РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ВНЦ РАН И РСО-А

ПОРЯДКОВЫЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Тезисы докладов
международной научной конференции
(Владикавказ, Россия, 19–24 июля 2010 г.)

Владикавказ
ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А
2010

УДК $517 + 519$

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов международной научной конференции (Владикавказ, 19–24 июля 2010 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2010.—325 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

СЕКЦИЯ I
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

СЕКЦИЯ II
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

СЕКЦИЯ III
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Пленарные доклады

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 18–19.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АНОРМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

А. В. Арутюнов (Россия, Москва; РУДН, ЮМИ)

Излагается общий подход к исследованию тесно связанных между собой необходимых условий экстремума в задачах с ограничениями и теорем об обратной и неявной функциях в вырожденных (анормальных) точках.

Рассмотрим классическую экстремальную задачу с ограничениями

$$\varphi(x) \to \min, \quad f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \ x \in X.$$

Здесь X — банахово пространство (для простоты можно считать его конечномерным), гладкие функции f_i задают ограничения, а φ — минимизируемый функционал. Пусть x_0 — локальный минимум. Известно, что если точка x_0 вырождена (анормальна), т. е. градиенты ограничений $f_i'(x_0)$ линейно зависимы, то классический принцип Лагранжа вырождается (не несет содержательной информации), а классические необходимые условия второго порядка не выполняются. Обсуждается это явление вырождения и излагается теория необходимых условий первого и второго порядков одинаково содержательная как для вырожденных, так и для невырожденных задач. Эти результаты являются развитием принципа Лагранжа и обобщаются на широкие классы задач: задачи с неравенствами, задачи с бесконечным числом ограничений, задачи оптимального управления и т. д.

Классический пример подобной анормальной задачи: является ли заданная квадратичная форма неотрицательной (или обращается ли она в нуль) на пересечении квадрик. Излагаемая теория позволяет дать ответы на эти вопросы. В качестве другого примера класса анормальных задач обсуждаются задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями.

Рассмотрим теперь систему нелинейных уравнений, имеющую в векторной записи вид $\mathbf{F}(x) = y$, где $\mathbf{F}$ — гладкое отображение. Если точка x_0 вырождена, т. е. линейный оператор $\mathbf{F}'(x_0)$ не является сюръективным (например, $\mathbf{F}'(x_0) = 0$), то в точке x_0 классическая теорема об обратной функции неприменима. В докладе обсуждается это явление вырождения и предлагаются два типа теоремы об обратной функции, которые применимы и в вырожденных точках. Обсуждаются обобщения теоремы об обратной функции на случай ограничений, определяемых выпуклым конусом, теоремы об обратной функции по направлениям и т. д.

Все излагаемые в докладе результаты являются содержательными и в конечномерном случае (даже, если X — трехмерное пространство).

Литература

1. *Арутюнов А. В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи.—М.: Изд-во «Факториал», 1997.—256 с.
2. *Арутюнов А. В.* Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа. Анормальные точки // Мат. сб.—2000.—Т. 191, № 1.—С. 3–26.
3. *Арутюнов А. В.* Необходимые условия второго порядка в задачах оптимального управления // Докл. АН.—2000.—Т. 371, № 1.—С. 10–13.
4. *Арутюнов А. В.* Принцип максимума Понтрягина и достаточные условия оптимальности для нелинейных задач // Дифференц. уравнения.—2003.—Т. 39, № 12.—С. 1587–1595.
5. *Арутюнов А. В.* Накрывание нелинейных отображений на конусе в окрестности анормальной точки // Мат. заметки.—2005.—Т. 77, вып. 4.—С. 483–497.
6. *Арутюнов А. В.* Неотрицательность квадратичных форм на пересечении квадрик и квадратичные отображения // Мат. заметки.—2008.—Т. 84, вып. 2.—С. 163–174.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 20.

О ТИПЕ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ПОРЯДКА МЕНЬШЕ ЕДИНИЦЫ С НУЛЯМИ НА ЛУЧЕ

Г. Г. Брайчев (Россия, Москва; МПГУ)

В докладе будет дан обзор новейших результатов по экстремальным задачам для типов целых функций порядка меньше единицы с расположенными на луче нулями в терминах классических плотностей распределения этих нулей.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 21–22.

ОБ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ В КОЭФФИИЦЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ[1]

А. О. Ватульян (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Коэффициентные обратные задачи — интенсивно развивающийся раздел теории обратных задач [1]. Эти задачи стали особенно востребованы в последние годы в связи с многочисленными приложениями при уточнении математических моделей, описывающих деформирование и распространение упругих волн в композитах, пенистых и пористых средах, биологических тканях, геологических породах, где для получения адекватных результатов требуется отказ от гипотезы однородности. При этом важными являются не только вопросы постановки таких задач, выбор классов идентифицируемых функций, исследование единственности, но и разработка эффективных вычислительных процедур, позволяющих в получать приемлемые результаты. Отметим, что с развитием средств диагностики появилась возможность иметь данные о физических полях идентифицируемых не только на поверхности, но и внутри исследуемого объекта. Это привело к разным постановкам (в том числе и слабым) исследуемых задач и позволило сформулировать два типа постановок — линейную (при измерении полей внутри) и нелинейную (при измерении полей на границе). Различие в характере доступной экспериментальной информации — задание полей внутри области или на части ее границы, приводит к различным постановкам.

Первая постановка приводит к простым линейным операторным соотношениям при исследовании обратной задачи, решение ее строится на основе либо анализа задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, либо на основе конечномерных аппроксимаций и метода регуляризации. Главную трудность на этом пути в практическом плане представляет собой вычисление неограниченных операторов от функций, заданных в дискретном наборе точек, а простейшим способом

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 10-01-00194-а и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

преодоления этого типа некорректности является техника сплайн-аппроксимаций [2].

Другая постановка, в которой известны лишь граничные поля в некотором диапазоне изменения частоты, гораздо более сложна, приводит к нелинейным операторным уравнениям, которые содержат промежуточные переменные-компоненты физических полей. Задачи в такой постановке могут быть исследованы лишь на основе некоторых итеративных процедур, основные принципы построения которых опираются на метод линеаризации и слабую постановку. Наиболее часто реализация итерационного процесса опирается на традиционную процедуру типа Ньютона и сочетает процедуру решения прямых задач (либо с помощью аппарата ИУФ 2-го рода, либо конечноэлементных технологий) и обращение вполне непрерывного оператора на основе некоторой регуляризующей процедуры, например, с помощью метода А. Н. Тихонова [3]. Сравнительный анализ этих постановок представлен в [4]. В настоящей работе обсуждается комбинированный подход при организации итерационного процесса при исследовании второй постановки. Он основан на сочетании идей по обращению соответствующих операторов, возникающих естественным образом при исследовании первой и второй постановок, и позволяет формировать новые принципы построения итерационных процессов с помощью сочетания решения прямой задачи и задачи Коши для дифференциального оператора первого порядка.

Литература

1. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела.—М: Физматлит, 2007.—223 с.
2. *Боброва А. Н., Ватульян А. О.* Об определении закона изменения модуля Юнга при анализе продольных колебаний стержня // Вестник ДГТУ.—2009, № 4.—С. 613–621.
3. *Бочарова О. В., Ватульян А. О.* О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журн.—2009.—Т. 55, № 3.—С. 281–288.
4. *Ватульян А. О.* О некоторых постановках обратных коэффициентных задач для линейных операторов // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Сер. Естеств. науки. Спецвыпуск. Актуальные проблемы механики.—2009.—С. 50–54.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 23–24.

FREE AND PROJECTIVE BANACH LATTICES

A. W. Wickstead (United Kingdom, Belfast; PMRC QUB)

The notion of a free object originated in algebra. The basic idea is to have a set of «generators» S then define the free object over S, F_S, to be an object that contains and is generated by S and such that any mapping of S into an object O can be extended to a morphism of F_S into O. Any identity that holds for the generators in a free object must hold in every object.

In simple categories, the free objects tend not to be very interesting. For example if we look at vector spaces over any field, then every vector space is free and generators correspond to members of a Hamel basis.

Once we try to put things into an analytic setting, we must also think about continuity or norms. For example, the *free Banach space* over a set S of generators is a Banach space F_S containing S as a set of elements of norm one, whose linear span is dense, with the property that any map of S into the unit ball of a Banach space X extends to a bounded linear operator of F_S into X with norm one. The norm condition means that generators have to be as far away from each other as members of a unit ball can possibly be, i.e. two. This means that free Banach spaces are precisely the spaces $\ell_1(I)$ of real-valued functions on some set I such that

$$\|f\| = \sum_{i \in I} \big|f(i)\big| < \infty$$

where the generators are the characteristic functions of singletons.

There is a long-standing theory of free vector lattices dating back to the late nineteen sixties. The free vector lattice on $\mathfrak{a}$ generators, $FVL(\mathfrak{a})$, is the vector lattice of real-valued functions on $\mathbb{R}^{\mathfrak{a}}$ generated by the coordinate projections and the coordinate projections are the generators.

We say that F is a *free Banach lattice on* $\mathfrak{a}$ *generators* if

(i) F has a set of generators $\{g_\alpha : \alpha \in \mathfrak{a}\}$ with norm one.

(ii) Every map of $\{g_\alpha : \alpha \in \mathfrak{a}\}$ into the unit ball of a Banach lattice X can be extended to a linear lattice homomorphism $T : F \to X$ with $\|T\| \leqslant 1$.

It is not immediately evident that, with the norm condition, such an object must exist but it does and is precisely the completion of the free vector lattice on $\mathfrak{a}$ generators under the norm $\|f\|_F = \sup \phi(|f|)$ where the supremum is taken over all positive linear functionals ϕ on $FVL(\mathfrak{a})$ such that $\phi(|g_{\alpha|}) \leqslant 1 \; \forall \alpha \in \mathfrak{a}$. We use $FBL(\mathfrak{a})$ to denote the free Banach lattice on $\mathfrak{a}$ generators.

We provide several results that characterize when the number of generators of a free Banach lattice is either finite or countable, all involving conditions that are standard in the theory of Banach lattices, as well as describing some properties that are shared by all free Banach lattices.

In an algebraic setting, an object P is termed «projective» if whenever $Q : X \to Y$ is a morphism that is onto and $T : P \to Y$ is any morphism then it can be «lifted» to a morphism $\hat{T} : P \to X$ such that $Q \circ \hat{T} = T$.

We give a definition of projective Banach lattices that takes the norm into account as well. Free Banach lattices are certainly projective, but so are many more. We can characterize projective Banach lattices as being those Banach lattices which (within ϵ) are isometrically order isomorphic to closed sublattices of free Banach lattices which are the range of contractive lattice homomorphic projections. In particular, all separable projective Banach lattices can (almost) be embedded as nice sublattices of the one free Banach lattice $FBL(\aleph_0)$.

Given that we know very little about free Banach lattices, this doesn't really tell us much about projective Banach lattices. We approach the topic from the other end by trying to discover some projective Banach lattices and then using this characterization to tell us more about free Banach lattices.

Finite-dimensional Banach lattices are projective.

If K is a compact subset of $\mathbb{R}^n$, for some $n \in \mathbb{N}$, then $C(K)$ is projective under the supremum norm if and only if K is a neighbourhood retract of $\mathbb{R}^n$.

Although all Banach spaces $\ell_1(I)$, over any index set I, are free and projective as Banach spaces, they are only projective Banach lattices if I is finite or countable. In fact a countable ℓ_1 sum of «small» (for example, separable) projective Banach lattices must again be a projective Banach lattice.

By way of contrast, if $\mathfrak{a}$ is uncountable then although $FBL(\mathfrak{a})$ is itself projective it is not a proper direct summand of any projective Banach lattice.

The structure of both free and projective Banach lattices seems to be very rich, in marked contrast to the situation for Banach spaces, and there are many problems still to be answered.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 25–26.

МАРТИНГАЛЬНО-ЭРГОДИЧЕСКИЕ И ЭРГОДИКО-МАРТИНГАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В РЕШЕТКАХ БАНАХА — КАНТОРОВИЧА $L_p(\widehat{\nabla}, \widehat{\mu})$

И. Г. Ганиев (Узбекистан, Ташкент; ТИИЖТ)

Мартингально-эргодические и эргодико-мартингальные теоремы в L_p пространствах рассматривались в [1]. В данной работе рассматриваются мартингальные и эргодические свойства решетки Банаха — Канторовича $L_p\big(\widehat{\nabla}, \widehat{\mu}\big)$, ассоциированной с полной булевой алгеброй $\widehat{\nabla}$ и мерой $\widehat{\mu}$ на $\widehat{\nabla}$ со значениями в пространстве измеримых функции.

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с полной конечной мерой, $L_0 = L_0(\Omega)$ — алгебра классов измеримых функции на (Ω, Σ, μ), $(\hat{\nabla}, \hat{\mu})$ — полная булева алгебра со строго положительной $L_0(\Omega)$-значной модульной мерой $\hat{\mu}$ (см. [2], [3]). Рассмотрим пространство $L_p\big(\hat{\nabla}, \hat{\mu}\big)$, $p \leqslant 1$, построенное по $L_0(\Omega)$-значной строго положительной мере $\hat{\mu}$. Напомним, что $L_0(\Omega)$-значная норма в $L_p\big(\hat{\nabla}, \hat{\mu}\big)$ задается равенством $\|\hat{f}\|_{L_p\left(\hat{\nabla}, \hat{\mu}\right)} = \big(\int |\hat{f}|^p \, d\hat{\mu}\big)^{\frac{1}{p}}$ и $L_p(\hat{\nabla}, \hat{\mu})$ есть решетка Банаха — Канторовича (см. [2]).

Пусть $T : L_p\big(\hat{\nabla}, \hat{\mu}\big) \to L_p\big(\hat{\nabla}, \hat{\mu}\big)$ — линейное положительное $L_0(\Omega)$-ограниченное отображение, для которого $T\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}$. Тогда определен элемент, $\|T\| = \sup\limits_{\|\hat{f}\|_{L_p(\hat{\nabla}, \hat{\mu})} \leqslant \mathbf{1}} \|T\hat{f}\|_{L_p(\hat{\nabla}, \hat{\mu})}$, который является элементом $L_0(\Omega)$. Если $\|T\| \leqslant \mathbf{1}$, то отображение T называют сжатием.

Пусть $s_n\big(\hat{f}\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i \hat{f}$ — чезаровские средние в $L^p\big(\hat{\nabla}, \hat{\mu}\big)$. Как указано в [2, теорема 4.2.9], существует оператор $E\big(\,\cdot\,|\hat{\nabla}^1\big) : L_1\big(\hat{\nabla}, \hat{\mu}\big) \to L_1\big(\hat{\nabla}^{(1)}, \hat{\mu}^1\big)$ условного математического ожидания. При этом $\big\|E\big(\hat{f}|\hat{\nabla}^{(1)}\big)\big\|_{L_1(\hat{\nabla}, \hat{\mu})} \leqslant \|\hat{f}\|_{L_1\left(\hat{\nabla}, \hat{\mu}\right)}$ для любого $\hat{f} \in L_1\big(\hat{\nabla}, \hat{\mu}\big)$ и $E\big(\mathbf{1}|\hat{\nabla}^{(1)}\big) = \mathbf{1}$.

Пусть $\hat{\nabla}^{(n)}$ — возрастающая последовательность правильных булевых подалгебр из $\hat{\nabla}$ и $\hat{f}_n$ — такая последовательность из $L_1\big(\hat{\nabla}, \hat{\mu}\big)$, что $\hat{f}_n \in L_1\big(\hat{\nabla}^{(n)}, \hat{\mu}^{(n)}\big)$. Последовательность $\{\hat{f}_n\}$ называется *мартингалом* в решетке Банаха — Канторовича $L_1\big(\hat{\nabla}, \hat{\mu}\big)$ относительно $\big\{\hat{\nabla}^{(n)}\big\}$, если при $n < m$ имеет место равенство $E\big(\hat{f}_m|\hat{\nabla}^{(n)}\big) = \hat{f}_n$.

Если $\hat{\nabla}^{(1)} \subset \hat{\nabla}^{(2)} \subset \hat{\nabla}$, то $E\Big(E\big(\hat{f}|\hat{\nabla}^{(2)}\big)|\hat{\nabla}^{(1)}\Big) = E\big(\hat{f}|\hat{\nabla}^{(1)}\big)$, поэтому $E\big(\hat{f}|\hat{\nabla}^{(n)}\big)$ является примером мартингала в решетке Банаха — Канторовича $L_1\big(\hat{\nabla}, \hat{\mu}\big)$.

Пусть $\hat{\nabla}^{(n)}$ — последовательность правильных булевых подалгебр в $\hat{\nabla}$ и $\hat{\nabla}^{(n)} \uparrow \nabla^{\infty}$. По теореме 3.2 (ii) из [4] существует $\widehat{f}^* = (bo)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} s_n\big(\widehat{f}\big)$, положим $\widehat{f}^*_\infty = E\big(\widehat{f}^*|\widehat{\nabla}^{(\infty)}\big)$.

Теорема 1. *Пусть* $\widehat{f} \in L_p\big(\widehat{\nabla}, \widehat{\mu}\big)$.

1) *Если* $p \in [1, \infty)$, *тогда* $E\big(s_n\big(\widehat{f}\big)|\widehat{\nabla}^{(n)}\big) \xrightarrow{(bo)} \widehat{f}^*_\infty$ *в* $L_p(\widehat{\nabla}, \widehat{\mu})$ *при* $n \to \infty$, *при этом* $\big\|\widehat{f}^*_\infty\big\|_{L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})} \leqslant \big\|\widehat{f}\big\|_{L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})}$.

2) *Если* $p \in (1, \infty)$, *тогда* $E\big(s_n\big(\widehat{f}\big)|\widehat{\nabla}^{(n)}\big) \xrightarrow{(o)} \widehat{f}^*_\infty$ *в* $L_p\big(\widehat{\nabla}, \widehat{\mu}\big)$ *при* $n \to \infty$, *при этом* $\int \widehat{f}^*_\infty \, d\widehat{\mu} = \int \widehat{f} d\widehat{\mu}$.

3) *Если* $p = 1$ *и* $\sup\limits_{n\geqslant 1} s_n\big(\widehat{f}\big) = \widehat{h}$, $\widehat{h} \in L_1\big(\widehat{\nabla}, \widehat{\mu}\big)$. *Тогда* $E\big(s_n\big(\widehat{f}\big)|\widehat{\nabla}^{(n)}\big) \xrightarrow{(o)} \widehat{f}^*_\infty$ *в* $L_0\big(\widehat{\nabla}, \widehat{\mu}\big)$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $\widehat{f} \in L_p\big(\widehat{\nabla}, \widehat{\mu}\big)$. *Тогда*

1) *Если* $p \in [1, \infty)$, *то последовательность* $\Big\{s_n\Big(E\big(\widehat{f}|\widehat{\nabla}^{(n)}\big)\Big)\Big\}$ (bo)-*сходится в* $L_p\big(\widehat{\nabla}, \widehat{\mu}\big)$ *некоторому элементу* $\widehat{f}_*$.

2) *Если* $p \in (1, \infty)$, *то* $s_n\big(E\big(\widehat{f}|\widehat{\nabla}^{(n)}\big)\big) \xrightarrow{(o)} \widehat{f}_*$ *в* $L_p\big(\widehat{\nabla}, \widehat{\mu}\big)$.

3) *Если* $p = 1$ *и в* $L_1\big(\widehat{\nabla}, \widehat{\mu}\big)$ *существует* $\sup\limits_{n\geqslant 1}\big|E\big(\widehat{f}\big|\widehat{\nabla}^{(n)}\big)\big| = \widehat{h}$, *то* $s_n\big(E\big(\widehat{f}|\widehat{\nabla}^{(n)}\big)\big) \xrightarrow{(o)} \widehat{f}_*$ *в* $L_0\big(\widehat{\nabla}, \widehat{\mu}\big)$ *при* $n \to \infty$.

Литература

1. *Качуровский А. Г.* Единые теории, унифицирующие эргодические средние и мартингалы // Динамические системы и оптимизация. Тр. МИАН, 256—М.: Наука, 2007.—С. 172–200.
2. *Кусраев А. Г.* Векторная двойтвенность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.
3. *Ганиев И. Г.* Измеримые расслоения решеток и их приложения // Исследования по функциональному анализу и его приложениям.—М.: Наука, 2006.—С. 10–49.
4. *Закиров Б. С., Чилин В. И.* Эргодические теоремы для сжатий в решетках Орлича — Канторовича // Сиб. мат. журн.—2009.—Т. 50, № 6.—С. 1305–1318.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 27–29.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В СЕТЕВЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

М. Г. Завгородний (Россия, Воронеж; ВГУ),
С. П. Майорова (Россия, Воронеж; ВГТУ)

В докладе обсуждаются постановки и методы решения смешанных задач для уравнений в частных производных, заданных на геометрическом графе. Рассматриваемые смешанные задачи описывают динамические процессы в сетевых технических системах, топологическая структура которых представима в виде геометрического графа. Научная новизна в постановочной части заключается в следующем. Во-первых, дифференциальные уравнения рассматриваются на геометрическом графе, причем порядок их выше второго. Во-вторых, смешанные задачи ставятся не только для дифференциальных уравнений, но и для систем дифференциальных уравнений, порядки которых могут не совпадать. Методы решения смешанных задач для дифференциальных уравнений высших порядков, а тем более для систем дифференциальных уравнений находятся в стадии разработки. До недавнего времени они полностью отсутствовали ввиду того, что такие задачи не ставились.

Обозначим (см. [1]) через Γ геометрический граф. Пусть $I(a)$ — множество номеров всех ребер, инцидентных вершине a, при некоторой нумерации ребер. Обозначим (см. [1]) через $C[\Gamma]$ пространство скалярных функций, определенных на графе Γ и равномерно непрерывных на каждом его ребре, а через $C^k[\Gamma]$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых на каждом ребре функций. Под производной $u'(x)$ понимаем величину изменения функции $u(x)$ на единицу длины соответствующего ребра. Полагаем $u^{(n)}(x) \in C[\Gamma]$. Через $u_i(a)$ обозначим односторонний предел функции $u(x)$ в вершине a вдоль ребра γ_i.

Введем пространство $D(\Gamma)$ вектор-функций $w(x) = \big(u(x), \varphi(x)\big)$, принадлежащих пространству $C^4[\Gamma] \times C^2[\Gamma]$ и удовлетворяющих следующему набору условий. Функция $u(x)$ является непрерывной на всем графе Γ и в каждой внутренней вершине a удовлетворяет условиям согласования:

$$
\begin{gathered}
u_i'(a) = \alpha_{ki} u_j'(a) + \alpha_{ji} u_k'(a), \quad i, j, k \in I(a); \\
\sum_{i \in I(a)} \sum_{n=1}^{3} \xi_{in} u_i^{(n)}(a) = u(a).
\end{gathered} \tag{1}
$$

Функции $u(x)$ и $\varphi(x)$ согласованы между собой:

$$
\begin{gathered}
\varphi_i(a) = \beta_{ki} u_j'(a) + \beta_{ji} u_k'(a), \quad i \in I(a); \\
\sum_{i \in I(a)} \left[\tau_{ni} u_i''(a) + \delta_{ni} \varphi_i'(a) \right] = 0, \quad n = 1, 2.
\end{gathered} \tag{2}
$$

В каждой граничной вершине b выполняются условия:

$$
u(b) = u'(b) = 0, \quad \varphi(b) = 0. \tag{3}
$$

В условиях согласования все константы задаются свои для каждой вершины a. Кроме того, индексы j и k фиксированы для каждой вершины a.

При надлежащем подборе констант условия (1)–(3) являются (см. [2, 3]) условиями соединения и закрепления стержней плоской стержневой системы, состоящей из m массивных, относительно коротких и толстых стержней. Функции $u(x)$ и $\varphi(x)$ задают отклонение и угол кручения соответствующего стержня в точке $x \in \Gamma$. Геометрическим графом в этом случае является объединение осевых линий всех стержней системы.

На множестве вектор-функций $w(x) = \big(u(x), \varphi(x)\big)$ пространства $D(\Gamma)$ рассмотрим дифференциальный оператор

$$
\begin{gathered}
Lw(x) = \Big(\big(p(x)\, u''(x)\big)'' - \big(g(x)\, u'(x)\big)' + \\
+ h(x)\, u(x) - \big(q(x)\, \varphi'(x)\big)' + r(x)\, \varphi(x) \Big),
\end{gathered}
$$

действующий в пространство $C[\Gamma] \times C[\Gamma]$. Здесь $p(x) \in C^2[\Gamma]$, $g(x), q(x) \in C^1[\Gamma]$ и $h(x), r(x) \in C[\Gamma]$. Полагаем $\inf\limits_{x \in \Gamma} p(x) > 0$ и $\inf\limits_{x \in \Gamma} q(x) > 0$.

В работе [3] при условиях (1)–(3), соответствующих жестко сочлененной стержневой системе, доказана однозначная разрешимость краевой задачи $Lw(x) = f(x)$ при любой правой части $f(x) \in C[\Gamma] \times C[\Gamma]$ и построена функция Грина.

3. Рассмотрим на множестве функций $w(x,t)$ пространства $D(\Gamma) \times C^2(0,\infty)$ смешанную задачу для однородного дифференциального уравнения

$$\rho(x)\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = Lw(x,t)$$

при начальных условиях $w(x,0) = w_0(x)$, $\frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = w_1(x)$.

Для полученной смешанной задачи предлагается метод разделения переменных, аналогичный классическому. При обосновании метода разделения переменных изучается асимптотическое поведение функции Грина по спектральному параметру и исследуются спектральные свойства дифференциального оператора L.

Литература

1. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2004.—272 с.
2. *Завгородний М. Г.* Математическое моделирование информационных и технологических систем // ВГТА, 2000.—Вып. 4.—С. 59–62.
3. *Завгородний М. Г., Майорова С. П.* О разрешимости краевой задачи о малых деформациях стержневой системы с учетом кручений // Сист. управления и информ. технологии.—2009, № 3.1 (37).—С. 140–143.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 30–31.

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ МИГРАЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

В. Г. Ильичев (Россия, Ростов-на-Дону; ЮНЦ РАН)

Нелинейные модели мигрирующих популяций, заданные в непрерывной форме, трудно поддаются математическому исследованию. Здесь будет показано, что ситуация сильно упрощается, когда выбираются дискретные модели со специальными матрицами миграций.

Пусть точечная модель m динамики конкурентов задается в форме:

$$X^{t+1} = F(X^t),$$

где X — вектор биомассы популяций; i-тая компонента нелинейного оператора F возрастает и выпукла по «своей» переменной x_i, а по всем остальным «чужим» переменным она убывает. Если территория разбита на n районов, тогда модель передвижения и воспроизводства популяции представляется в виде:

$$X^{t+1} = M \circ F(X^t). \qquad (1)$$

В этом случае фазовый вектор X расширяется до размерности $m \times n$. Линейный оператор M имеет m блоков. В i-том блоке находится «локальная» неотрицательная матрица размера $n \times n$, ответственная за поведения i-той популяции. С учетом закона сохранения массы сумма элементов в каждом столбце локальной матрицы равна 1.

Характер исследования (1) зависит от m (количества популяций).

1. Так, при $m = 1$ можно задать естественное отношение полупорядка ($\prec$). Так, положим $W = (a_1, \ldots, a_n) \prec S = (b_1, \ldots, b_n)$, если для всех j имеем $a_j \leqslant b_j$. Отображение $P = M \circ F$ модели (1) «не портит» полупорядок:

$$\text{из } W \prec S \text{ следует } P(W) \prec P(S). \qquad (2)$$

Пусть $W \prec S$, тогда множество промежуточных векторов называется конусным отрезком $K[W, S]$. Из (2) следует: если $W \prec P(W)$ и $P(S) \prec S$, то под действием P

$$\text{образ } K[W, S] \text{ вложен в } K\big[P(W), P(S)\big]. \qquad (3)$$

Предположим, что в модели отдельной популяции имеется положительное равновесие θ, тогда его можно окружить семейством стягивающихся конусных отрезков. При действии P образ большого отрезка переходит в малый, поэтому θ глобально устойчиво в R^n_+.

2. При $m = 2$ эффективным является новое отношение полупорядка. Для векторов $W = (A_1, B_1)$ и $S = (A_2, B_2)$ положим $W \lhd S$, если одновременно выполняются соотношения $A_1 \prec A_2$ и $B_2 \prec B_1$. В модели двух конкурентов отображение P также сохраняет новый полупорядок:

$$\text{из } W \lhd S \text{ вытекает } P(W) \lhd P(S). \tag{4}$$

Используя предыдущий подход, устанавливаем: если в модели двух конкурентов существует положительное равновесие, то оно глобально устойчиво в R^{2n}_+.

3. Для трех и более конкурентов ($m \geqslant 3$) применение прежнего геометрического подхода затруднительно. Это связано с тем, что композиция соответствующих отображений P модели (1) не сохраняет исходный характер монотонности. Однако здесь возможен следующий прием. Предположим, что для P существует обратное отображение $X^t = Q(X^{t+1})$. Разумеется, равновесия P и Q совпадают, а векторные поля получаются обращением стрелок.

Самое главное, каждая компонента Q является неубывающей функцией по всем переменным (*по сути, конкуренция превращается в кооперацию!*). Поэтому естественный полупорядок, определенный в п. 1, не портится под действием Q.

Пусть в модели (1) имеется положительное равновесие θ, и вокруг него возможно построение семейства стягивающихся конусных отрезков. Если векторное поле Q на границе каждого конусного отрезка направлено наружу, то θ является глобально устойчивым равновесием (1) в положительном ортанте.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 32–33.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОНФОРМАЦИЙ МОЛЕКУЛ ДНК

А. А. Илюхин (Россия, Таганрог; ТГПУ)

Исследование взаимовлияния различных видов взаимодействия атомов молекулы ДНК, а также вызванные ими изменения взаимного положения этих атомов были рассмотрены, например, в работах [3–5]. На основе механического подхода оценка влияния на геометрию молекулы и характер взаимодействия проведены в [1, 2], где эти факторы учитывались при определении условий замкнутости молекул. Влияние моментных взаимодействий количественно мало изучено в силу сложности прямого измерения основных констант в законах состояния. Однако это не исключает качественного анализа влияния моментных напряжений на тип конформации молекул ДНК и при наличии новых эффектов, подтвержденных экспериментом, открывает возможности идентификации упругих параметров. Приведенное исследование в работе [2] позволило выявить новые формы замкнутых конформаций молекул ДНК и указать области изменения параметров, характеризующих вращательное взаимодействие, что дает возможность оценить константы моментных взаимодействий. Взаимосвязь естественной закрученности молекулы и ее растяжимости. Оценка влияния этого факта на свойства замкнутых конформаций и их количественные характеристики открывает возможности по внесению уточнений для параметров, характеризующих любой из параметров молекулы, участвующих в математической модели конформации.

Литература

1. *Илюхин А. А., Тимошенко Д. В.* Решение задачи о деформации естественно закрученного и растяжимого стержня и применение его к исследованию условий замкнутости молекул ДНК // Механика твердого тела.—2008.—Вып. 38.—С. 161–167.
2. *Илюхин А. А., Тимошенко Д. В.* Теория упругих стержней с вращательным взаимодействием частиц и ее применение к исследованию замкнутости молекул ДНК // Механика твердого тела.—2008.—Вып. 38.—С. 168–180.

3. *Китайгородский А. И.* Невалентные взаимодействия атомов в органических кристаллах и молекулах // Успехи физ. наук.—1999.—Т. 127, вып. 3.—С. 391–419.
4. *Frank-Kamenetckii M. D., Lukashin A. V., Anshelevich V. V., Vologodskii A. V.* Torsional and begin rigidity of the double helix from data on small DNA rings // J. Biomol. Struct. Dynam.—1985, № 2.—P. 1005–1012.
5. *Wadati M., Tsuru H.* Elastic model of looped DNA // Meccanica.—1996.—Vol. 31, № 3.—P. 235–271.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 34–35.

О СВОЙСТВАХ БАЗИСОВ В МОНТЕЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. П. Кондаков (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Монтелевским пространством называют локально выпуклое пространство, в котором каждое замкнутое абсолютно выпуклое поглощающее множество (бочка) является окрестностью нуля и каждое замкнутое ограниченное подмножество компактно.

Монтелевскими являются многие классические пространства голоморфных функций в конечномерных областях, наделенные топологиями равномерной сходимости на всех компактных множествах, в силу известной теоремы Монтеля. Класс монтелевских пространств включает также и многие пространства голоморфных функций, определенных на бесконечномерных пространствах Кёте — Фреше числовых последовательностей (см. [1], [2]).

Пусть (E, E') — дуальная пара и $\mathcal{A}$ — совокупность $\sigma(E, E')$-замкнутых ограниченных абсолютно выпуклых подмножеств в E.

Определение. Говорят, что E наделено топологией $\tau'_{\mathcal{A}}$ $\mathcal{A}$-сходимости, если базис окрестностей нуля в нем образуют поляры A°, $A \in \mathcal{A}$, т. е. это топология равномерной сходимости на всех множествах из $\mathcal{A}$.

При изучении свойств базисов будет использоваться следующая

Лемма ([3], с. 110)**.** *Пусть $A \in \mathcal{A}$, тогда на A совпадают сужения следующих топологий:*

1) *топологии $\sigma(E, L')$, где L' — тотальное в $(E', \tau'_{\mathcal{A}})$ множество, т. е. линейная оболочка L' плотна в $(E', \tau'_{\mathcal{A}})$;*

2) *топологии $\sigma(E, E')$;*

3) *топологии равномерной сходимости на всех предкомпактных (в топологии $\mathcal{A}$-сходимости) подмножествах из $(E', \tau'_{\mathcal{A}})$.*

Использование вместе с утверждением леммы модификации классических приемов теорем об открытости отображения (см. [3]) показывается, что в монтелевских пространствах коэффициентные функционалы базисов непрерывны на ограниченных множествах. Справедлива следующая

Теорема. *В монтелевском пространстве E, имеющем полное сепарабельное сильное сопряженное, всякий слабый базис является равностепенно непрерывным базисом Шаудера в исходной топологии.*

Пространство голоморфных по Гато функций, определенных на открытом полидиске $U \subset l_1\big[a_r(n)\big]$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактных множествах, обозначается обычно $\big(\mathcal{H}(U), \tau_0\big)$.

Пространство Кёте $l_1\big[a_r(n)\big]$ относят к классу (d_1), если его матрица Кёте удовлетворяет условию

$$\exists\, r\ \forall\, s\ \exists\, t : \sup_n \frac{a_s^2(n)}{a_r(n)\, a_t(n)} < \infty.$$

Следствие. *Пусть U — открытый полидиск в ядерном пространстве Кёте $l_1\big[a_r(n)\big]$ из класса (d_1). Тогда в пространстве $\big(\mathcal{H}(U), \tau_0\big)$ все базисы абсолютны.*

Литература

1. *Dineen S.* Analytic functionals on fully nuclear spaces // Studia Math.—1982.—Vol. LXXIII.—P. 11–32.
2. *Кондаков В. П.* О дифференцируемости отображений и строении пространств голоморфных функций на пространствах числовых последовательностей // Владикавк. мат. журн.—2007.—Т. 9, № 2.—С. 9–21.
3. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1971.—359 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 36–37.

SIMULTANEOUS LINEAR INEQUALITIES: YESTERDAY AND TODAY

S. S. Kutateladze (Russia, Novosibirsk; IM SB RAS)

1. Agenda. Linear inequality implies linearity and order. When combined, the two produce an ordered vector space. Each linear inequality {in the simplest environment of the sort is some half-space. Simultaneity implies many instances and so yields intersections of half-spaces. This yields polyhedra as well as arbitrary convex sets, identifying the theory of linear inequalities with convexity.

Convexity stems from the remote ages and reigns in the federation of geometry, optimization, and functional analysis. Convexity feeds generation, separation, calculus, and approximation. Generation appears as duality; separation, as optimality; calculus, as representation; and approximation, as stability.

This talk addresses the origin and the state of the art of the relevant areas with a particular emphasis on the Farkas Lemma. Our aim is to demonstrate how Boolean valued analysis may be applied to simultaneous linear inequalities with operators. This particular theme is another illustration of the deep and powerful technique of "stratified validity" which is characteristic of Boolean valued analysis.

2. Environment. Assume that X is a real vector space, Y is a *Kantorovich space* also known as a complete vector lattice or a Dedekind complete Riesz space. Let $\mathbb{B} := \mathbb{B}(Y)$ be the *base* of Y, i. e., the complete Boolean algebras of positive projections in Y; and let $m(Y)$ be the universal completion of Y. Denote by $L(X, Y)$ the space of linear operators from X to Y. In case X is furnished with some Y-seminorm on X, by $L^{(m)}(X, Y)$ we mean the *space of dominated operators* from X to Y. As usual, $\{T \leqslant 0\} := \{x \in X : Tx \leqslant 0\}$; $\ker(T) = T^{-1}(0)$ for $T \in L(X, Y)$.

3. Kantorovich Theorem.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "B"'] & W \arrow[d, dotted, "\mathfrak{X}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

If W is ordered by W_+ and $A(X) - W_+ = W_+ - A(X) = W$, then

$$(\exists\, \mathfrak{X} \geqslant 0)\ \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \{A \leqslant 0\} \subset \{B \leqslant 0\}.$$

4. The Alternative. Let X be a Y-seminormed real vector space, with Y a Kantorovich space. Assume that $A_1, \dots, A_N$ and B belong to $L^{(m)}(X, Y)$.

Then one and only one of the following holds:

(1) There are $x \in X$ and $b, b' \in \mathbb{B}$ such that $b' \leqslant b$ and

$$b'Bx > 0,\ bA_1x \leqslant 0,\ \dots,\ bA_Nx \leqslant 0.$$

(2) There are $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \operatorname{Orth}(m(Y))_+$ such that $B = \sum_{k=1}^N \alpha_k A_k$.

5. Inhomogeneous Inequalities. Let X be a Y-seminormed real vector space, with Y a Kantorovich space. Assume given some dominated operators $A_1, \dots, A_N, B \in L^{(m)}(X, Y)$ and elements $u_1, \dots, u_N, v \in Y$. The following are equivalent:

(1) For all $b \in \mathbb{B}$ the inhomogeneous operator inequality $bBx \leqslant bv$ is a consequence of the consistent simultaneous inhomogeneous operator inequalities $bA_1x \leqslant bu_1, \dots, bA_Nx \leqslant bu_N$, i. e.,

$$\{bB \leqslant bv\} \supset \{bA_1 \leqslant bu_1\} \cap \ldots \cap \{bA_N \leqslant bu_N\}.$$

(2) There are positive orthomorphisms $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \operatorname{Orth}(m(Y))$ satisfying

$$B = \sum_{k=1}^N \alpha_k A_k; \quad v \geqslant \sum_{k=1}^N \alpha_k u_k.$$

6. Freedom and Inequality. Abstraction is the freedom of generalization. Freedom is the loftiest ideal and idea of man, but it is demanding, limited, and vexing. So is abstraction. So are its instances in convexity, hence, in simultaneous inequalities.

Freedom of set theory empowered us with the Boolean-valued models yielding a lot of surprising and unforeseen visualizations of the ingredients of mathematics. Many promising opportunities are open to modeling the powerful habits of reasoning and verification. Convexity, the theory of simultaneous linear inequalities in disguise, is a topical illustration of the wisdom and strength of mathematics, the ever fresh art and science of calculus.

Inequality paves way to freedom.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 38–39.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С БОЛЬШИМИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

В. Б. Левенштам (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ),
Н. С. Ивлева (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В математической и физической литературе описан целый ряд физических процессов, в которых наблюдались интересные эффекты, связанные с высокочастотными вибрациями. Ссылки на результаты такого рода, принадлежащие Н. Н. Боголюбову, П. Л. Капице, В. Н. Челомею, И. Б. Симоненко и С. М. Зеньковской, В. И. Юдовичу, приведены, например, в [1]. Важно при этом отметить, что математические модели, рассмотренные указанными авторами, представлены дифференциальными уравнениями, содержащими высокочастотные слагаемые, пропорциональные определенным положительным степеням частоты (большие высокочастотные слагаемые), а при исследовании этих моделей использовались идеи классической теории метода усреднения [2]. Все это говорит об актуальности развития систематической теории метода усреднения для дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми. Существенные результаты в этом направлении принадлежат В. И. Юдовичу (см. [3]) и получены им, в основном, на формальном уровне строгости (без математического обоснования). В [1] результаты такого рода получены с обоснованием для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты [4, 5] относятся к параболическим уравнениям и системам. В них построена полная обоснованная асимптотика периодических по времени решений. Опишем теперь результат, который получен авторами тезисов и обобщает результат [5]. Скажем о нем подробнее.

Пусть N, m, n и p — натуральные числа и Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с $\mathbf{C}^\infty$–гладкой границей $\partial\Omega$. В цилиндре $\mathbf{Q} = \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу, зависящую от большого параметра ω, о вещественных $\frac{2\pi}{\omega}$–периодических по времени t решениях системы N параболических уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{0\leqslant|s|\leqslant m} f_s\Big(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) e^{is\omega t} + \\ + \sqrt{\omega} \sum_{1\leqslant|s|\leqslant m} \varphi_s(x,u)\, e^{is\omega t}, \quad u\big|_\Gamma = 0. \tag{1}$$

Здесь $f_s(x,u,w)$, $\varphi_s(x,u)$ — N-мерные комплекснозначные вектор-функции, удовлетворяющие условиям: $\overline{\varphi_s}(x,u) = \varphi_{-s}(x,u)$, $\overline{f_s}(x,u,w) = f_{-s}(x,u,w)$, $f_s(x,u,w) \in \mathbb{R}^N$, $(x,u,w) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2}$; $\Gamma = \partial\Omega \times \mathbb{R}$, $a_{ij}(x)$ — вещественные функции. Функции a_{ij} и компоненты вектор-функций f, φ_s бесконечно дифференцируемы по своим аргументам, а также выполняются следующие условия:

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j > \alpha \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i^2,$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha > 0$.

Для задачи (1) построена усредненная задача и в предположении существования у последней невырожденного вещественного стационарного решения установлены существование и относительная единственность вещественного $\frac{2\pi}{\omega}$–периодического по времени решения задачи (1); построена полная обоснованная асимптотика этого периодического решения.

Литература

1. *Левенштам В. Б.* Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми.—Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2009.—367 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.—М.: Наука, 1974.—503 с.
3. *Юдович В. И.* Вибродинамика и виброгеометриямеханических систем со связями // Успехи механики.—2006.—Т. 4, № 3.—С. 26–158.
4. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование параболических задач с большими высокочастотными слагаемыми // Сиб. мат. журн.—2005.—Т. 46, № 4.—С. 805–821.
5. *Капикян А. К., Левенштам В. Б.* Асимптотика периодического решения системы параболических уравнений с большими высокочастотными слагаемыми. // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Актуальные проблемы математической гидродинамики.—2009.—С. 109–111.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 40.

ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА
И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Г. Г. Магарил-Ильяев (Россия, Москва; МИРЭА, ЮМИ)

Получение необходимых условий экстремума в самых различных задачах на максимум и минимум подчиняются единому правилу, который называется *принципом Лагранжа* (снятия ограничений). Впервые это правило было сформулировано Лагранжем в 1797 г. и касалось гладких конечномерных задач с ограничениями типа равенств. Впоследствии выяснилось, что этот принцип имеет универсальных характер. В докладе будет рассказано о подходе к получению необходимых условий минимума (принципа максимума Понтрягина) в задачах оптимального управления, который основан на принципе Лагранжа.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 41–42.

FUNCTIONS OF COMPLETELY REGULAR GROWTH IN THE HALF-PLANE

K. G. Malyutin (Ukraine, Sumy; SumSU)

In the 60s several American authors (Rubel, Taylor, Miles, Shea, and others) started to use on large scale the Fourier series method for the study of the properties of entire and meromorphic functions. This method is efficient in the solution of several general problems of the theory of meromorphic functions and establishes its connections with Fourier series theory. One advantage of this method is its suitability for the investigation of functions of fairly irregular growth at infinity and functions of infinite order.

In the 80s important results in this direction were obtained by Kondratyuk, who generalized the Levin — Pflüger theory of entire functions of completely regular growth (c.r.g.) [1] to meromorphic functions of arbitrary γ-type. Kondratyuk [2] generalized a theory of entire functions of c.r.g. in two directions:

1) the growth of function was measured by the enough arbitrary function of growth γ, satisfying only to the condition

$$\gamma(2r) \leqslant M\gamma(r) \tag{1}$$

at some $M > 0$ and all $r > 0$;

2) were entered and considered classes of meromorphic functions of c.r.g. in a complex plane. We call a strictly positive continuous unbounded increasing function $\gamma(r)$ on $[0, \infty)$ a growth function.

In the 60s Grishin and Govorov independent of each other extended the Levin — Pflüger theory on the function of c.r.g. in a half-plane. We consider functions in the upper half-plane of complex variable. As well as in works of Kondratyuk generalization of theory of Grishin — Govorov is conducted on functions growth of which is measured in relation to the function of growth satisfying a condition (1). In addition, entered and examined the delta-subharmonic functions of c.r.g. in a half-plane. We denote the corresponding class of δ-subharmonic functions of c.r.g. to $\gamma(r)$ by $J\delta(\gamma(r))^o$.

Let $\widetilde{L}^{\infty}[0,\pi]$ be the Banach subspace of $L^{\infty}[0,\pi]$ generating by the family of characteristic functions of all intercepts from $[0,\pi]$. We denote by $\mathcal{L}[0,\pi]$ any from the spaces $C[0,\pi]$ or $\widetilde{L}^{\infty}[0,\pi]$. Our main result is

Theorem. *Let $v \in J\delta$. Then the following properties are equivalent:*
(i) $v \in J\delta(\gamma(r))^{o}$;
(ii) $v \in J\delta(\gamma(r))$ and for all $k \in \mathbb{N}$ there exists

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_k(r,v)}{\gamma(r)} = c_k;$$

(iii) the measure $\lambda_{-}(v)$ has finite γ-density and for any function ψ from $\mathcal{L}[0,\pi]$ there exists

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\gamma(r)} \int\limits_0^{\pi} \psi(\theta) v(re^{i\theta}) \sin\theta \, d\theta.$$

Here $\lambda(v)=\lambda_{+}(v) - \lambda_{-}(v)$ is the full measure corresponding to the function v, $c_k(r,v)$ are the Fourier coefficients of v and $J\delta(\gamma(r))$ is the class of δ-subharmonic functions of finite γ-type.

Remark. Analogous criterion for meromorphic functions in complex plane is got by Kondratyuk.

References

1. *Levin B. Ja.* Distribution of Zeros of Entire Functions.—Trans. Math. Monographs, 5: A.M.C., Providence, R. I., 1964.—632 p.
2. *Kondratyuk A. A.* The Fourier series method for entire and meromorphic functions of completely regular growth. I // Math. Sb.—1978.—Vol. 106, № 148.—P. 386–408.
3. *Malyutin K. G., Sadyk N.* Delta-subharmonic functions of regular growth in a half-plane // Russian Acad. Sci. Docl. Math.—2001.—Vol. 380, № 3.—P. 1–3.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 43–44.

MODELING OF UNDERGROUND LIQUID FILTRATION AS A HOMOGENIZATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS[1]

A. M. Meirmanov (Russia, Belgorod; BelSU)

The present talk is a short summary of authors results [1–5] and devoted to some principles of modeling of physical processes in porous media. The scientific and practical importance of mathematical models describing such complicate processes is evident. But its physical confidence is also very important. Namely, we say that the given phenomenological model is *physically correct*, if it is one of basic models of continuum mechanics (as, for example, Stokes equations for a slow motion of a viscous liquid, or Lame's equations for displacements of an elastic solid body), or asymptotically closed to some physically correct phenomenological model.

Historically, *the classic system of equations of liquid filtration* consisting of the Darcy's law and continuity equation for the average liquid velocity and pressure has been the basic mathematical model, describing the motion of the homogeneous underground liquid. Its physical correctness remains open till 1980, when L. Tartar derived this system as a homogenization of the Stokes system, describing on the microscopic level the slow motion of the viscous liquid in an absolutely rigid solid skeleton.

In the present talk we discuss the derivation of the double porosity models of liquid filtration in the crack-pore media and the derivation of the mathematical models, describing a joint motion of two immiscible liquids in porous media. For example, the displacement of oil by water. As a basic mathematical model on the microscopic level we consider the model, suggested by R. Burridge and J. Keller [6] and consisting of the stationary Stokes system for an incompressible viscous fluid, occupying a pore (or crack-pore) space, stationary Lame equations for an incompressible elastic solid skeleton, coupled with corresponding boundary conditions on the common boundary «solid skeleton-liquid

[1]The present investigation has been partially supported by Special Federal Task Program «The scientific and scientific educational personnel of innovation Russia, 2009-2013», project № 08-01-00888.

domain». Using new methods of homogenization [7, 8] we derive the desired models as asymptotic limits of the basic microscopic model.

