal{L}_n^0(t)\, dt, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Основными результатами настоящей работы являются теоремы 1–5, приведенные в следующих пунктах.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00477 мол_а.

1. Представления для функций $\lambda_{1+n}(x)$

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\lambda_{1+n}(x) = e^{-x/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k L_n^k(x)}{2^{k-1}(n+1)_k},$$

в котором ряд сходится к $\lambda_{1+n}(x)$ равномерно на любом отрезке $[0, A]$.

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 1$. Тогда имеет место следующее равенство:*

$$\lambda_{1+n}(x) = (-1)^n 2 - 2e^{-x/2} L_n(x) + 2e^{-x/2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m 2^{n-m} \binom{n}{m} L_{n-m-1}\left(\frac{x}{2}\right).$$

2. Асимптотические свойства функций $\lambda_{1+n}(x)$

Представим $\lambda_{1,1+n}(x)$ в виде

$$\lambda_{1+n}(x) = \frac{xe^{-x/2}}{n+1} L_n^1(x) + R_n(x),$$

в котором

$$R_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \int\limits_0^x te^{-t/2} L_n^1(t)\, dt.$$

Теорема 3. *Пусть $x \in [0, b\theta)$, $0 < b < 1$, $\theta = 4n+4$. Тогда для величины $R_n(x)$ справедливы следующие оценки:*

$$R_n(x) = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right), & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ O\left(\dfrac{x^{3/4}}{\theta^{1/2}(\theta - x)^{3/4}}\right), & \dfrac{1}{n} < x < b\theta. \end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть $\theta - \theta^{1/3} \leqslant x \leqslant (1+\delta)\theta$, $\theta = 4n+4$, δ — достаточно малое положительное число. Тогда для величины $R_n(x)$ справедливы следующие оценки:*

$$R_n(x) = \begin{cases} O\left(1 + \dfrac{x^{1/4}\left[\theta^{1/4} - (\theta - x)^{3/4}\right]}{\theta^{1/2}}\right), & \theta - \theta^{1/3} \leqslant x \leqslant \theta, \\ O\left(1 + \dfrac{x^{1/4}\sqrt{x - \theta}}{\theta^{5/12}}\right), & \theta \leqslant x \leqslant \theta + \theta^{1/3}, \\ O(1), & \theta + \theta^{1/3} \leqslant x \leqslant (1+\delta)\,\theta. \end{cases}$$

Теорема 5. *Пусть $x \in ((1+\delta)\theta, \infty)$. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\lambda_{1+n}(x) = (-1)^n 2 + r_n,$$

в которой $r_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Из теорем 3–5 и весовых оценок для полиномов Лагерра вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Имеют место следующие оценки:*

$$\lambda_{1+n}(x) = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{n}\right), & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ O\left(\dfrac{x^{1/4}}{n^{3/4}}\right), & \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant \dfrac{\theta}{2}, \\ O\left(\dfrac{n^{1/4}}{(\theta - x)^{3/4}}\right), & \dfrac{\theta}{2} \leqslant x \leqslant \theta - \theta^{1/3}, \\ O(1), & \theta - \theta^{1/3} \leqslant x. \end{cases}$$

Литература

1. *Gadzhimirzaev R. M.* Sobolev-orthonormal system of functions generated by the system of Laguerre functions // Issues Anal.—2019.—Vol. 8 (26), № 1.—P. 32–46.

К СПЕКТРАЛЬНЫМ СВОЙСТВАМ ОДНОЙ ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Г. В. Гаркавенко (Россия, Воронеж; ВГПУ),
Н. Б. Ускова (Россия, Воронеж; ВГТУ)

Рассматривается трехдиагональная бесконечная матрица $\mathcal{A}$ вида

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-\beta_{-2}}{2} & -2a & -\beta'_{-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -\beta_{-1} & -a & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & \beta'_1 \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \beta_1 & a & \frac{\beta'_2}{2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\beta_2}{2} & 2a & \frac{\beta'_3}{3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Здесь $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, — постоянная и последовательности $\beta \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $\beta' \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ограниченные, т. е. $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\beta_n| < c$ и $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\beta'_n| < c$, $c > 0$.

Матрица $\mathcal{A}$ определяет в пространстве $l_2 = l_2(\mathbb{Z})$ линейный оператор $A \colon D(A) \subset l_2 \to l_2$, действующий по формуле

$$(Ax)(n) = anx(n) + \frac{\beta_n}{n} x(n-1) + \frac{\beta'_{n+1}}{n+1} x(n+1), \quad n \neq 0,\ n \neq -1,$$

$$(Ax)(0) = \beta'_1 x(1), \quad (Ax)(-1) = -ax(-1) - \beta_{-1} x(-2),$$

с областью определения

$$D(A) = \Big\{ x \in l_2 \colon \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big| nx(n) \big|^2 < \infty \Big\}.$$

Представим оператор A в виде $A = A_0 - B$, где $A_0 \colon D(A_0) = D(A) \subset l_2 \to l_2$, $(A_0 x)(n) = anx(n)$ и $B = A_0 - A$. Символом $\operatorname{End} l_2$ обозначена банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в l_2, а символом $\sigma_2(l_2) \subset \operatorname{End} l_2$ идеал операторов Гильберта — Шмидта. Очевидно, что $B \in \operatorname{End} l_2$ и, более того, $B \in \sigma_2(l_2)$.

Пусть

$$P_i = P\big(\{ai\}, A_0\big),\ i \in \mathbb{Z}, \quad P_{(k)} = \sum_{|i| \leqslant k} P_i,\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

С помощью метода подобных операторов [1–4] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Существует такое $k \geqslant 0$, что оператор A подобен блочно-диагональному оператору*

$$A - P_{(k)} X P_{(k)} - \sum_{|i|>k} P_i X P_i = A_0 - V,$$

где $V \in \sigma_2(l_2)$ и преобразование подобия осуществляет оператор $U \in \operatorname{End} l_2$ такой, что $U - I \in \sigma_2(l_2)$.

Теорема 2. *Собственные значения оператора A имеют асимптотическое представление*

$$\lambda_i = ai + \xi_i, \quad |i| > k,$$

где последовательность $(\xi_i, |i| > k)$ принадлежит l_1.

Теорема 3. *Собственные векторы $\tilde{e}_i$, $|i| > k$, удовлетворяют оценке*

$$\left\|\tilde{e}_i - e_i\right\| \leqslant \xi_i', \quad \left\|\tilde{e}_i - e_i - y_i\right\| < \xi_i'',$$

$$y_i = \left\{\ldots, 0, \frac{\beta_i'}{ai}, 0, \frac{\beta_{i+1}'}{a(i+1)}, 0, \ldots\right\},$$

где последовательность $\{\xi_i', \ |i| > k\}$ принадлежит l_2, последовательность $\{\xi_i'', |i| > k\}$ принадлежит l_1, e_i, $i \in \mathbb{Z}$, — стандартный базис в l_2. Векторы $\tilde{e}_i$, $i \in \mathbb{Z}$, образуют в $l_2(\mathbb{Z})$ базис Бари, в частности, базис Рисса и p-базис при $p \geqslant 2$.

Отметим, что указанная матрица $\mathcal{A}$ оператора A представляет иллюстративный интерес с точки зрения мотода подобных операторов, потому что для нее можно построить много различных допустимых троек [2, 3] с разными пространствами допустимых возмущений.

Литература

1. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* О спектральных свойствах разностного оператора с растущим четным потенциалом // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики.—Воронеж: Науч.-исслед. публ., 2015.—С. 14–16.
2. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств одного класса разностных операторов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2016.—Т. 16, № 3.—С. 101–111.
3. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2016.—Т. 16., № 4.—С. 395–402.
4. *Гаркавенко Г. В.* О системе проекторов, построенной по спектральным множествам возмущенного оператора // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика.—Воронеж: Воронеж. гос. лесотехн. ун-т им. Г. Ф. Морозова, 2018.—С. 77–80.

О МАЖОРИРОВАННОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

А. А. Гелиева (Россия, Владикавказ; СОГУ),
З. А. Кусраева (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Операторы, действующие из векторной решетки или векторного пространства X в векторную решетку Y, обладают хорошими свойствами, когда Y порядково полна. Примером может служить теорема Хана — Банаха — Канторовича о мажорированном продолжении линейных операторов, справедливая в том и только том случае, когда операторы действуют в порядково полную векторную решетку, см. [1, § 1.4]. В некоторых случаях возможно ослабить требование порядковой полноты Y за счет предъявления к X некоторых дополнительных требований. Абрамович и Викстед [2] нашли такое взаимодействие условий сепарабельности X и σ-интерполяционного свойства Y в задаче о мажорированном продолжении линейных операторов. Приведем необходимые определения.

Скажем, что упорядоченное векторное пространство Y обладает *σ-интерполяционным свойством* (или *свойством Кантора*), если для любой возрастающей последовательности (x_n) и для любой убывающей последовательности (z_n) в Y, удовлетворяющих неравенству $x_n \leqslant z_m$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, существует $y \in Y$ такой, что $x_n \leqslant y \leqslant z_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, см. [3, определение 146.6]. Если в этом определении опустить требования о возрастании (x_n) и убывании (z_n), то говорят, что Y обладает *сильным σ-интерполяционным свойством.*

Положительный конус Y_+ упорядоченного топологического векторного пространства Y называют *нормальным*, если в Y существует базис окрестностей нуля, состоящий из Y_+-насыщенных множеств, см. [3, стр. 271] и [4, стр. 48]. Напомним, что множество $A \subset Y$ именуют *Y_+-насыщенным*, если $[A] = A$, где $[A] := (A + Y_+) \cap (A - Y_+)$ — это *Y_+-насыщенная оболочка*, совпадающая с объединение *порядковых интервалов* $[a, b] := (a + Y_+) \cap (b - Y_+) := \{y \in Y : a \leqslant y \leqslant b\}$ по всем $a, b \in A$. Положительный конус Y_+ называют *воспроизводящим*, если $Y = Y_+ - Y_+$.

Рассмотрим сепарабельное и метризуемое топологическое векторное пространство X, подпространство этого пространства $X_0 \subset X$, непрерывный сублинейный оператор $P : X \to Y$ и линейный оператор $T_0 : X_0 \to Y$ такой, что $T_0 x \leqslant P(x)$ для всех $x \in X_0$. Будем говорить, что упорядоченное топологическое векторное пространство Y обладает *счетным свойством мажорированного продолжения*, если для любых X, X_0, T_0 и P, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, существует линейный оператор $T : X \to Y$, продолжающий T_0 с подпространства X_0 на все X и удовлетворяющий неравенству $Tx \leqslant P(x)$ для всех $x \in X$.

[1]Работа выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00205.

Теперь имеются все составляющие, чтобы сфломулировать основной результат.

Теорема. *Пусть Y — секвенциально полное топологическое векторное пространство, упорядоченное воспроизводящим, замкнутым и нормальным конусом Y_+. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *Y обладает сильным σ-интерполяционным свойством;*

(2) *Y обладает счетным свойством мажорированного продолжения.*

Заметим, что в вышеуказанной теореме предполагается секвенциальная полнота пространства Y и воспроизводимость положительного конуса Y_+. Первое предположение необходимо, так как в доказательство приходится использовать конструкцию продолжение по непрерывности оператора, определенного на плотном подпространстве, чтобы избежать применения аксиомы выбора в полном объеме. Второе предположение существенно из-за того, что при доказательстве (2) $\Longrightarrow$ (1) используется σ-интерполяционное свойство лишь для порядково ограниченных последовательностей, а в доказательстве (1) $\Longrightarrow$ (2) — сильное σ-интерполяционное свойство в полном объеме, но эти два свойства равносильны в том случае, когда Y_+ — воспроизводящий конус.

Литература

1. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения.—М.: Наука, 2007.
2. *Abramovich Yu. A., Wickstead A. W.* The regularity of order bounded operators into $C(K)$. II // Quart. J. Math. Oxford.—1993.—Vol. 44, № 3.—P. 257–270.
3. *Zaanen A. C.* Riesz Spaces, 2.—Amsterdam: North Holland, 1983.
4. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1971.
5. *Wong Y. C. , Ng K. F.* Partially Ordered Topological Vector Spaces.—Oxford: Clarendon Press, 1973.

ОБ ОПЕРАТОРАХ СВЕРТКИ НА БЕСКОНЕЧНОЙ ДИЭДРАЛЬНОЙ ГРУППЕ

В. М. Деундяк (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
А. А. Сенчукова (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Рассмотрим бесконечную диэдральную группу

$$D_\infty = \big\{(x,\varepsilon) \,\big|\, x \in \mathbb{Z},\, \varepsilon = \pm 1\big\}.$$

На этой группе зададим атомарную меру, которая является мерой Хаара. Пусть $a \in L_1(D_\infty)$. Оператор свертки

$$(C_a f)(x,\varepsilon) = \sum_{(y,\delta)} a(y,\delta) f\big((x,\varepsilon)(y,\delta)^{-1}\big)$$

является линейным ограниченным в пространстве $L_p(D_\infty)$, $1 < p \leqslant \infty$.

Пусть g — непрерывная ограниченная функция, определенная на D_∞. Функция g называется слабо осциллирующей, если

$$(\forall\, D \in \operatorname{comp}(D_\infty)) \ \lim_{t\to\infty} \sup_{h\in D} \big\{|g(t) - g(t \circ h)|\big\} = 0,$$

где $\operatorname{comp}(D_\infty)$ — множество всех компактных подмножеств группы D_∞ [1]. Обозначим через $\Omega(D_\infty)$ C^*-алгебру всех слабо осциллирующих функций на группе D_∞. Пространство $\mathfrak{M}(D_\infty)$ максимальных идеалов этой алгебры является компактификацией пространства D_∞, а подпространство

$$\mathfrak{N}(D_\infty) = \mathfrak{M}(D_\infty) \setminus D_\infty$$

называется короной компактификации.

В работе исследуются C^*-алгебры

$$V(D_\infty) = \overline{\operatorname{Alg}}\big(\{C_a\}_{a\in L_1(D_\infty)}\big) \quad \text{и} \quad W(D_\infty) = \overline{\operatorname{Alg}}\big(V(D_\infty); \Omega(D_\infty)\big).$$

Для C^*-алгебры $V(D_\infty)$ построено символическое исчисление, в терминах которого найдены необходимые и достаточные условия обратимости операторов из $V(D_\infty)$.

Для алгебры $W(D_\infty)$ на основе применения локального метода И. Б. Симоненко [2] и результатов Б. Я. Штейнберга [1] построено символическое исчисление и найдены необходимые и достаточные условия фредгольмовости операторов из $W(D_\infty)$. Для этой алгебры построен изоморфизм подобия на матричную алгебру операторов свертки на группе $\mathbb{Z}$ со слабо осциллирующими коэффициентами, расширенную некоторым инволютивным оператором.

Литература

1. *Штейнберг Б. Я.* Об операторах типа свертки на локально компактных группах // Функц. анализ и его прил.—1981.—Т. 15, № 3.—С. 95–96.
2. *Симоненко И. Б.* Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих.—Ростов н/Д.: Изд-во ЦВВР, 2007.—120 с.

ПОРОГОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В СПЕКТРЕ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА 2×2-ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ

Э. Б. Дилмуродов (Узбекистан, Бухара; БухГУ),
Т. Х. Расулов (Узбекистан, Бухара; БухГУ)

Пусть $\mathbb{T}^3 :\equiv (-\pi;\pi]^3$ — трехмерный тор, $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ — одномерное комплексное пространство, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$ и $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Рассмотрим семейства ограниченных и самосопряженных 2×2-операторных матриц $\mathcal{A}_\mu(k)$, $\mu > 0$, $k \in \mathbb{T}^3$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ как

$$\mathcal{A}_\mu(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(k) & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11}(k) \end{pmatrix},$$

где операторы $A_{ii}(k) : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1$, $k \in \mathbb{T}^3$, и $A_{01} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0$ определяются по формулам

$$A_{00}(k)f_0 = w_0(k)f_0, \quad A_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} v(t)f_1(t)\,dt, \quad (A_{11}(k)f_1)(p) = w_1(k,p)f_1(p).$$

Здесь $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1$, $\mu > 0$ — параметр взаимодействия, $v(\cdot)$ вещественно аналитическая функция на $\mathbb{T}^3$, а функции $w_0(\cdot)$ и $w_1(\cdot,\cdot)$ имеют вид

$$w_0(k) := \varepsilon(k) + \gamma, \quad w_1(k,p) := \varepsilon(k) + \varepsilon(k+p) + \varepsilon(p),$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$ и функция дисперции $\varepsilon(\cdot)$ определена следующим образом:

$$\varepsilon(k) := \sum_{i=1}^{3}(1 - \cos k_i), \quad k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{T}^3.$$

Пусть $\Lambda := \{k = (k_1, k_2, k_3) : k_i \in \{-2\pi/3, 2\pi/3\}, i = 1, 2, 3\}$. Так как множество Λ состоит из восьми точек, для удобства положим $\Lambda = \{k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(8)}\}$.

Можно легко проверить, что функция $w_1(\cdot,\cdot)$ имеет единственный невырожденный нулевой минимум в точке $(\bar{0},\bar{0}) \in (\mathbb{T}^3)^2$, $\bar{0} := (0,0,0)$, и невырожденный максимум в точках $(k^{(i)}, k^{(i)}) \in (\mathbb{T}^3)^2$, $i = \overline{1,8}$, равный $27/2$. Из этих фактов получим, что следующие интегралы являются конечными:

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{v^2(t)\,dt}{w_1(\bar{0},t)}, \quad \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v^2(t)dt}{w_1(k^{(i)},t) - 27/2}, \quad i = \overline{1,8}.$$

Пусть $C(\mathbb{T}^3)$ — банахово пространство непрерывных функций, определенных на $\mathbb{T}^3$.

Определение 1. Пусть $\gamma \neq 0$. Говорят, что оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ имеет виртуальный уровень в точке $z = 0$ (резонанс с нулевой энергией), если число 1 является собственным значением интегрального оператора

$$(G_\mu \psi)(p) = \frac{\mu^2 v(p)}{2\gamma} \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{v(t)\psi(t)\,dt}{\varepsilon(t)}, \quad \psi \in C\big(\mathbb{T}^3\big),$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция $\psi(\cdot)$ удовлетворяет условию $\psi(\bar{0}) \neq 0$.

Определение 2. Пусть $\gamma \neq 9$ и $i \in \{1, \ldots, 8\}$. Говорят, что оператор $\mathcal{A}_\mu(k^{(i)})$ имеет виртуальный уровень в точке $z = 27/2$, если число 1 является собственным значением интегрального оператора

$$\big(G_\mu^{(i)} \varphi\big)(p) = \frac{\mu^2 v(p)}{\gamma - 9} \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{v(t)\varphi(t)\,dt}{\varepsilon(k^{(i)} + t) + \varepsilon(t) - 9}, \quad \varphi \in C\big(\mathbb{T}^3\big),$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция $\varphi(\cdot)$ удовлетворяет условию $\varphi(k^{(i)}) \neq 0$.

Положим

$$\mu_l(\gamma) := \sqrt{2\gamma} \left(\int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{v^2(t)\,dt}{\varepsilon(t)} \right)^{-1/2} \quad \text{при} \quad \gamma > 0;$$

$$\mu_r^{(i)}(\gamma) := \sqrt{9 - \gamma} \left(\int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{v^2(t)\,dt}{9 - \varepsilon(k^{(i)} + t) - \varepsilon(t)} \right)^{-1/2} \quad \text{при} \quad \gamma < 9,\ i = \overline{1,8}.$$

Следующая теорема о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы либо число $z = 0$ являлось собственным значением оператора $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$, либо оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ имел резонанс с нулевой энергией.

Теорема 1. *Пусть* $\gamma > 0$.

a) *Оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда* $\mu = \mu_l(\gamma)$ *и* $v(\bar{0}) = 0$.

b) *Оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет резонанс с нулевой энергией тогда и только тогда, когда* $\mu = \mu_l(\gamma)$ *и* $v(\bar{0}) \neq 0$.

Аналогичная теорема верна для оператора $\mathcal{A}_\mu(k^{(i)})$, $i \in \{1, \ldots, 8\}$.

Теорема 2. *Пусть* $\gamma < 9$ *и* $i \in \{1, \ldots, 8\}$.

a) *Оператор* $\mathcal{A}_\mu(k^{(i)})$ *имеет собственное значение, равное* $z = 27/2$, *тогда и только тогда, когда* $\mu = \mu_r^{(i)}(\gamma)$ *и* $v(k^{(i)}) = 0$.

b) *Оператор* $\mathcal{A}_\mu(k^{(i)})$ *имеет виртуальный уровень в точке* $z = 27/2$ *тогда и только тогда, когда* $\mu = \mu_r^{(i)}(\gamma)$ *и* $v(k^{(i)}) \neq 0$.

Пусть $\mu_i := \mu_l(\gamma_i)$, $i = \overline{1,8}$, где $\gamma_i \in (0; 9)$ — единственное решение уравнения $\mu_l(\gamma) = \mu_r^{(i)}(\gamma)$. Тогда из теоремы 1 и 2 следует следующие утверждения.

Следствие 1. *Пусть* $\gamma \in (0;9)$ *и* $i \in \{1,\dots,8\}$.

a) *Оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет нулевое собственное значение, а оператор* $\mathcal{A}_\mu(k^{(i)})$ *имеет собственное значение, равное* $z = 27/2$, *тогда и только тогда, когда* $\mu = \mu_i$ *и* $v(\bar{0}) = v(k^{(i)}) = 0$.

b) *Оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет резонанс с нулевой энергией, а оператор* $\mathcal{A}_\mu(k^{(i)})$ *имеет виртуальный уровень в точке* $z = 27/2$ *тогда и только тогда, когда* $\mu = \mu_i$, $v(\bar{0}) \neq 0$ *и* $v(k^{(i)}) \neq 0$.

c) *Оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет нулевое собственное значение, а оператор* $\mathcal{A}_\mu(k^{(i)})$ *имеет виртуальный уровень в точке* $z = 27/2$ *тогда и только тогда, когда* $\mu = \mu_i$, $v(\bar{0}) = 0$ *и* $v(k^{(i)}) \neq 0$.

d) *Оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет резонанс с нулевой энергией, а оператор* $\mathcal{A}_\mu(k^{(i)})$ *имеет собственное значение равное* $z = 27/2$ *тогда и только тогда, когда* $\mu = \mu_i$, $v(\bar{0}) \neq 0$ *и* $v(k^{(i)}) = 0$.

BOOLEAN VALUED ANALYSIS IN MODERN MATHEMATICAL FINANCE

J. M. Zapata

(Germany, Konstanz; University of Konstanz)

In the last decade, some problems in mathematical finance have motivated a number of apparently new developments in functional analysis. However, as shown recently, these functional analytic tools turn out to be particular instances of Boolean valued analysis. We will see how Boolean valued analysis brings a powerful technology that can be applied to duality theory of dynamic risk measures, financial arbitrage theory and stochastic optimal control.

References

1. *Avilés A., Zapata J. M.* Boolean-valued models as a foundation for locally L^0-convex analysis and conditional set theory // J. Appl. Logics.—2018.—№ 5 (1).—P. 389–420.
2. *Jamneshan A., Kupper M., Zapata J. M.* Parameter-Dependent Stochastic Optimal Control in Finite Discrete Time.—2018.— arXiv:1705.02374v3.—(Preprint).
3. *Zapata J. M.* A Boolean Valued Analysis Approach to Conditional Risk.—2017.—arXiv: 1711.09833v1.—(Preprint).
4. *Zapata J. M.* A Boolean-valued Models Approach to L^0-Convex Analysis, Conditional Risk and Stochastic Control: PhD Thesis.—Murcia: Universidad de Murcia, 2018.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ И ОПЕРАТОРЫ СВЕРТКИ

О. А. Иванова
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В докладе идет речь об алгебрах линейных непрерывных функционалов на счетных индуктивных пределах E весовых пространств Фреше целых функций и об операторах свертки в них. Умножение в топологическом сопряженном пространстве E' к E задается операторами сдвига для некоторых операторов, действующих в E. Пространство

$$E = \operatorname*{ind}_{n\to} \operatorname*{proj}_{\leftarrow k} E_{n,k}$$

определяется посредством непрерывных функций $v_{n,k} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}$ таких, что $v_{n,k+1} \leqslant v_{n,k} \leqslant v_{n+1,k}$, $k, n \in \mathbb{N}$. При этом

$$E_{n,k} := \Big\{ f \in H\big(\mathbb{C}^N\big) : \|f\|_{n,k} = \sup_{z\in\mathbb{C}^N} |f(z)| \exp(-v_{n,k}(z)) < +\infty \Big\}$$

— банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{n,k}$; $H(\mathbb{C}^N)$ — пространство всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций. Веса $v_{n,k}$ удовлетворяют стандартным техническим условиям. Пусть $\mathcal{T} := \{T_z : z \in \mathbb{C}^N\}$ — множество операторов сдвига для системы линейных непрерывных в E операторов A_j, $1 \leqslant j \leqslant N$. Свертка $\varphi \otimes \psi \in E'$ функционалов $\varphi, \psi \in E'$ определяется так:

$$(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f))), \quad z \in \mathbb{C}^N, \ f \in E.$$

Символом $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ обозначим коммутант системы $\{A_j : 1 \leqslant j \leqslant N\}$ в кольце (алгебре) всех линейных непрерывных операторов в E. Исследованы две пары $(\mathcal{A}, \mathcal{T})$:

D) $A_j = \partial_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$, — операторы частного дифференцирования, $T_z(f)(t) = f(t+z)$ — обычные сдвиги;

P) $N = 1$, $A_1 = D_{0,g_0}$ — оператор обобщенного обратного сдвига (оператор Поммье) (g_0 — функция из E такая, что $g_0(0) = 1$).

В случае D) функции $v_{n,k}$ удовлетворяют дополнительному условию, близкому к полуаддитивности.

Для $\varphi \in E'$ введем оператор свертки $A_\varphi(f)(z) := \varphi(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}^N$, $f \in E$. Связь $(E', \otimes)$ и $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ показывает

Теорема 1 [1, 2]**.** *В ситуациях* P), D) *отображение* $\omega : (E', \otimes) \to \mathcal{K}(\mathcal{A})$, $\omega(\varphi) := A_\varphi$, *является алгебраическим изоморфизмом «на».*

Изучены также топологические свойства алгебры $(E', \otimes)$ и изоморфизма ω в теореме 1, а именно, установлены условия того, что $(E', \otimes)$ является топологической алгеброй, а ω — топологическим изоморфизмом (см. [3, 4]). Мотивацией такого исследования является то, что топологические алгебры, не являющиеся банаховыми, довольно широко используются при изучении операторов обобщенного интегрирования, в спектральной теории в пространствах аналитических функционалов, в теории операторов обощенного сдвига, групп и алгебр Ли.

Отметим следующие применения описанных результатов.

1) Доказаны условия того, что множество многочленов от операторов A_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, плотно в $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ с некоторой операторной топологией, в частности, того, что всякий оператор из $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ является $\mathcal{A}$-оператором бесконечного порядка.

2) Доказана теорема типа Титчмарша об отсутствии делителей нуля в алгебре $(E', \otimes)$.

Литература

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2016.—Т. 28, № 2.—С. 114–137.
2. *Иванова О. А., Мелихов С. Н., Мелихов Ю. Н.* О коммутанте операторов дифференцирования и сдвига в весовых пространствах целых функций // Уфим. мат. журн.—2017.—Т. 9, № 3.—С. 38–49.
3. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об алгебре аналитических функционалов, связанной с оператором Поммье // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 4.—С. 34–40.
4. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* О топологических алгебрах аналитических функционалов с умножением, определяемым сдвигами // Вестн. Сам. ун-та. Естественнонауч. сер.—2018.—Т. 24, № 3.—С. 14–22.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ИЗ АБСТРАКТНЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В АНАЛОГИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С РАВНОМЕРНОЙ НОРМОЙ

Ю. В. Кораблина
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Рассматривается задача о непрерывности линейных операторов, действующих из абстрактного банахова пространства голоморфных в области комплексной плоскости функций в весовое банахово пространство таких же функций с sup-нормой. Ранее она рассматривалась в статье Н. Зорбоска [1] для единичного круга $\mathbb{D}$ и радиальных весов. Для этого случая в [1] был получен абстрактный критерий и указана формула для вычисления нормы оператора, а также разработаны приложения к конкретным пространствам и операторам.

Основной целью работы, которой посвящен доклад, является обобщение результатов из [1] на случай областей и (или) весов общего вида.

Пусть G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех функций, аналитических в G, с топологией равномерной сходимости на компактах из G, v — вес на G, т. е. непрерывная положительная на G функция. Порожденное этим весом банахово пространство с sup-нормой задается следующим образом:

$$H_v(G) = \left\{ f \in H(G),\ \|f\|_v = \sup_{z\in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\}.$$

Всюду далее X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, непрерывно вложенное в $H(G)$. Через X^* обозначается сопряженное с X пространство линейных непрерывных функционалов на X с сопряженной нормой $\|\cdot\|^*$, а через δ_z — дельта-функция Дирака для фиксированной точки $z \in G$, т. е. $\delta_z : f \mapsto f(z)$, $f \in H(G)$.

Следующая теорема является обобщением абстрактного критерия [1, теорема 2.1] на случай произвольной области G вместо единичного круга $\mathbb{D}$ и любого, не обязательно радиального, веса v. Отметим, что для ее доказательства используется метод, отличный в ряде мест от доказательства теоремы 2.1 в [1].

Теорема 1. *Пусть v — произвольный вес на G. Линейный оператор $T : X \to H_v(G)$ корректно определен и ограничен тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

а) $\delta_z(T) \in X^*$ *при всех* $z \in G$;

б) $\sup\limits_{z\in G} \dfrac{\|\delta_z(T)\|^*}{v(z)} < \infty$.

Ниже приводятся полученные с помощью теоремы 1 критерии непрерывности операторов весовой композиции и Вольтерра.

Предложение 1. *Пусть v — вес на G, u и φ — фиксированные функции из $H(G)$, причем $\varphi(G) \subset G$. Оператор весовой композиции $W_{u,\varphi} : f \mapsto u \cdot f(\varphi)$ действует непрерывно из X в $H_v(G)$ в том и только в том случае, когда*

$$\sup_{z \in G} \frac{|u(z)|\, \|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} < \infty.$$

В случае, когда $W_{u,\varphi} : X \mapsto H_v(G)$ ограничен,

$$\left\| W_{u,\varphi} \right\| = \sup_{z \in G} \frac{|u(z)|\, \|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)}.$$

Предложение 1 обобщает пункт (i) следствия 2.1 статьи [1], в котором дополнительно требовалось, чтобы v был радиальным весом на единичном круге.

Предложение 2. *Пусть $G = \mathbb{D}$, v — радиальный вес на $\mathbb{D}$, удовлетворяющий дополнительному условию*

$$0 < \liminf_{r \to 1^-} \frac{(1-r)\, v'(r)}{v(r)} \leqslant \limsup_{r \to 1^-} \frac{(1-r)\, v'(r)}{v(r)} < \infty,$$

g — фиксированная функция из $H(\mathbb{D})$. Оператор Вольтерра

$$V_g : \ f \mapsto \int_0^z f(w) g'(w)\, dw$$

действует непрерывно из X в $H_v(\mathbb{D})$ тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{(1-|z|)\, |g'(z)|\, \|\delta_z\|^*}{v(z)} < \infty.$$

Отметим, что при доказательстве предложения 2 существенно использовались некоторые результаты статьи [2].

Следствие 1. *Пусть*

$$G = \mathbb{D}, \quad v(r) = \left(\frac{1}{1-r} \right)^{\beta} \ln^p \left(\frac{1}{1-r} \right), \quad \beta > 0, \quad p \geqslant 0,$$

и g — фиксированная функция из $H(\mathbb{D})$. Оператор Вольтерра $V_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{\beta+1}\, |g'(z)|\, \|\delta_z\|^*}{\ln^p (1/(1-|z|))} < \infty.$$

При $p = 0$ получаем отсюда в качестве частного случая пункт (iii) следствия 2.1 из [1], а именно, критерий непрерывности оператора Вольтерра из X в классическое пространство Бергмана H_β. Напомним, что оно задается весом $v(z) = \left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{\beta}$.

Литература

1. *Zorboska N.* Intrinsic operators from holomorphic function spaces to growth spaces // Integr. Equ. Oper. Theory.—2017.—Vol. 87, № 4.—P. 581–600.
2. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Differentiation and integration operators on weighted spaces of holomorphic functions // Math. Nachr.—2017.—Vol. 290, № 8–9.—P. 1144–1162.

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СРЕДНИХ ВАЛЛЕ ПУССЕНА СПЕЦИАЛЬНОГО РЯДА ПО УЛЬТРАСФЕРИЧЕСКИМ ПОЛИНОМАМ ЯКОБИ С ПРИЛИПАЮЩИМИ ЧАСТИЧНЫМИ СУММАМИ

М. Г. Магомед-Касумов
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Пусть $\alpha > 0$, $\mu^\alpha(x) = (1-x^2)^\alpha$ — вес, $\mathcal{P}^\alpha = \{\widehat{P}_n^\alpha(x), n = 0, 1, \dots\}$ — система полиномов, ортонормированных относительно скалярного произведения

$$\int\limits_{-1}^{1} \mu^\alpha(x)\widehat{P}_n^\alpha(x)\widehat{P}_k^\alpha(x)\,dx = \delta_{nk}. \tag{1}$$

Специальный ряд определяется для функций $f(x) \in C[-1,1]$ следующим образом:

$$f(x) \sim l(f)(x) + \left(1-x^2\right)\sum_{k=0}^{\infty} c_k^\alpha(F)\widehat{P}_k^\alpha(x), \quad \alpha > 0, \tag{2}$$

где $l(f)(x)$ — прямая линия, соединяющая значения функции $f(x)$ на концах отрезка $[-1,1]$:

$$l(f)(x) = \frac{f(-1)+f(1)}{2} + \frac{f(1)-f(-1)}{2}\,x,$$

$F(x) = \frac{f(x)-l(f)(x)}{1-x^2}$ и $c_k^\alpha(F)$ — коэффициент Фурье — Якоби функции F:

$$c_k^\alpha(F) = \int\limits_{-1}^{1} \big(f(t)-l(f)(t)\big)\left(1-t^2\right)^{\alpha-1}\widehat{P}_k^\alpha(t)\,dt. \tag{3}$$

Частичные суммы специальных рядов (2) будем обозначать

$$\sigma_n^\alpha(f,x) = l(f)(x) + (1-x)^2\sum_{k=0}^{n-2} c_k^\alpha(F)\widehat{P}_k^\alpha(x). \tag{4}$$

Специальный ряд был впервые введен в работе [1] как обобщение предельного ряда. В той же работе были исследованы аппроксимативные свойства частичных сумм $\sigma_n^\alpha(f)$. В частности, было показано, что

$$\left|f(x) - \sigma_n^\alpha(f,x)\right| \leqslant c(\alpha)E_n(f)\left(1 + \ln\left(1+n\sqrt{1-x^2}\,\right)\right), \quad \frac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{3}{2},\ f \in C[-1,1],$$

где $E_n(f)$ — величина наилучшего приближения функции f алгебраическими полиномами степени не выше n.

В работе [2] изучены аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена специального ряда

$$V_{n,m}^{\alpha}(f) = V_{n,m}^{\alpha}(f,x) = \frac{1}{m+1}\left[\sigma_n^{\alpha}(g,x) + \cdots + \sigma_{n+m}^{\alpha}(g,x)\right] \tag{5}$$

в случае $\alpha = \frac{1}{2}$ и $n \leqslant qm$, где q — произвольное положительное фиксированное число, а именно, была получена оценка

$$\left|f(x) - V_{n,m}^{\frac{1}{2}}(f,x)\right| \leqslant c(q)E_n(f), \quad f \in C[-1,1].$$

В данной работе указанный результат при условии $c_1 m \leqslant n \leqslant c_2 m$ распространяется на случай $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$.

Теорема. *Для функций $f \in C[-1,1]$ справедлива следующая оценка остатка при приближении средними Валле Пуссена $V_{n,m}^{\alpha}(f,x)$:*

$$\left|f(x) - V_{n,m}^{\alpha}(f,x)\right| \leqslant cE_n(f), \quad c_1 m \leqslant n \leqslant c_2 m, \ \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}.$$

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. мат.—2014.—Т. 78, № 5.—С. 201–224.
2. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства средних типа Фейера и Валле — Пуссена частичных сумм специального ряда по системе $\{\sin x \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$ // Мат. сб.—2015.—Т. 206, № 4.—С. 131–148.

ОБ УМНОЖЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

С. Н. Мелихов
(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Как известно, в пространстве D' распределений на $\mathbb{R}$ нельзя ввести ассоциативную бинарную операцию так, чтобы она продолжала умножение на бесконечно дифференцируемые функции. Предлагается один из подходов к определению умножения распределений, использующий результаты работ [1, 2] для алгебр аналитических функционалов. Пусть Ω — интервал вещественной прямой, $\mathcal{D}(\Omega)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}$ функций с компактным носителем в Ω. Побудительным мотивом использовать предлагаемый в данной статье метод превращения в алгебру пространства $\mathcal{D}'(\Omega)$ распределений на Ω является следующее соображение. Преобразование Фурье — Лапласа $\mathcal{F}$ является топологическим изоморфизмом $\mathcal{D}(\Omega)$ на счетный индуктивный предел $\mathcal{A}_\Omega$ весовых пространств Фреше целых функций. В $\mathcal{D}'(\Omega)$ можно ввести произведение

$$u \mathbin{\widetilde{*}} v := \mathcal{F}'\big((\mathcal{F}')^{-1}(u) \mathbin{\widetilde{\otimes}} (\mathcal{F}')^{-1}(v)\big),$$

где свертка $\widetilde{\otimes}$ задается так:

$$\big(\varphi \mathbin{\widetilde{\otimes}} \psi\big)\big(f\big) := \psi_z\big(\varphi_t(f(t+z))\big), \quad f \in \mathcal{A}_\Omega.$$

Она определена не для всех пар $\varphi, \psi \in \mathcal{A}'_\Omega$: для произвольного $\psi \in \mathcal{A}'_\Omega$ и φ такого, что $\mathcal{F}'(\varphi)$ задается бесконечно дифференцируемой в Ω функцией. При этом $u \mathbin{\widetilde{*}} v$ совпадает с обычным произведением uv бесконечно дифференцируемой функции u, и распределения v и $\widetilde{*}$ нельзя продолжить до коммутативного и ассоциативного умножения в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Возникает естественный вопрос, а можно ли обычные сдвиги заменить на другое семейство операторов, позволяющих описанным способом ввести ассоциативное и коммутативное умножение во всем пространстве распределений. Такая операция $*$ в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$ вводится с помощью операторов сдвига T_z, $z \in \mathbb{C}$, для оператора обобщенного обратного сдвига (оператора Поммье). Мы полагаем

$$u * v := \mathcal{F}'\big((\mathcal{F}')^{-1}(u) \otimes (\mathcal{F}')^{-1}(v)\big), \quad u, v \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

где

$$(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f))), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{A}'_\Omega.$$

С операцией $*$ пространство $\mathcal{D}'(\Omega)$ становится унитальной ассоциативной и коммутативной алгеброй. Она изоморфна коммутанту оператора Поммье в кольце всех линейных непрерывных операторов в $\mathcal{A}_\Omega$. Получена аналитическая реализация умножения $*$; приводятся конкретные примеры.

Часть полученных результатов опубликована в [3].

Литература

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2016.—Т. 28, № 2.—С. 114–137.
2. *Иванова О. А., Мелихов С. Н., Мелихов Ю. Н.* О коммутанте операторов дифференцирования и сдвига в весовых пространствах целых функций // Уфим. мат. журн.—2017.—Т. 9, № 3.—С. 38–49.
3. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об умножении распределений, порождаемом оператором Поммье // Мат. заметки.—2019.—Т. 105, № 4.—С. 632–636.

О ПРОБЛЕМЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДВУМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТЁПЛИЦА В НЕКОТОРЫХ СЧЕТНО-НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. Э. Пасенчук
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть Γ — единичная окружность комплексной плоскости C, Γ^2 — тор. Обозначим: $W(\Gamma^2)$ — банахово пространство винеровских функций, $W^{\infty,0}(\Gamma^2)$, $W^{\infty,\infty}(\Gamma^2)$ — счетно-нормированные пространства гладких функций. Будем знаками «$+$» и «$-$» внизу обозначать подпространства указанных пространств, а соответствующие операторы проектирования $P^{\pm\pm}$ соответственно (точные определения см в [1]).

Обозначим $T_a = P^{++}a(\xi,\eta)I$ оператор Тёплица

$$T_a:\, X_{++} \to X_{++}, \quad a(\xi,\eta) \in X,$$

где X — одно из пространств $W(\Gamma^2)$, $W^{\infty,0}(\Gamma^2)$, $W^{\infty,\infty}(\Gamma^2)$. Наиболее полно этот оператор изучен в банаховых пространствах, в частности, в $W(\Gamma^2)$. И. Б. Симоненко [2] получен критерий который может быть переформулирован следующим образом: оператор $T_a : W_{++}(\Gamma^2) \to W_{++}(\Gamma^2)$ нетеров тогда и только тогда, когда его символ $a(\xi,\eta)$ допускает каноническую факторизацию $a = a_{--}a_{+-}a_{-+}a_{++}$ в алгебре $W(\Gamma^2)$. Это означает, что каждый сомножитель в этом представлении символа порождает обратимый оператор Тёплица. При этом регуляризатор может быть построен методом частичной регуляризации, предложенным В. С. Пилиди [3]. Показано, что этот результат сохраняется в случае пространства $W^{\infty,0}_{++}(\Gamma^2)$ и не имеет места для пространства $W^{\infty,\infty}_{++}(\Gamma^2)$. Например, символ

$$\xi\eta^{-1} - \xi^{-1}\eta = \big(1 - \xi\eta^{-1}\big)\big(1 + \xi^{-1}\eta\big)$$

порождает оператор $T_{\xi\eta^{-1}-\xi^{-1}\eta}$, имеющий бесконечномерное ядро, несмотря на то, что каждый из операторов $T_{1-\xi\eta^{-1}}$, $T_{1+\xi^{-1}\eta}$ обратим в пространстве $W^{\infty,\infty}_{++}(\Gamma^2)$.

Литература

1. *Пасенчук А. Э.* Дискретные операторы типа свертки в классах последовательностей со степенным характером поведения на бесконечности.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2013.
2. *Симоненко И. Б.* Операторы типа свертки в конусах // Мат. сб.—1967.—Т. 74, № 2.—С. 108–112.
3. *Пилиди В. С.* О многомерных бисингулярных операторах // Докл. АН СССР.—1971.—Т. 201, № 2.—С. 787–789.

УРАВНЕНИЕ ФАДДЕЕВА И ВЕТВИ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ОДНОГО СЕМЕЙСТВА 3×3-ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ

Т. Х. Расулов (Узбекистан, Бухара; БухГУ)**,**
Н. А. Тошева (Узбекистан, Бухара; 2-й лицей при БухГМИ)

В работе рассматривается семейство 3×3-операторных матриц $H(K)$, $K \in (-\pi;\pi]^{\mathrm{d}}$, ассоциированных гамильтонианом системы с не более чем тремя частицами на d-мерной решетке $\mathbb{Z}^{\mathrm{d}}$. Построено уравнение Фаддеева для собственных функций оператора $H(K)$ и описан его существенный спектр. Установлено, что его существенный спектр состоит из объединения не более чем трех отрезков.

Пусть $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} :\equiv (-\pi;\pi]^{\mathrm{d}}$ — d-мерный тор, $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ — одномерное комплексное пространство, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, а $\mathcal{H}_2 := L_2^{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых (комплекснозначных) симметричных функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$, и $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Рассмотрим семейство 3×3-операторных матриц

$$H(K) = \begin{pmatrix} H_{00}(K) & H_{01} & 0 \\ H_{01}^* & H_{11}(K) & H_{12} \\ 0 & H_{12}^* & H_{22}(K) \end{pmatrix} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad K \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}},$$

с матричными элементами

$$H_{00}(K)f_0 = w_0(K)f_0, \quad H_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_0(t)f_1(t)\,dt,$$

$$(H_{11}(K)f_1)(p) = w_1(K;p)f_1(p), \quad (H_{12}f_2)(p) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_1(t)f_2(p,t)\,dt,$$

$$(H_{22}(K)f_2)(p,q) = w_2(K;p,q)f_2(p,q), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0,1,2.$$

Здесь $w_0(\cdot)$, $v_i(\cdot)$ $(i = 0,1)$, $w_1(\cdot;\cdot)$ и $w_2(\cdot;\cdot,\cdot)$ — вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$; $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$ и $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^3$, соответственно. Причем при каждом фиксированном $K \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ функция $w_2(K;\cdot,\cdot)$ есть симметричная функция, т. е. $w_2(K;p,q) = w_2(K;q,p)$ для любых $p,q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. В этих предположениях блочно-операторная матрица $H(K)$ является ограниченной и самосопряженной в $\mathcal{H}$.