References

1. *Мейрманов А. М.* Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // Сиб. Мат. Журн.—2007.—Т. 48, № 3.—С. 645–667.
2. *Мейрманов А. М.* Определение акустических и фильтрационных характеристик термоупругих пористых сред: уравнения термо-пороупругости Био // Мат. сб.—2008.—Т. 199, № 3.—С. 45–68.
3. *Meirmanov A. M.* Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermo-elastic porous media // Euro. J. of Appl. Math.—2008.—Vol. 19.—P. 259–284.
4. *Meirmanov A. M.* A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization // SIAM J. Math. Anal.—2008.—Vol. 40, № 3.—P. 1272–1289.
5. *Meirmanov A. M.* Double porosity models in incompressible poroelastic media // Math. Models and Methods in Appl. Sciences.—2010.—Vol. 70, № 4.—P. 1140–1146.
6. *Burridge R. and Keller J. B.* Poroelasticity equations derived from microstructure // J. of Acoustic Society of America.—1981.—Vol. 20, № 4.—P. 635–659.
7. *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal.—1989.—Vol. 20.—P. 608–623.
8. *Allaire G., Briane M.* Multisale convergence and reiterated homogenization // Proceed. of Royal Soc. Edinburgh.—1996.—Vol. 126A.—P. 297–342.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 45.

ON THE STRUCTURE OF THE SPACE OF REAL ANALYTIC FUNCTIONS

S. N. Melikhov (Russia, Rostov-on-Don; SFU, SMI)

Let Q be a convex locally closed set in $\mathbb{C}^N$. The class of such sets includes all closed convex sets and convex open sets in $\mathbb{C}^N$ and convex open sets in $\mathbb{R}^N$. A convex set $Q \subset \mathbb{C}^N$ is locally closed if and only if Q is the union of the relative interior $\mathrm{int}_r Q$ of Q and a subset ω of its relative boundary $\partial_r Q$ which is open in $\partial_r Q$. By $H(Q)$ we denote the space of all functions which are holomorphic on some neighborhood of Q with its natural projective limit topology. If Q is an open subset of $\mathbb{R}^N$ then $H(Q)$ is the space $\mathcal{A}(Q)$ of all real analytic functions on Q. We set $e_\lambda(z) := \exp \sum_{k=1}^N \lambda_k z_k$, $\lambda, z \in \mathbb{C}^N$. By Yu. F. Korobeinik, a sequence of exponentials $(e_{\lambda_{(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ $(\lambda_{(n)} \in \mathbb{C}^N)$ is called absolutely representing system in $H(Q)$ if for each function $f \in H(Q)$ there is a sequence $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, such that $f = \sum_{n=1}^\infty c_n e_{\lambda_{(n)}}$ and the series converges absolutely (to f) in $H(Q)$.

A convex locally closed set $Q \subset \mathbb{C}^N$ will be called strictly convex at the relative boundary of ω if the intersection of Q with each supporting hyperplane to the closure of Q is compact. The following result clears up a role of such strict convexity in the problem of the representation of functions from $H(Q)$ by exponential series.

Theorem 1. *Let Q be a convex locally closed set in $\mathbb{C}^N$ which admits a neighborhood basis of holomorphy domains. If $H(Q)$ has an absolutely representing system of exponentials then Q is strictly convex at the relative boundary of ω.*

Since each open convex subset Q of $\mathbb{R}^N$ has a neighborhood basis of holomorphy domains in $\mathbb{C}^N$ and Q is not strictly convex at the relative boundary of ω then from this theorem it follows that the space $\mathcal{A}(Q)$ of all real analytic functions on Q has non absolutely representing system of exponentials.

For a convex compact set $K \subset \mathbb{C}^N$ we prove sufficient conditions of the geometrical character that each absolutely representing system in the Fréchet space $H\big((\mathrm{int}\, Q) + K\big)$ is also is an absolutely representing system in $H(Q)$.

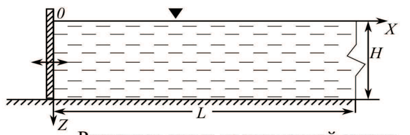
Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 46–47.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЙСМОСТОЙКОСТИ ПЛОТИНЫ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ВОДНОЙ СРЕДЫ

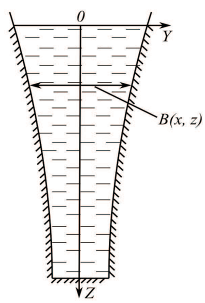
И. Д. Музаев (Россия, Владикавказ; ЮМИ),
Н. И. Музаев (Россия, Владикавказ; ЦГИ)

Предполагается, что в прямоугольной системе координат $xoyz$ часть пространства, ограниченная условиями $0 < x < L$, $-\frac{B(x,z)}{2} < y < \frac{B(x,z)}{2}$, $0 < z < H$, представляет узкоканьонный приплотинный рукав водохранилища, где L — длина, $B(x,z)$ — ширина, H — глубина воды в рукаве. В узком створе $x = 0$ помещена плотина, а в створе $x = L$ рукава сопрягается с основным объемом водохранилища.

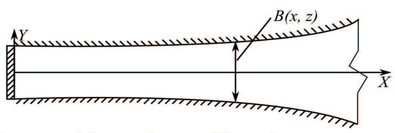
На рисунке представлен схематический чертеж рассматриваемого гидросооружения.



Расчетная схема поставленной задачи



б



а

Плановая (а) и глубинная (б) конфигурации водохранилища

При горизонтальном сейсмическом колебании основания плотины гидрообъект приводится в колебательные движения, и этим на напорной грани плотины кроме гидростатического давления будет действовать дополнительная гидродинамическая нагрузка, наличие которой может изменить частоту и форму собственных колебаний плотины, что в конечном итоге может существенно сказаться на напряженно-деформированном состоянии сооружений.

Математическая модель сейсмических колебаний вышеуказанной системы представляет следующая контактная краевая задача математической физики [1, 2]:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,$$
$$\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(B(0,z)\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)+\rho_n hB(0,z)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=$$
$$=-\rho_{\text{в}}B(0,z)\frac{\partial\varphi(0,z,t)}{\partial t},$$
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{\partial V}{\partial t},\qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{x=L}=0,$$
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=H}=0,$$
$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|_{z=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial^3 V}{\partial z^3}\right|_{z=0}=0,$$
$$V(z,t)\Big|_{z=H}=V_0\sin\omega t,\qquad \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=H}=0,$$

где приняты следующие обозначения: $\varphi(x,z,t)$ — потенциал скорости движения воды в приплотинном рукаве, $V(z,t)$ — поперечные перемещения в теле плотины, h — ширина плотины по направлению оси ox, E — модуль Юнга материала плотины, $\rho_{\text{в}}$ — плотность воды, ρ_n — плотность материала плотины, v_0 и ω — амплитуда и круговая частота сейсмических колебаний основания плотины.

Поставленная контактная краевая задача решена приближенными аналитическими методами Ритца — Галеркина. Получены расчетные формулы для вычисления частоты собственных колебаний системы, а также для напряжений и деформаций в теле плотины.

В результате выполнения вычислительных экспериментов установлены степени влияния входных параметров на частоты собственных колебаний системы и на напряжения и деформации в теле плотины.

Литература

1. *Музаев Н. И., Музаев И. Д.* Постановка и решение начально-краевой задачи поверхностных гравитационных волн в водохранилище узкоканьонного типа // Известия вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—Ростов-на-Дону, 2009.—№ 2.—С. 22–24.
2. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле.—М.: Физматгиз, 1959.—440 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 48.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

К. Ю. Осипенко (Россия, Москва; МАТИ-РГТУ, ЮМИ)

В докладе дается общая постановка задачи оптимального восстановления значений линейного оператора на элементах некоторого множества по неточной информации о значениях других линейных операторов на этих элементах. Будут приведены недавно полученные результаты, касающихся решения этой задачи в пространствах, задаваемых неевклидовой метрикой. В качестве примера будет рассмотрена задача о восстановлении сигнала по неточно заданному его спектру в неевклидовой метрике.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 49–51.

СИЛЬНАЯ БАЗА НЕЧЕТКОЙ ТОПОЛОГИИ

А. А. Рахимов (Узбекистан, Ташкент; ТИИЖТ),
Ф. М. Закиров (Узбекистан, Ташкент; ТАИ)

Пусть L — алгебра Хуттона с наименьшим и наибольшим элементами 0 и 1 ($0 \neq 1$), соответственно. Пусть X — некоторое непустое множество и L^X — семейство всех L-подмножеств множество X, т. е. множество всех отображений из X в L. Наименьший и наибольший элементы семейство L^X обозначим через 0_X и 1_X, соответственно. Подсемейство $\delta \subset L^X$, содержащее 0_X и 1_X, называется *L-топологией* (или *нечеткой топологией при* $L \neq \{0;1\}$) в X, если оно замкнуто относительно конечного пересечения и произвольного объединения. При этом пара (X, δ) называется *L-топологическим пространством.* Для $x \in X$ и $\alpha \in L$ ($\alpha \neq 0$) через x_α обозначим отображение (т. е. L-подмножество), которое равен α в точке x, и равен 0 в остальных точках. x_α называется *L-точкой* на X. Множество всех *L-точек* обозначается как $\mathcal{F}$ (см. [3, 6]). Говорят, что L-точка x_α лежит в $A \in L^X$ и пишут как $x_\alpha \in A$, если $\alpha \leqslant A(x)$. Для определений других понятий см. [1–5].

Определение. Пусть δ — нечеткая топология. Подсемейство $\mathcal{B} \subset \delta$ удовлетворяющее условию

$$U \in \delta \;\Leftrightarrow\; (x_\alpha \in U \;\Rightarrow\; \exists\, B \in \mathcal{B} : \, x_\alpha \in B \subseteq U)$$

называется сильной базой для L-топологии δ.

Одним из основных результатов работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Подсемейство $\mathcal{B} \subset L^X$ является сильной базой для некоторой нечеткой топологии тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим трем условиям*

(i) $x_\alpha \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists\, B_{x_\alpha} \in \mathcal{B}$: $x_\alpha \in B_{x_\alpha}$;

(ii) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *и* $x_\alpha \in B_1 \wedge B_2 \Rightarrow \exists\, B_3 \in \mathcal{B}$: $x_\alpha \in B_3 \subset (B_1 \wedge B_2)$;

(iii) $\{B_\lambda\}_{\lambda \in J} \subset \mathcal{B}$ *и* $x_\alpha \in \bigvee\limits_{\lambda} B_\lambda \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B}$: $x_\alpha \in B \subset \bigvee\limits_{\lambda} B_\lambda$.

Пример 1. Пусть $X = \{a, b\}$, $L = [0,1]$. Пусть $\mathcal{B}$ — семейство следующих L-подмножеств: $B_0 = \left(x, \ \frac{a}{4/5}, \frac{b}{1/2}\right)$, $B_1 = \left(x, \ \frac{a}{1}, \frac{b}{1/2}\right)$, $B_2 = \left(x, \ \frac{a}{1/2}, \frac{b}{1}\right)$, $B_3 = \left(x, \ \frac{a}{1/2}, \frac{b}{1/2}\right)$, $B_n = \left(x, \ \frac{a}{4/5-1/n}, \frac{b}{1/2}\right)$ $(n \geqslant 4)$.

Легко показать, что семейство $\mathcal{B}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Следовательно, $\mathcal{B}$ является сильной базой для некоторой нечеткой топологии в X.

Нетрудно доказать, что всякая сильная база является базой (в классическом смысле). Однако обратное утверждение не верно, как показывает следующий пример.

Пример 2. Рассмотрим семейству $\mathcal{B}$ из примера 1 без подмножество B_0. Тогда семейство $\mathcal{B}$ удовлетворяет условиям (i) и (ii) теоремы 1, что является достаточным для того, чтобы оно являлся базой для некоторой нечеткой топологии в X. Так как для L-точки a_α не существует множество $B \in \mathcal{B}$ с условием $a_\alpha \in B \subset \bigvee\limits_{n \geqslant 4} B_n$, то семейство $\mathcal{B}$ не удовлетворяет условию (iii) теоремы 1. Следовательно, по теореме 1 семейство $\mathcal{B}$ не является сильной базой.

Замечание. В традиционной топологии условие (iii) теоремы 1 выполняется автоматически, так как $\{B_\lambda\}_{\lambda \in J} \subset \mathcal{B}$ и $x \in \bigcup\limits_{\lambda} B_\lambda \Rightarrow \exists\, \lambda_0 \in J$: $x \in B_{\lambda_0} \subset \bigcup\limits_{\lambda} B_\lambda$. То есть, в этом случае понятия база и сильная база совпадают.

Основным результатом работы является следующая теорема о сравнении нечетких топологий.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ — сильные базы для L-топологии δ и δ', соответственно. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

1) $\delta \subseteq \delta'$

2) *для $\forall\, x_\alpha \in \mathcal{F}$ и $\forall\, B \in \mathcal{B}$, содержащее x_α, существует $B' \in \mathcal{B}'$ такой, что $x_\alpha \in B' \subset B$.*

Литература

1. *Chang C. L.* Fuzzy topological spaces // J. Math. Anal. Appl.—1968—Vol. 24.—P 182–190.
2. *Höhle U., Rodabaugh S. E.* Mathematics of fuzzy sets: logic, topology, and measure theory.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999.—(The Handbooks of Fuzzy Sets Ser.; Vol. 3.)

3. *Liu Ying-Ming and Luo Mao-Kang* Fuzzy Topology.—Singapore: World Scien. Publ., 1998.
4. *Rodabaugh S. E., Klement E. P., Höhle U* Applications of category theory to fuzzy subsets.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992.
5. *Warren R.H.* Neighborhoods, bases, and continuity in fuzzy topological spaces // Rocky Mountain J. of Math.—1978.—Vol. 8.—P. 459–470.
6. *Wong C. K.* Fuzzy points and local properties of fuzzy topology // J. Math. Anal. Appl.—1974.—Vol. 46.—P. 316–328.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 52–53.

ИНВАРИАНТНЫЕ БАНАХОВЫ ПРЕДЕЛЫ[1]

Е. М. Семенов (Россия, Воронеж; ВГУ),
Ф. А. Сукочев (Австралия, Аделаида; Ун-т Флиндерс)

Банахово пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$ обозначается через l_∞. Линейный функционал $B \in l_\infty^*$ называется банаховым пределом, если

1) $B \geqslant 0$,

2) $B(1, 1, 1, \ldots) = 1$,

3) $B(Tx) = B(x)$ для любого $x \in l_\infty$, где T — оператор сдвига, т. е. $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

Существование банаховых пределов было установлено С. Банахом с помощью теоремы Хана — Банаха. Для любой сходящейся последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $B(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Множество банаховых пределов обозначим через $\mathfrak{B}$. Ясно, что $\mathfrak{B}$ есть замкнутое выпуклое множество на единичной сфере пространства l_∞^*. Г. Лоренц доказал, что для заданных $x \in l_\infty$, $a \in R^1$ равенство $B(x) = a$ справедливо для всех $B \in \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=m+1}^{m+n} x_k = a$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$. У. Эберлейн доказал существование банаховых пределов, инвариантных относительно преобразования Тёплица.

Пусть H — линейный непрерывный в l_∞ оператор, удовлетворяющий условиям: $H \geqslant 0$, $\|H\|_{l_\infty} = 1$ и $\limsup\limits_{j\to\infty} (A(I-T)x)_j \geqslant 0$ для любого $x \in l_\infty$, $A \in R(H)$, где $R(H) = \operatorname{conv}\{H^k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

Теорема 1. *Существует такой $B \in \mathbb{B}$, что $B(x) = B(Hx)$ для всех $x \in l_\infty$.*

Обозначим через $\mathfrak{B}(H)$ множество $B \in \mathfrak{B}$, для которых $B = BH$.

[1]Первый автор был поддержан РФФИ, второй автор — Австралийским исследовательским Советом.

Теорема 2. *Для того, чтобы* $B \in \mathfrak{B}$ *принадлежал* $\mathfrak{B}(H)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{\substack{A\in R(H),\\ z\in S}} \liminf_{j\to\infty}(A(x+z))_j \leqslant B(x) \leqslant \inf_{\substack{A\in R(H),\\ z\in S}} \limsup_{j\to\infty}(A(x+z))_j$$

для всех $x \in l_\infty$, *где* $S = (I-T)l_\infty$.

При некоторых дополнительных предположениях диаметр множества $\mathfrak{B}(H)$ в l_∞^* равен 2. Этим условиям удовлетворяет, например, оператор Чезаро C $\left((Cx)_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)$. Приложения относятся к некоммутативной геометрии.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 54–55.

ДВОЙСТВЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ[1]

Б. Н. Хабибуллин (Россия, Уфа; БашГУ)

Разнообразные задачи комплексного анализа сводятся к построению или доказательству существования (точной) огибающей — верхней или нижней — из определенного класса функций на подмножестве $S \subset \mathbb{C}^n$. Отметим некоторые из них в подходящей трактовке.

1. Нетривиальность весового класса [1; § 10]. При каких условиях на *функцию-мажоранту* $M : S \to [-\infty, +\infty]$ найдется *голоморфная* в *области* S функция f (пишем $f \in \operatorname{Hol}(S)$), — ненулевая ($f \not\equiv 0$) и с ограничением $\log|f| \leqslant M$ на S?

2. Описание нулевых множеств [1; § 8], [2], [3]. Пусть Λ — нулевое множество функции $g_\Lambda \in \operatorname{Hol}(S)$, $p : S \to [-\infty, \infty)$. Тот же вопрос, что и в п. 1, но с $M := p - \log|g_\Lambda|$, а ищется $f \in \operatorname{Hol}(S)$ без нулей в S в терминах p и Λ или g_Λ.

3. Описание нулевых подмножеств [1; § 11], [4]. Формулировка как и в п. 2, но для искомой функции $f \not\equiv 0$ допускаются нули в области S. Эта постановка имеет прямые выходы на проблемы аппроксимации в комплексной области [5], существование для голоморфных функций голоморфных функций-мультипликаторов, «погашающих» их рост [6], [1; § 10].

4. Представление мероморфных функций [1; § 11], [2], [4]. Пусть $F = g/q$ — мероморфная функция в области S и $g, q \in \operatorname{Hol}(S)$, $g, q \not\equiv 0$, При каких условиях на функцию $u_F := \max\{\log|g|, \log|q|\}$ и $p : S \to [-\infty, +\infty)$ для мажоранты $M := p - u_F$ найдется функция $f \not\equiv 0$ как в пп. 1 или 2?

5. Комплексная теория потенциала [7], [8]. Основные объекты, такие, как (плюри)гармонические меры, функции Грина и им подобные, (максимальные) решения задачи Дирихле и пр., на которые опираются применения этой теории, строятся как верхняя огибающая специальных, чаще всего выпуклых и ограниченных сверху некоторой функцией-мажорантой M, семейств (плюри)субгармонических функций.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 09-01-00046-а и № 08-01-97023-р-поволжье-а и программой «Ведущие научные школы», проект № НШ–3081.2008.1.

6. Теория равномерных алгебр [9]. Эти применения двойственности, составляющей суть теоремы Эдвардса [9; 1.2], по-видимому, были первыми достаточно глубокими.

Наше обсуждение носит ярко выраженный порядковый характер, а основные постановки в рафинированном виде можно сформулировать в едином ключе без комплексной структуры. Конкретнее, для векторной решетки X над $\mathbb{R}$ через X^{aff} обозначим класс всех аффинных функционалов на X. Функционал $q : X \to [-\infty, +\infty]$ *допускает двойственное представление* (сверху) на $x \in X$, если

$$q(x) = \inf \bigl\{ A(x) : A \in X^{\mathrm{aff}},\ q(x') \leqslant A(x') \text{ для всех } x' \in X \bigr\}.$$

Для суперлинейного функционала $q : X \to \mathbb{R}$ такое представление верно на всех $x \in X$ [10; III.1.3.VII]. Но проблема сразу же возникает, если q может принимать значения $\pm\infty$ [1]. Этот случай, большей частью для специальных $q = q_{H,T} : x \mapsto \sup \bigl\{ T(h) \colon h \in H, h \leqslant x \bigr\}$, где $T \in X^{\mathrm{aff}}$ и $H \subset X$ — выпуклое подмножество, и будет обсуждаться.

Литература

1. *Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I, II // Известия РАН. Серия мат.—2001.—Т. 65, № 4.—С. 205–204; Т. 65, № 5.—С. 167–190.
2. *Хабибуллин Б. Н.* Последовательности нулей голомофных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты // Мат. сб.—2007.—Т. 198, № 2.—С. 121–160.
3. *Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б., Чередникова Л. Ю.* Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. I, II // Алгебра и анализ.—2008.—Т. 20, № 1. С. 146–236.
4. *Кудашева Е. Г., Хабибуллин Б. Н.* Распределение нулей голоморфных функций умеренного роста в единичном круге и представление в нем мероморфных функций // Мат. сб.—2009.—Т. 200, № 9.—С. 95–126.
5. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности (издание второе дополненное).—Уфа: РИЦ БашГУ, 2008.—188 с.
6. *Koosis P.* Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin.—Montréal: Les Publ. CRM, 1996.—230 c.
7. *Poletsky E. A.* Holomorphic Currents // Indiana Univ. Math. J.—1993.—Vol. 42, № 1.—P. 85–144.
8. *Poletsky E. A., Sigurdsson R.* Dirichlet problems for plurisubharmonic functions on compact sets // arXiv: 1005.0248v1 [math.CV]—2010.—P. 16.
9. *Gamelin T. W.* Uniform Algebras and Jensen Measures.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978.—162 p.
10. *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 56–59.

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ МЕТОДЫ В АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА СЕТКАХ

И. И. Шарапудинов (Россия, Махачкала; ЮМИ)

Пусть $\mathbb{D}$ — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\{w : |w| = 1\} = \mathfrak{d}\mathbb{D}$ — его граница (единичная окружность) в $\mathbb{C}$. Мы параметризуем $\mathfrak{d}\mathbb{D}$, полагая $w = e^{i\theta}$ $(\theta \in [-\pi, \pi))$. Через $\sigma = \sigma(\theta)$ обозначим неубывающую непрерывную слева функцию, заданную на $[-\pi, \pi]$. Функция $\sigma(\theta)$ порождает на $[-\pi, \pi]$ меру Лебега — Стилтьеса μ такую, что для $-\pi \leqslant a < b < \pi$ $\mu([a, b)) = \sigma(b+0) - \sigma(a)$, $\mu([a, \pi]) = \sigma(\pi) - \sigma(a)$. Соответствующее пространство $L^2_\sigma(\mathfrak{d}\mathbb{D})$ состоит из μ-измеримых функций $f : \mathfrak{d}\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(e^{i\theta})\right|^2 d\sigma(\theta) < \infty.$$

Скалярное произведение двух функций $f, g \in L^2_\sigma(\mathfrak{d}\mathbb{D})$ определяется равенством

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, \overline{g(e^{i\theta})}\, d\sigma(\theta). \tag{1}$$

Размерность пространства $L^2_\sigma(\mathfrak{d}\mathbb{D})$ зависит от мощности множества точек роста функции $\sigma(\theta)$ на $[-\pi, \pi]$. ($\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ называется точкой роста функции $\sigma(\theta)$), если $\limsup\limits_{\Delta\theta \to 0} \frac{\sigma(\theta_0+\Delta\theta)-\sigma(\theta_0-\Delta\theta)}{\Delta\theta} = \gamma > 0$). Если множество точек роста функции $\sigma(\theta)$ на $[-\pi, \pi]$ бесконечно, то пространство $L^2_\sigma(\mathfrak{d}\mathbb{D})$ бесконечномерно, если же функция $\sigma(\theta)$ имеет конечное число точек роста $0 \leqslant \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{N-1} \leqslant 2\pi$, то размерность пространства $L^2_\sigma(\mathfrak{d}\mathbb{D})$ равна N.

Если пространство $L^2_\sigma(\mathfrak{d}\mathbb{D})$ бесконечномерно, то система степеней $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ в нем линейно независима и тогда путем ее ортогонализации мы получим последовательность алгебраических полиномов

$\{\varphi_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$, образующих ортонормированную систему в $L^2_\sigma(\mathfrak{d}\mathbb{D})$, т. е.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(e^{i\theta})\,\overline{\varphi_m(e^{i\theta})}\,d\sigma(\theta) = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n \neq m; \\ 1, & \text{если} \quad n = m. \end{cases} \qquad (2)$$

Принято говорить, что система $\{\varphi_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормирована на окружности $\mathfrak{d}\mathbb{D} = \{w : |w| = 1\}$ относительно меры μ или, если функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна, то система $\varphi_n(w)_{n=0}^{\infty}$ ортонормирована на окружности с весом $h(\theta) = \sigma'(\theta)$, т. е.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(e^{i\theta})\,\overline{\varphi_m(e^{i\theta})}\,h(\theta)\,d\theta = \delta_{nm}. \qquad (3)$$

Если функция $\sigma = \sigma_N = \sigma_N(\theta)$ имеет всего конечное число N точек роста

$$-\pi \leqslant \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{N-2} < \theta_{N-1} \leqslant \pi, \qquad (4)$$

то мы положим $\Omega_N^T = \left\{e^{i\theta_0}, e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_{N-1}}\right\}$, $l^2_{\sigma_N}(\Omega_N^T) = L^2_{\sigma_N}(\mathfrak{d}\mathbb{D})$.

В конечномерном пространстве $l^2_{\sigma_N}(\Omega_N^T)$ линейно-независимую систему образуют функции 1, w, $\ldots$, w^{N-1}. Применяя к системе $\{w^k\}_{n=0}^{N-1}$ процесс ортогонализации Грама — Шмидта, мы получим ортонормированную систему полиномов

$$\varphi_{0,N}(w), \varphi_{1,N}(w), \ldots, \varphi_{N-1,N}(w), \qquad (5)$$

$$\begin{gathered} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_{n,N}(e^{i\theta})\,\overline{\varphi_{m,N}(e^{i\theta})}\,d\sigma_N(\theta) = \\ = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{n,N}(e^{i\theta_j})\,\overline{\varphi_{m,N}(e^{i\theta_j})}\,\Delta\sigma_N(\theta_j) = \delta_{nm}, \quad 0 \leqslant n, m \leqslant N-1, \end{gathered} \qquad (6)$$

где $\theta_N = \pi$, $\Delta\sigma_N(\theta_j) = \sigma_N(\theta_{j+1}) - \sigma_N(\theta_j)$, $j = 0, \ldots, N-1$.

Рассматривая для каждого $N = 1, 2, \ldots$ конечное число полиномов (5), мы получим треугольную матрицу

$$\begin{array}{llll} \varphi_{0,1}(w) & & & \\ \varphi_{0,2}(w) & \varphi_{1,2}(w) & & \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_{0,N}(w) & \varphi_{1,N}(w) & \ldots & \varphi_{N-1,N}(w) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{array} \qquad (7)$$

Настоящая работа посвящена исследованию асимптотических свойств полиномов $\varphi_{n,N}(w)$, составляющих матрицу (7) при $n, N \to \infty$, $z \in \mathbb{C}$. Подобная задача для случая, когда функция $\sigma(\theta)$ имеет бесконечное число точек роста и удовлетворяет условию Сеге

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \sigma'(\theta)\, d\theta > -\infty, \tag{8}$$

исследована достаточно глубоко в работах Сеге и многочисленных его последователей. По этому поводу мы отсылаем к монографиям и цитированной там литературе. Но исследования в этом направлении интенсивно продолжаются и в настоящее время. В то же время следует отметить, что если условие Сеге (8) не выполняется, то, насколько известно автору данной работы, упомянутая задача остается неисследованной.

Вернувшись к задаче об асимптотике полиномов $\varphi_{n,N}(z)$, составляющих матрицу (7), следует заметить, что на каждой N-ой строке этой матрицы фигурируют полиномы $\varphi_{0,N}(z)$, $\varphi_{1,N}(z)$, $\ldots$, $\varphi_{N-1,N}(z)$, образующие ортонормированную систему относительно функции $\sigma(\theta) = \sigma_N(\theta)$, для которой не только не выполняется условие (8), но также его локальный вариант

$$\int_{a}^{b} \ln \sigma'(\theta)\, d\theta > -\infty,$$

ни при каких $a, b \in [-\pi, \pi]$. Это обстоятельство не позволяет использовать при решении поставленной задачи методы и подходы, с помощью которых были исследованы асимптотические свойства полиномов $\varphi_n(z)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, образующих ортонормированную систему (ОНС) относительно функции $\sigma(\theta)$, подчиняющейся условию Сеге (8).

С другой стороны, ранее в наших работах были разработаны методы, с помощью которых исследованы асимптотические свойства классических полиномов, ортогональных на равномерных сетках из числовой оси (полиномы Чебышева (Хана), Кравчука, Мейкснера, Шарлье). При этом доказательства асимптотических формул существенно опирались на специфических свойствах именно классических полиномов, ортогональных на равномерных сетках (разностное уравнение, разностная формула, формула суммирования Эйлера — Маклорена и т. д.). Поэтому и эти методы не могут быть непосредственно перенесены на случай полиномов ортогональных на сетках из единичной окружности. Однако нам удалось недавно получить асимптотические формулы для полиномов, ортогональных на неравномерных сетках из $[-1, 1]$, доказательства которых носят весьма общий характер и опираются на неравенства типа Маркова и Бернштейна для оценки производных алгебраических полиномов.

Именно те методы, с помощью которых мы оценили остаточные члены асимптотических формул для полиномов, ортогональных на произвольных сетках отрезка $[-1, 1]$, допускают свое распространение на случай оценки остаточных членов асимптотических формул для полиномов $\varphi_{n,N}(z)$, ортогональных на произвольных сетках единичной окружности.

Основной целью настоящей работы является получение асимптотических формул для полиномов $\varphi_{n,N}(z)$, ортогональных на неравномерных сетках Ω_N^T единичной окружности в том случае, когда параметры n и N неограниченно растут. При этом рост степени полинома $\varphi_{n,N}(z)$ по отношению к мощности N множества Ω_N^T подчиняется определенным условиям.

Часть I

Математический анализ

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 62–63.

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ ЗАДАННОГО РОСТА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ И УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ В НИХ

А. В. Абанин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Для выпуклой ограниченной области D в C^N рассмотрим пространство $A^{-\infty}(D)$ всех функций, голоморфных в D и имеющих вблизи ее границы полиномиальный рост. Это пространство определяется следующим образом

$$A^{-\infty}(D) := \left\{ f \in H(D) : \exists\, p > 0,\ \sup_{z \in D} \big|f(z)\big| \big(d_D(z)\big)^p < +\infty \right\}$$

и наделяется естественной индуктивной топологией (DFS)-пространства. Здесь $d_D(z)$ — расстояние от $z \in D$ до границы области D. Как известно, $A^{-\infty}(D)$ является минимальной замкнутой относительно дифференцирования алгеброй голоморфных функций, содержащей класс $H^\infty(D)$ всех голоморфных ограниченных в D функций. В связи с этим, а также некоторыми другими обстоятельствами, данное пространство представляет значительный интерес и является предметом исследований многих работ.

В докладе будут представлены новые результаты автора, Ле Хай Хоя и Р. Ишимуры, касающиеся уравнения свертки в пространствах вида $A^{-\infty}(D)$, задаваемого аналитическим функционалом с носителем, содержащимся в фиксированном выпуклом компакте:

1. Критерий разрешимости неоднородного уравнения на классе всех выпуклых ограниченных областей (см. [1]);

2. Продолжение решений однородного уравнения в более широкие области;

3. Существование базиса из элементарных решений в ядре соответствующего оператора свертки.

Исследования основаны на переходе к двойственным задачам теории целых функций, который обеспечивается установленной в [2] связью между сильным сопряженным с $A^{-\infty}(D)$ пространством и некоторым весовым (FS)-пространством целых функций. Принципиально новым моментом по сравнению с предыдущими исследованиями подобного рода является развитая в работе адаптация ∂-техники Л. Хермандера к проективным классам.

Литература

1. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Surjectivity criteria for convolution operators in $A^{-\infty}$ // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.—2010.—Vol. 348.—P. 253–256.
2. *Abanin A. V., Le Hai Khoi.* On the duality between $A^{-\infty}(D)$ and $A_D^{-\infty}$ for convex domains // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.—2009.—Vol. 347.—P. 863–866.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 64–65.

РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ БЕРЛИНГА НОРМАЛЬНОГО ТИПА НА ИНТЕРВАЛЕ

Д. А. Абанина (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Задачи о разрешимости уравнений свертки в различных пространствах бесконечно дифференцируемых функций изучались в работах Л. Эренпрайса, Л. Хермандера, Р. Майзе, Б. А. Тейлора, Д. Фогта, З. Момма и др. (см. [1–3]). Доклад будет посвящен уравнениям свертки в классах $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале $I=(-a,a)$, которые определяются с помощью весовой функции ω:

$$\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)=\Big\{f\in C^\infty(I):\,\forall\,q\in(0,1)\;\forall\,l\in(0,a)$$
$$|f|_{\omega,q,l}:=\sup_{j\in\mathbb{N}_0}\sup_{|x|\le l}\frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{q\varphi^*_\omega(j/q)}}<\infty\Big\}.$$

Здесь φ^*_ω — функция, сопряженная по Юнгу с $\omega(e^x)$.

Оператор свертки T_μ в пространстве $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ рассматривается как сопряженный к оператору умножения $\Lambda_\mu: f\mapsto \mu f$, действующему в пространстве целых функций

$$H^1_{(\omega),I}=\Big\{f\in H(\mathbb{C})\,\big|\,\exists\,q\in(0,1),\;\exists\,l\in(0,a):$$
$$\|f\|_{\omega,q,l}=\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{\big|f(z)\big|}{\exp\big(q\omega(z)+l|\mathrm{Im}\,z|\big)}<\infty\Big\},$$

которое в соответствии с [4] представляет собой реализацию пространства $\big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)\big)'_\beta$, сильного сопряженного с $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$. Характеристическая функция $\mu(z)$ оператора T_μ является произвольным мультипликатором $H^1_{(\omega),I}$.

В докладе будут представлены следующие новые результаты:

1. Критерий, полностью описывающий все характеристические функции μ, при которых уравнение $T_\mu f = g$ имеет решение в классе $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ при любой правой части $g \in \mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$.

2. Достаточное условие на μ, при котором уравнение свертки является дифференциальным уравнением бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

3. Критерий разрешимости в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ дифференциального уравнения бесконечного порядка. Данный результат сопровождается примерами положительного и, что представляет особый интерес, отрицательного характера.

4. Установлено также, что если ω — строгий вес, то все уравнения свертки в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ вырождаются в дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

Литература

1. *Ehrenpreis L.* Solution of some problems of division // Amer. J. Math.—1960.—Vol. 82.—P. 522–588.
2. *Hörmander L.* On the range of convolution operators // Ann. of Math.—1962.—Vol. 76.—P. 148–170.
3. *Meise R., Taylor B. A., Vogt D.* Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions // Indiana Univ. Math. J.—1987.—Vol. 36, № 4.—P. 729–756.
4. *Абанин А. В., Филипьев И. А.* Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространствам бесконечно дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 3.—С. 485–500.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 66–68.

ПОРЯДКОВАЯ ВЕРСИЯ ТЕОРЕМЫ РИССА — МАРКОВА

Н. М. Абасов (Россия, Москва; МАТИ-РГТУ)

I. Пусть X — вполне регулярное (или тихоновское) пространство с базой $\mathrm{V}(X)$, обладающей дополнительными свойствами:

1. $\varnothing \in \mathrm{V}(X)$, $X \in \mathrm{V}(X)$;

2. $\mathrm{V}(X)$ содержит конечное пересечение и счетное объединение своих элементов.

Мы увидим, что эти свойства дают дополнительные возможности для изучения интегралов и вероятностей на X. Обозначим $\mathcal{V}(X)$ порожденную базой $\mathrm{V}(X)$ σ-алгебру.

Определение 1. Вероятность p на $(X, \mathcal{V}(X))$ называется *регулярной*, если она удовлетворяет равенству $\sup_\alpha \{p(V_\alpha)\} = \sup_\beta \{p(V_\beta)\}$ $(\alpha \in A,\ \beta \in B)$, для любых двух возрастающих сетей $(V_\alpha), (V_\beta) \subset V(X)$, таких, что $\sup_\alpha \{V_\alpha\} = \sup_\beta \{V_\beta\}$.

Для такой вероятности можно определить функцию Π, на классе открытых множеств $\mathrm{O}(X)$, положив $\Pi(\mathrm{G}) = \sup \{p(V_\alpha)\}$, если сеть $(V_\alpha) \subset V(X)$ возрастая сходится к $\mathrm{G} \in \mathrm{O}(X)$.

Определение 2. Борелева вероятность $\tilde{p}$ на $(X, \mathrm{B}(X))$ называется *регулярной*, если для всякой возрастающей сети $(\mathrm{G}_\beta) \subset \mathrm{O}(X)$ $(\beta \in B)$ выполняется равенство (см. [1]) $\tilde{p}\big(\sup\limits_\beta \{\mathrm{G}_\beta\}\big) = \big(\sup\limits_\beta \tilde{p}\,\{\mathrm{G}_\beta\}\big)$.

Предложение 1. *Всякая регулярная вероятность p на $(X, \mathcal{V}(X))$ имеет единственное продолжение до регулярной борелевой вероятности $\tilde{p}$ на $(X, \mathrm{B}(X))$. Вероятности p и $\tilde{p}$, как всякая регулярная вероятность, удовлетворяют формулам (свойству) аппроксимации соответственно относительно $p(V)$ и $p(\mathrm{G})$ (см. формулировку теоремы).*

Предложение 2. *Для интеграла от производной положительной ограниченной функции g на X справедливо соотношение*

$$\int g\, d\tilde{p} = \sup_{\left((a_1, a_2, \ldots, a_n); (V_1, V_2, \ldots, V_n); n\right)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i p(V_i) : n \in N; \right.$$
$$\left. a_i \in R^+;\ V_i \in V(X)\ (i = 1, 2, \ldots, n);\ \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{V_i} \leqslant g \right\}.$$

II. Всюду далее X — произвольное вполне регулярное пространство (без ограничений на базу), а E — некоторое K-пространство с единицей $\mathbf{1}$.

Отображение $f : \mathrm{X} \to E$, переводящее сходящиеся сети X в (o)-сходящиеся сети E называется (to)-непрерывным отображением на X. Далее $C_b(X, E)$ — решетка Банаха — Канторовича ограниченных, (to)-непрерывных отображений на X, рассматриваемая с равномерной E-значной нормой.

Функция $P : \mathcal{B}(\mathrm{X}) \to E$ называется борелевой вероятностью (векторнозначной) на $(\mathrm{X}, \mathcal{B}(\mathrm{X}))$, если она обладает следующими свойствами:

1. $0 \leqslant P(B) \leqslant \mathbf{1}$, $(B \in \mathcal{B}(X),\ P(\mathrm{X}) = \mathbf{1})$;
2. $P\Big(\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = (o) \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(B_i)$, $(B_i \in \mathcal{B}(\mathrm{X}),\ B_i \cap B_j = \varnothing,\ i \neq j)$.

Свойство регулярности для P определяется так же, как и для $\tilde{p}$. Операции подъема мы будем рассматривать в соответствующем булевозначном универсуме, определяемом базой K-пространства E.

Предложение 3. *Пусть $X = \mathrm{X}\!\uparrow$. Подъем $P\!\uparrow = p$ всякой регулярной вероятности P на $(\mathrm{X}, \mathcal{B}(\mathrm{X}))$ — регулярная вероятность на $(X, \mathcal{V}(X))$, а следовательно $\tilde{p}$ — регулярная вероятность на $(X, \mathcal{B}(X))$.*

Известно, что любое K-пространство с единицей $\mathbf{1}$, можно единственным способом превратить в обобщенное упорядоченное кольцо при условии совпадения $\mathbf{1}$ с единицей умножения [2]. Далее E — упомянутое выше K-пространство, χ_G — характеристическая векторфункция множества $G \in \mathrm{O}(\mathrm{X})$.

Предложение 4. *Для любого отображения $f \in C_b^+(\mathrm{X}, E)$ относительно всякой регулярной вероятности P на $(\mathrm{X}, \mathcal{B}(\mathrm{X}))$ следующее равенство корректно определяет интеграл:*

$$\int f\,dP = \sup_{\big((a_1,a_2,\dots,a_n);(G_1,G_2,\dots,G_n);n\big)} \Bigg\{ \sum_{i=1}^{n} a_i P(G_i) : \, n \in N;$$

$$a_i \in E^+;\ G_i \in \mathrm{O}(X);\ (i = 1, 2, \dots, n);\ \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{G_i} \leqslant f \Bigg\}.$$

Более того, справедливо равенство $\int f\,dP \doteq \int g\,d\tilde{p}$ $(g = f\uparrow)$.

Так как f ограничен, интеграл $\int f\,dP \in E$. Для любого отображения $f \in C_b(\mathrm{X}, E)$ интеграл определяется через интегралы от $f^+, f^- \in C_b^+(\mathrm{X}, E)$.

Теорема. *Формула $L(f) = \int f\,dP$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между E-значными борелевыми регулярными вероятностями P на $(\mathrm{X}, \mathcal{B}(\mathrm{X}))$ и E-значными положительными линейными операторами L на $C_b(\mathrm{X}, E)$, удовлетворяющими условию $L(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ и обладающими свойством $\inf\limits_{\gamma} \big(L(f_\gamma)\big) = 0$ $(\gamma \in \Gamma)$, для всякой сети (f_γ) из $C_b(\mathrm{X}, E)$, убывая сходящейся к нулю. Вероятность любого замкнутого множества $F \subset \mathrm{X}$ определяется по формуле:*

$$P(F) = \inf_f \{L(f) : \, f \geqslant \chi_F, \; f \in C_b^+(\mathrm{X}, E)\},$$

а вероятность любого борелева множества $B \subset \mathrm{X}$ определяется по свойству (формуле) аппроксимации:

$$P(B) = \sup_F \{P(F) : \, F \subset B, \; F - \text{замкнуто}, \; B \in \mathcal{B}(\mathrm{X})\}.$$

Операторный вариант теоремы Рисса — Маркова для положительного оператора на пространстве $C_r(\mathrm{X}, E)$ имеется в [3]. Частный случай сформулированной выше теоремы, когда X — компакт имеется в [4].

Литература

1. *Невё Ж.* Математические основы теории вероятностей.—М.: Мир, 1969.—310 с.
2. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматлит, 1961.—408 с.
3. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление.—М.: Наука, 2007.—559 с.
4. *Абасов Н. М.* Операторная версия теоремы Рисса –Маркова // Межд. конф. Дифф. уравнения и функц. пространства, посвященная 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Тезисы докладов.—Новосибирск: ИМ СО РАН.—2008.—284 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 69–70.

MAXIMUM PRINCIPLE IN PROBLEMS WITH MIXED CONSTRAINTS UNDER WEAK ASSUMPTIONS OF REGULARITY[1]

A. V. Arutyunov (Russia, Moscow; PFU, SMI),
D. Yu. Karamzin (Russia, Moscow; CC RAS),
F. L. Pereira (Porto, Portugal; University of Porto)

In the present work optimal control problems with mixed constraints are investigated. A novel weakening of the conventional regularity assumptions on mixed constraints is introduced. A maximum principle is derived in which the maximum condition is of nonstandard type: the maximum is taken over the closure of the set of regular points, but not over the whole feasible set.

We consider the following optimal control problem:

$$\begin{cases} \varphi(p) \Rightarrow \min, \\ \dot{x} = f(x,u,t), \quad \text{a.a. } t \in T, \\ R(x,u,t) \in C(t), \quad \text{a.a. } t \in T, \\ p = (x_0, x_1) \in K. \end{cases} \tag{1}$$

Here $T = [t_0, t_1]$ is the time interval assumed to be fixed, vector $p = (x_0, x_1)$ is the so called *endpoint* vector, where $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, for each t the set $C(t) \subset \mathbf{R}^r$ is closed and convex and the mapping $C(\cdot)$ is measurable, $K \subset \mathbf{R}^{2n}$ is a closed set, $R(x,u,t) \in C(t)$ denotes the *mixed* constraints.

The functions in (1) satisfy the following assumption: functions f, R are differentiable in (x,u) for almost all t. They and their partial derivatives in (x,u) are measurable in t at every fixed (x,u), continuous in (x,u) for almost all t uniformly in t and bounded on any bounded set. Function φ is continuously differentiable.

In what follows, the «hat» over some function or a multivalued mapping of (x,u,t) means everywhere that the optimal values $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$

[1]This work was supported by RFBR, project № 09-01-00619-a, by the grant of the President of the Russian Federation MK-119.2009.1 and by FCT (Portugal), projects PTDC/EEA-ACR/75242/2006 and SFRH/BPD/26231/2006.

substitute omitted arguments. For example, $\hat{f}(t) = f\big(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t\big)$. The same denotation is used for the partial derivatives of functions with respect to x, u. Let X be a Banach space. Denote by B_X the unit closed ball: $B_X := \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$. Let us define the set-value mapping

$$U(x,t) := \big\{u \in \mathbf{R}^m : R(x,u,t) \in C(t)\big\}.$$

Definition 1. Say that the mixed constraints are *regular* with respect to a control process $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ if there exists a number $\delta > 0$ such that

$$\delta B_{\mathbf{R}^r} \subseteq \frac{\partial \hat{R}}{\partial u}(t) B_{\mathbf{R}^m} + \hat{R}(t) - C(t) \ \text{ a.a.} \in T.$$

Denote: $H(x,u,\psi,t) = \big\langle f(x,u,t), \psi\big\rangle$. Denote by $\mathcal{R}(x,t)$ the set of all vectors $u \in U(x,t)$ such that (RCQ) holds, i.e. zero belongs to the interior of set

$$\frac{\partial R}{\partial u}(x,u,t)\mathbf{R}^m + R(x,u,t) - C(t).$$

Consider the mapping $\Omega(x,t) = \operatorname{cl} \mathcal{R}(x,t)$.

Theorem 1. *Let $(\hat{x}, \hat{u})$ be an optimal process in problem (1) and assume that the mixed constraints are regular with respect to $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$. Then there exist a nonnegative number λ, an absolutely continuous vector function ψ and a measurable vector function $\eta \in \mathbf{L}^r_\infty(T)$, $\eta(t) \in N_{C(t)}(\hat{R}(t))$ a.a. t, such that $\lambda + |\psi(t)| \neq 0 \ \ \forall\, t$,*

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial x}(\psi, t) + \Big[\frac{\partial \hat{R}}{\partial x}(t)\Big]^* \eta(t),$$

$$(\psi(t_0), -\psi(t_1)) \in \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial p}(\hat{p}) + N_K(\hat{p}),$$

$$\max_{u \in \hat{\Omega}(t)} \hat{H}(u, \psi(t), t) = \hat{H}(\psi(t), t) \ \text{ a.a.},$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial u}(\psi(t), t) = \Big[\frac{\partial \hat{R}}{\partial u}(t)\Big]^* \eta(t) \ \text{ a.a.}$$

References

1. *Arutyunov A. V.* Optimality conditions: Abnormal and Degenerate Problems.— Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2000.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 71–72.

О ХАРАКТЕРЕ РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА НА НЕОГРАНИЧЕННЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

У. В. Баркина (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
С. Н. Мелихов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Пусть Q — выпуклое множество в $\mathbb{C}$ (отличное от $\mathbb{C}$) с непустой внутренностью $\operatorname{int} Q$. Предположим, что Q обладает следующими свойствами:

(1) $Q \cap (\partial Q)$ компактно (∂Q — граница Q);

(2) если $Q_0 := (\operatorname{int} Q) \cup \big((\partial Q) \setminus (Q \cap (\partial Q))\big)$, то пересечение Q_0 со всякой опорной прямой к $\overline{Q}$ (замыканию Q) компактно.

Условия (1) и (2) необходимы и достаточны для того, чтобы множество Q обладало счетным базисом окрестностей, состоящим из выпуклых областей.

Далее зафиксируем счетный базис окрестностей $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ множества Q, где Q_n — выпуклые области такие, что $Q_{n+1} \subseteq Q_n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $A(Q)$ — пространство ростков всех функций, аналитических на Q, с естественной топологией индуктивного предела: $A(Q) := \operatorname{ind}_{n\to} A(Q_n)$, где $A(Q_n)$ — пространство Фреше всех функций, аналитических в Q_n.

Для ограниченного множества $M \subseteq \mathbb{C}$ символом H_M обозначим опорную функцию M, то есть $H_M(z) := \sup_{t\in M} \operatorname{Re}(zt)$, $z \in \mathbb{C}$.

Определение. Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, φ — конформное отображение единичного круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на G. Для $r \in (0,1)$ пусть $G_r := \varphi\big(\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}\big)$. Компакты G_r выпуклы. Положим $H_r := H_{G_r}$, $r \in (0,1)$. Определена функция

$$D_G(z) := \lim_{r\to 1-0} \frac{H_G(z) - H_r(z)}{1-r} \in (0,+\infty], \quad |z| = 1.$$

Пусть G — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, отличный от точки, ψ — конформное отображение $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ на $\mathbb{C}\setminus G$ такое, что $\psi(\infty) = \infty$.