При каждом фиксированном K, $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, определим регулярную в области $\mathbb{C} \setminus [E_K(p);E_K(p)]$ функцию

$$\Delta_K(p\,;z) := w_1(K;p) - z - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v_1^2(t)\,dt}{w_2(K;p,t) - z},$$

где числа $E_K(p)$ и $E_K(p)$ определяются следующим образом:

$$E_K(p) := \min_{q\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_2(K;p,q), \quad E_K(p) := \max_{q\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_2(K;p,q).$$

Пусть Λ_K — множество тех точек $z \in \mathbb{C}$, для которых равенство $\Delta_K(p\,;z) = 0$ имеет место хотя бы для одной $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, и

$$m_K := \min_{p,q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_2(K;p,q), \quad M_K := \max_{p,q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_2(K;p,q), \quad \Sigma_K := \Lambda_K \cup [m_K; M_K].$$

При каждом $K \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_K$ вводим блочно-операторную матрицу $T(K;z)$, действующую в пространстве $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$:

$$T(K;z) := \begin{pmatrix} T_{00}(K;z) & T_{01}(K;z) \\ T_{10}(K;z) & T_{11}(K;z) \end{pmatrix},$$

где операторы $T_{ij}(K;z) : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i,j = 0,1$, определяются равенствами

$$T_{00}(K;z)g_0 = (1 + w_0(K) - z)g_0, \quad T_{01}(K;z)g_1 = \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_0(s)g_1(s)\,ds,$$

$$(T_{10}(K;z)g_0)(p) = -\frac{v_0(p)g_0}{\Delta_K(p;z)}, \quad (T_{11}(K;z)g_1)(p) = \frac{v_1(p)}{2\Delta_K(p;z)} \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v_1(s)g_1(s)\,ds}{w_2(K;p,s) - z}.$$

Здесь $g_i \in \mathcal{H}_i$, $i=0,1$. Заметим, что при каждом $K \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_K$ операторы $T_{00}(K;z), T_{01}(K;z)$ и $T_{10}(K;z)$ одномерны, а $T_{11}(K;z)$ принадлежит классу Гильберта — Шмидта, следовательно, $T(K;z)$ является компактным оператором.

Следующая теорема устанавливает связь между собственными значениями операторов $H(K)$ и $T(K;z)$.

Теорема 1. *Пусть $K \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Число $z_K \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_K$ является собственным значением оператора $H(K)$ тогда и только тогда, когда оператор $T(K;z_K)$ имеет собственное значение, равное единице, и их кратности совпадают.*

Отметим, что операторное уравнение $T(K;z)g = g$ обычно называется аналогом уравнения Фаддеева для собственных функций оператора $H(K)$.

Следующая теорема описывает местоположение существенного спектра оператора $H(K)$.

Теорема 2. *Пусть $K \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Существенный спектр $\sigma_{\mathrm{ess}}(H(K))$ оператора $H(K)$ совпадает с множеством Σ_K, т. е. имеет место равенство $\sigma_{\mathrm{ess}}(H(K)) = \Sigma_K$. Более того, множество Σ_K представляет собой объединение не более чем трех отрезков.*

Теперь введем новые подмножества существенного спектра оператора $H(K)$.

Определение 1. Множества Λ_K и $[m_K; M_K]$ называются двухчастичной и трехчастичной ветвями существенного спектра оператора $H(K)$, соответственно.

Одно из важных применений уравнения Фаддеева $T(K;z)g = g$ можно видеть при доказательстве включения $\sigma_{\mathrm{ess}}(H(K)) \subset \Sigma_K$, см. например [1]. А симметризованный вариант этого уравнения широко применяется при исследовании дискретного спектра оператора $H(K)$, точнее, при доказательстве конечности или бесконечности дискретного спектра оператора $H(K)$.

Литература

1. *Лакаев С. Н., Расулов Т. Х.* Модель в теории возмущений существенного спектра многочастичных операторов // Мат. заметки.—2003.—Т. 73, № 4.—С. 556–564.

ПОЛИНОМЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ В СМЫСЛЕ СОБОЛЕВА И ПОРОЖДЕННЫЕ ПОЛИНОМАМИ ЧЕБЫШЕВА ВТОРОГО РОДА

М. С. Султанахмедов
(Россия, Махачкала; ДНЦ РАН)

В работе И. И. Шарапудинова [1] рассмотрены полиномы, порожденные классическими полиномами Чебышева первого рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ и ортогональные по Соболеву в смысле следующего скалярного произведения:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1)\, g^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)\, g^{(r)}(t)\, \rho(t)\, dt, \tag{1}$$

когда весовая функция $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Характерной особенностью скалярных произведений типа Соболева такого вида является наличие особых точек, в окрестности которых «контролируется» поведение функций, ортогональных по Соболеву. Благодаря этому удается конструировать ряды Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, совпадающие с приближаемой функцией на концах отрезка ортогональности. Такие ряды оказываются удобным инструментом для представления решений задачи Коши для дифференциальных уравнений.

С другой стороны, в [2, 3] нами были проведены исследования аппроксимативных свойств специальных вейвлетов на основе классических полиномов Чебышева второго рода

$$U_n(x) = \frac{\sin{(n+1)} \arccos x}{\sin \arccos x},$$

также обладающих свойством совпадения с приближаемой функцией на концах отрезка ортогональности (в точках ± 1).

В продолжение этих исследований нами рассмотрены полиномы $U_{r,n}(x)$ $(n = 0, 1, \dots)$, порожденные полиномами Чебышева второго рода $U_n(x)$ и ортонормированные относительно скалярного произведения типа Соболева вида (1) при $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$. Получены явные выражения для полиномов $U_{r,n}(x)$, с помощью которых проведено исследование их асимптотических свойств.

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Асимптотические свойства полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных полиномами Якоби // Дагест. электрон. мат. изв.—2016.—Т. 6.—С. 1–24.
2. *Султанахмедов М. С.* Аппроксимативные свойства вейвлет-рядов Чебышева второго рода // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 3.—С. 56–64.
3. *Султанахмедов М. С.* Специальные вейвлеты на основе полиномов Чебышева второго рода // Изв. Сарат. ун-та. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2016.—Т. 16, № 1.—С. 34–41.

STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRUM AND DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF FIVE-ELECTRON SYSTEMS IN THE HUBBARD MODEL. DOUBLET STATES

S. M. Tashpulatov
(Uzbekistan, Tashkent; INP AS RUz)

The structure of essential spectrum and discrete spectra of the energy operator of three-electron and four-electron systems in the Hubbard model were investigated in [1, 2]. We consider the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model and describe the structure of essential spectrum and discrete spectra of the system in the doublet states. The system Hamiltonian

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^{+}_{m,\gamma}\, a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^{+}_{m,\gamma}\, a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^{+}_{m,\uparrow}\, a_{m,\uparrow}\, a^{+}_{m,\downarrow}\, a_{m,\downarrow}$$

acts in the antisymmetric Fo'ck space $\mathcal{H}_{as}$, where A is the electron energy at a lattice site, B is the transfer integral between neighboring sites, and τ denotes summation over the nearest neighbors, U is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, γ is the spin index, and $a^{+}_{m,\gamma}$, $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^{\nu}$. In the five-electron systems exists five type doublet states. Let φ_0 be the vacuum vector in the space $\mathcal{H}_{as}$. The first doublet state corresponds the basis functions ${}^{1}d^{1/2}_{m,n,p,q,r} = a^{+}_{m,\downarrow}a^{+}_{n,\downarrow}a^{+}_{p,\uparrow}a^{+}_{q,\uparrow}a^{+}_{r,\uparrow}\varphi_0$. The subspace ${}^{1}\widetilde{\mathcal{H}}^{d}_{1/2}$, corresponding to the first doublet state is the set of all vectors of the form ${}^{1}\psi^{d}_{1/2} = \sum_{m,n,p,q,r\in Z^{\nu}} \widetilde{f}(m,n,p,q,r)\,{}^{1}d^{1/2}_{m,n,p,q,r}$, $\widetilde{f} \in l^{as}_{2}$, where l^{as}_{2} is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^{\nu})^5)$.

Theorem 1. *The subspace ${}^{1}\widetilde{\mathcal{H}}^{d}_{1/2}$ is invariant with respect to the action of H, and the restriction ${}^{1}\overline{H}^{d}_{1/2}$ of H to the subspace ${}^{1}\widetilde{\mathcal{H}}^{d}_{1/2}$ is a bounded self-adjoint operator.*

In the quasimomentum representation, the operator ${}^{1}\overline{H}^{d}_{1/2}$ acts in the Hilbert space $L^{as}_{2}((T^{\nu})^5)$ as

$$\left({}^{1}\widetilde{H}^{d}_{1/2}\widetilde{f}\right)(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta) =$$
$$= \left\{5A + 2A\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i + \cos\mu_i + \cos\gamma_i + \cos\theta_i + \cos\eta_i]\right\}\widetilde{f}(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta) +$$
$$+ U\int_{T^{\nu}}\Big[\widetilde{f}(s,\mu,\lambda+\gamma-s,\theta,\eta) + \widetilde{f}(s,\mu,\gamma,\lambda+\theta-s,\eta) + \widetilde{f}(s,\mu,\gamma,\theta,\lambda+\eta-s) +$$
$$+ \widetilde{f}(\lambda,s,\mu+\gamma-s,\theta,\eta) + \widetilde{f}(\lambda,s,\gamma,\mu+\theta-s,\eta) + \widetilde{f}(\lambda,s,\gamma,\theta,\mu+\eta-s)\Big]\,ds,$$

where L^{as}_{2} is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^{\nu})^5)$, and λ, μ, γ, θ, η are the quasimomentums of electrons.

Theorem 2. *Let $\nu = 1$ and $U < 0$. Then the essential spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ is the union of four segments and the discrete spectrum is empty.*

Let $\nu = 3$, $U < 0$, $\Lambda_1 = \lambda + \gamma$, $\Lambda_2 = \mu + \theta$, and $\Lambda_i = (\Lambda_i^0, \Lambda_i^0, \Lambda_i^0)$, $i = 1, 2$.

Theorem 3. (a) *If*

$$U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}, \quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \textit{or} \quad U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}, \quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

then the essential spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ is the union of four segments and the discrete spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ is empty.

(b) *If*

$$-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \leqslant U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}, \quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

or

$$-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leqslant U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}, \quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

then the essential spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ is the union of two segments and the discrete spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ is empty.

(c) *If*

$$-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \leqslant U < 0, \ \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}, \ \textit{or} \ -\frac{6B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leqslant U < 0, \ \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

then the essential spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ is the single segment and the discrete spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ is empty.

Let ${}^2d^{1/2}_{m,n,p,q,r} = a^+_{m,\downarrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{p,\downarrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}\varphi_0$ be the basis functions corresponding to the second doublet state. The subspace ${}^2\mathcal{H}^d_{1/2}$, corresponding to the second doublet state is the set of all vectors of the form ${}^2\psi^d_{1/2} = \sum_{m,n,p,q,r\in Z^\nu} \widetilde{f}(m,n,p,q,r){}^2d^{1/2}_{m,n,p,q,r}$. Denote ${}^2H^d_{1/2}$ the restriction of operator H to the subspace ${}^2\mathcal{H}^d_{1/2}$. Let $\Lambda_1 = \lambda + \mu$, $\Lambda_2 = \gamma + \theta$.

Theorem 4. *If $\nu = 1$ and $U < 0$, then the essential spectra of the operator ${}^2H^d_{1/2}$ is the union of seven segments and the discrete spectrum of operator ${}^2H^d_{1/2}$ is consists of no more one point.*

Let $\nu = 3$, $U < 0$, $\Lambda_3 = \lambda + \mu$, $\Lambda_4 = \gamma + \theta$, and $\Lambda_j = (\Lambda_j^0, \Lambda_j^0, \Lambda_j^0)$, $j = 3, 4$.

Theorem 5. (a) *If $\nu = 3$ and*

$$U < -\frac{3B}{W}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_4^0}{2},$$

or

$$U < -\frac{3B}{W}, \quad \cos\frac{\Lambda_4^0}{2} < \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_4^0}{2},$$

or

$$U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_4^0}{2},$$

then the essential spectra of operator ${}^2H^d_{1/2}$ *is the union of seven segments and the discrete spectrum of operator* ${}^2H^d_{1/2}$ *is consists of no more one point.*

(b) *If* $\nu = 3$ *and*

$$-\frac{3B}{W} \leqslant U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} \geqslant \cos\frac{\Lambda_4^0}{2},$$

or

$$-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leqslant U < -\frac{3B}{W}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_4^0}{2},$$

or

$$-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_4^0}{2}}{W} \leqslant U < -\frac{3B}{W}, \quad \cos\frac{\Lambda_4^0}{2} > \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_4^0}{2},$$

or

$$-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leqslant U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda_4^0}{2}}{W}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_4^0}{2},$$

then the essential spectra of operator ${}^2H^d_{1/2}$ *is the union of four segments and the discrete spectrum of operator* ${}^2H^d_{1/2}$ *is empty.*

(c) *If*

$$-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leqslant U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda_4^0}{2}}{W}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \frac{1}{2},$$

or

$$-\frac{3B}{W} \leqslant U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_4^0}{2},$$

or

$$-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_4^0}{2}}{W} \leqslant U < -\frac{3B}{W}, \quad \cos\frac{\Lambda_4^0}{2} < \frac{1}{2},$$

then the essential spectra of operator ${}^2H^d_{1/2}$ *is the union of two segments and the discrete spectrum of operator* ${}^2H^d_{1/2}$ *is empty.*

(d) *If*

$$-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_4^0}{2}}{W} \leqslant U < 0, \quad \cos\frac{\Lambda_4^0}{2} < \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_4^0}{2},$$

or

$$-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leqslant U < 0, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_4^0}{2},$$

or

$$-\frac{3B}{W} \leqslant U < 0, \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_4^0}{2}, \quad \cos\frac{\Lambda_4^0}{2} > \frac{1}{2},$$

then the essential spectra of operator ${}^2H^d_{1/2}$ *is single segment and the discrete spectrum of operator* ${}^2H^d_{1/2}$ *is empty.*

References

1. *Tashpulatov S. M.* Spectral properties of three-electron systems in the Hubbard Model // Theor. Math. Phys.—2014.—Vol. 179, № 3.—P. 387–405.
2. *Tashpulatov S. M.* The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state // Lobachevskii J. Math.—2017.—Vol. 38, № 3.—P. 530–541.

ОДНОВРЕМЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ НЕТОЧНО ЗАДАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ НОРМЕ

С. А. Унучек
(Россия, Москва; МАИ (НИУ))

Пусть $l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h>0$, — пространство последовательностей $x=\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ таких, что $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|x_j|^2<\infty$, с нормой

$$\|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}=\left(h\sum_{j\in\mathbb{Z}}|x_j|^2\right)^{1/2}.$$

Оператор разделенных разностей определяется равенством:

$$\Delta_h^1 x=\Delta_h x=\left\{\frac{x_{j+1}-x_j}{h}\right\}_{j\in\mathbb{Z}},\quad \Delta_h^m x=\Delta_h\big(\Delta_h^{m-1}x\big).$$

Преобразованием Фурье последовательности $x=\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ является функция

$$(Fx)(\omega)=h\sum_{j\in\mathbb{Z}}x_j e^{-ijh\omega}\in L_2\big([-\pi/h,\pi/h]\big),$$

а оператора разделенной разности первого порядка — функция

$$\big(F\Delta_h^1 x\big)(\omega)=h\sum_{j\in Z}\frac{x_{j+1}-x_j}{h}\,e^{-ijh\omega}=\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\,(Fx)(\omega),$$

преобразованием Фурье оператора разделенной разности порядка m — функция

$$\big(F\Delta_h^m x\big)(\omega)=\frac{(e^{ih\omega}-1)^m}{h^m}\,(Fx)(\omega).$$

Пусть $n\in\mathbf{N}$. Рассмотрим класс последовательностей с ограниченной n-й разделенной разностью

$$\mathcal{W}_{2,h}^n=\big\{x\in l_{2,h}(\mathbb{Z}):\ \big\|\Delta_h^n x\big\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\leqslant 1\big\}.$$

Ставится задача одновременного оптимального восстановления операторов всех разностей $(\Delta_h^1 x,\Delta_h^2 x,\dots,\Delta_h^{n-1}x)$ последовательности $x\in\mathcal{W}_{2,h}^n$ при условии, что последовательность x задана неточно [1], т. е. известна последовательность $y\in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ такая, что $\|x-y\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\leqslant\delta$, $\delta>0$.

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения $\varphi(y)=(\varphi_1(y),\varphi_2(y),\dots,\varphi_{n-1}(y))$, $\varphi_k(y):\ l_{2,h}(\mathbb{Z})\to l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $1\leqslant k\leqslant n-1$.

Положим $\overline{\Delta}=(\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_{n-1})$.

Погрешностью метода φ назовем величину

$$e\big(\mathcal{W}^n_{2,h}, \overline{\Delta}, \delta, \varphi\big) = \sup_{\substack{x\in\mathcal{W}^n_{2,h},\, y\in l_{2,h}(\mathbb{Z}),\\ \|x-y\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\leqslant\delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\|\Delta^k_h x - \varphi_k(y)\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}}\,,$$

где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})$, $p_k \geqslant 0$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, — весовые коэффициенты, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению оператора какой-либо разности.

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E\big(\mathcal{W}^n_{2,h}, \overline{\Delta}, \delta\big) = \inf_{\varphi\colon l_{2,h}(\mathbb{Z})\to(l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n} e\big(\mathcal{W}^n_{2,h}, \overline{\Delta}, \delta, \varphi\big).$$

Метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом [2, 3].

Теорема 1. *Пусть* $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ *и* $\delta > 0$. *Тогда*

$$E\big(\mathcal{W}^n_{2,h}, \overline{\Delta}, \delta\big) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \delta^{\frac{2(n-k)}{n}}\right)^{1/2}, & \delta \geqslant \left(\dfrac{h}{2}\right)^n, \\ \delta\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\dfrac{2}{h}\right)^{2k}\right)^{1/2}, & \delta < \left(\dfrac{h}{2}\right)^n. \end{cases}$$

При $\delta < \left(\frac{h}{2}\right)^n$ *метод* $\widehat{\varphi}(y) = \Delta^k_h y$ *является оптимальным. При* $\delta \geqslant \left(\frac{h}{2}\right)^n$ *все методы* $\widehat{\varphi}_k(y) = \Delta^k_h F^{-1}(\alpha_k(\omega) Fy(\omega))$, *где*

$$\alpha_k(\omega) = \frac{\widehat{\lambda}_1 + \theta_k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)}, \quad t(\omega) = \frac{4\sin^2\frac{\omega h}{2}}{h^2},$$

а $\theta_k(\omega)$ *для почти всех* ω *удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega)\big|\theta_k(\omega)\big|^2 \leqslant \widehat{\lambda}_1\,\widehat{\lambda}_2\,t^n(\omega)\left(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\,t^n(\omega) - \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega)\right),$$

в котором

$$\widehat{\lambda}_1 = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \delta^{-2\frac{k}{n}}\left(1 - \frac{k}{n}\right), \quad \widehat{\lambda}_2 = \sum_{k=1}^{n-1} p_k\,\frac{k}{n}\,\delta^{2\frac{n-k}{n}},$$

являются оптимальными.

Литература

1. *Унучек С. А.* Оптимальное восстановление разделенных разностей по неточно заданной последовательности // Диф. уравнения.—2015.—Т. 51, № 7.—С. 951–957.
2. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление линейных операторов по неточной информации // Мат. форум. Исслед. по выпуклому анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2009.—С. 158–192.—(Итоги науки. Южный федеральный округ. Т. 2).
3. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди — Литтлвуда — Полиа и восстановление производных по неточной информации // Докл. РАН.—2011.—Т. 438, № 3.—С. 300–302.

2-LOCAL ISOMETRIES ON NON-COMMUTATIVE LORENTZ SPACES

V. I. Chilin
(Uzbekistan, Tashkent; NUUz)

Let $\mathcal{M}$ be a von Neumann algebra on Hilbert space $\mathcal{H}$ equipped with a faithful normal semifinite trace τ (see, for example, [1]), and let $\mathbf{1}$ be the unit in $\mathcal{M}$. A linear operator $x : \mathfrak{D}(x) \to \mathcal{H}$, where the domain $\mathfrak{D}(x)$ of x is a linear subspace of $\mathcal{H}$, is said to be *affiliated* with $\mathcal{M}$ if $yx \subseteq xy$ for all $y \in \mathcal{M}'$, where $\mathcal{M}'$ is the commutant of $\mathcal{M}$. A linear operator $x : \mathfrak{D}(x) \to \mathcal{H}$ is termed *measurable* with respect to $\mathcal{M}$ if x is closed, densely defined, affiliated with $\mathcal{M}$ and there exists a sequence $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ in the lattice $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ of all projections of $\mathcal{M}$ such that $p_n \uparrow \mathbf{1}$, $p_n(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{D}(x)$ and $\mathbf{1} - p_n$ is a finite projection (with respect to $\mathcal{M}$) for all n. The collection $S(\mathcal{M})$ of all measurable operators affiliated with $\mathcal{M}$ is a unital $*$-algebra with respect to strong sums and products.

Let x be a self-adjoint operator affiliated with $\mathcal{M}$ and let $\{e^x\}$ be a spectral measure of x. It is well known that if x is a closed operator affiliated with $\mathcal{M}$ with the polar decomposition $x = u|x|$, then $u \in \mathcal{M}$ and $e \in \mathcal{M}$ for all projections $e \in \{e^{|x|}\}$. Moreover, $x \in S(\mathcal{M})$ if and only if x is closed, densely defined, affiliated with $\mathcal{M}$ and $e^{|x|}(\lambda, \infty)$ is a finite projection for some $\lambda > 0$.

An operator $x \in S(\mathcal{M})$ is called τ-measurable if there exists a sequence $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ such that $p_n \uparrow \mathbf{1}$, $p_n(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{D}(x)$ and $\tau(\mathbf{1} - p_n) < \infty$ for all n. The collection $S(\mathcal{M}, \tau)$ of all τ-measurable operators is a unital $*$-subalgebra of $S(\mathcal{M})$. It is well known that a linear operator x belongs to $S(\mathcal{M}, \tau)$ if and only if $x \in S(\mathcal{M})$ and there exists $\lambda > 0$ such that $\tau(e^{|x|}(\lambda, \infty)) < \infty$.

The generalized singular value function $\mu(x) : t \to \mu(t; x)$, $t > 0$, of the operator $x \in S(\mathcal{M}, \tau)$ is defined by setting

$$\mu(t; x) = \inf\big\{\|xp\| : p \in \mathcal{P}(\mathcal{M}),\ \tau(\mathbf{1} - p) \leqslant t\big\} = \inf\big\{s > 0 : \tau(e^x\big(s, \infty)\big) \leqslant t\big\}.$$

Let φ be an increasing concave continuous function on $[0, \infty)$ with $\varphi(0) = 0$, and let

$$\Lambda_\varphi(\mathcal{M}, \tau) = \left\{x \in S(\mathcal{M}, \tau) : \|x\|_\varphi = \int\limits_0^\infty \mu(t; x)\, d\varphi(t) < \infty\right\}$$

be the corresponding non-commutative Lorentz space (see, for example, [2]).

It is known that in the case $\tau(\mathbf{1}) < \infty$ every surjective isometry

$$V : \ \Lambda_\varphi(\mathcal{M}, \tau) \to \Lambda_\varphi(\mathcal{M}, \tau)$$

has the form

$$V(x) = u \cdot \Phi(x)$$

for all $x \in \Lambda_\varphi(\mathcal{M}, \tau)$, where $u \in \mathcal{M}$ is an unitary operator and $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ is a Jordan isomorphism [3, Theorem 5.1].

Let $(X, \|\cdot\|_X)$ be an arbitrary complex Banach space. A surjective (not necessarily linear) mapping $T\colon X \to X$ is called a surjective 2-local isometry [4], if for any $x, y \in X$ there exists a surjective linear isometry $V_{x,y}$ on X such that

$$T(x) = V_{x,y}(x) \quad \text{and} \quad T(y) = V_{x,y}(y).$$

It is clear that every surjective linear isometry on X is automatically a surjective 2-local isometry on X. In addition,

$$T(\lambda x) = V_{x,\lambda x}(\lambda x) = \lambda V_{x,\lambda x}(x) = \lambda T(x)$$

for any $x \in X$ and $\lambda \in \mathbb{C}$. Thus, in order to establish linearity of a 2-local isometry T, it is sufficient to show that $T(x+y) = T(x) + T(y)$ for all $x, y \in X$. Since

$$\big\|T(x) - T(y)\big\|_X = \big\|V_{x,y}(x) - V_{x,y}(y)\big\|_X = \big\|x - y\big\|_X$$

for any $x, y \in X$, it follows in the case a real Banach space X (see Mazur–Ulam Theorem [5, Ch. I, §1.3, Theorem 1.3.5]) that every surjective 2-local isometry on X is a linear. For complex Banach spaces, this fact is not valid.

Using Theorem 5.1 [3] and repeating the proof of Theorem 5.3 [6], we obtain the following description of surjective 2-local isometry on non-commutative Lorentz spaces.

Theorem 1. *Let $\mathcal{M}$ be an arbitrary von Neumann algebra with a faithful normal finite trace τ, and let $(\Lambda_\varphi(\mathcal{M},\tau), \|\cdot\|_\varphi)$ be a non-commutative Lorentz space. Then every surjective 2-local isometry on $\Lambda_\varphi(\mathcal{M},\tau)$ is a linear isometry on $\Lambda_\varphi(\mathcal{M},\tau)$, that is, there exist an unitary operator $u \in \mathcal{M}$ and a Jordan isomorphism $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ such that*

$$V(x) = u \cdot \Phi(x)$$

for all $x \in \Lambda_\varphi(\mathcal{M},\tau)$.

In the case when an algebra $\mathcal{M}$ is an algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ of all bounded linear operators, acting in Hilbert space $\mathcal{H}$, the version of the Theorem 1 was obtained in [6].

References

1. *Takesaki M.* Theory of Operator Algebras I.—N. Y.: Springer-Verlag, 1979.
2. *Chilin V., Sukochev F.* Weak convergence in non-commutative symmetric spaces // J. Operator Theory.—1994.—Vol. 31.—P. 35–55.
3. *Chilin V. I., Medzhitov A. M., Sukochev F. A.* Isometries of Non-Commutative Lorentz Spaces // Math. Z.—1989.—Vol. 200.—P. 527–545.
4. *Molnar L.*, 2-local isometries of some operator algebras. // Proc. Edinb. Math. Soc.—2002.—Vol. 45.—P. 349–352.
5. *Fleming R. J., Jamison J. E* Isometries on Banach Spaces: Function Spaces.—Chapman & Hall/CRC, 2003.
6. *Aminov B., Chilin V.* Isometries of perfect norm ideals of compact // Studia Math.—2018.—Vol. 241, № 1.—P. 87–99.

О РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ СУММ ФУРЬЕ — ЯКОБИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Т. Н. Шах-Эмиров

(Россия, Махачкала; ДНЦ РАН)

Пусть $p = p(x) \geqslant 1$ — измеримая существенно ограниченная функция, заданная на множестве $E = [-1, 1]$, $\mu(x) = \mu(x, \alpha, \beta) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ — весовая функция. Следуя работе [1], через $L_{\mu}^{p(x)}(E)$ обозначим пространство функций, измеримых на E и таких, что

$$\|f\|_{p(\cdot),\mu}(E) = \inf\left\{\alpha > 0 : \int\limits_E \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} \mu(x)\,dx \leqslant 1\right\} < \infty.$$

Далее, через $\mathcal{P}(E)$ обозначим класс переменных показателей $p = p(x)$, для которых выполнены следующие условия:

1) условие Дини — Липшица:

$$\bigl|p(x) - p(y)\bigr| \leqslant \frac{d}{-\ln|x-y|}, \quad |x-y| \leqslant \frac{1}{2}, \quad d > 0,\ x, y \in E;$$

2) $\underline{p}([-1,1]) = \min_{x\in[-1,1]} p(x) > 1$;

3) для p найдутся такие положительные (сколь угодно малые) числа $\delta_i = \delta_i(p)$ $(i = 1, 2)$, что $p(x) = p(-1)$ при $x \in [-1, -1+\delta_1]$ и $p(x) = p(1)$ при $x \in [1-\delta_2, 1]$.

Функции $f \in L_{\mu}^{p(x)}(E)$ сопоставим ряд Фурье — Якоби:

$$f \backsim \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{\alpha,\beta} P_k^{\alpha,\beta}(x), \tag{1}$$

где

$$f_k^{\alpha,\beta} = \int\limits_{-1}^{1} f(t) P_k^{\alpha,\beta}(t)\mu(t)\,dt.$$

Частичную сумму ряда (1) обозначим через

$$S_n^{\alpha,\beta}(f) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{\alpha,\beta} P_k^{\alpha,\beta}(x).$$

В работе [2] при $\alpha, \beta > -\frac{1}{2}$ было показано, что полиномы Якоби $P_k^{\alpha,\beta}$ образуют базис в пространстве $L_{\mu}^{p(x)}$. В настоящей работе мы исследуем задачу о базисности системы полиномов Якоби в $L_{\mu}^{p(x)}(E)$ для случая, когда $-1 < \alpha, \beta < -\frac{1}{2}$

и $p(x) \in \mathcal{P}(E)$. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть*

$$-1 < \alpha, \beta < -\frac{1}{2}, \quad \mu(x) = \mu(x, \alpha, \beta) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},$$

$$p \in \mathcal{P}(E), \quad 1 < p(1) < \infty, \quad 1 < p(-1) < \infty.$$

Тогда

$$\left\| S_n^{\alpha,\beta}(f) \right\|_{p(\cdot),\mu}(E) \leqslant c(\alpha, \beta, p) \, \|f\|_{p(\cdot),\mu}(E).$$

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Мат. заметки.—1979.—Т. 26, № 4.—С. 613–632.
2. *Шарапудинов И. И., Шах-Эмиров Т. Н.* Сходимость рядов Фурье по полиномам Якоби в весовом пространстве Лебега с переменным показателем // Дагестан. электрон. мат. изв.—2017.—Вып. 8.—С. 27–47.

ПОЧТИ ИНЪЕКТИВНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ

М. А. Шубарин
(Россия, Ростов-на-дону; ЮФУ)

1. Пусть $\mathcal{K}$ — категория, объектами в которой являются пространства Фреше и морфизмами — произвольные линейные непрерывные операторы, действующие в этих пространствах. Объект этой категории X называют [1, с. 14] (по терминологии А. Пича [2, п. C. 3.1] это пространство обладает свойством расширения) инъективным объектом в категории $\mathcal{K}$, если выполняется следующее условие: для произвольной инъекции $J : E_0 \to E$ и любого произвольного морфизма $S_0 : E_0 \to F$ существует линейный оператор $S : E \to F$ такой, что $S_0 = SJ_0$.

Пространство Фреше X называют инъективным расширением пространства X_0, если X_0 изоморфно подпространству в X и X является инъективным объектом категории $\mathcal{K}$. Наконец, говорят, что в категории $\mathcal{K}$ много инъективных объектов, если каждый объект этой категории изоморфен подпространству в инъективном объекте этой категории.

Пример 1 [2, п. C. 3.1]. Пусть $\mathcal{K}$ — категория банаховых пространств. Пусть X — банахово пространство. Через $X^{inj} := l_\infty(U^\circ)$ обозначим множество ограниченных функций, определенных на поляре U° единичного шара U в X. Норма в X^{inj} определяется равенством: $\|u\| := \sup\{|u(x')| : x' \in U^\circ\}$. Построенное пространство является инъективным расширение пространства X. Следовательно в категории банаховых пространств много инъективных объектов.

Пример 2 [1, § 4]. Пусть $\mathcal{K}$ — категория пространств Фреше в [1] доказывается, что в этой категории много инъективных объектов. Более того, в [3] дается полное описание инъективных объектов в этой категории. Следует отметить, что в инъективных расширениях пространств Фреше, построенных в [1, 3], нет непрерывных норм.

2. В докладе рассматриваются пространства Фреше, обладающие рядом свойств инъективных расширений, но не являющиеся таковыми. Эти пространства реализованы как весовые пространства функций, определенные в области и названные автором (в случае выполнения ряда дополнительных условий) «почти инъективными расширениями пространства Фреше».

Пусть D — область в банаховом пространстве и $\mathcal{F} = (F_p)$ — счетное семейство непрерывных функций $F_p : D \to \mathbb{R}$. Через $C(D, \mathcal{F})$ обозначим множество непрерывных функций $f : D \to \mathbb{R}$, для которых конечны все нормы $\|f|C(D,\mathcal{F})\|_p := \sup_{x\in D} |f(x)|e^{-F_p(x)}$.

Относительно подобных пространств представляет интерес найти ответ на следующие вопросы.

1) При каких условиях пространство Фреше изоморфно подпространству в $C(D, \mathcal{F})$. Эти условия формулируются в терминах относительного пополнения пространства Фреше.

2) Какие интерполяционные свойства пространства Фреше наследуются его почти инъективными расширениями. В докладе предполагается рассмотрение условий принадлежности почти инъективного расширения пространства Фреше классам пространств (D_j) и (Ω_j), $j = 1, 2$.

3) При каких условиях выполняется следующее условие: для произвольного пространства фреше Y и любого линейного оператора $S_0 : X_0 \to Y$ существует линейный оператор $S : C(D, \mathcal{F}) \to Y$ такой, что $S_0 = SJ_0$ (здесь $J : X_0 \to C(D, \mathcal{F})$ — изоморфизм пространства X_0 и подходящего продпространства в $C(D, \mathcal{F})$).

Литература

1. *Паламодов В. П.* Гомологические методы в теории локально выпуклых пространств // Успехи мат. наук.—1971.—Т. 26, № 1 (157).—С. 3–65.
2. *Пич А.* Операторные идеалы.—М.: Мир, 1982.—536 с.
3. *Гейлер В. А.* О проективных объектах в категории локально выпуклых пространств // Функц. анализ и его прил.— 1972.—Т. 6, № 2.—С. 79–80.

О ДИЛАТАЦИИ КОВАРИАНТНЫХ ВПОЛНЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Я. В. Эльсаев
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Вполне положительные отображения в операторных алгебрах и модулях в последние годы все больше привлекают внимание исследователей (см. [1–3]). Причина этого феномена состоит в том, что данный класс отображений используется в теории квантовой информации и квантовых вычислений. В докладе рассматриваются полуторалинейные формы, определенные на декартовом квадрате гильбертова C^*-модуля $\mathcal{M}$ над C^*-алгеброй B и принимающие значение в алгебре B. Множество таких полуторалинейных форм обозначается $\mathcal{S}_B(\mathcal{M})$. Рассматриваются ковариантные, относительно действия некоторой группы симметрии, вполне положительные отображения, заданные на унитальной локальной C^*-алгебре A и принимающие значение в $\mathcal{S}_B(\mathcal{M})$. Данный класс отображений можно интерпретировать как обобщение ковариантных квантовых инструментов, широко применяемых в современной квантовой механике и квантовой теории поля. В докладе представлен результат о дилатации для указанного класса отображений.

Теорема. *Пусть A — унитальная локальная C^*-алгебра, $\mathcal{M}$ — гильбертов C^*-модуль над унитальной C^*-алгеброй B, G — группа, η — действие G на A, U — представление G в $\mathcal{M}$ и $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ — (η, U)-ковариантное, вполне положительное отображение. Тогда существуют гильбертов C^*-модуль $\mathcal{N}$ над алгеброй B, линейный оператор $\mathcal{D} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, представление $\overline{U} : G \to \mathcal{U}_B(\mathcal{N})$ и $*$-гомоморфизм $\pi : A \to L_B(\mathcal{N})$ такие, что для любых $u, v \in \mathcal{M}$, $x \in A$ выполняются условия:*

1) $\mathcal{N} = [\pi(A)\mathcal{D}(\mathcal{M})]$;
2) $\Phi_x(u, v) = \langle \mathcal{D}u, \pi(x)\mathcal{D}v\rangle$, $u, v \in \mathcal{M}$, $x \in A$;
3) $\mathcal{D}U(g) = \overline{U}(g)\mathcal{D}$ *для любого* $g \in G$;
4) $\overline{U}(g)\pi(x) = (\pi \circ \eta(g)(x)\overline{U}(g)$ *для любых* $g \in G$, $x \in A$.

Литература

1. *Калиниченко А. В., Малиев И. Н., Плиев М. А.* Модульные полуторалинейные формы и обобщенное представление Стайнспринга // Изв. вузов. Математика.—2018.—Т. 62, № 12.—С. 50–59.
2. *Малиев И. Н., Плиев М. А.* О представлении типа Стайнспринга для операторов в гильбертовых модулях над локальными C^*-алгебрами// Изв. вузов. Математика.—2012.—Т. 56, № 12.—С. 51–58.
3. *Плиев М. А., Цопанов И. Д.* О представлении типа Стайнспринга для n-наборов вполне положительных отображений в гильбертовых C^*-модулях// Изв. вузов. Математика.—2014.—Т. 58, № 11. С. 41–49.

Секция II

Дифференциальные и интегральные уравнения

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. Х. Аттаев

(Россия, Нальчик; ИПМА КБНЦ РАН)

Доклад посвящен исследованию нагруженного гиперболического уравнения [1, 2] с одномерным волновым оператором в главной части. Нагрузка распространяется вдоль пары пересекающихся характеристик с постоянной скоростью. Найдены условия однозначной разрешимости задачи Коши с данными на любой из характеристик и пострено явное представление решения исследуемой задачи.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения.—М.: Наука, 2012.—232 с.
2. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений.—Алматы: Ғылым, 2010.—334 с.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

М. Х. Бештоков
(Россия, Нальчик; ИПМА КБНЦ РАН)

1. Постановка нелокальной краевой задачи

В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим нелокальную краевую задачу для нагруженного псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто порядка α:

$$\begin{gathered} \partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \\ - q(x,t)u(x_0,t) + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T, \end{gathered} \tag{1}$$

$$\Pi(0,t) = \beta(t)u(0,t) - \mu_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$\partial_{0t}^{\alpha} \int\limits_0^l u(x,t)\,dx = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где

$$0 < c_0 \leqslant k(x,t), \eta(x) \leqslant c_1, \quad |q(x,t)|,\ |r(x,t)|,\ |r_x(x,t)|,\ |k_x(x,t)| \leqslant c_2, \tag{5}$$

$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\,d\tau$ — дробная производная в смысле Герасимова — Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, c_i, $i = 0,1,2,$ — положительные постоянные числа.

В дальнейшем будем предполагать, что задача (1)–(4) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости, обеспечивающие нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

2. Априорная оценка в дифференциальной форме

Для получения априорной оценки решения задачи (1)–(4) в дифференциальной форме введем скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$(a,b) = \int\limits_0^l ab\,dx, \quad (a,a) = \|a\|_0^2,$$

где a, b — заданные на $[0,l]$ функции.

Умножим уравнение (1) скалярно на u:

$$\big(\partial_{0t}^{\alpha}u,u\big)=\big((ku_x)_x,u\big)+\big(\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)_x,u\big)+\big(ru_x,u\big)-\big(qu(x_0,t),u\big)+\big(f,u\big). \quad (6)$$

Пользуясь неравенством Коши с ε [1, с. 100], леммой 1 из [2], после несложных преобразований из (6) с учетом (2), (3) находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+\|u_x\|_0^2\leqslant M_1\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+M_2\|f\|_0^2, \quad (7)$$

где $\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}=\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2$.

Применяя к обеим частям (7) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, находим

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2\leqslant M_3D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+M_4\Big(D_{0t}^{-\alpha}\|f\|_0^2+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big), \quad (8)$$

где M_3, M_4 — положительные числа, зависящие только от входных данных задачи (1)–(4), $D_{0t}^{-\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ — дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$.

На основании [2, лемма 2] из (8) находим априорную оценку

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2\leqslant M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\|f\|_0^2+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big), \quad (9)$$

где M — положительная постоянная, зависящая от входных данных задачи (1)–(4), $D_{0t}^{-\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ — дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$.

Теорема. *Если* $k(x,t)\in C^{1,0}(Q_T)$, $\eta(x)\in C^1[0,l]$, $r(x,t),q(x,t),f(x,t)\in C(Q_T)$, $u(x,t)\in C^{(2,0)}(Q_T)\cap C^{(1,0)}(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(Q_T)$ *и выполнены условия* (5), *тогда для решения задачи* (1)–(4) *справедлива априорная оценка* (9).

Из априорной оценки (9) следуют единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1)–(4) от входных данных в смысле нормы

$$\|u\|_1^2=\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2.$$

Литература

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.— М.: Наука, 1983.
2. *Алиханов А. А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Диф. уравнения.—2010.—Т. 46, № 5.—С. 658–664.

О КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. О. Ватульян (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
С. А. Нестеров (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Слоистые конструкции широко применяются в различных областях техники. Обычно слоистые конструкции изготовляют из однородных материалов. Однако в последнее время для задания конструкции необходимых свойств один из слоев все чаще изготавливают из функционально-градиентных материалов (ФГМ). При этом в силу сложности изготовления, конструкции в состав которых входят ФГМ, необходимо исследовать на соответствие полученных и требуемых законов изменения теплофизических свойств. В случае неоднородных материалов теплофизические характеристики можно определить только из решения коэффициентных обратных задач (КОЗ) теплопроводности. Идентификацию теплофизических свойств слоистых и функционально-градиентных материалов исследовали во многих работах. Наиболее распространенный подход к решению КОЗ теплопроводности для неоднородных материалов основан на применении хорошо себя зарекомендовавших итерационных алгоритмов. В тоже время разрабатываются и альтернативные методы решения.

Поставлена коэффициентная обратная задача теплопроводности об определении теплофизических характеристик функционально-градиентной части двусоставного слоя. Входной информацией служат данные измерения температуры на верхней грани слоя. После преобразования Лапласа и обезразмеривания прямая задача теплопроводности решается на основе проекционного метода Галеркина. Для решения обратной задачи применяются два подхода. Первый подход основан на применении алгебраизации. Второй подход является развитием ранее разработанного итерационного подхода, на каждом шаге которого решается интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода.

Проведены вычислительные эксперименты по восстановлению различных законов изменения теплофизических характеристик. Даны практические советы по выбору временного интервала по съему дополнительной информации. Проведено сравнение двух предложенных подходов. Выяснено, что в случае монотонных функций метод алгебраизации позволяет производить идентификацию теплофизических характеристик с меньшими во много раз затратами машинного времени по сравнению с итерационным подходом. Для немонотонных функций полученное методом алгебраизации решение может служить начальным приближением в итерационном процессе.

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. А. Высоцкая
(Россия, Воронеж; ВГУ)

Пусть $C_b(\mathbb{J}, X)$ — банахово пространство непрерывных ограниченных функций, определенных на $\mathbb{J}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве X.

Замкнутое подпространство равномерно непрерывных ограниченных функций обозначим через $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Через $C_0(\mathbb{J}, X)$ обозначим (замкнутое) подпространство функций $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$, исчезающих на бесконечности, т. е.

$$\lim_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0, \quad x \in C_b(\mathbb{J}, X).$$

В пространстве $C_b(\mathbb{J}, X)$ рассмотрим операторы сдвига

$$S(t) : C_b(\mathbb{J}, X) \to C_b(\mathbb{J}, X), \quad (S(t)x)(\tau) = x(\tau + t), \quad \tau \in \mathbb{J},\ t \in \mathbb{J},\ x \in C_b(\mathbb{J}, X).$$

Функцию x из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ назовем *интегрально убывающей на бесконечности*, если

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \big\|x(t+s)\big\|\, ds = 0,$$

и будем обозначать символом $C_{0,\,\mathrm{int}} = C_{0,\,\mathrm{int}}(\mathbb{J}, X)$.

Определение 1. Далее символом $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое подпространство функций из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, обладающих свойствами:

1) $S(t)x \in \mathcal{C}_0$, $t \in \mathbb{R}$ и любой функции $x \in \mathcal{C}_0$;
2) $C_0 \subset \mathcal{C}_0 \subset C_{0,\,\mathrm{int}}$;
3) $e_\lambda x \in \mathcal{C}_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, где $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 2. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности* функцией относительно подпространства $\mathcal{C}_0$, если для каждого $\alpha \in \mathbb{J}$ выполнено $S(\alpha)x - x \in \mathcal{C}_0$.

Отметим, что А. Г. Баскаков [1] давал определение медленно меняющейся функции с использованием подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$. Свойства медленно меняющихся функций относительно подпространства C_0 также изучались в работах [2–4].

Определение 3. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}$ называется *ε-периодом функции* $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если существует функция $x_0 \in \mathcal{C}_0$ такая, что $\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon$.

Определение 4. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{C}_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество ее ε-периодов на бесконечности относительно плотно [1] на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим уравнение

$$x(t+1) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ и $A \in \operatorname{End} X$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для оператора $A \in \operatorname{End} X$ выполнено условие $\sigma(A) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}$, где $\gamma_k = e^{i\lambda_k}$, $1 \leqslant k \leqslant N$ и $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| = 1\}$. Тогда равномерно непрерывное ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ разностного уравнения является почти периодической на бесконечности функцией относительно подпространства $\mathcal{C}_0$ и имеет вид $x(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$, где x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — медленно меняющиеся функции [1] относительно пространства $\mathcal{C}_0$.*

Литература

1. *Баскаков А. Г., Калужина Н. С.* Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // Мат. заметки.—2012.—Т. 92, № 5.—С. 643–661.
2. *Баскаков А. Г., Струкова И. И., Тришина И. А.* Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн.—2018.—Т. 59, № 2.—С. 293–308.
3. *Тришина И. А.* Почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2017.—Т. 17, № 4.—С. 402–418.
4. *Тришина И. А.* Медленно меняющиеся на бесконечности функции // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2017.—№ 4.—С. 134–144.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ДИСКРЕТНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Л. Х. Гадзова
(Россия, Нальчик; ИПМА КБНЦ РАН)

В интервале $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\alpha_j \in \,]1,2[\,$, $\lambda, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\beta_1 > 0$, $\alpha_1 > \ldots > \alpha_m$, $\partial_{0x}^{\gamma} u(x)$ — производная Капуто [1, с. 11]:

$$\partial_{0x}^{\gamma} u(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_0^x u^{(n)}(t)(x-t)^{n-\gamma-1} dt, \quad n-1 < \gamma \leqslant n.$$

В данной работе исследуется задача: найти регулярное решение уравнения (1) в интервале $]0,1[\,$, удовлетворяющее условиям

$$u(0) = u_0, \quad u(1) - \sum_{k=1}^{n} a_k u(x_k) = u_1, \quad x_k \in (0,1),$$

где u_0, u_1, a_k — заданные действительные числа.