Для $r > 1$ компакты $G_r := \mathbb{C} \setminus \psi\bigl(\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}\bigr)$ выпуклы. Пусть $H_r = H_{G_r}$, $r > 1$. Определена функция

$$D_G(z) := \lim_{r \to 1+0} \frac{H_r(z) - H_G(z)}{r - 1} \in [0, +\infty), \quad |z| = 1.$$

Положим $\omega := (\partial Q) \cap Q$, $\omega_0 := (\partial Q) \setminus \omega$; $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $S_0 := \bigl\{z \in S : \mathrm{Re}\,(tz) = H_Q(z)$ для некоторого $t \in \omega_0\bigr\}$, $S_\omega := S \setminus S_0$.

Возьмем ненулевую целую функцию $a(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ нулевого типа при порядке 1. Пусть $V(a)$ — множество нулей a. Оператор $a(D)f := \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}$, $f \in A(Q)$ линейно и непрерывно отображает $A(Q)$ на $A(Q)$. В докладе идет речь о необходимых и достаточных условиях того, что (фиксированный) дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами $a(D) : A(Q) \to A(Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный. Эти условия формулируются в терминах существования специального семейства субгармонических функций и множества всех предельных точек последовательности $(z/|z|)_{z \in V(a)}$. Кроме того, из полученных результатов вытекает

Теорема. *Пусть* $0 \in \mathrm{int}\, Q$. *Всякий ненулевой оператор* $a(D) : A(Q) \to A(Q)$ *имеет линейный непрерывный правый обратный тогда и только тогда, когда* Q *ограничено, функция* $D_{\mathrm{int}\, Q}$ *ограничена на каждом компакте в* S_0 *и функция* $1/D_{\overline{Q}}$ *ограничена на некоторой окрестности* S_ω *в* S.

Замечание. а) В статье [1] установлен критерий того, что фиксированный ненулевой оператор $a(D)$ имеет линейный непрерывный правый обратный в случае, когда Q ограничено.

б) Задача о наличии линейного непрерывного правого обратного к дифференциальному оператору $a(D)$ решена в [2] для класса выпуклых множеств $Q \subseteq \mathbb{C}$, обладающих фундаментальной последовательностью компактных подмножеств.

Литература

1. *Мелихов С. Н.* Аналитические решения дифференциальных уравнений бесконечного порядка на выпуклых множествах с препятствием, открытым на границе // Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2004.—С. 141–162.
2. *Melikhov S. N., Momm S.* Analytic solutions of convolution equations on convex sets with obstacle in the boundary // Math. Scand.—2000.—Vol. 86.—P. 293–319.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 73–76.

ФОРМУЛЫ ГРИНА, КОШИ, ПУАССОНА НА КОНТИНУУМАХ И ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

И. М. Батчаев (Россия, Карачаевск; КЧГУ)

Обозначим модуль гладкости на континууме $\bar{G}^+$, $\Gamma = \partial\bar{G}^+ \cup \partial\bar{G}^-$, $G^- = c\bar{G}^+$, через $\omega(f,\delta) =: \sup\limits_{\tau_1,\tau_2}\Big\{\big|f(\tau_1) - f(\tau_2)\big|,\ \tau_1,\tau_2 \in \bar{G}^+,\ |\tau_1 - \tau_2| \leqslant \delta\Big\}$ и класс функций $\varepsilon(0,d]$:

$$\omega_f(\delta,\Gamma) =: \delta \sup_{\delta\leqslant\xi} \xi^{-1}\omega(f,\xi), \quad \delta \in (0,d],$$

$$\varepsilon_{(0,d]} =: \big\{\omega \in C_{(0,d]} : \omega(\delta)\uparrow,\ \frac{\omega(\delta)}{\delta}\downarrow,\ \lim_{\delta\to 0}\omega(\delta) = 0\big\}.$$

Пусть $t \in \Gamma$, $W\big(\eta,\Gamma(t,r)\big) =: W\big(Q(\eta),\Gamma(t,r)\big)$ объединение квадратов пересекающих $\Gamma(t,r)$ и следующие площади данных покрытий:

$$\beta(t,\eta,r,\Gamma) =: \mathrm{mes}_2 W\big(\eta,\Gamma(t,r)\big), \quad \beta(\eta,r,\Gamma) =: \sup_{t\in\Gamma}\beta(t,\eta,r,\Gamma),$$
$$\beta(\eta,\Gamma) =: \beta(\eta,d,\Gamma).$$

Введем на их основе в континууме Γ классы функций:

$$B(\Gamma) =: \left\{f \in C(\Gamma) : \lim_{\eta\to 0}\psi(\eta) = 0,\ \sup_{\eta\in(0,d]}\psi(\eta) < +\infty\right\},$$

$$\tilde{B}(\Gamma) =: \left\{f \in B(\Gamma) : \int\limits_0^{2d}\frac{\psi_f(\xi)}{\xi^2}\,d\xi < +\infty\right\}, \quad f \in C(\Gamma),\ \xi \in (0,2d],$$

где:

$$\psi(\eta) =: \int\limits_{\eta/2}^{\eta}\frac{\omega(f,\tau)}{\tau^2}\,\beta(\tau,\Gamma)\,d\tau, \quad \psi_f =: \psi(\xi,\eta) =: \int\limits_{\eta/2}^{\eta}\frac{\omega_f(\tau)}{\tau^2}\,\beta(\tau,\xi,\Gamma)\,d\tau,$$

$$\psi_f(\xi) = \sup_{\eta\in(0,\xi]}\psi(\xi,\eta), \quad \frac{\partial u(z)}{\partial z} =: \frac{1}{2}\,(u_x - iu_y), \quad \frac{\partial\vartheta(z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\,(\vartheta_x - i\vartheta_y),$$
$$\frac{\partial u(z)}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x + iu_y), \quad \frac{\partial\vartheta(z)}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}(\vartheta_x + i\vartheta_y).$$

Класс гармонических в G функций обозначим через $\mathfrak{Z}(G)$, используем формулу Гурса (см. [1]), которая через $u(z)$выражает значения $f\in A(G)$, $u=\mathrm{Re}f$, $u(0)=0\in G^{+}$: $\forall\, z\in G^{+}:\ f(z)=2u\big(\frac{1}{2}\,z,\frac{1}{2i}\,z\big)+ic$, $c\in R$, обозначим через АВ$C(\bar G^{\pm})$ — класс аналитических (голоморфных) в $G^{\pm}$ и непрерывных в $\bar G^{\pm}$ — функции f класса $\mathbf{B}(\Gamma)$ на границе Γ областей $G^{\pm}$, $\bar A$В$C(\bar G^{\pm})$ и $\bar A$В$C^{1}_{\infty}(\bar G^{-})$ — аналогичные классы функций $\bar f$ антиголоморфных к f, $\tilde f$ — продолжение Уитни (см. [2]) функции f из Γ в $\mathbf{C}$.

Теорема I. *Если G — ограниченное связное множество в , $G^{+}=:$ $\mathrm{int}\,G$, $G^{+}\neq\varnothing$, $G^{-}=:C\bar G$, $\infty\in G^{-}$, $\Gamma=:\Gamma^{+}\cup\Gamma^{-}$, $\mathrm{mes}_2\Gamma=0$, $\Gamma^{+}=:\partial G^{+}$, $\Gamma^{-}=:\partial G^{-}$, то:*

I.1 **(Полная форма интегральной теоремы Грина)** [3].

При а) $\varphi\in BC^{1}(\bar G)$, $\psi\in BC^{1}(\bar G)$, $\tilde\psi\in$ У $-$ Д$(\psi,\bar C)$, $\tilde\psi=:\tilde\psi^{p}$, $p\in(0,\infty)$, $\tilde\varphi\in$ У $-$ Д$(\varphi,\bar C)$

$$\int\limits_{G^{+}\cup G^{-}}\big(\tilde\varphi_{\bar\tau}(\tau)+\tilde\psi_{\tau}(\tau)\big)\,d\sigma_\tau=0,\ \Rightarrow\ (\varphi=:f,\ \psi\equiv0):$$

$$\int\limits_{G^{+}\cup G^{-}}\tilde f_{\bar\tau}(\tau)\,d\sigma_\tau=0,\quad \int_{G^{-}_{-}}\tilde f_{\bar\tau}(\tau)\,d\sigma_\tau=\int_{G^{+}_{+}}\tilde f_{\bar\tau}(\tau)\,d\sigma_\tau.$$

I.2 **(Теорема Коши, Коши — Грина)** [3]. При $f\in ABC(\bar G)$, $f\in ABC^{1}_{\infty}(\bar G^{-})$ или $f\in\bar ABC^{1}_{\infty}(\bar G^{-})$, $f\in\bar ABC(\bar G)$, справедливы равенства:

$$\int\limits_{G^{-}_{-}}\tilde f_{\bar\tau}(\tau)\,d\sigma_\tau=\int\limits_{G^{+}_{+}}\tilde f_{\bar\tau}(\tau)\,d\sigma_\tau=\frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_{+}}f(\tau)\,d\tau=0,$$

$$\int_{G^{+}_{+}}\tilde f_{\tau}(\tau)\,d\sigma_\tau=\int\limits_{G^{-}_{-}}\tilde f_{\tau}(\tau)\,d\sigma_\tau=:-\frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_{+}}f(\tau)\,d\bar\tau=0\quad\forall\,z\in G^{\pm},$$

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{G^{-}_{-}}\tilde f_{\bar\tau}(\tau)\,\frac{1}{\tau-z}\,d\sigma_\tau+\tilde f(\infty)\quad(\varphi=:0,\ \psi\equiv\bar f):$$

$$\bar f(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{G^{-}_{-}}\tilde{\bar f}_{\tau}(\tau)(\bar\tau-\bar z)^{-1}\,d\sigma_\tau+\tilde{\bar f}(\infty),$$

I.4 (Формула Пуассона). Для гармонических в $G^+ =: \operatorname{int} G \neq \varnothing$ функций $u = \mathrm{Re} f$,

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{G^-_-} \tilde{u}_{\bar\tau} \left(\frac{1}{2}\tau, \frac{1}{2i}\tau\right) \frac{1}{\tau - z} + \left(\tilde{\bar{u}}\right)_\tau \left(\frac{1}{2}\tau, \frac{1}{2i}\tau\right) \frac{1}{\bar\tau - \bar z}\, d\sigma_\tau.$$

Следствие I. *Если $f \in H^\nu(\Gamma)$, $\varphi \in H^\nu(\Gamma)$, $\nu \in (\overline{dm}\Gamma - 1, 1]$, $\overline{dm}\Gamma =: \bar\alpha$ — верхняя метрическая размерность Γ [4], $1 \leqslant \overline{dm}\Gamma < 2$, то для $\tilde f(z)$, $\tilde\varphi(z)$ справедливы утверждения теоремы.*

в). Если известно $u \in \tilde{B}C(\Gamma)$, $\forall\, t \in \Gamma : \vartheta(t) \equiv 0$, $\forall\, \tau \in G^+ :\ \tilde{u}(\tau) =: \tilde{u}^+(\tau^+)$, $\forall\, z^+ \in G^+_+ :\ \lambda(z^+) =: z^-$ — антиконформное отображение $\lambda(z^+) =: \Psi^-\left(\frac{1}{\Phi(z^+)}\right) = z^-$ Римана (см. [1]) области G^+_+ на G^-_- то, существуют предельные значения интегралов типа Коши и верны формулы Сохоцкого в форме: $\forall\, z^- \in G^-$, $\exists\, z^+ \in G^+ :\ \lambda(z^+) = z^-$, $\forall\, z^+ \in G^+_+$,

$$F(\tilde u, \lambda) =: F(u^+, \lambda, z^+) =: \frac{1}{\pi} \int\limits_{G^-_-} \frac{\tilde u^-_{\bar\tau}(\tau)}{\tau - z^+}\, d\sigma_\tau - \frac{1}{\pi} \int\limits_{G^+_+} \frac{\tilde u^+_{\bar\tau}(\tau)}{\tau - \lambda(z^+)}\, d\sigma_\tau,$$

где разность интегралов типа Коши в $F(\tilde u, \lambda)$ — решает комплекснозначно задачу Дирихле при $z^+ \to t \in \Gamma$, $F(\tilde u, \lambda) \in \mathrm{A}BC(\bar G^+) \bigcup \bar{\mathrm{A}}BC(\bar G^+)$ в форме: $\forall\, z^+ \in G^+$,

$$\mathrm{Re} F(\tilde u^+, \lambda, z^+) = \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{G^-_-} \frac{\tilde u^-_{\bar\tau}(\tau)}{\tau - z^+}\, d\sigma_\tau - \frac{1}{\pi} \int\limits_{G^+_+} \frac{\tilde u^+_{\bar\tau}(\tau)}{\tau - \lambda(z^+)}\, d\sigma_\tau\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{G^-_-} \frac{\tilde u^-_{\tau}(\tau)}{\bar\tau - \bar z^+}\, d\sigma_\tau - \frac{1}{\pi} \int\limits_{G^+_+} \frac{\tilde u^+_{\tau}(\tau)}{\bar\tau - \bar\lambda(z^+)}\, d\sigma_\tau\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_+} u(\tau) \left(\frac{d\tau}{\tau - z^+} - \frac{d\tau}{\tau - \lambda(z^+)}\right)\right),$$

$$u(z^+) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\tau) \mathrm{Re} \frac{\tau + z^+}{\tau - z^+}\, d\phi,$$

откуда следует $\lim\limits_{z\in G^+, z\to t} \mathrm{Re}F(\tilde{u}^+, \lambda, z^+) = u(t)$, $t \in \Gamma$ и, соответственно, решение задачи Дирихле при Γ — з.ж.к. и $\Gamma =: O(0, R)$ — окружность-формула Пуассона — Шварца.

Литература

1. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного.—М.: Наука, 1972.—263 с.
2. *Стеин И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.—М.: Мир, 1973.—344 с.
3. *Батчаев И. М.* Формулы Грина, Коши и сингулярные уравнения на компактах // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2009, № 5.—С. 5–12.
4. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-энтропия и ε-емкости множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук.—1959.—Т. 14, вып. 2.—С. 3–86.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 77–79.

СТРУКТУРНАЯ ТЕОРИЯ УПОРЯДОЧЕННЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

М. А. Бердикулов (Узбекистан, Ташкент; ТИИЖТ)

Как известно, что статистическая модель квантовой механики строятся на основе алгебры фон Неймана — алгебры ограниченных операторов в гильбертом пространстве. Как обычно, эрмитова матрица будет положительно определенной, если она является квадратом некоторой другой эрмитовой матрицы. Это означает, что алгебраическая структура тесно связана с порядком. Оказывается задачи теории вероятностей можно рассматривать на неалгебраических структурах например на упорядоченных нормированных пространствах [1, 2]. В [3] дано одно новое определение положительно определенности 2×2 эрмитовой матрицы, называемой p-порядком ($p > 1$), которое не согласуется с алгебраической структурой матричных алгебр при $p \neq 2$. То есть, существует эрмитова матрица, квадрат которой не является p-положительно определенной. Пространство матриц с p-порядком не является нормированной алгеброй, относительно p-порядковой нормы. p-порядковая норма совпадает с операторной нормой в случае $p = 2$. Пространство 2×2 матриц с p-порядком является пространством с порядковой единицей (см. [4]).

Пусть $M_2(C)$ — алгебра комплексных 2×2 матриц над полем комплексных чисел C. Множество эрмитовых матриц обозначим через $M_2(C)_{sa}$. Произвольная эрмитова матрица T имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix}$$

Определение 1. Пусть $p > 1$. Числа, определенные по формуле

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\Big(a + d \pm \big(|2b|^p + |2c|^p + |a-d|^p\big)^{1/p}\Big)$$

назовем p-собственными значениями матрицы T. При $p = 2$ эти числа совпадают с обычными собственными значения матрицы T.

Определение 2. Матрицу $T \in M_2(C)_{sa}$ назовем *p-положительно определенной*, если $|\lambda_{1,2}| \geqslant 0$. В этом случае будем писать $T \geqslant_p \theta$, где θ — нуль матрица.

Если T является p-положительно определенной, то очевидно $a \geqslant 0$, $d \geqslant 0$.

Будем говорить, что $T \geqslant_p S$, для $T, S \in M_2(C)_{sa}$, если $T - S \geqslant_p \theta$. Через M_p^+ обозначим множество p-положительно определенных матриц. В данной работе изучены Марковские операторы на пространстве 2×2 матриц с p-порядком. Показано, что методы квантовой теории вероятностей не исчерпываются рассмотрением на алгебраических объектах.

Пусть $A = M_p^2(C)_{sa}$ — пространство комплексных эрмитовых 2×2 матриц с p-порядком.

Определение 3. Линейный оператор $P : A \to A$ будем называть *Марковским*, если $P(E) = E$ (E — единичная матрица) и $P(T) \geqslant_p \theta$, для $T \geqslant_p \theta$.

Нетрудно заметить, что суперпозиция Марковских операторов также будет Марковским оператором.

Теорема 1. *Пусть P — Марковский оператор в A. Тогда*

1) $\|P(T)\|_p \leqslant \|T\|_p$, *для любого* $T \in A$;

2) *для любого* $T \in A$ *последовательность* $P^n(T)$, $n = 1, 2, \ldots$ *ограничена по норме;*

3) *матричные элементы* p_{ij}^n *оператора* P^n, $i, j = 1, 2$; $n = 1, 2, \ldots$ *ограничены в совокупности;*

4) *если* $\lambda \in C$ *— собственное значение оператора* P, *то* $|\lambda| \leqslant 1$.

Определение 4. Будем говорить, что Марковский оператор P, заданный на A является *регулярным*, если существует состояние μ на A, такое, что для любого $T \in A$: $\lim\limits_{n\to\infty} P(T^n) = \mu(T)E$. Здесь предел берется по p-норме.

Теорема 2. *Пусть P — Марковский оператор в A. Для того, чтобы оператор P был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы собственные значения оператора P имели вид λ_i, где $\lambda_1 = 1$, $|\lambda_i| < 1$, $i = 2, 3, 4$.*

Определение 5. Будем говорить, что Марковский оператор P, является *правильным*, если для любого $T \in A$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} P(T^n)$.

Теорема 3. *Пусть P — Марковский оператор в A. Для того чтобы оператор P был правильным, необходимо и достаточно, чтобы собственные значения оператора P имели вид λ_i, где $\lambda_1 = 1$, $|\lambda_i| \leqslant 1$, $i = 2, 3, 4$.*

Литература

1. *Холево А. С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории.—М.: Наука, 1980.—320 с.
2. *Аюпов Ш. А., Бердикулов М. А.* Задачи теории вероятностей на пространствах с порядковой единицей // Владикавказский мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 1.—С. 25–38.
3. *Бердикулов М. А.* Новая порядковая структура действительных симметричных 2×2-матриц // Владикавказский мат. журн.—2004.—Т. 6, вып. 4.—С. 12–24.
4. *Alfsen E. M., Shultz F. W.* Non commutative spectral theory for affine function spaces on convex sets // Mem. Amer. Math. Soc., 172. Providence R.I.: AMS, 1976.—P. 122.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 80.

ОПЕРАТОР ДАНКЛА В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

А. В. Братищев (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Пусть $H(G)$ — пространство голоморфных в односвязной области $G \subset \mathbb{C}$ функций, наделчнное топологией равномерной сходимости на компактах. Дифференциально-разностный оператор Данкла

$$\big[\Lambda_\alpha f\big](z) := f'(z) + \frac{2\alpha+1}{2}\,\frac{f(z)-f(-z)}{z}, \quad \alpha > -\frac{1}{2}$$

непрерывен в этом пространстве, и эквивалентен оператору классического дифференцирования $\frac{d}{dz}$. Описан класс линейных непрерывных в $H(G)$ операторов, коммутирующих с Λ_α. Доказана их гиперцикличность и хаотичность. Рассмотрены некоторые обобщения оператора Данкла.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 81.

ВОПРОСЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ, АППРОКСИМАЦИИ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ С ФИНИТНЫМ СПЕКТРОМ

Ю. Г. Булычев (Россия, Шахты; ЮРГУЭС),
В. Ю. Булычев (Россия, Шахты; ЮРГУЭС),
Т. Н. Челахова (Россия, Ростов-на-Дону; ИЭИВЭС ЮФУ),
В. М. Челахов (Россия, Ростов-на-Дону; РВИРВ)

При решении широкого круга задач математического моделирования зачастую используются аналитические функции экспоненциального типа конечной степени. Речь идет о классе функций, спектр которых имеет ограниченную протяженность, и которые в дальнейшем будут называться функциями с финитным спектром. Для таких функций имеет место разложение в ряд Котельникова, который сходится равномерно в каждой ограниченной области.

В известных работах на основе конечного ряда Котельникова развит математический аппарат интерполяции, аппроксимации и дифференцирования в классе функций с финитным спектром и рассмотрены приложения данного аппарата к решению ряда прикладных задач. Однако отсчеты значений функции полагались известными на системе точек, равноотстоящих друг от друга.

В предлагаемом докладе рассматривается математический аппарат интерполирования и приближения в классе целых аналитических функций, получены оценки сверху на возникающие при этом погрешности. Найдены формулы многократного дифференцирования функций с финитным спектром, заданных своими отсчетами на неравномерной сетке интерполяции, получены оценки сверху на погрешность дифференцирования. Показана возможность применения полученных результатов к дифференцированию класса функций, которые с заданной точностью аппроксимируются функциями с финитным спектром.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 82–83.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

В. А. Варзиев (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$. Определим (LB)-пространство $A^{-\infty}(G)$ аналитических функций полиномиального роста вблизи границы G:

$$A^{-\infty}(G) := \Big\{ f \in A(G) \;\Big|\; \exists\, n \in \mathbb{N} : \|f\|_n := \sup_{z\in G} \big|f(z)\big| \big(\operatorname{dist}(z, \partial G)\big)^n < \infty \Big\}.$$

Пусть K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$; L — целая функция экспоненциального типа, обладающая следующими свойствами:

(a) все нули λ_j, $j \in \mathbb{N}$, функции L простые;

(b) существует $d > 0$ такое, что найдется последовательность попарно непересекающихся кругов $S_j := \{z : |z - \mu_j| < d\}$, $j \in \mathbb{N}$ ($|\mu_j| \to \infty$), таких, что каждый круг S_j содержит ровно один нуль функции L и вне $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} S_j$ имеет место асимптотическое равенство $\ln|L(z)| = H_{G+K}(z) + O(\ln(1+|z|)$, $|z| \to \infty$ (H_{G+K} — опорная функция $G+K$).

Пусть $e_\lambda(z) := \exp(\lambda z)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$. Для $n \in \mathbb{N}$ введем (LB)-пространство последовательностей

$$\Lambda_G^{-\infty} := \left\{ c = (c_j) \subset \mathbb{C} \;\middle|\; \exists\, n \in \mathbb{N} :\; \|c\|_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|c_j| \exp H_G(\lambda_j)}{(1+|\lambda_j|)^n} < \infty \right\}$$

($\Lambda_G^{-\infty}$ — пространство всех последовательностей c, для которых ряд $\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{\lambda_j}$ абсолютно сходится в $A^{-\infty}(G)$). *Оператор представления* $R(c) := \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{\lambda_j}$ линейно и непрерывно отображает $\Lambda_G^{-\infty}$ в $A^{-\infty}(G)$.

Теорема 1. *Оператор представления* $R : \Lambda_G^{-\infty} \to A^{-\infty}(G)$ *сюръективен, т. е.* $(e_{\lambda_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *— абсолютно представляющая система в* $A^{-\infty}(G)$.

Возникает естественный вопрос о существовании линейного непрерывного правого обратного к сюръективному оператору представления $R : \Lambda_G^{-\infty} \to A^{-\infty}(G)$.

Теорема 2. *Если* $\operatorname{int} K \neq \varnothing$, *то оператор* $R : \Lambda_G^{-\infty} \to A^{-\infty}(G)$ *имеет линейный непрерывный правый обратный.*

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 84–85.

УПОРЯДОЧЕНИЯ И ПОЛУГРУППЫ В МЕТРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В. М. Гичев (Россия, Омск; Омский филиал ИМ СО РАН)

Предполагается сделать краткий обзор некоторых тем, связанных с метрической геометрией и структурами порядка при наличии нетривиальных групп симметрии. В такой ситуации, как правило, главную роль играет некоторая полугруппа. Например, упорядочения векторных пространств задаются конусом C положительных элементов. От C требуется, чтобы он был выпуклым, замкнутым, порождающим и острым. В конечномерном пространстве, с соблюдением этих условий, его можно задавать произвольно. В некоммутативном случае это не так. Для инвариантных упорядочений групп Ли множество положительных элементов образует полугруппу, которая при некоторых естественных условиях определяется касательным конусом к ней. При этом возникают нетривиальные условия существования упорядочения — в [1] показано, что среди простых групп Ли это возможно лишь для универсальных накрывающих групп автоморфизмов симметрических областей в $\mathbb{C}^n$. Не всякий конус задает упорядочение — может случиться, что он порождает всю группу. Это было обнаружено в работе [2], где было найдено препятствие алгебраического характера для простых групп Ли. Для произвольных односвязных групп, кроме него, появляется дополнительное метрическое условие — требуется, чтобы конус не имел высокого порядка касания с некоторыми специальными пространствами (см. [3]).

Левоинвариантная метрика на группе Ли G однозначно определяется функцией расстояния до единицы. Ее надграфик являются полугруппой в $G \times \mathbb{R}$. Многие важные свойства метрик можно выразить в терминах этих полугрупп и касательных конусов к ним. Почти тот же самый объект представляют собой полугруппы множеств в группе (в терминах [4] это задает геометрию на группе). Например, семейство шаров $B(r)$, $r \geqslant 0$ в римановой метрике на группе Ли обладает свойством $B(r) \cdot B(\rho) = B(r+\rho)$ для всех $r, \rho \geqslant 0$, которое его во многом характеризует. В работе [5] подобное построение было проделано для упорядочений. Множества могут параметризоваться не только числами, но и достаточно общими абелевыми полугруппами. В работе [6] охарактеризованы компактные линейные группы, для которых семейство выпуклых оболочек орбит образует полугруппу по сложению. Они параметризуются симплициальным конусом.

Еще одна важная тема связана с теорией оптимального управления и общей теорией относительности. Одной из задач, рассматриваемых в них, является структура множества достижимых точек (будущего). Для определенного класса лоренцевых многообразий оно описано в [7]. В некоммутативном случае будущее обычно содержит, в некотором смысле, полупространство.

Литература

1. *Винберг Э. Б.* Инвариантные выпуклые конусы и упорядочения в группах Ли // Функ. ан. и его прил.—1980.—Т. 14, вып. 1, С. 1–13.
2. *Ольшанский Г. И.* Инвариантные упорядочения в простых группах Ли: решение задачи Э. Б. Винберга // Функ. ан. и его прил.—1982.—Т. 16, вып. 4.—С. 80–81.
3. *Gichev V. M.* Invariant orders in simply connected Lie groups // J. of Lie Theory.—1995.—№ 5.—P. 41–79.
4. *Berestovskiĭ V., Plaut C., Stallmann C.* Geometric groups I // Trans. AMS.—1999.—Vol. 351.—P. 1403–1422.
5. *Берестовский В. Н., Гичев В. М.* Метризованные порядки в топологических группах // Алгебра и Анализ.—1999.—Т. 11, № 4.—С. 1–34.
6. *Gichev V. M.* Polar representations of compact groups and convex hulls of their orbits // Diff. Geom. and Appl.—2010.—(In press).
7. *Gichev V. M., Morozov O. S.* On Flat Complete Causal Lorentzian Manifolds // Geometriae Dedicata.—2005.—Vol. 116.—P. 37–59.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 86.

ЛИЕВО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ АЛГЕБР НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

И. М. Жураев (Узбекистан, Ташкент; НУ Уз)

Пусть M — однородная алгебра фон Неймана типа I_n с центром Z. Тогда $M \cong M_n(Z)$ и $S(M) \cong M_n(S(Z))$, где $S(M)$ — $*$-алгебра измеримых операторов присоединенных к алгебре фон Неймана M, $S(Z)$ — $*$-алгебра измеримых операторов, присоединенных к центру Z алгебры фон Неймана M.

Пусть $L : S(M) \to S(M)$ — лиево дифференцирование, т. е. линейное отображение с условием $L([x, y]) = [L(x), y] + [x, L(y)]$, для любых x, $y \in S(M)$, где $[x, y] = xy - yx$. $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi(\lambda_{ii})$, $x \in S(M)$, $\lambda_{ii} \in S(Z)$, где $\psi = L|_{S(Z)}$. Тогда $\Phi(x)$ является центрозначным следом, т. е. линейное отображение в центр, удовлетворяющее равенству $\Phi(xy) = \Phi(yx)$. Напомним, что линейное отображение $D : S(M) \to S(M)$ называется дифференцированием, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$, для любых x, $y \in S(M)$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Всякое лиево дифференцирование L на $S(M)$ имеет преставление в виде*

$$L = D + \Phi,$$

где D — дифференцирование на $S(M)$, Φ — центрозначным след на $S(M)$.

Литература

1. *Albeverio S., Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K.* Derivations on the algebra of measurable operators affiliated with a type I von Neumann algebra // Siberian Adv. Math.—2008.—Vol. 18.—P. 86–94.
2. *Albeverio S., Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K. K.* Structure of derivations on various algebras of measurable operators for type I von Neumann algebras // J. Funct. Anal.—2009.—Vol. 256.—P. 2917–2943.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 87.

PROPERTIES POSITIVE OF MAPPINGS ACTING IN ORDER UNIT SPACES

I. M. Juraev (Uzbekistan, Tashkent; NUUz)

Let $(A, \mathbf{e})$ be an order unit space,(V, K) be a space with the base norm [1]. We'll suppose that these two spaces are in the spectral duality.

Definition 1. A face G is called projective if $G = \{\rho \in K : \langle a, p\rangle = 0\}$ for an $a = R\mathbf{e}$ where R P is a projector.

In other words, projective faces are faces of the form

$$G = \mathrm{im}^{+} R^{*} \cap K = F_R,$$

where RP is a projector. Denote be $\mathcal{F}$ the set of all projective faces K and introduce in this set the order by inclusion and the operation of orthocomplementation $F_R \to F_{R'} = F_R^{\#} = \mathrm{im} R'^{*} \cap K$ where R' is the orthocomplement to R.

The projective face $F_R^{\#}$ is the quaiscomplement of F_R. Let $(A_1, \mathbf{e}_1)$ and $(A_2, \mathbf{e}_2)$ be two arbitrary order unit spaces. We denote by $S(A_1, A_2)$ all positive linear mappings from A_1 into A_2 preserving the order unit and by $S(A_1, A_2, \lambda\mathbf{e}_2)$ all positive linear mappings f from A_1 into A_2 with the condition $f(\mathbf{e}_1) = \lambda\mathbf{e}_2$, $\lambda \geqslant 0$. Other notations are taken from [1]. For $\varphi \in S(A_1, A_2)$, we denote by φ^{**} the second conjugate to φ acting from A_1^{**} into A_2^{**}.

Theorem 1. *Let $(A_1, \mathbf{e}_1)$ and $(A_2, \mathbf{e}_2)$ be two arbitrary order unit spaces with spaces of states K_1 and K_2, respectively. Let $\varphi \in S(A_1, A_2)$ and $\psi : K_2 \to K_1$, w^* is continuous affine mapping such that $\varphi^* = \psi$. Then the equality $\varphi\left(a^{(2)}\right) = \varphi(a)^{(2)}$, $\forall a \in A_1$ holds if and only if ψ^{-1} preserves a quasicomplement, i. e. $\psi^{-1}\left(F^{\#}\right) = \psi^{-1}(F)^{\#}$ for any projective face F from K_1.*

References

1. *Alfsen E. M., Shultz F. W.* Noncommutative spectral theory for affine function spaces on convex sets // Memors Amer. Math. Soc.—1976.—Vol. 172.—P. 1–120.
2. *Yadgorov N. J., Juraev I. M.* Extreme positive linear mappings between order unit spaces // Dokl. AN RU.—1995.—№ 2.—P. 3–5.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 88–89.

НЕКОММУТАТИВНЫЕ L^p-ПРОСТРАНСТВА, АССОЦИИРОВАННЫЕ СО СЛЕДОМ МАГАРАМ

Б. С. Закиров (Узбекистан, Ташкент; ТИИЖТ),
В. И. Чилин (Узбекистан, Ташкент; НУУз)

Пусть M — алгебра фон Неймана, $S(M)$ — $*$-алгебра всех измеримых операторов присоединенных к M, $t(M)$ — топология сходимости локально по мере в $S(M)$ (см. [1], гл. III, § 3.5). Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная коммутативная алгебра фон Неймана, Φ — точный нормальный $S(\mathcal{A})$-значный след на M. Оператор $x \in S(M)$ называется Φ-интегрируемым, если существует такая последовательность $\{x_n\} \subset M$, что $x_n \xrightarrow{t(M)} x$ и $\Phi(|x_n - x_m|) \xrightarrow{t(\mathcal{A})} 0$ при $n, m \to \infty$. В этом случае, существует элемент $\widehat{\Phi}(x) \in S(\mathcal{A})$, такой что $\Phi(x_n) \xrightarrow{t(\mathcal{A})} \widehat{\Phi}(x)$. Пусть $L^1(M, \Phi)$ множество всех Φ-интегрируемых операторов из $S(M)$. Для каждого $x \in L^1(M, \Phi)$ положим $\|x\|_{1,\Phi} = \widehat{\Phi}(|x|)$. Тогда $(L^1(M, \Phi), \|\cdot\|_{1,\Phi})$ является полным решеточно нормированным пространством.

Будем говорить, что след Φ обладает *свойством Магарам*, если для любых $0 \leqslant x \in M$, $0 \leqslant f \leqslant \Phi(x) \in S(\mathcal{A})$, существует такое положительное $y \in M$, что $y \leqslant x$ и $\Phi(y) = f$. Точный нормальный $S(\mathcal{A})$-значный след Φ, обладающий свойством Магарам, будем называть *следом Магарам* (см. [2], 3.4.1). Если Φ есть след Магарам, то $(L^1(M, \Phi), \|\cdot\|_{1,\Phi})$ становится пространством Банаха — Канторовича (см. [3]).

Пусть Φ — $S(\mathcal{A})$-значный след Магарам на M. Для каждого $p > 1$ положим $L^p(M, \Phi) = \big\{x \in S(M) : |x|^p \in L^1(M, \Phi)\big\}$ и $\|x\|_{p,\Phi} = \widehat{\Phi}(|x|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Теорема 1. $(L^p(M, \Phi), \|\cdot\|_{p,\Phi})$ *— пространство Банаха — Канторовича.*

Пусть $L^p(M, \Phi)^*$ — пространство Банаха — Канторовича всех $S_h(\mathcal{A})$-ограниченных линейных отображений из $L^p(M, \Phi)$ в $S(\mathcal{A})$ (см. [2], 2.2.4). Следующая теорема дает описание пространства $L^p(M, \Phi)^*$.

Теорема 2. *Пусть Φ — $S(\mathcal{A})$-значный след Магарам на алгебре фон Неймана M, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда:*

(i) для любых $x \in L^p(M, \Phi)$, $y \in L^q(M, \Phi)$ элементы xy и yx принадлежат $L^1(M, \Phi)$, при этом $\widehat{\Phi}(xy) = \widehat{\Phi}(yx)$ и $\|xy\|_{1,\Phi} \leqslant \|x\|_{p,\Phi}\|y\|_{q,\Phi}$;

(ii) для каждого $y \in L^q(M, \Phi)$ линейное отображение $T_y(x) = \widehat{\Phi}(xy)$, $x \in L^p(M, \Phi)$, является $S_h(\mathcal{A})$-ограниченным и $\|T_y\| = \|y\|_{q,\Phi}$;

(iii) для любого $T \in L^p(M, \Phi)^*$ существует единственное $y \in L^q(M, \Phi)$, такое, что $T = T_y$.

Следствие 3. *В условиях теоремы 2 линейное пространство $L^p(M, \Phi)^*$ с $S_h(\mathcal{A})$-значной нормой $\|T\|, T \in L^p(M, \Phi)^*$, является пространством Банаха — Канторовича, изометричным пространству $(L^q(M, \Phi), \|\cdot\|_{q,\Phi})$.*

Литература

1. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов.—Київ: Праці Ін-ту матемематики НАН України, 2007.— Т. 69. – 390 с.
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
3. *Закиров Б. С., Чилин В. И.* Некоммутативное интегрирование для следов со значениями в пространствах Канторовича — Пинскера // Изв. вузов. Математика.—2010, № 10.—С. 1–13.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 90–91.

О ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ В ПРОСТРАНСТВАХ С РАЗБИЕНИЕМ ЕДИНИЦЫ

О. А. Иванова (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
С. Н. Мелихов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

В 1971 году Де Вилде [1] ввел понятия разбиения единицы в индуктивных и проективных пределах локально выпуклых пространств, обобщающие разбиения единицы в пространствах функций. Приведем его в частном случае счетного множества индексов.

Определение. Пусть E — проективный предел локально выпуклых пространств E_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно отображений $J_n : E \to E_n$. Будем называть множество линейных отображений $T_l : E_l \to E$, $l \in \mathbb{N}$, *разбиением единицы в* E, если выполняются следующие условия:

(i) $J_n \circ T_l$ непрерывное отображение E_l в E_n для каждой пары индексов l, n.

(ii) Для каждого $n \in \mathbb{N}$ $J_n \circ T_l \neq 0$ не более чем для конечного числа индексов l.

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} T_k \circ J_k$ — тождественное отображение из E в E (т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} T_k \circ J_k(x)$ поточечно сходится абсолютно (в E) к x для любого $x \in E$).

Примерами проективных пределов с разбиением единицы являются пространства непрерывных и бесконечно дифференцируемых функций на открытом подмножестве $\mathbb{R}^N$.

Далее $E = \mathrm{proj}_{\leftarrow n} E_n$ — проективный предел локально выпуклых пространств с разбиением единицы $(T_l)_{l\in\mathbb{N}}$, $\varphi_j \in E'$, $j \in \mathbb{N}$. (E' обозначает топологическое сопряженное к E пространство). Положим $R(x) := \big(\varphi_j(x)\big)_{j\in\mathbb{N}}$, $x \in E$. Через ω обозначим пространство всех числовых последовательностей с топологией покоординатной сходимости.

Установлены необходимые и достаточные условия того, что

(1) $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность Айдельхайта в E' (т. е. оператор $R : E \to \omega$ является сюръективным оператором).

(2) Линейный непрерывный оператор $R : E \to \omega$ имеет линейный непрерывный правый обратный, т. е. существует такой линейный

непрерывный оператор $\Pi : \omega \to E$, что $R \circ \Pi(c) = c$ для любого $c \in \omega$.

Литература

1. *De Wilde M.* Inductive limits and partition of unity // Manuscripta Math.—1971.—№ 5.—С. 45–58.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 92–93.

ОБОБЩЕНИЕ ПРИНЦИПА ИСЧЕРПЫВАНИЯ ДЛЯ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР В ТОПОСЕ

К. К. Казбеков (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Принцип исчерпывания является одним из фундаментальных свойств булевых алгебр, рассматриваемых как универсальные алгебры $(B, \vee, \wedge, *, 0_B, 1_B)$ с двумя бинарными операциями $\vee$ и $\wedge$, одной унарной операцией $*$ и двумя выделенными элементами 0_B и 1_B, удовлетворяющими известным условиям [1, с. 50].

Одной из реализаций булевых алгебр в категориях является построение булевых алгебр в топосе $\mathbb{T}$, т. е. в декартово замкнутой категории, имеющей классификатор подобъектов Ω [2]. Важные примеры топосов представляют категория множеств Set и категория пучков $\mathrm{Shv}(Q)$ для топологического пространства Q. В произвольном топосе $\mathbb{T}$, вводя истинностные морфизмы, а также морфизмы кванторов (см. [2] или [1, с. 115–120]), можно развить исчисление предикатов, основанное на принципах интуиционистской логики (см., в частности, [1, с. 121]). В каждой категории $\mathcal{K}$ совокупность мономорфизмов $f : a \to d$, где концы d мономорфизмов пробегают все объекты категории, образуют множество фактор-классов $\mathrm{Sub}(d)$, каждое из которых упорядочено по включению. В топосе $\mathbb{T}$ в интуиционистском исчислении предикатов упорядоченное множество $(\mathrm{Sub}(d), \subset)$ является решеткой [1, с. 124] и даже, более того, гейтинговой алгеброй [1, с. 129]. Наконец, при наличии дополнения для каждого элемента множества $(\mathrm{Sub}(d), \subset)$ мы приходим к понятию булева топоса $\mathcal{E}$, когда решетка $\mathrm{Sub}(d)$ есть булева алгебра для всякого $\mathcal{E}$-объекта d.

Минусами указанной выше реализации булевых алгебр в топосе являются, во-первых, чисто интуиционистский характер внутреннего логического исчисления для фактор-классов $\mathrm{Sub}(d)$ и, во-вторых, «локальность» этих реализаций булевых алгебр в топосе $\mathcal{E}$ только на уровне самих фактор-классов категории и не выше.

Представим в тезисном порядке основную идею более «глобальной» реализации булевых алгебр в топосе. Основным исходным понятием будет элементарный топос $\mathbb{T}_0$ и двуместные истинностные

$\mathbb{T}_0$-морфизмы $\cap\colon \Omega\times\Omega\to\Omega$, $\cup\colon \Omega\times\Omega\to\Omega$, $\Rightarrow\colon \Omega\times\Omega\to\Omega$, определенные как правые стороны декартовых квадратов $(1_T, 1_T, \Omega\times\Omega, \Omega)$, $(1_T, \phi(\Omega+\Omega), \Omega\times\Omega, \Omega)$ и $(1_T, (\leqslant), \Omega\times\Omega, \Omega)$, построенных для мономорфизмов $\langle\top,\top\rangle : 1_T \to \Omega\times\Omega$, $\phi : \phi(\Omega+\Omega) \to \Omega\times\Omega$ и $e : (\leqslant) \to \Omega\times\Omega$ соответственно. Для каждого $\mathbb{T}_0$-мономорфизма f можно определить три характера: $\chi^0_f(\Omega)$, $\chi^0_f(\phi)$ и $\chi^0_f(e)$, которые при условии их единственности обеспечивают существование произведений $\left\langle \chi^0_f(\Omega,\phi,e), \chi^0_g(\Omega,\phi,e)\right\rangle$ для любой пары $\mathbb{T}_0$-мономорфизмов f и g. Вместе с новым обобщенным порядком $\leqslant_T$, задаваемым через «окаймляющие» $\mathbb{T}_0$-морфизмы, топос $\mathbb{T}_0$ образует новую топосную категорию $\mathbb{T}_1$, которая, в свою очередь, при выполнении дополнительных аксиом образует топос типа $\mathbb{T}_2$. В топосе $\mathbb{T}_2$ можно строить обобщенные $(\vee^k, \wedge^k)$-решетки и, далее, обобщенные булевы алгебры $(B, \vee^k, \wedge^k, *_k, 0_B, 1_B)$ с порядком $\leqslant_{T(\wedge^k)}$ и связанными с B понятиями $(\vee^k, \wedge^k)$-идеала, $(\vee^k, \wedge^k)$-компоненты, $(\wedge^k)$-антицепи и $(\wedge^k)$-счетности, $(\vee^k)$-полноты и $\sigma(\vee^k)$-алгебры, а также $\mathrm{u.b.}(\vee^k M)$ — множества всех верхних $(\vee^k)$-границ множества M; здесь $k = 1, 2, 3, \ldots$

Теорема. *Пусть M — непустое подмножество булевой алгебры $(B, \vee^k, \wedge^k, *_k, 0_B, 1_B)$, определенной в топосе $\mathbb{T}_2$, и B_0 есть $(\vee^k, \wedge^k)$-компонента B, порожденная множеством M. Пусть E — минорирующее множество в компоненте B_0. Тогда для каждого $k = 1, 2, 3, \ldots$ и порядка $\leqslant_{T(\wedge^k)}$ существует некоторая $(\wedge^k)$-антицепь $E_0 \subset E$ такая, что $\mathrm{u.b.}(\vee^k E_0) = \mathrm{u.b.}(\vee^k M)$, причем для любого $\mathbb{T}_2$-мономорфизма $f \in E_0$ найдется $\mathbb{T}_2$-мономорфизм $g \in M$ со свойством $f \leqslant g$ в порядке $\leqslant_{T(\wedge^k)}$.*

Следствие. *Булева $\sigma(\vee^k)$-алгебра $(\wedge^k)$-счетного типа, определенная в топосе $\mathbb{T}_2$, является $(\vee^k)$-полной для каждого $k = 1, 2, 3, \ldots$*

Отметим, что случай $k = 1$ соответствует обычной формулировке принципа исчерпывания (см., например, [1, с. 53]).

Литература

1. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.—526 с.
2. *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики.—М.: Мир, 1983.—488 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 94–95.

ПРОЕКТИВНОЕ ОПИСАНИЕ ПРОСТРАНСТВ УЛЬТРАРАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

Е. В. Капитонова (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
С. Н. Мелихов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Пусть Ω — локально замкнутое выпуклое открытое подмножество $\mathbb{R}^N$ (класс таких множеств Ω включает в себя все выпуклые компактные и выпуклые открытые подмножества $\mathbb{R}^N$); $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность (выпуклых) компактов в Ω; ω — некоторая весовая функция, как в [2]; H_n — опорная функция компакта K_n, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $w_{nk}(z) := \exp\left(-H_n(\operatorname{Im} z) - \frac{1}{k}\omega(z)\right)$, $z \in \mathbb{C}^N$, $n, k \in \mathbb{N}$. Введем весовые пространства целых функций

$$H_{nk}(\mathbb{C}^N) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}^N) : \ \|f\|_{nk} := \sup_{z\in\mathbb{C}^N} |f(z)| w_{nk}(z) < +\infty \right\},$$
$$n, k \in \mathbb{N}; \quad WH(\mathbb{C}^N) := \operatorname{ind}_n \operatorname{proj}_k H_{nk}(\mathbb{C}^N).$$

Пространство $WH(\mathbb{C}^N)$ топологически изоморфно (посредством преобразования Фурье — Лапласа) сильному сопряженному к пространству ультрадифференцируемых на Ω функций типа Румье, определяемому ω. Ассоциированное с (w_{nk}) семейство весов $\overline{W}$ состоит из всех полунепрерывных сверху функций $\overline{w} : \mathbb{C}^N \to [0, +\infty)$ таких, что для любого n существуют $\alpha_n > 0$ и $k = k(n)$, для которых $\overline{w} \leqslant \alpha_n w_{nk}$ на $\mathbb{C}^N$. Проективная оболочка индуктивного предела $WH(\mathbb{C}^N)$ определяется следующим образом:

$$H\overline{W}(\mathbb{C}^N) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}^N) : \ \|f\|_{\overline{w}} := \sup_{z\in\mathbb{C}^N} |f(z)| \overline{w}(z) < +\infty \ \forall\, \overline{w} \in \overline{W} \right\}.$$

Топология $H\overline{W}(\mathbb{C}^N)$ задается семейством преднорм $\|\cdot\|_{\overline{w}}$, $\overline{w} \in \overline{W}$. Пространство $WH(\mathbb{C}^N)$ непрерывно вложено в $H\overline{W}(\mathbb{C}^N)$.

Теорема 1. *Индуктивная топология в пространстве $WH(\mathbb{C}^N)$ строго сильнее проективной топологии в нем, индуцированной из $H\overline{W}(\mathbb{C}^N)$.*

Теорема 2. *Пространства $WH(\mathbb{C}^N)$ и $H\overline{W}(\mathbb{C}^N)$ совпадают алгебраически.*

Теоремы 1 и 2 были доказаны ранее для открытого выпуклого множества Ω в [1]. При доказательстве теоремы 1 использован метод, примененный в [1], а при доказательстве теоремы 2, в отличие от [1], — результаты статьи [3] о носителях квазианалитических функционалов (и ультрараспределений).

Литература

1. *Bonet J., Meise R.* Ultradistributions of Roumieu type and projective descriptions // J. Math. Anal. Appl.—2001.—Vol. 255.—P. 122–136.
2. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Result. Math.—1990.—Vol. 17.—P. 206–237.
3. *Heinrich T., Meise R.* A support theorem for quasianalytic functionals // Math. Nachr.—2007.—Vol. 280.—P. 364–387.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 96–97.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

В. М. Каплицкий (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Теория интерполяции свойства ограниченности оператора, действующего в паре нормированных пространств, имеет важные приложения во многих разделах функционального анализа. Интерполяционные методы позволяют получать оценки норм операторов в нормированных пространствах, которые, по-видимому, нельзя получить каким-либо другим путем. Первоначально теория интерполяции развивалась как раздел теории линейных операторов. Сейчас ясно, что интерполяционные теоремы для нелинейных операторов специальных классов можно эффективно использовать в разных задачах анализа. Из двух основных методов интерполяции, а именно, комплексного метода интерполяции и вещественного K-метода Петре, для обобщения на нелинейный случай больше подходит второй. Как было замечено самим Петре и некоторыми другими авторами, основные конструкции вещественного K-метода можно перенести на некоторые классы липшицевых или гельдеровых операторов [1–7]. В настоящей работе будут исследованы некоторые аспекты теории интерполяции нелинейных операторов, ограниченных на конусе в паре банаховых пространств и удовлетворяющих на этом конусе условию Липшица в одном из пространств банаховой пары. Отметим, что в теории интерполяции липшицевых операторов, заданных на конусах в банаховых пространствах, возникают дополнительные трудности, приводяшие к тому, что возможность интерполяции свойства ограниченности пока удается доказать для конусов, удовлетворяющих достаточно жестким ограничениям. В то же время некоторые проблемы существования базисов в ядерных пространствах Фреше естественным образом приводят к задаче интерполяции нелинейных операторов, заданных на конусах, удовлетворяющих лишь одному условию полноты. Основные понятия, связанные с теорией интерполяции операторов, см. в [1, 2, 8, 9].

Конус Q в идеальном банаховом пространстве E называется полным, если из условия $x, y \in Q$ следует, что $\min(x, y) \in Q$ (минимум двух функций определяется поточечно).

Теорема. *Пусть* E_0, E_1, E *— идеальные банаховы пространства,* $L_\infty = E_1 \subset E \subset E_0$ *и* $Q \subset E_0^+$ *— полный конус в* E_0 *такой, что конус* $Q \cap E_1^+$ *содержит порядковую единицу* e *пространства* E_1. *Пусть банахова тройка* (E_0, E_1, E) *интерполяционна относительно банаховой тройки* (F_0, F_1, F), *причем промежуточные пространства* E *и* F *описываются с помощью вещественного* K*-метода. Тогда существует постоянная* $c = c\,(E_0, E_1, F_0, F_1, E, F, e) > 0$ *такая, что если оператор* $T\colon Q \to F_0 + F_1$ *удовлетворяет условиям:*

$$\|T(x) - T(y)\|_{F_0} \leqslant M_0\,\|x - y\|_{E_0}, \quad x, y \in Q,$$
$$\|T(x)\|_{F_1} \leqslant M_1\,\|x\|_{E_1}, \quad x \in Q \cap E_1^+,$$

то T *переводит* $Q \cap E^+$ *в* F *и выполняется неравенство*

$$\|T(x)\|_F \leqslant c\,\max\{M_0, M_1\}\,\|x\|_E, \quad x \in Q \cap E^+.$$

Справедливо и двойственное утверждение, в котором пространства E_0 *и* E_1 *меняются местами, т. е.* $E_0 = L_\infty$, *а* E_1 *— некоторое идеальное банахово пространство, вложенное в* L_∞.

Литература

1. *Брудный Ю. А., Крейн С. Г., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техники. Сер. Мат. ан.—М.: ВИНИТИ, 1986.—Т. 24.—С. 3–163.
2. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение.—М.: Мир, 1980.—264 с.
3. *Tartar L.* Interpolation non linéaire et régularité // J. Funct. Anal.—1972.—Vol. 9.—P. 469–489.
4. *Maligranda L.* On interpolation of nonlinear operators // Comment. Math. Prace Mat.—1989.—Vol. 28.—P. 253–275.
5. *Maligranda L.* Interpolation of locally Hölder operators // Studia Math.—1984.—Vol. 78.—P. 289–296.
6. *Peetre J.* On interpolation functions. I; III // Acta Sci. Math.—1966.—Vol. 27, № 3.—P. 161–171.; 1969.—Vol. 30, № 4.—P. 235–239.
7. *Каплицкий В. М.* Интерполяция нелинейных операторов в весовых L_p-пространствах // Сиб. мат. журн.—2010.—Т. 51, № 2.—С. 316–329.
8. *Cerda J., Coll H.* Function cones and interpolation // Math. Nachr.—2005.—Vol. 278, № 3.—P. 227–239.
9. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1978.—400 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 98.

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ СПЕКТРА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. Д. Кряквин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В докладе рассматривается класс символов всех бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^{2n}$ вещественнозначных функций $a(x,\xi)$ таких, что для любых мультииндексов α, β

$$\sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n} \left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\right| (1+|\xi|)^{|\alpha|} < \infty. \tag{1}$$

Каждому символу $a(x,\xi)$ ставится в соответствие псевдодифференциальный оператор $A = a(x,D)$, определенный для любой функции $u \in S(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int a(x,\xi) \int u(y) e^{i(x-y,\xi)}\, dy\, d\xi.$$

Хорошо известно, что A продолжается до ограниченного оператора как в пространствах Соболева, так и в пространствах Гельдера.

Теорема 1. *Спектр псевдодифференциального оператора A, действующего в пространстве Соболева на $\mathbb{R}^n$, совпадает (как множество) со спектром псевдодифференциального оператора A, действующего в пространстве Гельдера на $\mathbb{R}^n$.*

Литература

1. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.—М: Наука, 1978.—280 с.
2. *Beals R.* Characterization of psedudifferential operators and applications // Duke Math. J.—1977.—Vol. 44, № 1.—P. 45–57.
3. *Leopold H. G., Schrohe E.* Spectral invariance for algebras of pseudodifferential operators on Besov-Triebel-Lizorkin spaces // Manuscripta Math.—1993.—Vol. 78, № 1.—P. 99–110.
4. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.—New Jersey: Princeton Univ. Press, 1993.—716 p.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 99–100.

ENVELOPE REPRESENTATIONS IN VECTOR LATTICES

A. G. Kusraev (Russia, Vladikavkaz; SMI)

1. Abstract Convexity. Let H be a linear (or semilinear) subset of a vector lattice E. The *support set* $\partial_H x$ of $x \in E$ with respect to H is the set of all H-minorants of x: $\partial_H x := \{h \in H : h \leqslant x\}$. The H*-convex hull* of $x \in E$ is defined by $\mathrm{co}_H\, x := \sup\{h \in H : h \in \partial_H x\}$. An element x is called H*-convex* (abstract convex with respect to H) if $\mathrm{co}_H\, x = x$. Now the problem is to examine abstract convex elements, see [1]. The aim of this communication is the description of H-convex elements in E in the event that H is the linear hull of a finite collection $\{x_0, x_1, \dots, x_N\} \subset E$ of a vector lattice E. Under some conditions an element in E is H-convex if and only if it is of the form $x_0\widehat{\varphi}(x_1/x_0, \dots, x_N/x_0)$ for some lower semicontinuous convex function $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Sublinear case is treated in [2].

2. Functional calculus. First we have to extend the homogeneous functional calculus up to the *continuous functional calculus.* Take $x_0, x_1, \dots, x_N \in E$ and put $\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_N)$. We write $\mathfrak{x} \prec x_0$ whenever $\varepsilon(|x_1| + \dots + |x_N|) \leqslant x_0$ for some $\varepsilon > 0$. Denote by $\langle x_1, \dots, x_N\rangle$ and $\mathrm{Hom}(L)$ respectively the vector sublattice of E generated by $\{x_1, \dots, x_N\}$ and the set of all $\mathbb{R}$-valued lattice homomorphisms on L. Define $[\mathfrak{x}/x_0] := [(x_1, \dots, x_N)/x_0]$ as the set

$$\left\{\left(\frac{\omega(x_1)}{\omega(x_0)}, \dots, \frac{\omega(x_N)}{\omega(x_0)}\right) \in \mathbb{R}^N : \ 0 \neq \omega \in H(\langle x_0, x_1, \dots, x_N\rangle)\right\}.$$

Say that $x_0\widehat{\varphi}(\mathfrak{x}/x_0) := x_0\widehat{\varphi}(x_1/x_0, \dots, x_N/x_0)$ *exists* in E and write

$$y := x_0\widehat{\varphi}(\mathfrak{x}/x_0) := x_0\widehat{\varphi}(x_1/x_0, \dots, x_N/x_0)$$

provided that there is $y \in E$ satisfying

$$\omega(y) = \omega(x_0)\varphi\left(\frac{\omega(x_1)}{\omega(x_0)}, \dots, \frac{\omega(x_N)}{\omega(x_0)}\right)$$

for all $\omega \in H(\langle x_0, x_1, \dots, x_N, y\rangle)$. Below D is a closed subset of $\mathbb{R}^N$.

Theorem 1. *Assume that E is a uniformly complete vector lattice, $x_0, x_1, \dots, x_N \in E$, and $\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_N)$. Let $\mathfrak{x} \prec x_0$ and $[\mathfrak{x}/x_0] \subset D$. Then $x_0\widehat{\varphi}(\mathfrak{x}/x_0)$ exists for every $\varphi \in C(D)$ and the mapping*

$$(\mathfrak{x}/x_0)\hat{} : \varphi \mapsto x_0\widehat{\varphi}(\mathfrak{x}/x_0) \quad \big(\varphi \in C(D)\big)$$

is the unique lattice homomorphism from $C(D)$ to E with $(\mathfrak{x}/x_0)\hat{}(1_D) = x_0$ and $(\mathfrak{x}/x_0)\hat{}(dt_j) = x_j$ for all $j := 1, \dots, N$. Moreover, $(\mathfrak{x}/x_0)\hat{}(C(D))$ coincides with the x_0-closure of $\langle x_0, x_1, \dots, x_N\rangle$.

2. Envelope representation. Given $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, define the *conjugate* φ^* as follows:

$$\varphi^*(\mathbf{t}) := \sup\{\langle \mathbf{s}, \mathbf{t}\rangle - \varphi(\mathbf{s}) : \ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^N\} \quad (\mathbf{t} \in \mathbb{R}^N).$$

Theorem 2. *Assume that E is a uniformly complete vector lattice, $x_0, x_1, \dots, x_N \in E$, $\mathfrak{x} := (x_1, \dots, x_N)$ and $\mathfrak{x} \prec x_0$. If $[\,\mathfrak{x}/x_0\,] \subset D$ and φ is convex and lower semicontinuous on $\mathbb{R}^N$ and finite and continuous on $D \subset \mathbb{R}^N$, then the representation hold*

$$x_0\widehat{\varphi}(\mathfrak{x}/x_0) = \sup_{\lambda \in \mathrm{dom}(\varphi^*)} \big\{ \langle \lambda, \mathfrak{x} \rangle - \varphi^*(\lambda)x_0 \big\}.$$

Moreover, $x_0\widehat{\varphi}(\mathfrak{x}/x_0)$ is the uniform limit of an increasing sequence of finite suprema of linear combinations of the form $-\varphi^*(\lambda)x_0 + \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i$, with $\lambda = (\lambda_1, \dots \lambda_N) \in \mathrm{dom}(\varphi^*)$.

This result enables one to obtain some new inequalities in uniformly complete vector lattices.

References

1. *Kutateladze S. S., Rubinov A. M.* Minkowski Duality and Its Applications.— Novosibirsk: Nauka, 1976.
2. *Kusraev A. G.* Functional calculus and Minkowski duality on vector lattices // Vladikavkaz. Math. J.—2009.—Vol. 11.—P. 31–42.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 101–102.

АСИМПТОТИКА ПОЛИНОМОВ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ДИСКРЕТНЫХ СЕТКАХ

М. Г. Магомед-Касумов (Россия, Махачкала; ЮМИ)

В прикладных задачах, таких, как обработка и сжатие изображений, часто применяются разложения в суммы Фурье по различного рода ортогональным системам, включая разложения по полиномам, ортогональным на дискретных сетках. При практической реализации этих разложений появляются вопросы, связанные со скоростью сходимости рассматриваемых сумм Фурье, с устойчивостью применяемых вычислительных процедур и др. В тех задачах, в которых отдается предпочтение разложениям по ортогональным полиномам, указанные выше проблемы приводят к исследованию асимптотических свойств самих ортогональных полиномов, применяемых в качестве базисов разложений. Настоящая работа посвящена исследованию этой задачи для полиномов по двум переменным, ортогональных на дискретных сетках, принадлежащих квадрату $[-1,1]^2$, с полиномиальными весами. В случае, когда весовая функция $\rho(x,y) = \rho_1(x)\,\rho_2(y)$, где $\rho(x)$, $\rho(y)$ — положительные веса одной переменной, задача об асимптотических свойствах соответствующих ортогональных полиномов легко сводится к аналогичной, хорошо исследованной задаче для ортогональных полиномов одной переменной. В нашей работе рассматривается случай, когда $\rho(x,y)$ представляет собой произвольный алгебраический полином двух переменных, удовлетворящий условию $\rho(x,y) > 0$ для любых $(x,y) \in [-1,1]^2$.

Пусть $\Omega = [-1,1]^2$, $\Omega_{N,M} = \big\{(x_i,y_j) : -1 = x_0 < \ldots < x_{N-1} = 1, -1 = y_0 < \ldots < y_{M-1} = 1\big\}$. Рассмотрим скалярное произведение

$$(f,g)_c = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,g(x,y)\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

и его дискретный аналог

$$(f,g)_d = \sum_{(x_i,y_j)\in\Omega_{N,M}} f(x_i,y_j)\,g(x_i,y_j)\,\rho(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$.

Через $L_2(\Omega, \rho)$ обозначим пространство функций, интегрируемых с квадратом на области Ω с весом ρ

$$L_2(\Omega, \rho) = \left\{ f(x,y) : \iint\limits_{\Omega} f^2(x,y)\,\rho(x,y)\,dx\,dy < \infty \right\}.$$

Пусть $f_0(x,y)$, $f_1(x,y)$, $\ldots$, $f_{NM-1}(x,y)$ — последовательность линейно независимых функций из $L_2(\Omega, \rho)$. Ограничимся случаем, когда $f_k(x,y)$ являются полиномами от двух переменных. Ортогонализуя эту систему относительно скалярных произведений $(f,g)_c$ и $(f,g)_d$, получим ортонормированные системы $\left\{P_k(x,y)\right\}_{k=0}^{NM-1}$ и $\left\{P_k^{N,M}(x,y)\right\}_{k=0}^{NM-1}$ соответственно.

Цель работы состояла в получении асимптотической формулы $P_k^{N,M}(x,y) = P_k(x,y) + \upsilon_k^{N,M}(x,y)$.

Прежде чем сформулировать результат, введем некоторые обозначения. Пусть $\lambda_x = \max\limits_i \Delta x_i$, $\lambda_y = \max\limits_j \Delta y_j$. Через n и m обозначим степени полинома $P_k^2(x,y)\,\rho(x,y)$ по переменным x и y соответственно, а через $æ_n$ и $æ_m$ — константы в интегральном неравенстве Маркова для полиномов степени n и m соответственно.

Теорема. *Пусть* $0 < a < 1$, $3\lambda^2 æ^2 n^2 m^2 + \lambda æ(n^2 + m^2) < 1 - a$. *Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$P_k^{N,M}(x,y) = P_k(x,y) + \upsilon_{n,m}^{N,M}(x,y),$$

в которой для остатка $\upsilon_{n,m}^{N,M}(x,y)$ *справедлива оценка*

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\upsilon_{n,m}^{N,M}(x,y)\right)^2 \rho(x,y)\,dx\,dy \leqslant \frac{3}{a}\Big(3\lambda^2 æ^2 n^2 m^2 + \lambda æ(n^2 + m^2)\Big),$$

где $\lambda = \max\{\lambda_x, \lambda_y\}$, $æ = \max\{æ_n, æ_m\}$.

Литература

1. *Нурмагомедов А. А.* Асимптотические свойства многочленов $p_n^{\alpha,\beta}(x)$, ортогональных на произвольных сетках в случае целых α и β // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2010.—Т. 10, вып. 2.—С. 10–19.
2. *Суетин П. К.* Ортогональные многочлены по двум переменным.—М.: Наука, 1988.—384 с.
3. *Шарапудинов И. И.* Дискретные ортогональные многочлены. Теория и приложения.—Махачкала: ДНЦ РАН, 2006.—259 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 103–104.

UNITARY SELF-ADJOINT PROJECTIONS AS QUANTUM LOGIC

M. S. Matvejchuk (Russia, Kazan; Research Institute of Mathematics and Mechanics)

One of the basic problems related to the propositional calculus approach to the foundations of quantum mechanics is the description of probability measures (called states in physical terminology) on the set of experimentally verifiable propositions regarding a physical system. The set of propositions form an orthomodular partial ordered set, where the order is induced by a relation of implication, and called a *quantum logic*. An impotent interpretation of quantum logic is the set $B(H)^{pr}$ of all orthogonal projections of a Hilbert space H. The problem of construction of a quantum field theory leads to the indefinite metric spaces. In this case, the set $\mathcal{P}$ of all J-orthogonal projections serves to be an analog to the logic $B(H)^{pr}$. In the paper we show that any unitary self-adjoint logic is a sum logics of type $B(H)^{pr}$ and type $\mathcal{P}$.

Put $M' := \{B \in B(H) : BA = AB,\ BA^* = A^*B,\ \forall A \in M\}$, where $M \subseteq B(H)$. Let M^{pr} be the set of all orthogonal (=self-adjoint) projections (=idempotens) from M. Let U be an unitary operator on H. Let us define the product $\langle x, y\rangle := (Ux, y)$ for all $x,\ y \in H$. Note $\langle x, y\rangle \neq \overline{\langle y, x\rangle}$ in general. For all $B \in B(H)$ there exists unique operator $B^{\#} \in B(H)$ (U-*adjoint to* B) such that $\langle Bx, y\rangle = \langle x, B^{\#}y\rangle\ x, y \in B(H)$. It is clear that $B^{\#} = UB^*U^*$. In general $(B^{\#})^{\#} \neq B$. An operator $A \in B(H)$ is said to be U-self-adjoint if $A = A^{\#}$. Let us denote by $B^U(H)$ the set of all U-self-adjoint operators. It is clear that $A = A^*$ and $A \in \{U, U^*\}' \Rightarrow A \in B^U(H)$. Let $\mathcal{M}$ be a von Neumann algebra on H (i. e. $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$) and $U \in \mathcal{M}$. Put $\mathcal{M}^U := \mathcal{M} \cap B^U(H)$. Put $\mathcal{P}_U := \{p \in B(H) : p^2 = p = p^{\#}\}$ and $\mathcal{P}_U(\mathcal{M}) := \mathcal{M} \cap \mathcal{P}_U$. With respect to: the ordering $p \leq q$ iff $p = pq$ ($= qp$), orthogonal relation $p \perp q$ iff $pq = 0$, and the orthocomplementation $p \to p^{\perp} := I - p$ the set $\mathcal{P}_U(\mathcal{M})$ is a logic. If $p \in \mathcal{P}_U(\mathcal{M}) \Rightarrow p = p^*$ then $\mathcal{P}_U(\mathcal{M})$ is said to be *spherical logic*, see [1]. If $U = U^*$, $U \neq \pm I$ and central covers in $\mathcal{M}$ of $P^+ := (1/2)(I + U)$ and $P^- := (1/2)(I - U)$ are equal to I the logic $\mathcal{P}_U(\mathcal{M})$ is said to be *hyperbolic logic* [2] and the product $[x, y] := (Ux, y)$ is said to be *indefinite metric*. Let $R(U) := \{U, U^{-1}\}''$ and $R(U^2) := \{U^2, U^{-2}\}''$.

Proposition 1. *Let $A \in B(H)$. $(A^{\#})^{\#} = A$ iff $A \in R'(U^2)$.*

Corollary 2. $B^U(H) \subset R'(U^2)$.

Any operator $A \in R'(U^2)$ is the sum of U-self-adjoint operators $A_{\Re} := (1/2)(A + A^{\#})$ and $A_{\Im} := (1/2i)(A - A^{\#})$.

Lemma 3. *If $A \in B^U(H)$, then $A^* \in B^U(H)$, $A = U^*A^*U$ and $PAP \in B^U(H)$ for any $P \in R^{pr}(U)$.*

Corollary 4. *Let $A \in B^U(H)$. Then $A + A^* \in R'(U)$.*

Proposition 5. *Let $A \in B(H)$ and let $P \in B(H)^{pr}$ be such that $P^{\perp}(A + A^*)P = 0$. Then $|P^{\perp}AP|^2 = (PAP)^2 - PA^2P = (PA^*P)^2 - P(A^*)^2P$.*

Proposition 6. *Let $A \in B^U(H)$ and let $P \in (R'(U))^{pr}$ be such that $P^{\perp}(A + A^*)P = 0$. Let $P^{\perp}AP = w|P^{\perp}AP|$ be the polar decomposition for $P^{\perp}AP$. Then $|P^{\perp}AP| \in R'(U)$ and $U^*wU = UwU^* = -w$, $w \in R'(U^2)$.*

It is clear that $U^*w^*U = -w^*$ and $U^*(w^*w)U = w^*w \in R'(U)$. Let W be the set of all partial isometries w from polar decomposition $P^{\perp}AP = w|P^{\perp}AP|$ for all $A \in B^U(H)$ and for all $P \in R^{pr}(U)$.

Proposition 7. *$W \neq \{0\}$ iff $R(U) \backslash R(U^2) \neq \emptyset$.*

Proposition 8. *Let $G := \{p \in R^{pr}(U^2) : \forall q \in R^{pr}(U),\ q \le p \Rightarrow q \in R(U^2)\}$ and $E := \vee\{p : p \in G\}$. Then $AE = EA = A^*E$, $\forall\, A \in B^U(H)$.*

Corollary 9. *$Ep = pE \in \mathcal{P}_U$ for all $p \in \mathcal{P}_U$.*

Lemma 10. *$wE = 0$ for all $w \in W$.*

Proposition 11. *$E^{\perp} \neq 0$ iff $R(U^2) \neq R(U)$. $E^{\perp} = \vee \{w^*w : w \in W\}$.*

Corollary 12. *Let E be from Proposition 8. Then E is the greatest projection from $R(U^2)$, for which $AE = A^*E$ for all $A \in B^U(H)$.*

Let $U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} e_U(d\lambda)$ be the spectral resolution for U. Let us define the operator $J_U := e_U([0, \pi)) - e_U([\pi, 2\pi))$.

Proposition 13. $\mathcal{P}_U = \mathcal{P}_{J_U}(R'(U^2))$.

Put $\mathcal{P}_U^{or} := \{p \in \mathcal{P}_U : p \le E\}$ and put $\mathcal{P}_U^{h} := \{p \in \mathcal{P}_U : p \le E^{\perp}\}$. $\mathcal{P}_U^{or}$ is the spherical logic with the greatest projection E and $\mathcal{P}_U^{h}$ is the hyperbolic logic with the greatest projection $E^{\perp}$. In addition, $\mathcal{P}_U = \mathcal{P}_U^{or} + \mathcal{P}_U^{h}$.

References

1. *Matvejchuk M. S.* Unitary self-adjoint logics of projections // Intern. J. Theoret. Phys.—1998.—Vol. 37, № 1.—P. 103–107.
2. *Matvejchuk M. S.* Semi constant measures on hyperbolic logics // Proceed. Amer. Math. Society.—1997.—Vol. 125, № 1.—P. 245–250.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 105–107.

НОРМАЛЬНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА ЙОРДАНОВЫХ ТРОЙНЫХ СИСТЕМАХ

С. Д. Мусабеков (Узбекистан, Ташкент; ТПИ),
Р. А. Дадаходжаев (Узбекистан, Ташкент; ИМИТ АН РУз)

Важнейшей областью применения йордановых тройных систем является рассматриваемые в комплексном анализе ограниченные симметричные области [1]. Изучение ограниченных симметричных областей в бесконечномерных пространствах привели к понятию JB*-троек. Значение JB*-троек видно из доказанной Каупом (см. [1], теорема 5.4) теоремы, о том что ограниченные симметричные области в комплексных банаховых пространствах (с точностью до биголоморфной эквивалентности) является в точности открытыми единичными шарами JB*-троек. Рассматриваемые нами JBW*-тройки — это такие JB*-тройки, которые как банаховы пространства обладают предсопряженным пространством. В настоящей статье для JBW*-тройки доказываются аналог классической теоремы Витали — Хана — Сакса и теорема о слабой компактности множества нормальных функционалов, что является обобщением результатов работ [2, 3], где рассмотрены JBW-алгебры.

Определение 1. Комплексное векторное пространство U с полуторалинейным отображением: $(x, y) \to x\Box y^*$ из $U \times U$ в пространство $L(U)$ — всех линейных операторов на U, называется *йордановой $*$-тройкой*, если выполняются следующие условия:

1) тройное произведение $\{xy^*z\} = x\Box y^*(z)$ симметрично по x и z;

2) $\big\{uv^*\{xy^*z\}\big\} = \big\{\{uv^*x\}y^*z\big\} - \big\{x\{vu^*y\}^*z\big\} + \big\{xy^*\{uv^*z\}\big\}$, $\forall\, u, v, x, y, z \in U$.

Йорданова $*$-тройка называется *абелевой*, если $\big\{xy^*\{uv^*z\}\big\} = \big\{\{xy^*u\}v^*z\big\}$, для всех $u, v, x, y, z \in U$. Элемент $e \neq 0$ в йордановой $*$-тройке называется *трипотентом*, если $\{ee^*e\} = e$.

Теорема 1 [4]**.** *Пусть U йорданова $*$-тройка и $e \in U$ — трипотент. Тогда U раскладывается в прямую сумму пирсовских компонент: $U = U_1(e) \oplus U_{1/2}(e) \oplus U_0(e)$, где $U_k = U_k(e) = \big\{z \in U : \{ee^*z\} = kz\big\}$, для $k = 0, 1/2, 1$. Таблица умножения для пирсовских пространств* *такова:* $\{U_1 U_0^* U\} = \{U_0 U_1^* U\} = 0$ *и* $\{U_i U_j^* U_k\} \subset U_{i-j+k}$, *причем* $i, j, k \in \{0, 1/2, 1\}$ *и* $U_l = 0$ *для* $l \neq 0, 1/2, 1$.

Трипотенты e и f называется *ортогональными* (обоз. как $e \perp f$), если $e \in U_0(f)$. Напомним, что йорданова $*$-алгебра A, замкнутая по норме, называется JB*-алгеброй, если $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ и $\|\{xx * x\}\| = \|x\|^3$, для всех $x, y \in A$, где $\{xy^* z\} = x(y * z) - y^*(xz) + z(xy^*)$.

Определение 2. Йорданова $*$-тройка U называется JB*-*тройкой*, если тройное произведение непрерывно и оператор $z \square z^* \in L(U)$ является эрмитовым для любого $z \in U$. Это эквивалентно тому, что $\sigma(z \square z^*) \geqslant 0$ и $\|\{zz^* z\}\| = \|z\|^3$, для всех $z \in U$, где $\sigma(\cdot)$ — спектр оператора. JB*-тройка U называется JBW*-*тройкой*, если U обладает предсопряженным пространством U_*, таким, что тройное произведение по каждой компоненте $\sigma(U, U_*)$-непрерывно.

Всякая W$*$-алгебра (соотв. C$*$-алгебра) является JBW$*$-тройкой (соотв. JB$*$-тройкой) относительно произведения $\{xy * z\} = \frac{1}{2}(xy^* z + zy^* x)$, и обратно, всякая JBW$*$-алгебра (соотв. JB$*$-алгебра) с произведением $\{xy^* z\} = x(y * z) - y^*(xz) + z(xy^*)$ является JBW$*$-тройкой (соотв. JB$*$-тройкой). Кроме того, для трипотента e пирсовская компонента $U_1(e)$ с произведением $xy = \{xe^* y\}$ и инволюцией $x \to \{ex^* e\}$ является JBW$*$-алгеброй.

Теорема 2 [4]**.** *Пусть U — JBW*-тройка, U^* (соотв. U_*) — сопряженное (соотв. предсопряженное) пространство к U и пусть $f \in U^*$. Тогда $f \in U_* \Leftrightarrow f(\sum e_i) = \sum f(e_i)$, где $(e_i)_{i \in I}$ — произвольное семейство попарно ортогональных трипотентов.*

Функционал f из U^* называется *нормальным*, если выполняется один из эквивалентных условий теоремы 2. Используя эту теорему для JBW*-тройки доказываются аналог классической теоремы Витали — Хана — Сакса:

Теорема 3. *Пусть $\{\varphi_n\}$ — последовательность функционалов из U_* и пусть $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$, для всех $x \in U$. Тогда $\varphi \in U_*$.*

Используя работы А. Гротендика [5] для JBW*-тройки доказываются теорема о слабой компактности множества нормальных функционалов:

Теорема 4. *Пусть M — ограниченное по норме подмножество U_*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *M — слабо относительно компактно;*

(2) *сужение M на каждую максимальную абелеву подтройку U слабо относительно компактно;*

(3) *для произвольной последовательности* $(e_n) \subset U$ — *ортогональных трипотентов* $\lim_{n\to\infty} f(e_n) = 0$, *равномерно по всем* $f \in M$.

Литература

1. *Kaup W. A.* Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces // Math. Z.—1983.—Vol. 183.—P. 503—529.
2. *Аюпов Ш. А.* Эргодические теоремы для Марковских операторов в йордановых алгебрах // Известия АН УзССР.—1982.—№ 3.
3. *Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И.* Упорядоченные алгебры.—Ташкент: «ФАН», 1983.—192 с.
4. *Horn G.* Klassifikation der JBW*-Tripel vom Typ I.—Tübingen: Eberhard-Karls-Universität, 1984.—113 p.
5. *Grothondieck A.* Sur les applications linearies faiblement compactes d'espaces du mype $C(K)$ // Canad. Math. J.—1953.—Vol. 5.—P. 129.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 108.

МИНИМАЛЬНЫЕ АБСОЛЮТНО ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ РОСТОМ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

Ю. С. Налбандян (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Тематика, связанная с представлением всех функций, аналитических в выпуклой области, рядами экспонент с фиксированной последовательностью показателей, была инициирована А. Ф. Леонтьевым, который получил в ней основополагающие результаты, послужившие Ю. Ф. Коробейнику основой для создания теории абсолютно представляющих систем (АПС). Одно из центральных мест в данном направлении исследований занимает построение конкретных примеров и описание всех АПС экспонент или обобщенных экспонент, которые в определенном смысле минимальны для данного пространства. Этот вопрос изучался в работах А. Ф. Леонтьева, Ю. Ф. Коробейника, В. В. Напалкова, Ю. Н. Фролова, А. В. Абанина, А. Б. Секерина и др. Следует отметить, что все известные нам на сегодняшний день значимые результаты по минимальным системам касаются пространств Фреше.

В докладе речь пойдет о минимальных АПС экспонент для пространства $A^{-\infty}(D)$ аналитических в области D функций с полиномиальным ростом вблизи ее границы ∂D, которое имеет двойственную к пространствам Фреше топологическую структуру и строится следующим образом.

Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, $d(\lambda)$ — расстояние от $\lambda \in D$ до границы области D,

$$A^{-n}(D) := \left\{ f \in H(D) : \|f\|_n = \sup_{\lambda \in D} \big|f(\lambda)\big|\big(d(\lambda)\big)^n < +\infty \right\}.$$

Линейное пространство

$$A^{-\infty}(D) := \big\{ f \in H(D) : \exists\, n \in \mathbb{N} : \|f\|_n < \infty \big\}$$

можно наделить естественной топологией индуктивного предела пространств $A^{-n}(D)$, в которой оно является (DFS)-пространством.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 109–110.

ГЕОМЕТРИЯ ТОЧЕК СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ[1]

Ю. Г. Никоноров (Россия, Волгодонск; ВИС ЮРГУЭС, ЮМИ)

Пусть $\gamma : [a,b) \to \mathbb{E}^2$, где $a, b \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, — непрерывная параметрическая кривая на евклидовой плоскости такая, что для любого $t \in (a,b)$ существует ненулевой производный вектор $\gamma'(t)$. Отметим, что этот вектор задает направление касательной к рассматриваемой кривой в точке $\gamma(t)$.

Для каждого $t \in (a,b)$ через $T(t)$ будем обозначать множество таких $\tau \in (a,t]$, что вектор $\gamma'(\tau)$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{\gamma(a)\,\gamma(t)}$. Как хорошо известно и легко доказывается, множество $T(t)$ является непустым для любого $t \in (a,b)$. Через $D(t)$ будем далее обозначать расстояние между точками $\gamma(a)$ и $\gamma(t)$. Пусть также

$$DT(t) = \sup\{D(\tau) \mid \tau \in T(t)\}.$$

Основным объектом нашего исследования является *асимптотика отношения $DT(t)/D(t)$ при $t \to a$*. Для фиксированного t множество точек $T(t) \subset (a,t]$ может быть устроено довольно сложно, что очевидно из геометрической интерпретации этого множества как множества точек $\tau \in (a,t]$ таких, что касательная к кривой γ в точке $\gamma(\tau)$ параллельна хорде $[\gamma(a), \gamma(t)]$. *Например, при $D(t) = 0$ имеет место равенство $T(t) = (a,t]$, и мы полагаем в этом случае $DT(t)/D(t) = \infty$.* Это обусловлено тем, что для некоторого $\tau \in (a,t) \subset T(t)$ выполнено неравенство $D(\tau) > 0$.

Для фиксированного значения t можно подобрать кривую, для которой отношение $DT(t)/D(t)$ равно наперед заданному положительному числу. С другой стороны, понятно, например, что это отношение не может быть больше единицы для всех значений параметра. Гораздо менее очевидный факт состоит в том, что отношение $DT(t)/D(t)$ не может быть меньше определенного положительного

[1]Работа частично поддержана грантом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг., гос. контракт № 02.740.11.0457, грантом № НШ-6613.2010.1 и грантом Российского фонда фундаментальных исследований-БРФФИ, проект № 10-01-90000-Бел-а.

числа для всех значений параметра. Точное утверждение содержит следующая

Теорема 1. *Пусть* $\gamma : [a, b) \to \mathbb{E}^2$ *— произвольная непрерывная параметрическая кривая с ненулевым производным вектором* $\gamma'(t)$ *в каждой точке* $t \in (a, b)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\varlimsup_{t \to a} \frac{DT(t)}{D(t)} \geqslant \frac{1}{e},$$

где, как обычно, $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Нетрудно привести примеры доказывающие неулучшаемость неравенства в этой теореме. Отметим также, что это неравенство имеет локальный характер, поэтому в формулировке теоремы можно заменить область определения $[a, b)$ кривой $\gamma(t)$ на любой промежуток $[a, b_1)$, где $b_1 \in (a, b)$. Также мы можем рассмотреть вместо кривой $\gamma : [a, b) \to \mathbb{E}^2$ кривую $\gamma_1 : [a_1, b_1) \to \mathbb{E}^2$, если $\gamma_1(t) = \gamma\big(g(t)\big)$ для некоторой непрерывной биективной функции $g : [a_1, b_1) \to [a, b)$, обладающей положительной производной на интервале (a_1, b_1). Другими словами, утверждение теоремы имеет отношение к геометрии кривой (как класса попарно эквивалентных параметризованных кривых), а не к определенной выделенной параметризации.

Из теоремы 1 можно вывести ряд результатов (частично известных) об асимптотике точек промежуточного значения в некоторых классических дифференциальных и интегральных теоремах [1–4].

В заключительной части доклада обсуждается ряд нерешенных проблем, которые могли бы стать основой дальнейших исследований в обозначенном направлении.

Литература

1. *Никоноров Ю. Г.* Об интегральной теореме о среднем // Сиб. мат. журн.— 1993.—Т. 34, № 6.—С. 150–152.
2. *Никоноров Ю. Г.* О точных оценках в первой теореме о среднем // Докл. АН.—1994.—Т. 336, № 2.—С. 168–170
3. *Иванов В. В., Никоноров Ю. Г.* Асимптотика точек Лагранжа в формуле Тейлора // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 36, № 1.—С. 86–92.
4. *Никоноров Ю. Г.* Об асимптотике точек среднего значения для некоторых конечно-разностных операторов // Сиб. мат. журн.—2002.—Т. 43, № 3.— С. 644–651.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 111–112.

ОЦЕНКА ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА СУММ ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ

А. А. Нурмагомедов (Россия, Махачкала; ЮМИ)

Пусть α, β — целые неотрицательные числа, $\Omega = \{t_j\}_{j=0}^{N}$ — дискретное множество (сетка), состоящее из конечного числа различных точек отрезка $[-1,1] : -1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = 1$. Через

$$\hat{q}_{k,N}^{\alpha,\beta}(t) = \hat{q}_{k}^{\alpha,\beta}(t;\Omega) \quad (k = 0,1,\ldots,N-1)$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему с весом

$$\rho_N^{\alpha,\beta}(t_j) = \begin{cases} (1-t_j)^{\alpha}(1+t_j)^{\beta}, & \text{если } \alpha > 0,\ \beta > 0; \\ 1, & \text{если } \alpha = \beta = 0; \\ (1-t_j)^{\alpha}, & \text{если } \alpha > 0,\ \beta = 0; \\ (1+t_j)^{\beta}, & \text{если } \alpha = 0,\ \beta > 0 \end{cases}$$

на сетке Ω в следующем смысле $(0 \leqslant n,m \leqslant N-1)$:

$$\left(\hat{q}_{n,N}^{\alpha,\beta}, \hat{q}_{m,N}^{\alpha,\beta}\right) = \sum_{j=0}^{N-1} \rho_N^{\alpha,\beta}(t_j)\, \hat{q}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t_j)\, \hat{q}_{m,N}^{\alpha,\beta}(t_j)\, \Delta t_j = \delta_{nm},$$

где $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 0,1,\ldots,N-1$.

Далее, пусть $\delta_N = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant N-1} \Delta t_j$, $æ_1$ — наименьшая константа в неравенстве типа В. А. Маркова для оценки производных алгебраических многочленов в метрике пространства $L_1[-1,1]$, $C[-1,1]$ — пространство непрерывных функций $f(t)$, заданных на отрезке $[-1,1]$.

Через $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f) = S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,t)$ обозначим частичную сумму функции $f \in C[-1,1]$ порядка n ряда Фурье по системе $\left\{\hat{q}_{k,N}^{\alpha,\beta}(t)\right\}_{k=0}^{N-1}$:

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,t) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_{k,N}^{\alpha,\beta}\, \hat{q}_{k,N}^{\alpha,\beta}(t),$$

где

$$\hat{f}_{k,N}^{\alpha,\beta} = \sum_{j=0}^{N-1} \rho_N^{\alpha,\beta}(t_j)\, f(t_j)\, \hat{q}_{k,N}^{\alpha,\beta}(t_j)\, \Delta t_j,$$

а через

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta} = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} L_{n,N}^{\alpha,\beta}(t),$$

где $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ — функция Лебега сумм $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,t):$

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \rho_N^{\alpha,\beta}(t_j) \left| \sum_{k=0}^{n} \hat{q}_{k,N}^{\alpha,\beta}(t)\, \hat{q}_{k,N}^{\alpha,\beta}(t_j) \right| \Delta t_j.$$

Данная работа посвящена задаче об оценке отклонения частичной суммы $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,t)$ ряда Фурье функции f по системе $\{\hat{q}_{k,N}^{\alpha,\beta}(t)\}_{k=0}^{N-1}$ от самой функции f при $t \in [-1,\,1]$ и $n, N \to \infty$. В этом направлении нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C[-1,1]$, $b > 0$, $0 < a \leqslant \big\{(1-b)/(4æ_1)\big\}^{1/2}$, $n = O(\delta_N^{-1/5})$. *Тогда справедливо неравенство*

$$L_{n,N} = L_{n,N}^{0,0} \leqslant c\big(a,b\big)n^{1/2}.$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in C[-1,1]$, α, β *— целые положительные числа,* $\lambda = \max\{\alpha,\beta\}$, $n = O(\delta_N^{-1/(2\lambda+4)})$, $b > 0$, $0 < a \leqslant \big\{(1-b)/(4æ_1)\big\}^{1/2}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta} \leqslant c\big(\alpha,\beta,a,b\big)n^{\lambda+1/2}.$$

Литература

1. *Даугавет И. К., Рафальсон С. З.* О некоторых неравенствах для алгебраических многочленов // Вестник ЛГУ.—1974.—№ 19.—С. 18–24.
2. *Нурмагомедов А. А.* Асимптотика многочленов $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t)$, ортогональных на произвольных сетках // Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—Т. 2.—С. 200–212.
3. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.—М.: Физматгиз, 1962.—500 с.
4. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам.—Махачкала: ДНЦ, 2004.—276 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 113–115.

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ЛОКАЛЬНОГО ПРИНЦИПА ГОХБЕРГА — КРУПНИКА

А. Э. Пасенчук (Россия, Новочеркасск; ЮРГТУ (НПИ))

В работах И. Б. Симоненко (см. [1] и цитируемые там работы) был разработан локальный метод исследования операторов, инвариантных относительно сдвига. Позднее появились разнообразные варианты локального принципа. Все известные нам варианты локального принципа ориентированы на его применение в рамках банаховых алгебр. Ниже предлагается новая форма локального принципа Гохберга — Крупника, в которой условия топологического характера являются более мягкими, чем в оригинальном варианте [2].

Пусть $\tilde{\mathrm{A}}$ — топологическая алгебра с единицей e, а A — подалгебра алгебры $\tilde{\mathrm{A}}$, имеющая общую с ней единицу. Относительно топологии в алгебре $\tilde{\mathrm{A}}$ будем предполагать, что она имеет счетную фундаментальную систему окрестностей нуля и, если последовательность $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$, то, начиная с некоторого n, все элементы $e + \alpha_n$ обратимы в $\tilde{\mathrm{A}}$ $\big(e + \alpha_n \in G\tilde{\mathrm{A}}\big)$.

Множество элементов $M \subset \tilde{\mathrm{A}}$ назовем локализующим классом в алгебре A, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $0 \notin M$;

2) для любых элементов $a_i \in M$, $i = 1, 2$, найдется элемент $a \in M$, так, что $a_i a = a a_i = a$, $i = 1, 2$.

Замечание. Вообще говоря, элементы локализующего класса не обязаны содержаться в алгебре A.

Определение 1. Элемент $x \in \mathrm{A}$ называется M-обратимым слева в алгебре $\tilde{\mathrm{A}}$, если найдутся $z \in \tilde{\mathrm{A}}$, $a \in M$, так, что $zxa = a$.

Определение 2. Элементы $x, y \in \mathrm{A}$ назовем M-эквивалентными слева, если для любого $z \in \tilde{\mathrm{A}}$ найдется элемент $a_z \in M$, так, что элемент $e - z(x - y)a_z$ M-обратим слева в алгебре $\tilde{\mathrm{A}}$.

Аналогичным образом определяются понятия M-обратимости и $M-$эквивалентности справа.

Определение 3. Элементы $x, y \in \mathrm{A}$ назовем M-эквивалентными, если они M-эквивалентны и слева и справа.

Отметим, что вместо условия об M-обратимости слева (справа) элемента $e - z(x-y)a_z$ определения 2 в локальном принципе Гохберга — Крупника [2, с. 353] используется условие топологического характера: $\inf\limits_{a \in M} \|(x-y)a\| = 0$.

Ниже мы формулируем и доказываем все определения и утверждения лишь для M-эквивалентности слева, имея в виду, что они очевидным образом модифицируются на случаи M-эквивалентности справа и M-эквивалентности.

Лемма 1. *Пусть M — локализующее семейство в алгебре* A. *Если элемент $x \in$ A M-обратим слева в алгебре $\tilde{\mathrm{A}}$ и $y \in$ A M-эквивалентен ему, то и элемент y M-обратим слева в алгебре $\tilde{\mathrm{A}}$.*

Определение 4. Систему локализующих классов $\{M_s\}_{s \in S}$ назовем покрывающей, если из всякого множества $\{a_s\}_{s \in S}$, $a_s \in M_s$ можно выделить конечное подмножество элементов $\{a_{s_k}\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, сумма которых обратима: $\sum_{k=1}^{n} a_{s_k \in G\tilde{\mathrm{A}}}$.

Теорема 1. *Пусть $\{M_s\}_{s \in S}$ — покрывающая система локализующих классов. Для того, чтобы элемент $x \in$ A, коммутирующий с каждым элементом из $\cup_{s \in S} M_s$, был обратим слева (справа) в алгебре $\tilde{\mathrm{A}}$ необходимо и достаточно, чтобы он был M_s-обратим слева (справа) для любого $s \in S$.*

Следствие. *Пусть $\{M_s\}_{s \in S}$ — покрывающая система локализующих классов, алгебра* A *наполнена в $\tilde{\mathrm{A}}$ и элемент x M_s-эквивалентен элементу y_s, $s \in S$. Если элемент x коммутирует с каждым элементом из $\cup_{s \in S} M_s$, то x — обратим слева (обратим справа, обратим) в алгебре* A *тогда и только тогда когда для любого $s \in S$ элемент y_s — M_s-обратим слева (M_s-обратим справа, M_s-обратим).*

Пример. Пусть $m \in Z_+$, Z — группа целых чисел, $Z_+ = \{n \in Z : n \geqslant 0\}$, B — банахово пространство. Для $m \in Z_+$ и $p \in [1, \infty)$ положим $l_p\{m, B\} = \left\{\varphi = \{\varphi_j\}_{j \in Z} : \varphi_j \in B,\ \|\varphi\|^p = \sum_j (|j|+1)^{mp} \|\varphi_j\|^p\right\}$. Через $P_\pm$ обозначим стандартные операторы проектирования, действующие в $l_p\{m, B\}$. Введем также банахову алгебру функций $W_m(\Gamma, \mathrm{End}B) = \left\{A(\xi) = \sum_j a_j \xi^j,\ a_j \in \mathrm{End}B,\ \xi \in \Gamma;\ \|A(\xi)\| = \|\{a_j\}\|_{l_1\{m,B\}}\right\}$.

В пространстве $l_p\{m, B\}$ рассмотрим оператор $\Pi = C(A(\xi)) P_+ + C(B(\xi)) P_-$, где $(C(A(\xi))\phi)_j = \sum_k a_{j-k}\phi_k$, $j \in Z$, а $A(\xi), B(\xi) \in W_m(\Gamma, \mathrm{End}B)$.

Теорема 2. *Если оператор* $\Pi : l_p\{m, B\} \to l_p\{m, B\}$ *— нетеров, то* $A(\xi), B(\xi) \in GW_m(\Gamma, EndB)$.

Теорема 2 доказывается применением описанного выше локального принципа с использованием подходящего локализующего семейства, состоящего из семейств операторов свертки с символами из $W_m(\Gamma, \mathrm{End}B)$.

Литература

1. *Симоненко И. Б.* Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих.—Ростов-на-Дону: Изд. ЦВВР, 2007.—120 с.
2. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.—Кишинев: Штиинца, 1973.—426 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 116–117.

СУЩЕСТВОВАНИЕ АБСОЛЮТНО ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ГЛАДКОСТЬЮ

С. В. Петров (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
А. В. Абанин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Задача о представлении аналитических функций рядами простейших дробей $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z-\lambda_k}$ (ряды Вольфа — Данжуа), где $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фиксированная последовательность комплексных чисел, исследовалась в работах Ж. Вольфа, Т. А. Леонтьевой, Ю. Ф. Коробейника, Р. В. Сибилева, В. Б. Шерстюкова и др. (см. [1, 2]). Ю. Ф. Коробейником был установлен принципиально важный результат, в соответствии с которым нет ни одной последовательности Λ, для которой по соответствующей системе простейших дробей $\mathcal{F}_\Lambda := \{1/(z-\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$ можно было бы представить произвольную аналитическую в данной области функцию. Другими словами, им было показано, что ни для одной области D комплексной плоскости в пространстве $H(D)$ всех функций, аналитических в D, не существует ни одной представляющей системы простейших дробей.

В докладе будут представлены новые результаты, в соответствии с которыми в близких к $H(D)$ по набору элементов и топологической структуре пространствах $A_\Phi(\overline{D})$ функций, аналитических в D и имеющих заданную весовой последовательностью Φ степень гладкости на ее границе, при определенных ограничениях на D и Φ всегда имеется хотя бы одна (а значит, и бесконечно много) абсолютно представляющих систем простейших дробей. Решающую роль в исследовании играют результаты О. В. Епифанова о дискретизации слабо достаточных множеств [3] и установленное ранее авторами доклада удобное для приложений описание сопряженного с $A_\Phi(\overline{D})$ пространства [4].

Напомним определение $A_\Phi(\overline{D})$. Пусть $A^\infty(\overline{D})$ — пространство всех функций, аналитических в ограниченной односвязной области

D и бесконечно дифференцируемых вплоть до ее границы ∂D, а $\Phi = (\varphi_n(t))_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая по n последовательность выпуклых на $[0,\infty)$ неотрицательных функций. Полагаем

$$A_{\varphi_n}(\overline{D}) := \left\{ f \in A^{\infty}(\overline{D}) : \ \|f\|_{\varphi_n} = \sup_{z\in D} \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{\left|f^{(k)}(z)\right|}{k! \ e^{\varphi_n(k)}} < \infty \right\},$$

и образуем пространство $A_{\Phi}(\overline{D}) := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\varphi_n}(\overline{D})$, наделенное топологией пространства Фреше, задаваемой набором норм $\left(\|\cdot\|_{\varphi_n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Литература

1. *Коробейник Ю. Ф.* К вопросу о разложении аналитических функций в ряды по рациональным функциям // Мат. заметки.—1982.—Т. 31.—№ 5.—С. 723–737.
2. *Шерстюков В. Б.* Нетривиальные разложения нуля и представление аналитических функций рядами простых дробей // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48.—№ 2.—С. 458–473.
3. *Епифанов О. В.* Вариации слабо достаточных множеств в пространствах аналитических функций // Изв. вузов. Математика.—1986.—№ 7.—С. 50–56.
4. *Абанин А. В., Петров С. В.* Пространства аналитических функций с заданной граничной гладкостью и их сопряженные // Мат. форум. Т. 1. Исследования по мат. анализу.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2008.—С. 16–23.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 118–119.