Доказана теорема существования и единственности решения, получено явное представление решения поставленной задачи.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СТЕПАНОВА[1]

В. А. Горлов (Россия, Воронеж; ВУНЦ ВВС «ВВА»),
А. В. Макарова (Россия, Воронеж; ВУНЦ ВВС «ВВА»)

С целью сглаживания изображения и одновременно улучшения важных элементов, таких как границы, применяется диффузионный процесс, в котором диффузия управляется производными формирующегося изображения [1].

Теорема. *Уравнение*

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \operatorname{div}(D\nabla u(t,x)),$$

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

разрешимо в пространствах $\overline{S}_{\bar{p},\bar{l}}(R^n)$ *и имеет место оценка*

$$\left\|u(t,x)\right\|_{\overline{S}_{\bar{p},\bar{l}}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \left\|\varphi\right\|_{\overline{S}_{\bar{p},\bar{l}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Литература

1. *Костин А. В.* К теории функциональных пространств Степанова / А. В. Костин, В. А. Костин.— Воронеж: Изд-во ВГУ, 2007.—259 с.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 18-01-00048.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ[1]

С. З. Джамалов
(Узбекистан, Ташкент; ИМ АН РУз)

В процессе исследования нелокальных, интегральных краевых задач была выявлена тесная взаимосвязь с обратными задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов [1]. Значительно менее изученными являются обратные задачи для уравнений смешанного типа, как первого, так и второго рода [2–4]. Частично восполнить последний пробел мы и попытаемся в рамках этой работы. В данной работе доказано корректность некоторой обратной задачи с нелокальными краевыми условиями для уравнения Чаплыгина в прямоугольнике.

В области $Q = (-\alpha, \beta) \times (0, T) = \{(x,t) :\, -\alpha < x < \beta,\, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнения Чаплыгина

$$Lu = K(x)u_{tt} - u_{xx} + \alpha(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

где $xK(x) > 0$ при $x \neq 0$, $x \in (-\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta$.

Предположим, что коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции.

Пусть $f(x,t) = g(x,t) + h(x)\psi(x,t)$, где $g(x,t)$ и $\psi(x,t)$ — заданные функции.

Линейная обратная задача. Найти функции $u(x,t)$, $h(x)$, входящие в уравнение (1) в области Q, удовлетворяющие нелокальным краевым условиям:

$$\gamma D_t^p u\big|_{t=0} = D_t^p u\big|_{t=T}, \tag{2}$$

$$u\big|_{x=-\alpha} = u\big|_{x=\beta} = 0, \tag{3}$$

при $p = 0, 1$, $\gamma = \mathrm{const} \neq 0$, и дополнительному условию

$$\gamma u_{tt}\big|_{t=0} = u_{tt}\big|_{t=T}, \tag{4}$$

и принадлежащие классу

$$U = \big\{(u,h) :\; u \in W_2^3(Q),\, h \in W_2^3(-\alpha, \beta)\big\}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке проекта № ОТ-Ф4-88 и научного гранта MRU-OT-1/2017.

Литература

1. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений.—Новосибирск: Наука, 1969.—67 с.
2. *Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В.* Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Изв. вузов. Математика.—2011.—№ 2.—С. 71–85.
3. *Джамалов С. З.* Об одной линейной обратной задаче для уравнения Трикоми в трехмерном пространстве // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.—2016.—Т 13, № 2.—С. 12–17.
4. *Джамалов С. З., Ашуров Р. Р.* Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода, второго порядка // Изв. вузов. Математика.—2019.—№ 6.—С. 1–12.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛИНОМОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ n-го ПОРЯДКА

Д. Б. Диденко
(Россия, Воронеж; ВГУ)

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\operatorname{End}\mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$.

Определение 1. Пусть $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ — замкнутый линейный оператор. Рассмотрим следующие условия:

1) ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \{y \in D(\mathcal{B}) : \mathcal{B}y = 0\}$ оператора $\mathcal{B}$ — нулевое подпространство из $\mathcal{Y}$ (оператор $\mathcal{B}$ инъективен);

2) размерность $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{B} = n$ ядра $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ оператора $\mathcal{B}$ положительна и конечна;

3) $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ — бесконечномерное подпространство из $\mathcal{Y}$ ($\dim\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \infty$);

4) $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ — дополняемое подпространство в $D(\mathcal{B})$ ($D(\mathcal{B})$ рассматривается как банахово пространство с нормой графика $\|x\|_{\mathcal{B}} = \|x\| + \|\mathcal{B}x\|$, $x \in D(\mathcal{B})$);

5) область значений $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ опреатора $\mathcal{B}$ замкнута ($\overline{\operatorname{Im}\mathcal{B}} = \operatorname{Im}\mathcal{B}$), что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора $\mathcal{B}$)

$$\gamma(\mathcal{B}) = \inf_{x \in D(\mathcal{B})\setminus\operatorname{Ker}\mathcal{B}} \frac{\|\mathcal{B}x\|}{\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker}\mathcal{B})} = \inf_{y=\mathcal{B}x,\, x\notin\operatorname{Ker}\mathcal{B}} \frac{\|y\|}{\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker}\mathcal{B})},$$

где $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker}\mathcal{B}) = \inf_{x_0 \in \operatorname{Ker}\mathcal{B}} \|x - x_0\|$;

6) $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{B}} \neq \operatorname{Im}\mathcal{B}$ ($\operatorname{Im}\mathcal{B}$ — незамкнутое подпространство);

7) $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ — замкнутое дополняемое в $\mathcal{Z}$ подпространство;

8) оператор $\mathcal{B}$ равномерно инъективен (корректен), т. е. $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \{0\}$ и $\gamma(\mathcal{B}) > 0$;

9) $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ — замкнутое дополняемое подпространство из $\mathcal{Z}$ конечной коразмерности ($\operatorname{codim}\operatorname{Im}\mathcal{B} = m < \infty$);

10) $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ — замкнутое дополняемое подпространство из $\mathcal{Z}$ бесконечной коразмерности;

11) $\operatorname{Im}\mathcal{B} = \mathcal{Z}$, т. е. $\mathcal{B}$ — сюръективный оператор;

12) $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{B}} \neq \mathcal{Z}$;

13) оператор $\mathcal{B}$ имеет левый обратный оператор $(\mathcal{B}^{-1})_l \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$, т. е. $(\mathcal{B}^{-1})_l\mathcal{B}x = x$ для любого $x \in D(\mathcal{B})$;

14) оператор $\mathcal{B}$ имеет правый обратный оператор $(\mathcal{B}^{-1})_r \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$, т. е. $\mathcal{B}(\mathcal{B}^{-1})_r = I_{\mathcal{Z}}$ — тождественный оператор в $\mathcal{Z}$ и $\operatorname{Im}(\mathcal{B}^{-1})_r = D(\mathcal{B})$;

15) оператор $\mathcal{B}$ (непрерывно) обратим, т. е. $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \{0\}$, $\operatorname{Im}\mathcal{B} = \mathcal{Z}$ (и, следовательно, по теореме Банаха $\mathcal{B}^{-1} \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$).

Если для оператора $\mathcal{B}$ выполнены все условия из совокупности S непротиворечивых условий из множества условий $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, 15\}$ (S $\subset \mathcal{I}$), то будем говорить, что оператор $\mathcal{B}$ находится *в состоянии обратимости* S. Множество состояний обратимости оператора $\mathcal{B}$ обозначим символом $\operatorname{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{B})$.

Определение 2. Линейный замкнутый оператор $\mathcal{B}$: $D(\mathcal{B}) \subset \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ называется *фредгольмовым*, если его ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ конечномерно, образ $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ замкнут и имеет конечную коразмерность $\operatorname{codimIm}\mathcal{B}$. Число $\operatorname{ind}\mathcal{B} = \dim\operatorname{Ker}\mathcal{B} - \operatorname{codim}\operatorname{Im}\mathcal{B}$ называется индексом фредгольмова оператора $\mathcal{B}$.

Таким образом, фредгольмов оператор $\mathcal{B}$ находится в одном из состояний обратимости: $\{1, 9\}$, $\{1, 15\}$, $\{2, 9\}$, $\{2, 15\}$.

В банаховом пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ (рассматривается одно из функциональных пространств определенных в [1]) определим дифференциальный оператор второго порядка

$$\mathcal{L} = D^N + \mathcal{B}_1 D^{N-1} + \cdots + \mathcal{B}_{N-1} D + \mathcal{B}_N,$$

с областью определения $D(\mathcal{L}) = \mathcal{F}^{(N)} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, где символ D обозначает дифференциальный оператор, действующий по правилу $Dx = x'$ с областью определения $\mathcal{F}^{(1)} = \{x \in \mathcal{F} : x$ — абсолютно непрерывная функция, $x' \in \mathcal{F}\}$, где операторы $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_N$ принадлежат алгебре $\operatorname{End}\mathcal{F}$. Так же рассмотрим следующий дифференциальный оператор $\mathbb{L}$: $\mathcal{F}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathcal{X}^N) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{X}^N) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{X}^N)$, заданный с помощью операторной матрицы

$$\mathbb{L} \sim \begin{pmatrix} D & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D & I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D & I \\ -\mathcal{B}_N & -\mathcal{B}_{N-1} & -\mathcal{B}_{N-2} & \dots & -\mathcal{B}_2 & D - \mathcal{B}_1 \end{pmatrix}.$$

Определение 3. Двусторонняя последовательность (t_n) чисел из $\mathbb{R}$ называется *допустимой*, если выполнены следующие свойства:

1) $t_{n-1} < t_n$ для любого $n \in \mathbb{Z}$;

2) $\lim_{n\to\pm\infty} t_n = \pm\infty$;

3) существуют числа $l_1 > 0$ и $l_2 > 0$ такие, что $l_1 \leqslant t_n - t_{n-1} \leqslant l_2$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть (t_n) — допустимая последовательность (в качестве последовательности (t_n) можно рассматривать последовательность $t_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$) и $\mathcal{F}_d = \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ — пространство двусторонних последовательностей (см. [1]). Определим разностный оператор $\mathfrak{L}_{(t_n)} \in \operatorname{End}\mathcal{F}_d$, заданный равенством

$$(\mathfrak{L}_{(t_n)} x_d)(n) = x_d(n) - \mathcal{U}(t_n, t_{n-1})\, x_d(n-1), \quad x_d \in \mathcal{F}_d,\ n \in \mathbb{Z},$$

где $\mathcal{U}$ — эволюционное семейство операторов, построенное по абстрактной задаче Коши.

Теорема 1. *Множества состояний обратимости операторов $\mathcal{L}$, $\mathbb{L}$ и $\mathfrak{L}_{(t_n)}$ совпадают, т. е.*

$$\operatorname{St_{inv}}(\mathcal{L}) = \operatorname{St_{inv}}(\mathbb{L}) = \operatorname{St_{inv}}(\mathfrak{L}_{(t_n)})$$

для любой допустимой последовательности (t_n).

Теорема 2. *Операторы $\mathcal{L}$, $\mathbb{L}$ и $\mathfrak{L}_{(t_n)}$ обладают свойством фредгольмовости одновременно, причем их индексы совпадают, т. е. справедливы следующие равенства:*

$$\operatorname{ind}\mathcal{L} = \operatorname{ind}\mathbb{L} = \operatorname{ind}\mathfrak{L}_{(t_n)}$$

для любой допустимой последовательности (t_n).

Литература

1. *Баскаков А. Г., Диденко В. Б.* О состояниях обратимости разностных и дифференциальных операторов // Изв. РАН. Сер. мат.—2018.—Т. 82, № 1.—С. 3–16.
2. *Баскаков А. Г., Кабанцова Л. Ю, Коструб И. Д., Смагина Т. И.* Линейные дифференциальные операторы и операторные матрицы второго порядка // Диф. уравнения.—2017.—Т. 59, № 1.—С. 1–10.

A PROBLEM OF DETERMINING A SPECIAL SPATIAL PART OF 3D MEMORY KERNEL IN AN INTEGRO-DIFFERENTIAL HYPERBOLIC EQUATION

U. D. Durdiev (Uzbekistan, Bukhara; BukhSU),
Zh. D. Totieva (Russia, Vladikavkaz; SMI VSC RAS)

In this paper, using the method of the work [1], we focus on the inverse problem of recovering a spatial part of a kernel in the integral term of hyperbolic integro-differential equation. The presented results give a convenient approach for numerical solving the inverse problem.

Consider the integro-differential wave equation for $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3_+$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \int_0^t k(x, y, \tau) u(x, y, t - \tau)\, d\tau \tag{1}$$

with the initial and boundary conditions

$$u\big|_{t<0} \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \delta'(t), \tag{2}$$

where $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\mathbb{R}^3_+ = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$, $\delta'(t)$ is the derivative of the Dirac function.

In view of the fact that boundary condition in (2) is generalized function and, therefore the solution to the problem (1), (2) is understood as a linear functional over the space of infinitely differentiable functions with compact support (test functions), i. e., $u(x, y, t) \in D'(\mathbb{R}^3_+)$.

We assume that the kernel in equation (1) is represented in the form

$$k(x, y, t) = k_0(t) p(x, y), \tag{3}$$

where $k_0(t)$ is known function and $k_0(t) \in C^1[0, \infty)$, $k_0(0) \neq 0$, without loss of generality, we set $k_0(0) = 1$. The function $p(x, y)$ is unknown and it can be represented in the form of a finite Fourier series

$$p(x, y) = \sum_{s=-N}^{N} p_s(x) e^{isy} \tag{4}$$

with a fixed integer $N \geqslant 0$. Let $\Omega\,(N, X, P)$ denote the set of functions $p(x, y)$ for which the coefficients p_s, $|s| \leqslant N$, are continuous functions on the interval $[0, X]$, $X > 0$ and satisfy the conditions of boundedness:

$$|p_s(x)| \leqslant P, \quad x \in [0, X], \ -N \leqslant s \leqslant N.$$

We note that for $p(x,y) \in \Omega\,(N,X,P)$ the solution of problem (1), (2) is a 2π-periodic function of y and can be represented by the Fourier series

$$u(x,y,t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} u_s(x,t)e^{isy}. \tag{5}$$

Substituting functions u and k in (1), (2) by their presentations in accordant with (3)–(5), we make sure that the coefficients u_s satisfy the following equations

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2\right) u_m(x,t) = \sum_{s=-N}^{N} p_s(x) \int\limits_0^t k_0(\tau) u_{m-s}(x,t-\tau)\,d\tau,$$

$$(x,t) \in \mathbb{R}^2_+ = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 :\, x > 0\big\};$$

$$u_m\big|_{t<0} \equiv 0, \quad \frac{\partial u_m}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \delta_{0m}\delta'(t), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{6}$$

where δ_{0m} is the Kronecker symbol.

For given functions $k_0(t)$, $p_s(x)$, $s = 0, \pm 1, \pm 2 \pm, \ldots$ we call *the direct problem* the problem of finding the functions $u_m(x,t)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ that satisfy (in a generalized meaning) the relations (6).

In the present paper was studied the following *inverse problem:* find the coefficients $p_m(x)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2 \pm, \ldots$, by using the conditions

$$u_m(0,t) = f_m(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \ \mathbb{R}_+ = \big\{t \in \mathbb{R} :\, t > 0\big\}, \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{7}$$

Definition. Functions $p_m(x) \in C[0,\infty)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, are called a solution to inverse problem (6), (7), if the corresponding solution to direct problem (7) $u_m(x,t) \in D'(\mathbb{R}^2_+)$ (from the class of generalized functions, i. e., distributions) satisfies equalities (7) for $f_m(t) \in D'(\mathbb{R}_+)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$.

Theorem. *Let presentation* $f_m(t) = -\delta_{0m}\delta(t) + \theta(t)g_m(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $|m| \leqslant N$ *be valid. Moreover, let data* $v_m(0,t) = g_m(t)$, $t > 0$, $|m| \leqslant N$ *satisfy the following conditions:*

$$g_m(t) \in C^2[0,T], \quad g_m(0) = g'_m(0) = 0, \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$$

and

$$G = \max_{-N \leqslant m \leqslant N} \left\| g''_m(t) \right\|_{C[0,T]}.$$

Then there exists a number $T_0 \in (0,T)$ *such that the inverse problem* (6), (7) *has a unique solution, belonging to the set* $\Omega(N, T_0/2, 2G)$.

References

1. *Romanov V. G.* A problem of recovering a special two-dimensional potential in a hyperbolic equation // Eurasian J. Math. Comput. Appl.—2016.—Vol. 4, № 1.—P. 32–46.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ В ОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

У. Д. Дурдиев
(Узбекистан, Бухара; БухГУ)

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + f(x,t), \quad i = 1,2,3, \tag{1}$$

для $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, с начальными условиями

$$u_i\big|_{t<0} \equiv 0, \quad i = 1,2,3. \tag{2}$$

Здесь $u_i(x,t)$ являются компонентами вектор-функции смещения $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))^*$, $*$ — знак транспонирования, через T_{ij} обозначен тензор напряжений, связанный с вязкоупругой средой. Точнее, мы имеем

$$T_{ij}(x,t) = \sum_{k,l=1}^{3} \left\{ c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(x,t) + \int_0^t K_i(\tau) c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(x, t-\tau)\, d\tau \right\}, \tag{3}$$

$f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t), f_3(x,t))^*$ — внешняя сила, $\rho > 0$ — плотность среды.

В равенстве (3) коэффициенты c_{ijkl} являются модулями упругости среды. $K(t) = (K_1, K_2, K_3)(t)$ — функция релаксации среды. Модули упругости удобно описывать в терминах 6×6 матрицы в соответствии со следующими соглашениями, касающимися замены пары (i,j) индексов $i,j = 1,2,3$ одним индексом $\alpha = 1,2,\ldots,6 : (11) \to 1$, $(22) \to 2$, $(33) \to 3$, $(23) = (32) \to 4$, $(13) = (31) \to 5$, $(12) = (21) \to 6$. Это соответствие возможно благодаря свойствам симметрии $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}$. Дополнительное свойство симметрии $c_{ijkl} = c_{klij}$ подразумевает, что матрица модулей $C = (c_{\alpha\beta})_{6\times 6}$ симметрична, где $\alpha = (ij)$, $\beta = (kl)$. Предположим также, что $\rho > 0$, c_{ijkl} являются постоянными и матрица $C = (c_{\alpha\beta})_{6\times 6}$ положительно определена.

В работе [1] исследована глобальная разрешимость и устойчивость решения обратной задачи для определения ядра из системы интегро-дифференциальных уравнений Максвелла.

Мы рассмотрим задачу (1)–(2) для случая, когда источник возмущения сосредоточен в фиксированной точке пространства, но распределен по времени, т. е. функция $f(x,t)$ имеет вид

$$f(x,t) = \vec{e}\,\delta(x)\,\theta(t) f_0(t), \tag{4}$$

где $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)^*$ — заданный единичный вектор, который определяет направление силы; $\theta(t)$ — функция Хевисайда; $\delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке пространства $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; $f_0(t)$ — заданная гладкая функция.

Задача, в которой вектор $u(x,t) = (u_1, u_2, u_3)(x,t)$ должен быть определен из (1)–(4) для заданных матриц $K(t) = \operatorname{diag}(K_1, K_2, K_3)(t)$, $C = (c_{\alpha\beta})_{(6\times 6)}$ и числа $\rho > 0$, будет называться *прямой задачей.*

Пусть $U(\nu,t) = (U_1, U_2, U_3)^*(\nu,t)$ есть преобразование Фурье от функции $u(x,t) = (u_1, u_2, u_3)^*(x,t)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, т. е.

$$U_j(\nu,t) = \int\limits_{R^3} u_j(x,t)\, e^{i\langle x,\nu\rangle}\, dx, \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbb{K}^3, \quad \langle x,\nu\rangle = \sum_{j=1}^{3} x_j\nu_j, \quad j = 1,2,3,$$

где ν — параметр преобразования. Поставим следующую обратную задачу: найти матричную функцию $K(t) = \operatorname{diag}(K_1, K_2, K_3)(t)$, $t \geqslant 0$, входящую в равенство (1) посредством формулы (3), если относительно преобразования Фурье решения прямой задачи (1)–(4) для $\nu = \nu_0$, $t > 0$ известна дополнительная информация:

$$U(\nu_0, t) = g(t), \quad g(t) = (g_1, g_2, g_3)^*(t). \tag{5}$$

Определение 1. Решением обратной задачи является матричная функция $K(t) = \operatorname{diag}(K_1, K_2, K_3)(t)$ такая, что соответствующее ей решение задачи (1)–(4) удовлетворяет условию (5).

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Фиксируем произвольное T, $T > 0$. Предположим, что $g(t) \in C^5[0,T]$, $f_0(t) \in C^2[0,T]$ и выполнены следующие соотношения:*

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad f_0(0) \neq 0, \quad g''(0) = \frac{\vec{e}}{\rho}\, f_0(0), \quad g'''(0) = \frac{\vec{e}}{\rho}\, f_0'(0),$$
$$g^{(4)}(0) = \frac{Q(\nu_0)\vec{e}}{\rho^2}\, f_0(0) + \frac{\vec{e}}{\rho}\, f_0''(0), \quad e_i \neq 0, \quad i = 1,2,3.$$

Кроме того,

$$\sum_{j=1}^{3} Q_{ij}(\nu_0)\, \vec{e}_j =: q_i(c_{kl}, \nu_0, e_k) \neq 0, \quad \nu_0 \neq 0,$$

где

$$Q(\nu) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$Q_{ij}(\nu)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant 3$, *являются равномерными многочленами второго порядка* ν :

$Q_{11}(\nu) = c_{11}\nu_1^2 + 2c_{16}\nu_1\nu_2 + c_{66}\nu_2^2 + 2c_{15}\nu_1\nu_3 + 2c_{56}\nu_2\nu_3 + c_{55}\nu_3^2;$

$Q_{12}(\nu) = c_{16}\nu_1^2 + (c_{12} + c_{66})\nu_1\nu_2 + c_{62}\nu_2^2 + (c_{14} + c_{56})\nu_1\nu_3 + (c_{52} + c_{64})\nu_2\nu_3 + c_{54}\nu_3^2;$

$Q_{13}(\nu) = c_{15}\nu_1^2 + (c_{14} + c_{65})\nu_1\nu_2 + c_{64}\nu_2^2 + (c_{13} + c_{55})\nu_1\nu_3 + (c_{63} + c_{54})\nu_2\nu_3 + c_{53}\nu_3^2;$

$Q_{21}(\nu) = c_{61}\nu_1^2 + (c_{21} + c_{66})\nu_1\nu_2 + c_{26}\nu_2^2 + (c_{41} + c_{65})\nu_1\nu_3 + (c_{25} + c_{46})\nu_2\nu_3 + c_{45}\nu_3^2;$

$Q_{22}(\nu) = c_{66}\nu_1^2 + 2c_{26}\nu_1\nu_2 + c_{22}\nu_2^2 + 2c_{64}\nu_1\nu_3 + 2c_{24}\nu_2\nu_3 + c_{44}\nu_3^2;$

$Q_{23}(\nu) = c_{65}\nu_1^2 + (c_{64} + c_{25})\nu_1\nu_2 + c_{24}\nu_2^2 + (c_{45} + c_{63})\nu_1\nu_3 + (c_{23} + c_{44})\nu_2\nu_3 + c_{43}\nu_3^2;$

$Q_{31}(\nu) = c_{51}\nu_1^2 + (c_{41} + c_{56})\nu_1\nu_2 + c_{46}\nu_2^2 + (c_{31} + c_{55})\nu_1\nu_3 + (c_{36} + c_{45})\nu_2\nu_3 + c_{35}\nu_3^2;$

$Q_{32}(\nu) = c_{56}\nu_1^2 + (c_{46} + c_{52})\nu_1\nu_2 + c_{42}\nu_2^2 + (c_{54} + c_{36})\nu_1\nu_3 + (c_{32} + c_{44})\nu_2\nu_3 + c_{34}\nu_3^2;$

$Q_{33}(\nu) = c_{55}\nu_1^2 + 2c_{45}\nu_1\nu_2 + c_{44}\nu_2^2 + 2c_{35}\nu_1\nu_3 + 2c_{34}\nu_2\nu_3 + c_{33}\nu_3^2.$

Тогда обратная задача (1)–(5) *имеет единственное решение*

$$K(t) = \operatorname{diag}(K_1, K_2, K_3)(t) \in C[0, T].$$

Пусть $G(\gamma)$ — множество функций $g(t)$, $f_0(t)$, удовлетворяющих условиям теоремы 1, и $\max\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\|g_i(t)\|_{C^5[0,T]}, \|f_0(t)\|_{C^2[0,T]}\right\} \leqslant \gamma < \infty$, $t \in [0, T]$, $i = 1, 2, 3$, γ — заданное число.

Теорема 2. *Пусть* $K^m(t) = \operatorname{diag}(K_1^m(t), K_2^m(t), K_3^m(t))$ *является решением обратной задачи* (1)–(5) *с* $(g^m(t), f_0^m) \in G(\gamma)$, $m = 1, 2$, *соответственно. Тогда существует положительная постоянная* C_0, *зависящая от чисел* T, ρ, γ *и элементов матрицы* $Q(\nu_0)$ *так, что справедлива следующая оценка устойчивости:*

$$\sum_{i=1}^{3} \left\|K_i^1 - K_i^2\right\|_{C[0,T]} \leqslant C_0 \left[\sum_{i=1}^{3} \left\|g_i^1 - g_i^2\right\|_{C^5[0,T]} + \left\|f_0^1 - f_0^2\right\|_{C^3[0,T]}\right]. \qquad (7)$$

Литература

1. *Дурдиев Д. К., Дурдиев У. Д.* Устойчивость решения обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения Максвелла в однородной анизатропной среде // Узб. мат. журн.—2014.—№ 2.—С. 25–34.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ IV ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А. В. Дюжева
(Россия, Самара; СамГТУ)

В ограниченной области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ рассматривается задача для уравнения

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x - (b(x,t)u_{xtt})_x + (d(x,t)u_{xx})_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

с начальными

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(l,t) = 0, \tag{3}$$

$$\int\limits_0^l u\,dx = 0, \tag{4}$$

$$d(0,t)u_{xxx}(0,t) - a(0,t)u_x(0,t) - b(0,t)u_{xtt}(0,t) = 0. \tag{5}$$

Метод решения задач с такими условиями предполагает переход от условий первого рода к условиям второго рода [2]. Применяя этот метод, получим

$$d(l,t)u_{xxx}(l,t) - b(l,t)u_{xtt}(l,t) - a(l,t)u_x(l,t) + \int\limits_0^l cu\,dx = \int\limits_0^l f\,dx. \tag{6}$$

Пусть теперь $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1), условиям (2), (3), (5), (6). Проинтегрировав равенство (1) по $(0,l)$ и учитывая (5), (6), имеем

$$\int\limits_0^l u_{tt}\,dx = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{d^2}{dt^2}\int\limits_0^l u\,dx = 0.$$

Из начальных условий следует

$$\int\limits_0^l u(x,0)\,dx = 0, \quad \int\limits_0^l u_t(x,0)\,dx = 0.$$

В силу единственности решения задачи Коши относительно функции $\int_0^l udx$, убеждаемся в выполнении условия (4). Таким образом, условия (4) и (6) эквивалентны, поэтому вместо задачи (1)–(3) будем рассматривать задачу (1)–(3), (5), (6).

Обозначим $\widehat{W}(Q_T) = \{v(x,t) : v \in W_2^2(Q_T), v(x,T) = 0\}$.
Следуя известной процедуре [1], из тождества получим равенство

$$\int_0^T \int_0^l \big(-u_t v_t + a u_x v_x - b u_{xt} v_{xt} - b_t(x,t) u_{xt} v_x + d u_{xx} v_{xx} + cuv \big)\, dx\, dt + \\ + \int_0^T v(l,t) \int_0^l cu\, dx\, dt = \int_0^T \int_0^l fv\, dx\, dt + \int_0^T v(l,t) \int_0^l f\, dx\, dt. \tag{7}$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1)–(3), (5), (6) будем называть функцию $u(x,t) \in W_2^2(Q_T)$, удовлетворяющую начальным данным (2) и тождеству (7) для любой функции $v(x,t) \in \widehat{W}(Q_T)$.

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям

$$a(x,0) + b_{tt}(x,0) \geqslant a_0 > 0, \quad b(x,\tau) \geqslant b_0, \quad d(x,0) \geqslant d_0 > 0.$$

Теорема. *Если* $f \in L_2(Q_T)$, $a, c \in C^1(\overline{Q}_T)$, $b, d \in C^2(\overline{Q}_T)$, *то существует единственное обобщенное решение задачи* (1)–(3), (5), (6).

Доказательство теоремы проводится в несколько этапов. Единственность доказывается от противного, предполагая, что существует два решения поставленной задачи. Для доказательства существования сначала методом Галеркина строится приближенное решение задачи, затем выводятся априорные оценки, позволяющие выделить слабо сходящуюся последовательность, и показывается, что ее предел и есть обобщенное решение задачи (1)–(3), (5), (6).

Литература

1. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.—92 с.
2. *Пулькина Л. С.* Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Изв. вузов. Математика.—2012.—№ 4.—С. 74–83.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА В МНОГОМЕРНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ж. Ж. Жумаев

(Узбекистан, Бухара; БухГУ)

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$u_t - a^2\Delta u = \int\limits_0^t K(\tau)\, u(x,t-\tau)\, d\tau, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Здесь $\varphi(x)$ — заданная гладкая функция, $a > 0$ — известное число. Обратную задачу сформулируем следующим образом: найти ядро $k(t)$, $t > 0$, в интегральном члене (1), если задано решение задачи (1), (2) на $x = 0$:

$$u\big|_{x=0} = f(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

где $f(t)$ — достаточно гладкая функция и $f(0) = \varphi(0)$.

Для исследования задачи вводится в рассмотрение новая функция $\omega = \Delta u_t$ и обратная задача (1)–(3) переписывается относительно функций $\omega(x,t)$ и $k(t)$ в следующем виде:

$$\omega_t - a^2\omega = k(t)\Delta\varphi(x) + \int\limits_0^t k(\tau)\, \omega(x,t-\tau)\, d\tau, x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{4}$$

$$\omega\big|_{t=0} = a^2\Delta^2\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$\omega\big|_{x=0} = \frac{1}{a^2}\, f''(t) - \frac{1}{a^2}\, k(t)\varphi(0) - \frac{1}{a^2}\int\limits_0^t k(\tau) f'(t-\tau)\, d\tau, \quad t > 0. \tag{6}$$

Относительно решения прямой задачи справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $(\Delta\varphi(x), \Delta^2\varphi(x)) \in B(\mathbb{R}^n)$, $k(t) \in C(0,T)$. Тогда в классе функций $B^{2,1}(D_T)$ существует единственное решение задачи (4), (5) ($B^{2,1}(D_T)$ — два раза по x и один раз по t с производными непрерывно дифференцируемых и ограниченных в области D_T класс функций, $B(\mathbb{R}^n)$ — класс ограниченных в $\mathbb{R}^n$ функций [1]).*

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема о глобальной разрешимости обратной задачи.

Теорема. *Пусть выполнены условия леммы, условие согласования $\varphi(0) = f(0)$ и $|\varphi(0)| > 0$. Тогда для любого $T > 0$ обратная задача (1)–(3) имеет единственное решение.*

Теорема может быть доказана по методике, использованной в [2].

Литература

1. *Михайлов В. П.* Дифференциальное уравнения в частных производных.—М.: Наука, 1976.
2. *Дурдиев Д. К., Рашидов А. Ш.* Обратная задача определения ядра в одном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 1.—С. 110–116.

ON RECONSTRUCTION OF DISTRIBUTIONS BY SPHERICAL MEANS

I. A. Ikromov (Uzbekistan, Bukhara; BukhSU)
A. A. Rahmonov (Uzbekistan, Bukhara; BukhSU)

We consider a solution of the problem about reconstruction unknown function on a domain and we get an explicit formula for the unknown function.

Moreover, we solve the problem of existence and uniqueness of the solution. Also, we investigate class of representation formulas and indicate the optimal with respect derivative formula.

This type of problem had been considered [1], but there wasn't construct an external body.

Motivation of the problem. From the following *Lamé equations*

$$\rho\,\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho\mathbf{F} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u}, \tag{1}$$

where $\mathbf{u}(x,t)$ is the displacement vector, ρ is density, λ and μ are known as the *Lamé constants*, $\mathbf{F}$ is an external body force, we can get system (2).

If $\mathrm{div}\mathbf{u} = 0$ on (1), then we can get the momentum equation. After that, we make some changes for the momentum equation and for $t = 1$ we get initial Cauchy's problem. First of all, we look at the stationary case, i. e., the external body does not depend on t.

Proposition of the problem and main results. We consider system of integral equations given by

$$\begin{cases} u_1(x) = \int\limits_{B_1} v(x-\eta)\,d\eta \equiv T_1 v, \\ u_2(x) = \int\limits_{S^2} v(x-\eta)\,dS_\eta \equiv T_2 v, \end{cases} \tag{2}$$

where B_1 and S^2 are the unit ball and the unit sphere on $\mathbb{R}^3$ centered at the origin respectively, u_1, u_2 are given distributions from the space $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ [2]. We consider the problem on construction v by u_1 and u_2.

Note, that $T_1 v = \chi_{B_1} * v$ and $T_2 v = \delta_{S^2} * v$, where δ_{S^2} is the Dirac "delta" on S^2. Since the distributions defined by χ_{B_1} and δ_{S^2} have compact support the convolutions in (2) are well-defined.

We will consider the problem on construction v in the class of distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Note that system (2) is overdetermined. We consider necessary and sufficient conditions on existence and uniqueness for v.

The main results of this work is the followings.

Theorem 1. *The following statements hold:*

1) *There exist distributions A_1, A_2 supported on the unit sphere centered at the origin such that the following identity*

$$v = \frac{1}{16\pi^2}\,A_1 * (T_1 v) + \frac{1}{16\pi^2}\,A_2 * (T_2 v) \tag{3}$$

holds for any given distribution $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.

2) *If* $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ *are distributions satisfying the conditions* $T_1 u_2 = T_2 u_1$, *then there exists a unique distribution* $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ *such that* $T_1 v = u_1$ *and* $T_2 v = u_2$.

Theorem 2. *Let* A_1, A_2 *be distributions satisfying the following conditions:*

a) $v = \frac{1}{16\pi^2}\left(A_1 * T_1(v) + A_2 * T_2(v)\right)$;

b) $\operatorname{supp}(A_j) = S^2$, $j = 1, 2$;

c) $\operatorname{order}(A_1) \leqslant 3$, $\operatorname{order}(\mathrm{A}_2) \leqslant 2$;

d) $\{A_j\}_{j=1,2}$ *are spherical symmetric functions. Then there exists* $a \in \mathbb{R}$ *such that* A_1, A_2 *can be written as*

$$A_1(x) = \Delta^2 \chi_{B_1}(x) + (1-a)\Delta\delta_{S^2}(x),$$

$$A_2(x) = -\Delta\delta_{S^2}(x) + \delta_{S^2}(x) + (a+1)\Delta\chi_{B_1}(x).$$

Corollary 1. *If* $v \in \mathrm{C}^3(\mathbb{R}^3)$, *then* $u_1 := T_1(v) \in \mathrm{C}^3(\mathbb{R}^3)$ *and* $u_2 := T_2(v) \in \mathrm{C}^3(\mathbb{R}^3)$. *Moreover, the following formula*

$$v(x) = \frac{1}{16\pi^2}\left(\int\limits_{S_1} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial n}\, dS_\eta - \int\limits_{S_1} \Delta u_2\, dS_\eta - 2\int\limits_{S_1} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial n}\, dS_\eta\right) + \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{S_1} u_2\, dS_\eta \tag{4}$$

holds.

Proposition 1. *Let* L_1 *and* L_2 *be pseudodifferential operators in* $\mathbb{R}^3$ *with a symbol of the form*

$$\tilde{L}_i = \sum_{k=0}^{n_i} c_k^{(i)} |\xi|^k, \quad i = 1, 2.$$

Then there exists an analytic function $v \not\equiv 0$, *such that*

$$L_1(T_1 v) + L_2(T_2 v) \equiv 0.$$

References

1. *Икромов И. А.* Восстановление функции по сферическим средним // Успехи мат. наук.—1987.—Т. 42, № 5 (257).—С. 211–212.
2. *Паламодов В. П.* Обобщенные функции и гармонический анализ // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления.—М.: ВИНИТИ, 1991.—Т. 72.—С. 5–134.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1981.—512 с.
4. *Grafakos L.* Classical Fourier Analysis.—Springer, 2008.—494 p.
5. *Новоцкий В.* Теория упругости.—М.: Мир, 1975.—870 с.
6. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частньми производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье.—М.: Мир, 1986.—462 с.
7. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частньми производными. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы.—М.: Мир, 1987.—696 с.
8. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness.—N. Y.: Academic Press, 1975.—370 p.
9. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. Выпуск 2.—М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958.—310 с.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ С РАЗНОТЕМПОВЫМИ БЫСТРЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ[1]

М. А. Калашникова (Россия, Воронеж; Атос АйТи Солюшенс энд Сервисез), **Г. А. Курина** (Россия, Воронеж, ВГУ; Москва, ФИЦ ИУ РАН)

Большинство работ в теории сингулярных возмущений, включая задачи управления, имеет дело с задачами, характеризующимися наличием переменных со скоростями изменения двух порядков (медленные и быстрые переменные). См., например, обзоры [1, 2]. Однако при математическом моделировании практических задач возникают задачи с разнотемповыми быстрыми переменными (модели цепных химических реакций, электрических цепей, летательных аппаратов и другие механические модели, а также биомолекулярные и социально-экономические модели транснациональных корпораций).

Настоящий доклад представляет собой краткий обзор работ, связанных с системами с разнотемповыми быстрыми переменными. Изучение таких систем имеет особенности по сравнению с однотемповыми быстрыми переменными. В частности, при обосновании предельного перехода решения исходной возмущенной задачи к решению вырожденной, получающейся из исходной при нулевом значении малых параметров, А. Н. Тихоновым рассматривались присоединенные системы разных порядков.

Первые работы, посвященные построению методом пограничных функций асимптотики решения сингулярно возмущенных задач с несколькими малыми параметрами при производных, принадлежат А. Б. Васильевой. При некоторых условиях асимптотическое решение сингулярно возмущенных задач построено в [3] для системы двух линейных уравнений с независимыми малыми параметрами перед производными, а в [4] для системы двух уравнений с частными производными первого порядка и малым параметром в различных степенях перед производными. В [5] для построения асимптотики решения применяется метод интегральных многообразий.

В основном асимптотический анализ решений задач управления производится на основе асимптотики решения краевых задач, вытекающих из условий оптимальности управления. Другой подход, называемый прямой схемой, состоит в непосредственной подстановке в условие задачи постулируемого асимптотического разложения решения и определении серии задач для нахождения членов асимптотики. Этим методом в [6] получено асимптотическое решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления с трехтемповыми переменными состояния, а в [7] построена асимптотка решения линейно-квадратичной задачи с дешевыми управлениями разных порядков. При этом доказано, что значения

[1]Работа второго автора была поддержана Российским научным фондом, проект № 17-11-01220.

минимизируемого функционала не возрастают при использовании следующего приближения оптимального управления.

В докладе рассматриваются также публикации, посвященные устойчивости, управляемости, стабилизируемости систем с разнотемповыми быстрыми переменными, задачам оптимального управления такими системами на бесконечном интервале, асимптотический анализ которых основан на асимптотике алгебраического уравнения Риккати [8], задачам оптимального управления с ограничениями на управление типа замкнутых неравенств, для которых строится асимптотика точек переключения управления, игровым и стохастическим задачам.

Например, в [9] рассматривалась задача минимизации на бесконечном промежутке математического ожидания от квадратичного функционала на траекториях системы дифференциальных уравнений и то для трехтемповых переменных. Отметим, что в отличие от детерминированного случая система алгебраических уравнений Риккати меньшей размерности, играющая основную роль в асимптотическом анализе, не получается здесь из возмущенного уравнения Риккати при нулевых значениях малых параметров.

Литература

1. *Дмитриев М. Г., Курина Г. А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика.—2006.—№ 1.—С. 3–51.
2. *Kurina G. A., Dmitriev M. G., Naidu D. S.* Discrete singularly perturbed control problems (A survey) // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. B: Applications and Algorithms.—2017.—Vol. 24.—P. 335–370.
3. *Данилин А. Р., Коврижных О. О.* Об асимптотике решения системы линейных уравнений с двумя малыми параметрами // Диф. уравнения.—2008.—Т. 44, № 6.—С. 738–747.
4. *Бутузов В. Ф., Деркунова Е. А.* О сингулярно возмущенной системе уравнений в частных производных первого порядка с разными степенями малого параметра // Диф. уравнения.—2006.—Т. 42, № 6.—С. 775–789.
5. *Воропаева Н. В., Соболев В. А.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем.—М.: Физматлит, 2009.—256 с.
6. *Калашникова М. А., Курина Г. А.* Приближение любого порядка асимптотического решения трехтемповой линейно-квадратичной задачи оптимального управления методом прямой схемы // Вестн. Воронеж. гос. ун-та Сер. Систем. анализ и информ. техн.—2018.—№ 3.—С. 33–43.
7. *Калашникова М. А., Курина Г. А.* Прямая схема асимптотического решения линейно-квадратичных задач с дешевыми управлениями разной цены // Диф. уравнения.—2019.—Т. 55, № 1.—С. 83–102.
8. *Mukaidani H., Xu H., Mizukami K.* New results for near-optimal control of linear multiparameter singularly perturbed systems // Automatica.—2003.—Vol. 39.—P. 2157–2167.
9. *Drăgan V.* On the linear quadratic optimal control for systems described by singularly perturbed Itô differential equations with two fast time scales // Axioms.—2019.—Vol. 8, № 30.—P. 1–22.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРИЗНАК МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Д. С. Климентов
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В работах [1, 2] был получен стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей положительной [1] и ненулевой средней [2] кривизн. Целью настоящей работы является вывод стохастического признака минимальной поверхности (т. е. поверхности с нулевой средней кривизной) с использованием техники, развитой в указанных работах.

Пусть F — двумерная поверхность в трехмерном евклидовом пространстве класса C^3, односвязная, конформно эквивалентная кругу. Кроме того, средняя кривизна поверхности F равна нулю. Первую, вторую и третью квадратичные формы поверхности F будем обозначать $I = g_{ij}dx^i dx^j$, $II = b_{ij}dx^i dx^j$ и $III = f_{ij}dx^i dx^j$ соответственно, где x^1, x^2 — локальные координаты на нашей поверхности. Не ограничивая общности, будем считать, что на F введены изотермические координаты, в которых первая форма имеет вид $I = ds^2 = \lambda\big(dx^{1^2} + dx^{2^2}\big)$. Пусть на поверхности F заданы три случайных процесса X_t с генератором $A_X = g^{ij}\partial_i\partial_j$, Y_t с генератором $A_Y = b^{ij}\partial_i\partial_j$ и Z_t с генератором $A_Z = f^{ij}\partial_i\partial_j$. Переходную плотность процесса X_t обозначим $p^1(t,x,y)$, процесса Y_t — $p^2(t,x,y)$, процесса Z_t — $p^3(t,x,y)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если переходные плотности p_1 и p_3 удовлетворяют соотношениям*

$$\frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1}\,\Delta\ln\frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1} \leqslant 0,$$

$$\frac{\Delta p^3}{\partial_t p^3} = -\frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1}\,\Delta\ln\frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1}\,\frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1},$$

то поверхность является минимальной

Литература

1. *Климентов Д. С.* Стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей положительной кривизны // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.— 2013.—№ 6.—С. 24–27.
2. *Климентов Д. С.* Стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей ненулевой средней кривизны // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2014.—№ 1.—С. 15–18.