ОЦЕНКА ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА ДЛЯ ЧАСТИЧНЫХ СУММ СМЕШАННОГО РЯДА ПО ПОЛИНОМАМ ЛАГЕРРА

С. Я. Пирметова (Россия, Махачкала; ДГУ)

Пусть $f \in W^r_{[0;\infty)}$, где через $W^r_{[0;\infty)}$ мы обозначим множество всех r-раз непрерывно дифференцируемых функций, заданных на $[0;\infty)$ и таких, что $e^{-\frac{x}{2}}|f(x)| \leqslant 1$ $(0 \leqslant x < \infty)$. Тогда мы можем рассмотреть смешанный ряд по полиномам Лагерра, который имеет следующий вид [1]:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)\frac{x^\nu}{\nu!} + x^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^0_{r,k}}{(k+1)_r} L^r_k(x). \tag{1}$$

Мы рассмотрим частичные суммы следующего вида:

$$\mathcal{L}^0_{n+r}(f,x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)\frac{x^\nu}{\nu!} + x^r \sum_{k=0}^{n} \frac{f^0_{r,k}}{(k+1)_r} L^r_k(x). \tag{2}$$

В нашей работе исследуется задача о приближении функции f смешанными суммами вида (2).

Введем следующую величину:

$$E^r_m(f) = \inf_{p_m} \sup_{x\in[0,\infty)} e^{-x/2}x^{-r/2+1/4}|f(x) - p_m(x)|, \tag{3}$$

— наилучшее приближение функции $f(x)$ алгебраическими полиномами степени m в рассматриваемой метрике, удовлетворяющими условиям:

$$\big(p_m(x)\big)\big|^{(\nu)}_{x=0} = f^{(\nu)}(0) \quad (0 \leqslant \nu \leqslant r-1). \tag{4}$$

Тогда можно установить следующее неравенство:

$$\begin{gathered} e^{-x/2}x^{-(r-m)/2+1/4}\Big|f^{(m)}(x) - \big(\mathcal{L}^0_{n+r}(f,x)\big)^{(m)}\Big| \leqslant \\ \leqslant E^{r-m}_{n+r-m}\big(f^{(m)}\big)\Big[1 + x^{(r-m)/2+1/4}\, l^{r-m}_n(x)\Big], \end{gathered} \tag{5}$$

где $l_n^r=\int_0^\infty t^{r/2-1/4}e^{-t+\frac{x}{2}}\left|\mathcal{K}_n^r(x,t)\right|dt$, $\mathcal{K}_n^r(x,t)=\sum_{k=0}^n\frac{L_k^r(x)L_k^r(t)}{(k+1)_r}$.

Это неравенство приводит к задаче об оценке величины l_n^r.

Получена следующая оценка:

Теорема 1. *Пусть* $s=s_n=4n+2r+2$, $r\geqslant 1$. *Тогда имеют место оценки*

$$l_n^r(x)\leqslant c(r)\begin{cases} n^{r/2+1/4}\ln(n+1), & 0\leqslant x\leqslant 3/s,\\ x^{-r/2-1/4}\ln(n+1), & 3/s\leqslant x\leqslant s/2,\\ x^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\left[\ln(n+1)+\left(\frac{x}{s^{1/3}+|x-s|}\right)^{1/4}\right], & s/2\leqslant x\leqslant 3s/2,\\ n^{-r/2+5/4}\,e^{-x/4}, & 3s/2\leqslant x.\end{cases}$$

При $x=0$ установлена неулучшаемость оценки функции Лебега частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лагерра по порядку. Нами получена следующая оценка:

Теорема 2. *Пусть* $x=0$, *тогда имеет место следующая оценка*

$$l_n^r(0)\asymp c(r)n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\ln(n+1)\quad(n=1,2,\ldots).$$

Выражаю благодарность своему научному руководителю Шарапудинову И. И. за поставленную задачу, а также за ряд полезных замечаний.

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам.— Махачкала: ДНЦ РАН, 2004.—276 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 120–121.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В СЕЧЕНИЯХ БАНАХОВЫХ РАССЛОЕНИЙ[1]

М. А. Плиев (Россия, Владикавказ; ЮМИ, СОГУ)

В последние годы теория банаховых расслоений все больше привлекает внимание исследователей [1–4]. Вместе с тем об операторах, действующих в пространствах таких сечений, известно мало. В настоящем докладе будет рассказано о некоторых продвижениях в этом направлении. Доклад буде разбит на две части.

Первая часть — проблема Банаха — Стоуна и банаховы расслоения.

Будем говорить, что оператор T удовлетворяет свойству $\mathcal{P}$, если для любого $f \in C(Q, \mathcal{X})$

$$(Tf)(s) \neq 0 \quad \forall\, s \in K \;\Leftrightarrow\; (f)(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in Q.$$

Теорема 1. *Пусть $T : C(Q, \mathcal{X}) \to C(K, \mathcal{Y})$ — изоморфизм банаховых решеток со свойством $\mathcal{P}$. Тогда компакты Q и K гомеоморфны и оператор T может быть записан в виде*

$$(Tf)(s) = H(s)f(\psi(s)) \quad \forall\, f \in C(Q, \mathcal{X}),\ s \in K,$$

где $\psi : K \to Q$ — гомеоморфизм компактов Q и K, а H — гомоморфизм НБР $(Q, \mathcal{X})$ и $(K, \mathcal{Y})$, где $s \mapsto H(s) \in \mathfrak{L}\left(\mathcal{X}_{\psi(s)}, \mathcal{Y}_s\right)$. Если, кроме того, $(Q, \mathcal{X})$ и $(K, \mathcal{Y})$ — насыщенные НБР над экстремальными компактами Q и K, то $\|T\| = \sup\limits_{s \in K} \|H(s)\|$.

Будем полагать, что линейный оператор $T : C(K, \mathcal{X}) \to C(Q, \mathcal{Y})$ *сохраняет дизъюнктность*, если для любых $f, g \in C(K, \mathcal{X})$ таких, что $\|f(\cdot)\|_{\mathcal{X}(\cdot)} \|g(\cdot)\|_{\mathcal{X}(\cdot)} = 0$, справедливо $\|Tf(\cdot)\|_{\mathcal{Y}(\cdot)} \|Tg(\cdot)\|_{\mathcal{Y}(\cdot)} = 0$. Пусть $T : C(K, \mathcal{X}) \to C(Q, \mathcal{Y})$ — линейная биекция. Будем говорить, что оператор T обладает свойством $\mathcal{D}$, если T и T^{-1} сохраняют дизъюнктность.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-00442-а.

Теорема 2. *Пусть $T : C(Q, \mathcal{X}) \to C(K, \mathcal{Y})$ — линейная биекция со свойством $\mathcal{D}$. Тогда оператор T может быть записан в виде*

$$(Tf)(s) = H(s)f(\psi(s)) \quad \forall\, f \in C(Q, \mathcal{X}),\ s \in K,$$

где $\psi : K \to Q$ — гомеоморфизм компактов Q и K, а H — гомоморфизм НБР $(Q, \mathcal{X})$ и $(K, \mathcal{Y})$, где $s \mapsto H(s) \in \mathfrak{L}\left(\mathcal{X}_{\psi(s)}, \mathcal{Y}_s\right)$. Если, кроме того, $(Q, \mathcal{X})$ и $(K, \mathcal{Y})$ — насыщенные НБР над экстремальными компактами Q и K, а T — ограниченный оператор, то сечение $H(s)$ ограничено для всех $s \in K$ и $\|T\| = \sup\limits_{s \in K} \|H(s)\|$.

Вторая часть доклада — операторы в пространствах измеримых сечений.

Теорема 3. *Пусть $T : E(\mathcal{X}) \to F(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}^\star)$ — линейный мажорируемый оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1\) *T допускает слабое интегральное представление;*

2\) *какая-нибудь мажоранта оператора T допускает интегральное представление;*

3\) *если $(v_n)_{n=1}^\infty$ — ограниченная последовательность в $E(\mathcal{X})$ и (v_n) сходится к нулю по мере, то последовательность (Tv_n) сходится к нулю почти всюду.*

Теорема 4. *Пусть $T : E(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ — произвольный (bo)-непрерывный функционал. Тогда найдется единственное с точностью до μ-эквивалентности измеримое сечение $w \in E'(\mathcal{X}^\star)$ такое, что для любого $E(\mathcal{X})$ справедлива формула*

$$Tv = \int\limits_A \left\langle w(t), v(t) \right\rangle d\mu(t). \tag{1}$$

Литература

1. *Ганиев И. Г.* Решеточные гомоморфизмы в пространствах Банаха — Канторовича // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, вып. 1.—С. 37–41.
2. *Гутман А. Е., Коптев А. В., Попов А. И.* Конечная представимость в слоях просторных банаховых расслоений // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 1.—С. 39–45.
3. *Гутман А. Е., Коптев А. В.* Пространства CD_0-функций и удвоение по Александрову // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 1.—С. 39–45.
4. *Кусраев А. Г.* О теореме типа Штрассена для измеримых селекторов // Владикавк. мат. журн.—2006.—Т. 6, вып. 8.—С. 32–37.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 122.

DOMINATED OPERATORS ON CD_0–SECTIONS OF BANACH BUNDLES

Faruk Polat (Turkey, Elazig; Firat University)

In a recent paper by Polat [1], some properties and dominated operators on the space $CD_0(Q, E) = C(Q, E) + c_0(Q, E)$ whose elements are the sums of continuous E-valued and discrete E-valued functions where Q is a compact Hausdorff space without isolated points and E is a Banach space were discussed in the context of Banach spaces. Here, we prove some analogous results for Banach bundles (these may have a Banach space as fiber as in [3] and [2]), our methods point out some generalizations of the theorems obtained by Polat.

References

1. *Polat F.* Dominated operators on some lattice-normed spaces // Proceedings of VI. Internat. Conf. on Order Anal. and Math. Modelings.—2008.—Vol. 1.—P. 177–188.
2. *Gutman A. E., Koptev A. V.* Spaces of CD_0 functions and CD_0 sections of Banach bundles // Siberian Electronic Math. Reports.—2009.—№ 6.—219–242.
3. *Hoim T., Robbins D. A.* Section spaces of Banach bundles which generalize some function spaces // Siberian Advances in Math.—2006.—Vol. 16, № 3.—71-81.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 123–125.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. Г. Рябых (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Г. Ю. Рябых (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Пространством Харди (Бергмана) назовем множество функций $\{x(z)\}$, аналитических в круге $|z| < 1$, с конечной нормой $\big(\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}\big)$:

$$\|x\|_{H_1} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} |x(t)|\, d\vartheta \left(\|x\|_{B_1} = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{D} |x(z)|\, dx\, dy \right).$$

Функцию f из нормированного пространства X назовем экстремальной для $l \in X^*$, если $l(f) = \|l\|$, а $\|f\| = 1$.

В дальнейшем функционал над H_1 определим формулой $l_\omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} x(t)\, \overline{\omega(t)}\, d\vartheta$, $\omega \in L_\infty$.

Функционал над пространством Бергмана определим таким образом: $l_\omega(x) = \frac{1}{\pi} \iint_D x(z)\, \overline{\omega(z)}\, d\sigma(z)$, $x \in B_1$, $\omega \in L_\infty(D)$.

Известны следующие достаточные условия существования э.ф.:

в $H_1 :\ \omega \in VMO$;

в $B_1 :\ \omega$ принадлежит малому пространству Блоха.

Э.ф. пространства B_1, если существуют, то единственны, э.ф. функционалов над пространством H_1 могут быть не единственными.

Теорема 1. *Для того, чтобы у функционала $l_\omega \in H_1^*$, $\omega(0) = 0$, $\omega \in VMO \cap L_\infty$, существовала экстремальная функция, необходимо и достаточно, чтобы число $\|l_\omega\|^2$ было наибольшим собственным числом оператора*

$$T(y)(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} y(t)\, \overline{\omega}(t) \frac{\omega^+(t) - \omega^+(\zeta)}{t - \zeta}\, dt.$$

При этом любую экстремальную функцию можно представить в виде $\frac{\zeta \Phi \Psi}{\|\Phi\Psi\|_1}$, где Φ — нетривиальное решение уравнения $\|l\|^2 y = T(y)$ в пространстве H_2, а $t\Psi$ — проекция функции $\frac{1}{\|l\|}\overline{\Phi}\omega$ на H_2^0.

Замечание. Если ω рациональная функция с полюсами вне $\overline{D}$, то э.ф. может быть вычислена в конечном виде.

Теорема 2. *Пусть f — э.ф. функционала $l_\omega \in B_1^*$, $\omega \in AC^1$. В этом случае она представима в виде $f(z) = F^2(z)\prod_k \frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}$, $F \in H_2$, $0 \leqslant |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots |a_n| \leqslant \ldots < 1$, $a_m \neq a_j$, $m \neq j$, причем, F и $b(z) = \prod_k \frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}$ удовлетворяют системе уравнений:*

$$\pi\|l\|\overline{F(t)} = \iint\limits_D \frac{\bar{\omega}(z)\,F(z)\,b(z)\,d\sigma}{(1-\bar{t}z)^2} + \frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{\bar{\omega}(z)\,F(z)\,b'(z)\,d\sigma}{(1-\bar{t}z)},$$

$$\pi\|l\|\overline{F(t)\,b(t)} = \iint\limits_D \frac{\bar{\omega}(z)\,F(z)\,d\sigma}{(1-\bar{t}z)^2} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_k \frac{1-|a_k|^2}{1-a_k\bar{t}}\iint\limits_D \frac{\bar{\omega}(z)\,F(z)\,d\sigma}{(1-\bar{a}_k z)(1-\bar{t}z)}.$$

Замечание. Если ω — рациональная функция с полюсами вне $\overline{D}$, то можно указать вид э.ф.

Литература

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции.—М.: Мир, 1984.—469 с.
2. *Захарюта В. П., Юдович В. И.* Общий вид линейного функционала в H_p' // УМН.—1964.—Т. XIX, № 2(116).—С. 139–142.
3. *Рябых В. Г.* Линейные ограниченные отображения в A_p // Известия СКНЦ ВШ.—1982.—№ 3.—С. 37–41.
4. *Хавинсон С. Я.* Теория экстремальных задач для ограниченных функций, удовлетворяющих дополнительным условиям // УМН.—1963.—Т. 18, № 2(110).—С. 25–92.
5. *Carleson L., Jacobs S.* Best uniform approximation analytic functions // Arc. Math.—1972.—Vol. 10, № 2.—P. 219–229.
6. *Рябых В. Г.* Необходимое и достаточное условие существования экстремальных функций линейного функционала над H_1 // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 6.—С. 1351–1360.
7. *Геронимус Я. Л.* О некоторых экстремальных задачах // Изв. АН СССР. Серия мат.—1937.—Т. 1.—С. 185–202.
8. *Голузин Г. М.* О задаче Каратеодори — Фейера и об одной аналогичной задаче // Мат. сб.—1946.—Т. 18(60).—С. 213–226.
9. *Macintyre A. J., Rogozinsky W. W.* Extrem problem in the theory of analytic functions // Acta math.—1950.—Vol. 82.—P. 275–325.
10. *Рябых В. Г.* Приближение неаналитических функций аналитическими // Мат. сб.—2006.—Т. 197, № 2.—С. 87–96.
11. *Hayshi E.* Solution set of extremal problem in H_1 // Proc. Amer. Math. Soc.—1985.—Vol. 5, № 3.—P. 690–696.

12. *Рябых В. Г.* Экстремальные задачи для суммируемых аналитических функций // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. XXVII, № 3.—С. 212–217.
13. *Рябых В. Г.* Некоторые экстремальные задачи в пространстве H_p' // Научные сообщения за 1964 год (серия точных и естественных наук).—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1964.
14. *Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Норма линейного функционала над пространством H_1 // Вестник ТГПИ. Физ.-мат. и естеств. науки.—2008.—№ 1.—С. 59–64.
15. *Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Экстремальные задачи в пространстве Бергмана // Итоги науки ЮФО. Мат. форум. Том 3. Исследования мат. анализу.—Владикавказ: ЮМИ, 2009.—С. 213–221.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 126–127.

О ВЫПУКЛОСТИ ОПЕРАТОРА БЕРНАРДИ НА ЛИНЕЙНО ИНВАРИАНТНОМ СЕМЕЙСТВЕ ФУНКЦИЙ

П. И. Сижук, Т. П. Сижук
(Россия, Ставрополь; СГУ)

В докладе рассматривается вопрос о выпуклости оператора Бернарди [1]

$$B(f) = F(z) \equiv \frac{\nu+1}{z^{\nu}} \int\limits_0^z t^{\nu-1} f(t)\,dt \qquad (1)$$

на линейно инвариантных семействах функций в единичном круге.

Как известно [2], [3, с. 557] семейство Λ регулярных и локально однолистных в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций вида

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \qquad (2)$$

называется линейно инвариантным семейством, если вместе с каждой функцией $f(z)$ ему принадлежит и функция

$$g(z) = \frac{f\big(\varphi(z)\big) - f\big(\varphi(0)\big)}{\varphi'(0)\, f'\big(\varphi(0)\big)} = z + b_2 z^2 + \dots,$$

где $\varphi(z)$ — дробно-линейное отображение круга E на себя. Порядком функции $f(z) \in \Lambda$ называется величина

$$\operatorname{ord}(f) = \sup_{z\in E} \Big| -z + 2^{-1}\big(1 - |z|^2\big) f''(z) \,/\, f(z) \Big|.$$

Одним из примеров линейно инвариантного семейства является класс S, состоящий из всех регулярных и однолистных в круге E функций $f(z)$, нормированных разложением (2). Известно, что $\operatorname{ord}(f) \geqslant 1$. Обозначим через $\Lambda(\sigma)$ семейство (класс) функций $f(z) \in \Lambda$ таких, что $\operatorname{ord}(f) = \sigma$.

В работе [4] доказано, что если $f(z) \in S$, то функция $F(z)$ в (1) при $\nu = 1$ отображает круг $|z| < 4 - \sqrt{13}$ на выпуклую область. Нами получен следующий результат.

Теорема 1. *Если функция $f(z) \in \Lambda(\sigma)$, тогда определяемая формулой* (1) *функция $F(z)$ отображает круг $|z| < r_\nu(\sigma)$, где*

$$r_\nu(\sigma) = \begin{cases} \frac{2\sigma - \sqrt{\nu^2 + 4(\sigma^2 - 1)}}{2-\nu} & \text{при } 0 \leqslant \nu \leqslant 1, \\ \frac{2\nu\sigma - \sqrt{1 + 4\nu^2(\sigma^2 - 1)}}{2\nu - 1} & \text{при } \nu \geqslant 1, \end{cases} \tag{3}$$

на выпуклую область.

Как следствие теоремы 1 получается

Теорема 2. *Если функция $f(z) \in S$, тогда определяемая формулой* (1) *функция $F(z)$ отображает круг $|z| < r_\nu(2)$, где $r_\nu(2)$ определяется по формуле* (3) *с $\sigma = 2$, на выпуклую область.*

Из теоремы 2 при $\nu = 1$ имеем результат в [4]. Доказательство теоремы 1 опирается на следующую лемму.

Лемма. *Если функция $f(z)$ вида* (2) *регулярна в круге E и в нем*

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geqslant \begin{cases} -\nu/2 & \text{при } 0 \leqslant \nu \leqslant 1, \\ -1/(2\nu) & \text{при } \nu \geqslant 1, \end{cases}$$

то определяемая формулой (1) *функция $F(z)$ отображает круг E на выпуклую область.*

Доказательство леммы основывается на одном результате в [5]. Утверждение леммы при $\nu \geqslant 1$ известно по работе [6].

Литература

1. *Bernardi S. D.* Convex and starlike univalent functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1969.—Vol. 135.—P. 426–446.
2. *Pommerenke C.* Linear-invariate Familien analytischer Functionen I // Math. Ann.—1964.—Vol. 155.—P. 108–154.
3. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1966.—628 с.
4. *Singh R.*, *Singh S.* Integrals of certain univalent functions // Proc. Amer. Math. Soc.—1979.—Vol. 77, № 3.—P. 336–340.
5. *Сижук П. И.* О сверточном операторе, сохраняющем n-симметричные функции в единичном круге // Вестник СГУ.—1996.—№ 7.—С. 19–24.
6. *Sohi N. S.* On a subclass of p-valent functions // Indian J. pure appl. Math.— 1980.—Vol. 11, № 11.—P. 1504–1508.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 128–129.

О РАЗЛОЖЕНИИ ЛЕБЕГА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ[1]

П. М. Симонов (Россия, Пермь; ПГУ),
А. В. Чистяков (Россия, Ижевск; УдГУ)

В тезисах предлагается рассмотреть аналог теории разложения Лебега для пространства $\mathcal{B}(L^1(\mathbf{X}))$ линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве $L^1(\mathbf{X})$ суммируемых вектор-функций со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{X}$. В основу построения положен тот факт, что $\mathcal{B}(L^1, L^1(\mathbf{X}))$ является решеточно нормированным пространством, где нормирующей решеткой является K-пространство $\mathcal{L}_r(L^1)$ регулярных операторов $U : L^1 \to L^1$. Решеточная норма в $\mathcal{B}(L^1, L^1(\mathbf{X}))$ удовлетворяет аксиоме разложимости Л. В. Канторовича.

Таким образом, в банаховой алгебре $\mathcal{B}(L^1(\mathbf{X}))$ имеется естественный аналог $[Z]$ $\mathcal{B}(L^1(\mathbf{X}))$ любой полосы $[Z]$ K-пространства $\mathcal{L}_r(L^1)$. В частности, полосе $\mathcal{L}_a(L^1)$, порожденной операторами подстановки с весом, соответствует полоса $\mathcal{B}_a(L^1(\mathbf{X}))$ атомарных операторов, действующих в пространстве $L^1(\mathbf{X})$.

Основное содержание тезисов связано с исследованием полосы $\mathcal{B}_a(L^1(\mathbf{X}))$. Эта полоса является алгеброй, наследующей многие свойства своего скалярного прототипа — алгебры $\mathcal{B}_a(L^1)$. В этой связи приведем некоторые факты, систематизированные Л. Вейсом в обзоре «Funct. Anal.: Surv. and Recent Results. 3» (Proc. 3rd Conf.— Paderborn: Elsevier Science Publishers B.V., 1983).

Давно и хорошо известно, что любой ограниченный линейный оператор, действующий в банаховой решетке L^1, мажорируется (или, эквивалентно, регулярен) и является порядково непрерывным. Теорема о представлении порядково непрерывных операторов, восходящая к представлению Рисса операторов в пространстве непрерывных функций, явным образом сформулированная Сууром, Колтоном и

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Пермского края, проект № 10-01-96054-р-урал-а, и ЗАО «ПРОГНОЗ».

Вейсом (а неявно использовавшаяся во многих работах по функциональному анализу, теории меры и теории вероятностей), позволяет представить оператор $U : L^1 \to L^1$ интегралом Лебега по случайной борелевской мере:

$$(Uh)(\omega) = \int h(\omega)\mu_\omega(d\xi) \quad \big(h \in L^1,\ \omega \in \Omega\big)\,.$$

Под случайной мерой понимается семейство $(\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}$ (знакопеременных) борелевских мер такое, что функция $\omega \mapsto \mu_\omega A$ $(\omega \in \Omega)$ измерима при всех $A \in \Sigma$. В терминах типа случайной меры определяются основные полосы $\mathcal{B}_u(L^1)$ $(u = i, s, a, d)$ K-пространства $\mathcal{B}(L^1) = \mathcal{L}_r(L^1)$. Индекс u характеризует тип случайной меры: i — μ-абсолютно непрерывная мера; s — μ-сингулярная мера; a — атомарная мера; d — диффузная мера. По теореме Дуббинса — Фридмана компоненты случайных разложений Лебега $\mu_\omega = \mu^i u_\omega + \mu_\omega^s$ и $\mu_\omega = \mu_\omega^a + \mu_\omega^d$ также являются случайными мерами. Поэтому справедливы операторные аналоги классических разложений Лебега

$$\mathcal{B}(L^1) = \mathcal{B}_i(L^1) \oplus \mathcal{B}_s(L^1)$$

и

$$\mathcal{B}(L^1) = \mathcal{B}_a(L^1) \oplus \mathcal{B}_d(L^1).$$

Полоса $\mathcal{B}_i(L^1)$ состоит из интегральных операторов. Этот факт — простое следствие теоремы Радона — Никодима. Намного более интересным и нетривиальным является тот факт, что полоса $\mathcal{B}_a(L^1)$ порождается операторами умножения и операторами подстановки. Из него следует, что полоса $\mathcal{B}_a(L^1)$ атомарных операторов состоит из счетных порядковых сумм операторов подстановки с весом. В частности, поэтому она является подалгеброй алгебры $\mathcal{B}(L^1)$. Как обнаружил Л. Вейс в своем обзоре, дизъюнктное дополнение этой подалгебры — пространство $\mathcal{B}_d(L^1)$ диффузных операторов — является левым (но не правым) идеалом решеточной алгебры $\mathcal{B}(L^1)$. Следствием алгебраических свойств разложений являются отмеченные спектральные свойства: подалгебра $\mathcal{B}_a(L^1)$ наполнена, т. е. обратимость в алгебре $\mathcal{B}(L^1)$ совпадает с обратимостью в очень узкой подалгебре $\mathcal{B}_a(L^1)$; обратимость атомарного оператора эквивалентна его обратимости по модулю идеала $\mathcal{W}(L^1)$ слабо компактных операторов. Именно распространение этих свойств на полосу $\mathcal{B}_a(L^1(\mathbf{X}))$ и является главной задачей в докладе.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 130–131.

ОБ ОБОБЩЕНИЯХ НЕРАВЕНСТВА ВИЛЬЯМА ЯНГА

С. М. Ситник (Россия, Воронеж; ВИ МВД)

В 1912 г. английский математик Вильям Генри Янг, фамилию которого почему-то в русском языке принято онемечивать и искажать, опубликовал два своих знаменитых неравенства. Первое их них оценивает норму свертки и получило впоследствии имена Янга и Хаусдорфа. Второе — это неравенство для пары взаимно обратных функций [1], которое обычно приводится в частном случае степенных функций в виде

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1}$$

Этот результат, например, используется для вывода так называемого неравенства Гёльдера, которое также исторически справедливо было бы называть неравенством Роджерса — Гёльдера — Рисса [1].

Оказывается, что неравенств Янга для двух чисел не одно, а два (а для нескольких чисел еще больше)! Второе из них имеет вид

$$xy \leqslant \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p}. \tag{2}$$

Тогда возникает задача о сравнении приведенной пары неравенств.

Теорема 1 [2]**.** 1. *Если $y \geqslant x \geqslant 1$, то оценка* (1) *лучше, чем* (2).

2. *Если $1 \geqslant y \geqslant x \geqslant 0$, то оценка* (2) *лучше, чем* (1).

3. *Если $y \geqslant 1 \geqslant x \geqslant 0$, то при данном x существует единственное критическое значение $y = y_{\mathrm{cr}}$, которое является решением трансцендентного уравнения*

$$\frac{x^p}{p} - \frac{x^q}{q} = \frac{y^p}{p} - \frac{y^q}{q}.$$

В этом случае при $1 \leqslant y \leqslant y_{\mathrm{cr}}$ оценка (2) *лучше, чем* (1), *а при $y \geqslant y_{\mathrm{cr}}$ оценка* (1) *лучше, чем* (2).

Приведем численные примеры на все эти случаи.

Пример 1. $x = 5$, $y = 130$, $p = 4$, $q = 4/3$; $xy = 650$, $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \approx 650,16502$, $\frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p} \approx 71402508$.

В этом случае неравенство (1) лучше (на пять порядков!).

Пример 2. $x = 0,2$, $y = 0,5$, $p = 4$, $q = 4/3$; $xy = 0,1$, $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \approx 0,29803$, $\frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p} \approx 0,10334$.

А в этом случае неравенство (2) лучше (примерно в три раза).

Пример 3. $x = 0,5$, $p = 4$, $q = 4/3$. Тогда расчет, который мы опускаем, дает критическое значение $y_{\mathrm{cr}} \approx 1,35485$. Выберем $x = 0,5$, $y = 1,3 < y_{\mathrm{cr}}$; тогда получаем $xy = 0,65$,

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \approx 1,07973, \quad \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p} \approx 1,01166.$$

Как и следует из теоремы 1, в этом случае лучше оценка (2).

А теперь пусть $x = 0,5$, $y = 1,4 > y_{\mathrm{cr}}$; тогда получаем $xy = 0,7$,

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \approx 1,19025, \quad \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p} \approx 1,25804.$$

Как и следует из теоремы 1, в этом случае лучше оценка (1).

Теорема 2. *Справедливо уточнение дискретного неравенства Роджерса — Гёльдера — Рисса, следующее из теоремы* 1*:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A} \frac{b_k}{B} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{[\max\left(\frac{a_k}{A}, \frac{b_k}{B}\right)]^p}{p} + \frac{[\min\left(\frac{a_k}{A}, \frac{b_k}{B}\right)]^q}{q} \right) \leqslant 1, \tag{3}$$

где A — это l_p, а B — l_q нормы соответствующих векторов.

В [2] рассмотрены обобщения оценок (1)–(2) для произвольных дополнительных функций Янга, а также степеней преобразований Лежандра.

Отметим, что существует разработанная А. Г. Кусраевым техника перенесения результатов для числовых неравенств на более общий случай векторных решеток и билинейных операторов в них. Эта техника может быть применена и для рассмотренных неравенств.

Литература

1. *Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M.* Classical and new inequalities in analysis.—Dordrecht: Kluwer, 1993.—740 p.
2. *Ситник С. М.* Уточнения и обобщения классических неравенств // Мат. форум. Т. 3. Исследования по мат. анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2009.—С. 221–266.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 132–133.

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЯНГИАНОВ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ[1]

В. А. Стукопин (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ, ЮМИ)

Описание неприводимых представлений янгианов является важной задачей для теории точно-решаемых моделей статистической механики и квантовой теории поля. С точки зрения теории янгианов конструкция трансфер-матрицы основана на нахождении образа универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана (см. [4, 5]) при действии тензорного произведения неприводимого представления и тождественного отображения. К настоящему времени появилось большое число новых приложений теории янгианов супералгебр Ли, в частности, прояснилась связь с квантовой теорией суперструн (см. [1, 2]).

В данной работе исследуются представления янгианов супералгебр Ли типа $\mathfrak{sl}(1,2)$ (см. [3]).

Основным результатом данной работы является теорема о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана базисной супералгебры Ли типа $\mathfrak{sl}(1,2)$. В этой работе мы ограничиваемся этим простейшим случаем супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(1,2)$ наиболее близкой по свойствам к простой алгебре Ли типа $\mathfrak{sl}(2)$.

Пусть V — модуль над янгианом $Y(\mathfrak{g})$ супералгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(1,2)$, $\bar{d} = \{d_{i,r}\}$, $i \in I$, $r \in Z_+$ — набор комплексных чисел. Будем обозначать через $V_{\bar{d}}$ и называть весовым подпространством модуля V, подпространство

$$V_{\bar{d}} = \{v \in V : h_{i,r}v = d_{i,r}v\}.$$

При этом $\bar{d} = \{d_{i,r}\}$ мы будем называть весом янгианного модуля.

Мы хотим описать структуру конечномерных модулей над янгианом $Y(\mathfrak{g})$, а также сформулировать необходимые и достаточные условия того, что неприводимый модуль является конечномерным.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-00671-а и гранта Рособразования «Проведение научных исследований научными группами под руководством кандидатов наук», проект № НК-586П/26.

Мы будем называть вектор $v \in V$ *примитивным*, если $v \in V_{\bar{d}}$ и $x^{\pm}_{i,r} \cdot v = 0$ для всех $i \in I$, $r \in Z_+$. Мы будем также называть модуль V *модулем со старшим весом*, если он порождается примитивным вектором, то есть $V = Y(\mathfrak{g}) \cdot v$ для некоторого примитивного вектора $v \in V_{\bar{d}}$.

Главный результат работы — следующая теорема о классификации неприводимых конечномерных янгианных модулей.

Теорема 1. (1) *Каждый неприводимый конечномерный* $Y(A(0,1))$*-модуль* V *является модулем со старшим весом* d*:* $V(d)$.

(2) *Модуль* $V(\Lambda)$ *конечномерен тогда и только тогда, когда существуют многочлены* P_2^d*, а также многочлены* P_1^d*,* Q_1^d*, удовлетворяющие следующим условиям:*

(a) *все эти многочлены со старшими коэффициентами, равными* 1*;*

(b)

$$\frac{P_2^d(u+1)}{P_2^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{2,k} \cdot u^{-k-1},$$

$$\frac{P_1^d(u+1)}{Q_1^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{1,k} \cdot u^{-k-1},$$

Литература

1. *Dolan L., Napp.i Ch, Witten E.* Yangian symmetry in $D = 4$ superconformal Yang — Mills theory.—2004.—16 p.—(Preprint / arXiv: hep-th/0401243).
2. *Spill F., Torrielli A.* On Drinfeld's second realization of the AdS/CFT $\mathfrak{su}(2|2)$ Yangian.—2008.—25 p.—(Preprint / arXiv: hep-th/0803.3194).
3. *Frappat L., Sorba P.* Dictionary on Lie Superalgebras.—London: Acad. Press, 2000.
4. *Стукопин В. А.* О дубле янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$ // Функцион. анализ и его прилож.—2006.—Т. 40, № 2.—С. 81–84.
5. *Стукопин В. А.* Квантовый дубль янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$ и вычисление универсальной R-матрицы // Фундамент. и прикладная мат.—2005.—Т. 11, № 2.—С. 185–208.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 134–135.

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА СЕТКАХ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ДВУМ ОТРЕЗКАМ

Э. Ш. Султанов (Россия, Махачкала; ДНЦ РАН)

В работе рассмотрена задача об исследовании асимптотики полиномов, ортогональных на дискретных сетках, принадлежащих двум различным непересекающимся отрезкам $[a,b]$ и $[c,d]$, где $a < b < c < d$. Пусть даны весовые функции $\rho = \rho(x) > 0$ и $\mu = \mu(x) > 0$, заданные, соответственно, на $[a,b]$ и $[c,d]$. Положим

$$h(x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{если } x \in [a,b], \\ \mu(x), & \text{если } x \in [c,d], \end{cases} \qquad L_2^h(E) = \left\{ f \,\middle|\, \int\limits_E f^2(x)\, h(x)\, dx < \infty \right\},$$

где $E = [a,b] \cup [c,d]$. Скалярное произведение двух функций $f, g \in L_2^h(E)$ определяем обычным образом

$$(f,g)_h = \int\limits_E f(x)\, g(x)\, h(x)\, dx.$$

Применяя к системе $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ метод ортогонализации Грама — Шмидта, получим последовательность полиномов $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, образующих ортонормированную систему на E с весом h, т. е. $(p_n, p_m)_h = \delta_{nm}$. Для определенности будем считать старшие коэффициенты полиномов p_n положительными.

Пусть нам заданы две дискретные сетки $\Omega'_N = \{x_0, \ldots, x_{N-1}\}$, $\Omega''_M = \{x_{N+1}, \ldots, x_{N+M}\}$, первая из которых принадлежит отрезку $[a,b]$, а вторая — отрезку $[c,d]$. При этом будет считать, что сетка Ω'_N задает разбиение отрезка $[a,b]$, а сетка Ω''_M — разбиение отрезка $[c,d]$, т. е. $a = x_0 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$, $c = x_{N+1} < \ldots < x_{N+M} < x_{N+M+1} = d$. Пусть $\Omega_{N,M} = \Omega'_N \bigcup \Omega''{}_M$. Введем следующие обозначения $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, $\lambda'_N = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant N-1} \Delta x_j$, $\lambda''_M = \max\limits_{N+1 \leqslant j \leqslant N+M} \Delta x_j$, $\lambda_{N,M} = \max\{\lambda'_N, \lambda''_M\}$. Для двух функций f и g, заданных на $\Omega_{N,M}$, определим дискретное скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle_h = \sum_{x_j \in \Omega_{N,M}} f(x_j)\, g(x_j)\, h(x_j)\, \Delta x_j.$$

Соответствующее евклидово пространство функций, заданных на $\Omega_{N,M}$, обозначим через $l_2^h(\Omega_{N,M})$. Тогда конечная система функций $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{N+M-1}$ образует базис в $l_2^h(\Omega_{N,M})$. Применяя к нему процесс ортогонализации Грама — Шмидта, получим конечную последовательность полиномов $\{p_n^{N,M}(x)\}_{n=0}^{N+M-1}$, образующих ортонормированную систему на $\Omega_{N,M}$ с весом h, т. е. $\langle p_n^{N,M}, p_m^{N,M}\rangle_h = \delta_{nm}$.

Ставится задача об исследовании асимптотических свойств полиномов $p_n^{N,M}(x)$ при $n, N, M \to \infty$. В настоящей работе предпринята попытка решить эту задачу в том случае, когда весовые функции ρ и μ представляют собой алгебраические полиномы степени k и l соответственно, не обращающиеся в нуль на E.

Основной результат, который нам удалось получить, состоит в следующем. Пусть $\eta = \max\{k, l\}$, $æ = \max\{æ_1, æ_2\}$, где $æ_1$ и $æ_2$ — наименьшие константы в интегральных неравенствах Маркова для отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно, т. е. для произвольных многочленов $Q_n(x)$ и $P_m(x)$:

$$\int\limits_a^b \bigl|Q_n'(x)\bigr|\,dx \leqslant æ_1 n^2 \int\limits_a^b \bigl|Q_n(x)\bigr|\,dx, \quad \int\limits_c^d \bigl|P_m'(x)\bigr|\,dx \leqslant æ_2 m^2 \int\limits_c^d \bigl|P_m(x)\bigr|\,dx.$$

Теорема 1. *Пусть* $æ\lambda_{N,M}(2n+\eta)^2 < 1$. *Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$p_n^{N,M}(x) = p_n(x) + r_n^{N,M}(x),$$

в которой для остаточного члена $r_n^{N,M}(x)$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_E \Bigl(r_n^{N,M}(x)\Bigr)^2 dx \leqslant \frac{3æ\lambda_{N,M}(2n+\eta)^2}{1 - æ\lambda_{N,M}(2n+\eta)^2}.$$

Литература

1. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.—М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1962.—500 с.
2. *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения.—Махачкала: Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997.—234 с.
3. *Нурмагомедов А. А.* Об асимптотике многочленов, ортогональных на произвольных сетках // Изв. Саратовского ун-та.—2008.—Т. 8, № 1.—С. 25–31.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 136.

MULTIPLICATION AND STRONGLY COMPACT-FRIENDLY OPERATORS

Misirlioğlu Tunç (Turkey, İstanbul; İKU)

In [1], it was proved that if the multiplier φ of a positive multiplication operator M_φ on a $C(\Omega)$-space, where Ω is a compact Hausdorff space, has a flat, then M_φ is compact-friendly. Two years later, that the converse was also true was proved in [2]. We prove that if the positive multiplication operator M_φ is strongly compact-friendly, then the multiplier φ has a flat. On the other hand, we show by giving a counterexample that the converse is not true.

References

1. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Multiplication and compact-friendly operators // Positivity.—1997.—Vol. 1.—P. 171–180.
2. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D., Burkinshaw O., Wickstead A. W.* A characterization of compact-friendly multiplication operators // Indag. Math. (N.S.).—1999.—Vol. 10, № 2.—P. 161–171.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 137.

MULTI-NORMS

Mehmet Selçuk Türer (Turkey, İstanbul; İKU)

This talk deals with the so-called «multi-normed spaces», developed by H. G. Dales and M. E. Polyakov. We will consider an open problem given by H. G. Dales in [1], about direct sum decompositions within the context of Banach lattices. We present an approach to the solution of it for the case of Banach lattice $L^p(\mathbb{I})$, where $\mathbb{I}$ is the closed unit interval and $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

References

1. *Dales H. G., Polyakov M. E.* Multi-norms, Preprint, available at http://www.amsta.leeds.ac.uk/ pmt6hgd/preprints/AMSmultinorms.pdf.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 138.

ON POSITIVE OPERATORS WITHOUT INVARIANT SUBLATTICES

Gönüllü Uğur (Turkey, İstanbul; İKU)

By slightly modifying some of the examples given in [1], we obtain further examples of positive operators on the discrete Banach lattices c_0, c, and ℓ_p ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) without non-trivial closed invariant sublattices.

References

1. *Kitover A. K. Wickstead A. W.* Invariant sublattices for positive operators // Indag. Math. (N. S.).—2007.—Vol. 18, № 1.—P. 39–60.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 139–140.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ С ОЦЕНКАМИ РОСТА

Тиен Чонг Фам (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
А. В. Абанин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

1. Продолжение голоморфных функций с комплексной плоскости с оценками роста. Невозрастающую C^1-функцию $\rho : [0,\infty) \to (0,1]$ будем называть *регулярной функцией расстояния*, если

$$\rho'(t) \to 0 \ \text{ при } \ t \to \infty \quad \text{и} \quad \log \rho(e^x) \ \text{ вогнута на } \ \mathbb{R}.$$

Следующие функции являются регулярными функциями расстояния:

$$\rho(t) = 1; \quad \rho(t) = \frac{1}{(1+t)^s}, \quad s > 0; \quad \rho(t) = e^{-at^s}, \quad a > 0, \ s > 0.$$

В дальнейшем будут использованы следующие постоянные, которые зависят только от ρ:

$$A_0 := \max_{t \in [0,\infty)} \bigl|\rho'(t)\bigr| < \infty, \quad B_0 > 1 : \ \rho(t) \leqslant B_0 \rho(t'),$$
$$\rho(t') \leqslant B_0 \rho(t), \ \forall\, t, t' \geqslant 0 : \ |t - t'| \leqslant \rho(t).$$

Положим $\rho(z) := \rho(|z|)$ для $z \in \mathbb{C}^p$ $(p \in \mathbb{N})$. Заметим, что функция $-\log \rho(z)$ является плюрисубгармонической в $\mathbb{C}^p$. Будем говорить, что функция φ является ρ-медленно меняющейся в $\mathbb{C}^p$, если существует $C_0 \in [0,\infty)$ такое, что

$$\bigl|\varphi(z) - \varphi(\zeta)\bigr| \leqslant C_0 \ \text{ для всех } \ z, \zeta \in \mathbb{C}^p \ \text{ с } \ |z - \zeta| \leqslant \rho(z). \tag{1}$$

Главным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть φ — ρ-медленно меняющаяся плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^p$ и C_0 — константа из (1). Тогда для всякой комплексной плоскости Σ в $\mathbb{C}^p$ размерности k и голоморфной функции f на Σ с условием*

$$\log \bigl|f(z)\bigr| \leqslant \varphi(z) \quad (z \in \Sigma)$$

существует целая функция F в $\mathbb{C}^p$ такая, что $F|_\Sigma = f$ и

$$\log\bigl|F(z)\bigr| \leqslant \varphi(z) + (2p-k)\log\frac{1}{\rho(z)} + \frac{3p-2k+1}{2}\,\log(1+|z|^2) + \\ + \frac{p-k}{2}\,\log(1+d_\Sigma^2) + M, \quad \forall\, z\in\mathbb{C}^p,$$

где d_Σ — растояние от начала координат до Σ и M — абсолютная константа, которая зависит от A_0, B_0, C_0, p, k и не зависит от φ, Σ, f, ρ.

Замечание. Если Σ — подпространство в $\mathbb{C}^p$ и $\rho(t)\equiv 1$ на $[0,\infty)$, то из теоремы 1 следует результат Хермандера [1, теорема 4.4.3], а если $\rho(t) = \frac{1}{(1+t)^s}$, $s>0$, то получим результат Юлмухаметова [2, лемма 1].

2. Семейства целых функций со специальными оценками роста. С помощью теоремы 1 можно строить семейства целых функций многих переменных, удовлетворяющие равномерным оценкам сверху и локальным снизу. Такие семейства играют важную роль во многих вопросах анализа. Именно, справедлив следующий общий результат.

Теорема 2. *Пусть φ — ρ-медленно меняющаяся плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^p$ и C_0 — константа из (1). Тогда существует семейство $\mathcal{G} = \{g_\xi : \xi\in\mathbb{C}^p\}$ целых функций в $\mathbb{C}^p$ таких, что выполняются следующие условия:*

$$g_\xi(\xi) = \rho(\xi)\, e^{\varphi(\xi)}, \quad \forall\, \xi\in\mathbb{C}^p,$$

$$\bigl|g_\xi(z)\bigr| \leqslant \frac{M}{\rho^{2p}(z)}(1+|z|^2)^{3p+1}e^{\varphi(z)} \ \text{ для всех } \ z\in\mathbb{C}^p,$$

где M — абсолютная постоянная, зависящая только от A_0, B_0 и C_0.

Литература

1. *Хермандер Л.* Введение в теории функций нескольких комплексных переменных.—М.: Мир, 1967.—280 с.
2. *Юлмухаметов Р. С.* Целые функции многих переменных с заданным поведением в бесконечности. // Изв. РАН. Сер. мат.—1996.—Т. 60, № 4.—С. 206–224.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 141–143.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПО ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В $L_M^*(\Omega)$

В. Г. Фетисов (Россия, Шахты; ЮРГУЭС, ЮМИ)

Доклад содержит новые результаты, относящиеся к продолжению по функциональному параметру решений многомерного нелинейного сингулярного интегрального уравнения Урысона, содержащего неизотропное ядро Коши. Модельной средой служит банахово пространство Орлича, включающее лебегово пространство L^p, пространство Лоренца и пространство Марцинкевича.

В ряде задач математической физики, качественной теории нелинейного функционального анализа и его приложений определенное место занимают те из них, в которых рассматриваются ветвление и продолжение решений по параметру.

Многие задачи механики, теории термоупругости, теплообмена излучением и другие приводят к необходимости решения многомерных нелинейных сингулярных интегральных уравнений, содержащих неизотропные ядра Коши. Первые публикации принадлежат Ф. Джонсу, Дж. Льюису, О. В. Бесову, В. П. Ильину, П. И. Лизоркину и С. Г. Михлину.

Обычно рассматриваемые в нелинейных системах интегральные операторы А. Гаммерштейна, П. С. Урысона, интегростепенные ряды В. Вольтерра, А. Пикара и их линейные комбинации содержат фредгольмовы ядра и скалярный параметр. Ситуация существенно осложняется, например, для интегрального оператора П. С. Урысона

$$U(x,\lambda)(\tau) :\equiv \int\limits_{\Omega} |\tau - s|^{-k} K\big[\tau, s, x(s); \lambda(s)\big]\, d\mu(s), \tag{1}$$

где исходный оператор U определен в банаховом пространстве Орлича $L_M^*(\Omega)$ и его характеристика $K_0 = |\tau - s|^{-k} K(\tau, s, x; \lambda)$ не является локально суммируемой функцией, а предельный оператор можно отождествить со сверткой с некоторой обобщенной функцией, где предельный переход есть регуляризация соответствующего сингулярного интегрального оператора без обращения к понятию свертки обобщенных функций.

Доклад посвящен исследованию вопроса об аналитическом продолжении решения уравнения П. С. Урысона с неизотропным ядром Л. О. Коши в банаховом пространстве В. Орлича с достаточно гибкой топологией.

Малоисследованной остается и ситуация для множества решений нелинейных интегральных уравнений с функциональным параметром, как показывает многомерное сингулярное уравнение П. С. Урысона:

$$U(x,\lambda)(\tau) :\equiv \int\limits_{\Omega} |\tau - s|^{-k} K\big[\tau, s, x(s); \lambda(s)\big]\, d\mu(s) = (x,\lambda)(\tau), \qquad (2)$$

где $\tau, s \in \Omega$, функция $x(\tau)$ (решение уравнения (2)) принадлежит пространству Орлича $L_M^*(\Omega)$, функциональный параметр $\lambda(\tau)$ непрерывен на Ω (ограниченном замкнутом компакте конечномерного пространства R^k).

Запишем исходное уравнение (2) в неявном виде:

$$F(x,\lambda) = 0, \qquad (3)$$

Под решением уравнения (3) будем понимать функциональный оператор $x(\lambda)$ (или же x_λ) такой, что $F[x(\lambda),\lambda] \equiv 0$. Предположим, что

$$F(x_0,\lambda_0) = 0, \qquad (4)$$

т. е. x_0 является решением исходного уравнения (3) при ненулевом значении $\lambda = \lambda_0$.

В поставленной задаче о продолжении решений уравнения Урысона (2) нас интересуют близкие к исходному x_0 решения $x(\lambda)$ уравнения (2) при близких к λ_0 значениях функционального параметра $\lambda(\tau)$. Иначе говоря, в рассматриваемом случае исследуется существование неявных функций $x(\lambda)$, определяемых уравнением (3).