Γ-CONVERGENCE OF FUNCTIONALS ON SOBOLEV SPACES WITH RESPECT TO FUNCTION SETS DEFINED BY IMPLICIT CONSTRAINTS

A. A. Kovalevsky
(Russia, Yekaterinburg; IMM UrB RAS, UrFU)

Let $\{\Omega_s\}$ be a sequence of bounded domains in $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, and, for any $s \in \mathbb{N}$, let $U_s = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s) : a(sv) \leqslant 0$ a. e. in $\Omega_s\}$, where $p > 1$ and $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a periodic function. In connection with the study of the convergence of minimizers and minimum values of functionals $J_s\colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ on the sets U_s, we consider a suitable notion of Γ-convergence of these functionals and give some related results. We note that, in contrast to more or less standard situations where Γ-limit functionals are defined on the corresponding Sobolev spaces, the specificity of the definition of Γ-convergence in the case under consideration is that this definition refers to the convergence of functionals $J_s\colon W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ to a function $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

As for the domains Ω_s and the function a, we assume that the following conditions are satisfied:

(C_1) for any $s \in \mathbb{N}$, the embedding of $W^{1,p}(\Omega_s)$ into $L^p(\Omega_s)$ is compact;

(C_2) there exist $m_1, m_2 > 0$ such that, for any $s \in \mathbb{N}$, $m_1 \leqslant \operatorname{meas} \Omega_s \leqslant m_2$;

(C_3) the set $\{t \in \mathbb{R} : a(t) \leqslant 0\}$ is nonempty and closed;

(C_4) the set $\{t \in \mathbb{R} : a(t) > 0\}$ is nonempty.

In view of properties (C_1)–(C_4), the following assertions hold:

(i) for any $s \in \mathbb{N}$, the set U_s is nonempty, sequentially weakly closed, and included in $L^\infty(\Omega_s)$;

(ii) for any $t \in \mathbb{R}$, there exists a sequence $z_s \in U_s$ such that $\|z_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$;

(iii) if we have a sequence $v_s \in U_s$ and a number $t \in \mathbb{R}$, then the convergence $\|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ is equivalent to the convergence $\|v_s - t\|_{L^\infty(\Omega_s)} \to 0$.

Definition 1. Let $J_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ for any $s \in \mathbb{N}$, and let $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. We say that the sequence $\{J_s\}$ Γ-converges to the function β with respect to the sequence $\{U_s\}$ if the following conditions are satisfied:

(a) for any $t \in \mathbb{R}$, there exists a sequence $w_s \in U_s$ such that $\|w_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ and $J_s(w_s) \to \beta(t)$;

(b) for any $t \in \mathbb{R}$ and any sequence $v_s \in U_s$ such that $\|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$, we have $\liminf\limits_{s\to\infty} J_s(v_s) \geqslant \beta(t)$.

Further, for any $s \in \mathbb{N}$, let $I_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ be a weakly lower semicontinuous functional such that $I_s(v) \to +\infty$ as $\|v\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} \to +\infty$. It is easy to see that, for any $s \in \mathbb{N}$, there exists a function belonging to the set U_s and minimizing the functional I_s on this set.

Theorem 1. *Let $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a strictly convex function, and let the sequence $\{I_s\}$ Γ-converge to the function φ with respect to the sequence $\{U_s\}$. For any $s \in \mathbb{N}$, let u_s be a function in U_s minimizing the functional I_s on the set U_s. Assume that the sequence of norms $\|u_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ is bounded. Then $\|u_s - t_0\|_{L^\infty(\Omega_s)} \to 0$ and $I_s(u_s) \to \varphi(t_0)$, where t_0 is the unique minimizer of the function φ on $\mathbb{R}$.*

The next theorem concerns the convergence of minimizers and minimum values of functionals consisting of two components with certain properties.

We denote by $\mathcal{H}$ the set of all sequences $\{v_s\}$ such that:

(a) for any $s \in \mathbb{N}$, we have $v_s \in U_s$;

(b) $\|v_s\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. This set is nonempty.

For any $s \in \mathbb{N}$, let $F_s, G_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ be weakly lower semicontinuous functionals such that $(F_s + G_s)(v) \to +\infty$ as $\|v\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} \to +\infty$.

We define

$$\lambda = \inf_{\{v_s\} \in \mathcal{H}} \liminf_{s \to \infty} F_s(v_s).$$

Theorem 2. *Assume that $\lambda \in \mathbb{R}$ and the following conditions are satisfied:*

$(*_1)$ if $s \in \mathbb{N}$, $v \in U_s$, and $t \in \mathbb{R}$, then $F_s(v + t) = F_s(v)$;

$(*_2)$ there exists a function $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that, for any $t \in \mathbb{R}$ and any sequence $v_s \in U_s$ with the property $\|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$, we have $G_s(v_s) \to \varphi(t)$.

For any $s \in \mathbb{N}$, let u_s be a function in U_s minimizing the functional $F_s + G_s$ on the set U_s. Assume that the sequence of norms $\|u_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ is bounded. Then there exist an increasing sequence $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ and a number $t_0 \in \mathbb{R}$ such that t_0 is a minimizer of the function φ on $\mathbb{R}$, $\|u_{s_j} - t_0\|_{L^\infty(\Omega_{s_j})} \to 0$, and $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \to \lambda + \varphi(t_0)$.

Remark. It is easy to see that if condition $(*_2)$ of Theorem 2 is satisfied, then the sequence $\{G_s\}$ Γ-converges to the function φ with respect to the sequence $\{U_s\}$.

We now state a Γ-compactness theorem for the sequence of functionals $F_s + G_s$.

Theorem 3. *Assume that $\lambda \in \mathbb{R}$ and conditions $(*_1)$ and $(*_2)$ of Theorem 2 are satisfied. Then there exists an increasing sequence $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ such that the sequence $\{F_{s_j} + G_{s_j}\}$ Γ-converges to the function $\lambda + \varphi$ with respect to the sequence $\{U_s\}$.*

We give consequences of Theorems 2 and 3 for the case where $\operatorname{meas} \Omega_s \to \sigma > 0$ and F_s and G_s are integral functionals with the integrands providing the inclusion $\lambda \in \mathbb{R}$ and the fulfillment of conditions $(*_1)$ and $(*_2)$ of Theorem 2. For details concerning the above results and their consequences, see [1]. We also discuss some other results on the convergence of solutions of variational problems with variable implicit constraints in variable domains. They were established in [2] using the notion of Γ-convergence of functionals on variable Sobolev spaces to a functional on a Sobolev space.

References

1. *Kovalevsky A. A.* On the convergence of solutions of variational problems with implicit constraints defined by rapidly oscillating functions // Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN.—2018.—Vol. 24, № 2.—P. 107–122.—(in Russian).
2. *Kovalevsky A. A.* On the convergence of solutions of variational problems with implicit pointwise constraints in variable domains // Funct. Anal. Appl.—2018.—Vol. 52, № 2.—P. 147–150.

УРАВНЕНИЕ СИНУС-ГОРДОНА И УГОЛ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

А. В. Костин (Россия, Елабуга; ЕИ КФУ),
Е. А. Костина (Россия, Москва; МГУ)

Угол между асимптотическими линиями на поверхностях постоянной отрицательной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве традиционно трактуется как решение уравнения синус-Гордона [1]:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin(z).$$

Для поверхностей постоянной положительной кривизны в трехмерном пространстве Минковского имеется аналогичная аналитическая интерпретация углов между асимптотическими как решений дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, в частности, уравнения sinh-Гордона. Для псевдосфер евклидова и псевдоевклидова пространств углу между асимптотическими линиями можно дать простое геометрическое истолкование.

Теорема. *Угол между асимптотическими линиями на псевдосфере Бельтрами — Миндинга равен удвоенному углу параллельности длины дуги асимптотической от ребра возврата псевдосферы.*

Аналогичным образом связаны углы между асимптотическими линиями на двух типах псевдоевклидовых аналогов псевдосферы Бельтрами — Миндинга [2, 3] с углами параллельности в метрике де Ситтера.

Литература

1. *Позняк Э. Г, Попов А. Г.* Геометрия уравнения sin-Гордона // Итоги науки и техн. Сер. Проблемы геометрии.—1991.—Т. 23.—С. 99–130.
2. *Костин А. В.* Об асимптотических линиях на псевдосферических поверхностях // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, № 1.—С. 16–26.
3. *Костин А. В., Костина Н. Н.* Об интерпретации асимптотических направлений // Междунар. молодеж. шк.-сем. «Современная геометрия и ее приложения». Междунар. науч. конф. «Современная геометрия и ее приложения»: сб. тр.—Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017.—С. 75–76.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К УСТАНОВЛЕНИЮ КОРРЕКТНОСТИ И РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДРОБНОГО ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

М. О. Мамчуев
(Россия, Нальчик; ИПМА КБНЦ РАН)

В области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < l, 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x,y) - D_{0y}^{\alpha}u(x,y) = 0, \quad \alpha \in (0,2), \tag{1}$$

где D_{0t}^{γ} — оператор дробного (в смысле Римана — Лиувилля) интегродифференцирования порядка γ [1].

В настоящей работе, на основе полученных необходимых нелокальных условий [2] для уравнения (1), которым удовлетворяют все регулярные решения, предложены способ определения корректности постановок и подход к решению краевых задач для исследуемого уравнения.

Решение $u = u(x,y)$ уравнения (1) называется регулярным в области Ω, если $u_{xx}, D_{0y}^{\alpha}u \in C(\Omega)$, $D_{0y}^{\alpha-k}u \in C(\bar{\Omega})$, $1 \leqslant k \leqslant n$, где $n \in \mathbb{N} : n-1 < \alpha \leqslant n$ [3].

Теорема. *Пусть $u = u(x,y)$ регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условию*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-k}u(x,y) = \tau_k(x), \quad 1 \leqslant k \leqslant n,\ 0 < x < l, \tag{2}$$

$u_x \in C([0,l]\times(0,T))$ *и* $u_x(0,y), u_x(l,y) \in L[0,T]$. *Тогда функция $u(x,y)$ удовлетворяет нелокальным условиям:*

$$u(0,y) + D_{0y}^{-\beta}u_x(0,s) = 2\mathcal{R}_{0y}^{0,l}\big(u(l,s) + D_{0y}^{-\beta}u_x(l,s)\big) + N^0(y), \tag{3}$$

$$u(l,y) - D_{0y}^{-\beta}u_x(l,s) = 2\mathcal{R}_{0y}^{0,l}\big(u(0,s) - D_{0y}^{-\beta}u_x(0,s)\big) + N^l(y), \tag{4}$$

где

$$N^0(y) = 2\sum_{k=1}^{n}\mathcal{N}_{0l}^{\beta-k+1,0,y}\tau_k(t), \quad N^l(y) = 2\sum_{k=1}^{n}\mathcal{N}_{0l}^{\beta-k+1,l,y}\tau_k(t),$$

$$\mathcal{N}_{0l}^{\theta,x,y}\nu(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \nu(t)y^{\theta-1}\phi\big(-\beta,\theta;-|x-t|y^{-\beta}\big)\,dt,$$

$$\mathcal{R}_{0y}^{\delta,x}\mu(s) = \frac{1}{2}\int_0^y \mu(s)(y-s)^{\delta-1}\phi\big(-\beta,\delta;-|x|(y-s)^{-\beta}\big)\,ds,$$

$\beta = \alpha/2$, $\phi(\rho,\mu;z)$ — *функция Райта* [4].

Пусть требуется найти решение уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условию (2) и краевым условиям

$$\mathbf{B}_i\big[u(0,y), u(l,y), u_x(0,y), u_x(l,y)\big] = 0, \quad 0 < y < T, \ i = 1,2, \tag{5}$$

где $\mathbf{B}_i$ — операторы, связывающие граничные значения в условиях (5) ($i = 1,2$). Условия (3), (4) вместе с заданными краевыми условиями (5) образуют систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных — следов решения и его производной на границах области. Разрешимость краевой задачи (1), (2), (5) эквивалентна разрешимости полученной системы уравнений. Далее краевая задача редуцируется к одной из основных локальных краевых задач для дробного диффузионно-волнового уравнения.

Из условий (3), (4) легко видеть, что условия

$$u(0,y) + D_{0y}^{-\beta} u_x(0,s) = \psi_1(y), \quad u(l,y) + D_{0y}^{-\beta} u_x(l,s) = \psi_2(y), \tag{6}$$

не могут быть заданы независимо друг от друга, так же как и условия

$$u(0,y) - D_{0y}^{-\beta} u_x(0,s) = \psi_1(y), \quad u(l,y) - D_{0y}^{-\beta} u_x(l,s) = \psi_2(y). \tag{7}$$

Таким образом, задачи (2), (6) и (2), (7) для уравнения (1) являются переопределенными.

В то же время, при условии $|a| \neq 1$, $|b| \neq 1$, корректна следующая краевая задача.

Задача. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условиям (2) и

$$au(0,y) + D_{0y}^{-\beta} u_x(0,s) = \psi_1(y),$$

$$bu(l,y) + D_{0y}^{-\beta} u_x(l,s) = \psi_2(y).$$

где $\tau_k(x)$ $(k = \overline{1,n})$, $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ — заданные функции.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Мамчуев М. О.* Необходимые нелокальные условия для диффузионно-волнового уравнения // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер.—2014.—№ 7 (118).—С. 45–60.
3. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка.—М.: Наука, 2005.—199 с.
4. *Wright E. M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc.—1933.—Vol. 8, № 29.—P. 71–79.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ

О. Х. Масаева
(Россия, Нальчик; ИПМА КБНЦ РАН)

Рассмотрим в области $D = \{(x, y) : 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ уравнение

$$u_{xx}(x, y) + D_{0y}^{\alpha} u(x, y) = 0, \tag{1}$$

где $1 < \alpha < 2$, D_{0y}^{α} — оператор дробного дифференцирования Римана — Лиувилля порядка α [1]. При $\alpha = 2$ уравнение (1) совпадает с уравнением Лапласа.

Дифференциальные уравнения дробного порядка возникают при математическом моделировании различных физических процессов и явлений [1], в частности в социально-экономических системах [2].

В работах [3, 4] была исследована задача Дирихле для уравнений с производными в смысле Капуто. В работе [5] рассматривалась задача Дирихле для уравнения с оператором дробного дифференцирования Римана — Лиувилля с началом в точке, не лежащей на границе области. В данной работе исследуется следующая задача:

Найти в области D регулярное решение уравнеия (1), *удовлетворяющее условиям*

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \tag{2}$$

$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\alpha-2} u(x, y) = \varphi(x), \quad \lim_{y \to b} D_{0y}^{\alpha-2} u(x, y) = \phi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \tag{3}$$

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Нахушев А. М.* О математических и информационных технологиях моделирования и управления региональным развитием // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук.—2007.—Т 9, № 1.—С. 128–137.
3. *Масаева О. Х.* Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Капуто // Диф. уравнения.—2012.—Т.48, № 3.—С. 442–446.
4. *Масаева О. Х.* Задача Дирихле для нелокального волнового уравнения // Диф. уравнения.—2013.—Т. 49, № 12.—С. 1554–1559.
5. *Masaeva O. Kh.* Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev–Bitsadze equations with a fractional derivative // Electron. J. Differ. Eq.—2017.—Vol. 2017, № 74.—P. 1–8.

О СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ТИПА[1]

Е. Ю. Машков
(Россия, Курск; ЮЗГУ)

Рассматриваются вырожденные системы стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито, в которых в левой и правой частях стоят прямоугольные матрицы, в общем случае зависящие только от времени. Кроме этого, в правой части имеется вектор-функция, зависящая от времени. Предполагается, что матрица в левой части, в случае с квадратными матрицами, не имеет обратной, а для систем с переменными матрицами обе матрицы системы имеют постоянный ранг. В литературе рассматриваемые системы называются алгебро-дифференциальными, дескрипторными, системами леонтьевского типа. На языке этих уравнений в работах А. Л. Шестакова, Г. А. Свиридюка и А. В. Келлер [1] изучается динамическое искаженние сигналов в радиоустройствах. В работах Л. А. Власенко, А. Г. Руткаса, М. С. Филипковской [2], а также O. Schein, G. Denk, T. Sickenberger, R. Winkler [3] рассматриваемые системы возникают при математическом моделировании колебаний и электрических цепей. Стохастические уравнения леонтьевского типа возникают в работах Л. А. Власенко, Ю. Г. Лысенко, А. Г. Руткаса при математическом моделировании динамики корпорации предприятий при использовании инвестирования. Отметим также работы Ю. Е. Бояринцева и В. Ф. Чистякова [4], Г. В. Демиденко, А. В. Келлер и М. А. Сагадеевой, С. М. Чуйко, А. А. Белов, А. П. Курдюков, A. Alabert, S. L. Campbell, в которых очень обстоятельно изучены дифференциальные уравнения леонтьевского типа.

Для исследования данных стохастических систем с матрицами коэффициентов, зависящими от времени, в работе [5] построены различные модификации подходов, описанных в работах Ю. Е. Бояринцева, В. Ф. Чистякова [4] при изучении соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате получены утверждения, в которых для рассматриваемой системы с данными начальными условиями приведены необходимые и достаточные условия существования решений, достаточные условия существования решений, а так же приведены формулы для нахождения этих решений.

Для стохастических систем с постоянными матрицами коэффициентов, образующих регулярный или сингулярный пучки, получены утверждения о их приведении к каноническому виду [6]. Известно, что для исследования канонических систем требуется рассмотрение производных достаточно высоких порядков от правой части, а значит и винеровского процесса. Так как производные

[1]Часть исследований, представленных в докладе, выполнены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00048.

винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций, которые крайне трудны для применения в исследовании конкретных уравнений, предложен новый метод исследования уравнения, основанный на применении аппарата производных в среднем по Нельсону от случайных процессов [7], для описания которых не используются обобщенные функции. Отметим, что понятие производных в среднем было введено Э. Нельсоном в 60-х годах XX века для нужд построенной им стохастической механики (вариант квантовой механики). А именно, применяются симметрические производные в среднем (текущие скорости) винеровского процесса. Текущие скорости, в соответствии с общей идеологией теории производных в среднем по Нельсону, являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов [7]. В результате получены формулы для вычисления симметрических производных в среднем высших порядков от винеровского процесса [6]. Получены аналитические формулы для решений уравнений в терминах симметрических производных в среднем винеровского процесса [6]. Также с применением производных в среднем исследованы стохастические системы с постоянными матрицами и импульсными воздействиями в правой части [8].

Рассмотрен новый класс уравнений — стохастические дифференциальные уравнения леонтьевского типа в текущих скоростях [9, 10]. Для этих уравнений как с постоянными числовыми матрицами коэффициентов, так и с переменными матрицами, получены утверждения о существовании решений.

Литература

1. *Шестаков А. Л., Свиридюк Г. А.* Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та.—2010.—№ 16 (192).—С. 116–120.
2. *Власенко Л. А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями.—Днепропетровск: Систем. технологии, 2006.—273 с.
3. *Sickenberger T., Winkler R.* Stochastic oscillations in circuit simulation // Proc. Appl. Math. Mech.—2007.—Vol. 7, № 1.—P. 4050023–4050023.
4. *Бояринцев Ю. Е., Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования.—Новосибирск: Наука, 1998.—224 с.
5. *Mashkov E. Yu.* On the stochastic systems of differential-algebraic type // J. Comp. Eng. Math.—2014.—Vol. 1, № 1.—P. 34–45.
6. *Gliklikh Yu. E., Mashkov E. Yu.* Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes // Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.—2013.—Vol. 6, № 2.—P. 25–39.
7. *Gliklikh Yu. E.* Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics.—London: Springer-Verlag, 2011.—460 p.
8. *Mashkov E. Yu.* Stochastic Leontief type equations with impulse actions // Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.—2018.—Vol. 11, № 2.—P. 44–61.
9. *Gliklikh Yu. E., Mashkov E. Yu.* Stochastic Leontieff type equations in terms of current velocities of the solution // J. Comp. Eng. Math.—2014.—Vol. 1, № 2.—P. 45–51.
10. *Mashkov E. Yu., Tyutyunov D. N.* Singular Stochastic Leontieff type equations in current velocities of solutions // Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.—2019.—Vol. 12, № 1.—P. 55–65.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА ДЛЯ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Ш. Б. Меражова
(Узбекистан, Бухара; БухГУ)

В данной работе приводится постановка обратной задачи для одного модельного интегро-дифференциального уравнения параболического типа.

Исследование обратных задач для параболических интегро-дифференциальных уравнений с интегральным членом типа свертки представляет большой интерес как в практическом, так и в теоретическом отношении. Обратным задачам определения правой части либо одного из коэффициентов параболического уравнения с дополнительной информацией разных видов посвящен ряд работ.

Рассмотрим задачу определения функций $u(x,y,t)$ и $K(x,t), (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$, из уравнений

$$u_t - \Delta u + c(x,y)\,u = \int\limits_0^t K(x,\tau)\,u(x,y,t-\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x,y), \tag{2}$$

$$u\big|_{y=0} = g(x,t), \tag{3}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $c(x,y) \in C(\mathbb{R}^2)$ — заданная функция. Будем предполагать что $\varphi(x,y) \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)$, $|\varphi(x,y)| \geqslant \mathrm{const} > 0$, $g(x,t) \in \mathrm{C}^{2,2}(\mathbb{R}^1_T)$, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\varphi(x,0) = g(x,0), \tag{4}$$

и эти функции ограничены по x, y.

$$\mathbb{R}^2_T = \{(x,y,t) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < t < T\}, \quad T > 0.$$

Заметим, что дополнительное условие (3) задается на плоскости, ортогональной той переменной, от которой ядро интегрального члена в (1) не зависит. Это специальное задание дополнительной информации позволяет получить для искомых функций замкнутую систему интегральных уравнений второго рода. Необходимо отметить, что метод работы основан на получении вначале вспомогательной задачи, в которой в дополнительном условии содержится неизвестная функция и ядро $K(x,t)$ [1].

В данной работе получена теорема, характеризующая однозначную разрешимость поставленной задачи.

Литература

1. *Дурдиев Д. К., Рашидов А. Ш.* Обратная задача определения ядра в одном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 1.—С. 110–116.

БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 2 В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С СИММЕТРИЕЙ

И. В. Моршнева
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Рассматриваются бифуркации коразмерности 2 в динамических системах, инвариантных относительно линейного ортогонального действия группы O(2). Примеры систем с такой симметрией дают задачи о возникновении конвективных течений вязкой несжимаемой жидкости и жидкости с примесью, расположенной в бесконечном горизонтальном или вертикальном слое [1]. Для исследования используется метод сведения на центральное многообразие. Построены все возможные резонансные амплитудные системы в окрестности значений параметров, при которых нейтральный спектр линейного оператора состоит из двух пар чисто мнимых собственных значений. Впервые системы амплитудных уравнений для задачи Куэтт — Тейлора, обладающей цилиндрической симметрией, были построены в работах В. И. Юдовича [2], P. Chossat, Y. Demay, G. Iooss [3].

Проведено исследование амплитудных систем на инвариантных подпространствах. Показано, что в условиях общего положения возможно возникновение периодических решений типа бегущих волн и их нелинейных суперпозиций, а также возникновение квазипериодических решений. Получены явные выражения для асимптотик возникающих решений и для величин, определяющих характер их ветвления и устойчивость. Приводятся применения теории к задачам конвекции.

Литература

1. *Моршнева И. В.* Бифуркация рождения цикла в динамических системах с симметрией и ее приложения в гидродинамике.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2010.—140 с.
2. *Юдович В. И.* Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости // Аннот. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике.—Ташкент: ФАН, 1986.—661 с.
3. *Chossat P., Demay Y., Iooss G.* Interaction de modes azimutaux dans le probleme de Couette-Taylor // Arch. Rational. Mech. Anal.—1987.—Vol. 99.—P. 213–248.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ИЗ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ж. З. Нуриддинов
(Узбекистан, Бухара; БухГУ)

Рассмотрим задачу определения функций $u(x,t)$ и $K(x',t)$, $x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n$, $t>0$ из уравнений

$$u_t = a(t)\Delta u - \int\limits_0^t k(x',\tau)\,u(x,t-\tau)\,d\tau, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^n_T, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2}$$

$$u\big|_{x_n=0} = f(x',t), \quad x'\in\mathbb{R}^{n-1}_T, \tag{3}$$

где $a(t)\in C^1[0,T]$, $|a(t)|\geqslant a_0>0$, a_0 — заданное число, $\mathbb{R}^n_T=\{(x,t)\,|x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n,\ 0<t<T\}$, $T>0$. Будем предполагать что

$$\varphi(x)\in \mathrm{C}^4\big(\mathbb{R}^n\big), \quad |\varphi(x)|\geqslant \mathrm{const}>0, \quad f(x',t)\in \mathrm{C}^{2,2}\big(\overline{\mathbb{R}}^{n-1}_T\big),$$
$$\overline{\mathbb{R}}^n_T=\big\{(x',t)\big|\,x'\in\mathbb{R}^{n-1},\ 0\leqslant t\leqslant T\big\}, \quad \varphi(x',0)=f(x',0),$$

и эти функции ограничены по x, пространства $\mathrm{C}^\alpha(\Omega)$, $\mathrm{C}^{\alpha,\beta}(\Omega)$ и норма в них определены в [1].

Имеет большой интерес как в практическом, так и в теоретическом отношениях исследование обратных задач для гиперболических и параболических интегро-дифференциальных уравнений с интегральным членом типа свертки. К таким уравнениям в случае параболического уравнения приводят задачи распространения тепла в средах, где состояние среды в данный момент времени зависит от ее состояния во все предыдущие моменты времени. Интегральный оператор в (1) описывает влияние предыстории на процесс распространения тепла, взванного начальной температурой среды (2). В данной статье обратная задача (1)–(3) исследуется на основе метода, использованного в работе [2]. Заметим, что дополнительное условие (3) задается на плоскости, ортогональной той переменной, от которой ядро интегрального члена в (1) не зависит. Это специальное задание дополнительной информации позволяет получить для искомых функций замкнутую систему интегральных уравнений второго рода. Необходимо отметить, что метод работы [2] основан на получении вначале вспомогательной задачи, в которой в дополнительном условии содержится неизвстная функция, т. е. ядро $k(x',t)$.

Лемма. *Задача* (1)–(3) *эквивалентна задаче определения функций* $(w(x,t),$ $k(x',t))$ *из следующих уравнений:*

$$\omega_t - \Delta\omega = \frac{a'(t)}{a^2(t)} \int\limits_0^t k(x',\tau)\, v(x,t-\tau)\, d\tau -$$
$$- \frac{1}{a(t)}\left[\frac{1}{a(t)}\, k(x',t)\, \varphi_{x_n x_n}(x) + \int\limits_0^t k(x',\tau)\, \omega(x,t-\tau)\, d\tau\right], \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n_T, \tag{4}$$

$$\omega\big|_{t=0} = \Delta\varphi_{x_n x_n}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$\omega\big|_{x_n=0} = \frac{1}{a(t)}\, f_{tt} - \frac{1}{a(t)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\, f_t - \frac{a'(t)}{a^2(t)} \int\limits_0^t k(x',\tau)\, f(x',t-\tau)\, d\tau +$$
$$+ \frac{1}{a(t)}\left[\frac{1}{a(t)}\, k(x',t)\, f(x',0) - \frac{1}{a(t)} \int\limits_0^t k(x',\tau)\, f_t(x',t-\tau)\, d\tau\right], \quad (x',t) \in \mathbb{R}^{n-1}_T. \tag{6}$$

По ходу доказательство этой леммы, мы показываем эквивалентность задачи (4)–(6) системе интегральных уравнений относительно неизвестных функций $w(x,t)$, $k(x',t)$.

Далее, представляя систему интегральных уравнений в виде операторного уравнения, при помощи сжатых отображений доказываем единтсвенность ноставленной задачи.

Таким образом, доказано следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\varphi(x) \in \mathrm{C}^4(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0$, $f(x',t) \in \mathrm{C}^{2,2}(\mathbb{R}^T_n)$, $f(x',0) = \varphi(x',0)$. *Тогда существует достаточно малое число* T *такое, что задача* (4)–(6) *имеет единственное решение* $\omega(x,t)$, $k(x',t)$ *в слое* $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Литература

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.—М.: Наука, 1967.
2. *Безнощенко Н. Я.* Об определении коэффициента в параболическом уравнении // Диф. уравнения.—1974.—Т. 10, № 1.—С. 24–35.

О СПЕКТРЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА[1]

Д. М. Поляков
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Пусть $L_2[0,\omega] = L_2([0,\omega],\mathbb{C})$. Настоящий доклад посвящен описанию асимптотики собственных значений дифференциального оператора третьего порядка $L_\theta : D(L_\theta) \subset L_2[0,\omega] \to L_2[0,\omega]$, $\theta \in [0,1]$, который определяется следующим дифференциальным выражением:

$$l(y) = iy^{(3)}(t) - ia(t)y'(t) - b(t)y(t),$$

где коэффициенты a, b являются комплекснозначными и принадлежат $L_2[0,\omega]$. Область определения $D(L_\theta) = \{y : y \in W_2^3([0,\omega],\mathbb{C})\}$ задается квазипериодическими краевыми условиями $y^{(j)}(0) = e^{i\pi\theta}y^{(j)}(\omega)$, $\theta \in [0,1]$, $j = 0,1,2$. Отметим, что при $\theta = 0$ краевые условия будут периодическими, а при $\theta = 1$ — антипериодическими.

Интерес к изучению данного оператора связан с тем, что он возникает в различных задачах механики и физики. В частности, при исследовании моделей потока тонкой пленки вязкой жидкости или моделей колебания эластичной балки (см. [1]). Кроме того, операторы третьего порядка возникают в методе обратной задачи интегрирования нелинейного эволюционного уравнения Буссинеска [2]. Спектральный анализ вещественного самосопряженного оператора третьего порядка с негладкими коэффициентами был ранее проведен в [3].

Для исследования оператора L_θ применяется новая техника, которая развивает идеи из [4] и [5]. Эта техника позволяет уточнить, а в ряде случаев усилить, известную ранее асимптотику собственных значений (см. [6]).

Теорема. *Дифференциальный оператор L_θ, $\theta \in [0,1]$, является оператором с дискретным спектром. Более того, найдется такое достаточно большое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что спектр оператора L_θ представим в виде*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \cup \left\{\widetilde{\lambda}_{n,\theta}, |n| \geqslant m+1\right\}, \tag{1}$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом точек не превосходящим $2m+1$. Собственные значения $\widetilde{\lambda}_{n,\theta}$ являются однократными и допускают следующую асимптотику:

$$\widetilde{\lambda}_{n,\theta} = \frac{\pi^3(2n+\theta)^3}{\omega^3} + \frac{\pi(2n+\theta)}{\omega^2}\int\limits_0^\omega a(t)\,dt - \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega b(t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{8\pi}\left(\int\limits_0^\omega a(t)(a*h_n)(t)\,dt - h_n^0\right) - \frac{1}{2i\pi\sqrt{3}}\left(\int\limits_0^\omega a(t)(a*\widetilde{h}_n)(t)\,dt - \widetilde{h}_n^0\right) +$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00205.

$$+\frac{\omega}{6\pi^2(2n+\theta)}\left(\frac{12}{\sqrt{3}}\int\limits_0^\omega a(t)(b*g_n)(t)\,dt+\int\limits_0^\omega a(t)(b*f_n)(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^\omega (a*f_n)(t)b(t)\,dt-g_n^0-2f_n^0\right)+\mathcal{O}\bigl(n^{-2}\bigr),\quad |n|\geqslant m+1,$$

где

$$f_n(t)=-i\pi\left(\frac{2t}{\omega}+e^{-\pi vt/\omega}-e^{\pi v(t/\omega-1)}\right),$$

$$g_n(t)=\frac{\pi}{2}\left(e^{\pi vi(i-\sqrt{3})t/(2\omega)}+e^{\pi vi(i+\sqrt{3})(-t/(2\omega)+1/2)}\right),$$

$$h_n(t)=-\frac{i4\pi t}{3\omega}\left(2-(1-i\sqrt{3})e^{i2\pi\alpha t/\omega}-(i\sqrt{3}+1)e^{-i2\pi\beta t/\omega}\right),$$

$$\widetilde{h}_n(t)=\frac{i2\pi t}{\omega}\left(e^{-i2\pi\beta t/\omega}-e^{i2\pi\alpha t/\omega}\right),$$

$$\alpha=\frac{i\sqrt{3}-3}{4}\,(2n+\theta),\quad \beta=\frac{i\sqrt{3}+3}{4}\,(2n+\theta),\quad v=\sqrt{3}\,(2n+\theta),$$

и f_n^0, g_n^0, h_n^0, $\widetilde{h}_n^0$ *— средние значения функций* $a*(b*f_n)$, $a*(b*g_n)$, $a*(a*h_n)$, $a*(a*\widetilde{h}_n)$, *соответственно:*

$$f_n^0=\int\limits_0^\omega (a*(b*f_n))(t)\,dt,\quad g_n^0=\int\limits_0^\omega (a*(b*g_n))(t)\,dt,$$

$$h_n^0=\int\limits_0^\omega (a*(a*h_n))(t)\,dt,\quad \widetilde{h}_n^0=\int\limits_0^\omega (a*(a*\widetilde{h}_n))(t)\,dt.$$

Литература

1. *Bernis F., Peletier L. A.* Two problems from draining flows involving third-order ordinary differential equations // SIAM J. Math. Anal.—1996.—Vol. 27, № 2.—P. 515–527.
2. *McKean H.* Boussinesq's equation on the circle // Comm. Pure Appl. Math.—1981.—Vol. 34, № 2.—P. 599–691.
3. *Баданин А. В., Коротяев Е. Л.* Оператор третьего порядка с периодическими коэффициентами на вещественной оси // Алгебра и анализ.—2013.—Т. 25, № 5.—С. 1–31.
4. *Баскаков А. Г., Поляков Д. М.* Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом // Мат. сб.—2017.—Т. 208, № 1.—С. 3–47.
5. *Поляков Д. М.* Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями // Алгебра и анализ.—2015.—Т. 27, № 5.—С. 117–152.
6. *Veliev O. A.* On the nonself-adjoint ordinary differential operators with periodic boundary conditions // Israel J. Math.—2010.—Vol. 176.—P. 195–207.

О ПОИСКЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В КЛАССАХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ И СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С. С. Постнов
(Россия, Москва; ИПУ РАН)

Ранее для исследования задач оптимального управления системами дробного порядка был применен метод моментов, который позволяет строить в явном виде оптимальные управления и исследовать их свойства [1–3]. В этом случае заранее не предполагается непрерывность или дифференцируемость управлений, а также задаются явные ограничения на норму оптимального управления. В настоящей работе рассматривается применение метода моментов для систем дробного порядка с сосредоточенными параметрами. Отдельное внимание уделяется особенностям решений задач оптимального управления в случае, когда управления являются суммируемыми на отрезке функциями.

В общем случае система дробного порядка с сосредоточенными параметрами может быть задана набором уравнений следующего вида:

$$ {}_{t_0}D_t^{\rho_i} q_i(t) = a_{ij} q_j(t) + b_{ij} u_j(t) + f_i(t), \quad i,j = 1,\ldots,N, \tag{1} $$

где функции $\vec{q}(t) = (q_1(t),\ldots,q_N(t))$, $\vec{u}(t) = (u_1(t),\ldots,u_N(t))$ и $\vec{f}(t) = (f_1(t),\ldots,f_N(t))$ определяют состояние, управление и возмущение соответственно; $t \in (t_0, T]$, $T > t_0 \geqslant 0$; a_{ij} и b_{ij} — коэффициенты, которые, вообще говоря, могут быть функциями времени; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Оператор дробного дифференцирования ${}_{t_0}D_t^{\rho_i}$ в формуле (1) понимается в смысле Хильфера ${}_{t_0}^{Hil}D_t^{\rho_i}$, Адамара ${}_{t_0}^{H}D_t^{\rho_i}$ или Эрдейи — Кобера ${}_{t_0}^{EK}D_t^{\rho_i}$, а индекс ρ_i является в общем случае составным и может включать до трех показателей.

Рассматриваются управления, являющиеся функциями $L_p(0,T]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Начальные условия для системы (1) задаются, как правило, в нелокальном виде

$$ \lim_{t \to t_0+} [{}_{t_0}I_t^{\sigma_i} q_i(t)] = s_i^0, \quad i = 1,\ldots,N, \tag{2} $$

где оператор дробного интегрирования ${}_{t_0}I_t^{\sigma_i}$ понимается следующим образом: в смысле Римана — Лиувилля, если оператор дробного дифференцирования в формуле (1) понимается в смысле Хильфера; в смысле Адамара или Эрдейи — Кобера, если оператор дробного дифференцирования в формуле (1) понимается в смысле Адамара или Эрдейи — Кобера соответственно. Показатель σ_i также является в общем случае составным.

Конечные условия для системы (1) задаются в виде

$$ q_i(T) = q_i^T, \quad i = 1,\ldots,N. \tag{3} $$

Исследуются две задачи оптимального управления:

1) задача поиска управления, переводящего систему (1) из начального состояния, определяемого условиями (2), в конечное состояние (3) и имеющего минимальную норму при заданном времени управления T;

2) задача поиска управления, переводящего систему (1) из начального состояния, определяемого условиями (2), в конечное состояние (3) за минимальное время при заданном ограничении на норму управления, $\|\vec{u(t)}\| \leqslant l$, $l > 0$.

Обе задачи сводятся к l-проблеме моментов, для которой исследуются условия, определяющие возможность постановки и разрешимость [1–3]. В случаях, когда эти условия выполнены, при $p > 1$ получены и исследованы аналитические решения поставленных задач оптимального управления [1–3]. В данной работе рассмотрен отдельно случай $p = 1$, когда аналитическое решение задачи оптимального управления существует и выражается суммируемой на отрезке функцией, но может быть неединственным. Исследованы свойства такого решения.

Литература

1. *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка в форме проблемы моментов: постановка и исследование // Автоматика и телемеханика.—2014.—№ 5.—С. 3–17.
2. *Постнов С. С.* Задачи оптимального управления для линейных систем дробного порядка, заданных уравнениями с производной Адамара // Докл. АН.—2017.—Т. 476, № 2.—С. 143–147.
3. *Постнов С. С.* l-проблема моментов для одномерных линейных систем, заданных интегро-дифференциальными уравнениями с операторами Эрдейи — Кобера // Оптимальное управление и дифференциальные игры: материалы Междун. конф., посвященной 110-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина.—М.: Изд-ва МИАН и МАКС Пресс, 2018.—С. 227–230.

ФУНКЦИЯ ГРИНА ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ[1]

А. В. Псху
(Россия, Нальчик; ИПМА КБНЦ РАН)

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} - \Delta_x\right) u(x,y) = f(x,y) \qquad (0 < \sigma < 2), \tag{1}$$

где $\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma}$ — дробная производная порядка σ [1], $\Delta_x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ — оператор Лапласа по переменной $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

В докладе обсуждается вопрос построения функции Грина первой краевой задачи для уравнения (1) в цилиндрической области, в основании которой лежит ограниченная или неограниченная по пространственным переменным прямоугольная область.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-51-45005.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ЯДРА УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ СО СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Ж. Ш. Сафаров
(Узбекистан, Ташкент; ТУИТ)

Рассматривается двумерное дифференциальное уравнение вязкоупругости в ограниченной по переменной x области $D := \{(x,t) : 0 < x < l, t > 0\}$

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{zz} + \int_0^t k(t-\tau,x)(u_{xx}+u_{zz})(\tau,x,z)d\tau, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}_+,\ z \in (0,l), \tag{1}$$

с начальным и граничными условиями

$$u\big|_{t<0} \equiv 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u + \int_0^t k(t-\tau,x)u(\tau,x,z)\,d\tau\right)\bigg|_{z=0} = \delta(x)\delta(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u + \int_0^t k(t-\tau,x)u(\tau,x,z)\,d\tau\right)\bigg|_{z=l} = 0. \tag{3}$$

Обратную задачу поставим следующим образом: требуется найти ядро $k(t,x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, интегрального члена в (1), если известны значения решения задачи (1)–(3) при $z = 0$, т. е. задана функция

$$u(t,x,0) = g(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

При этом предполагается, что ядро $k(t,x)$ слабо зависит от горизонтальной переменной x:

$$k(t,x) = k_0(t) + \varepsilon x k_1(t) + \ldots, \tag{5}$$

где ε — малый параметр.

Одномерная обратная задача для уравнения вязкоупругости в различных областях исследована в работах [1–3].

Решение прямой задачи (1)–(3) будем искать в виде ряда по степеням ε, т. е.

$$u(t,z,x) = u_0(t,z,x) + \varepsilon u_1(t,z,x) + \ldots \tag{6}$$

Подставляя (6) в уравнение (1) и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получим, в итоге, рекуррентную систему прямых задач, из которых находятся u_0, u_1 и т. д. Тогда, очевидно, согласно формуле (5) функция $g(x,t)$ будет иметь такую же структуру:

$$g(t,x) = g_0(t,x) + \varepsilon g_1(t,x) + \ldots$$

Используя разложения функции u по формуле (6), функции k по формуле (5), находим, что обратная задача (1)–(4) распадается на следующие задачи последовательного определения $k_0, k_1, \ldots$:

$$u_{0tt} = u_{0xx} + u_{0zz} + \int\limits_0^t k_0(t-\tau)(u_{0xx} + u_{0zz})(\tau,x,z)\,d\tau, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}_+,\ z \in (0,l).$$

$$u_0|_{t<0} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u_0 + \int\limits_0^t k_0(t-\tau)u_0(\tau,x,z)\,d\tau\right)\bigg|_{z=0} = \delta(x)\delta(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u_0 + \int\limits_0^t k_0(t-\tau)u_0(\tau,x,z)\,d\tau\right)\bigg|_{z=l} = 0,$$

$$u_0\big|_{z=0} = g_0(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2;$$

$$u_{ntt} = u_{nxx} + u_{nzz} + \int\limits_0^t \sum_{j=0}^n x^j k_j(t-\tau)(u_{(n-j)xx} + u_{(n-j)zz})(\tau,x,z)\,d\tau,$$

$$u_n|_{t<0} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u_n + \int\limits_0^t k_j(t-\tau)u_n(\tau,x,z)\,d\tau\right)\bigg|_{z=0} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u_n + \int\limits_0^t k_j(t-\tau)u_n(\tau,x,z)\,d\tau\right)\bigg|_{z=l} = 0,$$

$$t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad z \in (0,l).$$

$$u_n\big|_{z=0} = g_n(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ n = 1,2,\ldots$$

Основным результатом данной работы является то, что удалось построить метод нахождения $k_0(t)$ и $k_1(t)$ с точностью до величины порядка $O(\varepsilon^2)$.

Литература

1. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. матем.—2013.—Т. 16, № 2.—С. 72–82.
2. *Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш.* Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области // Мат. заметки.—2015.—Т. 97, № 6.—С. 855–867.
3. *Сафаров Ж. Ш.* Одномерная обратная задача для уравнения вязкоупругости в ограниченной области // Журн. Средневолж. мат. о-ва.—2015.—Т. 17, № 4.—С. 44–55.

О ПОДКЛАССАХ ЗВЕЗДНЫХ И СПИРАЛЕОБРАЗНЫХ ФУНКЦИЯХ

М. Д. Султыгов
(Россия, Магас; ИнгГУ)

Пусть m, n — произвольные фиксированные вещественные числа, удовлетворяющие условию $(m,n) \in G^* = G_1 \cup G_2$, где

$$G_1 = \left\{(m,n):\ \frac{1}{2} < m < 1,\ 1 - m \geqslant n \geqslant m\right\}, \tag{1}$$

$$G_2 = \{(m,n):\ m \leqslant 1,\ m - 1 \geqslant n \geqslant m\}, \tag{2}$$

а также μ и v — действительные числа такие, что $0 < \mu < 1$ и $|v| \leqslant \pi/2$.

В 1971 г. Якубовский [1] ввел класс $S^*_{m,M}(\mu, v)$ регулярных функций $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$, удовлетворяющих условию

$$\left|\frac{\frac{e^{iv} z f'(z)}{f(z)} - i \sin v - \mu \cos v}{(1-\mu)\cos v} - m\right| < M \tag{3}$$

для всех точек $z \in E$.

Теорема 1. *Аналитическая функция $f(z) \in S$ будет принадлежать классу функций $S^*(\alpha, \beta)$ тогда и только тогда, когда*

$$\left|\frac{\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1}{2\beta\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha\right) - \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)}\right| < 1 \tag{4}$$

для всех действительных α и β таких, что $0 \leqslant \alpha < 1$ и $0 < \beta \leqslant 1$.

Теорема 2. *Аналитическая функция $f(z) \in S$ будет принадлежать классу функций $S_\lambda(\alpha, \rho, \mu)$ тогда и только тогда, когда*

$$\left|\frac{e^{i\lambda}\frac{zf'(z)}{f(z)} - i \sin \lambda}{\cos \lambda} - \alpha - \rho\right| < \rho \tag{5}$$

при $|\lambda| < \pi/2$, $0 \leqslant \alpha < 1$ и $\alpha + \rho \geqslant 1$.

Теорема 3. *Имеет место:*

$S^*(\alpha, \beta) = S^*_{M,M}(\alpha, 0)$; $M = 1/(2(1-\beta))$.

$S^\lambda(\alpha, \beta) = S^*_{1+M,M}(\alpha, \lambda)$; $M = 2\beta^2/(1-\beta^2)$.

$M(\alpha, \beta) = S^*_{m,M}(0, 0)$; $m = (1 + \alpha\beta^2)/(1 - \alpha^2\beta^2)$ и $M = (1+\alpha)\beta/(1 - \alpha^2\beta^2)$.

$S_\lambda(\alpha, \rho, \mu) = S^*_{M,M}(\alpha, \lambda)$; $M = \rho/(1-\alpha)$.