Приведем один из основных результатов.

Теорема. *Пусть оператор $F(x,\lambda)$, непрерывный и непрерывно дифференцируемый по Фреше по переменной x в некоторой окрестности G точки (x_0,λ_0), подчиняется условию (4), а линейный оператор $A = F'_x(x_0,\lambda_0)$ имеет ограниченный обратный A^{-1}, определен-*

ный на исходном пространстве Орлича. Тогда уравнение (3) *определяет в некоторой окрестности* $\|\lambda - \lambda_0; C(\Omega)\| \leqslant \delta$ *точки* λ_0 *однозначную неявную непрерывную функцию* $x(\lambda)$.

Литература

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Лизоркин П. И.* L_p-оценки некоторого класса неизотропно сингулярных интегралов // Докл. АН СССР.—1966.—Т. 169, № 6.— С. 1250–1253.
2. *Фетисов В. Г.* К вопросу об ограниченности неизотропно сингулярных интегралов в пространствах Орлича // Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена.—1968.— Т. 387.—С. 286–293.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 144–145.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НЕПЛОТНО ЗАДАННОГО ЛИНЕЙНОГО КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В. И. Филиппенко (Россия, Шахты; ЮРГУЭС, ЮМИ)

В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с построением обобщенных резольвент и спектральных функций, исследованием некоторых других спектральных характеристик квазидифференциальных операторов.

Основное содержание настоящей работы является продолжением предыдущих исследований автора (см., например, [1]).

Пусть $\mathbf{F} = (f_{ij})$ — $(n \times n)$-матрица, составленная из комплекснозначных функций, определенных на интервале $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f_{ij} = 0$ в интервале $\mathbb{I} = (a, b)$ для индексов, удовлетворяющих неравенствам $2 \leqslant i + 1 < j \leqslant n$;

2) f_{ij} — локально суммируемы, т. е. $f_{ij} \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{I})$ для $1 \leqslant i, j \leqslant n$;

3) $f_{i,i+1} \neq 0$ в $\mathbb{I}$ для $1 \leqslant i \leqslant n - 1$.

Определим квазипроизводные $y^{[k]}$ следующим образом:

$$y^{[0]} = y; \quad y^{[i]} = f_{i,i+1}^{-1}\left[\left(y^{[i-1]}\right)' - \sum_{j=1}^{i} f_{i,j}\, y^{[j-1]}\right], \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Пусть $AC(\mathbb{I})$ — множество функций, абсолютно непрерывных на любом компактном подынтервале промежутка $\mathbb{I}$. В дальнейшем предполагаем, что функции y и их квазипроизводные до $(n-1)$-го порядка включительно принадлежат множеству $AC(\mathbb{I})$.

Квазидифференциальное выражение γ определим формулой

$$\gamma(y) = \left(y^{[n-1]}\right)' - \sum_{i=1}^{n} f_{ni} y^{[i-1]}$$

для y таких, что $y^{[i-1]} \in AC(\mathbb{I})$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Предположим, что матрица $\mathbf{F}$ кроме требований 1), 2), 3) удовлетворяет также условию симметричности $\mathbf{F} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}^{*}\mathbf{J}$, где $\mathbf{F}^{*}$ —

матрица, сопряженная матрице $\mathbf{F}$, т. е. $\mathbf{F}^* = (\overline{f_{ji}})$, и $\mathbf{J}$ — числовая $(n \times n)$-матрица

$$\mathbf{J} = \bigl((-1)^i \delta_{i,n+1-j}\bigr), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

где $\delta_{k,l}$ — символ Кронекера.

Для любых функций y и z, к которым применима квазидифференциальная операция γ, имеет место обобщенная формула Лагранжа

$$\gamma(y)\overline{z} + (-1)^{n+1} y\overline{\gamma(z)} = \{y, z\}',$$

где $\{y, z\} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n+1-j} y^{[j]}\, \overline{z^{[n-j-1]}}$.

Положим $\tau = \gamma$, если n четно, и $\tau = \pm i\gamma$, если n нечетно. Один или оба конца промежутка $\mathbb{I} = (a, b)$ предполагаются сингулярными. Квазидифференциальная операция τ и конечное множество интегральных краевых условий вида

$$\int\limits_a^b \varphi_i(x)\, \overline{y(x)}\, dx = 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

где $\varphi_i(x)$ $(i = 1, \dots, p)$ — произвольные линейно независимые функции пространства из гильбертова пространства H, образующие базис в некотором подпространстве $H_0 \subset H$, позволяют определить неплотно заданный квазидифференциальный оператор T_0 с равными индексами дефекта. Для него построено пространство граничных значений, которое позволяет получить различные расширения оператора T_0, в том числе и квазисамосопряженные расширения этого оператора. Построена обобщенная резольвента оператора T_0, представляющая собой интегральный оператор, и ее спектральная матрица-функция. Получена оценка ранга этой матрицы-функции в терминах решений уравнения $\tau(y) = \lambda y$, удовлетворяющих некоторым дополнительным краевым условиям на сингулярных концах промежутка $\mathbb{I} = (a, b)$.

Литература

1. *Филиппенко В. И.* Расширения и резольвенты симметрических операторов с неплотной областью определения // Мат. форум. Исследования по мат. анализу.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—Т. 1.—С. 206–214.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 146–147.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, РАЗЛОЖЕНИЯ ГЕФФЕРА И ДВОЙСТВЕННОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

И. А. Филипьев (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В докладе будет проведен анализ условий, при которых с помощью преобразования Фурье — Лапласа функционалов можно получить естественное описание пространств, сопряженных к пространствам ультрадифференцируемых на компакте K функций $\mathcal{E}_\Phi(K)$, задаваемых весовой последовательностью Φ. Используемые без дополнительных пояснений обозначения можно найти в [1] (см. также [2]).

Задача описания сопряженного пространства для неквазианалитических и квазианалитических классов $\mathcal{E}_\Phi(K)$ исследовалась в работах M. Neymark'а, B. A. Taylor'а, H. Komatsu, R. Meise, И. Х. Мусина, А. В. Абанина, T. Meyer'а, T. Rösner'а. В них в качестве удобной и естественной реализации сопряженного пространства участвуют пространства целых функций $\mathcal{H}_\Phi(K)$. Все упомянутые авторы формулировали некоторые конкретные ограничения на Φ, при которых удается реализовать определенную схему рассуждений и доказать тем самым, что преобразование Фурье — Лапласа $\mathcal{F}$ устанавливает изоморфизм между $(\mathcal{E}_\Phi(K))'_b$ и $\mathcal{H}_\Phi(K)$. В представляемой работе показано, что следующее общее свойство весовых последовательностей является определяющим для двойственности $(\mathcal{E}_\Phi(K))'_b \overset{\mathcal{F}}{\simeq} \mathcal{H}_\Phi(K)$. Отметим, что основополагающими для выделения этого свойства были работы [3, 4], основанные на применении результатов Л. Хёрмандера о разрешимости неоднородных уравнений Коши — Римана с весовыми оценками.

Для выпуклой функции φ и числа $m \in \mathbb{N}_0$ обозначим через $\mathcal{A}_{\varphi,m}(K)$ линейное пространство всех целых в $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ функций $G(z,\zeta)$, удовлетворяющих при некотором $C = C(G) > 0$ оценке

$$|G(z,\zeta)| \leqslant C(1+\|z\|)^m e^{h_K(\operatorname{Im} z)+\varphi(\ln^+|\zeta|)}, \quad z,\zeta \in \mathbb{C}^N.$$

Для возрастающей (убывающей) последовательности выпуклых функций $\Phi := \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ положим

$$\mathcal{A}_{(\Phi)}(K) := \bigcup_{m=0}^\infty \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{A}_{\varphi_n,m}(K)$$

(соответственно,

$$\mathcal{A}_{\{\Phi\}}(K) := \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\varphi_n,m}(K)\Big).$$

Условимся опускать скобки, если какое-либо утверждение касается пространств обоих типов.

Последовательность Φ будем называть *регулярной относительно выпуклого компакта* K, если:

1) для любой функции $g \in \mathcal{H}_\Phi(K)$ найдется функция $G \in \mathcal{A}_\Phi(K)$, для которой равенство $G(z,z) = g(z)$ верно всюду в $\mathbb{C}^N$;

2) для любой функции $G \in \mathcal{A}_\Phi(K)$, которая удовлетворяет условию $G(z,z) = 0$, $z \in \mathbb{C}^N$, найдутся такие функции $G_j \in \mathcal{A}_\Phi(K)$, $j = 1, \ldots, N$, при которых равенство $G(z,w) = \sum_{j=1}^{N} (z_j - w_j)\, G_j(z,w)$ верно всюду в $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$.

Основной результат, о котором пойдет речь в докладе, заключается в том, что регулярность Φ достаточна, а в одномерном случае и необходима, для двойственности $(\mathcal{E}_\Phi(K))'_b \overset{\mathcal{F}}{\simeq} \mathcal{H}_\Phi(K)$. Анализ конкретных ситуаций показывает, что, по-видимому, условия 1) и 2) регулярности не являются независимыми. Однако в общем случае вопрос об их независимости пока остается открытым.

В заключение отметим, что, как показывают результаты работы [5], связь между естественным описанием сопряженного и наличием продолжения голоморфных функций не ограничивается пространствами, рассмотренными выше.

Литература

1. *Абанин А. В., Филипьев И. А.* Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространствам бесконечно дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 3.—С. 485–500.
2. *Абанин А. В.* Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения.—М.: Наука, 2007.—222 с.
3. *Neymark M.* On the Laplace transform of functionals on classes of infinitely differentiable functions // Ark. Mat.—1968.—Band 7, № 44.—P. 577–594.
4. *Taylor B. A.* Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions // Comm. Pure Appl. Math.—1971.—Vol. 24.—P. 39–51.
5. *Напалков В. В.* Преобразование Лапласа и продолжение аналитических функций // Исследования по теории приближений.—Уфа, 1989.—С. 86–91.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 148.

POSITIVE QUASI-SIMILARITY AND INVARIANT SUBSPACES

Mert Çağlar (Turkey, İstanbul; İKU)

We will prove, removing the local quasi-nilpotence assumption in [1, theorem 10.55], that a positive operator B on an infinite-dimensional Banach lattice E which is positively quasi-similar to a positive operator on E dominated by a compact operator has a non-trivial closed invariant ideal.

References

1. *Abramovich Y. A.*, *Aliprantis C. D.* An Invitation to Operator Theory // Amer. Math. Soc. Rhode. Island: Providence, 2002.—Vol. 50 (Graduate Studies in Mathematics).

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 149–150.

ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА СМЕШАННЫХ РЯДОВ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ДИСКРЕТНО ЗАДАННОЙ ИНФОРМАЦИИ

Т. И. Шарапудинов (Россия, Махачкала; ЮМИ)

В различных областях приложений достаточно часто возникает следующая ситуация. В результате целенаправленных экспериментов получен ряд наблюдений (временной ряд)

$$y_j = f(t_j) + \eta_j \quad (j = 0, 1, \ldots, N-1), \tag{1}$$

где $f(t)$ — измеряемая величина, зависящая от времени $t \in [0, T]$ (искомая функция), t_j — момент времени завершения j-го эксперимента, η_j — случайные ошибки наблюдений. Задача заключается в том, чтобы оценить неизвестное значение $f(t)$ для любого $t \in [0, T]$, необязательно совпадающего с одним из моментов измерений t_j $(0 \leqslant j \leqslant N-1)$. Хорошо известно, что если есть основание считать, что искомая функция является достаточно гладкой на $[0, T]$, то для решения поставленной задачи применяют классический метод наименьших квадратов, согласно которому искомую функцию $f(t)$ оценивают алгебраическим полиномом $S_n(t)$, который доставляет минимум сумме $J(p_n) = \sum_{j=0}^{N-1} \left[y_j - P_n(t_j)\right]^2 \rho_j$ среди всех алгебраических полиномов P_n порядка n, то есть $J(s_n) = \min J(P_n)$. Для численной реализации этого метода еще П. Л. Чебышев предложил построить конечную последовательность полиномов τ_0, τ_1, …, τ_{N-1}, образующих ортонормированную систему на сетке $\Omega_N = \{t_j\}_{j=0}^{N-1}$, то есть $\sum_{j=0}^{N-1} P_n(t_j)\, P_m(t_j)\, \rho_j = \delta_{nm}$. Тогда искомый полином приобретает вид $S_n(t) = \sum c_k \tau_k(t)$. Следует отметить, что в настоящее время подобный метод оценивания достаточно часто применяется и для него разработаны эффективные численные методы и соответствующие алгоритмы. Этот метод дает удовлетворительные результаты в том случае, когда промежуток $[0, T]$ не слишком велик. Однако, если, как это бывает часто в прикладных задачах длина промежутка $[0, T]$ является достаточно большой и соответственно число наблюдений y_j также велико, то применение метода наименьших квадратов для всего набора наблюдений y_j сопряжено с преодолением ряда трудностей. В частности, для достижения удовлетворительной точности восстановления искомой функции посредством полинома $S_n(t)$ приходится брать степень n слишком большой. Это, в свою очередь, связано с возникновением неустойчивости счета при численном нахождении полинома $S_n(t)$. В этом случае приходится разбить промежуток $[0, T]$ на несколько частей $[0, T_1]$, $[T_1, T_2]$, $\ldots$, $[T_{l-1}, T_l]$ и применять метод наименьших квадратов на каждом из промежутков $[T_{i-1}, T_i]$ отдельно. В результате мы получим последовательность полиномов $S^i_{n_i}(t)$. В этом случае возникает следующее неудобство: соседние полиномы $S^i_{n_i}(t)$ и $S_{n^{i+1}_{i+1}}(t)$ не совпадают между собой в точках разбиения T_i и тем самым исходную гладкую функцию $f(t)$ мы заменяем разрывной функцией, составленной из найденных полиномов $S_{n_i}(t)$.

В нашей работе в моменты наблюдений T_j являются равноудаленными предлагается несколько иной метод оценивания искомой функции $f(t)$, основанный на применении так называемых смешанных рядов по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке, описываемых в работах [1], [2]. Компьютерные эксперименты, проведенные нами подтверждают эффективность предлагаемого нами метода.

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения.—Махачкала: Изд-во ДНЦ РАН, 2004.—276 с.
2. *Шарапудинов Т. И.* Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Вестник ДНЦ РАН.—2004.—С. 12–23.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 151.

РАЗЛОЖЕНИЕ ОБРАТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ НА ПРОСТЫЕ ДРОБИ

В. Б. Шерстюков (Россия, Москва; НИЯУ МИФИ)

Разложение на простые дроби является эффективной формой представления функций, нашедшей разнообразные применения в комплексном анализе, теории дифференциальных уравнений, теории вероятности. Вопросы представления обратной величины целой функции суммой соответствующего ряда простых дробей тесно связаны с теорией эрмитовых операторов, проблемой моментов, теорией представляющих систем и были предметом исследований М. В. Келдыша и И. В. Островского, М. Г. Крейна, Л. де Бранжа, Ю. Ф. Коробейника, Л. С. Маергойза и других математиков. Автором получено окончательное решение задачи о представлении обратной величины целой функции с простыми нулями, расположенными в полосе, в виде ряда простейших дробей. Результат является новым даже в случае вещественности всех нулей рассматриваемой функции и формулируется в терминах роста производной на последовательности корней функции.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 152.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ ТИП ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ НУЛЯМИ ЗАДАННОГО ШАГА И ВЕРХНЕЙ ПЛОТНОСТИ

О. В. Шерстюкова (Россия, Москва; НИЯУ МИФИ)

Рассматривается целая функция порядка меньше единицы, все корни которой расположены на одном луче. Найдено наименьшее возможное значение, которое может принимать тип такой функции, при условии, что верхняя плотность и шаг ее корней заданы. В явном виде построена экстремальная функция. Без учета шага последовательности нулей решение задачи о наименьшем типе было получено ранее А. Ю. Поповым. Установленный результат применяется в вопросах полноты систем экспонент в пространстве аналитических в круге функций.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 153–154.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПРОСТРАНСТВ КЁТЕ

М. А. Шубарин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть дана бесконечная матрица $A = (a_{p,n})_{p,n=1}^{+\infty}$ такая, что для любого p существуют q, C: $0 < a_{p,n} \leqslant Ca_{q,n}$ при всех n. Пространством Кёте называют векторное пространство

$$K(A) = \left\{ x = (x_n) : \forall\, p \ \|x\|_p := \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| a_{p,n} < +\infty \right\},$$

наделенное топологией пространства Фреше, которая определяется набором норм $(\|\cdot\|_p)$. В статье будут изучаться интерполяционные свойства следующих типов пространств Кёте: степенные пространства конечного и бесконечного типа $E_\delta(\lambda, a)$, $E_\delta(a)$; первого $E(\lambda, a)$, $\tilde{E}(\mu, a)$ и второго рода $F(\mu, a)$. Обзор основных свойств этих пространств содержится в [1]. Всюду ниже предполагается, что $a = (a_n)$ — бесконечная последовательность положительных чисел, $\lambda = (\lambda_n)$, $\lambda_n \in (0, 1]$, $\mu = (\mu_n)$, $\mu_n \geqslant 1$.

1. $E_\delta(\lambda, a) := K(A)$, $\delta \in \big(-\infty, +\infty\big]$, $\delta_p \uparrow \delta$, $a_{p,n} = \exp(\delta_p + \lambda_n)a_n$.
2. $E_\delta(a) := E_\delta\big(\nu, a\big)$, $\nu_n \equiv 0$.
3. $E(\lambda, a) := K(A)$, где $a_{p,n} = \exp\left(-\frac{1}{p} + \lambda_n p\right) a_n$.
4. $F(\mu, a) := K(A)$, где $a_{p,n} = \exp\left(-\frac{1}{p} + \min(\mu_n, p)\right) a_n$.
5. $\tilde{E}(\mu, a) := K(A)$, где $a_{p,n} = \exp\left(-\frac{1}{p} + \max(\mu_n, p)\right) a_n$.

Лемма 1. *При сделанных предположениях пространства $E(\lambda, a)$ и $\tilde{E}(\lambda^{-1}, a)$, $\lambda^{-1} := (\lambda_n^{-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, изоморфны. Точнее, отображение $T : E(\lambda, a) \to \tilde{E}(\lambda^{-1}, a)$, $Te_n := \exp(-\lambda_n^{-1})e_n$, продолжается до изоморфизма данных пространств. Необходимые определения (определения суммы и пересечения пространств из интерполяционный пары пространств Фреше) из теории интерполяции линейных операторов цитируются по* [2, 3].

Лемма 2. *При сделанных предположениях*

$$\tilde{E}(\mu, a) = E_0(\mu, a) \cap E_\infty(a), \quad F(\mu, a) = E_0(\mu, a) + E_\infty(a).$$

Следствие 1. *Если*

$$T : \left[E_0(\mu, a), E_\infty(a)\right] \to \left[E_0(\mu', a'), E_\infty(a')\right],$$

то этот оператор непрерывно действует из $\left[\tilde{E}(\mu, a), F(\mu, a)\right]$ *в* $\left[\tilde{E}(\mu', a'), F(\mu', a')\right]$.

Следствие 2. *Если*

$$\left[E_0(\mu, a), E_\infty(a)\right] \cong \left[E_0(\mu', a'), E_\infty(a)'\right],$$

то $\left[\tilde{E}(\mu, a), F(\mu, a)\right] \cong \left[\tilde{E}(\mu', a'), F(\mu', a')\right]$.

Литература

1. *Aytuna A., Djakov P. B., Goncharov A. P., Terzioğlu T., Zahariuta V. P.* Some open problem in the theory of locally convex spaces // Linear Topol. Spaces and Complex Anal. I.—Ankara: METU - TÜBITAK, 1994.—P. 147–165.
2. *Крейн С. Г., Семенов Е. М., Брудный Ю. А.* Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ.—М.: ВИНИТИ, 1986.—Т. 24.—С. 3–164.
3. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.—М.: Мир, 1980.—664 с.

Секция II

Дифференциальные и интегральные уравнения

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 157–158.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ФОРМУЛИРОВКИ ОПЕРАТОРНЫХ СООТНОШЕНИЙ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ТРЕЩИН[1]

П. А. Азарова (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Рассмотрены установившиеся колебания бесконечной ортотропной упругой полосы S толщины h, ослабленной внутренней вертикальной трещиной с вершинами $(0,a)$ и $(0,b)$, где $0 < a < b < h$. Нижняя грань полосы жестко защемлена, на верхней грани приложена нагрузка $p_j(x_1)\,e^{i\omega t}$, $j = 1,2$. После отделения временного множителя краевая задача имеет вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad u_j(x_1,0) = 0, \quad \sigma_{j2}(x_1,h) = p_j(x_1), \tag{1}$$

где $i,j,k,l = 1,2$, u_i — компоненты вектора перемещений, $\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}$ — компоненты тензора напряжений, C_{ijkl} — модули упругости материала, ρ — плотность среды.

Задача идентификации трещины состоит в определении параметров a и b по известным полям перемещений на верхней грани полосы

$$u_j(x_1,h) = g_j(x_1), \quad j = 1,2. \tag{2}$$

Для построения операторных соотношений используем преобразование Фурье. Отметим, что u_k терпят конечные скачки $\chi_k(x_2) = u_k(x_1-0,x_2) - u_k(x_1+0,x_2)$.

Применив преобразование Фурье к (1) и (2), и положив $\alpha = 0$, получим систему развязанных дифференциальных уравнений

$$\tilde{U}_i'' + k_i^2\tilde{U}_i + f_i = 0, \quad i = 1,2, \tag{3}$$

с граничными условиями

$$\tilde{U}_j(0) = 0, \quad C_{66}\tilde{U}_1'(h) = \tilde{P}_1, \quad C_{22}\tilde{U}_2'(h) = \tilde{P}_2 \tag{4}$$

[1]Работа поддержана ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. и грантом Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 10-01-00194.

и дополнительной информацией

$$\tilde{U}_j(h) = \tilde{G}_j, \tag{5}$$

где $\tilde{U}_j(x_2) = \tilde{u}_j(0, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_j(x_1, x_2)\, dx_1$, $k_1^2 = \rho\omega^2 C_{66}^{-1}$, $k_2^2 = \rho\omega^2 C_{22}^{-1}$, $\gamma = C_{12} C_{22}^{-1}$, $f_1 = \chi_2'$, $f_2 = \gamma\chi_1'$, $\tilde{P}_j = \tilde{p}_j(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_j(x_1)\, dx_1$ и $\tilde{G}_j = \tilde{g}_j(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_j(x_1)\, dx_1$.

Найдя решение (3)–(5), получим:

$$\mu_i k_i \int\limits_a^b \varphi_i(y) \sin k_i y\, dy = -\tilde{G}_i \cos k_i h + \frac{\tilde{P}_i^0 \sin k_i h}{k_i}, \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

где $\tilde{P}_1^0 = \tilde{P}_1 C_{66}^{-1}$, $\tilde{P}_2^0 = \tilde{P}_2 C_{22}^{-1}$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \gamma$, $\varphi_1 = \chi_2$, $\varphi_2 = \chi_1$.

Отметим, что неизвестными в (6) являются a, b и $\varphi_i(y)$, а $\tilde{G}_i$ зависит от частоты ω. Для малых трещин ($b - a \ll 1$) можно считать, что $\varphi_i(y) = c_i\sqrt{(b-y)(y-a)}$, где $c_i = \mathrm{const}$. Если информация (2) задана при двух значениях частот ω_0 и $2\omega_0$, то можно получить систему двух уравнений с неизвестными a и b

$$4\cos\left(k_{i0}\frac{a+b}{2}\right) = \frac{2\tilde{G}_i(2\omega_0)\, k_{i0} \cos 2k_{i0}h - \tilde{P}_i^0 \sin 2k_{i0}h}{\tilde{G}_i(\omega_0)\, k_{i0} \cos k_{i0}h - \tilde{P}_i^0 \sin k_{i0}h}, \quad i = 1, 2, \tag{7}$$

где $k_{i0} = k_i(\omega_0)$, а $k_i(2\omega_0) = 2k_i(\omega_0) = 2k_{i0}$.

Таким образом, для малых трещин определение параметров вертикальной трещины сведено к решению нелинейной системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Литература

1. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела.—М.: Физматлит, 2007.—223 с.
2. *Баранов И. В., Булгурян О. В., Ватульян А. О.* Интегральные уравнения для упругого слоя с трещиной произвольной конфигурации и их исследование // Вестник ДГТУ.—2004.—Т. 4, № 3.—С. 257–269.
3. *Ватульян А. О., Явруян О. В.* Реконструкция наклонных трещин в слое // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2005, № 2.—С. 36–39.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 159–160.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

К. М. Айшаев (Россия, Нальчик; КБГУ)

Рассмотрим нагруженное уравнение

$$u_y - u_{xxx} = \lambda u(x_0, y), \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $y = 0$, $x = l$, $y = T$, $x = 0$, соответственно.

Задача B. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega})$ с непрерывной вплоть до $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant T$ производной первого порядка по x, удовлетворяющее условиям:

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \tag{2}$$

$$u(x_0, y) = \alpha(y)\, u(l, y) + \beta(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant T, \tag{3}$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \tag{4}$$

где x_0 — фиксированная точка из интервала $0 < x < l$, $\psi(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ — заданные функции, непрерывные в замыкании области их определения, причем $\alpha(y) \neq 0$.

Обозначим $u(l, y) = \varphi_3(y)$. Тогда решение задачи (1)–(4) и $u(l, y) = \varphi_3(y)$ имеет вид:

$$U(x, y) = U_0(x, y) - \frac{\lambda}{\pi} \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_0^y G(x, y; \xi, \eta)\, d\eta \right\} U(x_0, \eta)\, d\xi, \tag{5}$$

где

$$U_0(x, y) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int\limits_0^y G_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta)\, \varphi_1(\eta)\, d\eta - \int\limits_0^y G_\xi(x, y; 0, \eta)\, \varphi_2(\eta)\, d\eta - \right.$$
$$\left. - \int\limits_0^y G_{\xi\xi}(x, y; 1, \eta)\, \varphi_3(\eta)\, d\eta + \int\limits_0^y G(x, y; \xi, 0)\, \psi(\xi)\, d\xi \right\},$$

$G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина, вид и свойства которой приводится в [1].

Равенство (5) перепишем в виде

$$U(x,y) = U_0(x,y) - \overline{\lambda} \int\limits_0^y M(x,y;\eta)\, U(x_0,\eta)\, d\eta, \quad \overline{\lambda} = -\frac{\lambda}{\pi}, \tag{6}$$

где обозначено $M(x, y; \eta) = \int_0^1 G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi$.

Положим в равенстве (6) $x = x_0$. Тогда получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $U(x_0, y)$

$$U(x_0,y) = U_0(x_0,y) - \overline{\lambda} \int\limits_0^y M(x_0,y;\eta)\, U(x_0,\eta)\, d\eta. \tag{7}$$

Функция $M(x, y; \eta)$ обладает такими же свойствами как и функция Грина $G(x, y; \xi, \eta)$. Поэтому обращая интегральное уравнение (7) через резольвенту $R(y, \eta)$, получим

$$U(x_0,y) = U_0(x_0,y) - \overline{\lambda} \int\limits_0^y R(y;\eta)\, U_0(x_0,\eta)\, d\eta. \tag{8}$$

После определения $U(x_0, y)$ приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно неизвестной функции $\varphi_3(y)$

$$\alpha(y)\, \varphi_3(y) + \overline{\lambda} \int\limits_0^y L(y;\eta)\, \varphi_3(\eta)\, d\eta = F(y). \tag{9}$$

где $L(y, \eta) = G_{\xi\xi}(0, y; 1, \eta)$, $F(y)$ выражается через функцию Грина и заданные функции $\psi(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$. Интегральное уравнение (9) однозначно разрешимо в классе $C[0, T]$.

Литература

1. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.—Ташкент: ФАН, 1979.—238 с.
2. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения.—М.: ИЛ, 1962.—352 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 161–162.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Х. К. Арахова (Россия, Нальчик; КБГУ)

Рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial y} + \sum\limits_{i=0}^{2} a_i(x,y)\,\frac{\partial^i u}{\partial x^2}, & y > 0, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + b(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + d(x,y)\,u, & y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < l,\ -h_2 < y < h_1\}$; $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$; $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$; $u(x,0) = \tau(x)$, $u_y(x,0) = \nu(x)$.

Задача A. Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^{3,1}_{x,y}(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2)$, удовлетворяющую в области $\Omega \setminus (y = 0)$ уравнению (1) и граничным условиям

$$\begin{gathered} u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(l,0) = \varphi_2(y), \\ u_x(0,y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h_1, \end{gathered} \tag{2}$$

$$u(0,y) = \chi_1(y), \quad u(l,y) = \chi_2(y), \quad -h_2 \leqslant y \leqslant 0, \tag{3}$$

где $\varphi_i(y)$, $(i = \overline{1,3})$, $\chi_j(y)$ $(j = \overline{1,2})$ — заданные достаточно гладкие функции, причем выполняются условия согласования

$$\begin{gathered} \tau(0) = \chi_1(0), \quad \tau'(0) = \chi_2(0), \quad \tau(l) = \chi_3(0), \\ \nu(0) = \chi_1'(0), \quad \nu(l) = \chi_2'(0). \end{gathered}$$

Переходя к пределу при $y \to +0$, $y \to -0$ в уравнении (1), соответственно, будем иметь:

$$\tau'''(x) - \nu(x) + a_0(x,0)\,\tau(x) + a_1(x)\,\tau'(x) + a_2(x,0)\,\tau''(x) = 0, \tag{4}$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(l) = \varphi_2(0), \quad \tau'(0) = \varphi_3(0), \tag{5}$$

$$\nu''(x) + b(x,0)\,\tau'(x) + c(x,0)\,\nu(x) + d(x,0)\,\tau(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{6}$$

$$\nu(0) = \chi_1'(0), \quad \nu(l) = \chi_2'(0). \tag{7}$$

Решая задачу (6), (7) находим $\nu(x)$, которая выражается через $\tau(x)$ и $\tau'(x)$. Подставляя найденное значение $\nu(x)$ в (4), приходим к задаче (4), (5).

При определенных предположениях относительно коэффициентов уравнения (4) доказана однозначная разрешимость задачи (4), (5). Следовательно, задача А распадается на две

Задача А$_1$. Найти регулярное в области Ω_1 решение уравнения (1) при $y > 0$, непрерывное вместе со своей производной u_x в $\Omega_1 \cup AA_0 \cup BB_0$, удовлетворяющее краевым условиям (2) и $u(x,0) = \tau(x)$, однозначная разрешимость которой доказана в работе [1].

Задача А$_2$. Найти регулярное в области Ω_2, непрерывное в $\bar{\Omega}_2$ решение уравнения (1) при $y < 0$, удовлетворяющее условиям (3) и $u(x,0) = \tau(x)$, $u_y(x,0) = \nu(x)$.

С помощью функции Римана доказана однозначная разрешимость задачи А$_2$.

Литература

1. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа.—Ташкент: ФАН, 1979.—238 с.
2. *Шхануков М. Х.* Локальные и нелокальные задачи для уравнений третьего порядка.—-Нальчик: 1985.—225 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 163–165.

АНАЛОГ ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ — САМАРСКОГО ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧНСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

З. Х. Алоева (Россия, Нальчик; КБГУ)

Рассматривается нагруженное уравнение третьего порядка

$$0=\begin{cases}u_{xxx}-u_y+\bar\lambda_1 u(\bar x,\bar y), & y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}+\bar\lambda_2 u(x,0), & y<0\end{cases}\tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, B_0, A_0B_0 прямых $x=0$, $x=l$, $y=h$ соответственно при $y>0$, и характеристиками AC : $x+y=0$, BC : $x-y=l$ уравнения (1) при $y<0$; $\Omega_{1(2)}=\Omega\cap\{y>0$ $(y<0)\}$; J_0 — интервал $(0,l)$, J_1 — интервал $(0,h)$.

Здесь положено, что: а) $(\bar x,\bar y)=(x_0,y)$, $0<x_0<l$, $\bar\lambda_1=\lambda_1(y)\in C(\bar J_1),\bar\lambda_2=0$, или б) $(\bar x,\bar y)=(x,0)$, $\bar\lambda_1=\lambda_1=\mathrm{const}$, $\bar\lambda_2=\lambda_2=\mathrm{const}$. Пусть имеет место случай а)

Задача $H[\theta_0,\theta_1]$. Найти функцию $u(x,y)$, со следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\bar\Omega)\cap C^1(\Omega\cup AA_0)\cap C^{3,1}_{x,y}(\Omega_1)\cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega_2)$;

2) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) в области Ω при $y\neq 0$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{gathered}u(0,y)=\varphi_1(y),\quad u_x(0,y)=\varphi_2(y),\\ u(x_0,y)=a(y)\,u(l,y)+b(y),\quad y\in\bar J_1,\end{gathered}\tag{2}$$

$$\begin{gathered}\alpha(x)\,u\big[\theta_0(x)\big]+\beta(x)\,u\big[\theta_1(x)\big]+\alpha_1(x)\,\frac{d}{dx}\,u\big[\theta_0(x)\big]+\\ +\beta_1(x)\,\frac{d}{dx}\,u\big[\theta_1(x)\big]=\delta(x),\quad x\in J_0,\end{gathered}\tag{3}$$

где $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ — аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1) при $y<0$, выходящих из точек $(x,0)$, с характеристиками AC и BC соответственно; $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $a(y)$, $b(y)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Решение задачи Коши $u(x,0)=\tau(x)$, $u_y(x,0)=\nu(x)$ для уравнения $u_{xx}-u_{yy}=0$ задается формулой [1]

$$u(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu(t)\,dt, \tag{4}$$

Учитывая (4), в краевом условии (3) получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_2 на линию $y=0$

$$\begin{gathered}\bigl(\alpha_1(x)+\beta_1(x)\bigr)\tau'(x)+\bigl(\alpha(x)+\beta(x)\bigr)\tau(x)-\\ -\bigl(\alpha_1(x)-\beta_1(x)\bigr)\nu(x)-\alpha(x)\int\limits_0^x\nu(t)\,dt-\beta(x)\int\limits_x^l\nu(t)\,dt=\\ =2\delta(x)+\alpha(x)\tau(0)-\beta(x)\tau(l),\end{gathered}\tag{5}$$

Переходя к пределу в уравнении (1) при $y\to+0$, получаем функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ принесенное из области Ω_1 на линию $y=0$

$$\tau'''(x)-\nu(x)+\lambda_1(0)\,\tau(x_0)=0. \tag{6}$$

Исключая из (5) и (6) $\nu(x)$, и учитывая граничные условия (2), получим нелокальную задачу для нагруженного неоднородного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка

$$\begin{gathered}\tau'''(x)+n_1(x)\,\tau'(x)+n_2(x)\,\tau(x)=n_3(x)\bigl(\tau(l)-\nu_1(l)\bigr)-\\ -p(x)\int\limits_0^x n_4(t)\,\tau(t)\,dt+n_5(x)-\lambda_1(0)\bigl(a(0)\,\tau(l)+b(0)\bigr),\end{gathered}\tag{7}$$

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\quad \tau'(0)=\varphi_2(0),\quad \tau(x)=a(0)\,\tau(l)+b(0), \tag{8}$$

где $n_i(x)$, $i=\overline{1,5}$, — известные функции.

Решая задачу (7), (8), находим $\tau(x)$. После определения неизвестной функции $\tau(x)$ приходим к задаче (2), $u(\alpha,0)=\tau(x)$ для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками (1) при $y>0$, единственность и существование решения которой доказывается методом эквивалентной редукции к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. В области Ω_2 решения задачи $H[\theta_0, \theta_1]$ выписывается в замкнутом виде. Случай б) исследуется аналогичным образом.

Литература

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1977.—73 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 166–167.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЕСОВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С. Н. Асхабов (Россия, Грозный; ЧГУ)

В работе рассматриваются нелинейные уравнения

$$F\big[x,u(x)\big]+\frac{b(x)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\frac{b(t)u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=f(x), \tag{1}$$

$$u(x)+\frac{b(x)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\frac{b(t)\,F\big[t,u(t)\big]\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=f(x), \tag{2}$$

$$u(x)+F\left[x,\frac{b(x)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\frac{b(t)\,u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right]=f(x), \tag{3}$$

содержащие весовые операторы дробного порядка вида

$$(B^\alpha_{0+}u)(x)=\frac{b(x)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\frac{b(t)\,u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad 0<\alpha<1,$$

где функция $b(x)\neq 0$ почти всюду на полуоси $[0,\infty)$. Методом монотонных (по Браудеру — Минти) операторов доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений в вещественных пространствах $L_p(\rho)$ с общим (не обязательно степенным) весом $\rho(x)$, $1<p<\infty$, и получены оценки норм решений. При этом существенно используется найденное в [1] условие на функцию $b(x)$, обеспечивающее непрерывное действие оператора B^α_{0+} из $L_p(\rho)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(\rho^{1-p'})$, $p'=p/(p-1)$, и его положительность:

$$\langle B^\alpha_{0+}u,u\rangle=\int\limits_0^\infty\left(\frac{b(x)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\frac{b(t)\,u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right)u(x)\,dx\geqslant 0\quad\forall\,u(x)\in L_p(\rho).$$

В этой связи отметим работы [2, 3], где в пространствах $L_p(0,\infty)$ рассмотрены, соответственно, операторы B^{α}_{0+} и

$$(R^{\alpha}u)(x) = \frac{b_1(x)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{b_2(t)\,u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad 0<\alpha<1,$$

при условии, что $1<p<q=p/(1-\alpha p)$. В [2] дано непосредственное обобщение известной теоремы Харди — Литтлвуда, в которой $b(x)=1$. В [3] при условии монотонности одной из функций $b_1(x)$, $b_2(x)$ получены критерии ограниченности и компактности оператора R^{α} как оператора, действующего из $L_p(0,\infty)$ в $L_q(0,\infty)$. В [1] доказано, что если $p\in[2,\infty)$ и $b(x)\in L_{2p/\left[p(1+\alpha)-2\right]}(0,\infty)$, то оператор B^{α}_{0+} действует непрерывно из $L_p(0,\infty)$ в $L_{p'}(0,\infty)$ и является строго положительным. При этом функция $b(x)$ не обязана быть почти всюду положительной как в [2] (достаточно, чтобы она была почти всюду отлична от нуля). Кроме того, если в [2] взять $p<q=p'$, то получим, что $p=2/(1+\alpha)\in(1,2)$, тогда как в [1] $p\in[2,\infty)$ и можно брать $p=p'=2$. В [1] также доказано, что если $p\in[2,\infty)$ и $b_1(x), b_2(x)\in L_{2p/\left[p(1+\alpha)-2\right]}(0,\infty)$, то оператор R^{α} действует непрерывно из $L_p(0,\infty)$ в $L_{p'}(0,\infty)$. Следует отметить, что в [3] получен критерий существования в «малом» решения уравнения

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{u^p(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \varepsilon f(x), \quad x\in(0,a),\ a,\varepsilon\in(0,\infty).$$

В случае $b(x)=1$ уравнения (1)–(3) изучены в [1].

Литература

1. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свертки.—М.: Физматлит, 2009.—304 с.
2. *Andersen K. F., Sawyer E. T.* Weighted norm inequalities for the Riemann — Liouville and Weyl fractional integral operators // Trans. Amer. Math. Soc.—1988.—Vol. 308, № 2.—P. 547–558.
3. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* Весовые оценки операторов Римана — Лиувилля и приложения // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова.—2003.—Т. 243.—С. 289–312.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 168.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. Х. Аттаев (Россия, Нальчик; НИИ ПМА КБНЦ РАН)

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l, \ 0 < y < l\}$ рассмотрим нагруженное уравнение

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = \lambda\, u(x, x) + \mu\, u(y, y), \qquad (1)$$

где λ, μ — заданные константы. Предполагается, что a_x, b_x, c — функции, непрерывные в $\overline{\Omega}$.

В работе [1] А. М. Нахушевым для уравнения (1), когда правая часть имеет достаточно общий вид, исследована задача Гурса, ряд нелокальных задач, а также некоторые вопросы спектра однородной задачи Гурса в модельных случаях. В данной работе исследуется одна нелокальная задача для уравнения (1), которая является обобщением задачи с данными на непересекающихся характеристиках и задачи Гурса с данными на пересекающихся характеристиках.

Задача. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1), непрерывное в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющее условиям

$$\alpha_1(x)u(x, 0) + \beta_1(x)u(l, x) = \gamma_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$\alpha_2(x)u(0, x) + \beta_2(x)u(x, l) = \gamma_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

где α_i, β_i, γ_i, $i = 1, 2$, — заданные функции.

При определенных условиях на заданные функции методом функции Римана доказывается существование и единственность поставленной задачи. Показано, что в случае, когда $\beta_1(x) \equiv \alpha_2(x) \equiv 0$, условие $\lambda \neq 0$ и, когда $\alpha_1(x) \equiv \beta_2(x) \equiv 0$, условие $\mu \neq 0$ являются существенными. При нарушении этих условий соответствующие однородные задачи имеют бесчисленное множество решений.

В случае, когда $\alpha_1(x) \equiv \alpha_2(x) \equiv 0$ или $\beta_1(x) \equiv \beta_2(x) \equiv 0$, наша задача вырождается в задачу Гурса с данными на пересекающихся характеристиках и ее однозначная и безусловная разрешимость имеет место для любых значений параметров λ и μ.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—301 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 169–170.

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С КОНВЕКТИВНЫМ ЧЛЕНОМ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА

А. К. Баззаев (Россия, Владикавказ; СОГУ)

В цилиндре $Q_T = G \times (0, T]$, основанием которого служит p-мерный параллелепипед $G = \big\{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_\beta < \ell_\beta,\ \beta = \overline{1,p}\big\}$ с границей Γ, рассмотрим задачу:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k_\beta(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_\beta} = \lambda_{-\beta}(x,t)\,u - \mu_{-\beta}(x,t), & x_\beta = 0; \\ -k_\beta(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_\beta} = \lambda_{+\beta}(x,t)\,u - \mu_{+\beta}(x,t), & x_\beta = \ell_\beta, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{3}$$

$$Lu = \sum_{\beta=1}^{p} L_\beta u, \quad L_\beta u = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) + r_\beta(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_\beta} - q_\beta(x,t)\,u,$$

$0 < c_1 \leqslant k_\beta(x,t) \leqslant c_2,\ 0 \leqslant q_\beta(x,t) \leqslant c_3,\ |r_\beta(x,t)| \leqslant c_4,\ \lambda_{\pm\beta} \geqslant \lambda^* > 0,$

$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot u(x,\eta)}{(t-\eta)^\alpha}\,d\eta$, $0 < \alpha < 1$, — дробная производная Капуто порядка α, $\dot u = \frac{\partial u}{\partial t}$.

На отрезке $[0,T]$ введем сетку

$$\bar\omega_\tau' = \left\{0,\ t_{j+\frac{\beta}{p}} = \left(j + \frac{\beta}{p}\right)\tau,\ j = 0, 1, \dots, j_0 - 1;\ \beta = 1, 2, \dots, p\right\},$$

содержащую, наряду с узлами $t_j = j\tau$, фиктивные узлы $t_{j+\frac{\beta}{p}}$, $\beta = 1, 2, \dots, p$.

На каждом полуинтервале $\Delta_\beta = \left(t_{j+\frac{\beta-1}{p}}, t_{j+\frac{\beta}{p}}\right]$, $\beta = \overline{1,p}$ будем последовательно решать задачи

$$\frac{1}{p}\,\partial_{0t}^{\alpha} v_{(\beta)} - \widetilde{L}_\beta v_{(\beta)} - f_\beta = 0, \quad t \in \Delta_\beta,\ \beta = \overline{1,p}, \tag{4}$$

$$\begin{cases} k_\beta(x,t)\,\frac{\partial v_{(\beta)}}{\partial x_\beta} = \lambda_{-\beta}(x,t)\,v_{(\beta)} - \mu_{-\beta}, & x_\beta = 0; \\ -k_\beta(x,t)\,\frac{\partial v_{(\beta)}}{\partial x_\beta} = \lambda_{+\beta}(x,t)\,v_{(\beta)} - \mu_{+\beta}, & x_\beta = \ell_\beta, \end{cases} \tag{5}$$

полагая при этом

$$\begin{cases} v_{(1)}(x,0) = u_0(x), \quad v_{(\beta)}\left(x, t_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right) = v_{(\beta-1)}\left(x, t_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right); \\ v_{(1)}(x,t_j) = v_{(p)}(x,t_j), \quad j = 1,2,\ldots,j_0-1. \end{cases} \tag{6}$$

где $\widetilde{L}_\beta u = \varkappa_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) + r_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta} - q_\beta(x,t)u$, $\varkappa_\beta = 1/(1 + R_\beta)$, $R_\beta = 0,5h_\beta|r_\beta|/k_\beta$, $(\beta = \overline{1,p})$ — разностное число Рейнольдса.

$$b_\beta^{\pm} = r_\beta^{\pm}/k_\beta, \quad r_\beta^{+} = 0,5\bigl(r_\beta + |r_\beta|\bigr) \geqslant 0, \quad r_\beta^{-} = 0,5\bigl(r_\beta - |r_\beta|\bigr) \leqslant 0.$$

Разностный аналог задачи (1)–(6) имеет вид:

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t_{j+\frac{\beta-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{\beta-s}{p}}^{1-\alpha}\right)y_{\bar t}^{\frac{s}{p}} = \bar\Lambda_\beta y^{j+\frac{\beta}{p}} + \Phi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}}, \tag{7}$$

$$y(x,0) = u_0(x),$$

где

$$\bar\Lambda_\beta y^{(\beta)} = \begin{cases} \Lambda_\beta^{-} y^{(\beta)} = \dfrac{\left(a^{(1_\beta)} + r_{\beta,0}\right)y_{x_\beta,0}^{j+\frac{\beta}{p}} - \left(\lambda_{-\beta} + 0,5h_\beta d_\beta^{(0)}\right)y_0^{j+\frac{\beta}{p}}}{0,5h_\beta}, & x_\beta = 0; \\ \widetilde{\Lambda}_\beta y = \varkappa_\beta\left(a_\beta y_{\bar x_\beta}\right)_{x_\beta} + b_\beta^{+}a_\beta^{(+1)}y_{x_\beta} + b_\beta^{-}a_\beta y_{\bar x_\beta} - d_\beta y, & x_\beta \in \omega_{h_\beta}; \\ \Lambda_\beta^{+} y^{(\beta)} = -\dfrac{\left(a^{(N_\beta)} + r_{\beta,N_\beta}\right)y_{\bar x_\beta,N_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}} + \left(\lambda_{+\beta} + 0,5h_\beta d_\beta^{(N_\beta)}\right)y_{N_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}}}{0,5h_\beta}, & x_\beta = \ell_\beta, \end{cases}$$

$$\Phi_{(\beta)} = \begin{cases} \frac{\mu_{-\beta}}{0,5h_\beta} + f_{\beta,0}, & x_\beta = 0; \\ \varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}}, & x_\beta \in \omega_{h_\beta}; \\ \frac{\mu_{+\beta}}{0,5h_\beta} + f_{\beta,N_\beta}, & x_\beta = \ell_\beta. \end{cases}$$

Для решения разностной задачи (7) получена априорная оценка, из которой следует сходимость разностной схемы при условии $1/2 < \alpha \leqslant 1$.

Литература

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 171–172.

МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ж. А. Балкизов (Россия, Нальчик; КБГУ)

Рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} U_{xxx} - U_y - \lambda U, & y > 0, \\ yU_{xx} + U_{yy} + \alpha y^{-1} U_y, & -1/2 < \alpha < 0, \ y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в конечной односвязной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = h$ соответственно, расположенных в полуплоскости $y > 0$, и характеристиками $AC: \, x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 0$, $BC: \, x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = l$ уравнения (1) при $y < 0$. Часть области Ω, для которых $y > 0$ обозначим через Ω_1, а для которых $y < 0$ — Ω_2, J — интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача T. Найти функцию $U(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $U(x, y) \in C(\bar{\Omega})$;

2) $U(x, y)$ — регулярное решение уравнения (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$;

3) на линии $y = 0$ изменения типа уравнения (1), выполняются условия склеивания

$$\lim_{y \to 0+} U_y(x, y) = \lim_{y \to 0-} (-y)^{\alpha} U_y(x, y), \quad x \in J;$$

4) $U(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$\begin{gathered} U(0, y) = \varphi_1(y), \quad U_x(0, y) = \varphi_2(y), \\ U_{xx}(1, y) - \beta(y)\, U(1, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \\ u(x, y)\big|_{AC} = \psi(x), \end{gathered} \tag{2}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем выполнены обычные условия согласования.