Теорема 4. *Будем говорить, что аналитическая функция $f(z) \in S$ будет принадлежать классу функций $S^*_{m,M}(\mu, v, \alpha, t)$ тогда и только тогда, когда*

$$\left| \frac{\frac{e^{iv} z f'(z)}{f(z)} - i \sin v - \mu \cos v}{(1-\mu)\cos v} - m - \alpha - it \right| < M, \tag{6}$$

где m, α, t, M — действительные числа такие, что $|v| < \pi/2$, $-\infty \leqslant \alpha < 1$, $\mu < 1$, $m > 0{,}5$, $-\infty < t < \infty$, $M^2 = 1 + 2(m + \alpha - m\alpha) - m^2 - \alpha^2 - t^2 > 0$, $M > 0$.

Теорема 5. *Функция $f(z) \in S^*_{m,M}(\mu, v, \alpha, t)$ тогда и только тогда, когда существует некоторая регулярная в $E = \{z : |z| < 1\}$ функция $\omega(z)$, $\omega(0) = 0$ и $|\omega(z)| < 1$ такая, что*

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1 + [e^{-iv}(A+B)(1-\mu)\cos v - B]\omega(z)}{1 - B\omega(z)}, \tag{7}$$

где $A + B > 0$, $A = [M^2 - m^2 + m(1-2\alpha) + \alpha(1-\alpha) + it - t^2]/M$ и $B = (m + \alpha - 1 - it)/M$.

Литература

1. *Jakubowski Z. J.* On the coefficients of starlike functions of some classes // Bull. Acad. Polon. Des Sci., Ser. des Sci. Math., Astronom. et Phys.—1971.—Vol. 19.—P. 811–815.
2. *Juneja O. P., Mogra M. L.* On starlike functions of order α and type β // Key. Rum. Math.—1978.—Vol. 23.—P. 751–765.
3. *Mogra M. L., Juneja O. P.* Coefficient estimates for starlike functions // Bull. Aust. Math. Soc.—1977.—Vol. 16.—P. 415–425.
4. *Mogra M. L.* On a subclass of starlike functions in the unit disc I // J. Indian Math. Soc.—1976.—Vol. 40.—P. 159–161.
5. *Lakshminarasimhan T. V.* On sub-classes of functions starlike in the unit disc // J. Indian Math. Soc.—1977.—Vol. 41.—P. 233–243.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ СЛАБО ГОРИЗОНТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Ж. Д. Тотиева
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Рассмотрим при $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $t \in R$, $x_3 > 0$, систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$u_i\big|_{t<0} \equiv 0, \tag{2}$$

$$T_{3j}\big|_{x_3=+0} = -\frac{\delta_{1j}\delta(x_2)\delta'(t)}{2}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{3}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ — вектор смещений, $\delta(\cdot)$ — дельта-функции Дирака, $\delta'(\cdot)$ — производная $\delta(\cdot)$; T_{ij} — тензор напряжений:

$$T_{ij}(x,t) = \sigma_{ij}[u](x,t) + \int\limits_0^t k(x_2, t-\tau)\sigma_{ij}[u](x,\tau)\, d\tau, \tag{4}$$

σ_{ij} — напряжения, для которых согласно закону Гука имеет место представление

$$\sigma_{ij}[u](x,t) = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij}\lambda divu. \tag{5}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера.

Предполагается, что $\rho = \rho(x_3)$, $\mu = \mu(x_3)$, $\lambda = \lambda(x_3)$ являются функциями одной переменной, удовлетворяющими условиям $\rho(x_3) \geqslant m > 0$, $\mu(x_3) \geqslant m > 0$, $\lambda(x_3) \geqslant m > 0$, $m = \mathrm{const}$, причем $\rho'(+0) = \mu'(+0) = \lambda'(+0) = 0$.

Прямая задача заключается в отыскании вектор-функций $u(x,t)$ из системы уравнений (1) при соответствующих начальных и граничных условиях (2), (3).

Обратная задача заключается в определении ядра $k(x_2, t)$, $t > 0$, входящего в (1) посредством формулы (4), если относительно решения задачи (1)–(5) известна дополнительная информация

$$u_1(x_2, x_3, t)\big|_{x_3=+0} = g(x_2, t), \quad t > 0,\ x_2 \in R, \tag{6}$$

$g(x_2, t)$ — заданная функция.

Определение. Функция $k(x_2,t)$ из класса непрерывных функций $C(R\times[0,\infty))$ называется решением обратной задачи (1)–(6), если соответствующее ей решение прямой задачи (1)–(3) $u(x,t)$ из класса обобщенных функций $D'(R^3_+\times R)$ удовлетворяет (6) для $g(x_2,t)$, принадлежащих классу обобщенных функций $D'(R\times[0,\infty))$.

Настоящее исследование относится к классу обратных задач линейной динамической вязкоупругости. Вязкоупругая среда является средой с памятью (состояние таких сред в текущий момент времени зависит от всей предыстории процесса). Искомой величиной в поставленной задаче является ядро интегрального оператора, моделирующего явление памяти, которое имеет место при распространении волновых процессов в вязкоупругих средах.

Следует отметить работу [1], в которой рассмотрена одна модельная задача определения двумерного ядра интегро-дифференциального уравнения в среде со слабо горизонтальной неоднородностью. В этой работе развиты методы решения обратных задач исследования [2].

Предполагаем, что $k(x_2,t)$ слабо зависит от горизонтальной переменной x_2:

$$k(x_2,t)=k_0(t)+\varepsilon x_2 k_1(t)+O\big(\varepsilon^2\big), \tag{7}$$

где ε — малый параметр.

В работе предложен метод нахождения $k_0(t)$ и $k_1(t)$ с точностью до величины $O(\varepsilon^2)$. Решение прямой задачи (1)–(5) будем искать в виде ряда по степеням ε:

$$u(x_2,x_3,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j u_j(x_2,x_3,t). \tag{8}$$

Тогда, учитывая (6) и (8), имеем

$$g(x_2,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j g_j(x_2,t).$$

Так как метод предполагает определение $k_0(t),\ k_1(t)$ с точностью до поправки порядка $O(\varepsilon^2)$, то в этом случае, подставляя (8), (7) в (1), получаем две обратные одномерные задачи последовательного определения $k_0(t),\ k_1(t)$.

Результатами исследования являются теоремы глобальной однозначной разрешимости и устойчивости решения обратной задачи.

Литература

1. *Дурдиев Д. К., Бозоров З. Р.* Задача определения ядра интегро-дифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью // Дальневост. мат. журн.—2013.—№ 2.—С. 209–221.
2. *Благовещенский А. С., Федоренко Д. А.* Уравнения акустики в слабо горизонтально-неоднородной среде // Зап. науч. сем. ПОМИ.—2008.—Т. 354.—С. 81–99.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ш. С. Хубежты

(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Строятся вычислительные схемы для приближенного решения сингулярного интегрального уравнения I рода, ограниченного на одном конце и не ограниченного на другом конце интервала интегрирования. Используются ряды Чебышева [1]. Коэффициенты разложения неизвестной функции находятся с помощью решения линейных алгебраических уравнений.

Рассматривается сингулярное интегральное уравнение I рода

$$\mathbb{K}\varphi_0 \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_0(t)}{t-x}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(x,t)\varphi_0(t)\,dt = f(x), \tag{1}$$

где $-1 < x < 1$, $K(x,t)$ и $f(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_0(t)$ — неизвестная функция.

Пусть X — пространство функций вида $\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, производная которой удовлетворяет условию Гёльдера $H(\alpha)$ ($\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$), т. е. $\varphi(t) \in H_1(\alpha)$. Y — пространство функций $y(t) \in H(\alpha)$. Тогда уравнение (1) можно переписать в таком виде

$$\mathbb{K}_0\varphi \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x). \tag{2}$$

Доказывается, что оператор $\mathbb{K}(\mathbb{K}_0)$ действует из пространства X в пространство Y.

Известно, что многочлены вида [2]

$$C_n(t) = \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\arccos t}{\cos\frac{1}{2}\arccos t}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

являются ортогональными многочленами с весом $p(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ на отрезке $[-1; 1]$. Они называются многочленами Чебышева III рода. Поэтому мы можем разложить функции $\varphi(t)$, $K(x,t)$ и $f(x)$ в ряды по многочленам Чебышева III рода [2].

Имеем

$$\begin{gathered}\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k(t),\\ K(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} c_{il}C_i(x)C_l(t), \quad (4)\\ f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i C_i(x).\end{gathered}$$

Коэффициенты a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — неизвестные, остальные коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$C_{il} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,K(x,t)C_i(x)\,dx\right)C_l(t)\,dt,$$
$$d_i = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}f(t)C_i(t)\,dt. \tag{5}$$

Подставляя разложения (4) в (2), получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{1}{t-x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_kC_k(t)\right)dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}c_{il}C_i(x)C_l(t)\right)\sum_{k=0}^{\infty}a_kC_k(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}d_iC_i(x).$$

Используя формулу обращения [2]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{C_k(t)}{t-x}\,dt = S_k(x), \tag{6}$$

где $S_k(x) = \frac{\sin\frac{2k+1}{2n}\arccos x}{\sin\frac{1}{2}\arccos x}$ — многочлены Чебышева IV рода, свойства ортогональных многочленов и учитывая равномерную сходимость рядов Чебышева, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kS_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{i=0}^{\infty}c_{ik}C_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty}d_iC_i(x). \tag{7}$$

Разложим еще $S_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ в ряд Чебышева по многочленам $C_i(x)$. Имеем

$$S_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty}b_{ik}C_i(x), \quad b_{ik} = \begin{cases}2, & i<k,\\ 1, & i=k,\\ 0, & i>k.\end{cases}$$

Таким образом получаем

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_kb_{ik}\right)C_i(x)+\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_kc_{ik}\right)C_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty}d_iC_i(x).$$

Отсюда следует

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kb_{ik}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kc_{ik} = d_i, \quad i = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Система (8) — это бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a_0, a_1, a_2, … Ее можно решать приближенно, рассматривая конечную систему n уравнений:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(b_{ik} + c_{ik}) = d_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{9}$$

После нахождения неизвестных a_k ($k = 0, 1, \ldots, n$) приближенное решение будет выражаться функцией

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k(t). \tag{10}$$

Справедлива следующая теорема [3].

Теорема. *Если существует линейный обратный оператор* $\mathbb{K}$ *и функции* $K(x,t)$ *и* $f(x)$ *принадлежат классу* $H_r(\alpha)$ (*т. е. имеют непрерывные производные порядка* $r-1$, *а производная порядка* r *удовлетворяют условию Гёльдера с показателем* α $(\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1)$), *то при некоторых условиях система* (8) *имеет единственное решение и справедлива оценка*

$$\left|\varphi(t) - \varphi_n(t)\right| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\beta}}\right), \quad 0 < \beta < \alpha, \tag{11}$$

где $\varphi(t)$ — *решение уравнения* (2), $\varphi_n(t)$ — *его приближенное решение вида* (10).

Аналогично рассматривается случай, когда ищется решение уравнения (1) в виде $\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\varphi(t)$, где $\varphi(t) \in H_1(\alpha)$.

Литература

1. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.—М.: Наука, 1983.—384 с.
2. *Хубежты Ш. С.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2011.—236 с.
3. *Бойков И. В., Бойкова А. И., Сёмов М. А.* Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода // Изв. вузов. Поволж. регион. Физ.-мат. науки. Математика.—2015.—№ 3 (35).—С. 11–27.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Б. И. Эфендиев
(Россия, Нальчик; ИПМА КБНЦ РАН)

В интервале $0 < x < l$ рассмотрим уравнение

$$\int\limits_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha}\, u(x)\, d\alpha + \lambda u(x) = f(x), \tag{1}$$

где

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{u(t)\, dt}{(x-t)^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

— оператор дробного дифференцирования Римана — Лиувилля порядка α [1], $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, $\mu(\alpha)$, $f(x)$ — заданные функции, λ — заданная постоянная.

Дифференциальный оператор вида

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} a_{\xi}(x)\, D_{0x}^{\xi} u(x)\, d\xi$$

был впервые введен в работе [1], а в [2] изучены его свойства.

В данной работе построено фундаментальное решение уравнения (1) и изучены его свойства. Найдено решение задачи Коши для уравнения (1) в явном виде. Доказана теорема единственности и существования решения исследуемой задачи.

Литература

1. *Нахушев А. М.* О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Докл. АН СССР.—1988.—Т. 300, № 4.—С. 796–799.
2. *Нахушев А. М.* О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Диф. уравнения.—1998.—Т. 34, № 1.—С. 101–109.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Т. К. Юлдашев
(Россия, Красноярск; СибГУ)

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению смешанных, краевых и обратных задач для уравнений в частных производных. Теория смешанных и краевых задач в силу ее прикладной важности в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений и сингулярные дифференциальные уравнения. В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме.

В настоящей работе изучается однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для сингулярного дифференциального уравнения гиперболического типа.

Задача. Найти в области $\Omega = \{(t,x) : 0 < t < T, 0 < x < l\}$ функцию $U(t,x)$, удовлетворяющую уравнению

$$U_{tt} - \lambda^2 U_{xx} + \frac{k}{x} U_x = 0$$

и следующим условиям:

$$U(t,x) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1\bigl(\Omega \cup \{x=0\} \cup \{x=l\}\bigr) \cap C^2(\Omega),$$

$$U(t,0) = U(t,l) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\int\limits_0^T U(t,x)\,dt = \varphi(x), \quad \int\limits_0^T U_t(t,x)t\,dt = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

где T и l — заданные положительные действительные числа, $k \neq 0$ — известная произвольная постоянная, λ — положительный спектральный параметр, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$, $\overline{\Omega} = \bigl\{(t,x) : 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant l\bigr\}$.

Рассмотрены вопросы классической разрешимости и построения решения нелокальной смешанной задачи для однородного сингулярного дифференциального уравнения гиперболического типа. Использован спектральный метод, основанный на разделение переменных. Здесь четко выражается роль спектрального параметра в изучении вопросов разрешимости и построения решений. Вычисляются значения спектрального параметра λ, при которых исследуется разрешимость рассматриваемой задачи и строятся соответствующие решения в случае их существования. Установлен критерий однозначной разрешимости поставленной задачи и доказана соответствующая теорема для случая регулярных значений спектрального параметра λ. Данная работа является дальнейшим развитием работ [1–3].

Литература

1. *Юлдашев Т. К.* Об одной краевой задаче для трехмерного аналога дифференциального уравнения Буссинеска // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2016.—Т. 158.—№ 3.—С. 424–433.
2. *Юлдашев Т. К.* О разрешимости одной краевой задачи для дифференциального уравнения типа Буссинеска // Диф. уравнения.—2018.—Т. 54.—№ 10.—С. 1411–1419.
3. *Юлдашев Т. К.* Об одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром // Геометрия и механика. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обзоры. Т. 145.—М.: ВИНИТИ РАН, 2018.—С. 95–109.

Секция III

Математическое моделирование и анализ данных

МОДЕЛИ СОЦИАЛЬНОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СОЦИАЛЬНЫХ ГРУПП

Е. К. Басаева (Россия, Владикавказ; СОГУ),
Е. С. Каменецкий (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Внешним проявлением борьбы элитных групп являются политические кризисы, в некоторых случаях приводящие к смене власти. Как правило, причиной конфликта элитных групп являются социоэкономические факторы. В ходе политической борьбы элитная группа, стремящаяся к захвату власти, может использовать массы для участия в акциях протеста и, возможно, вооруженного сопротивления силам правопорядка. Высокая возбудимость народных масс является необходимым условием быстрого роста социальной напряженности. Это в свою очередь позволяет контрэлите использовать их в своих политических целях.

В работе [1] приведена математическая модель, описывающая взаимодействие двух социальных групп с использованием системы двух дифференциальных уравнений. В данной работе в качестве взаимодействующих социальных групп рассматриваются элита и народ. Предположим, что состояние элиты не зависит от предыстории и однозначно определяется двумя факторами: экзогенным — экономической ситуацией, и эндогенным — напряженностью народа. В этом случае напряженность народа является параметром порядка.

Таким образом, напряженность народа описывается дифференциальным уравнением, а напряженность элиты — алгебраическим. Математическая модель, описывающая такую социальную систему, имеет вид:

$$P_1 = \frac{U_1 \frac{\gamma}{c_1}(1-P_2) + P_2^2}{\eta_1 P_2^2 + \left(1 - \frac{\gamma}{c_1} - \eta_1\right) P_2 + \frac{\gamma}{c_1}}, \tag{1}$$

$$\frac{dP_2}{dt} = \left(c_2 \eta_2 P_1 - \gamma - c_2 \frac{P_1}{1-P_1}\right) P_2 + \gamma U_2 + c_2 \frac{P_1^2}{1-P_1}. \tag{2}$$

Здесь $P_1 = P_1(t)$ и $P_2 = P_2(t)$ — напряженности элиты и народа соответственно, $U_1 = U_1(t)$ и $U_2 = U_2(t)$ — функции, определяющие влияние экономической ситуации на элиту и народ ($P_1, P_2, U_1, U_2 \in [0;1]$); γ, $\eta_i \in [0,1]$, c_1 и c_2 — параметры модели.

В качестве примера применения модели рассмотрены процессы в Индонезии, Грузии и на Украние перед свержением режимов Сухарто, Шеварднадзе и Януковича соответственно. Экономическое положение народа оценивалось по ВВП на душу населения. Отметим, что в уравнении (2) параметр η_2 зависит от предыстории страны и увеличивается в годы, когда в стране имеет место политическое насилие.

Верифицировать результаты расчетов по модели для P_2 можно с помощью таких индикаторы социальной напряженности, как число убийств и самоубийств на 100000 человек. Статистические индикаторы социальной напряженности элиты нам не известны. В связи с этим возникает обратная задача определения неизвестных параметров, входящих в уравнение (1).

Предварительный анализ показывает:

– состояние элиты перед революционными потрясениями характеризуется высокими значениями параметров η_1 и c_1, что соответствует большей возбужденности элиты и зависимостью внутриэлитной борьбы от напряженности народных масс;

– через несколько лет после смены режима значение параметров η_1, c_1 уменьшается, т. е. элита успокаивается и внутриэлитные процессы перестают зависеть от напряженности народа.

Литература

1. *Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х.* Математическое моделирование социальной напряженности взаимодействующих социальных групп // Анализ и моделирование мировой и страновой динамики: экономические и политические процессы / Отв. ред. С. Ю. Малков, Л. Е. Гринин.—М.: Изд-во «Учитель», 2016.—С. 130–144.

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СРЕДАХ, ОБЛАДАЮЩИХ «ПАМЯТЬЮ»

З. В. Бештокова
(Россия, Нальчик; ИПМА КБНЦ РАН)

1. Постановка первой краевой задачи

В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0, T]$, основанием которого является прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$ с границей $\Gamma, \overline{G} = G \cup \Gamma$, рассмотрим первую краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u\big|_\Gamma = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\,\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{1}{p}\int\limits_0^t K(x, t, \tau)\, u(x, \tau)\, d\tau,$$

$0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x, t) \leqslant c_1$, $|K(x, t, \tau)| \leqslant c_2$, c_0, c_1, c_2 — положительные постоянные.

2. Локально-одномерная схема

Цепочка p одномерных разностных уравнений, аппроксимирующих (1)–(3), имеет следующий вид:

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \tag{4}$$

$$y^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big|_{\gamma_{h,\alpha}} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \tag{5}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \tag{6}$$

$$\Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)_{x_\alpha} - \frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} K\big(x_1, x_2, \dots, x_p; t_j, t_{j'}\big)\, y\big(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\big)\,\tau,$$

$a_\alpha = k_\alpha(x^{(-0.5h_\alpha)}, \bar{t}\,)$, $x^{(-0.5h_\alpha)} = (x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha - 0.5h_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_p)$, $\bar{t} = t^{j+1/2}$, $\gamma_{h,\alpha}$ — множество граничных по направлению x_α узлов.

Для решения (4)–(6) разностной задачи справедлива

Теорема 1. *Локально-одномерная схема (4)–(6) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (4)–(6) справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\left\|y^{j'+1}\right\|^2_{L_2(\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}_{\bar{x}\alpha}\right\|^2_{L_2(\omega_h)}\leqslant\\ \leqslant M(t)\left(\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)}+\left\|y^0\right\|^2_{L_2(\omega_h)}\right),\end{gathered}\tag{7}$$

где $M(t)>0$ не зависит от h_α и τ.

Решение задачи для погрешности $z_{(\alpha)}=z^{j+\alpha/p}$ представим в виде суммы $z_{(\alpha)}=\upsilon_{(\alpha)}+\eta_{(\alpha)}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)}-\eta_{(\alpha-1)}}{\tau}=\overset{\circ}{\psi}_\alpha,\quad x\in\omega_h+\gamma_\alpha,\quad \alpha=1,2,\ldots,p,$$

$$\eta(x,0)=0.$$

Функция $\upsilon_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\upsilon_{(\alpha)}-\upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau}=\Lambda_\alpha\upsilon_{(\alpha)}+\widetilde{\psi}_\alpha,\quad x\in\omega_h,\quad \alpha=1,2,\ldots,p,$$

$$\upsilon_{(\alpha)}=-\eta_\alpha,\quad x_\alpha\in\gamma_{h,\alpha},\quad \upsilon(x,0)=0,\quad \widetilde{\psi}_\alpha=\psi^*_\alpha+\Lambda_\alpha\eta_{(\alpha)}.$$

Для сходимости локально-одномерной схемы (4)–(6) справедлива

Теорема 2. *Пусть (1)–(3) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x,t)$ и существуют непрерывные $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2\partial x_\beta^2},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2\partial t},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2},\quad \alpha=1,2,\ldots,p,\ \alpha\neq\beta.$$

Тогда локально-одномерная схема (4)–(6) сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(3) со скоростью $O(|h|^2+\tau)$ так, что

$$\left\|y^{j+1}-u^{j+1}\right\|_1\leqslant M\bigl(|h|^2+\tau\bigr),\quad |h|^2=h_1^2+h_2^2+\cdots+h_p^2.$$

$$\left\|z^{j+1}\right\|_1=\left(\left\|z^{j+1}\right\|^2_{L_2(\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|z^{j+\frac{\alpha}{p}}_{\bar{x}_\alpha}\right\|^2_{L_2(\omega_h)}\right)^{1/2}.$$

Литература

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.
2. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛЕЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ В ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛАХ[1]

И. В. Богачев
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Математическое моделирование новых функционально-градиентных материалов (ФГМ) с учетом наличия в них полей предварительных напряжений и деформаций (ПНД) является новой активно развивающейся отраслью механики. Практический интерес к таким материалам объясняется тем, что их свойства являются переменными относительно пространственных координат и могут значительно изменяться по объему тел. Отметим подкласс ФГМ, обладающих реологическими свойствами, для которых характерны процессы ползучести и релаксации, протекающие в процессе их эксплуатации. Так, при изготовлении вязкоупругих полимерных композитов используется технология автоклава с последующим отвердеванием полученного материала, что позволяет избежать появления микродефектов, трещин и отслоений в композите. Но такая технология приводит к образованию остаточных напряжений и деформаций, которые существенно влияют на механические характеристики композита. Эти факторы вызывают необходимость разработки неразрушающих методик определения уровня и распределения ПНДС по объему изделия.

С использованием общей линеаризованной постановки задачи о движении предварительно напряженно-деформированного упругого анизотропного тела в данной работе представлена постановка задачи об установившихся колебаниях неоднородного предварительно напряженно-деформированного тела с учетом реологии, записанная с использованием теории комплексных модулей и принципа соответствия. На ее основе рассмотрена задача о колебаниях неоднородной вязкоупругой трубы в случае плоской деформации и предполагалось, что ПНДС и механические свойства зависят от радиальной координаты. Проведен сравнительный анализ влияния факторов предварительных напряжений и остаточных деформаций на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ). Анализ показал существенно более значительное влияние на АЧХ остаточных деформаций, чем предварительных напряжений. В связи с этим, с практической точки зрения интерес вызывает исследование задач о колебаниях объектов с учетом только функции остаточной деформации. Сформулирована и решена обратная задача идентификации уровня и вида остаточной деформации в трубе на основе данных об АЧХ в окрестности ее максимумов. Ввиду существенной нелиней-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 18-71-10045.

ности сформулированной задачи была построена итерационная схема решения на основе метода линеаризации и решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с помощью регуляризационных методов. Представлены результаты вычислительных экспериментов в случаях, когда наличие остаточных деформаций является следствием как упругого или пластического деформирования, так и когда деформации могли возникнуть в результате термического воздействия и законы их изменения могут быть произвольными.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГАЗООБРАЗНЫХ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В ПЕШЕХОДНОЙ ЗОНЕ УЛИЦЫ С ДОМАМИ РАЗНОЙ ВЫСОТЫ

М. В. Волик

(Россия, Владикавказ; Владикавказский филиал ФУ, ЮМИ ВНЦ РАН)

В настоящее время оценка концентрации загрязняющих веществ (ЗВ) в воздухе вне помещений является одной из актуальных экологических задач. Выбросы промышленных предприятий, автомобилей и пожаров негативным образом сказываются на экологической ситуации городов, здоровье людей, климате и т. д. Решением этих актуальных задач является исследование переноса вредных примесей с использованием методов математического моделирования и современных цифровых технологий, позволяющих сократить не только временные, но и материальные затраты [1–3].

В данной работе исследуется распространение газообразных ЗВ, поступающих с окраины города или от автотранспорта, на уровне пешеходов внутри улицы с домами разной высоты. Математическое моделирование течения воздуха и распространения газообразных ЗВ проводилось с помощью свободно распространяемого пакета OpenFoam и удаленного доступа к суперкомпьютеру Web-лаборатории UniHUB (`www.unihub.ru`) по программе «Университетский кластер» (`www.unicluster.ru`). Для проведения вычислительных экспериментов использовался стандартный решатель pimpleFoam для турбулентного течения жидкости и собственный решатель myPimpleFoam, который позволяет решать в безразмерном виде уравнение для определения концентрации ЗВ [4–6]. Вычислительные эксперименты проводились в двумерной постановке для интервала времени от 0 до 2000 сек. с шагом 0.001 сек. Использовалась равномерная расчетная сетка в прямоугольной расчетной области с шагом по пространству 1 м. Исследовались варианты, когда дом меньшей высоты расположен на наветренной или подветренной стороне улицы.

В результате расчетов получено, что образовавшиеся вихревые структуры в разных конфигурациях улицы оказывают значительное влияние на распространение загрязняющих веществ и их накопление в пешеходной зоне (на наветренной или подветренной стороне). Расположение более высокого дома на подветренной стороне улицы приводит к экранированию от поступающих с окраины города ЗВ. Однако, максимальное проветривание от антропогенных выбросов автотранспорта наблюдается в случае расположения более высокого дома на наветренной стороне. Такое распределение ЗВ на уровне пешеходов обусловлено скоростью и направлением течения воздуха внутри улицы.

Литература

1. *Абаева З. В., Ашабоков Б. А., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная разностная схема для уравнения переноса пассивных примесей в атмосфере // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН.—2016.—№ 1 (69).—С. 12–19.
2. *Крапошин М. В., Самоваров О. И., Стрижак С. В.* Особенности реализации WEB-лаборатории механики сплошной среды на базе технологической платформы программы «Университетский кластер» // Науч. сервис в сети Интернет: экзафлопсное будущее. Тр. Междунар. суперкомпьютерной конф.—2011.—С. 473–475.
3. *Самохина А. С., Сетуха А. В., Кирякин В. Ю., Марчевский И. К., Щеглов Г. А.* Имитационная модель распространения поражающего агента в городской застройке // Управление большими системами: сб. тр.—2008.—№ 20.—С. 77–94.
4. *Каменецкий Е. С., Волик М. В., Тагиров А. М.* Математическое моделирование распространения загрязняющих веществ, выбрасываемых автотранспортом // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН.—2014.—№ 6 (62).—С. 23–31.
5. *Волик М. В.* Исследование влияния длины улиц на течение воздуха в них // Тр. Института системного программирования РАН.—2014.—Т. 26, № 5.—С. 201–212.
6. *Волик М. В.* Численное моделирование распространения загрязняющих веществ, выбрасываемых низко расположенными источниками, внутри улиц // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН.—2016.—№ 1 (69).—С. 20–27.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ И КОНЦЕНТРАЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ В МИКРОТЕЧЕНИЯХ ЭЛЕКТРОЛИТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ[1]

Г. С. Ганченко (Россия, Краснодар; ЛЭГМиН),
Н. Ю. Ганченко (Россия, Краснодар; КубГУ)

Исследования электрических эффектов в жидкостях началось довольно давно, еще со времен работ Гельмгольца [1], тем не менее на практике открытые явления долгое время были не востребованы и только в последнее время начали внедряться в реальные устройства. Это связано, в первую очередь, с тем, что электрические феномены в жидкостях, как правило, основаны на процессах, происходящих в тонких (порядка 10 нм) двойных электрических слоях, и такие феномены едва ли способны значимо повлиять на поведение в большом объеме электролита. С другой стороны, в микромасштабах поверхностные эффекты начинают играть первостепенную роль, и именно в микроканалах они находят особенно интересные применения для управления жидкостями. Электрофизические процессы в жидкостях могут быть использованы для проектирования лабораторий на чипе, где в микроканалах будет происходить управление (транспорт, перемешивание, разделение) жидкостей с помощью электрического поля. Математическое моделирование подобных процессов крайне важно, так как позволяет не только избежать дорогостоящих экспериментов, но и способствует открытию новых эффектов, таких как электроконвективная неустойчивость [2], которая была сначала предсказана теоретически и только потом была обнаружена экспериментально. Данный доклад посвящен моделированию гравитационных эффектов и их влиянию на поведение электролита в расположенном горизонтально относительно силы тяжести микрозазоре между двумя ионоселективными поверхностями при наличии разности электрических потенциалов между ними. Электролит моделируется диэлектрической жидкой фазой при наличии в ней ионов растворенных в ней солей, которые и создают электрический ток через жидкость. Составляется уравнение транспорта ионов в жидкости под действием внешнего электрического поля, их диффузии и конвекции. Жидкая фаза моделируется как вязкая несжимаемая жидкость в приближении Стокса с добавлением силового слагаемого, соответствующего силе Кулона и заключающегося в том, что поток ионов увлекает за собой жидкость. Под ионоселективными поверхностями понимают такие границы, которые пропускают только один тип ионов (положительные или отрицательные). В качестве таких поверхностей могут выступать ионообменные мембраны, которые характерны тем, что

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №№ 18-58-15004-НЦНИ_а, 19-48-233009-р_мол_а, 19-48-233010-р_мол_а, 18-38-00611-мол_а, и Совета по грантам Президента Российской Федерации (МК-5302.2018.1).

около них скапливается существенно больший заряд, чем около обычных заряженных частиц, что усиливает действие электрокинетических эффектов [3]. В модели учитывается Джоулев нагрев электролита, который влияет на плотность электролита, в приближении Буссинеска. Плотность электролита также зависит от концентрации соли в различных областях канала, что мы и называем концентрационными эффектами.

Наши исследования показали, что учет таких эффектов не только количественно влияет на характеристики микротечения, но и приводит к возникновению нового вида тепловой неустойчивости [4, 5], которая качественно отличается от неустойчивости Рэлея — Бенара. В то же время в системе возникает конвективная неустойчивость, когда более концентрированный электролит занимает положение около верхней границы. Интересным оказался факт, что между тепловой и концентрационной неустойчивостями происходит конкуренция, так как для них неустойчивые положения противоположны относительно силы тяжести: при повороте зазора на 180 градусов дестабилизирующий и стабилизирующий факторы меняются местами.

Литература

1. *Helmholtz H. V.* Studien über electrische Grenzschichten // Annalen der Physik.—1879.—Vol. 243, № 7.—P. 337–382.
2. *Rubinstein I., Zaltzman B.* Electro-osmotically induced convection at a permselective membrane // Phys. Rev. E.—2000.—Vol.62, № 2.—P. 2238–2251.
3. *Nikonenko V. V., Pismenskaya N. D., Belova E. I., Sistat P., Huguet P., Pourcelly G., Larchet C.* Intensive current transfer in membrane systems: Modelling, mechanisms and application in electrodialysis // Adv. Coll. Int. Sci.—2010.—Vol. 160.—P. 101–123.
4. *Demekhin E. A., Amiroudine S., Ganchenko G. S., Khasmatulina N. Yu.* Thermoelectroconvection near charge-selective surfaces // Phys. Rev. E.—2015.—Vol. 91, № 6.—P. 063006.
5. *Kalaydin E. N., Ganchenko N. Yu., Ganchenko G. S., Nikitin N. V., Demekhin E. A.* Thermoelectrokinetic instability and salt superconcentration near permselective electric membranes // Phys. Rev. Fluids.—2017.—Vol. 2, № 11.—P. 917–925.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ ДИФФУЗИИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Н. Ф. Димитриева
(Украина, Киев; ИГМ НАНУ, КПИ)

В неоднородной жидкости частицы примеси перемещаются по вертикали под действием сил плавучести и формируют устойчивую стратификацию. Изменения плотности обычно малы, однако их градиенты могут быть большими, что оказывает заметное влияние на динамику протекающих процессов.

В силу сложности изучаемого явления и описания нелинейных эффектов одним из основных инструментов анализа таких гидродинамических задач становится численное моделирование. Современные вычислительные методы позволяют исследовать характеристики течения в полной нелинейной постановке и естественных переменных. Однако, учет многомасштабности процессов предъявляет высокие требования к вычислительным ресурсам и методам численного моделирования.

Поскольку скорости исследуемых течений малы по сравнению со скоростью звука, математическая модель данных физических процессов основана на системе балансных дифференциальных уравнений неоднородной многокомпонентной жидкости в приближении Буссинеска, пренебрегая эффектами сжимаемости:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_{00}}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{v} - s\mathbf{g}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s = \kappa_S \Delta s + \frac{v_z}{\Lambda}, \quad \rho = \rho_{00}(\exp(-z/\Lambda) + s),$$

$$v_x|_{x,z\to\infty} = U, \quad v_z|_{x,z\to\infty} = 0, \quad s|_{x,z\to\infty} = 0, \quad \mathbf{v}|_\Sigma = 0,$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}}\right|_\Sigma = \left.\frac{\partial s}{\partial \mathbf{n}}\right|_\Sigma + \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

Здесь $S = S_0(z) + s(x,z,t)$ — общая соленость, включая коэффициент солевого сжатия, s — возмущение солености, S_0 и ρ_0 — соленость и плотность соответственно на нулевом уровне (горизонте нейтральной плавучести), $\mathbf{v}$ — вектор скорости, $\mathbf{U}$ — скорость внешнего потока, P — давление, ν и κ_S — постоянные коэффициенты кинематической вязкости и диффузии соли соответственно, t — время, g — ускорение свободного падения, ∇, Δ — операторы Гамильтона и Лапласа соответственно, $\Lambda = (d\ln\rho/dy)^{-1}$ и $N = \sqrt{g/\Lambda}$ — масштаб и частота плавучести соответственно, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности тела Σ. В качестве начальных условий задачи обтекания тела внешним потоком использовались ранее рассчитанные поля физических переменных течения, индуцированного диффузией, на неподвижном клине [1].

Численное моделирование поставленной задачи реализовано в вычислительном пакете с открытым исходным кодом OpenFOAM. Предложенная методика основана на стандартной численной модели icoFoam, которая дополняет стандартные коды пакета программными модулями, учитывающими эффекты стратификации и диффузии [2]. Расчетная сетка позволяет разрешать самые тонкие элементы потока в высокоградиентных областях потока, особенно вблизи поверхности препятствия. Параллельные вычисления проводились в веблаборатории UniHUB (`www.unihub.ru`).

В рамках настоящей работы были проведены расчеты обтекания клина потоком стратифицированной жидкости. Существенное отличие обтекания стратифицированной жидкостью от однородной наблюдается в поле опережающих возмущений (рис. 1 (а)). Увеличение скорости движения приводит к пропорциональному увеличению длины присоединенной внутренней волны. При больших скоростях обтекания, превышающих характерные скорости индуцированных диффузией течений, эффекты стратификации проявляются в меньшей степени. При скоростях движения $U > 1$ см/с в следе за клином формируются вихревые возмущения (рис. 1 (б)). На границах раздела внутренних присоединенных волн и вихревого следа формируются высокоградиентные области [3].

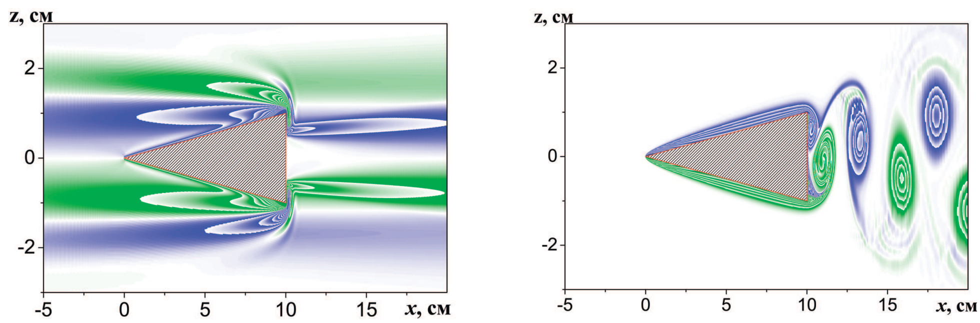

Рис. 1. Поле завихренности: (а) $U = 0.1$ см/с; (б) $U = 10$ см/с.

Литература

1. *Димитриева Н. Ф., Чашечкин Ю. Д.* Тонкая структура стратифицированного течения около неподвижного и медленно движущегося клина // Океанология.—2018.—Т. 58, № 3.—С. 358–368.
2. *Димитриева Н. Ф.* Численное решение задачи обтекания клина потоком стратифицированной жидкости с использованием OpenFOAM // Тр. ИСП РАН.—2017.—Т. 29, № 1.—С. 7–20.
3. *Dimitrieva N. F.* Formation of the vorticity field of a stratified fluid near a wedge // Proc. Topical Problems of Fluid Mechanics.—Prague: Institute of Thermomechanics, 2019.—P. 69–76.

О КОЛЕБАНИЯХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО ЦИЛИНДРА[1]

В. В. Дударев
(Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН; Ростов-на-Дону, ЮФУ),
Р. М. Мнухин
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Возможности современных производственных технологий позволяют создавать функционально-градиентные материалы с переменными свойствами, которые изменяются по пространственным координатам. Такие материалы используются в различных областях: медицине (создание индивидуальных имплантов), аэрокосмической и тяжелой промышленносях (покрытия частей летальных аппаратов и отдельные структурные элементы). Основное преимущество функционально-градиентных материалов — существенное снижение вероятности появления трещин или отслоений.

В работе на основе общей постановки задачи о движении неоднородного упругого изотропного тела [1] рассмотрены две задачи об установившихся колебаниях полого цилиндра с переменными по радиальной координате материальными свойствами (параметры Ламе и плотность). Торцевые поверхности находятся в состоянии скользящих заделок. В первой задаче колебания вызваны периодической нормальной нагрузкой, приложенной на внешней боковой поверхности и изменяющейся вдоль продольной координаты по четному закону. Во второй задаче на боковой поверхности приложена касательная нагрузка, направленная вдоль образующей цилиндра и изменяющаяся по нечетному закону. Используя метод разделения переменных, решение обеих задач сведено к численному решению набора независимых систем дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Решение каждой системы осуществлено с помощью метода пристрелки. Исследовано влияние различных законов изменения параметров Ламе на значения компонент вектора перемещений и тензора напряжений, амплитудно-частотной характеристики. Анализ полученных результатов показал значимость учета переменных свойств для неоднородных материалов.

Для исследования первой обратной коэффициентной задачи об определении законов изменения переменных свойств сформулирована слабая постановка задачи. На ее основе с помощью метода линеаризации получено интегральное соотношение, связывающее неизвестные функции поправок и данные об амплитудно-частотной характеристике, измеренной в области нагружения. Решение второй

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 18-71-10045.

обратной задачи об определении законов изменения параметров Ламе по данным о значениях компонент вектора смещения, измеренных внутри цилиндра, основано на обращении дифференциального оператора. Для каждой из задач освещены аспекты наиболее точной процедуры реконструкции.

Литература

1. *Калинчук В. В., Белянкова Т. И.* Динамика поверхности неоднородных сред.—М.: Физматлит, 2009.—316 с.

ИЗУЧЕНИЕ ПРОЦЕССОВ ГИДРОФИЗИКИ В ГЕЛЕНДЖИКСКОЙ БУХТЕ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ[1]

А. И. Забалуева (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
В. Н. Литвинов (Россия, Зерноград; АЧИИ),
А. В. Никитина (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Таганрог, НИЦ СЭ и НК),
А. А. Филина (Россия, Таганрог; НИЦ СЭ и НК),
А. Е. Чистяков (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Функционирование Геленджика как приморского курорта невозможно без использования его природного потенциала, в результате чего уникальный природный комплекс находится под воздействием ряда антропогенных факторов, значительно ухудшающих экологическую обстановку. Математическим моделированием процессов гидрофизики и биологической кинетики Геленджикской бухты занимались Д. А. Никифоров, Н. М. Привалова, А. И. Сухинов и др.

В качестве входной информации для моделирования гидрофизических процессов Геленджикской бухты использовалась карта глубин (рис. 1).

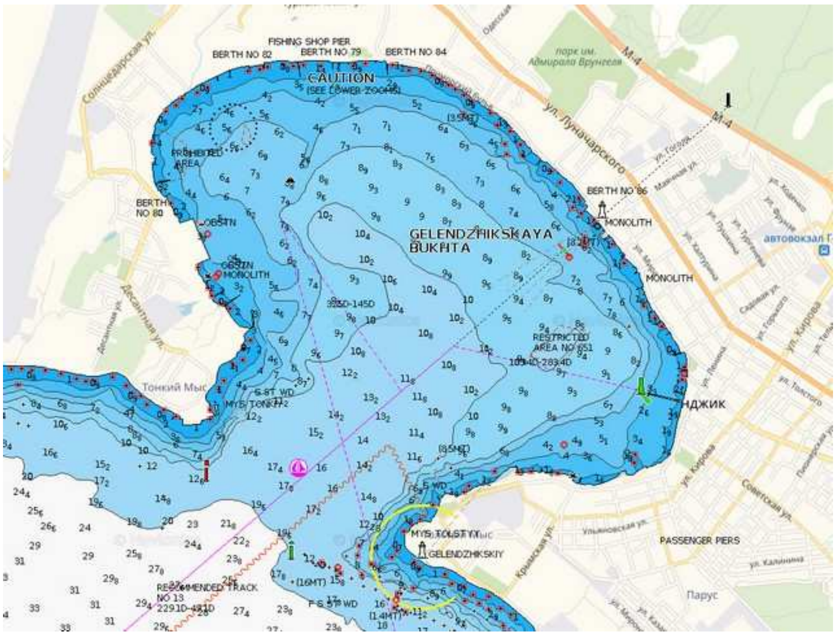

Рис. 1. Батиметрическая карта Геленджикской бухты.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 17-11-01286.

Исходными уравнениями гидрофизики Геленджикской бухты являются [1]:
– уравнения движения (Навье — Стокса):

$$u'_t + uu'_x + vu'_y + wu'_z =$$
$$= -\frac{1}{\rho}p'_x + \left(\mu u'_x\right)'_x + \left(\mu u'_y\right)'_y + \left(\nu u'_z\right)'_z + 2\,\Omega(v\sin\theta - w\cos\theta),$$
$$v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z = -\frac{1}{\rho}p'_y + \left(\mu v'_x\right)'_x + \left(\mu v'_y\right)'_y + \left(\nu v'_z\right)'_z - 2\Omega u\sin\theta, \qquad (1)$$
$$w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z =$$
$$= -\frac{1}{\rho}p'_z + \left(\mu w'_x\right)'_x + \left(\mu w'_y\right)'_y + \left(\nu w'_z\right)'_z + 2\Omega u\cos\theta + g\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right);$$

– уравнение неразрывности:

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0, \qquad (2)$$

где $\mathbf{u} = \{u, v, w\}$ — компоненты вектора скорости; p — превышение давления над гидростатическим давлением невозмущенной жидкости; ρ — плотность; Ω — угловая скорость вращения земли; θ — угол между вектором угловой скорости и вертикалью; μ, ν — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена.

К системе уравнений (1), (2) добавим уравнения для температуры и солености [2] и следующие граничные условия:

– на входе (устья реки Су-Аран и ручьев, стекающих с Маркотхского хребта): $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, $p'_n = 0$;

– боковая граница (берег и дно): $\rho_v \mu \mathbf{u}'_\mathbf{n} = -\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{u}_\mathbf{n} = 0$, $p'_n = 0$;

– верхняя граница: $\rho\mu(\mathbf{u}_{\boldsymbol{\tau}})'_\mathbf{n} = -\boldsymbol{\tau}$, $w = -\omega - p'_t/\rho g, p'_n = 0$;

– на выходе (водообмен с Черным морем) $p'_n = 0$, $\mathbf{u}'_\mathbf{n} = 0$,

где $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_x, \tau_y\}$ — вектор тангенциального напряжения (закон Ван-Дорна); $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности, описывающей границу расчетной области; ρ_v — плотность взвеси.

Вектор тангенциального напряжения для свободной поверхности будем рассчитывать по формуле

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_a C d_s \,|\mathbf{w}|\, \mathbf{w},$$

где $\mathbf{w}$ — вектор скорости ветра относительно воды, ρ_a — плотность атмосферы, Cd_s — безразмерный коэффициент поверхностного сопротивления, который зависит от скорости ветра; для дна с учетом движения воды $\boldsymbol{\tau} = \rho C d_b \,|\mathbf{u}|\, \mathbf{u}$, $Cd_b = gk^2/h^{1/3}$, где k — групповой коэффициент шероховатости в формуле Мэннинга; h [м] — глубина акватории.

Достоверность разработанной модели обуславливается учетом определяющих физических факторов (турбулентный обмен, сложная геометрия дна и береговой линии, испарение и пр.). Точность моделирования достигается использованием подробных расчетных сеток, учитывающих частичную заполненность расчетных ячеек, а также отсутствием неконсервативных диссипативных слагаемых и нефизичных источников (стоков) [3].

Литература

1. *Четверушкин Б. Н.* Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // Мат. моделирование.—2012.—Т. 24, № 11.—С. 33–52.
2. *Shishenya A. V.* Three-dimensional model of hydrodynamics and heat and salinity transfer in the sea of azov taking into account wind-surge phenomena // Izvestiya SFedU. Engineering Science.—2011.—№ 8 (121)—P. 44–57.
3. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Угольницкий Г. А. , Усов А. Б., Никитина А. В., Пучкин М. В., Семенов И. С.* Теоретико-игровые регламенты механизмов управления устойчивым развитием мелководных экосистем // Автоматика и телемеханика.—2017.—№ 6.—С. 122–137.

УСЛОВИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ СПЛОШНОЙ СОЦИАЛЬНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ

А. В. Казарников
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Рассматривается уравнение сплошной социальной стратификации [1, 2]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = U(x,t) - \gamma P + \mu(x)P^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(C(x)\,k(P)\,\frac{\partial P}{\partial x}\right), \tag{1}$$

где $P = P(x,t) \in [0,1)$ — показатель социальной напряженности [3], $x \in (0,1)$ — переменная стратификации, $\mu(x)$ — функция самовозбуждения системы, $k(P)$ — коэффициент нелинейной передачи напряженности, $U(x,t)$ — внешнее воздействие, $C(x)$ — стратификационная передача напряженности, $\gamma > 0$ — коэффициент успокоения системы, $t > 0$ — безразмерное время. Предполагается, что функция $k(P)$ имеет вид

$$k(P) = \frac{P}{1-P},$$

и на границе отрезка $(0,1)$ заданы однородные краевые условия Неймана

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=0,1} = 0. \tag{2}$$

Положив в (1) $U \equiv U_0 > 0$, $C \equiv C_0 > 0$ и $\mu \equiv \mu_0 > 0$, получим уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial t} = U_0 - \gamma P + \mu_0 P^2 + C_0\frac{\partial}{\partial x}\left(k(P)\,\frac{\partial P}{\partial x}\right). \tag{3}$$

Будем считать коэффициенты γ, μ_0 и C_0 фиксированными, а U_0 — изменяющимся управляющим параметром.

Целью данной работы является получение достаточных условий глобальной ограниченности решений уравнения (3) при различных значениях управляющего параметра U_0.

Предположим, что $U_0 \leqslant \frac{\gamma^2}{4\mu_0}$. Тогда существует пара пространственно-однородных стационарных решений уравнения (3)

$$P_0^1 = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\mu_0 U_0}}{2\mu_0}, \quad P_0^2 = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\mu_0 U_0}}{2\mu_0}.$$

Используя теоремы сравнения для нелинейных параболических уравнений [4, 5], в работе доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть $U \leqslant U_0$ и $P(x,t)$ — классическое решение задачи (2)–(3), причем $0 \leqslant P(x,0) < P_0^1$. Тогда $P(x,t) \to P_0^2$ при $t \to +\infty$.*

Утверждение 2. *Пусть* $U \leqslant U_0$ *и* $P(x,t)$ — *классическое решение задачи* (2)–(3), *причем* $P(x,0) > P_0^1$. *Тогда найдется* $t^* > 0$ *такое, что* $P(x,t) \to +\infty$ *при* $t \to t^*$.

Утверждение 3. *Пусть* $U \leqslant U_0$ *и* $P(x,t)$ — *классическое решение задачи* (2)–(3), *причем* $H_0 = \int_0^1 P(x,0)dx > P_0^1$. *Тогда найдется* $t^* > 0$ *такое, что* $P(x,t) \to +\infty$ *при* $t \to t^*$.

Пусть $U > U_0$. Тогда справедливо утверждение.

Утверждение 4. *Пусть* $U > U_0$ *и* $P(x,t)$ — *классическое решение задачи* (2)–(3). *Тогда найдется* $t^* > 0$ *такое, что* $P(x,t) \to +\infty$ *при* $t \to t^*$.

Предположим, что в уравнении (3) отсутствует внешнее воздействие на систему, т. е. $U_0 = 0$. Определим вспомогательную функцию $T_0(x,\phi_0)$ по формуле

$$T_0(x,\phi_0) = \begin{cases} A\cos^2(B(x-\phi_0)), & |B(x-\phi_0)| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & |B(x-\phi_0)| > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

где $A = \frac{4\gamma}{3\alpha}$, $B = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{2C_0}}$, $\phi_0 \in (0,1)$ — фиксированная постоянная. Функция $T_0(x,\phi_0)$ может быть использована для получения условий стратификационной локализации напряженности. Справедливо утверждение.

Утверждение 5. *Пусть* $U_0 = 0$ *и* $P(x,t)$ — *классическое решение задачи* (2)–(3), *причем* $C_0 \leqslant C_{cr} = \frac{\alpha}{8\pi^2}$ *и* $P(x,0) < \frac{T_0(x,\phi_0)}{1+T_0(x,\phi_0)}$. *Тогда* $T(x,t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Литература

1. *Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х.* О влиянии нелинейных эффектов на стабильность общества // Мат. заметки СВФУ.—2015.—Т. 22, № 3.—С. 78–83.
2. *Хосаева З. Х.* Математическая модель протестных акций // Компьют. исслед. и моделирование.—2015.—Т. 7, № 6.—С. 1331–1341.
3. *Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х.* Количественная оценка фоновой социальной напряженности // Информационные войны.—2015.—№ 2.—С. 25–28.
4. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений.—М.: Наука, 1987.—483 с.
5. *Protter M. H., Weinberger H. F.* Maximum Principles in Differential Equations.—N. Y.: Springer-Verlag, 1984.—269 p.

СИСТЕМА ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В МОДЕЛЯХ СОГЛАСОВАНИЯ ЧАСТНЫХ И ОБЩЕСТВЕННЫХ ИНТЕРЕСОВ

Э. В. Кораблина
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В современном мире в любой системе управления в той или иной форме возникает задача согласования частных и общественных интересов. Каждая система управления является иерархической, т. е. состоит из субъектов управления разных уровней [1]. Отношения между супервайзером и агентами строятся на основе иерархии. Все субъекты рассматриваемой системы имеют свои частные цели, которые расходятся с общесистемными целями. В связи с этим возникает необходимость в согласовании частных и общественных интересов. Рассматриваемая модель является логическим продолжением работ [2–4], в которых рассмотрены разные аспекты моделирования иерархически организованных систем управления и моделей согласования частных и общественных интересов.

В работе рассматривается модель взаимодействия субъектов при распределении некоторого ресурса. Целевые функции субъектов имеют вид:

– супервайзера:

$$Y_0 = \left(1 - \sum_{i \in N} \alpha_i\right) c(q) \to \max_{\alpha_i}, \tag{1}$$

– агентов:

$$Y_i = a_i c(q) + Q(r_i - p_i) \to \max_{p_i}, \tag{2}$$

где

$$q = \sum_{i \in N} p_i, \quad Q(z) = z^{\beta_i}, \quad c(q) = q^{\gamma}. \tag{3}$$

Ограничения на управления агентов:

$$0 \leqslant p_i \leqslant r_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{4}$$

Целью настоящей работы является построение равновесий рассматриваемой системы: равновесие Нэша и равновесие Штакельберга. Рассматриваются два способа взаимодействия: в первом случае исследуется модель с отсутствием супервайзера, во втором — иерархическая модель. Исследование данных систем производится как аналитическим путем, так и с помощью имитационного моделирования. В работе дан анализ равновесных исходов в каждом случае, рассмотрен ряд примеров.

Завершением данной работы является создание информационно-аналитической системы на основе полученных данных. Был разработан пользовательский графический интерфейс, позволяющий задавать параметры систем, корректировать точность вычислений и непосредственно производить расчеты равновесий.

Литература

1. *Бурков В. Н., Коргин Н. А., Новиков Д. А.* Введение в теорию управления организационными системами.—М.: Либроком, 2009.—С. 13–29, 45–50.
2. *Угольницкий Г. А., Усов А. Б.* Теоретико-игровая модель согласования интересов при инновационном развитии корпорации // Компьют. исслед. и модел.—2016.—№ 8 (4).—С. 673–684.
3. *Угольницкий Г. А., Усов А. Б.* Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем с учетом требований устойчивого развития // Автоматика и телемеханика.—2014.—№ 6.—С. 86–102.
4. *Ougolnitsky G. A., Usov A. B.* Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games // Computer Simulations: Advances in Research and Applications / Eds. M. D. Pfeffer and E. Bachmaier.—N. Y.: Nova Sci. Publ., 2018.—P. 63–106.
5. *Горбанева О. И., Угольницкий Г. А.* Статистические модели учета факторов коррупции при распределении ресурсов в трехуровневых системах управления // Управление болшими системами.—2013.—№ 42.—С. 195–216.

УЛЬТРА-ПТОЛЕМЕЕВЫ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА[1]

М. В. Куркина (Россия, Ханты-Мансийск; ЮГУ),
В. В. Славский (Россия, Ханты-Мансийск; ЮГУ)

Теорема 1. *Пусть $f : S^n \to R^{n+1}$ — положительная функция, заданная на единичной сфере $(n+1)$-мерного евклидова пространства R^{n+1}. Определим расстояние между точками $x, y \in S^n$ по формуле*

$$\rho(x,y) = \frac{\|y-x\|}{f(x)f(y)}, \tag{1}$$

где $\|y-x\|$ — евклидово расстояние между точками $x, y \in R^{n+1}$. Тогда функция $\rho(x,y)$

- *удовлетворяет неравенству Птолемея*

$$\rho(x,y)\rho(z,w) \leqslant \rho(x,z)\rho(y,w) + \rho(x,w)\rho(z,y)$$

для любых $x, y, z, w \in S^n$;

- *удовлетворяет неравенству треугольника*

$$\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

для любых $x, y, z \in S^n$ в том и только в том случае, если функция f — конформно-выпуклая в смысле работы [1].

Замечание 1. Неравенство Птолемея автоматически следует из более сильного неравенства

$$\rho(x,y)\rho(z,w) \leqslant \max\left\{\rho(x,z)\rho(y,w), \rho(x,w)\rho(z,y)\right\} \tag{2}$$

для любых x, y, z, w, которое естественно назвать ультро-птолемеевым по аналогии с ультрометрическим неравенством. В работе [2] было доказано, что если $\{E, \rho\}$ — абстрактное конечное множество, снабженное метрикой ρ, обладающей свойством (2), то оно изометрично вкладывается в некоторую сферу с метрикой вида (1).

Определение 1. Назовем метрическое пространство $\{X, \rho\}$ ультро-птолемеевым, если метрика ρ удовлетворяет неравенству (2).

Теорема 2. *Пусть $\{X, \rho\}$ — компактное ультро-птолемеево пространство. Тогда на единичной сфере $S \subset H$ гильбертова пространства H определена конформно-выпуклая положительная функция $f : S \to R$ такая, что $\{X, \rho\}$ изометрично вкладывается в сферу, снабженную метрикой* (1).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00620.

Доказательство основано на свойствах ультраметрических пространств и связанных с ними гильбертовых пространств [3].

Пример 1. Пусть $f : S \to R$ — конформно-выпуклая положительная функция на единичной сфере $S \subset H$ гильбертова пространства H, $X \subset S$ — произвольное ультро-метрическое компактное подмножество, тогда X, снабженное метрикой вида (1), будет ультро-птолемеевым.

Замечание 2. Пусть $f : H \to R$ — положительная однородная степени 1 функция, т. е. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ при $\lambda > 0$, класса $C^2(H \setminus \{0\})$. Если она удовлетворяет условию

$$K_{1/2}(f, x, \xi) = f \frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2} \left|\nabla f\right|^2 \geqslant 0$$

для любого $x \in S$ и любого единичного вектора $\xi \in H$, перпендикулярного к вектору $x \in S$, то функция $f : S \to R$ — конформно-выпуклая [1].

Литература

1. *Куркина М. В., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Конформно-выпуклые функции и конформно-плоские метрики неотрицательной кривизны // Докл. АН.—2015.—Т. 462, № 2.—С. 141–143.
2. *Куркина М. В., Славский В. В., Тякунов А. С.* Метрики деревьев и псевдоевклидова геометрия // Сб. тр. Всерос. конф. по математике с междунар. участием «Математики — Алтайскому краю».—Барнаул: Алтайск. гос. ун-т, 2018.—С. 32–35.
3. *Исмагилов Р. С.* Ультраметрические пространства и связанные с ними гильбертовы пространства // Мат. заметки.—1997.—Т. 62, № 2.—С. 223–237.

РАБОТА СОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЫ В АНИЗОТРОПНОМ НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ ГРУНТА СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ ИЗМЕНЕНИЯ ПРОВОДИМОСТИ ПРИ $s = 6$

Д. Г. Лекомцев
(Россия, Орел; ОГУ)

Как показывают экспериментальные данные, реальные нефтеносные (водоносные) пласты демонстрируют анизотропию [1] и неоднородность своих свойств. Рассмотрим горизонтальный анизотропный и неоднородный пласт. Скважина дебита Q — совершенная эксплуатационная, контур скважины — окружность σ_C радиуса R_C. Давления на контуре скважины σ_C и контуре питания постоянные, разность давлений равна единице, жидкость несжимаемая и ее течение стационарное, контур питания удален в бесконечность. Двумерное течение в анизотропно-неоднородном пористом слое (пласте грунта) проводимости $P = (P_{ij}) = H(K_{ij})$ (H — толщина слоя, (K_{ij}), $i, j = 1, 2,$ — тензор его проницаемости) описываем обобщенным потенциалом φ и функцией тока ψ; φ и ψ — функции декартовых координат (x, y) плоскости z всюду в области D за исключением изолированных особых точек этих функций, удовлетворяют системе уравнений [2]

$$P_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad P_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}. \tag{1}$$

Уравнения (1) относятся к эллиптическому типу [2]. Рассмотрим слои с раздельной анизотропией и неоднородностью, его тензор проводимости моделируется степенной функцией одного переменного $P(z) = ky^s$ ($P_{ij} = k_{ij}y^s$, $i, j = 1, 2$), где степень s — положительная константа, далее положим $s = 6$, $k = (k_{ij})$ — постоянный тензор.

Трудность решения поставленной задачи обусловлена сложным видом (1). Исследование существенно упрощается, если преобразовать (1) к каноническому виду. Для этого осуществляется переход с физической плоскости $z = x + iy$ на вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$ с использованием гомеоморфных (аффинных) преобразований (прямого и обратного) [2], из которого следует прямое преобразование декартовых координат плоскостей z и ξ:

$$\xi = (1 + a)x + by, \quad \eta = bx + (1 - a)y,$$

где $\mu_0 = a + ib$, $a^2 + b^2 < 1$, $a = (k_{22} - k_{11})/(k_{22} + k_{11} + 2\sqrt{D(k_s)})$, $b = (k_{12} + k_{21})/(k_{22} + k_{11} + 2\sqrt{D(k_s)})$, $D(k_s) = k_{11}k_{22} - (k_{12} + k_{21})^2/4$.

Считая слой ортотропным ($k_{12} = k_{21}$), получим на плоскость ζ, а затем на плоскость $\zeta' = \xi' + i\eta'$, которая связана с плоскостью ζ преобразованием поворота на угол ϑ_0 ($tg\vartheta_0 = b/(1+a)$). На плоскости ζ' проводимость является функцией одного переменного η' [2]:

$$P'(\xi') = k_0'\eta'^s \quad \left(k_0' = k_0\left[\frac{(1+a)cos\vartheta_0 + bsin\vartheta_0}{1-a^2-b^2}\right]^s\right). \qquad (2)$$

Характерной особенностью слоя проводимости (2) является наличие сингулярной линии σ_0: $\eta' = 0$, на которой $P = 0$, если $s > 0$. Находим формулу, определяющую дебит скважины [2]:

$$Q = \frac{2\pi k_0' d'^s (C - C_0)}{Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega)}.$$

Здесь $Q_\nu(\omega)$ — функция Лежандра второго рода степени ν аргумента $\omega = 1 + R_C'^2/2d'^2$, $d' = d(1-\mu^2)/\sqrt{(1-a)^2+b^2}$ — расстояние от центра скважины σ_C до сингулярной линии σ_0, $R_C' = R_C\sqrt{1-\mu^2}$, $C = 1$, $C_0 = 0$. Для исследования влияния анизотропии грунта на дебит скважины введем относительный дебит [3] $\varepsilon = Q/Q_0 - 1$, где Q_0 — дебит скважины радиуса R_C, расположенной на расстоянии d от сингулярной линии $y = 0$ в случае изотропного неоднородного грунта со степенным законом изменения проводимости при $s = 6$. Из полученных аналитических соотношений можно как частный случай получить формулы, описывающие работу совершенной скважины в анизотропном однородном слое грунта [3]. Решение подобных задач [4, 5] может оказаться актуальной в качестве тестовой при проверке численных математических моделей, описывающих более сложные задачи [6]. Анизотропия грунта может сильно сказываться на дебите Q (может его увеличивать или уменьшать по отношению к дебиту в случае изотропной неоднородной среды Q_0), неоднородность грунта оказывает на дебит меньшее влияние, общий характер хода кривых аналогичен случаю анизотропной однородной среды. С увеличением отношения недиагональных к диагональным компонентам тензора $k = (k_{ij})$ влияние анизотропии уменьшается.

Литература

1. *Абросимов А. А.* Применение рентгенотомографии для изучения фильтрационно-емкостных систем коллекторов нефти и газа // Тр. РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина.—2015.—Т. 281, № 4.—С. 5–15.
2. *Пивень В. Ф.* Математические модели фильтрации жидкости.—Орел: Изд-во Орловск. гос. ун-та, 2015.—408 с.
3. *Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г.* Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта // Ученые записки Орловск. гос. ун-та.—2012.—Т. 47, № 3.—С. 69–74.
4. *Лекомцев Д. Г.* Работа совершенной скважины в анизотропном неоднородном слое грунта с квадратичным законом изменения проводимости // Порядковый анализ и смежные вопросы мат. моделирования: тез. докл. XIV Междунар. науч. конф. (с. Цей, 3–8 июля 2017 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2017.—С. 156–157.
5. *Лекомцев Д. Г.* Работа скважины в анизотропной неоднородной среде со степенным законом проницаемости // Современные проблемы физ.-мат. наук.—Орел: Изд-во Орловск. гос. ун-та, 2018.—С. 141–145.
6. *Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г.* Аналитическое и численное моделирование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Вычислительная механика сплошных сред.—2016.—Т. 9, № 4.—С. 389–399.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОМЕРНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

В. Л. Литвинов
(Россия, Москва, МГУ; Сызрань, СФ СамГТУ)

Для объекта введены следующие обозначения: ρ — объемная плотность массы; S — площадь поперечного сечения; I — осевой момент инерции поперечного сечения объекта; E — модуль упругости материала объекта; μ — коэффициент, характеризующий свойство вязкоупругости объекта; ε_0 — начальная продольная деформация объекта, создающая натяжение $T = ES\varepsilon_0$; x — расстояние от левой границы до точки объекта, находящегося в недеформированном состоянии; $L(t)$ — длина недеформированного в продольном направлении объекта слева от движущейся границы; t — время; L_0 — общая длина объекта.

Для характеристики окружения объекта введены следующие параметры: k_0 — жесткость подложки, на которой лежит объект; $V(t)$ — окружная линейная скорость роликов; λ — коэффициент, характеризующий действие сил сопротивления внешней среды. На объект в направлении вектора $\bar{e}_2$ действует распределенная нагрузка $f(x,t)$. На движущуюся границу действует сила $\bar{F}(t) = F_1(t) \cdot \bar{e}_1 + F_2(t) \cdot \bar{e}_2$.

Движущаяся граница состоит из жесткосоединенных роликов массой m_2. Масса системы роликов и каркаса равна m_1. Пружина жесткости k_2 реагирует на поперечное смещение системы роликов. В продольном направлении имеет место жесткое соединение между системой роликов и каркасом. Между роликами и объектом проскальзывание отсутствует.

В результате получена система дифференциальных уравнений, описывающих продольно-поперечные колебания объекта:

$$\begin{cases} \rho S u_{1,tt} - S\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(E\left(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}-1\right)+\mu\frac{u_{j,x}u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}}\right)\frac{u_{1,x}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}}\right)=0; \\ \rho S u_{2,tt} - S\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(E\left(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}-1\right)+\mu\frac{u_{j,x}u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}}\right)\frac{u_{2,x}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}}\right)+ \\ \qquad + I\left(Eu_{2,xxxx}+\mu u_{2,xxxxt}\right)+\lambda u_{2,t}+k_0u_2-f(x,t)=0. \end{cases} \tag{1}$$

Граничные условия:

$$u_1^*(0,t)=0; \quad u_2(0,t)=0; \quad u_{2,xx}(0,t)=0; \tag{2}$$

$$u_1^*\big(L_0,t\big)=0; \quad u_2\big(L_0,t\big)=0; \quad u_{2,x}\big(L_0,t\big)=0; \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
&m_1\frac{d^2}{dt^2}u_1(L(t),t)+\rho S\big(u_{1,t}(L(t)-0,t)-u_{1,t}(L(t)+0,t)\big)L'(t)+\\
&\quad+\left(ES\left(\sqrt{u_{j,x}(L(t)-0,t)u_{j,x}(L(t)-0,t)}-1\right)+\right.\\
&\quad\left.+\ \mu S\frac{u_{j,x}(L(t)-0,t)u_{j,xt}(L(t)-0,t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t)-0,t)u_{j,x}(L(t)-0,t)}}\right)\frac{u_{1,x}(L(t)-0,t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t)-0,t)u_{j,x}(L(t)-0,t)}}-\\
&\quad-\left(ES\left(\sqrt{u_{j,x}(L(t)+0,t)u_{j,x}(L(t)+0,t)}-1\right)+\right.\\
&\quad\left.+\ \mu S\frac{u_{j,x}(L(t)+0,t)u_{j,xt}(L(t)+0,t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t)+0,t)u_{j,x}(L(t)+0,t)}}\right)\times\\
&\quad\times\frac{u_{1,x}(L(t)+0,t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t)+0,t)u_{j,x}(L(t)+0,t)}}-F_1(t)=0;
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
&m_2\frac{d^2}{dt^2}u_2(L(t),t)+EIu_{2,xxx}(L(t)+0,t)+\mu I u_{2,xxxt}(L(t)+0,t)-\\
&-EIu_{2,xxx}(L(t)-0,t)-\mu I u_{2,xxxt}(L(t)-0,t)+k_2u_2(L(t),t)-F_2(t)=0;
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{gathered}
u_1(L(t)-0,t)=u_1(L(t)+0,t);\quad u_2(L(t)-0,t)=u_2(L(t)+0,t);\\
u_{2,x}(L(t)-0,t)=0;\quad u_{2,x}(L(t)+0,t)=0.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Начальные условия:

$$
\begin{gathered}
u_1(x,0)=\phi_1(x);\quad u_{1,t}(x,0)=\phi_2(x);\\
u_2(x,0)=\phi_3(x);\quad u_{2,t}(x,0)=\phi_4(x).
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Таким образом, модель, описывающая колебания объекта изображенного, на рис. 1, определяется системой дифференциальных уравнений (1), граничными условиями (2)–(6) и начальными условиями (7).

Полученные математические модели позволяют описывать колебания большой интенсивности систем с движущимися границами [1].

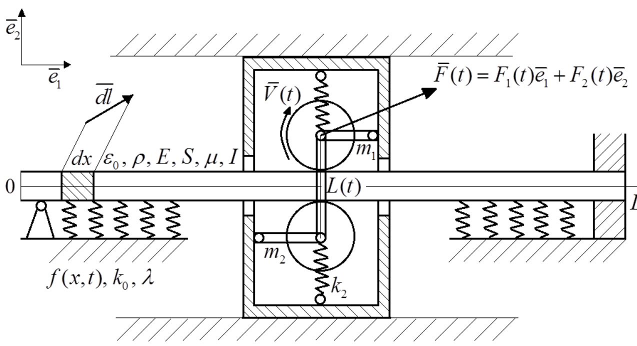

Рис. 1. Обобщенная схема объекта.

Литература

1. *Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В.* Применение метода Канторовича — Галёркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Изв. РАН. Механика твердого тела.—2018.—Т. 2.—С. 70–77.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КАТАСТРОФ

М. А. Мельник (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ),
О. В. Пристинская (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ),
Г. Ю. Рябых (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ),
Н. В. Фролова (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Рассматривается задача исследования зависимости между числом авиационных, железнодорожных и автомобильных катастроф и некоторых влияющих на них факторов. Среди влияющих факторов выделены следующие: число Вольфа (характеристика солнечной активности), месяц происшествия катастрофы, возраст пилота.

Авторами была собрана и переработана информация о произошедших катастрофах в мире за последние 100 лет [1–3]. Эти данные исследованы с помощью методов математической статистики, а также методов цифровой обработки.

Исследования показали, что связь между количеством катастроф и показателем солнечной активности незначительна (коэффициент корреляции равен 0,39, 0,42, 0,34 соответственно для авиационных, железнодорожных и автомобильных катастроф), причем за последние 20 лет эта зависимость стала еще слабее.

Зависимость количества катастроф от возраста пилота очень незначительна.

При рассмотрении статистики катастроф по месяцам оказалось, что самым опасным временем для происшествия транспортной катастрофы является период с июля по сентябрь.

Разными методами сделан прогноз на ближайшие годы. Наиболее достоверный прогноз получен методом Прони [4].

Литература

1. Статистика авиакатастроф в мире.—URL: http://www.planecrashinfo.com.
2. Статистика железнодорожных катастроф.—URL: https://ec.europa.eu.
3. Статистика автокатастроф в мире.—URL: https://data.oecd.org/transport/road-accidents.htm.
4. *Марпл-мл. С. Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения.—М.: Мир, 1990.—584 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЛЕКТИВНОГО ВОДОЗАБОРНОГО ПРОЦЕССА В ТРЕХСЛОЙНОМ СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ВОДОЕМЕ ПРИ ЗАБОРЕ ВОДЫ ИЗ ВНУТРЕННЕГО ПРОСТРАНСТВА

И. Д. Музаев
(Россия, Владикавказ; Владикавказский филиал ФУ, ГФИ ВНЦ РАН),
Н. И. Музаев
(Россия, Владикавказ; ГФИ ВНЦ РАН)
К. С. Харебов
(Россия, Владикавказ; ГФИ ВНЦ РАН)

При решении вопросов, связанных с водоснабжением различных промышленных предприятий, в том числе тепловых и атомных электростанций, в ряде случаев бывает целесообразно забирать воду из внутреннего объема промежуточного слоя трехслойного стратифицированного водоема — источника водоснабжения. Во внутреннем объеме промежуточного слоя вода бывает чище, чем в нижнем мутном слое, и холоднее, чем в верхнем слое. При этом проектирование и компьютерное моделирование такого водозаборного устройства и процесса забора воды должны исключать попадание воды из верхнего и нижнего слоев в водозаборную трубу, подведенную к промежуточному слою. В справочных литературных источниках и в строительных нормах и правилах представлены различные эмпирические расчетные формулы, предназначенные для проектирования селективных водозаборных устройств, когда вода забирается из двухслойного стратифицированного водоема. Селективный водозаборный процесс, когда вода забирается из внутреннего пространства промежуточного слоя трехслойного стратифицированного водоема, до настоящего времени не изучен, и в литературных источниках не представлена совокупность расчетных формул, позволяющих рассчитать и проектировать водозаборные устройства, обеспечивающие водозабор из внутреннего объема промежуточного слоя. При включении водозаборной системы первоначально горизонтальные поверхности раздела слоев возмущаются и на них образуются внутренние гравитационные волны. Отметку нижнего конца водозаборного трубопровода и расход забираемой воды надо подобрать таким образом, чтобы поверхность раздела верхнего и промежуточного слоев не опустилась до отметки нижнего конца трубопровода, и одновременно поверхность раздела промежуточного и нижнего слоев не поднялась до отметки нижнего конца трубопровода. Это обеспечит селективный водозабор исключительно из промежуточного слоя водоема. Водозабор из внутреннего пространства промежуточного слоя смоделирован в виде объемного стока с бесконечно малой толщиной и конечным сточным расходом. Согласно линейной теории поверхностных и внутренних гравитационных волн в идеальной несжимаемой жидкости математическую модель вышеописанного водозаборного процесса будет представлять следующая контактная начально-краевая задача:

$$\Delta\Phi_1(x, y, z, t) = 0 \quad \text{при} \ -H_2 < x < H_1 + H_2; \tag{1}$$

$$\Delta\Phi_2(x,y,z,t) = -\frac{q(t)}{2a2bh}\,f(x,y,z) \quad \text{при} \;\; 0 < z < H_2; \tag{2}$$

$$\Delta\Phi_3(x,y,z,t) = 0 \quad \text{при } H_3 < z < 0; \tag{3}$$

$$\Phi_i = \dot{\Phi}_l = 0 \quad \text{при } t = 0; \tag{4}$$

$$\Phi'_{i,x} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и при } x = L_1; \tag{5}$$

$$\Phi'_{i,y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и при } y = L_2; \tag{6}$$

$$\dot{\Phi}_1 = 0 \quad \text{при } z = H_1 + H_2; \tag{7}$$

$$\Phi'_{1,z} = \Phi'_{2,z}, \quad \gamma_1\big(\ddot{\Phi}_1 + g\Phi'_{1,z}\big) = \gamma_2\big(\ddot{\Phi}_2 + g\Phi'_{2,z}\big) \quad \text{при } z = H_2; \tag{8}$$

$$\Phi'_{2,z} = \Phi'_{3,z}, \quad \gamma_2\big(\ddot{\Phi}_2 + g\Phi'_{2,z}\big) = \gamma_3\big(\ddot{\Phi}_3 + g\Phi'_{3,z}\big) \quad \text{при } z = 0; \tag{9}$$

$$\Phi'_{3,z} = 0 \quad \text{при } z = H_3. \tag{10}$$

В этих выражениях приняты следующие обозначения: Φ_1, Φ_2, Φ_3 — потенциалы скоростей в верхнем, промежуточном и нижнем слоях воды соответственно; x, y, z — пространственные координаты жидкой точки; t — время; g — ускорение силы тяжести; Δ — дифференциальный оператор Лапласа по пространственным координатам; H_1, H_2, H_3 — толщины верхнего, промежуточного и нижнего слоев соответственно; γ_1, γ_2, γ_3 — удельные веса воды в слоях; $q(t)$ — расход забираемой воды; $2a$, $2b$, h — размеры объемного стока; $f(x,y,z)$ — вспомогательная функция. Поставленная контактная начально-краевая задача решена численно-аналитическими методами математической физики. Водозабор из внутреннего пространства промежуточного слоя смоделирован в виде объемного стока с бесконечно малой толщиной и конечным сточным расходом. Окончательно для уравнения волновых поверхностей раздела слоев получается совокупность расчетных формул, с помощью которых на компьютере можно рассчитать диаметр водозаборной трубы, расход через нее, вычислить отметку глубинного расположения конца водозаборной трубы. Выбор этих параметров обеспечивает селективный водозабор исключительно из промежуточного слоя.

СДВИГОВЫЕ СЕЙСМИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ЛЕДНИКОВОГО МАССИВА НА СКЛОНЕ

И. Д. Музаев
(Россия, Владикавказ; Владикавказский филиал ФУ, ГФИ ВНЦ РАН),
В. Г. Созанов
(Россия, Владикавказ; СОГУ)

Сдвиговые сейсмические колебания ледяного массива без учета внутреннего сопротивления моделируется следующей начально-краевой задачей математической физики:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = g(\sin\psi - \mu\cos\psi),\\ w(x,t)\big|_{t=0} = K_s\,\frac{g}{w^2}\,e^{i\omega t}, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=H} = 0,\\ w(x,t)\big|_{t=0} = w_0(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,\\ a = \sqrt{\frac{G}{\rho}},\end{gathered} \tag{1}$$

где приняты следующие обозначения: $w(x,t)$ — сдвиговые перемещения в массиве, обусловленные сейсмическим землетрясением, t — время, x — поперечная координата по толщине льда, ρ и G — плотность и модуль сдвига льда, ω — круговая частота продольного сейсмического колебания подстилающей поверхности ледника, H — толщина (мощность) массива, $w_0(x)$ — сдвиговое перемещение — в массиве, обусловленное силой тяжести, k — коэффициент сейсмического ускорения.

В результате решения поставленной начально-краевой задачи (1) и количественной оценки полученных расчетных формул доказано утверждение о том, что на резонансной частоте сейсмического колебания склона возникающие касательные напряжения на поверхности контакта ледникового массива с подстилающей поверхности вычисляются по следующей формуле:

$$\tau = \frac{4\rho k_s g H}{\pi^2}\left(\frac{a\pi}{2H}\,t\,\sin\frac{a\pi}{2H}\,t - 2\cos\frac{a\pi}{2H}\,t\right). \tag{2}$$

Вычислим касательные сдвиговые сейсмонапряжения по этой формуле на примере ледника Колка, который сорвался в 2002 г. в верховьях реки Генальдон со склона горы Джимарахох. Входные параметры для него имеют следующие числовые значения:

– мощность (толщина в среднем) $H = 108$ м;
– модуль сдвига для ледникового льда $G = 0{,}34 \cdot 10^{10}$ Н/м^2;
– плотность льда $\rho = 915$ кг/м^3;

– коэффициент сейсмического ускорения для слабых землетрясений интенсивностью не более 3 баллов по шкале Рихтера — Меркали $k_s = 0,01$.

Для скорости распространения поперечной сдвиговой волны получается следующее числовое значение:

$$a = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{0{,}34 \cdot 10^{10}}{915}} = 1927{,}65 \text{ м/с}.$$

В результате вычисления при трех числовых значениях времени: $t_1 = 8{,}01\,\text{сек}$, $t_2 = 15{,}3\,\text{сек}$, $t_3 = 21{,}7\,\text{сек}$ получены следующие числовые значения касательного напряжения:

$$\begin{aligned} t_1 &= 8{,}01 \text{ сек}, \quad \tau_1 = 8{,}7 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2, \\ t_2 &= 15{,}3 \text{ сек}, \quad \tau_2 = 16{,}8 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2, \\ t_3 &= 21{,}7 \text{ сек}, \quad \tau_3 = 23{,}9 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2. \end{aligned}$$

Из литературных источников известно, что разрушающее напряжение для льда при температуре -5° C и выше составляет $\tau_{\text{раз}} = (5 - 5{,}5) \cdot 10^5$ Н/м^2, максимальная сила смерзания льда с поверхностью при температуре ниже 20° C не превосходит $\tau_{\text{см}} = 21 \cdot 10^5$ Н/м^2.

Приведенные вычислительные результаты разъясняются так: если происходит слабое землетрясение силой не более 3 баллов, продолжительностью 10 секунд и частотой колебания близкой к частоте первой формы собственных сдвиговых колебаний ледника, то сдвиговые сейсмонапряжения на подстилающей поверхности превосходят в 1,58 раз разрушающее напряжение льда. Если же землетрясение продолжается в течение 16 секунд, то справоцированные сдвиговые сейсмические напряжения в три с лишним раза превосходят разрушающее напряжение. Если же такое слабое землетрясение продолжается в течение 22 секунд, то спровоцированные сдвиговые напряжения в 4,35 раз превосходят разрушающего напряжения.

В расчетной формуле (2) не учтено внутреннее вязкое сопротивление. Учет затрат падающей на массив сейсмоэнергии на внутреннее сопротивление в каком-то количестве может уменьшить вышеприведенные значения напряжения, но не настолько, чтобы в разы уменьшились. На основании приведенного механико-математического анализа сейсмического колебания и сейсмонапряженного состояния ледникового массива можно сделать следующие заключения. Слабые землетрясения силой до 3 баллов, которые человеком не ощущаются, могут спровоцировать на подстилающей поверхности ледника сдвиговые сейсмонапряжения, в 1,58–4,35 раза превосходящие разрушающее напряжение льда в зависимости от продолжительности времени землетрясения. Для этого достаточно, чтобы частота падающей на массив сейсмической волны совпадала с частотой основной формы собственных сдвиговых колебаний ледникового массива. Для ледника Колка $\upsilon = 4{,}46$ герц.

Слабое сейсмическое землетрясение силой не более 3 баллов, продолжительностью времени 8–22 секунд и частотой 4,4–4,5 герц смогло сыграть роль спускового механизма для подвижки ледникового массива колка.

ГИСТЕРЕЗИСНЫЕ ОПЕРАТОРЫ КАК ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ[1]

В. В. Напрасников (Беларусь, Минск; БНТУ),
А. С. Скалиух (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Для квазистатических процессов поляризации и деформирования поликристаллических сегнетоэлектрических сред изучены нелинейные необратимые зависимости между искомыми и определяющими параметрами. Искомые параметры, к которым относятся вектор поляризации и тензор деформации, представлены в виде суммы обратимых и необратимых частей. Для обратимых частей выведены линейные алгебраические операторы, в которых тензоры материальных констант, зависят от остаточных параметров линейным образом [1]. Для необратимых частей с использованием элементов доменной структуры, физических законов их переключения и статистических законов построены диэлектрические и деформационные темпонезависимые гистерезисные операторы, представляющие собой систему уравнений в дифференциалах [2]. Для численного решения предложен метод последовательных приближений. Показано также, что в трехмерном случае эти уравнения можно свести к системе девяти обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, для решения которых предложены численные методы на основе методов Рунге — Кутты 4-го порядка. Проведены численные эксперименты и построены большие и малые петли диэлектрического и деформационного гистерезиса. Установлено, что параметры модели меняют форму и наклон гистерезисных кривых, что позволяет распорядиться ими так, чтобы рассчитанные и экспериментальные кривые совпадали не только качественно, но и количественно. Результаты исследований используются при построении определяющих соотношений при моделировании нелинейных и необратимых процессов поликристаллических сегнетоэлектрических материалов [3].

Литература

1. *Скалиух А. С.* Функциональная зависимость физических характеристик от необратимых параметров при электромеханическом воздействии на сегнетоэлектрические керамики // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика.—2019.—№ 58.—С. 128–141.
2. *Белоконь А. В., Скалиух А. С.* Математическое моделирование необратимых процессов поляризации.—Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010.—328 с.
3. *Скалиух А. С.* Конечно-элементное моделирование необратимо процесса поляризации сегнетоэлектрических керамик // Математика и мат. моделирование.—2019.—№ 5.—С. 1–16.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-08-00860-а.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕРАВНОВЕСНОГО ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ПРИ ТВЕРДЕНИИ ПОЛУВОДНОГО ГИПСА

В. В. Нарожнов (Россия, Нальчик; ИПМА КБНЦ РАН),
С. Ш. Рехвиашвили (Россия, Нальчик; ИПМА КБНЦ РАН)

В работе проведены натурные эксперименты по исследованию кинетики твердения полуводного гипса, основанные на измерении *in situ* электрического сопротивления. Для описания коагуляции частиц вяжущего на ранней стадии твердения раствора нами предлагается использовать формализм теории катастроф [1, 2]. В соответствии с этой теорией функция, описывающая некоторую автономную градиентную динамическую систему, является решением дифференциального уравнения первого порядка. Для описания неравновесного процесса вблизи точки фазового перехода используется катастрофа типа сборки. Уравнение модели с начальными условиями решалось численно методом Рунге — Кутты 4-го порядка с фиксированным шагом. Согласно представленной модели, основанной на теории катастроф, точка фазового перехода является точкой бифуркации динамической системы.

Литература

1. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения.—М.: Мир, 1980.—607 с.
2. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф: В 2-х книгах / Пер. с англ.—М.: Мир, 1984.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТСЛОЕНИЯ ТЕРМОБАРЬЕРНЫХ ПОКРЫТИЙ[1]

С. А. Нестеров
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Защиту деталей, работающих в условиях комбинированного термо-силового нагружения, все чаще обеспечивают путем нанесения на поверхность деталей функционально-градиентных (неоднородных) покрытий. Часто под действием различных факторов, недостаточной адгезии в системе «покрытие-подложка» возникают небольшие участки отслоения. При нагреве, если коэффициент теплового расширения покрытия выше, чем коэффициент теплового расширения подложки, в покрытии возникают сжимающие напряжения, при достижении которыми некоторого критического значения система теряет устойчивость, отслоившаяся часть покрытия изгибается. Поэтому важным является вопрос нахождения критических параметров с учетом неоднородности покрытия. Вопросам отслоения покрытий и потери устойчивости посвящено большое количество работ. Однако в этих работах система «покрытие-подложка» состояла только из однородных материалов.

Рассмотрим подложку, моделируемую вытянутым прямоугольником, к границе которого примыкает покрытие с отличающимися от подложки свойствами. Подложка и покрытие имеют полный контакт всюду, за исключением участка небольшой длины, вдоль которого произошло отслоение. Боковые стороны прямоугольника теплоизолированы и свободны от механических напряжений. Нижняя сторона жестко защемлена и поддерживается при заданной температуре, а на верхней стороне действуют тепловая и механическая нагрузки. Будем считать, что термомеханические характеристики покрытия представляют собой функции от координаты. Задача состоит в отыскании критических параметров, при которых происходит потеря устойчивости.

Отслоившийся участок покрытия, свободный от теплового нагружения, нормальных и касательных напряжений моделируется двумерным объектом в рамках модифицированной теории тонких пластин. Сформулированы гипотезы о распределении температуры и перемещений для покрытия и подложки и применен вариационный принцип термоупругости. Сформулированы условия склейки решений для отслоившейся пластины и для пластины на упругом основании. Получено выражение для критического напряжения. Проведено сравнение решения по предложенной модели деформирования с решением, полученным методом конечных элементов. Определены границы применимости предлагаемой методики.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 18-11-00069.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРОКИПЯЩЕГО СЛОЯ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ СИЛИКАГЕЛЯ

Н. С. Орлова

(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

В данной работе рассматривается виброкипение относительно тонких слоев крупных частиц силикагеля (диаметр частиц 4 мм) [1–4]. Трехмерные вычислительные эксперименты осуществлялись с использованием свободного открытого программного кода LIGGGHTS [5], в котором реализован метод дискретных элементов [6]. В методе дискретных элементов уравнения Ньютона и Эйлера используются для вычисления новых положений, скоростей и ускорений всех частиц (1), (2) [2, 6]:

$$m\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F}_c - m\overline{g}; \tag{1}$$

$$I_p\frac{d\overline{\omega}}{dt} = \overline{T}_p, \tag{2}$$

где m — масса каждой частицы, I_p — момент инерции каждой частицы, v и ω — скорости поступательного и вращательного движения каждой частицы соответственно, F_c — результирующая сила контакта, связанная с взаимодействием частиц друг с другом, T_p — сумма внешнего крутящего момента, связанного с контактным взаимодействием частиц, и момента сопротивления качению.

Для описания контактного взаимодействия между частицами в методе дискретных элементов использовалась модель Герца — Миндлина, в которой предполагается, что частицы при контакте не деформируются, а перекрывают друг друга на определенную величину, образуя пятно контакта. Более подробное описание условий вычислений представлено в работе [2].

Начальная толщина слоя составляла от 6 мм до 20 мм. Результаты расчетов были получены при амплитуде колебаний 1,5 мм–2,5 мм и значениях частоты колебаний в диапазоне от 24 Гц до 36 Гц. Результаты расчетов сравнивались с экспериментальными данными, полученными в работе [1].

Получено, что среднее по времени распределение объемной доли частиц, полученное в результате расчетов, удовлетворительно описывает экспериментальные данные. В вычислительных экспериментах в процессе виброкипения наблюдалась волнообразная поверхность и отдельные всплески над поверхностью слоя. Визуализация данных осуществлялась с использованием свободно распространяемого пакета ParaView v.5.5. В нижней и верхней части слоя по результатам расчетов значения объемной доли частиц занижены по сравнению с экспериментальными данными, в средней части слоя — завышены. В самой верхней части слоя наблюдаются единичные частицы (в этих зонах значение объемной доли частиц не превышает 0,1). Площадь области, ограниченной расчетной кривой, примерно совпадает с площадью области, ограниченной экспериментальной кривой, что свидетельствует о качественном совпадении результатов. В целом можно заключить, что результаты расчетов удовлетворительно описывают экспериментальные данные.

Было проведено исследование влияния начальной толщины слоя, амплитуды и частоты колебаний на среднюю степень расширения виброкипящего слоя (отношения средней высоты виброкипящего слоя к его начальной высоте). Использовался безразмерный параметр [3, 7], учитывающий начальную высоту слоя. Получено, что с увеличением значения безразмерного параметра средняя степень расширения виброкипящего слоя растет.