Аналог задачи Коши: Найти решение $U(x, y)$ уравнения (1) при $y < 0$ из класса $C(\bar{\Omega}_2) \cap C^2(\Omega_2)$, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y \to 0-} U(x, y) = \tau(x), \lim_{y \to 0-} (-y)^{\alpha} U_y(x, y) = \nu(x). \tag{3}$$

Решение задачи (1), (3) имеет вид [1]:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) = \chi_1 \int\limits_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right]\left[t(1-t)\right]^{\beta_0} dt+ \\
+\chi_2(-y)^{1+\alpha} \int\limits_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right]\left[t(1-t)\right]^{\beta_1} dt,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $\chi_1 = \frac{\Gamma(-2\beta_1)}{\Gamma^2(-\beta_1)}$, $\chi_2 = -\frac{2}{3}\frac{\Gamma(6\beta_1+1)}{\Gamma^2(-\beta_0)}$, $\beta_0 = -\frac{5+2\alpha}{6}$, $\beta_1 = \frac{2\alpha-1}{6}$.

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y \to 0+$ и, используя представление (4), получены функциональные соотношения между следами искомого решения $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенные из областей Ω_1 и Ω_2 на линию $y = 0$. Путем исключения из функциональных соотношений неизвестной функции $\nu(x)$, относительно $\tau(x)$ получена краевая задача для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка. С помощью функции Грина эта задача эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, которое при определенных условиях на ядро однозначно и безусловно разрешимо.

После определения $\tau(x)$, неизвестная функция $\nu(x)$ определяется из функционального соотношения, приносимого из области Ω_1 на линию $y = 0$.

Следовательно, для нахождения решения задачи T в области Ω_1 приходим к задаче (1), (2) и $U(x,0) = \tau(x)$, исследованной в работе [2], а в области Ω_2 оно определяется по формуле (4).

Литература

1. *Ланин И. Н.* О задаче Коши для одного уравнения с начальными данными на линии параболического вырождения. Ученые записки. Серия физ.-мат.—1963.—№ 17.—С. 9–11.
2. *Елеев В. А.* Краевая задача для смешанного уравнения третьего порядка гиперболо-параболического типа // Укр. мат. журн.—1995.—Т. 47.—С. 20–29

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 173–174.

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

М. Х. Бештоков (Россия, Нальчик; КБГУ)

В цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \\ r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T,\end{gathered} \tag{1}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$\Pi(1,t) = \beta_1(t)\Pi(0,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered}0 < c_0 \leqslant \eta(x,t) \leqslant c_1, \quad 0 < c_2 \leqslant k(x,t) \leqslant c_3, \\ |r(x,t)|,\ |q(x,t)|,\ |\eta_t|,\ |k_t|,\ |k_x|,\ |r_x|\ \leqslant c_4, \\ k(x,t) \in C^{3,2}(\overline{Q}_T), \quad \eta(x,t) \in C^{3,3}(\overline{Q}_T), \\ r(x,t), q(x,t), f(x,t) \in C^{2,2}(\overline{Q}_T), \\ Q_T = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T\},\end{gathered} \tag{5}$$

где c_i, $i = \overline{0,4}$, — положительные числа,

$$\Pi(x,t) = k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\eta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

— полный поток.

Будем считать, что коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2)–(4) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости.

В предположении существования решения дифференциальной задачи (1)–(4) в цилиндре $\overline{Q}_T$ получена априорная оценка

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,1)} + \int\limits_0^t \|u_x\|_0^2 \, d\tau \leqslant M\left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,1)} \right),$$

где M — зависит только от входных данных задачи (1)–(4).

Из полученной априорной оценки следует единственность решения исходной задачи (1)–(4), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме пространства $W_2^1(0,1)$.

Литература

1. *Бештоков М. Х.* О сходимости разностной схемы нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Известия КБНЦ РАН.—2006.—Т. 16, № 2.—С. 86–93.
2. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.—407 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 175–176.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Ю. Г. Булычев (Россия, Шахты; ЮРГУЭС),
В. Ю. Булычев (Россия, Шахты; ЮРГУЭС),
Т. Н. Челахова (Россия, Ростов-на-Дону; ИЭИВЭС ЮФУ),
В. М. Челахов (Россия, Ростов-на-Дону; РВИРВ)

Характерная особенность жестких систем дифференциальных уравнений (СДУ) состоит в том, что даже незначительное увеличение шага интегрирования в используемых классических численных методах (типа Адамса, Рунге — Кутта и др.) может привести к резкому возрастанию («взрыву») погрешности. В этом проявляется известное для таких СДУ противоречие между достаточно большим шагом интерполяции полученного решения и допустимым шагом интегрирования.

В известных работах предложены численные методы, допускающие увеличение шага интегрирования вне пограничного слоя. Однако в основном рассматриваются неявные методы, которые не находят широкого применения при интегрировании жестких СДУ. Более предпочтительным является метод, позволяющий на основе заранее найденных первых интегралов (так называемой усеченной СДУ) устранить явление жесткости и, как следствие, обеспечить требуемую устойчивость используемых численных методов. Основной недостаток указанного метода состоит в том, что априорно считается известным аналитическое выражение для первых интегралов усеченной СДУ. Очевидно, на практике такое выражение может быть построено лишь приближенно и возникающая при этом погрешность зачастую вносит существенные искажения в конечные результаты численного интегрирования жестких СДУ.

В ряде работ развит параметрический подход к устранению жесткости, основанный на идее продолжения решения СДУ по дополнительному параметру — длине дуги интегральной кривой. Основной недостаток данного подхода состоит в том, что результирующие вычислительные затраты резко возрастают, если указанная длина принимает достаточно большие значения.

В данном докладе на основе указанной выше идеи продолжения решения по параметру (не обязательно по длине дуги интегральной кривой) рассматривается более общий подход к интегрированию жестких СДУ, снимающий ряд ограничений и позволяющий повысить устойчивость используемых численных методов интегрирования.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 177.

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

А. И. Вагабов (Россия, Махачкала; ДГУ, ЮМИ)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$l(y) \equiv \sum_{0\leqslant k+s\leqslant n} \lambda^k a_{ks}(x)\frac{d^s y}{dx^s} = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \ \ |a_{0n}(x)| > 0, \tag{1}$$

λ — комплексный параметр.

Частное решение уравнения (1) строится в виде

$$y(x) = \int\limits_a^b g_\tau(x,\xi,\lambda)\, f(\xi)\, d\xi, \quad \tau = \overline{0,n}, \tag{2}$$

где

$$g_\tau(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\tau} y_i(x,\lambda)\frac{A_{ni}(\xi,\lambda)}{\det Y(\xi,\lambda)}, & a \leqslant \xi \leqslant x, \\ -\sum\limits_{i=\tau+1}^{n} y_i(x,\lambda)\frac{A_{ni}(\xi,\lambda)}{\det Y(\xi,\lambda)}, & x \leqslant \xi \leqslant b, \end{cases}$$

причем $g_0(x,\xi,\lambda) = 0$ при $a \leqslant \xi \leqslant x$; $g_n(x,\xi,\lambda) = 0$ при $x \leqslant \xi \leqslant b$; $Y(x,\lambda)$ — матрица Вронского фундаментальных решений $y_1,\ldots,y_n$ уравнения $l(y) = 0$, $\{A_{ji}(x,\lambda)\}_1^n$ — матрица, присоединенная к $Y(x,\lambda)$.

Применение формулы (2) позволяет упрощенно оценивать резольвенты краевых задач, связанных с уравнением (1).

Литература

1. *Вагабов А. И.* Об асимптотике по параметру решений дифференциальных уравнений с коэффициентами из $L_2(a,b)$ // Докл. РАН.—2008.—Т. 419, № 1.—С. 10–13.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 178–179.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА — БИЦАДЗЕ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

З. Х. Гучаева (Россия, Нальчик; КБГУ)

Рассмотрим уравнение Лаврентьева — Бицадзе

$$u_{xx} + \operatorname{sign} y u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, \ -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha, \beta = \mathrm{const} > 0$.

Пусть $\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (y < 0)$ — соответственно эллиптическая и гиперболическая части смешанной области Ω, $AB = \{(x, y) : x \in (0, 1), \ y = 0\}$.

Задача. Найти в области Ω решение $u = u(x, y)$ уравнения (1) из класса $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, \beta) = \psi_1(x), u(x, -\alpha) = \psi_2(x), 0 < x < 1, \tag{2}$$

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \int\limits_0^1 u(x, y) dx = \varphi_2(y), -\alpha < y < \beta. \tag{3}$$

Доказана следующая

Теорема. *Пусть*

1) $\triangle = \operatorname{tg} 2\pi k\alpha + \operatorname{th} 2\pi k\beta \neq 0, \ \forall\, k \in N;$

2) $\psi_i(x) \in C^4[0, 1]$, $\varphi_i(y) \in C^4[-\alpha, 0] \cap C^4[0, \beta], \ i = 1, 2;$

3) $\psi_i^{(n)}(0) = \psi_i^{(n)}(1)$, $\varphi_i^{(n)}(0) = \varphi_i^{(n)}(-\alpha) = \varphi_i^{(n)}(\beta) = 0, \ n = 0, 2, \ i = 1, 2;$

4) $\int_{-\alpha}^0 \varphi_1^{(4)}(y) \sin \frac{\pi k}{\alpha} y \, dy = O(\cos \frac{\pi k}{\alpha})$, $\int_0^\beta \varphi_2^{(4)}(y) \sin \frac{\pi k}{\beta} y \, dy = O(\cos \frac{\pi k}{\beta}), \ k \to \infty;$

5) $\int_0^1 \psi_1^{(4)} \sin 2\pi kx \, dx = O(\cos 2\pi k\alpha)$, $\int_0^1 \psi_2^{(4)}(x) \sin 2\pi kx\pi \, dx = O(\cos 2\pi k\beta), \ k \to \infty,$

Тогда существует единственное решение задачи (1)–(3).

Методом Фурье [1] решение задачи (1)–(3) найдено в виде ряда

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left[A_k\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi k}{2\beta}(2x-1)}{\operatorname{sh}\frac{\pi k}{2\beta}}-B_k\frac{\beta\operatorname{sh}\frac{\pi k}{\beta}x}{2\pi k\operatorname{sh}^2\frac{\pi k}{2\beta}}\right]\sin\frac{\pi k}{\beta}+\right.$$
$$\left.+\frac{P_k\operatorname{sh}2\pi ky+L_k\operatorname{sh}2\pi k(\beta-y)}{2\operatorname{sh}2\pi k\beta}\sin 2\pi kx\right],\quad y>0, \tag{4}$$

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left[a_k\frac{\sin\frac{\pi k}{2\alpha}(2x-1)}{\sin\frac{\pi k}{2\alpha}}+b_k\frac{\alpha\sin\frac{\pi k}{\alpha}x}{2\pi k\sin^2\frac{\pi k}{2\alpha}}\right]\sin\frac{\pi k}{\alpha}y+\right.$$
$$\left.+\frac{N_k\cos 2\pi k(\alpha-y)-M_k\sin 2\pi ky}{\sin 2\pi k\alpha}\sin 2\pi kx\right],\quad y<0,$$

$$a_k=-\frac{2}{\alpha}\int\limits_{-\alpha}^{0}\varphi_1(y)\sin\frac{\pi k}{\alpha}y\,dy,\quad b_k=-\frac{2}{\alpha}\int\limits_{-\alpha}^{0}\varphi*_2(y)\sin\frac{\pi k}{\alpha}y\,dy,$$

$$A_k=\frac{2}{\beta}\int\limits_{0}^{\beta}\varphi_1(y)\sin\frac{\pi k}{\beta}y\,dy,\quad B_k=\frac{2}{\beta}\int\limits_{0}^{\beta}\varphi*_2(y)\,dy,$$

$$\varphi*_2(y)=\varphi_2''(y),\quad \varphi*_2(y)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\sin\frac{\pi k}{\beta}y,$$

$$M_k=2\int\limits_{0}^{1}\psi_2(x)\sin 2\pi kx\,dx,\quad P_k=2\int\limits_{0}^{1}\psi_1(x)\sin 2\pi kx\,dx,$$

$$2N_k=(P_k\sin 2\pi k\alpha+2M_k\operatorname{sh}2\pi k\beta)/\triangle,$$
$$L_k=(P_k\cos 2\pi k\alpha+2M_k\operatorname{sh}2\pi k\beta\operatorname{ctg}2\pi k\alpha)/\triangle.$$

Доказана равномерная сходимость рядов (4), (5) и их производных до второго порядка по x и y.

Литература

1. *Сохадзе Р. И.* Первая краевая задача для уравнения смешанного типа с весовыми условиями склеивания вдоль линии параболического вырождения // Дифференциальные уравнения.—1981.—Т. 17, № 1.—С. 150–156

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 180–181.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ДРОБНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ПРОИЗВОДНОЙ

А. М. Дигурова (Россия, Владикавказ; СОГУ)

В последнее время для описания тепловых и диффузионных потоков широко применяется язык дробных производных. Описание структуры сильно-пористой (фрактальной) среды приводит также к дифференциальным уравнениям с дробной по времени производной [1].

В области $Q = \{(x,t) : 0 < x < \ell,\ 0 < t < T\}$, рассмотрим задачу

$$D_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x,t)\,u + f(x,t), \quad 0 < x < \ell,\ 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

$$k\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{u(0,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}, \tag{2}$$

$$k\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\ell} = 0, \tag{3}$$

$$D_{0t}^{\alpha-1} u = u_0(x), \tag{4}$$

где $k(x,t) \geqslant c > 0$, D_{0t}^{α} — оператор дробного дифференцирования [2], $0 < \alpha < 1$.

Допустив существование регулярного решения задачи (1)–(4), имеет место следующая априорная оценка:

$$\|U\|_0^2 \leqslant M(t)\big(\|f\|_{2,Q_t}^2 + \|u_0(x)\|_0^2 + U^2(0,0)\big), \tag{5}$$

где

$$U = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}.$$

Из априорной оценки (5) следует единственность решения задачи (1)–(4).

Построение разностной схемы. Устойчивость и сходимость. В замкнутой области $\bar{Q}_t$ зададим сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(ih, j\tau)\}$ $i = 0, 1, \ldots, j_0$. С шагами $h = \frac{\ell}{N}$, $\tau = \frac{T}{j_0}$. Обозначим через y_i^j значение в узле (x_i, t_j) сеточной функции y, определенной на $\bar{\omega}_{h\tau}$.

Дифференциальной задаче (1)–(4) поставим в соответствие разностную схему

$$\begin{gathered} \Delta^\alpha_{0t_j} y = \bar{\Lambda} y^{(\sigma)} + \phi, \\ y(x_i, 0) = u_0(x_i), \\ y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1-\sigma) y, \quad y = (x_i, t_j), \quad \hat{y} = (x_i, t_j + 1), \end{gathered} \tag{6}$$

где оператор $\bar{\Lambda}$ определяется следующим образом

$$\bar{\Lambda} y = \begin{cases} \Lambda^- y = \frac{a_1 y_{x,0} - 0{,}5 h d_0 y_0}{0{,}5h} - \frac{1}{0{,}5h\Gamma(2-\alpha)} \sum\limits_{s=1}^{j} \left(t^{1-\alpha}_{j-s+1} - t^{1-\alpha}_{j-s}\right) y^s_{\bar{t},0}, & x = 0, \\ \Lambda y = (a y_{\bar{x}})_x - dy, & x \in \omega_h, \\ \Lambda^+ y = -\frac{a_1 y_{\bar{x},N} + 0{,}5 h d_N y_N}{0{,}5h}, & x = \ell, \end{cases}$$

$$\phi = \begin{cases} \varphi^- = f(x_0, t_{j+\frac{1}{2}}), & x = 0, \\ \varphi = f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}), & x \in \omega_h, \\ \varphi^+ = f(x_N, t_{j+\frac{1}{2}}), & x = \ell. \end{cases}$$

С помощью принципа максимума и на основании замечания 1 к теореме 3 [3, Дополнение] имеет место оценка

$$\|y^{j+1}\|_{C_h} \leqslant \frac{1}{\beta_*}\big(|\bar{\mu}_1(t_{j'})| + |\bar{\mu}_2(t_{j'})|\big) + \|y^0\|_{C_h} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \|\varphi^{j'}\|_{C_h}. \tag{7}$$

Из (7) следует устойчивость и сходимость решения разностной задачи (6) к решению дифференциальной задачи (1)–(4) со скоростью $O(h^2 + \tau)$.

Литература

1. *Нигматуллин Р. Р.* Решение обобщенного уравнения переноса в среде с фрактальной геометрией // Phys. Stat. Solidi (b).—1986.—Vol. 133.—P. 425.
2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
3. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—415 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 182–183.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОСКОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ[1]

В. В. Дударев (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

При моделировании, производстве и диагностике современных элементов конструкций все чаще учитывается влияние остаточных напряжений на прочностные свойства. В первую очередь это объясняется той решающей ролью, которую они играют в момент критического нагружения [1]. Природа возникновения начальных напряжений чаще всего связана с технологическими условиями производства, эксплуатационными нагрузками и наличием различных дефектов типа полостей, трещин и т. п. Задача об определении предварительного напряженного состояния относится к коэффициентным обратным задачам.

Отметим, что основной проблемой в решении коэффициентных обратных задач, которые являются существенно нелинейными и некорректными, является нахождение общего способа построения операторных соотношений, связывающих искомые функции, характеризующие законы изменения неоднородности для компонент тензора предварительного напряжения, и измеряемые функции — амплитудно-частотные характеристики на границе тела [2]. Переменность коэффициентов дифференциальных операторов не дает возможности построения в явном виде общих представлений решений в таких ситуациях. В этом случае решения прямых задач опираются либо на аппарат интегральных уравнений Фредгольма второго рода, либо на конечно-элементные или конечно-разностные технологии. При этом для построения решений в обратных задачах формулируются итерационные процессы, основанные на методе линеаризации в окрестности некоторого напряженного состояния. Процедура построения линейных операторных соотношений может быть в значительной степени упрощена при использовании вариационной постановки задачи [3].

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 10-01-00194 и в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

В настоящей работе представлен вывод дифференциального уравнения 4-го порядка и граничных условий, описывающих поперечные колебания консольно закрепленного стержня [3]. Решение полученного уравнения реализовано путем интегрального обращения дифференциальных операторов и представлено в виде ИУФ 2-го рода. Для наиболее точной дискретизации интегрального оператора использована формула Симпсона с постоянным шагом. Для решения обратной задачи об определении закона изменения остаточных напряжений в стержне составлено ИУФ 1-го рода. Обсуждены особенности и свойства ядра этого оператора. Для преодоления некорректности полученной задачи использован метод регуляризации А. Н. Тихонова [4]. Представлены результаты вычислительных экспериментов. Также в работе рассмотрена задача идентификации предварительного напряженного состояния в прямоугольной области. Для численного решения прямой задачи при помощи конечноэлементного пакета FreeFem++ сформулирована общая слабая постановка задачи. На основе слабой постановки построено общее операторное уравнение для решения обратной задачи. Приведены примеры реконструкции закона изменения одноосного предварительного напряженного состояния. Особое внимание уделено форме краевых задач при различных способах нагружения. Предложен новый способ формирования итерационных процессов при решении обратных коэффициентных задач на основе попеременного решения прямой задачи и задачи Коши для дифференциальных операторов первого или второго порядка.

Литература

1. *Чернышев Г. Н., Попов А. Л., Козинцев В. М., Пономарев И. И.* Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах.—М.: Наука, 1996.—240 с.
2. *Ватульян А. О.* Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел // Вестн. Самар. ун-та.—2007.—Вып. 54, № 4.—С. 93–103.
3. *Ватульян А. О., Дударев В. В.* О некоторых проблемах реконструкции неоднородного предварительно напряженного состояния в упругих телах // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2009.—Т. 9, вып. 4, ч. 2.—С. 25–32.
4. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1979.—288 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 184–185.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Л. В. Думаева (Россия, Нальчик; КБГУ)

Рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} + u_{yy}) + \lambda u, & y > 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} - u_{yy}), & y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в области $D = \{|x| < 1,\ |y| < 1\}$.

Задача 1. Найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(\pm 1, y) = u(0, y), \quad u(x, -1) = \psi_1(x), \quad u(x, 1) = \psi_2(x) \tag{2}$$

и условиям сопряжения

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad u_y(x, +0) = u_y(x, -0). \tag{3}$$

Решение задачи (1)–(3) ищется в виде произведения $u(x, y) = \phi(x)\,F(y)$. Подставляя $u(x, y)$ в уравнение (1) и, учитывая граничные условия (2), получим относительно $\phi(x)$ и $F(y)$ задачи:

Задача 1.1.

$$0 = \begin{cases} \phi'''(x) + \mu_1 \phi'(x) + \lambda \phi(x), & y > 0, \\ \phi'''(x) - \mu_2 \phi'(x), & y < 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\phi(\pm 1) = 0, \quad \phi(0) = 0. \tag{5}$$

Задача 1.2.

$$0 = \begin{cases} F''(y) - \mu_1 F(y), & y > 0, \\ F''(y) - \mu_2 F(y), & y < 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$F(\pm 1) = 0, F(+0) = F(-0), \quad F'(+0) = F'(-0). \tag{7}$$

Собственными значениями задачи (6), (7) являются $\mu_n = -\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2$, а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$F_n(y) = \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}y, & n = 2j, \\ \cos\frac{\pi n}{2}y, & n = 2j+1, \ y > 0, \\ \sin\frac{\pi n}{2}y, & n = 2j, \\ \cos\frac{\pi n}{2}y, & n = 2j+1, \ y < 0, \end{cases}$$

Учитывая собственные значения μ_n задачи (6), (7) в (4), (5), находим

$$\phi_l(x) = \begin{cases} e^{-2\pi lx}(1 - \cos 2\pi lx + \sin 2\pi lx), & y > 0, \\ \sin\frac{\pi n}{2}x, & n = 2j, \ y < 0 \\ 0, & n = 2j+1, \ y < 0, \end{cases}$$

Следовательно, решение задачи (1)-(3) имеет вид

$$u(x,y) = \sum_{n,l} u_{nl} =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{n,l} e^{-2\pi lx}\big(1 - \cos 2\pi lx + \sin 2\pi lx\big)\sin \pi y, & y > 0, \\ \sum\limits_{n,l} e^{-2\pi lx}\big(1 - \cos 2\pi lx + \sin 2\pi lx\big)\cos\frac{\pi(2n+1)}{2}, & y > 0, \\ \sum\limits_{n,l} \sin \pi n y, & y < 0, \end{cases} \tag{8}$$

Используя общую теорию рядов [1], доказана равномерная сходимость рядов (8) и их производных u_{xxx} и u_{yyx}.

Литература

1. *Толстов Г. П.* Ряды Фурье.—М.: Наука, 1980—384 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 186–187.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. Г. Езаова (Россия, Нальчик; КБГУ)

Рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} U_{xxx} - U_y + a_1(x,y)\,U_x + a_0(x,y)\,U, & y > 0, \\ y^{2m}U_{xx} + yU_{yy} + \lambda U, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где m — целое фиксированное натуральное число, а λ — заданная постоянная, в односвязной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, B_0B, A_0B_0 и характеристиками

$$AC:\, x - \frac{2}{2m+1}\,(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 0,$$
$$BC:\, x + \frac{2}{2m+1}\,(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 1$$

уравнения (1).

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$, J — интервал $0 < x < 1$ линии $y = 0$; $\theta_0(x)$, $\theta_1(x)$ — аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0)$ с характеристиками AC, BC, соответственно.

Задача E. Найти функцию $U(x,y)$, со следующими свойствами:
1) $U(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^{3,1}_{x,y}(\Omega_1) \cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega_2)$;
2) $U(x,y)$ — регулярное в $\Omega_1 \cup \Omega_2$ решение уравнения (1);
3) $U(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{gathered} U(0,y) = \varphi_1(y), \quad U(1,y) = \varphi_2(y), \\ U_x(0,y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \end{gathered} \tag{2}$$

$$\alpha(x)\,U\big[\theta_0(x)\big] + \beta(x)\,U\big[\theta_1(x)\big] = \gamma(x), \quad x \in \bar{J}, \tag{3}$$

$$\lim_{y\to 0+} U_y(x,y) = \lim_{y \to 0-} (-y)^{\lambda} U_y(x,y), \quad x \in J, \tag{4}$$

где функция $\nu(x) \in C^2(J)$ и при $x = 0$ и $x = 1$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1 + 2\varepsilon$, $\varepsilon = [2m - 1 + 2\lambda]/(2 + 4m)$; $\varphi_i(y) \in C[0, 1]$, $i = \overline{1, 3}$; $a_1(x, y) \in C^2(\Omega_1)$, $a_0(x, y) \in C(\bar{\Omega}_1)$; $\alpha(x) = x^p \alpha_0(x)$; $p = \text{const} > 2\varepsilon$, $\alpha_0(x), \beta(x), \gamma(x) \in C^3(\bar{J})$; $\big[\alpha(x)\, x^{p-\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon} - \beta(x)\cos\pi\varepsilon\big]^2 + \beta^2(x)\sin^2\pi\varepsilon \neq 0$, $\forall\, x \in \bar{J}$.

На корректность задачи особое влияние оказывает коэффициент λ. Будем рассматривать два случая: $\frac{1}{2} - m < \lambda < 1$, $\lambda = \frac{1-2m}{2}$.

Пусть $\frac{1}{2} - m < \lambda < 1$, $a_1(x, y) = \text{const}$, $a_0(x, y) = \text{const}$. Задача в этом случае сводится к сингулярному интегральному уравнению, которое известным методом Карлемана — Векуа редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма третьего рода, разрешимость которого исследована в работе [1].

Положим теперь $\lambda = \frac{1-2m}{2}$, $a_0(x, y), a_1(x, y) \neq \text{const}$. Задача исследуется для следующих четырех случаев:

1) $\alpha(x) = -\beta(x) \neq 0$;

2) $\alpha(x) = 0$ или $\beta(x) = 0$;

3) $\alpha(x) = \beta(x) \neq 0$;

4) $\alpha(x) = \alpha_0 = \text{const}$, $\beta(x) = \beta_0 = \text{const}$.

При выполнении условия 1) функция $\nu(x)$ находится однозначно. Если имеют место случаи 4) или 2), то вопрос разрешимости задачи редуцирован к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно $\tau(x)$, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения поставленной задачи. Для случая 3) задача не имеет единственного решения.

После нахождения $\tau(x)$ в области Ω_1 приходим к задаче (1), (2), $U(x, 0) = \tau(x)$. Существование решения этой задачи устанавливается методом эквивалентной редукции к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. В области Ω_2 решение задачи продолжается как решение видоизмененной задачи Коши.

Литература

1. *Бжихатлов Х. Г., Карасев И. М., Лесковский И. П., Нахушев А. М.* Избранные вопросы дифференциальных и интегральных уравнений.—Нальчик: КБГУ, 1972.—145 с.
2. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных.—М.: Наука, 2006.—287 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 188–189.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ВНУТРЕННЕКРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В. А. Елеев (Россия, Нальчик; КБГУ)

Рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_y + \sum\limits_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i}, & y > 0, \\ y^{2m}u_{xx} + yu_{yy} + \lambda u_y, & y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, B_0B, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ соответственно и характеристиками

$$AC: \ (2m+1)\,x - 2(-y)^{(2m+1)/2} = 0,$$
$$BC: \ (2m+1)x + 2(-y)^{(2m+1)/2} = 2m+1$$

уравнения (1) при $y < 0$, выходящими из точки $C(1/2, y_c)$, $y_c < 0$; $\Omega_{+(-)} = \Omega \cap y > 0$ $(y < 0)$; J — единичный интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача $H[\theta_0, \theta_1]$. Найти функцию со следующими свойствами:
1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup AB) \cap C^{3,1}_{x,y}(\Omega_+) \cap C^2(\Omega_-)$;
2) $u(x,y)$ — решение уравнения (1) в $\Omega_+ \cup \Omega_-$;
3) на линии $y = 0$ вырождения типа уравнения (1) выполняется условие сопряжения

$$\lim_{y\to 0+} u_y(x,y) = \lim_{y\to 0-} (-y)^{\lambda}\frac{\partial}{\partial y}\Bigg\{u - (\beta+1/2)\int\limits_0^1 \tau\Big[x- -2/(2m+1)(-y)^{(2m+1)/2}(1-2t)\Big]\Big[t(1-t)\Big]^{\bar{\beta}-1/2}\,dt\Bigg\} = \nu(x); \tag{2}$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет условиям

$$u_x(0,y) = \varphi_1(y), \quad u_x(1,y) = \varphi_2(y),$$
$$u_xx(0,y) + \lambda(y)\,u(1,y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{3}$$

$$\alpha(x)\, D_{0x}^{3/2-\bar{\beta}} u\big[\theta_0(x)\big] + \beta(x)\, D_{x1}^{3/2-\bar{\beta}} u\big[\theta_1(x)\big] = \delta(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad (4)$$

где $a_i(x,y)$, $i = \overline{0,2}$, $\varphi_j(y) = \overline{1,3}$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\delta(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\theta_0(x)$, $\theta_1(x)$ — аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1) при $y < 0$, выходящих из точки $(x,0) \in J$ с характеристиками AC и BC соответственно, $\bar{\beta} = (2m+\lambda)/(2m+1)$, $-4m < 2\lambda < 1-2m$; D_{0x}^{l}, D_{x1}^{l} — операторы дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля.

При определенных условиях на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции доказывается единственность решения задачи методом априорных оценок. Вопрос существования решения редуцирован к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого заключается из единственности решения задачи [1] .

Литература

1. *Елеев В. А., Кумыкова С. К.* О некоторых задачах со смещением на характеристиках для смешанного уравнения гиперболо-параболического типа // Укр. мат. журн.—2002.—Т. 52, № 5.—С. 707–716.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 190–191.

ОДНА ЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННОГО НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ж. Ж. Жабоев (Россия, Нальчик; КБГУ)

Рассматривается нагруженное уравнение третьего порядка с кратными характеристиками

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_y - \lambda(y)\,u(x_0,0), & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = h$, соответственно, при $y > 0$ и характеристиками $AC : x + y = 0$, $BC : x - y = 1$ при $y < 0$, $\lambda(y)$ — заданная непрерывная функция для всех $y \in [0,h]$. Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$. Обозначим $u(x,0) = \tau(x)$, $u_y(x,0) = \nu(x)$.

Задача. Найти в области $\Omega \setminus (y = 0)$ решение $u(x,y)$ из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup AA_0) \cap C^{3,1}_{x,y}(\overline{\Omega}_1) \cap C^2(\Omega_2) \cap C^2(\overline{\Omega} \setminus \{AB\})$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(1,y) = \varphi_2(y), \quad u_x(0,y) = \varphi_3(y), \tag{2}$$

$$u(x,-x) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \tag{3}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$ — непрерывные для всех $y \in [0,h]$, а $\psi(x)$ — трижды непрерывно дифференцируемая для всех $x \in [0,1/2]$ функции, причем

$$\begin{gathered}\Delta = 2 - 2\operatorname{ch}1 - \lambda(0)\big((\operatorname{sh}x_0 - x_0)(2 - 2\operatorname{ch}1) - \\ -(\operatorname{sh}1 - 1)(2 - 2\operatorname{ch}x_0)\big) \neq 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Переходя к пределу при $y \to 0^+$ в уравнении (1), получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ принесенное на линию $y = 0$

$$\tau'''(x) - \nu(x) - \lambda(0)\,\tau(x_0) = 0. \tag{5}$$

Общее решение уравнения (1) при $y < 0$, непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega}_2$ с непрерывными производными до второго порядка внутри области Ω_2 дается формулой Даламбера

$$u(x, y) = f(x + y) + g(x - y). \tag{6}$$

Соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_2 на линию $y = 0$ имеет вид:

$$\tau'(x) - \nu(x) = \psi'\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 < x < 1. \tag{7}$$

Исключая из уравнений (5) и (7) $\nu(x)$ и учитывая условия (2), получаем граничную задачу для нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка

$$\tau'''(x) - \tau'(x) = \lambda(0)\,\tau(x_0) - \psi'\left(\frac{x}{2}\right), \tag{8}$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(1) = \varphi_2(0), \quad \tau'(0) = \varphi_3(0). \tag{9}$$

При выполнении условия (4) доказана однозначная разрешимость задачи (8), (9).

В области Ω_1 решение задачи (1), (2) и $u(x, 0) = \tau(x)$ имеет вид [1]

$$\pi u(x, y) = \int\limits_0^y G_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta)\,\varphi_1(\eta)\,d\eta - \int\limits_0^y G_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta)\,\varphi_3(\eta)\,d\eta -$$

$$- \int\limits_0^y G_{\xi\xi}(x, y; 1, \eta)\varphi_2(\eta)d\eta + \int\limits_0^1 G_{\xi\xi}(x, y; \xi, \eta)\,u(\xi, 0)\,d\xi -$$

$$- \int\limits_{\Omega_1} G(x, y; \xi, \eta)\left\{\lambda(\eta)\tau(x_0) - \psi\left(\frac{\xi}{2}\right)\right\} d\xi\,d\eta,$$

где $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина краевой задачи: $u_{xxx} - u_y = 0$, (2), $u(x, 0) = \tau(x)$.

Затем из соотношения (5) находится функция $\nu(x)$, что позволяет продолжить решение исходной задачи в область Ω_2 как решение задачи Дарбу или Коши.

Литература

1. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.—Ташкент: ФАН, 1979.—238 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 192–193.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ ЛИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ[1]

А. В. Жибер (Россия, Уфа; ИМВЦ УфНЦ РАН),
О. С. Костригина (Россия, Уфа; УГАТУ)

В работе рассматривается задача классификации интегрируемых по Дарбу нелинейных гиперболических систем уравнений:

$$u_{xy} = F(u, u_x, u_y) \quad (u^i_{xy} = F^i,\ i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

на основе исследования структуры характеристических алгебр Ли.

Определение 1. Функция $W(u, u_1, u_2, \ldots, u_m)$ называется x-интегралом порядка m системы (1), если $\bar{D}(W) = 0$. Аналогично, y-интеграл m-го порядка — это функция $\bar{W}(u, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$, удовлетворяющая соотношению $D(\bar{W}) = 0$, где $u_1 = u_x$, $\bar{u}_1 = u_y$, $u_2 = u_{xx}$, $\bar{u}_2 = u_{yy}$, … и $\bar{D}(D)$ — оператор полного дифференцирования по переменной y (x).

Определение 2. Система уравнений (1) называется интегрируемой по Дарбу, если у нее существует полный набор независимых x- и y-интегралов.

$X(Y)$-характеристическая алгебра системы уравнений (1) есть алгебра, порожденная векторными полями

$$X_i = \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i_1}, \quad X_{n+1} = \bar{u}^i_1 \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{k=1}^{\infty} D^{k-1}(F^i) \frac{\partial}{\partial u^i_k}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\left(Y_i = \frac{\partial}{\partial u^i_1}, \quad Y_{n+1} = u^i_1 \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{D}^{k-1}(F^i) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i_k}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \right).$$

В работе [1] было показано, что размерности характеристических алгебр для двухкомпонентной системы уравнений (1) с интегралами первого и второго порядка

$$\begin{array}{ll} \omega^1(u^1, u^2, u^1_1, u^2_1), & \omega^2(u^1, u^2, u^1_1, u^2_1, u^1_2, u^2_2), \\ \bar{\omega}^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^1_1, \bar{u}^2_1), & \bar{\omega}^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^1_1, \bar{u}^2_1, \bar{u}^1_2, \bar{u}^2_2) \end{array} \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 08-01-00440-а и № 09-01-92431-КЭ-а.

равны 5 и система приводится к виду:

$$u^i_{xy} = \Gamma^i_{ks} u^k_1 \bar{u}^s_1, \quad i = 1, 2.$$

В данной работе проведена полная классификация систем уравнений

$$u^1_{xy} = \Gamma^1_{1j} u^1_1 \bar{u}^j_1, \quad u^2_{xy} = \Gamma^2_{i2} u^i_1 \bar{u}^2_1. \tag{3}$$

Основной результат работы формулируется следующим образом:

Теорема. *Система уравнений* (3) *с полным набором интегралов* (2) *приводится к одному из следующих видов:*

$$u^1_{xy} = \frac{1}{X}\, u^1_1 \bar{u}^1_1 + \left(\frac{1}{\alpha Y} + \frac{1}{c_1 \alpha^2 X}\right) u^1_1 \bar{u}^2_1,$$
$$u^2_{xy} = \frac{1}{Y}\, u^2_1 \bar{u}^2_1 + \left(\frac{1}{\alpha X} + \frac{c_1}{Y}\right) u^1_1 \bar{u}^2_1,$$
$$X = u^1 + \frac{u^2}{c_1 \alpha^2} + d_2, \quad Y = c_1 u^1 + c_2 + u^2,$$

либо

$$u^1_{xy} = \frac{u^2}{X}\, u^1_1 \bar{u}^1_1 + \left(\frac{u^1}{\alpha Y} + \frac{u^1}{X}\right) u^1_1 \bar{u}^2_1,$$
$$u^2_{xy} = \frac{u^1}{Y}\, u^2_1 \bar{u}^2_1 + \left(\frac{\alpha u^2}{X} + \frac{u^2}{Y}\right) u^1_1 \bar{u}^2_1,$$
$$X = u^1 u^2 + d_2, \quad Y = u^1 u^2 + c_2, \quad \frac{\alpha + 1}{\alpha}\, d_2 = (\alpha + 1)\, c_2,$$

где c_1, c_2, d_2, α *— постоянные.*

Для полученных систем уравнений построены полные наборы x, y-интегралов первого и второго порядка.

Литература

1. *Жибер А. В., Костригина О. С.* Характеристические алгебры нелинейных гиперболических систем уравнений // Журн. Сибирского федерального ун-та. Мат. и физ.—2010.—Т. 3, № 2.—С. 173–184.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 194–195.

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Б. И. Исломов, Ф. М. Джураев
(Узбекистан, Ташкент; НУУз)

Рассмотрим уравнение

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} - \mu(-y)^m u(x,0) = 0, \quad (y < 0) \tag{1}$$

где μ, m — действительные числа, причем

$$m > 0, \quad \mu > 0. \tag{2}$$

Пусть Ω — область, ограниченная характеристиками

$$AC:\, x - \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC:\, x + \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1.$$

уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$, $B(0,1)$ и отрезком AB прямой $y = 0$.

Введем обозначения $I = \big\{(x,y):\, 0 < x < 1,\ y = 0\big\}$, $2\beta = \frac{m}{m+2}$, $(0 < \beta < \frac{1}{2})$.

Уравнение (1) относится к классу уравнений предложенных А. М. Нахушевым [1]. Невырождающим нагруженным гиперболическим и эллиптическим уравнениям, нагруженная часть, которых содержит лишь значение искомого решения в фиксированных точках области из задания, посвящены работы [2]–[4].

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup I) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω.

Задача АД. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y\big|_{y=0} = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \quad u\big|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},$$

где $\nu(x)$, $psi(x)$ — заданные функции, причем

$$\psi(x) \in C^1[0; \frac{1}{2}] \cap C^3(0; \frac{1}{2}), \tag{3}$$

$$\nu(x) \in C^2(0, 1), \tag{4}$$

и функция $\nu(x)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1 - 2\beta$ на концах интервала I.

Теорема. *Если выполнены условия* (2), (3), (4), *то задача* АД *в области* Ω *однозначно разрешима.*

Литература

1. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Диф. ур.—1976.—Т. 12, № 1.—С. 103–108.
2. *Бородин А. Б.* Об одной оценке для эллиптических уравнений и ее приложений к нагруженным уравнениям // Диф. ур.—1977.—Т. 13, № 1.—С. 17–22.
3. *Казиев В. М.* О задаче Дарбу для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Диф. ур.—1978.—Т. 14, № 1.—С. 181–184.
4. *Исломов Б., Курьязов Д. И* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка // ДАНРУз.—1996.—№ 1-2.—С. 3–6.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 196–198.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Р. И. Кадиев (Россия, Махачкала; ДГУ)

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geqslant 0}, P)$ — стохастический базис; k^n — линейное пространство n-мерных $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных величин; $\mathcal{B}_i$, $i = 2, \dots, m,$ — независимые стандартные винеровские процессы; $1 \leqslant p < \infty$; E — символ математического ожидания; $|\cdot|$ — норма в R^n; N — множество натуральных чисел; $N_+ = \{0\} \cup N$.

Рассматривается линейная система разностных уравнений Ито с запаздыванием

$$x(s+1) = x(s) + \sum_{j=-\infty}^{s} \big[A_1^2(s,j)\,x(j) + f_1^2(s)\big]h + \\ + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=-\infty}^{s} \big[A_i^2(s,j)\,x(j) + f_i^2(s)\big]\big(\mathcal{B}_i((s+1)h) - \\ - \mathcal{B}_i(sh)\big), \quad s \in N_+, \quad x(j) = \varphi(j), \quad j < 0, \tag{1}$$

где $x(s)$ — $\mathcal{F}_s$-измеримая n-мерная случайная величина при $s \in N_+$, $f_i(s)$ — $\mathcal{F}_s$-измеримая n-мерная случайная величина при $s \in N_+$, $i = 1, \dots, m$, h — достаточно малое действительное число, $A_i^2(s,j)$ — матрица размерности ,$n \times n$, элементы которой $\mathcal{F}_s$-измеримые случайные величины при $s \in N_+$, $j = -\infty, \dots, s$, $i = 0, \dots, m$, $\varphi(j)$ — случайная величина, которая не зависит от винеровских процессов $\mathcal{B}_i$, $i = 2, \dots, m$ при $j < 0$.

Частными случаями уравнения (1) является линейная система «обыкновенных» разностных уравнений Ито, а также линейная система разностных уравнений Ито с ограниченным запаздыванием.

Уравнение (1) называют однородной, если $f^2 = (f_1^2, \dots, f_m^2) \equiv 0$ и $\varphi \equiv 0$

Определение 1. Тривиальное решение однородного уравнения (1) назовем:
— *p-устойчивым* по начальной функции, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых начального процесса $\varphi(j)$, $j < 0$

и $x_0 \in k_p^n$ из неравенства $E|x_0|^p + \sup\limits_{j<0} E|\varphi(j)|^p < \delta$ следует оценка $E|x_\varphi(s,x_0)|^p \leqslant \varepsilon$ при $s \in N_+$ (здесь и в дальнейшем $x_\varphi(s,x_0)$ — решение уравнения (1) при $f^2 \equiv 0$ с начальной функцией φ, причем $x_\varphi(0,x_0) = x_0$);
— *асимптотически p-устойчивым* по начальной функции, если оно p-устойчиво по начальной функции, и, кроме того, для $E|x_0|^p + \sup\limits_{j<0} E|\varphi(j)|^p < \delta$ будет $\lim\limits_{s\to+\infty} E|x_\varphi(s,x_0)|^p = 0$;
— *экспоненциально p-устойчивым* по начальной функции, если при некоторых положительных постоянных $\bar{c}$, β справедливо неравенство $E|x_\varphi(s,x_0)|^p \leqslant \bar{c}(E|x_0|^p + \sup\limits_{j<0} E|\varphi(j)|^p) \exp\{-\beta s\} (s \in N_+)$.

Вопросы устойчивости уравнения (1) по начальной функции исследуются с помощью задачи допустимости некоторых пар пространств для функционально-разностного уравнения Ито, соответствующее уравнению (1).

Заметим, что уравнение (1) является частным случаем следующего функционально-разностного уравнения Ито

$$
\begin{aligned}
x(s+1) = x(s) + \sum_{j=0}^{s} \big[A_1(s,j)\,x(j) + f_1(s)\big]h + \\
+ \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{s} \big[A_i(s,j)\,x(j) + f_i(s)\big]\big(\mathcal{B}_i\big((s+1)\,h\big) - \\
- \mathcal{B}_i(sh)\big), \quad s \in N_+,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $x(s)$ — $\mathcal{F}_s$-измеримая n-мерная случайная величина при $s \in N_+$, $f_i(s)$ — $\mathcal{F}_s$-измеримая n-мерная случайная величина при $s \in N_+$, $i = 1,\ldots,m$, h — достаточно малое действительное число, $A_i(s,j)$ — $n \times n$-матрица, элементы которой $\mathcal{F}_s$-измеримые случайные величины при $s \in N_+$, $j = 0,\ldots,s$, $i = 0,\ldots,m$.

Чтобы записать уравнение (1) в виде (2) надо в уравнении (2) положить $A_i(s,j) = A_i^2(s,j)$, $f_i(s) = f_i^2(s) + \sum_{j=-\infty}^{0} A_i^2(s,j)\,\varphi(j)$ при $s \in N$, $j = 0,\ldots,s$, $i = 0,\ldots,m$.

Обозначим через d^n — линейное пространство решений уравнения (2), а через l^n — линейное пространство последовательностей $m \times n$ — матриц $H(s)$ $(s \in N_+)$, где элементы матрицы $H(s)$ — $\mathcal{F}_s$-измеримые случайные величины. Пусть $\gamma(s)$ $(s \in N_+)$ — последовательность положительных действительных чисел. В дальнейшем используются следующие линейные нормированные подпространства пространств d^n и k^n:

$$m_p^\gamma = \Big\{x : x \in d^n,\ \|x\|_{m_p^\gamma} \overset{def}{=} \sup_{s \geqslant 0} \Big(E\big|\gamma(s)\, x(s)\big|^p\Big)^{1/p} < \infty\Big\}\ \ (m_p^1 = m_p);$$

$$k_p^n = \big\{\alpha : \alpha \in k^n,\ \|\alpha\|_{k^n} \overset{def}{=} E|\alpha|^p < \infty\big\}.$$

Пусть b — линейное подпространство пространства l^n с нормой $\|\cdot\|_b$, $b^\gamma = \big\{f : f \in b,\ \gamma f \in b\big\}$ — пространство с нормой $\|f\|_{b^\gamma} = \|\gamma f\|_b$, $x_f(s, x_0)$ — решение уравнения (2) с правой частью f и $x_f(0, x_0) = x_0$.

Определение 2. Будем говорить, что для уравнения (2) *допустима пара* (m_p^γ, b^γ), если существует такое $\bar{c} \in R_+^1$, при котором для любых $x_0 \in k_p^n$, $f \in b^\gamma$ имеем $x_f(\cdot, x_0) \in m_p^\gamma$, причем выполнено неравенство

$$\big\|x_f(\cdot, x_0)\big\|_{m_p^\gamma} \leqslant \bar{c}\big(\|x_0\|_{k_p^n} + \|f\|_{m^\gamma}\big).$$

Пусть для уравнений (1) имеем $f^2 \equiv 0$ и при любой начальной функции φ такой, что $\sup\limits_{\nu<0} E\big|\varphi(\nu)\big|^p < \infty$ случайный процесс f для уравнения (2), соответствующее уравнению (1) принадлежит некоторому нормированному подпространству b^γ пространства l^n, норма в котором удовлетворяет неравенству

$$\|f\|_{b^\gamma} \leqslant K \sup_{j<0} \big(E|\varphi(j)|^p\big)^{1/p},$$

где K — некоторое положительное число. Тогда справедлива

Лемма. *Если для уравнения* (2), *соответствующее уравнению* (1) *допустима пара* (m_p^γ, b^γ), *то тривиальное решение уравнения* (1) *p-устойчиво по начальной функции при* $\gamma = 1$, *асимптотически p-устойчиво по начальной функции при* $\lim\limits_{s\to\infty} \gamma(s) = \infty$, *экспоненциально p-устойчиво по начальной функции при* $\gamma(s) = \exp\{\beta s\}$ *при некотором положительном* β.

На основе предыдущей леммы исследуются вопросы устойчивости по начальной функции для конкретных уравнений вида (1).

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 199–200.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ф. А. Карова (Россия, Нальчик; КБГУ)

Рассмотрим уравнение

$$Lu = 0 = \begin{cases} u_{xxt} - u_{tt}, & t > 0, \\ u_{xx} - u_{tt} + \lambda u, & t < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в конечной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = l$, $t = T$, соответственно, лежащих в полуплоскости $t > 0$, и характеристиками $AC:\ x+t = 0$, $BC:\ x-t = l$ уравнения (1) при $t < 0$.

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap (t > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (t < 0)$, $J \equiv (0, l)$ интервал прямой $t = 0$.

Задача C. Найти регулярное в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1), принадлежащее классу $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ и удовлетворяющее краевым условиям Стеклова первого класса

$$\begin{gathered} u_x(0,t) = \alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u(l,t), \\ u_x(l,t) = \beta_1 u(0,t) + \beta_2 u(l,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{gathered} \tag{2}$$

и условию

$$u\big|_{AC} = \psi(x), \tag{3}$$

где $\psi(x)$ — заданная достаточно гладкая функция, α_i, β_i, $i = 1, 2,$ — постоянные.