Литература

1. *Свердлик Г. И., Рево А. А., Каменецкий Е. С., Орлова Н. С.* Сравнение результатов экспериментов и математического моделирования виброожиженного слоя // Изв. высш. учебн. заведений. Сев.-Кавк. регион. Технические науки.—2011.—№ 1.—С. 24–27.
2. *Каменецкий Е. С., Орлова Н. С., Волик М. В., Минасян Д. Г.* Тестирование модели виброкипящего слоя, использующей метод дискретного элемента // Изв. высш. учебн. заведений. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки.—2017.—№ 4–1.—С. 18–23.
3. *Орлова Н. С.* Разработка и исследование математических моделей виброкипящего слоя.—Saarbrucken: Lambert Acad. Publ., 2013.—173 p.
4. *Орлова Н. С.* Математическое моделирование виброкипящего слоя на основе метода дискретных элементов // Тез. докл. XII Всероссийской шк.-семинара «Мат. моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 29 мая–3 июня 2017 г.).—Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2017.—С. 113.
5. CFDEM project.—URL: https://www.cfdem.com/liggghtsr-open-source-discrete-element-method-particle-simulation-code (дата обращения: 15.01.2018).
6. *Hashemnia K., Pourandi S.* Study the effect of vibration frequency and amplitude on the quality of fluidization of a vibrated granular flow using discrete element method // Powder Technology.—2018.—Vol. 327.—P. 335–345.
7. *Орлова Н. С.* Структура виброкипящего слоя в зависимости от его начальной толщины // Порядковый анализ и смежные вопросы мат. моделирования: тез. докл. XIV Междунар. науч. конф. (с. Цей, 3–8 июля 2017 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2017.—С. 166–167.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА ВЫСШЕГО УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ

А. Ф. Оськин (Беларусь, Полоцк; ПГУ),
Д. А. Оськин (Беларусь, Минск; БГЭУ)

Высокая динамика развития экономических систем и интенсивность инновационных процессов, характерные для начала XXI века, привели к изменению числа субъектов инновационной деятельности и расширению их функций. Возрастает значение университетов, которые помимо своей традиционной институциональной миссии начинают играть все большую роль в формировании новой экономики, ориентированной на знания. Модель такой экономики хорошо описывается с помощью концепции тройной спирали, предложенной в начале текущего века профессором Стенфордского университета Генри Ицковичем. Составляющими спирали являются три субъекта инновационной системы — Государство, Бизнес и Университеты.

Целью нашей работы является изучение роли Университета в модели тройной спирали, а также сценарный анализ его влияния на инновационные процессы. Для достижения поставленной цели нами была построена имитационная модель развития Университета с использованием подхода, описанного в работах Дж. Форрестера и получившего название «Системная динамика».

Источниками информации для определения параметров модели могут служить знания, извлекаемые из многочисленных университетских баз данных с помощью технологий интеллектуального анализа образовательных данных. К сожалению, эти данные имеют разный формат, не всегда полны, часто засорены и подлежат серьезной предварительной обработке, прежде чем могут быть использованы.

В докладе рассматриваются все этапы интеллектуального анализа и приводятся результаты идентификации системно-динамической модели учебного процесса высшего учебного заведения.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИОННОЙ ВСПЫШЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ ЕЛОВОЙ ЛИСТОВЕРТКИ[1]

А. Ю. Переварюха
(Россия, Санкт-Петербург; СПИИРАН)

Еловая листовертка (*Choristoneura fumiferana*) — мелкая бабочка, но один из самых опасных вредителей ценного леса [1]. Активность листовертки представляет для бореальных лесов Северной Америки серьезную опасность. Вспышки численности бабочки приводят к дефолиации и гибели миллионов гектаров ценного хвойного леса в очагах поражения — в трех провинциях Канады: Нью-Браунсвик, Квебек, Онтарио.

Цель нашей работы — рассмотрение модельных сценариев динамики осциллирующей активности вредителя с непрерывным временем. Вспышки бабочки-листовертки отличаются достаточно интересной и нетривиальной динамикой долговременной перемежающейся активности и периодов малочисленного состояния. Вспышка обычно генерирует несколько разновеликих пиков, которые подсчитывают по площади пораженного леса [2]. Осцилляционная активность может растянуться на три десятилетия и завершиться спонтанным затуханием. Динамика вспышки различается для провинций Канады и севера США, где различаются климатические условия и регулярно проводятся инсектицидные мероприятия. Мы рассмотрим модели на основе уравнений с отклоняющимся аргументом.

Модификацию перехода быстро размножающейся популяции насекомых в состоянии длительной депрессии можно предложить с использованием функции $v(N) = \ln(K/N)$, но с регуляцией от $N(t-\tau)$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t-\tau)}\right). \tag{1}$$

Уравнение опишет актуальный для развития вспышки чужеродного вида сценарий развития единичной вспышки численности от исходной малой группы. Первоначальный стремительный рост при исчерпании ресурсов столь же стремительно приводит вид к малочисленному состоянию. Далее траектория медленно асимптотически приходит к не воздействующему на среду балансу K.

Предложим вариант соединения с предыдущей нашей модификацией модели для экстремальной динамики морских инвазивных процессов из работы [3] в форме уравнения с $\tau > \tau_1$, но только не на основе уравнения Хатчинсона, а логистической кривой Гомпертца:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t-\tau)}\right)\sqrt[3]{(N(t-\tau_1)-L)}. \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-07-00125.

В данном варианте параметрический диапазон существования колебаний вида слишком узок. Альтернативный и более очевидный способ описать деградацию — добавить в правую часть параметр независимой убыли $-qN(t-\tau)$. Так отразим целенаправленное изъятие, например инсектицидную обработку в целях борьбы с нежелательным насекомым:

$$\frac{dN}{dt} = N(t)r\ln\left(\frac{K}{N(t-\tau)}\right) - qN(t-\tau). \tag{3}$$

Тут мы получим очень интересное решение двойной вспышки. В (3) после первой вспышки при инвазии следует следующая, действительно катастрофическая, после чего вспышечная активность завершается.

Учтем нелинейно действующий фактор сопротивления биотического окружения чрезмерно размножавшемуся вредителю леса:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t-\tau)}\right)(\mathcal{B} - N(t-\tau)) - \gamma\frac{N^3(t)}{N(t-\tau)+N^2(t)}. \tag{4}$$

Так в (4) мы получим сценарий прохождения критического минимума численности, после которого следует резкая единичная вспышка с колеблющимся затуханием у равновесия.

Литература

1. *Royama T.* Population dynamics of the spruce budworm // Ecological Monographs.—1984.—Vol. 84, № 4.—P. 429–462.
2. *Perevaryukha A. Y.* A model of development of a spontaneous outbreak of an insect with aperiodic dynamics // Entomological Review.—2015.—Vol. 95, № 3.—P. 397–405.
3. *Переварюха А. Ю.* Сценарий невынужденной деструкции популяции в модификации уравнения Хатчинсона // Владикавк. мат. журн.—2017.—Т. 19, № 3.—С. 58–69.

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТЯХ СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ

А. А. Радионов
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Анализируется движение, возникающее в жидкостях со сложной реологией (в жидкостях Максвелла и Бингама) при небольшой деформации одного из пузырьков, равномерно содержащихся в жидкости. Эти напряжения действуют на окружающие малые сферические пузырьки газовой фазы и могут вызывать их перемещения в жидкости. Полученные решения могут быть использованы для объяснения образования крупных пузырей в бетонных гелях.

Рассмотрим жидкость, равномерно заполненную сферическими пузырьками одинакового размера, содержащими газовую фазу, не взаимодействующей с жидкостью. Для примера (бингамовской жидкости) можно себе представить некоторый объем, заполненный бетонным гелем, который может содержать до 2% (объемных) пузырьков воздуха приблизительно одинакового размера. Другим примером (максвелловской жидкости) является магматический расплав, содержащаяся в котором вода образует пузырьки, равномерно заполняющие жидкость. Примем, что объемное содержание пузырьков мало и не меняет физических свойств жидкости.

При деформировании внешними напряжениями жидкости на пузырек действует сила, которая может вызвать его движение. Скорость движения сферического пузырька в основном определяется тремя силами: силой присоединенных масс, силой сопротивления Стокса, силой Архимеда. Движение пузырька подчиняется уравнению [1]:

$$\left(1+\frac{\rho}{2\rho_p}\right)\frac{d\vec{v}_p}{dt}=\frac{9f_S\mu}{2a^2\rho_p}\left(\vec{v}-\vec{v}_p\right)+\frac{3\rho}{2\rho_p}\frac{d\vec{v}}{dt}, \tag{1}$$

где t — время, ρ — плотность жидкости, ρ_p — плотность включения (пузырька), $\vec{v}=(u,v,w)$ — скорость жидкости, $\vec{v}_p$ — скорость пузырька, a — радиус пузырька, μ — вязкость жидкости, f_S — безразмерный коэффициент.

Величина $d\vec{v}/dt$ называется силой Архимеда и связана с полем внешних деформаций. Для случая деформации жидкости вокруг сферического включения можно найти аналитическое выражение для этой величины. Подобная задача для случая реологии твердого тела рассмотрена в [2, с. 34]. В случаях ньютоновской, максвелловской и бингамовской жидкости аналогичная задача может быть рассмотрена в линеаризованном приближении. Введем сферическую систему координат (r,θ,ϕ), центр которой совместим с центром сферического включения, и будем считать возникающее движение не зависящим от угловых координат и достаточно малым, жидкость примем несжимаемой.

Реологическое уравнение, связывающее тензор напряжений σ и тензор скоростей деформаций ϵ для максвелловской жидкости: $\lambda d\sigma/dt+\sigma=\mu\epsilon$, где λ —

время релаксации. Реологическое уравнение для ньютоновской жидкости получается отсюда при $\lambda = 0$. Реологическое уравнение для бингамовской жидкости можно записать в виде $\sigma = 2\mu\epsilon + \tau_0$, где τ_0 — значение минимального напряжения. Комбинируя уравнения движения и реологические уравнения, можно получить уравнение

$$\lambda u_{tt} + u_t = \frac{\mu}{\rho}\left(u_{rr} + \frac{2u_r}{r} - \frac{2u}{r^2}\right) - \frac{2\tau_0}{r^2}. \tag{2}$$

Здесь $u(t, r)$ — скорость движения жидкости вдоль радиуса. При $\lambda = 0$ и $\tau_0 = 0$ (2) соответствует уравнению для ньютоновской жидкости, при $\lambda = 0$ и $\tau_0 \neq 0$ — бингамовской жидкости, при $\lambda \neq 0$ и $\tau_0 = 0$ — максвелловской жидкости.

Для максвелловской жидкости линейное уравнение (2) гиперболического типа, для ньютоновской жидкости — параболического типа, для бингамовской жидкости — неоднородное уравнение параболического типа. Решения этих уравнений известны [3].

Будем интересоваться некоторым возмущением давления в одиночном пузырьке, который назовем центром возмущения. Это может быть слияние двух близко расположенных пузырьков или образование пузырька вследствие усадки бетонного геля (для бингамовских жидкостей). Вследствие такого события пузырек расширяется, при этом величина $u_t(r = a)$ в начальный момент времени имеет положительное значение, которое с течением времени быстро стремится к нулю. Это же можно сказать и про величину $u(r = a)$. В качестве начальных условий можно принять равные нулю начальные скорости смещения $u(t = 0, r) = 0$, $u_r(t = 0, r) = 0$.

Литература

1. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред.—М.: Наука, 1987.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VII. Теория упругости, 5-е изд., стереотип.—М: Физматлит, 2003.—264 с.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1966.—724 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗДУШНЫХ ТЕЧЕНИЙ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В ГОРНЫХ УЩЕЛЬЯХ СЕВЕРНОЙ ОСЕТИИ

А. А. Радионов (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
О. С. Панаэтова (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
В. Ю. Тимченко (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Моделирование аэродинамики воздуха в горных ущельях является актуальной и достаточно комплексной задачей. Закономерности распространения загрязняющих веществ (ЗВ) от источников, расположенных в горных ущельях (таких как хвостохранилища, горно-добывающие предприятия, транспортные артерии), определяются преимущественно переносом воздушными потоками и могут существенно отличаться от известных для равнинных территорий.

Создана и протестирована математическая модель, описывающая аэродинамику воздушных потоков в атмосфере горного ущелья, включающая в себя модель распространения газообразных пассивных ЗВ и в виде мелкой пыли. Модель применяется для расчета выбросов ЗВ из хвостохранилища, расположенного в ущелье реки Ардон, в районе селения Унал в Северной Осетии. При реализации модели использовался свободно распространяемый открытый вычислительный пакет OpenFOAM.

Для тестирования модели, проверки правильности постановки задачи и граничных условий, а также чтобы минимизировать количество влияющих факторов, дополнительно рассматривались ущелья идеализированной формы. Тестирование могло осуществляться без учета влияния солнечной радиации и изменений температуры с высотой вдоль ущелья. Такая ситуация может наблюдаться при сплошной облачности.

В результате расчетов показано, что ЗВ могут переноситься воздушными потоками на склоны ущелья, достаточно удаленные от хвостохранилища. ЗВ практически не покидают вихревое течение, которое образуется в поперечном сечении ущелья, вместе с ним поднимаются вверх по склонам ущелья, большей частью переносятся вдоль оси ущелья и заполняют ветви ущелья, которые имеются в верхней части ардонского ущелья. Вихревое течение, возникающее в ущелье, может быть достаточно большим, сравнимым по высоте с высотой склонов ущелья. ЗВ частично выносятся в долину, где расположен город Алагир.

ДЛИННОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА АВТОКОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

С. В. Ревина
(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

В работе рассматривается двумерное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. Поле скорости и давление удовлетворяют системе уравнений Навье — Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} = -\nabla p + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t), \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0.$$

Средняя по прямоугольнику периодов скорость считается заданной. Предполагается, что один из пространственных периодов $\ell_2 = 2\pi/\alpha$ стремится к бесконечности, когда волновое число $\alpha \to 0$.

Будем интересоваться бифуркацией рождения цикла стационарного решения данной системы общего вида

$$\boldsymbol{V} = (0, V(x_1)), \quad \langle V \rangle \neq 0,$$

которое называется основным.

Пусть S_2 — замыкание в $L_2(\Omega)$ множества гладких соленоидальных вектор-функций, периодических по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами ℓ_1 и ℓ_2 соответственно, Π — ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на подпространство S_2 (гидродинамический проектор). Линеаризуя уравнения Навье — Стокса на основном течении, получим линейную спектральную задачу в S_2:

$$A\boldsymbol{\varphi} + i\omega_0\boldsymbol{\varphi} = 0, \quad A\boldsymbol{\varphi} = -\nu_c\Pi\Delta\boldsymbol{\varphi} + \Pi\left[\varphi_1 V'(x_1)\boldsymbol{e_2} + V(x_1)\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x_2}\right],$$

где $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ — координатные орты. Применим схему метода Ляпунова — Шмидта, предложенную В. И. Юдовичем. Сначала рассматривается линейная спектральная задача [1, 2], на втором шаге находятся собственные векторы линейной сопряженной задачи [3]. На каждом шаге метода Ляпунова — Шмидта применяются разложения в ряды по малому параметру α.

Полагая для любого решения уравнений Навье — Стокса

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{V},$$

придем к нелинейному уравнению возмущений в пространстве S_2:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + A(\nu)\boldsymbol{u} = K(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}),$$

где $K(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = -\Pi(\boldsymbol{u},\nabla)\boldsymbol{u}$, $A(\nu)\boldsymbol{u} = A$. Через $\varepsilon^2 = \nu_c - \nu$ обозначим надкритичность, в уравнении возмущений сделаем замену $\tau = \omega t$, где ω — неизвестная циклическая частота, возмущения скорости и давления $(\boldsymbol{u}, P)$ и частоту ω будем разыскивать в виде рядов по степеням параметра ε. Тогда возмущение скорости в первом порядке по ε имеет вид

$$\boldsymbol{u}_1 = \eta(\boldsymbol{\varphi} e^{i\tau} + \overline{\boldsymbol{\varphi}} e^{-i\tau}),$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ является решением линейной спектральной задачи и найдено в [1, 2], амплитуда η определяется из условия разрешимости уравнения возмущений при ε^3. Возмущение скорости при ε^2 имеет следующую структуру:

$$\boldsymbol{u}_2 = \eta^2(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} e^{i2\tau} + \overline{\boldsymbol{v}} e^{-i2\tau}),$$

где $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{v}$ являются решениями линейных неоднородных уравнений в S_2

$$A\boldsymbol{w} = K(\boldsymbol{\varphi}, \overline{\boldsymbol{\varphi}}) + K(\overline{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\varphi}), \quad 2i\omega_0 \boldsymbol{v} + A\boldsymbol{v} = K(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}).$$

Первое из этих уравнений рассматривалось в [4]. В настоящей работе при выполнении некоторых условий невырожденности найден общий член в разложения в ряды по малому параметру α нелинейной поправки $\boldsymbol{v}$ и амплитуда η.

Показано, что как и в линейной спектральной задаче общий член асимптотики автоколебаний выражается через интегральный оператор типа Вольтерра $I : H \to H$, действующий из подпространства функций H из $L_2(0, \ell_1)$, ортогональных единице

$$If = \int\limits_0^x f(s)\,ds - \left\langle \int\limits_0^x f(s)\,ds \right\rangle,$$

и скобки Пуассона функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$W(f, g) = f\frac{dg}{dx} - g\frac{df}{dx}.$$

Доказаны утверждения о качественном поведении решений нелинейной задачи в частном случае, когда отклонение основного поля скорости от его среднего значения нечетно.

Литература

1. *Ревина С. В.* Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.—2013.—Т. 53, № 8.—С. 1387–1401.
2. *Ревина С. В.* Устойчивость течения Колмогорова и его модификаций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.—2017.—Т. 57, № 6.—С. 1003–1022.
3. *Ревина С. В.* К задаче устойчивости сдвиговых течений относительно длинноволновых возмущений // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 4.—С. 50–60.
4. *Ревина С. В.* Об устойчивости двумерных течений вязкой жидкости // Мат. форум. Т. 12. Исслед. по математике и мат. образованию.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2018.—С. 86–94.—(Итоги науки. Юг России).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ КОМПАНИИ

А. В. Сланова
(Россия, Владикавказ; Владикавказский филилал ФУ)

Управление в современном мире становится все более трудным делом, поскольку организационные структуры постоянно усложняются. Эта сложность объясняется характером взаимоотношений между различными элементами экономических систем и физическими системами, с которыми они взаимодействуют. Изменение одной из характеристик системы приводит к изменениям в других частях системы, что привело к развитию методологии системного анализа [1–3]. Одним из наиболее важных и полезных орудий анализа структуры сложных процессов и систем является имитационное моделирование. Среди методов прикладного системного анализа имитационное моделирование является наиболее мощным инструментом исследования сложных систем, управление которыми связано с принятием решений в условиях неопределенности. По сравнению с другими методами такое моделирование позволяет рассматривать большое число альтернатив, улучшать качество управленческих решений и точнее прогнозировать их последствия [4, 5].

Современным инструментом имитационного моделирования дискретных и непрерывных процессов является среда моделирования GPSS World. С помощью этой системы эффективно моделируются производственные и непроизводственные процессы, в том числе системы массового обслуживания. Система GPSS World представляет собой большой набор команд управления процессом моделирования. Результаты моделирования визуализируются, в том числе с использованием методов мультипликации [6, 7]. В работе исследуется имитационная модель обслуживания клиентов торговой компании, в которой учитывались следующие исходные данные: время прихода клиентов, время обслуживания консультантом-кассиром. Имитировался 10-ти часовой рабочий день одного, двух, трех или четырех консультантов. В результате имитационного моделирования определялось количество пришедших, обслуженных и необслуженных клиентов, время пребывания клиентов в ожидании освобождения консультанта-кассира, длина очереди. В вычислительном эксперименте для случая одного рабочего дня, когда нет большого наплыва клиентов, время прихода клиентов составляет 15–25 минут или 10–20 минут. Для обслуживания каждого клиента консультанту-кассиру отводится 20–40 минут. В результате имитационного моделирования получено, что в течении рабочего дня консультант-кассир был занят 96% рабочего времени и обслужил 19 клиентов, среднее время обслуживания каждого клиента составило 30 минут, максимальное количество клиентов в очереди 13–12 человек, в конце рабочего дня в очереди осталось 12 человек, время пребывания в очереди — около двух часов. Т. е. не дождавшись обслуживания из магазина уйдет 12 недовольных человек, которые, возможно, никогда не станут клиентами.

Таким образом, проведенный вычислительный эксперимент показал, что компании необходимо совершенствовать бизнес-процесс обслуживания клиентов путем уменьшения времени их обслуживания.

Литература

1. *Ахсарова М. И., Волик М. В.* Сравнительный анализ подходов к проектированию информационных систем // Педагогический опыт: решения и находки. Сб. научно-методических статей.—Воронеж, 2014.—С. 320–322.
2. *Билалова И. М., Сулейманова Д. Б.* Проблемы оценки эффективности бизнес-процессов и пути их решения // Фундамент. исслед.—2017.—№ 5.—С. 131–136.
3. *Волик М. В.* Описание бизнес-процесса взаимодействия с клиентами для повышения эффективности управления компанией (на примере торговой компании) // Экономика и управление: проблемы, решения.—2019.—Т. 2, № 2.—С. 51–57.
4. *Милостивая Ю. С., Волик М. В.* Использование методов математического моделирования для прогноза безработицы в СКФО // Молодежь и наука: актуальные проблемы социально-экономического развития регионов России. Материалы V Всероссийской научно-практической конф.—2017.—С. 109–116.
5. *Дзебоева Л. В., Андиева С. Э., Орлова Н. С.* Использование метода средних для краткосрочного прогноза численности населения // Экономика России в условиях глобализации: вызовы и возможности развития. Сб. научных тр. по материалам междунар. науч. конф.—2015.—С. 89–91.
6. *Волик М. В.* Особенности автоматизации управления предприятием путем внедрения информационных систем // Экономика и предпринимательство.—2017.—№ 9–2 (86).—С. 733–736.
7. *Герасимова Л. Н.* Современный инструментарий управления бизнес-процессами компании // Экономика и управление: проблемы, решения.—2017.—Т. 3, № 1.—С. 45–50.

RR-МНОГОГРАННИКИ С ОДНОЙ РОМБИЧЕСКОЙ ВЕРШИНОЙ

В. И. Субботин
(Россия, Новочеркасск; ЮРГПУ (НПИ))

В работе рассмотрен один подкласс так называемых RR-многогранников в E^3. RR-многогранником называется выпуклый замкнутый многогранник, у которого существуют симметричные ромбические вершины и существуют грани F_i, не принадлежащие ни одной звезде ромбических вершин; при этом грани F_i являются правильными.

Подкласс, рассмотренный здесь, является совокупностью всех RR-многогранников с одной ромбической вершиной, а остальные грани представляют собой правильные многоугольники одного типа.

Напомним, что вершина V многогранника называется симметричной n-ромбической, если ее звезда представляет собой совокупность n равных, одинаково расположенных ромбов с общей вершиной V; причем, V расположена на оси вращения порядка n [1].

В работе доказана

Теорема 1. *Класс RR-многогранников с одной симметричной ромбической вершиной исчерпывается следующими четырьмя многогранниками:*

1) 7-*гранник с треугольными гранями и* 3-*ромбической вершиной;*

2) 12-*гранник с треугольными гранями и* 4-*ромбической вершиной;*

3) 15-*гранник с* 5-*ромбической вершиной;*

4) 13-*гранник с треугольными гранями и тупоугольной* 3-*ромбической вершиной.*

Таким образом, условие симметричной ромбичности вершины приводит к классу многогранников, который не может быть просто получен из класса правильногранников, а требует специального метода.

Литература

1. *Субботин В. И.* Многогранники с симметричными ромбическими вершинами // Дискретная математика и ее приложения.—М.: МГУ, 2016.—С. 368–370.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ОБЩЕСТВА С СОЦИАЛЬНОЙ НАПРЯЖЕННОСТЬЮ

З. Х. Хосаева (Россия, Владикавказ; ВНЦ РАН),
В. Г. Цибулин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Моделируется развитие во времени t политической системы, состоящей из n групп или партий. Пусть $u_i(t)$ — доля i-ой партии (группы), $u_0(t)$ — доля партийно неопределившихся граждан, так что $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 1$. Изменение каждой партии пропорционально произведению ее текущего значения (доли населения) и множителя, учитывающего сопутствующие факторы:

$$\frac{du_i}{dt} = u_i \left[\alpha_i f(u_0) + \sum_{j \neq i}^{n} \mu_{ij} u_j - \beta_i v \right]. \tag{1}$$

Функция $f(u_0)$ характеризует прирост за счет людей, не вовлеченных в партии, α_i — соответствующий параметр роста. Слагаемые с коэффициентами μ_{ij} позволяют учесть межпартийные перетоки. Последнее слагаемое характеризует изменение доли партии за счет социальной напряженности $v(t)$.

$$f(u_0) = u_0(1 - u_0), \quad u_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} u_i. \tag{2}$$

Для коэффициентов μ_{ij}, используемых при описании межпартийных перетоков, принимаются следующие условия: $\mu_{ij} = -\mu_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Это условие означает, что при нулевой напряженности ($v = 0$) и нулевом числе «безразличных» ($u_0 = 0$) сумма партийных долей равна единице в каждый момент времени. Слагаемые с коэффициентами β_i учитывают снижение или увеличение численности партии при росте напряженности. Модель допускает, что в результате роста напряженности часть населения перестает поддерживать соответствующую партию и становится безразличной.

Изменение напряженности регулируется множителем, включающим коэффициент релаксации γ и слагаемые прироста, которые пропорциональны весу партий с параметрами δ_i

$$\frac{dv}{dt} = v \left[-\gamma + \sum_{j=1}^{n} \delta_j u_j \right]. \tag{3}$$

В общем случае параметры роста, релаксации и другие могут быть функциями времени, тогда система будет состоять из $n+1$ дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами.

При отсутствии перетоков ($\mu_{ij} = 0$) модель аналогична рассмотренной в [1], где были установлены условия, при которых соответствующая система дифференциальных уравнений косимметрична и возможно возникновение семейств равновесий.

Рассмотрим задачу для $n = 2$ в случае партийных перетоков, при этом остается один коэффициент ($\mu_{12} = m$). Для исследования разрушения семейств равновесий используем построение косимметричного дефекта и селективной функции В. И. Юдовича. Наличие перетоков приводит к тому, что селективная функция имеет три нуля: два совпадают с равновесиями, соответствующим победе одной из партий при нулевой напряженности. Третье решение не имеет смысла, так как дает численности партий разных знаков. Таким образом, при наличии партийных перетоков, независимо от их направления ($m \neq 0$), косимметрия разрушается.

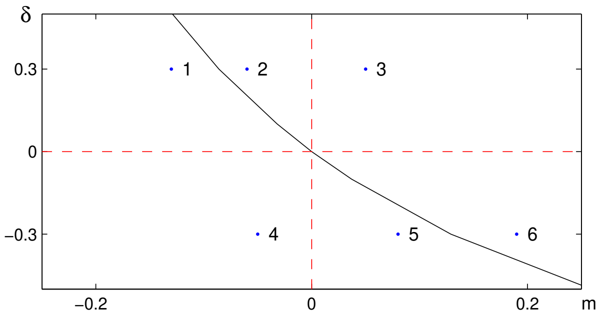

Рис. 1. Области реализации различных решений системы в зависимости от коэффициента интенсивности перетоков m и разности параметров роста $\delta = b - a$, линии косимметрии (пунктир).

При фиксированных параметрах $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_2 = a = 1.5$, $\gamma = c = 0.6$, $\delta_1 = d_1 = 0.5$, $\delta_2 = d_2 = 1.4$ динамика системы анализировалась в зависимости от параметров m и $\delta = b - a$. На рис. 1 дана карта для параметров m, $\delta = b - a$. Пунктирные прямые соответствуют значениям параметров, при которых система является косимметричной: $m = 0$ и $\delta = 0$ ($b = a$). Между сплошной кривой и прямой $m = 0$ находятся область значений параметров, при которых существуют равновесия с ненулевыми координатами u_1, u_2, v, т. е. имеется стационарное состояние с ненулевыми численностями обеих партий и напряженностью. Эти равновесия устойчивы при $m < 0$ и неустойчивы при $m > 0$. Для значений параметров из области, помеченной цифрой 5, наблюдается мультистабильность. В том случае, когда значения параметров m, $\delta = b - a$ брались вне области 5, устойчивым оказывался один режим. Для значений параметров из области 6 получалось равновесие, характерное при монополии одной партии.

Литература

1. *Епифанов А. В., Цибулин В. Г.* О динамике косимметричных систем хищников и жертв // Компьютерные исследования и моделирование.—2017.—Т. 9, № 5.—С. 799–813.

Секция IV

Современные проблемы математического образования

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОБУЧЕНИИ УЧАЩИХСЯ: МНОГОЭТАПНЫЕ МУЛЬТИДИСЦИПЛИНАРНЫЕ ЗАДАНИЯ

В. С. Абатурова (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
В. Н. Дубровский (Россия, Москва; СУНЦ МГУ),
Е. И. Смирнов (Россия, Ярославль, ЯГПУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Одной из актуальных проблем современного школьного образования является формирование у учащихся представления о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления. Основой для этого является развитие знаний и умений в области математического моделирования объектов, явлений и ситуаций окружающей действительности.

Важную роль в решении данной проблемы могут сыграть многоэтапные мультидисциплинарные задания, для решения которых необходимы знания по математике, информатике и одной или нескольким естественно-научным дисциплинам. Примером таких заданий могут стать задания на построение и исследование математической модели из реальной жизни, а формой организации решения таких задач — школьные интеллектуальные мультидисциплинарные командно-личные соревнования по математике, физике, информатике, которые уже более двадцати лет с успехом проводятся в разных странах. В Китае, к примеру, в таких конкурсах ежегодно принимает участие более 40000 школьников, а предмет «математическое моделирование» введен в школьную общеобразовательную программу, причем там уже разработаны методики обучения математическому моделированию учащихся старших классов не только в специализированной, но и в массовой школе. В России впервые в ноябре 2018 г. к.ф-м.н. В. Н. Дубровским в СУНЦ МГУ был организован I Международный командно-личный турнир школьников 8–10 классов по математическому моделированию. Основной этап конкурса — решение реальной производственной задачи «Калибровка акселерометров», предложенной фирмой Huawei, которую можно считать многоэтапной мультидисциплинарной задачей (с условием задачи можно ознакомиться в [1]).

Участники конкурса (включая команду ВЦНМО, сформированную из учащихся 7–8 классов школ г. Владикавказа — РФМЛИ, гимназия № 7, СОШ № 42) оценили уровень сложности этого задания и других заданий турнира и определили уровень собственных знаний и умений в области математического моделирования, а их наставники смогли обсудить с коллегами проблемы обучения математическому моделированию школьников в специализированной и массовой общеобразовательной школе. Подробнее о турнире и его турах (кроме указанного конкурса в турнире были проведены олимпиада по прикладной математике, олимпиада «Математика реальности», конкурс «Оптимизационные задачи») можно узнать в [2].

Конкурс показал, что лучшие умения в области математического моделирования показывают учащиеся специализированных математических школ, и это связано с хорошим уровнем подготовки учащихся в области математики, физики, информатики, поэтому данный конкурс может дать хорошие результаты лишь для небольшой части российских школьников. Однако, это обстоятельство ставит новую задачу: а как вовлечь в указанный конкурс учащихся массовой школы? Ответ очевиден — необходимо повысить уровень компетенций в области математического моделирования у школьных учителей, работающих в массовой общеобразовательной школе, разработать адаптированные образовательные программы по математическому моделированию для организации школьных кружков, спецкурсов и/или факультативов и серии многоэтапных мультидисциплинарных заданий, а также внедрить в массовое школьное образование элементы математического моделирования как основу междисциплинарного подхода в обучении школьников предметам естественно-математического цикла. Важным фактором решения указанной проблемы является необходимость привлечения к данной работе специалистов профильных вузов и научных организаций, которое можно организовать в рамках реализации сетевых моделей взаимодействия «Школа–ВУЗ–НИИ»: модели «Академический класс», «опорные школы РАН» и др.

Южный математический институт ВНЦ РАН в 2018–2019 учебном году совместно с Северо-Осетинским региональным отделением Межрегиональной Ассоциацией учителей математики в 2018–2019 учебном году организовал научно-практический семинар для учителей «Математическое моделирование школьникам», в ходе которого были разработаны и реализованы открытые ресурсные уроки учителей математики (Ф. К. Гусалова (8 кл., геометрия), Е. А. Качур (8 кл., геометрия), Т. В. Пастухова (10 кл., алгебра)) по обучению учащихся решению практико-ориентированных задач из обязательной школьной образовательной программы. Полученные промежуточные результаты показывают, что проблема обучения школьников методу математического моделирования является актуальной и ее решение сможет открыть новые возможности в развитии междисциплинарного подхода в обучении школьников.

Литература

1. URL: http://internat.msu.ru/wp-content/uploads/2018/10/zadacha_KMM2018.pdf.
2. URL: http://internat.msu.ru/educational-projects/turniry-i-konferentsii/turnir-mm1/.

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ИЗЛОЖЕНИЯ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗАХ

Ф. С. Абдуллаева (Узбекистан, Ташкент; ТУИТ),
Ж. Ш. Сафаров (Узбекистан, Ташкент; ТУИТ)

В данной статье рассматриваются некоторые вопросы преподавания высшей математики, в частности, дискретной математики в технических ВУЗах. Изучение дискретной математики должно способствовать выработке у студентов навыков разработки и реализации алгоритмов решения задач, доведения исследований до конечного результата.

В технических вузах математика занимает двойственное положение: с одной стороны, это особая общеобразовательная дисциплина, поскольку знания по математике являются фундаментом для изучения других общеобразовательных, а также общеинженерных и специальных дисциплин; с другой стороны, для большинства специальностей технических вузов математика не является профилирующим предметом. Студенты воспринимают ее как некую абстрактную дисциплину, которая не влияет на уровень компетентности будущего инженера. Такое восприятие обусловлено тем, что, во-первых, вузовский курс математики значительно дистанцирован от практических приложений, а во-вторых, студенты еще не имеют знаний по специальным дисциплинам, которые показывают связь математики с будущей профессией. Таким образом, очевидна необходимость определенной интеграции курса математики с циклом профессиональных дисциплин, это тем более очевидно в наши дни, когда математические методы все шире применяются в инженерно-технической деятельности. Такая интеграция, последовательно реализующая компетентностный подход, осуществляется приданием обучению математике профессиональной направленности, что позволяет находить пути решения проблемы обучения математике во всех указанных аспектах: содержания, мотивации, средств и методик обучения. Под профессиональной направленностью обучения математике мы понимаем такое содержание учебного материала и организацию его усвоения в таких формах и видах деятельности, которые соответствуют системной логике построения курса математики и моделируют (имитируют) познавательные и практические задачи профессиональной деятельности будущего специалиста [1].

Традиционный курс высшей математики, основу которого составляет дифференциальное и интегральное исчисление, в первую очередь был рассчитан на инженеров-физиков. Сегодня он уже не может в полной мере удовлетворить потребность высшей школы в математических знаниях. Даже в тех физических задачах, где непрерывные модели сохраняют свое значение и для описания физических процессов применяются дифференциальные уравнения в частных производных, при практическом их решении на компьютере используется метод сеток; производные заменяются конечными разностями.

С развитием компьютерных технологий во второй половине XX в. роль дискретной математики резко возросла. Интерес к быстрой обработке информации и анализу данных и стимулировала создание компьютеров, первоначально использовавшихся лишь в качестве мощных калькуляторов, но вскоре совершивших переворот в области информационных технологий. Но, хотя появления компьютеров и дал мощный толчок развитию дискретной математики, она родилась задолго до его появления. Две ветви математики, дискретная и непрерывная, возникли, когда люди стали считать и измерять. Сегодня можно сказать, что дискретность и непрерывность являются такими же неразрывно связанными и взаимно дополняющими друг друга концепциями в математике.

Современная дискретная математика рассматривает дискретные структуры самой различной природы и разрабатывает общие методы работы с подобными структурами. Все большую роль в ней играют проблемы, связанные с алгоритмической сложностью решения задач поиска и оптимизации на конечных множествах. Классификация подобных задач по сложности стала в последние годы приоритетным направлением. При этом некоторые старые проблемы вновь оказались в центре внимания.

Поэтому возникает необходимость изучения основ дискретной математики в технических ВУЗах (в особенности связанных с информационными технологиями), как отдельный курс. В нашем университете этот курс читается как Математика 2 и состоит из 4 частей:

1) основы теории множеств [2];
2) комбинаторика [3];
3) элементы булевой алгебры[4];
4) основы теории графов [5, 6].

Курс подтвердил свою эффективность, поскольку при тестировании Государственным тестовым центром студенты, прошедшие обучение по предлагаемому курсу, положительно ответили на вопросы, касающиеся рассмотренных разделов. Преподавание дискретной математики в предлагаемом контексте вызывает интерес у студентов и облегчает усвоение учебного материала.

Литература

1. *Вербицкий А. А.* Активное обучение в высшей школе: контекстный подход.—М.: Высшая школа, 1991.—207 с.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа: Учеб. для вузов, 6-е изд., испр.—М.: Наука, 1989.—624 с.
3. *Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В.* Элементы дискретной математики: Учеб.—М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.—280 с.
4. *Шевелев Ю. П.* Высшая математика 5. Дискретная математика. Ч.1: Теория множеств. Булева алгебра (для автоматизированной системы обучения): Учеб. пособие.—Томск: Том. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 1998.—114 с.
5. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов.—М.: Наука, 1990.—383 с.
6. *Вербицкий А. А.* Активное обучение в высшей школе: контекстный подход.—М.: Высшая школа, 1991.—207 с.

МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ФИЛОЛОГОВ

К. К. Бегалинова (Казахстан, Алматы; КазНУ),
Н. Н. Костина (Россия, Елабуга; ЕИ КФУ)

В докладе будет представлен анализ преподавания математики на гуманитарных факультетах, и, в частности, будет рассказано об опыте работы математиков на филологическом факультете Елабужского института Казанского федерального университета. Долгие годы преподававшаяся для гуманитариев дисциплина «математика» в последние время трансформировалась в дисциплину «математика и основы математической обработки информации». Как и чем мотивировать студентов-филологов к изучению данной дисциплины? Одним из возможных факторов мотивации к изучению дисциплины является ориентация на связь преподаваемой дисциплины с профессиональной областью обучающихся. Массу примеров для этого дает поэзия нобелевского лауреата по литературе И. Бродского [1]. Анкетирование студентов на предмет понимания смысла цитат из его поэтических произведений в начале и в конце математического курса показало существенное улучшение понимания метафор и многоплановых поэтических образов, связанных с математическими и историко-математическими фактами.

Литература

1. *Бродский И. А.* Избранные стихотворения.—М.: Панорама, 1994.—496 с.

МЕТОДИКА РАБОТЫ С ЗАДАЧАМИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ В ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССАХ

Т. Б. Бегиева
(Россия, Владикавказ; СОШ № 27)

В данной статье приводится обоснование математической модели для решения задачи погашения кредитов по схеме дифференцированных платежей (в таких задачах проценты начисляют на остаток долга).

Составим математические модели, позволяющие описать ежемесячный долг по кредиту и ежемесячный платеж по процентам.

Шаги	Вычисление долга по кредиту в конце i-го месяца (b_i)	Вычисление выплаты по проценту в i-ом месяце (a_i)
Поиск закономерности	Пусть $x = \frac{S}{N}$ — ежемесячная выплата по кредиту, где S — сумма кредита, N — число месяцев, на которые взят кредит $b_1 = S - 0 \cdot x = S$, $b_2 = S - 1 \cdot x = b_1 - x$, $\dots$ $b_i = S - (i-1) \cdot x = b_{i-1} - x$,	Пусть $p\%$ — процентная ставка банка. $a_1 = (S - 0 \cdot x) \cdot \frac{p}{100} = b_1 \cdot \frac{p}{100}$, $a_2 = (S - 1 \cdot x) \cdot \frac{p}{100} = b_2 \cdot \frac{p}{100}$, $\dots$ $b_i = (S - (i-1) \cdot x) \cdot \frac{p}{100} = b_i \cdot \frac{p}{100}$,
Выводы	(b_i) — арифметическая прогрессия, где $b_1 = S$, $(-x)$ — разность прогрессии	(a_i) — арифметическая прогрессия, где $a_1 = \frac{S \cdot p}{100}$, $\frac{-x \cdot p}{100}$ — разность прогрессии

С помощью полученных моделей можно решать задачи, в которых требуется:

– вычислить выплату за i-й месяц как сумму выплаты по кредиту и по процентам ($x + a_i$ или $\frac{S}{N} + a_i$);

– вычислить предоплату за «i» месяцев (S_i) как сумму первых членов арифметической прогрессии (a_i);

– общую сумму выплат за «i» месяцев как сумму выплат по кредиту за «i» месяцев (x_i) и S_i.

Вычислим переплату за «i» месяцев как сумму «i» первых членов арифметической прогрессии (a_i):

$$S_i = \frac{2a_1 + d \cdot (i-1)}{2} \cdot i,$$

где

$$a_1 = \frac{Sp}{100}, \quad d = -\frac{xp}{100},$$

$$S_i = \frac{2\frac{Sp}{100} - \frac{xp}{100} \cdot (i-1)}{2} \cdot i, \quad S_i = \frac{\frac{2Sp}{100} - \frac{Sp}{100N} \cdot (i-1)}{2} \cdot i, \quad S_i = \frac{Sp}{100} \cdot \frac{2 - \frac{i-1}{N}}{2} \cdot i.$$

Выплаты за «i» месяцев:

$$x \cdot i + S_i = \frac{S}{N} \cdot i + \frac{Sp}{100} \cdot \frac{\frac{i-1}{N}}{2} \cdot i.$$

Следствие: если $i = N$, то

$$S_i = \frac{Sp}{100} \cdot \frac{i+1}{2} \cdot i, \quad x = \frac{S}{i}.$$

Составленные модели позволяют решать обратные задачи. Чаще всего в обратных задачах применяется алгебраический метод (решение уравнений, неравенств или их систем).

Приведенные примеры можно использовать на уроках в профильных классах экономической направленности, а также при подготовке учащихся старшей ступени к ЕГЭ по математике профильного уровня [1].

Литература

1. *Ушаков В. Х.* Довузовская математика: ч. III. Прогрессии. Тестовые задачи: Учеб. пособие.—М.: Экономический факультет АНХ, 2010.—228 с.

КВЕСТ-ПРОЕКТЫ КАК ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИН МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦИКЛА В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ВУЗЕ

М. В. Волик

(Россия, Владикавказ; Владикавказкий филиал ФУ, ЮМИ ВНЦ РАН)

В настоящее время насущной проблемой образования является снижающийся интерес обучающихся к образовательному процессу. Этот факт усугубляется по отношению к естественным и точным наукам при обучении экономическим специальностям. В связи с этим целесообразно совершенствовать педагогические технологии, направленные на активизацию интереса обучающихся [1–4]. Одной из популярных и перспективных интерактивных педагогических технологий является разработка и использование квест-проектов. Образовательные квесты могут быть организованы в разных пространствах как учебного заведения, так и для самостоятельного выполнения. Квесты могут включать в себя сюжетные или опережающие задания по исследованию теоретических основ и решение практикоориентированных задач, а также с использованием сетевых, облачных, мобильных технологий [5, 6].

В зависимости от сюжета квесты могут быть линейными, штурмовыми, кольцевыми. В линейных квестах выполнение заданий происходит по цепочке: разгадав одно задание, участники получают следующее, и так до тех пор, пока не пройдут весь маршрут. Штурмовые предполагают получение игроками основного задания и перечня точек с подсказками, но при этом самостоятельно выбираются пути решения задач. Кольцевые квесты представляют собой последовательность заданий, но замкнутых в круг: команды стартуют с разных точек, которые будут для них финишными.

Таким образом, нестандартные подходы к изучению дисциплин математического цикла, учитывающие интересы обучающихся, основанные на самостоятельной исследовательской деятельности, стимулируют формирование познавательного интереса к обучению. В образовательном процессе экономического ВУЗа такие квест-проекты могут стать основой для повышения уровня формируемых профессиональных компетенций.

Литература

1. *Санина Е. И., Василишина Н. В.* Интерактивные методы обучения математике // Конференциум АСОУ: сб. науч. тр. и материалов научно-практ. конф.—2016.—№ 4.—С. 1699–1703.
2. *Загулова Д. В., Попова Е. Г., Сотикова Н. А., Гунаре М. Л.* Образовательные веб-квесты как фактор маркетинга впечатлений в продвижении учебных заведений // Образовательные технологии и общество.—2017.—Т. 20, № 3.—С. 18–23.
3. *Yafizova R. A., Koshevarova Yu. A., Nikolaeva A. D.* Using interactive teaching methods in conditions of new educational standards // Reports Scientific Society.—2015.—№ 4 (11).—P. 17–19.

4. *Дзебоева Л. В., Андиева С. Э., Орлова Н. С.* Использование метода средних для краткосрочного прогноза численности населения // Экономика России в условиях глобализации: вызовы и возможности развития. Сб. науч. тр. по материалам междунар. науч. конф.—2015.—С. 89–91.
5. *Волик М. В., Бердиев Р. Т.* Информационные технологии и их место в образовании и бизнесе // Современные информационно-образовательные технологии в интересах социально-экономического развития России. Междунар. заочная научно-метод. конф.—2016.—С. 35–40.
6. *Зайтова Е. З., Волик М. В.* Применение информационных технологий в организации самостоятельной работы студентов // Экономика России в условиях глобализации: вызовы и возможности развития. Сб. науч. тр. по материалам междунар. науч. конф.—2015.—С. 258–262.

НЕКОТОРЫЕ ПОЛЕЗНЫЕ ФАКТЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Р. М. Газарян

(Россия, Нальчик; Лицей для одаренных детей)

При решении задач часто в ее условии есть признаки, которые могут натолкнуть на идею решения. Умение видеть их обычно появляется с опытом. В настоящей работе приводится ряд таких признаков. Для некоторых из них приводятся и разбираются соответствующие задачи, демонстрирующие ситуации и технику их применения. Задачи взяты из заданий Заочной физико-технической школы МФТИ (ЗФТШ МФТИ) [1], с сайта «Решу ЕГЭ» [2], а также есть авторские задачи.

Литература

1. URL: http://www.school.mipt.ru/g/.
2. URL: https://ege.sdamgia.ru/expert?task=6.

О ВВЕДЕНИИ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА В КУРСАХ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

С. А. Довбыш
(Россия, Москва; СУНЦ МГУ, МГТУ им. Н. Э. Баумана)

Мы останавливаемся на вопросах, связанных с введением основополагающего понятия предела (последовательности и функции) в курсах высшей математики, преподаваемых в вузах, делая особый акцент на курсах с углубленным изучением математики. На основе анализа более 40 учебников и учебных пособий разного уровня удалось выявить некоторые типичные несовершенства многих курсов, которые не способствуют усвоению студентами понятия предела, а также специфические подходы и особенности некоторых курсов, призванные упростить его изучение.

Так, в учебнике В. А. Ильина и Э. Г. Позняка сознательно принята «концепция построения теории предельного значения и непрерывности функции только на основе определения предела функции по Гейне», а «введение второго эквивалентного определения предела функции по Коши, часто трудно воспринимаемого студентами первых курсов, откладывается до главы», посвященной основным теоремам о непрерывных и дифференцируемых функциях. Определение по Гейне очень удобно для доказательства основных теорем о пределах, хотя оно в меньшей степени отражает суть предела, чем определение по Коши. Некоторые авторы сразу дают определение предела функции по множеству и уже на его основе вводят односторонние пределы. Л. Д. Кудрявцев использует такое общее определение, но при этом не накладывает дополнительное условие, что рассматриваемые значения переменной отличны от ее предельного значения a, — вместо этого достаточно выколоть точку a из рассматриваемого множества; он подробно обосновывает тезис, что такое определение, содержащее на одно условие меньше, имеет много преимуществ по сравнению с классическим определением, использующим проколотые окрестности.

Основные же из упомянутых недостатков следующие:

1) Определения даются формально, без разъяснения на наглядном уровне их сути; в значительной (и, по-видимому, бóльшей) части учебников отсутствуют графические иллюстрации. Представляется также полезным проиллюстрировать два-три конкретных примера вычисления предела, пользуясь только его интуитивным понятием и наглядными рассуждениями. Такой подход присутствовал в старых учебниках, а ныне он в значительной мере изгнан, хотя порой и встречается, особенно в учебниках для вузов с небольшой программой по математике. В результате студентам зачастую предлагается изучать формально поданный материал.

2) Поскольку суть понятия предела не прояснена, то остается непроясненной и связь между определениями предела функции для разных случаев значения предела (конечное число или бесконечность со знаком или без знака) и разных

случаев стремления переменной. В результате студент оказывается вынужден заучивать множество определений предела функции — каждое определение для каждого случая — вместо того, чтобы понять, что все эти определения строятся по одной схеме. Хотя во многих учебниках говорится об этой общей схеме, и это делается часто после разбора конкретных случаев значений пределов и стремлений переменной, но далеко не всегда четко разъясняется, в чем она состоит, и читателю приходится осмысливать ее до определенной степени самостоятельно. В большинстве учебников не говорится, что понятие предела связано с понятием «близости» точек, а выражением понятия «близкие точки» является понятие *окрестности*, которое позволяет сформулировать общее определение предела функции.

3) Равенство $\lim_{x\to a} f(x) = A$ означает, что значение функции $f(x)$ стремится к A, когда переменная x стремится к a. По сути дела, и для значения функции (зависимой переменной), и для (независимой) переменной используется понятие «переменная величина стремится к пределу», а понятие предела функции оказывается производным от понятия предела переменной величины. Как оказалось, в большинстве старых учебников (Э. Чезаро, Э. Гурса, Ш.-Ж. Валле-Пуссен, В. Грэнвиль и Н. Н. Лузин, И. И. Жегалкин и М. И. Слудская, Г. М. Фихтенгольц, В. И. Смирнов, А. Я. Хинчин, В. В. Немыцкий и др., А. Д. Мышкис, Н. С. Пискунов, первые три издания учебного пособия В. А. Кудрявцева и Б. П. Демидовича) дается обсуждение этого понятия вначале на интуитивном уровне, а потом, в ряде книг (но далеко не во всех) и в более строгих терминах для каждого конкретного случая стремления. Этот подход лучше способствует пониманию сути понятия предела, а также следует возникновению и историческому развитию этого понятия. Но ныне он из современных учебников почти совершенно изгнан.

Интересно отметить, что сам Коши вводил понятие предела именно в терминах неконкретизированной переменной величины, а не функции. Н. Н. Лузин подчеркивает, что «понятие времени, которым слегка окрашено это определение, не играет ни малейшей роли: такое «время» может быть не только «реальным» временем, но даже и неархимедовым. ...эссенцией определения Коши являются какие угодно отвлеченные упорядоченные множества, состоящие из любых элементов, называемых «моментами» (т. е. «мгновениями»), лишь бы эти множества заведомо не имели самого последнего элемента». Также Н. Н. Лузин определенно высказывается в пользу «самого широкого введения», в педагогических целях, «изменения величин» и при этом отметает «упрек в нестрогости», тем самым поддерживая описанный подход. Он отмечает при этом, что такое «изложение математического анализа ... близко следует историческому его развитию».

4) Вопрос о построении теории пределов в учебных курсах является важнейшей частью общей и широкой проблемы преподавания высшей математики. Здесь появляются общие системные недостатки, в частности, формальное и немотивированное изложение, о чем писал Н. Н. Лузин еще в 1935 г., а в недавнее время — В. И. Арнольд. О необходимости подхода, особенно в преподавании инженерам и физикам, когда первоначально излагаются идеи и нестрогие понятия, а затем происходит их «логическое уточнение и очищение» (М. Я. Выгод-

ский), следующее их историческому развитию, а математика не изображается «как неизбежное развертывание голой дедукции», но воспринимается «как действительное познание внешнего мира» (А. Н. Колмогоров), в котором важную роль играют наглядность и интуиция, а вовсе не чистая логика, говорили разные авторы прошлого. Эти вопросы подробно обсуждались еще А. Пуанкаре в работе «Наука и метод», схожие мысли высказывались Ф. Клейном и А. Лебегом в известных книгах, посвященных вопросам преподавания серьезных разделов математики в средней школе, подход А. Лебега был поддержан редактором его книги А. Н. Колмогоровым. Однако, едва ли не единственной книгой по математическому анализу, последовательно написанной в таком стиле, причем с его обстоятельной мотивацией, является учебник М. Я. Выгодского «Основы исчисления бесконечно-малых» (1931 г., 1933 г.), причем фактически незавершенный.

НЕСТАНДАРТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Дж. А. Караева
(Россия, Владикавказ; СОШ № 30)

Реализация концепции математического образования Российской Федерации, утвержденной приказом Минобразования России от 24.12.2013 г. № 2506-р, направлена на более эффективную подготовку выпускников школы к освоению программ высшего профессионального образования. В работе рассматривается использование некоторых свойств функций (область определения, ограниченность, монотонность) при решении нестандартных неравенств [1–3]. На ряде решенных примеров показывается, что для обеспечения устойчивого повышения уровня успеваемости учащихся необходимо обратить внимание, прежде всего, на развитие таких структур интеллекта, как математическая интуиция, формально-логическое мышление, оперативная логическая память. Одним из путей формирования универсальных учебных действий (УУД) может стать включение таких заданий в содержание обучения математике (например, в рамках элективного курса).

Литература

1. *Никольский С. М.* Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: Учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни, 10-е изд.—М.: Просвещение, 2014.—430 с.
2. *Ткачук В. В.* Математика — абитуриенту / 15-е изд.—М.: МЦНМО, 2008.—1024 с.
3. *Сергеев И. Н., Панферов В. С.* ЕГЭ-2014. Математика. Задача С3. Уравнения и неравенства / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко.—М.: МЦНМО, 2011.—72 с.

О ФОРМИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Н. И. Лобанова
(Россия, Зеленокумск; МУДО «ЦВР»)

Известно, что математика — это стратегический ресурс, от которого зависит развитие экономики любой страны. Изучение математики играет системообразующую роль в образовании, и поэтому развивать математическое образование необходимо во взаимосвязи с физикой, химией, биологией и другими предметами [1].

Очевидна особая роль математического образования в реализации стоящих перед Россией задач, определяемых «Стратегией научнотехнологического развития Российской Федерации», Программой «Цифровая 10 экономика Российской Федерации» и другими государственными документами. Также без качественного массового математического образования невозможен переход к цифровой экономике. Скорость и характер развития науки и технологий, задающие направления развития инновационной экономики, изменения, происходящие в жизни общества, отражаются на системе образования, в частности, на его содержании, и на целевых установках школьников и их родителей. Требуются принципиально новые акценты в содержании и методологии школьного математического образования [3].

Одним из самых распространенных средств воспитания экономической грамотности на занятиях по математике являются задачи, фабулы которых связаны с производственной или другими видами экономической деятельности. Такие задачи использовались в школах издавна. Так, задачники по математике второй половины XIX в. и первой половины XX в. изобиловали задачами куплипродажи: купец купил, купец продал и т. п.

В учебниках по математике можно найти задачи, в которых используются такие математические понятия, как себестоимость, прибыль, рентабельность, доход, объем производства продукции (работ и услуг). Но школьники часто видят в задаче только повод для математических действий. Ее экономическое содержание проходит мимо внимания. Перед решением таких задач необходимо уяснить встречающиеся экономические понятия и то, как они связаны между собой, т. е. понять экономическую проблему [2]. В настоящее время развитие экономики (на любом из возможных уровней) существенно зависит от действующей системы кредитования. Поэтому владение методами решения задач о кредитах очень актуально. В работе рассмотрены задачи, в которых можно использовать различные схемы (математические модели) выплаты кредита банку со стороны заемщика.

Применять математические методы при решении экономических задач — это значит освоить следующую последовательность умений: четко и однозначно

• формулировать экономическую проблему;
• строить адекватную математическую модель;
• правильно выбирать рациональный метод решения;
• осуществлять технику решения;
• осуществлять анализ полученных решений и грамотно их интерпретировать.

В докладе будут представлены экономические задачи на две наиболее известные схемы кредитования: дифференцированного и аннуитетного, показан алгоритм составления соответствующих математических моделей, проведен сравнительный анализ положительных и отрицательных эффектов при различных условиях кредитования.

Литература

1. *Асхабов С. Н.* Научные исследования и развитие математического образования в вузах Чеченской Республики // Тр. Междунар. науч. конф. «Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное пространство» (Цахкадзор, Армения, 24–29 марта 2014). Том 1.—2014.—594 с.
2. *Пучков Н. П., Денисова А. Л., Щербакова А. В.* Математика в экономике: Учеб. пособие.—Тамбов: Изд-во Тамбов. гос. техн. ун-та.—2002.—80 с.
3. *Ященко И. В., Рослова Л. О., Высоцкий И. Р., Семенов А. В.* Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2018 года по математике.—М.: ФИПИ, 2018.—26 с.

DIGITIZATION OF EDUCATION AND MATHEMATICS TEACHING

A. Kh. Naziev

(Russia, Ryazan; RSU S. A. Esenin, Ryazan Institute ED)

Fyodor Dostoevsky once said that beauty will save the world, meaning *spiritual* beauty. In our time, these words are not so popular. Nowadays, it seems, most people think that digitization will save the world and with it education.

Here is a typical statement expressing this thought, randomly snatched from the Internet.

> Our old educational system lacks the capability to stand a chance in the 21st century. So we are compelled to use digitization in our educational system. [1]

Where did this remarkable "So" come from? And what does it mean? The author of the passage does not tell about this explicitly but implicitly she suggests us "to guess" that digitization will allow solving many old problems of education with the help of new instruments.

Not will allow! Moreover, almost surely, it will create a lot of new problems. To understand this is sufficient to remember the conglomerations of absurdities, dirt, and lie, overfilling the Internet. Thus, moving towards the digitization of education, we must also seriously think about its negative consequences. We must also think how to teach our pupils to distinguish good and bad, to accept good and reject bad, and so on. All these problems are as old as the world and important regardless of digitization. Moreover, they constitute the main problem of education: as Aristotle said,

> "education" consists in the ability to judge correctly. [2]

Now, the question arises naturally, "how to judge correctly?" Our answer to this question sounds, "with the help of proof." Remembering the words

> Since the Greeks, who says "mathematics" says "proof,"

opening the many-volume treatise "Eléments de mathématique" by N. Bourbaki [3], we realize that the role of mathematics in the digitization era increases many times. (Somebody, maybe, hoped, that in this era mathematics is not needed, because "computers will count?")

The author intends to devote his full paper to all-rounded consideration of the problems connected with the adoption of the above answer.

References

1. *Ainslee J.* Digitization Of Education In The 21st Century.—URL: https://elearningindustry.com/digitization-of-education-21st-century, April 28, 2018.
2. *Aristotle.* Parts of Animals.—Cambridge–Massachusetts: Harvard Univ. Press, 1937.
3. *Bourbaki N.* Eléments de Mathématique, Livre I, Théories des Ensembles—Paris: Hermann, 1957.

СТУДЕНЧЕСКИЕ НАУЧНЫЕ КОНФЕРЕНЦИИ КАК ОДНА ИЗ СОСТАВЛЯЮЩИХ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Ю. С. Налбандян
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В 1915 г. в Ростов-на-Дону был эвакуирован Варшавский Императорский университет. Многократно реформированный и переименованный, завоевавший мировое признание как Ростовский государственный, в 2005 г. ставший «базой» Южного федерального университета, он сумел сохранить многие традиции классического российского образования. Одной из них является активное вовлечение студентов в научную работу. Среди тех, кто всячески способствовал этому, были многие представители математической школы.

Еще в 1888 г. в Варшаве было учреждено Общество естествоиспытателей, объединившее в своих рядах преподавателей физико-математического и медицинского факультетов. В документах, регламентирующих деятельность общества, не раз подчеркивалось, что секционные заседания должны служить местом единения увлеченных наукой молодых людей и преподавательского состава. И действительно, на них не раз обсуждались результаты студенческих исследований, которые представляли либо сами авторы, либо их научные руководители. Данные об этом можно найти в сборниках «Труды Варшавского общества естествоиспытателей».

Работа Общества естествоиспытателей быстро восстановилась после переезда университета в Ростов, а в 1917 г. было учреждено отделение чистой и прикладной математики (в немалой степени благодаря профессору Дмитрию Дмитриевичу Мордухай-Болтовскому, который и стал его председателем). В 1920–1921 учебном году активизировалась деятельность студенческого научного семинара (которым руководил также Д. Д. Мордухай-Болтовской). В 1935 г. при активной поддержке ректора Николая Андреевича Дернова издается сборник студенческих нучных работ под редакцией выпускницы физмат Л. М. Галонен. Однако набирающему силу научному объединению студентов мешали различные реорганизации. А потом началась Великая Отечественная война ...

После возвращения из эвакуации пришлось заново налаживать нормальную жизнь университета. Его ректор, математик, профессор Семен Ефимович Белозеров, отлично понимал, что необходимо всячески стимулировать научную деятельность не только преподавателей, но и студентов. Поэтому в 1946 г. проходит первая университетская студенческая научная конференция. Впоследствии они станут ежегодными и очень удачно впишутся в образовательный процесс, способствуя стимуляции интереса к творческому осмыслению изучаемых дисциплин, активизируя стремление к получению новых знаний и научных результатов, развивая умение грамотно оформить и представить научные результаты.

На протяжении более чем 70 лет руководство университета и его подразделений всячески сопособствовало успешной организации студенческих конференций разного уровня. Университетские конференции проходили в лучших городских помещениях в течение нескольких дней, с 1973 г. стали проводиться университетские «Недели науки», с 1980 г. ведут свою историю «научные сессии» университета, в рамках которых «недели науки» организуются на каждом факультете. В докладе планируется рассказать об особеностях университетских (и областных) студенческих конференций, о том, как участие в них сказывалось на судьбах докладчиков, многие из которых стали видными советскими и российскими учеными. В частности, внимание будет обращено на следующие факты.

1. Первая студенческая научная конференция в Ростовском-на-Дону государственном университете имени В. М. Молотова прошла 17–19 мая 1946 г. Открытие состоялось в зале Театра Красной Армии, после доклада ректора университета С. Е. Белозерова участникам был показан спектакль «Опасный возраст». Работали 7 секций, из которых две — по общественным наукам (филология и история). Физико-математическая секция оказалась самой многолюдной (15 докладчиков, 5 из которых математики). Вторую конференцию посвятили 30-й годовщине Великой Октябрьской Социалистической революции, провели ее в октябре 1947 г. Длительность работы увеличилась до 5 дней, основным докладчиком на пленарном заседании был Сергей Александрович Захаров (см. [1]), а итоги на заключительном заседании подвел один из основателей Ростовской математической школы профессор Д. Д. Мордухай-Болтовской.

2. 20 октября 1947 г. начала свою работу первая научная конференция студентов высших учебных заведений Ростова-на-Дону, ее открывали С. Е. Белозеров и действительный член Академии медицинских наук СССР Николай Аполлинариевич Рожанский (его дочь, Нина Николаевна Рожанская, была активной участницей этих конференций, а всю свою последующую жизнь посвятила родному физмату–мехмату). Менее чем через год физматовец Б. И. Гехт, чье выступление было признано «блестящим как по форме, так и по полученным результатам» (Государственный архив Ростовской области, ф. 46, оп. 1, № 220, л. 27), станет лауреатом первой премии Министерства Высшего образования (МВО) СССР. В 1950 г. грамотой МВО СССР будет награжден четверокурсник мехмата Ю. Ф. Коробейник, представивший свою работу на университетской и городской конференциях 1949 г. [2].

3. Среди выступавших с научными докладами на протяжении всей истории научных конференций РГУ было немало будущих преподавателей университета и других высших учебных зведениях (С. Д. Окунь, М. А. Краплин, М. М. Драгилев, В. В. Иванов, С. В. Жак, И. Б. Симоненко, В. И. Юдович, Г. С. Литвинчук и многие другие), а также тех, кто свяжет свою жизнь с работой в школах Ростова-на-Дону и других регионов СССР (среди них отличник просвещения СССР А. Я. Ругарева, Н. П. Саморукова, заслуженный учитель РСФСР Э. Г. Якуба, А. Ф. Ерыгина).

Литература

1. *Гаврилюк Ф. Я.* Деятельность С. А. Захарова в Ростовском государственном университете // Почвоведение.—1978.—№ 8.—С. 14–30.
2. *Коробейник Ю. Ф., Ерусалимский Я. М., Налбандян М. Б., Рожанская Н. Н.* Механико-математический факультет Ростовского государственного университета.—Ростов н/Д.: Изд-во Рост. ун-та, 1989.—64 с.

ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Ю. В. Никонорова
(Россия, Волгодонск; ВИТИ НИЯУ МИФИ)

В настоящее время в учебную деятельность высших учебных заведений активно начинает внедряться электронная форма обучения. Электронное обучение отличается от дистанционного, оно шире, поскольку предполагает активное использование компьютерных технологий, вычислительной техники и средств передачи данных. Эта форма несет в себе четкий контроль за процессом обучения на всех этапах, высокую мотивацию обучающихся и при этом относительно низкие затраты на организацию самого процесса. Для организации такой формы по каждой дисциплине необходимо наличие следующих элементов системы: учебных пособий, большого банка тестов разных видов, заданий, электронных тренажеров, системы электронного документооборота и системы, обеспечивающей виртуальное интерактивное взаимодействие всех субъектов образовательного процесса, сети с выходом в Интернет.

К достоинствам такой формы организации образовательного процесса можно отнести следущее: удобные темп, время и место обучения; возможность реализовывать индивидуальную образовательную траекторию, возможность реализовать концепцию непрерывного образования, отсутствие отрыва от работы обучающихся, отсутствие ограничений на их количество; возможность формировать учебную программу из курсов-модулей в соответствии с заявленными потребностями; совместное решение задач (студент–студент, студент–преподаватель), возможность работать в режиме реального времени на онлайн лекциях и семинарах, широкие коммуникационные возможности, высокая эффективность работы преподавателей, экономия на расходах по организации процесса (содержании помещений, закупке учебников, транспортных расходах) [1].

Одно из перспективных направлений электронного обучения — это использование виртуальной обучающей среды Moodle (переводится как модульная объектно-ориентированная динамическая обучающая среда). Система позволяет создавать электронные учебные материалы, задавать последовательность их изучения, а также организовать их с помощью ярлыков, тегов и гипертекстовых ссылок. Образовательная среда имеет такие инструменты как: глоссарий, блоги, форумы, практикумы, чаты, рассылки, а также поддерживает обмен файлами любых форматов. Система позволяет обсуждать изучаемый материал в группе и лично с преподавателем. Все задания автоматически высылаются преподавателем всем студентам. Ведется статистика активности каждого учащегося: все выполненные работы хранятся в системе, отслеживается время учебной работы обучающихся в системе. Благодаря этому у преподавателя появляется возможность нужным образом формировать материал в зависимости от работы группы при отсутствии рутинной проверки заданий. В качестве дополнений к учебным программам можно использовать ссылки на нужные интернет-ресурсы, можно организовывать видеоконференции.

У электронного обучения есть и ряд недостатков. А именно: необходимость в постоянном доступе в Интернет студентов и преподавателей; хорошая техническая оснащенность учебного заведения; высокая мотивация и самодисциплина обучающихся; сложность в определении самостоятельности выполнения заданий учащихся; высокая стоимость внедрения системы на начальном этапе, высокая трудоемкость и стоимость разработки курсов электронного обучения, сложность в определении стоимости этой разработки и последующего обновления [1]. Существенной является проблема обеспечения качества электронных учебных материалов. Также имеются и проблемы в правовом поле: возникают вопросы по защите интеллектуальной собственности и авторского права в электронном мире. Самой главной проблемой является кадровая. Очень трудно подобрать преподавателей, компетентных одновременно и в предметной области, и в области применения компьютерных технологий, а также имеющих желание работать с обучаемыми в режиме онлайн и постоянно обновлять электронные учебные материалы. Прямым следствием этого является проблема разработки государственных стандартов, обеспечивающих единый общегосударственный уровень требований к подготовке специалистов в сфере электронного образования [2].

Исходя из перечисленного, на современном этапе развития Российского образования можно предложить подход, при котором электронное обучение пока будет дополнять традиционное. Его можно активно использовать при обучении студентов, не имеющих возможности посещать занятия по каким-либо причинам. В частности, в ВИТИ НИЯУ МИФИ для студентов технических специальностей электронное обучение в настоящее время внедряется только для заочной и вечерней форм обучения и находится на стадии апробации.

Развитие Российского образования показывает следующую тенденцию: электронное обучение начинает активно внедряться в университетах, также как массовые открытые онлайн курсы являются самой актуальной тенденцией в e-learning. Всемирно известные университеты: Гарвард, MIT, Caltech, Беркли и Принстон активно внедяют эту форму образования [3]. Поэтому целесообразно делать инвестиции в электронное обучение, которое приобретает широкую популярность во всем мире.

Литература

1. *Трунова Л. В.* Внедрение в образовательный процесс дистанционных технологий с использованием локальных средств разработки электронных курсов // Молодой ученый.— 2017.—№ 25.—С. 49–52.
2. *Болкунов И. А.* Электронное обучение: проблемы, перспективы, задачи // Таврический науч. обозреватель—2016.—№ 11–1(16).—С. 128–132.
3. *Логинова А. В.* Эволюция электронного обучения и перспективы развития // Молодой ученый.—2015.—№ 10.—С. 1210–1212.

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ НА ПРИМЕРАХ ЗАДАЧ ГИА

Л. П. Охват
(Россия, Владикавказ; СОШ № 1 ст. Архонская)

Известно, что решение текстовых задач приводит к формированию у обучающихся логического мышления, сообразительности, умения самостоятельно осуществлять небольшое исследование и т. п. Поэтому решению текстовых задач уделяется большое внимание на протяжении всего школьного курса. Сначала вводится арифметический метод решения, а затем дети учатся решать задачи алгебраически, т. е. с помощью уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств. При всей условности деления можно выделить два вида задач: задачи «на движение» (сюда можно включить задачи на работу и задачи, связанные с наполнением резервуара) и задачи на проценты, части, концентрацию.

Следует отметить, что текстовые задачи включены в контрольно-измерительные материалы ГИА по математике. В 9 классе это 7-е задание с кратким ответом и 22-е задание с описанием решения. В 11 классе (на профильном уровне) это задания с кратким ответом №1, №11 и так называемая экономическая задача № 17 с описанием решения. Задания №7 в 9 классе и №1 в 11 классе направлены на проверку уровня владения базовыми умениями. Это такие элементы содержания, как проценты и доли, округление с избытком и недостатком и т. п. Задания №22 в 9 классе и №11, №17 в 11 классе направленные на проверку владения материалом на повышенном уровне. При решении этих задач участники экзамена должны смоделировать реальную ситуацию на языке алгебры и исследовать построенную модель с использованием аппарата алгебры.

По результатам ГИА 2017 в РСО-Алания задачи базового уровня верно выполняют в 9 классе 64% , а в 11 классе — 91%. С заданием №22 справляются лишь 3,8% девятиклассников. С аналогичной задачей в 11 классе — 52% [1].

Каковы причины низких показателей правильности выполнения текстовых задач? На мой взгляд, их может быть две: недостаточное владение учителем методикой обучения решению такого типа задач и, конечно, арифметические, логические ошибки участников ГИА или невнимательное прочтение ими условия задачи.

Я постаралась разобраться с первой причиной на примерах задач на движение и пришла к выводу, что задачи «на движение» (в том числе задачи на движение по окружности, на движение более двух тел, на движение протяженных тел), вызывающие особое затруднение, по результатам опроса учителей математики, проходивших в 2018 г. курсы повышения квалификации, решаются по одной схеме.

1. *Этап анализа условия задачи.*

Необходимо провести анализ условия задачи и отразить данные задачи в краткой записи. В данном случае предлагаю оформить условие, заполнив таблицу.

2. *Этап поиска решения и его оформление.*

Возможны два способа поиска решения задачи: синтез (что можно найти по данным задачи?), анализ (что требуется узнать в задаче?). В данном случае остановимся на первом способе. Если на вопрос «Что можно найти по данным задачи?» можно ответить, то вычисляем значение неизвестной величины и опять задаем тот же вопрос, пока не ответим на вопрос задачи. Если же не достаточно данных для ответа на поставленный вопрос, то нужно составить уравнение (неравенство, систему уравнений). При этом следует рассмотреть все неизвестные величины, которые могут быть обозначены буквой, и все данные задачи, которые могут быть основанием для составления уравнения (неравенства, системы уравнений). И на этапе обучения решению задач с помощью уравнения составить все возможные уравнения. При решении задач на экзамене я советую детям, если это возможно, обозначать буквой искомую величину.

3. *Этап проверки решения.*

4. *Этап подведения итогов* [2].

Литература

1. URL: https//www.ege15.ru.
2. *Малова И. Е.* Материалы лекций летней математической школы для учителей профильных классов в РСО-Алания.

ТУРНИР ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ: ИТОГИ И ПЕРСПЕКТИВЫ

М. А. Павлова (Россия, Архангельск; САФУ),
М. В. Шабанова (Россия, Архангельск; САФУ)

Турнир по экспериментальной математике был учрежден 5 лет назад с целью вовлечения широкого круга учащихся в деятельность применения ручных, компьютерных и мысленных экспериментов к решению математических задач, мониторинга уровня сформированности у учащихся основной школы универсальных исследовательских действий математика-экспериментатора в соответствии с требованиями ФГОС ООО и теоретическими представлениями о результатах исследовательского обучения математике с компьютером. Доклад представляет специфику турнирных заданий, динамику изменения географии участников турнира и их результатов, а также раскрывает перспективы развития турнира.

Требованиями ФГОС ООО [1] определена необходимость формирования у учащихся навыков использования готовых программных продуктов для поддержки деятельности по решению математических задач. На практике формирование этих навыков наиболее часто осуществляется путем включения в систему средств учебной деятельности специализированных программных продуктов, относящихся к классу системы динамической математики (GeoGebra, 1С Математический конструктор, Живая математика, Cabri и др.). Задания на использование этих программ уже включены в УМК рядом авторских коллективов [2, 3].

Турнир по экспериментальной математике [4] представляет собой массовое математическое соревнования, в ходе которого ученики могут испытать свои возможности в постановке и решении задач с использованием систем динамической математики, а также тех задач, решение которых требует привлечения ручных или мысленных экспериментов.

Турнирное задание состоит из шести задач, каждое из которых имеет свою диагностическую функцию: проверка умений теоретически осмысливать результаты экспериментальных проб, проверка умений планировать и проводить мысленные и ручные эксперименты, проверка умений конструировать динамические модели математических объектов компьютерными инструментами, проверка умений комплексного использования теоретических и экспериментальных методов, проверка умений ставить новые задачи на базе решенной путем варьирования динамической модели.

В турнире принимают участие учащиеся 7, 8 и 9 классов, география которых постепенно расширяется. Первоначально турнир мыслился как областное мероприятие для подведения итогов работы экспериментальных площадок, на которых апробировалась методика обучения математике с компьютером. Сегодня география участников вышла уже за пределы не только региона, но и страны:

Архангельская область, Москва, Красноярск, Подольск, Казахстан. Расширению географии во многом способствует возможность зарегистрировать любую школу как площадку проведения турнира, а также подведения итогов отдельно на каждой площадке.

Основная цель турнира сегодня — это популяризация идей, методов и средств экспериментальной математики среди учителей и учащихся, а не рейтинговая оценка умений учащихся. Учредители турнира понимают, что одни учащиеся впервые сталкиваются с системой динамической математике на турнире, другие имеют богатый опыт ее использования. Именно поэтому было принято решение о возможности подведения итогов на каждой площадке отдельно.

Готовиться к турниру учащиеся могут как самостоятельно, так и под руководством учителя. Для этих целей на сайте размещен весь архив турнирных заданий с разбором их решений, имеются ссылки на сайт кружка по экспериментальной математике.

В перспективе планируется дополнить индивидуальные турнирные задания групповыми, а также расширить возрастные границы, включив число участников и учащихся старших классов.

Литература

1. Приказ Министерства образования и науки РФ от 17.12.2010 г. № 1897 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования».—URL: http://base.garant.ru/55170507/ixzz5qFqkvems.
2. *Муравина Г. К., Муравина К. С., Муравиной О. В.* Алгебра и начала математического анализа (10–11): УМК.—URL: https://rosuchebnik.ru/kompleks/umk-liniya-umk-muravin-algebra-10-11-base/.
3. URL: http://www.geometry2006.narod.ru/.
4. URL: http://itprojects. narfu.ru/turnir/.

МЕТОДИКА ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ИНКЛЮЗИВНОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ ПО СЛУХУ, ПРИМЕНЯЕМАЯ В КНИТУ ИМ. А. Н. ТУПОЛЕВА

А. А. Сергеев (Россия, Казань; КНИТУ–КАИ),
Е. В. Стрежнева (Россия, Казань; КНИТУ–КАИ)

Одна из актуальных задач государственной политики современной России в области образования — создание инклюзивной среды. В тексте Федерального закона «Об образовании в Российской Федерации» от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ, ст. 2, пункт 27 термин «инклюзивное образование» определяется как «обеспечение равного доступа к образованию для всех обучающихся с учетом разнообразия особых образовательных потребностей и индивидуальных возможностей». Реализация инклюзивного образования в РФ ставит вопрос о необходимости смены методологии внедрения интеграционных инноваций в систему образования. У лиц с ограниченными возможностями здоровья по слуху формирование компетенций связано с определенными трудностями. Кроме фундаментальных знаний, необходимых в данной области, определяемой специальностью, а так же умений и навыков, требуется создать определенный социальный лифт, обеспечивающий людям с особыми потребностями активное освоение пространства социума. Необходимо сформировать у них способность ориентироваться в информационных потоках новых сведений, научить искать и отбирать знания, необходимые для решения конкретных проблем. В связи с этим возникает необходимость активного поиска новых резервов не только качественной профессиональной подготовки специалистов, но и социализации обучаемых, их межличностного взаимодействия в группах инклюзивного типа.

Методика организации занятий по дисциплине «Математика» со студентами с ограниченными возможностями здоровья по слуху, реализуемая в многопрофильном специальном учебном подразделении Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ) им. А. Н. Туполева–КАИ: Казанском учебно-исследовательском и методическом центре (КУИМЦ), направлена на развитие их логического мышления, творческих способностей, умения самостоятельно изучать учебный материал; формирование внутренних мотивов дальнейшей познавательной деятельности. Разработанный на кафедре специальных технологий в образовании (СТвО) при КУИМЦ единый комплекс методического обеспечения и технологий инклюзивного образования включает курс адаптационных лекций и практических занятий, записанный на электронных слайдах, видеоматериалах, набор индивидуальных заданий и тестов. Для реализации самостоятельной работы студентов на основе разработанного комплекса используются специально оборудованные с учетом мультимедийных технологий классы. На первом этапе проводятся диагностические срезы в рамках мониторинга уровня знаний поступивших абитуриентов для последующей дифференциации и индивидуализации процесса обучения. При организации образовательного пространства аудиторной и внеаудиторной деятельности, наряду с традиционными формами обучения (лекциями и практическими занятиями) с сурдопереводом, студентам первого курса предлагается самостоятельное изучение учебного материала в электронной образовательной среде Blackboard [1]. Затем студенты проходят тестирование с помощью контрольно-измерительных материалов [2]. Социологический опрос студентов, изучающих предмет на первом этапе, показывает, что эффективность Blackboard на первом этапе очень мала: 78% опрошенных ответили, что учебный материал, представленный в электронном варианте, не воспринимается ими из-за сложности научных формулировок и краткости изложения. В связи с этим велика роль преподавателя, который на лекциях и практических занятиях адаптирует учебный материал для более легкого восприятия. Эффективность занятий с преподавателем оценивается студентами в 93%. Кроме того, согласно опросу 81% студентов подтвердили эффективность проводимых на этом этапе трансформационных тренингов [3]. Тренинги проводятся с применением мультимедийного оборудования с использованием коммуникативных техник совместного решения группой поставленных задач. На втором этапе студенты не только эффективно работают с учебной и научной литературой, электронными ресурсами, но уже могут делиться опытом с другими и обучать студентов младших курсов. Они готовы к самостоятельной работе с изучаемым материалом и 52% участвующих в опросе студентов, подтвердили эффективность дистанционного образования в Blackboard при организации внеаудиторной работы. На третьем этапе студенты сами могут выстраивать тактику и стратегию получения новой информации, становятся самостоятельными, способными к самореализации, открытыми для опыта. Очевидно, что эффективность образовательных технологий различна на каждом этапе, что подтверждают данные социологического опроса. Однако, каждая из инновационных технологий необходима, так как вносит свой вклад в формирование компетенций будущего инженера, способного к саморазвитию, идет процесс последовательного становления личности, социализация и социальная адаптация.

Литература

1. *Дараган М. А., Стрежнева Е. В.* Использование учебной среды BLACKBOARD при изучении математики для студентов, обучающихся по направлению «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» // Проблемы техники и технологий телекоммуникаций ПТиТТ-2014; Оптические технологии в теле-коммуникациях ОТТ-2014 Материалы Междунар. научно-техн. конф.—Казань, 2014.—С. 401–403.
2. *Иртуганова Э. А., Насырова Е. В., Якупов З. Я.* О тестировании в системе преподавания естественнонаучных дисциплин в военном институте // Вестн. Казанского гос. техн. ун-та им. А. Н. Туполева.—2001.—№ 2.—С. 72–77.
3. *Дараган М. А., Стрежнева Е. В.* Трансформационные тренинги при обучении математике студентов младших курсов в институте радиоэлектроники и телекоммуникаций // Прикладная электродинамика, фотоника и живые системы.—Казань, 2016.—С. 313–315.

СИММЕТРИЯ И ФРАКТАЛЬНОСТЬ В МАТЕМАТИКЕ: СИНЕРГЕТИЧЕСКОЕ МИРОВИДЕНИЕ

В. А. Тестов
(Россия, Вологда; ВоГУ)

Важнейшими составляющими научной картины мира, красоты мироздания являются понятия симметрии и фрактальности. С этими понятиями связаны возможности усиления эстетической составляющей математического образования, приобщения учащихся к духовной культуре и творческой деятельности. Однако соотношение между этими понятиями в методической литературе не рассматривалось.

Симметрия является древним общечеловеческим символом, который из поколения в поколение формирует в сознании человека идею гармонии мироздания. По словам видного математика XX века Германа Вейля «Симметрия... является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство» [1, с. 37].

Раскрыть понятие красоты математических объектов пытался ряд ученых-математиков, особое внимание уделяя наличию в математическом объекте меры порядка. В частности, А. Пуанкаре симметрию понимал, как гармонию отдельных составляющих системы, их равновесие. С этой точки зрения симметрия является наиболее наглядной формой воплощения порядка в природе и творениях человека.

Древнегреческие философы порядок в мироздании называли космосом, который противопоставлялся хаосу. Человек посредством симметрии всегда пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство. Главными характеристиками понятия симметрии являются пропорциональность, инвариантность, проявляемые при каких-либо преобразованиях. Но в природе симметрия никогда не бывает абсолютной.

В математике, напротив, понятие симметрии достигает абсолютной строгости определений. Г. Вейль под симметрией понимал «неизменность какого-либо объекта, при определенного рода преобразованиях [1]. Одну из глав своей книги Г. Вейль посвятил орнаментной симметрии. В случае потенциально бесконечных узоров, как отмечает Г. Вейль [1, с. 93], «операция, относительно которой данный узор остается неизменным, не обязательно должна быть движением, она может быть и подобием».

В конце XX века с развитием синергетического мировидения, теории хаоса, а также компьютерной техники возникло другое важнейшее понятие, лежащее в основе красоты и гармонии — понятие фрактальности. Явление фрактальности тесно связано с законами красоты и часто встречается в живой и неживой природе, в различных сферах человеческой деятельности.

Возникшее в конце XX века синергетическое мировидение позволяет дать новую эстетическую оценку роли хаоса. В синергетическом мировидении хаос предстает в качестве механизма выхода на структуры-аттракторы. Некоторые философы прошлого в красоте видели продукт свободной мысли. В частности, И. Кант считал, что красота есть целесообразность без цели, она выражает способность человека мыслить природу по законам свободы. Используя современную терминологию, эту мысль можно сформулировать так: красота есть некий аттрактор, результат самоорганизации природы или полета свободной человеческой мысли.

Но преобразование подобия является не только одним из наиболее общих видов симметрии, оно лежит и в основе понятия фрактальности. Поскольку преобразование подобия является частным случаем симметрии, то фрактальность можно считать одним из проявлений симметрии.

С другой стороны, практически все виды симметрии можно считать частными случаями подобия или комбинацией подобий, т. е. симметрию можем считать проявлением фрактальности с конечным числом итераций. Таким образом, понятия симметрии и фрактальности тесно взаимосвязаны. Симметрия и фрактальность представляют собой две противоположности, взаимно дополняющие одна другую, эстетически и математически взаимно переходящие друг в друга. Синергетическая парадигма открывает видение красоты как взаимодействие симметрии и фрактальности, их гармонического баланса.

Таким образом, симметрия и фрактальность — это основные идеи красоты, чем определяется их значение для математического образования, в частности для эстетического воспитания учащихся. Из взаимосвязи понятий симметрии и фракталов вытекает необходимость их тесной взаимосвязи и в обучении на основе понятия самоподобия. Такое взаимосвязанное изучение симметрии и фракталов способствует достижению метапредметных и личностных результатов. Для достижения таких результатов следует учитывать особенности формирования математических понятий у школьников и студентов в современных условиях [2].

Литература

1. *Вейль Г.* Симметрия.—М.: Наука, 1968.—192 с.
2. *Тестов В. А.* Особенности формирования у школьников основных математических понятий в современных условиях // Научно-методический электронный журнал «Концепт».—2014.—№ 12.—С. 1–9.—URL: http://e-koncept.ru/issue/104/.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

2-й лицей при БухГМИ — 2-й Гиждуванский академический лицей при Бухарском государственном медицинском институте имени Абу Али ибн Сино
BukhSU — Bukhara State University
EIU — Eastern Illinois University
IMM UrB RAS — Institute of Mathematics and Mechanics, the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
INP AS RUz — Institute of Nuclear Physics, Academy of Sciences of Uzbekistan
METU — Middle East Technical University
MSU — Lomonosov Moscow State University
NUUz — National University of Uzbekistan
RSU S. A. Esenin — Ryazan State University named for S. A. Yesenin
Ryazan Institute ED — Ryazan Institute of Education Development
SFEDU — Southern Federal University
SMI VSC RAS — Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences
TUIT — Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi
UrFU — Ural Federal University (Institute of Mathematics and Computer Science)
VSC RAS — Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences
VSU — Voronezh State University
АН ЧР — Академия наук Чеченской Республики
Атос АйТи Солюшенс энд Сервисез — Общество с ограниченной ответственностью «Атос АйТи Солюшенс энд Сервисез»
АЧИИ — Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ
БГУ им. И. Г. Петровского — Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
БГУ — Белорусский государственный университет
БГЭУ — Белорусский государственный экономический университет
БНТУ — Белорусский национальный технический университет
БухГУ — Бухарский государственный университет
ВГПУ — Воронежский государственный педагогический университет
ВГТУ — Воронежский государственный технический университет
ВГУ — Воронежский государственный университет
ВИТИ НИЯУ МИФИ — Волгодонский инженерно-технический институт (филиал) Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»
Владикавказский филиал ФУ — Владикавказский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
ВНЦ РАН — Владикавказский научный центр Российской академии наук
ВоГУ — Вологодский государственный университет

ВУНЦ ВВС «ВВА» — Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»
ГФИ ВНЦ РАН — Геофизический институт — филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального научного центра «Владикавказский научный центр Российской академии наук»
ДГТУ — Донской государственный технический университет
ДНЦ РАН — Дагестанский научный центр Российской академии наук
ЕИ КФУ — Елабужский институт (филиал) Казанского федерального университета
ИГМ НАНУ — Институт гидромеханики Национальной академии наук Украины
ИМ АН РУз — Институт математики имени В. И. Романовского академии наук Республики Узбекистан
ИМ СО РАН — Институт математики имени С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук
ИнгГУ — Ингушский государственный университет
ИПМА КБНЦ РАН — Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
ИПУ РАН — Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова Российской академии наук
ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН — Институт теоретической физики имени Л. Д. Ландау Российской академии наук
КазНУ — Казахский национальный университет имени Аль-Фараби
Калужский филиал ФУ — Калужский филиал Финансового университет при Правительстве Российской Федерации
КНИТУ–КАИ — Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева (Казанский авиационный институт)
КПИ — Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»
КубГУ — Кубанский государственный университет
Лицей для одаренных детей — Государственное казенное образовательное учреждение «Лицей для одаренных детей»
ЛЭГМиН — Лаборатория электро- и гидродинамики микро- и наномасштабов Краснодарского филиала Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
МАИ (НИУ) — Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
МГТУ им. Н. Э. Баумана — Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)
МГУ — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
МПГУ — Московский педагогический государственный университет
МУДО «ЦВР» — Муниципальное учреждение дополнительного образования «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района»

НИУ «МЭИ» — Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
НИЦ СЭ и НК — Общество с ограниченной ответственностью «Научно-исследовательский центр супер-ЭВМ и нейрокомпьютеров»
ОГУ — Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева
ПГУ — Полоцкий государственный университет
СамГТУ — Самарский государственный технический университет
САФУ — Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова
СибГУ — Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
СОГУ — Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова
СОШ № 1 ст. Архонская — МБОУ Средняя общеобразовательная школа № 1 имени Героя Советского Союза П. В. Масленникова ст. Архонская
СОШ № 27 — МБОУ Средняя общеобразовательная школа № 27
СОШ № 30 — МБОУ Средняя общеобразовательная школа № 30
СПИИРАН — Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук
СУНЦ МГУ — Специализированный учебно-научный центр (факультет) — школа-интернат имени А. Н. Колмогорова Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
СФ СамГТУ — Сызранский филиал Самарского государственного технического университета
ТУИТ — Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразмий
ФИЦ ИУ РАН — Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук
ЧГПУ — Чеченский государственный педагогический университет
ЧГУ — Чеченский государственный университет
ЧелГУ — Челябинский государственный университет
ЮГУ — Югорский государственный университет
ЮЗГУ — Юго-Западный государственный университет
ЮМИ ВНЦ РАН — Южный математический институт — филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального научного центра «Владикавказский научный центр Российской академии наук»
ЮРГПУ (НПИ) — Южно-Российский государственный политехнический университет имени М. И. Платова (Новочеркасский политехнический институт)
ЮФУ — Южный федеральный университет
ЯГПУ — Ярославский государственный педагогический университет имени К. Д. Ушинского

ПОРЯДКОВЫЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ:

Тезисы докладов
XV Международной научной конференции
(с. Цей, 15–20 июля 2019 г.)

Компьютерная верстка:
М. У. Вазагаева, И. С. Гаприндашвили
Зав. редакцией: В. В. Кибизова

ЮМИ ВНЦ РАН
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

ISBN 978-5-904695-42-2