Введем обозначение

$$u(x,0) = \tau(x), \quad u_t(x,0) = \nu(x). \tag{4}$$

Решение уравнения (1) с условиями (2), (4) имеет вид [1]:

$$u(x,t) = \int\limits_0^l \nu(\xi)\tilde{\Gamma}(x,t;\xi,0)\,d\xi + \tau(x) + g(x,t), \tag{5}$$

где

$$\tilde{\Gamma}(x,t;\xi,0)=\int\limits_{\xi}^{t}\Gamma(x,\eta;\xi,0)\,d\eta,$$

$$\Gamma(x,t;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,(t-\eta)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}\right].$$

Дифференцируя (5) по t, путем предельного перехода при $t\to 0$, относительно $\nu(x)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\nu(x)=\int\limits_{0}^{l}\nu(\xi)\tilde{\Gamma}'_t(x,0;\xi,0)\,d\xi+g'_t(x,o). \tag{6}$$

Решение уравнения (6) при условии, что

$$\int\limits_{0}^{l}\int\limits_{0}^{l}\tilde{\Gamma}'_t(x,0;\xi,0)\,d\xi\,dx<1, \tag{7}$$

можно выписать через резольвенту ядра:

$$\nu(x)=g'_t(x,0)+\int\limits_{0}^{l}R(x,\xi)\,g'_t(\xi,0)\,d\xi. \tag{8}$$

Подставляя найденное значение функции $\nu(x)$ в (5), а затем интегрируя полученное уравнение от 0 до x относительно $\tau(x)$ приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое однозначно и безусловно разрешимо. После того, как функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ найдены, в области Ω_1 приходим к задаче для уравнения $u_{xxt}-u_{tt}=0$ с условиями (2) и (3), исследованных в работе [1], а в области Ω_2 решение задачи Коши для телеграфного уравнения выписывается в [2].

Литература

1. *Керефов А. А.* Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений // Дифференц. уравнения.—1979.—Т. 15, № 1.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 201–202.

ПОСТРОЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОПЕРАТОРА РАССЕЯНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. И. Карюк (Россия, Ставрополь; СГУ)

Как известно, с помощью операторной структуры Лакса может быть получено нелинейное уравнение в частных производных, принадлежащее к солитонному типу:

Лемма 1. *Нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных*

$$\left(\alpha_{11}\gamma + \frac{\alpha_{31}}{2\alpha_{11}}\right)u_z - k\alpha_{11}^2\gamma u_x + \frac{1}{k}(\ln u)_{zz} - \alpha_{11}^2 k (\ln u)_{xx} - \\ - \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{4\alpha_{11}^2} u_z \ln u = 0$$

(здесь $u = u(x, z)$, $\frac{\partial}{\partial z} = 2k\alpha_{11}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$, γ, α_{ij} — const, $k < 0$ — некоторый параметр), принадлежащее к солитонному типу, эквивалентно операторной структуре Лакса.

Лемма 2. *Оператор*

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & -\alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & -\alpha_{11} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{22} + \frac{2}{k}v_{11} \end{pmatrix},$$

где u_{ij}, v_{11} — функции двух независимых переменных x и t, является несамосопряженным дифференциальным оператором первого порядка.

Теорема. *Оператор L с заданными условиями при $x \to \pm\infty$ $u(x,t) \to 1$ имеет следующие собственные функции*

$$\psi_1(x,\lambda) = C_1 e^{i\lambda x} + C_2 e^{-Bx} + C_3 e^{Bx},$$

$$\psi_2(x,\lambda) = SC_1 e^{i\lambda x} - i\frac{\alpha_{21}}{2} C_2 e^{-Bx} - i\frac{\alpha_{21}}{2} C_3 e^{Bx},$$

$$\psi_3(x,\lambda) = 2\lambda C_1 e^{i\lambda x} + (\lambda + iB)\, C_2 e^{-Bx} + (\lambda - iB)\, C_3 e^{Bx},$$

где C_1, C_2, C_3 — const,

$$S = \frac{\alpha_{21}}{8}\,\frac{64\lambda + \alpha_{21}\alpha_{32}(3k-8)}{16\lambda + \alpha_{21}\alpha_{32}(k-2)}\,i, \quad B = -i\sqrt{\lambda^2 - k\frac{\alpha_{21}^2\alpha_{32}^2}{128}}.$$

Результаты этой теоремы могут быть использованы дальнейшем для получения данных рассеяния и решения методом обратной задачи.

Литература

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи: Пер. с англ.—М.: Мир, 1987.—С. 479.
2. *Лакс П. Д.* Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны // Математика.—1969.—Т. 13, № 5—С. 128–150.
3. *Карюк А. И., Редькина Т. В.* Нелинейное уравнение, обладающее оператором рассеяния третьего порядка // Современные методы физ.-мат. наук. Тр. междунар. конф.—Орел: Изд-во. ОГУ.—2006.—С. 70–75.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 203–204.

ОБ ЭФФЕКТЕ ТОРМОЖЕНИЯ ТРЕЩИН В АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ ПУТЕМ ЗАКЛЕИВАНИЯ

В. А. Клименко, К. Г. Малютин
(Украина, Сумы; СумГУ)

В инженерной практике получил распространение способ борьбы с трещинами в бетонных и металлических изделиях путчм их заклеивания [1, 2]. В связи с этим возникает вопрос об эффективности такого метода торможения трещин для изотропных и анизотропных материалов. Случай изотропной упругой плоскости с заклеенной трещиной и растягиваемой на бесконечности равномерной нагрузкой изучен в [3]. Мы исследуем напряженное состояние плоской прямолинейно изотропной среды с произвольно ориентированной трещиной, которая заполнена клеем. Для этого рассмотрим неограниченную анизотропную пластину, ослабленную прямолинейным разрезом (трещиной) L, подверженную на бесконечности равномерному растяжению σ_1, σ_2 и сдвигу τ_{13}. Разрез имеет длину $2c$ и ориентирован под углом α к оси Ox (в декартовой системе xOy). При определенной нагрузке σ_1^0, σ_2^0, σ_{13}^0 трещина заполняется клеем, который после затвердения, при дальнейшем увеличении нагрузки, будет препятствовать раскрытию трещины. Пусть клеевой слой работает независимо на растяжение или сдвиг. Причем растягивающее N и сдвигающее T усилие в клеевом слое пропорциональны относительному раскрытию трещины.

Напряжения и перемещения в пластине можно выразить по известным формулам посредством двух аналитических функций комплексного переменного: $\Phi_1(z)$ и $\Phi_1(z)$. Необходимо решить задачу об упругом равновесии анизотропной пластины с разрезом, на берегах которого задана самоуравновешенная нагрузка $X_n^{\pm}(t)+iY_n^{\pm}(t)$ (плюс соответствует левому берегу L при движении от начала разреза a к концу b):

$$X_n = N\cos\psi - T\sin\psi, \quad Y_n = N\sin\psi + T\cos\psi \quad \left(\psi = \alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

Удовлетворив краевые условия, приходим к разрешающему интегро-дифференциональному уравнению. Далее, вычисляя значение функций $\Phi_1(z)$ и $\Phi_1(z)$ в окрестности концевых точек, находим асимптотические значения напряжений нормального разрыва σ и продольного сдвига τ на продолжении трещины и соответствующие коэффициенты интенсивности K_σ и K_τ:

$$K_\sigma + iK_\tau = \lim_{r\to 0}\sqrt{\frac{r}{2c}(\sigma_n + i\tau_m)} = \mp e^{-2r}\big[\Im(\mu_2\xi) - i\Im\xi\big],$$

$$\xi = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - \bar{\mu_2}}\big(\mu_1\cos\psi - \sin\psi\big)\Omega^0(\pm 1),$$

$$\Omega^0(\beta) = \Omega(\beta)\sqrt{1-\beta^2},$$

$$\Omega^0(\beta) = p(t), \quad t = t(\beta) = c\beta\big(\cos\alpha - i\sin\alpha\big), \quad -1 \leqslant \beta \leqslant 1.$$

Здесь верхний знак соответствует концу трещины $b(1)$, нижний — началу трещины $a(-1)$; $t = t(\beta)$ — параметрическое представление L; c — половина длины трещины. Алгоритм реализован численно.

При решении интегро-дифференциального уравнения применялась процедура работы [5], что позволило свести его к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных плотностей в узлах интерполяции. (Контур трещины разбивался на 25 частей, дальнейшее увеличение числа разбиений к заметному изменению результатов не приводило). Приведенные результаты расчетов соответствуют ортотропному материалу АГ-4С.

Для оценки прочности конструкций надо знать не только коэффициенты интенсивности напряжений у концов заклеенной трещины, но и максимальное усиление в клеевом слое, так как при достижении последним критического значения соединение нарушится. Такие зависимости $N_{\max}$ и σ_2 получены.

Литература

1. *Guide A.* To repeir of concerete // Concrete Constraction.—1997.—Vol. 22, № 3.—P. 124–163.
2. *Перкинс Ф.* Железобетонные сооружения. Ремонт, гидроизоляция и защита.—М: Стройиздат, 1980.—225 с.
3. *Фильштинский Л. А.* Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твчрдого тела.—1976.—№ 5.—С. 91–97.
4. *Каладия А. И.* Математические методы двумерной упругости.—М: Наука, 1973.—204 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 205.

ОДНО НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ПЕРЕХОДНОЙ ПЛОТНОСТИ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА НА МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Д. С. Климентов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть M — двумерная гладкая минимальная поверхность в пространстве E^3. Не ограничивая общности, зададим на M изотермическую систему координат. Зададим также на M диффузию так, как это было сделано в работе [1]. Переходную плотность этой диффузии обозначим через p_t. Имеет место

Теорема. *Для переходной плотности винеровского процесса $p_t(x, y)$ имеет место неравенство*

$$\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t} \cdot \Delta \ln \frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t} \leqslant 0.$$

Литература

1. *Kuwae K., Machigashira Y., Shioya T.* Sobolev spaces, Laplacian, and heat kernel on Alexandrov spaces.—Kyushi Univ.—1998.—Preprint, № 3.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 206–207.

ЗАДАЧА РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА В КЛАССАХ СМИРНОВА

С. Б. Климентов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Обозначим G ограниченную односвязную область в комплексной z-плоскости, $z = x + iy$, $i^2 = -1$, со спрямляемой границей $\Gamma = \partial G$; $\overline{G} = G \cup \Gamma$.

В работе рассматривается *задача Римана — Гильберта* в следующей постановке: найти голоморфную в G функцию $\Phi(z) \in E_p$, $p > 1$, предельные значения которой на Γ по некасательным направлениям почти всюду на Γ удовлетворяют краевому условию

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\omega(t)}\Phi(t)\right\} = g(t) \in L_p(\Gamma), \quad p > 1. \tag{1}$$

Предполагаем, что

$$\omega(s) = \omega_0(s) + \omega_1(s) + \omega_2(s), \tag{2}$$

где $\omega_0(s) \in C(\Gamma)$, $\omega_1(s)$ — функция скачков; $\omega_2(s)$ удовлетворяет условию

$$|\omega_2(s)| \leqslant \nu\pi, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2p}, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{3}$$

Теорема 1. *Если в* (2) $\omega_1(s) \equiv 0$, *выполнено* (3), *а* $\varkappa = \operatorname{ind}_\Gamma \lambda(t) \geqslant 0$, *то тогда однородная задача* (1) *(при* $g(t) \equiv 0$*) имеет точно* $2\varkappa + 1$ *линейно независимых в вещественном смысле решений класса* E_p, $p > 1$, *а неоднородная задача разрешима в* E_p *при любой правой части краевого условия* $g(t) \in L_p(\Gamma)$.

Если $\varkappa < 0$, *то однородная задача* (1) *не имеет в* E_p *ненулевого решения, а неоднородная задача разрешима в* E_p *единственным образом тогда и только тогда, когда выполнены* $-2\varkappa - 1$ *(вещественных) условий на свободный член* $g(t)$ *краевого условия.*

Теорема 2. *Если в* (2) $\omega_2(s) \equiv 0$, *а* $\overset{(p)}{\varkappa} = \operatorname{ind}_\Gamma \lambda(t) \geqslant 0$, *то тогда однородная задача* (1) *(при* $g(t) \equiv 0$*) имеет точно* $\overset{(p)}{\varkappa} + 1$ *линейно-независимых в вещественном смысле решений класса* E_p, $p > 1$, *а* *неоднородная задача разрешима в E_p при любой правой части краевого условия $g(t) \in L_p(\Gamma)$.*

Если $\overset{(p)}{\varkappa} < 0$, однородная задача (1) не имеет ненулевых решений класса E_p, $p > 1$, а неоднородная разрешима единственным образом тогда и только тогда, когда выполнены $k = -2\left\{\left[\overset{(p)}{\varkappa}/2\right] + 1\right\}$ (вещественных) линейных условий на свободный член $g(t)$ краевого. Здесь $[\cdot]$ — целая часть числа.

Отметим, что при $\overset{(p)}{\varkappa} = -1$ $k = 0$, что означает однозначную безусловную разрешимость неоднородной задачи.

Определение $\operatorname{ind}_\Gamma \lambda(t)$ (см. [1]).

Литература

1. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости.—М.: Наука, 1975.—295 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 208–210.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. Х. Кодзоков (Россия, Нальчик; КБГУ)

Рассмотрим линейное нагруженное уравнение третьего порядка

$$0=\begin{cases} u_{xxx}-u_y+\bar{\lambda}_1(y)\,u(\bar{x},\bar{y}), & y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}+\bar{\lambda}_2\,u(x,0), & y<0\end{cases} \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, A_0B, A_0B_0 прямых $x=0$, $x=l$, $y=h$ соответственно при $y>0$, и характеристиками AC : $x+y=0$, $BC:x-y=l$ уравнения (1) при $y<0$; $\Omega_{1(2)}=\Omega\cap y>0$ $(y<0)$; J_0 — интервал $(0,l)$, J_1 — интервал $(0,h)$.

Здесь положено, что:

1) $(\bar{x},\bar{y})=(x_0,y)$, $0<x_0<l$, $\bar{\lambda}_1=\lambda_1(y)\in C(\bar{J}_1)$, $\bar{\lambda}_2=0$, или

2) $(\bar{x},\bar{y})=(x,0)$, $\bar{\lambda}_1=\lambda_1=\mathrm{const}$, $\bar{\lambda}_2=\lambda_2=\mathrm{const}\neq 0$.

Задача $H[\theta_0,\theta_1]$**.** Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega\cup AA_0)\cap C^{3,1}_{x,y}(\Omega_1)\cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega_2)$;

2) $u(x,y)$ — регулярное решение уравнения (1) при $y\neq 0$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{gathered} u(0,y)=\varphi_1(y),\quad \left[a_1(y)\frac{\partial u}{\partial x}+b_1(y)u(x,y)\right]\Big|_{x=x_0}=\\ =\left[a_2(y)\frac{\partial u}{\partial x}+b_2(y)u(x,y)\right]\Big|_{x=l}+\delta(y),\\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\quad y\in\bar{J}_1,\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\alpha(x)u\big[\theta_0(x)\big]+\beta(x)u_1\big[\theta_1(x)\big]+\alpha_1(x)\frac{d}{dx}u\big[\theta_0(x)\big]+\\ +\beta_1(x)\frac{d}{dx}u\big[\theta_1(x)\big]=\delta(x),\quad x\in\bar{J}_0,\end{gathered} \tag{3}$$

где $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1) при $y<0$, выходящих из точек $x\in J_0$, с характеристиками AC и BC соответственно; $\varphi_i(y)\in C(\bar{J}_1)$, $i=\overline{1,3}$, $a_i(y)$, $b_i(y)$, $\delta(y)$, причем $b_2(y)\neq 0$.

Пусть существует решение задачи $H[\theta_0, \theta_1]$. Тогда из области Ω_1 в силу уравнения (1) при $y \to 0+$ находим

$$\tau'''(x) - \nu(x) + \lambda_1(0)\tau(x_0) = 0, \tag{4}$$

здесь

$$u(x,0) = \tau(x), \quad u_y(x,0) = \nu(x).$$

В области Ω_2, используя решение задачи Коши для уравнения (1) при $y < 0$

$$u(x,y) = \frac{\tau(x+y) + \tau(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \nu(t)\,dt, \tag{5}$$

определим $u[\theta_i(x)]$ и $\frac{d}{dx}u[\theta_i(x)]$, $i = 0, 1$.

Подставляя эти значения в краевое условие (3) и полагая $\nu_1(x) = \int_0^x \nu(t)\,dt$, будем иметь

$$\bar{\alpha}_1(x)\nu'_1(x) + \bar{\alpha}(x)\nu_1(x) + \beta(x)\nu_1(l) = \bar{\delta}(x), \tag{6}$$

$$\nu_1(0) = 0, \tag{7}$$

где

$$\bar{\alpha}_1(x) = \alpha_1(x) - \beta_1(x), \quad \bar{\alpha}(x) = \alpha(x) - \beta(x),$$
$$\bar{\delta}(x) = \bar{\beta}(x)\tau(x) + \bar{\beta}_1(x)\tau'(x) + \alpha(x)\varphi_1(0) + \beta(x)\varphi_2(0) - 2\delta(x),$$
$$\bar{\beta}(x) = \alpha(x) + \beta(x), \quad \bar{\beta}_1(x) = \alpha_1(x) + \beta_1(x).$$

При различных предположениях относительно коэффициентов $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ доказывается однозначная разрешимость задачи (4)–(5). После нахождения $\nu(x)$ относительно $\tau(x)$ получаем нелокальную задачу типа задачи Бицадзе — Самарского для нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, однозначная разрешимость которой доказывается методом эквивалентной редукции к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

После нахождения функции $\tau(x)$ в области Ω_1 приходим к задаче (1)–(2) и $U(x,0) = \tau(x)$. Решение $u(x,y)$ этой задачи удовлетворяет интегральному уравнению [1]

$$u(x,y) - \int\limits_0^y \int\limits_0^l \lambda_1(\eta)\, G(x,y;\xi,\eta)\, u(x_0,\eta)\, d\xi\, d\eta = u_0(x,y), \tag{8}$$

где

$$u_0(x,y) = \int\limits_0^y G_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)\,d\eta - \int\limits_0^y G_{\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_3(\eta)\,d\eta -$$

$$- \int\limits_0^y G_{\xi\xi}(x,y;l,\eta)\varphi_2(\eta)\,d\eta - \int\limits_0^l G(x,y;\xi,0)\tau(\xi)\,d\xi,$$

$G(x,y;\xi,\eta)$ — функция Грина задачи (1)–(2), и $U(x,0)=\tau(x)$, явный вид и основные свойства которой приведены в [2]. Переходя к пределу при $x \to x_0$ в равенстве (8), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $u(x_0,y)$:

$$u(x_0,y) + \int\limits_0^y \frac{V(x,\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{3}}}\,u(x_0,\eta)\,d\eta = u_0(x_0,y), \tag{9}$$

где $V(x,\eta)$ представляется через $\lambda_1(y)$ и функцию $G(x,y;\xi,\eta)$. Если обозначить через $P(x,\eta)$ резольвенту ядра уравнения (9), то решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$u(x_0,y) = u_0(x_0,y) + \int\limits_0^y P(x,\eta)u_0(x_0,\eta)\,d\eta.$$

Это решение единственно в классе $C(\bar{J}_1)$.

Решение задачи $H[\theta_0,\theta_1]$ в области Ω_2 определяется как решение задачи Коши и задается формулой (4), где $\nu(x)$ находится из равенства (4).

Литература

1. *Елеев В. А.* О некоторых краевых задачах для смешанных нагруженных уравнений второго и третьего порядка // Дифференц. уравнения.—1994.—Т. 30, № 2.—С. 230–237.
2. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.—Ташкент: «ФАН», 1979.—238 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 211–212.

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ НА ГРАФАХ

Р. Ч. Кулаев (Россия, Владикавказ; ЮМИ, СОГУ)

Пусть Γ — геометрический граф в $\mathbb{R}^d$ [1], имеющий периодическую структуру. Пусть Γ^0 — произвольный периодический фрагмент графа Γ. Обозначим через Q наименьший замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^d$, содержащий Γ^0. Очевидно, что за счет растяжений можно считать Q кубом со стороной равной ε. Тогда, отождествляя при каждом $i = \overline{1,d}$ противоположные грани куба Q, из подграфа Γ^0 получим граф $\Gamma(\varepsilon)$ без граничных вершин. Граф $\Gamma(\varepsilon)$ назовем периодической ячейкой графа Γ. Предположим, что ячейка $\Gamma(\varepsilon)$ представляется в виде объединения замкнутых маршрутов $\Gamma_j(\varepsilon)$, $j = \overline{1,N}$, не имеющих общих ребер.

Пусть $\Gamma(1)$ — образ ячейки $\Gamma(\varepsilon)$ в переменных $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$. Обозначим через G область в $\mathbb{R}^d$ с границей $\partial G \in C^\infty$, содержащей границу $\partial\Gamma$, и рассмотрим на $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T]$ начально-краевую задачу для уравнения:

$$S\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\bigg(P\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg) = f(x,t), \quad x \in \Gamma_T, \tag{1}$$

С условиями в вершинах графа

$$\begin{gathered} u(a,t) = g(a,t), \quad x \in \partial\Gamma_T, \\ u_k(a,t) - u_{k_0}(a,t) = 0, \quad k, k_0 \in I(a), \\ \sum_{k \in I(a)} P\Big(\frac{a}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u}{\partial x}\,(a,t) = 0, \quad a \in J(\Gamma). \end{gathered} \tag{2}$$

В начальный момент ставятся условия

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \tag{3}$$

В уравнении (1) S, B, P — это $\Gamma(1)$-периодические функции, причем $S(\xi) > 0$, $B(\xi) \geqslant 0$, $P(\xi) > p_0 > 0$. Исходные данные согласованы,

$f(x,t)$ допускает продолжение продолжение класса $C^{1,1}\big(G\times(0,T]\big)$, функция g допускает продолжение класса $C\big(G\times(0,T]\big)$ и $\varphi\in C^1[\Gamma]$, $\psi\in C[\Gamma]$.

Следуя методам монографий [2,3], определим функцию

$$U^{(1)}(x)=u^{(0)}\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)+\varepsilon u^{(1)}\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big),$$

где $u^{(j)}(x,\xi)$ — $\Gamma(1)$-периодические по переменной ξ функции, $x\in\Gamma$.

Через $v(x,t)$ обозначим решение усредненной задачи

$$\widehat{S}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\widehat{B}\frac{\partial v}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{d}A_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}=f(x,t),\quad x\in G,$$
$$v(x,t)=g(x,t),\quad x\in\partial G,$$

где $\widehat{S}$, $\widehat{B}$ — средние значения функций S и B на периодической ячейке $\Gamma(1)$, $A_{ij}=\sum_k\widehat{P}_k\sum_{i,j}^{d}n_i^k n_j^k$, $\widehat{P}_k=|\gamma_k|\Big(\int_{\gamma_k}\frac{d\xi}{P(\xi)}\Big)^{-1}$, γ_k — ребра ячейки $\Gamma(1)$.

Теорема 1. *Пусть u — точное решение задачи (1)–(3), $U^{(1)}$ — приближение решения первого порядка, а v — приближение решения нулевого порядка. Тогда справедливы оценки*

$$\Big\|U^{(1)}-u\Big\|_{H^1[\Gamma_T]}\leqslant C\sqrt{\varepsilon},\qquad \big\|v-u\big\|_{C(\overline{\Gamma}_T)}\leqslant C\varepsilon.$$

Теорема 2. *Пусть в уравнении (4.1) $S(\xi)\equiv 0$, $B(\xi)>0$. Если u — точное решение задачи (4.1)–(4.3), $U^{(1)}$ — приближение решения первого порядка, а v — приближение решения нулевого порядка, то справедливы оценки теоремы 1.*

Литература

1. *Покорный Ю. В. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2004.—272 с.
2. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов.—М.: Наука, 1984.—352 с.
3. *Олейник О. А., Иосифян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных сред.—М.: Изд-во МГУ, 1990.—310 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 213–214.

ЗАДАЧА КОШИ — ДИРИХЛЕ В НЕЛОКАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

М. О. Мамчуев (Россия, Нальчик; НИИ ПМА КБНЦ РАН)

В области $\Omega = \mathbb{R} \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$a(x)u_{xx} + b(x,y)u_x + c(x,y)u - D_{0y}^{\alpha} u = f(x,y), \tag{1}$$

где D_{0y}^{γ} — оператор дробного (в смысле Римана — Лиувилля) интегродифференцирования порядка γ [1, с. 9], $\alpha \in]0,1]$, коэффициенты $a(x), b(x,y), c(x,y)$ — непрерывные функции, $a(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Уравнение дробной диффузии с постоянными коэффициентами исследовалось в работах многих авторов (см. библиографию в [2]).

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x,y)$ из класса $D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y) \in C(\bar{\Omega})$, $u_x(x,y)$, $u_{xx}(x,y)$, $D_{0y}^{\alpha}u(x,y) \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,y) \in \Omega$.

Задача. В области Ω найти решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y) = \tau(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{2}$$

где $\tau(x)$ — заданная функция.

При $\alpha = 1$ задачу (1)–(2) принято называть задачей Коши — Дирихле [3, с. 179].

Примем следующие обозначения:

$$\Gamma(x,y;t,s) = Z(x,y;t,s) + \int\limits_{s}^{y} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Z(x,y;\xi,\eta)\, \Phi(\xi,\eta;t,s)\, d\xi\, d\eta,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-96510.

$$Z(x,y;t,s)=\frac{(y-s)^{\beta-1}}{2\sqrt{a(t)}}\,e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x-t|}{\sqrt{a(t)}(y-s)^{\beta}}\right),$$

$$\Phi(x,y;t,s)=\sum_{k=1}^{\infty}(LZ)_k(\xi,\eta;t,s),\quad (LZ)_1(x,y;t,s)=LZ(x,y;t,s),$$

$$LZ\equiv a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,Z+b(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\,Z+c(x,y)Z-D^{\alpha}_{sy}Z,$$

$$(LZ)_{k+1}(x,y;t,s)=\int\limits_{s}^{y}\int\limits_{-\infty}^{\infty}LZ(x,y;\xi,\eta)\,(LZ)_k(\xi,\eta;t,s)\,d\xi\,d\eta,$$

$\beta=\alpha/2$, $e^{1,\beta}_{1,\beta}(z)$ — функция Райта [4, с. 23].

Теорема. *Пусть* $a(x)\in C^2(\mathbb{R})$, $0<m\leqslant a(x)\leqslant M$, *для всех* $x\in\mathbb{R}$; *функции* $b(x,y)$, $b_x(x,y)$, $c(x,y)$ *непрерывны и ограничены в* $\overline{\Omega}$; *функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет условию Гёльдера по переменной* x, $y^{1-\alpha}f(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, $\tau(x)\in C(\mathbb{R})$, *и выполняются соотношения*

$$\lim_{|x|\to\infty}\tau(x)\exp\left(-\rho|x|^{\varepsilon}\right)=0,\qquad \lim_{|x|\to\infty}y^{1-\alpha}f(x,y)\exp\left(-\rho|x|^{\varepsilon}\right)=0,$$

где $\varepsilon=\frac{1}{1-\beta}$, $\rho<(1-\beta)M^{\varepsilon/2}\left(\beta/T\right)^{\varepsilon\beta}$. *Тогда существует единственное решение задачи* (1), (2) *среди функций, удовлетворяющих для некоторого* $\sigma>0$ *условию*

$$\lim_{|x|\to\infty}y^{1-\alpha}u(x,y)\exp\left(-\sigma|x|^{\varepsilon}\right)=0.$$

Решение имеет вид

$$u(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma(x,y,t,0)\tau(t)\,dt-\int\limits_{0}^{y}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma(x,y,t,s)f(t,s)\,dt\,ds.$$

Литература

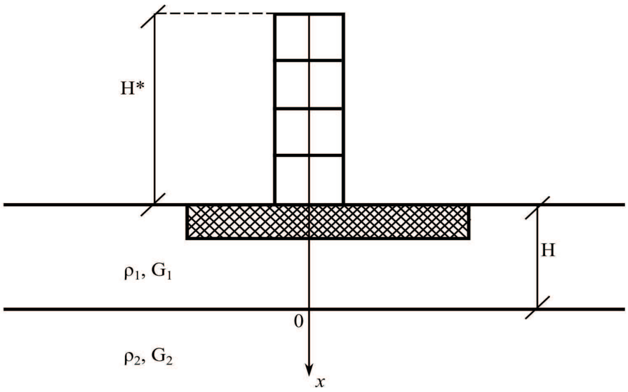
1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Псху А. В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН. Сер. Мат.—2009.—Т. 73, № 2.—С. 141–182.
3. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1982.—336 с.
4. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка.—М.: Наука, 2005.—199 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 215–217.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА УСИЛЕНИЯ ИЛИ ОСЛАБЛЕНИЯ ЭФФЕКТА СЕЙСМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ВЫСОТНОЕ ЗДАНИЕ

И. Д. Музаев, Н. И. Музаев, Б. А. Дзебоев
(Россия, Владикавказ; ЦГИ)

На рисунке представлен схематический чертеж стройплощадки под высотным зданием. Обычно грунты под строительной площадкой представляют собой систему из многих слоев пород с различными физико-механическими характеристиками и мощностями. С точки зрения оценки сейсмического воздействия всегда возникает естественный вопрос: как влияют разные расположения слоев и габаритные размеры сооружения на уровень его колебаний (усиление или ослабление) [1–3]. С целью упрощения задачи моделирования будем считать, что данная стройплощадка состоит из двух слоев, как это показано на рисунке.



Математическую модель сейсмических колебаний всей системы представляет следующая контактная краевая задача.

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = 0, \quad -H < x < 0,$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - a_2^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < +\infty,$$

$$EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \rho s \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad -(H + H^*) < x < -H,$$

$$U_1(x,t) = U_2(x,t) \quad \text{при } x = 0,$$

$$G_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = G_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \quad \text{при } x = 0,$$

$$m \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + G_1 s_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + EJ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \quad \text{при } x = -H,$$

$$W(x,t) = U_1(x,t) \quad \text{при } x = -H,$$

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = -H,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = -(H + H^*),$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при } x = -(H + H^*),$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{G_1}{\rho_1}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{G_2}{\rho_2}},$$

где t — время, x — вертикальная координата, $U_1(x,t)$ и $U_2(x,t)$ — величины горизонтальных сдвиговых колебаний в слоях, EJ — жесткость высотного здания при его поперечном колебании, $W(x,t)$ — величина поперечных упругих колебаний здания, G_1, ρ_1, G_2, ρ_2 — модули сдвига и плотности грунтов в слоях, s — площадь поперечного сечения здания, ρ — объемная плотность материала здания, смоделированного в виде вертикально стоящего бруса, H — мощность верхнего слоя, m — масса фундаментного массива, s_1 — площадь планового сечения фундаментного массива, H^* — высота здания.

В результате решения поставленной контактной краевой задачи получены расчетные формулы для амплитуды поперечных сейсмических колебаний здания, а также расчетные формулы для перерезывающей силы и изгибающего момента, а также для касательных и нормальных напряжений в теле здания.

Вычислительные эксперименты показывают, что в широком диапазоне частот сейсмических колебаний в стройплощадке амплитуды и напряжения в здании уменьшаются при увеличении ее высоты.

Литература

1. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле.—М.: Физматгиз, 1959.—440 с.
2. *Хачиян Э. Е.* Задача усиления или ослабления эффекта сейсмического воздействия на поверхности земли // Вестник ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко. Исследования по теории сооружений.—2009.—Т. XXVI, № 1.—С. 67–80.
3. *Окомото М.* Сейсмостойкость инженерных сооружений.—М.: Стройиздат, 1980.—342 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 218–220.

МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

О. В. Новикова, Т. В. Редькина
(Россия, Ставрополь; СГУ)

С помощью метода, предложенного Абловиц М., Сигур Х. [1] для нелинейного уравнения, полученного в [2], доказана Лемма 1. Также найдены частные решения для данного уравнения (Лемма 2).

Лемма 1. *Уравнение $\bar{p}_t - ip_{xx} + 2ip(p^2 + \bar{p}^2) = 0$ обладает свойством Пенлеве и имеет решение в виде ряда*

$$p(x,t) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(t))\bigl(x - \varsigma(t)\bigr)^n + i\sum_{n=0}^{\infty} b_n(t)\bigl(x - \varsigma(t)\bigr)^n,$$

где $\varsigma(t)$, $b_2(t)$, $a_3(t)$ — произвольные функции; $a_0(t) = b_1(t) = 0$,

$$b_0 = \pm\frac{\varsigma'(t)}{2\sqrt{2}}, \quad a_1(t) = \pm\frac{(\varsigma'(t))^2}{12\sqrt{2}},$$

$$a_2(t) = \pm\frac{\varsigma''(t)}{8\sqrt{2}}, \quad b_3(t) = \pm\frac{\varsigma''(t)\varsigma'(t)}{12\sqrt{2}},$$

остальные коэффициенты определяются рекуррентной формулой

$$b_{n+2} = \frac{1}{n^2+3n}\Biggl[- a_n^{'} + (n+1)a_{n+1}\varsigma' + 8a_{-1}\sum_{j=0}^{n+1} a_j b_{n+1-j} +$$

$$+4\sum_{j=0}^{n} b_j \sum_{k=0}^{n-j}\Bigl(a_k a_{n-j-k} - b_k b_{n-j-k}\Bigr)\Biggr],$$

$$a_{n+2} = \frac{1}{n^2+3n-4}\Biggl[(n+1)b_{n+1}\varsigma' + 4a_{-1}\sum_{j=0}^{n+1}\Bigl(3a_j a_{n+1-j} - b_j b_{n+1-j}\Bigr) +$$

$$+4\sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{n-j}\Big(a_k a_{n-j-k} - b_k b_{n-j-k}\Big) - b_n^{'}\Big].$$

План-тезисы доказательства

1) Определение порядка полюса для действительной и мнимой части ($M = 0$ и $N = 1$).

2) Определение степеней, при которых возникают произвольные функции ($r = 0; 1$).

3) Определение рекуррентной формулы и коэффициентов ряда Лорана.

Лемма 2. *Дифференциальное уравнение*

$$\bar{p}_t - ip_{xx} + 2ip(p^2 + \bar{p}^2) = 0 \tag{1}$$

имеет частные решения в виде

$$p(x,t) = \operatorname{sh}(\alpha x - (4+\alpha^2)t + \delta) + i\operatorname{ch}(\alpha x - (4+\alpha^2)t + \delta),$$

$$p(x,t) = \operatorname{ch}(\alpha x + (4-\alpha^2)t + \delta) + i\operatorname{sh}(\alpha x + (4-\alpha^2)t + \delta).$$

◁ Представив $p = u + iv$, $\bar{p} = u - iv$, где $i^2 = -1$, $u, v \in Re$, и выделив в разложении (1) действительную и мнимую части, получим, что уравнение (1) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} u_t + v_{xx} - 4v(u^2 - v^2) = 0, \\ v_t + u_{xx} - 4u(u^2 - v^2) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим первый случай. Положим $u = \operatorname{sh} f(x,t)$, $v = \operatorname{ch} f(x,t)$. Подставив функции u и v и их частные производные в систему (2), получим

$$\begin{cases} \Big(f_t^{'} + (f_x^{'})^2 + 4\Big)\operatorname{ch} f + f_{xx}^{''}\operatorname{sh} f = 0, \\ \Big(f_t^{'} + (f_x^{'})^2 + 4\Big)\operatorname{sh} f + f_{xx}^{''}\operatorname{ch} f = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) совместна, если выполняется условие: $f(x,t) = \alpha x + \beta t + \delta$, где $\beta = -4 - \alpha^2$.

Аналогично теорема доказывается и для второго случая ($v = \operatorname{sh} f(x,t)$, $u = \operatorname{ch} f(x,t)$). ▷

Литература

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи.—М: Мир, 1987.—480 с.
2. *Редькина Т. В., Карюк К. И., Лушникова Г. А.* Нелинейные уравнения в частных производных, имеющие операторную структуру изоспектральной деформации // Системы обработки информации.—2008.—Т. 69, вып. 2.—С. 18–28.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 221–222.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ С ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Л. Ю. Плиева (Россия, Владикавказ; ЮМИ, СОГУ)

В работе рассматриваются квадратурные формулы интерполяционного типа для приближенного вычисления интегралов типа Коши вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, \frac{\varphi(t)}{t-z}\, dt, \tag{1}$$

на отрезке $[-1,1]$ с весом и для их производных до 2-го порядка включительно

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2}\, dt, \tag{2}$$

$$\Phi''(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, \frac{\varphi(t)}{(t-z)^3}\, dt, \tag{3}$$

где $z \notin [-1,1]$ и $\varphi(t)$ определена на отрезке $[-1,1]$ достаточно гладкая функция.

Для построения квадратурной формулы в интеграле (1) заменим плотность $\varphi(t)$ ее интерполяционным многочленам с узлами $x_j = \cos\frac{j}{n+1}\pi$

$$L_n(\varphi,t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1} U_n(t)}{t-x_j}\, (1-x_j^2)\varphi(x_j), \tag{4}$$

где $U_n(t) = \frac{\sin((n+1)\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}$ — многочлен Чебышева второго рода.

Получим следующую квадратурную формулу

$$\Phi(z) \approx \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}(1-x_j^2)}{z-x_j}\, \mu_j(z)\, \varphi(x_j), \tag{5}$$

$$\mu_j(z) = \frac{i}{2}(z - \sqrt{z^2-1})^{n+1} + \frac{1}{2i}T_{n+1}(x_j),$$

где $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ — многочлен Чебышева первого рода.

Для данной квадратурной формулы была получена следующая оценка погрешности

$$|R_n(\phi, t)| < \frac{\varepsilon}{4\rho},$$

где $\varepsilon = \max\limits_{t\in[-1,1]} \frac{|\varphi^n(\xi)|}{(n)!}$, $\min\limits_{t\in[-1,1]} |t-z| = \rho$.

Вычисляя компоненты напряжений и смешений при решении различных задач плоской теории упругости, мы сталкиваемся не только с интегралами типа Коши, но и с их производными, что подчеркивает необходимость построения и для них квадратурных формул. В связи с этим были построены квадратурные формулы для интегралов (2) и (3)

$$\Phi'(z) \approx \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}(1-x_j^2)}{(z-x_j)^2}\mu_j(z)\,\varphi(x_j),$$

$$\mu_j(z) = \frac{i}{2}(z-\sqrt{z^2-1})^{n+1}\left(1+(n+1)\,\frac{z-x_j}{\sqrt{z^2-1}}\right) + \frac{1}{2i}\,T_{n+1}(x_j),$$

$$\Phi''(z) \approx \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}(1-x_j^2)}{(z-x_j)^3}\,\mu_j(z)\,\varphi(x_j),$$

$$\mu_j(z) = i\,(z-\sqrt{z^2-1})^{n+1}\Biggl(1+(n+1)\frac{z-x_j}{\sqrt{z^2-1}}+$$

$$+(n+1)\,\frac{(z-x_j)^2}{\sqrt{z^2-1}}\left((n+1)\sqrt{z^2-1}+z\right)\Biggr) + \frac{1}{i}\,T_{n+1}(x_j)$$

Вычисление многочисленных примеров показывают эффективность метода.

Литература

1. *Пыхтеев Г. Н.* Точные методы вычисления интегралов типа Коши.— Новосибирск: Наука, 1980.—119 с.
2. *Плиева Л. Ю., Хубежты Ш. С.* К численному решению сингулярных интегральных уравнений первого рода на отрезках // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2008, № 4.—С. 13–16.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 223–225.

ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА ХИЛЛЕ — ТАМАРКИНА[1]

А. В. Псху (Россия, Нальчик; НИИ ПМА КБНЦ РАН)

Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i D_{0x}^{-\beta_i} u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\beta_i > 0$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$; через $D_{0x}^{-\beta}$ обозначен оператор дробного интегро-дифференцирования Римана — Лиувилля порядка β [1]:

$$D_{0x}^{\mu}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int\limits_0^x \varphi(t)(x-t)^{-\mu-1}\, dt, \;\; \mu < 0; \quad D_{0x}^{0}\varphi(x) = \varphi(x);$$

$$D_{0x}^{\mu}\varphi(x) = \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\mu-n}\varphi(x), \quad \mu \in (n-1, n],\; n \in \mathbb{N}.$$

Известно, что решение уравнения (1) в случае $m = 1$ дается формулой Хилле — Тамаркина [2] ($\beta_1 = \beta$, $\lambda_1 = \lambda$)

$$u(x) = \frac{d}{dx} \int\limits_0^x f(t) E_{\alpha,1}\left(\lambda(x-t)^{\beta}\right) dt, \tag{2}$$

где $E_{\beta,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta k+\mu)}$ — функция Миттаг-Леффлера. Заметим, что соотношение (2) может быть переписано в виде равенства

$$u(x) = D_{0x}^{\mu} \int\limits_0^x f(t)(x-t)^{\mu-1} E_{\beta,\mu}\left(\lambda(x-t)^{\beta}\right) dt, \quad \mu > 0.$$

В данной работе строится решение уравнения (1) для любого $m \in \mathbb{N}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-96510.

Рассмотрим функцию

$$S_m^\mu(x; z_1, \ldots, z_m; \beta_1, \ldots, \beta_m) = (h_1 * h_2 * \ldots * h_m)(x),$$

где $(\varphi * \psi)(x) = \int_0^x \varphi(x-t)\psi(t)\,dt$ — свертка функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$;

$$h_i = h_i(x) \equiv x^{\mu_i - 1}\phi(\beta_i, \mu_i; z_i x^{\beta_i}), \quad \phi(\xi, \eta; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!\,\Gamma(\xi j + \eta)}$$

— функция Райта [3]; $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i$, $\mu_i > 0$, $z_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i > 0$. Заметим, что функция $S_m^\mu(z_1, \ldots, z_m; \beta_1, \ldots, \beta_m)$ не зависит от распределения чисел $\mu_i > 0$, а лишь от их суммы μ.

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$|S_m^\mu(x; z_1, \ldots, z_m; \beta_1, \ldots, \beta_m)| \leqslant C x^{\mu-1} \exp\left(\sigma\, Z^{\frac{1}{1+\rho}}\, x^{\frac{\tau}{1+\tau}}\right),$$

где C и σ — положительные постоянные, не зависящие от x и z_i; $Z = \max\{|z_1|, \ldots, |z_m|\}$, $\rho = \min\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, $\tau = \max\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$.

Далее, обозначим через

$$G_m^\mu \equiv G_m^\mu(x; \lambda_1, \ldots, \lambda_m; \beta_1, \ldots, \beta_m) = \\ = \int_0^\infty e^{-t} S_m^\mu(x; \lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t; \beta_1, \ldots, \beta_m)\,dt.$$

Лемма 2. *Для функции $G_m^\mu = G_m^\mu(x; \lambda_1, \ldots, \lambda_m; \beta_1, \ldots, \beta_m)$ имеют место соотношения:*

$$G_m^\mu = O\left(x^{\mu-1}\right) \quad \text{при} \ \ x \to 0; \quad G_m^\mu - \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{-\beta_i} G_m^\mu = \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Решение интегрального уравнения* (1) *для любого положительного μ представимо в виде*

$$u(x) = D_{0x}^\mu (f * G_m^\mu)(x). \tag{3}$$

Отметим, что формула (3) является обобщением формулы Хилле — Тамаркина (2) на случай уравнения (1) и, как следует из равенств

$$G_1^{\mu}(x;\lambda;\beta) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} x^{\mu-1} \phi(\beta,\mu;\lambda t x^{\beta})\, dt = x^{\mu-1} E_{\beta,\mu}\left(\lambda x^{\beta}\right),$$

совпадает с ней в случае, когда $m = 1$.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Hille E., Tamarkin J. D.* On the theory of linear integral equations // Ann. Math.—1930.—Vol. 31, № 3.—P. 479–528.
3. *Wright E. M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc.—1933.—Vol. 8, № 29.—P. 71–79.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 226–228.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПЕРАТОРА ДИРАКА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С СОЛИТОННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Т. В. Редькина (Россия, Ставрополь; СГУ)

Построено нелинейное уравнение в частных производных с использованием операторного уравнения нулевой кривизны, где оператор Дирака, взят в качестве оператора рассеяния. К уравнению применены некоторые способы нахождения точных решений солитонного вида: в виде бегущих волн, автомодельные решения; применение метода Хироты; свойство Пенлеве; преобразование Беклунда; построение счетного числа законов сохранения.

Лемма. *Нелинейное уравнение в частных производных*

$$p_{xxt}p - p_x p_{xt} = 4p^3 p_t \tag{1}$$

имеет операторную структуру нулевой кривизны $L_t + [L, A] = A_x$ *с операторами* L *и* A *вида*

$$L = \begin{pmatrix} 0 & p(x,t) \\ p(x,t) & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{4\lambda} \begin{pmatrix} -2p_t & \frac{p_{xt}}{p} \\ -\frac{p_{xt}}{p} & 2p_t \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Нелинейное уравнение* (1) *имеет следующие решения: в параметрическом виде*

$$p = \frac{\beta}{\alpha} \sin\varphi, \quad \xi = C_3 \pm \alpha F(\beta, \varphi),$$

где $p(x,t) = p(\xi)$, $\xi = x + at$, $F(\beta,\varphi)$ *— эллиптический интеграл первого рода; автомодельное и солитонное соответственно*

$$p(x,t) = \mp\frac{k+1}{2x} \pm \frac{k^2}{kx \mp ax^{k+1}t^m}; \quad p(x,t) = \frac{\pm 2i\alpha\sqrt{c_1c_2}}{c_1e^{\alpha x+\beta t} + c_2e^{-\alpha x-\beta t}},$$

где k, m, a, α, β, c_1, c_2, C_3 *— произвольные постоянные.*

Теорема 2. *Уравнение* (1) *переходит в уравнение*

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u_z u_\eta + 2uu_{z\eta}}{u[2u - u_z^2 - 2uu_{zz}]}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{1}{u} = 0, \quad \text{где} \quad u(z,\eta) = p^2,$$

с помощью преобразования Беклунда, которое определяет переход от x *и* t *к новым независимым переменным* z *и* η *по правилу*

$$\frac{\partial}{\partial x} = 2p^2\frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{p_{xt}}{p}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Теорема 3. *Уравнение* (1) *обладает свойством Пенлеве и имеет решение в виде ряда*

$$p(x,t) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(t)\big(x - \varsigma(t)\big)^n,$$

$a_{-1} = \pm 1$, $a_0 = 0$, $a_2(t) = \frac{3a_1'(t)}{4\varsigma'(t)}$, $\varsigma(t)$, $a_1(t)$, $a_3(t)$ — *произвольные функции, остальные коэффициенты определяются рекуррентной формулой*

$$a_{n+4} = \mp\frac{1}{n^3 + 10n^2 + 27n - 6}\left(\frac{1}{\varsigma'}\sum_{j=-1}^{n+3}\big[j(2j-n-3)\,a_j' - 4b_j\big]a_{n+2-j} + \right.$$

$$+\sum_{j=0}^{n+3}\big[j(j-1)(n+5-2j)\,a_j + 4(n+3-j)\,b_j - 4a_j\big]a_{n+3-j} \mp$$

$$\left.\mp 4\sum_{k=0}^{n+3} a_k \sum_{j=-1}^{n+3-k} a_j a_{n+2-j-k}\right).$$

Теорема 4. *Уравнение* (1) *обладает счетным числом законов сохранения*

$$J_1(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} p^2(x,t)\,dx, \quad J_3(x,t) = -\int_{-\infty}^{\infty}\big[p^4(x,t) + p_x^2(x,t)\big]\,dx,$$

$$J_{n+2} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(2i\left[2p_x R_n - p\sum_{k=1}^{n-1} R_k R_{n+1-k} - pR_{n+1}\right] - \sum_{k=1}^{n} R_k R_{n+1-k}\right)dx,$$

где многочлены $R_n(x,t)$ определяются по формулам

$$R_1(x,t) = p^2(x,t) + ip_x(x,t); \quad R_2(x,t) = -ip_{xx}(x,t);$$

$$R_{n+2} = 2i\left(p_x R_n - p\sum_{k=1}^{n-1} R_k R_{n+1-k} - pR_{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} R_k R_{n+1-k} - R_{(n+1)x}.$$

Литература

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи.—М.: Мир, 1987.— 480 с

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 229–230.

ОЦЕНКИ ВОЗМУЩЕННОЙ ПОЛУГРУППЫ ОЗЕЕНА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ[1]

Л. И. Сазонов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Пусть v — стационарное решение системы Навье — Стокса в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (u, \nabla)u - \nabla p + f, \\ \mathrm{div}\ \ u = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Будем предполагать, что поле v имеет вид $v = u_\infty e_1 + w$, где u_∞ — ненулевая константа, а w в определенном смысле стремится к нулю на бесконечности.

Осуществляя замену $u \operatorname{div} u + v$, приходим к уравнению для возмущений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - u_\infty \partial_1 u - (w, \nabla)u - (u, \nabla)w - (u, \nabla)u - \nabla p, \\ \mathrm{div}\ \ u = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Систему (2) будем называть возмущенной системой Озеена. Обозначим через $S_p = S_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ подпространство в $L_p^n(\mathbb{R}^n)$, являющееся замыканием множества всех гладких финитных соленоидальных полей. Применяя к системе (2) гидродинамический проектор $\Pi : L_p^n(\mathbb{R}^n) \mapsto S_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$, сведем возмущенную систему Озеена к ОДУ в пространстве $S_p(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{du}{dt} = Au + Bu + Ku, \tag{3}$$

где A, B, K — операторы вида $Au = \Pi(\Delta u - u_\infty \partial_1 u)$,

$$Bu = -\Pi\big((w, \nabla)u + (u, \nabla)w\big), \quad Ku = -\Pi\big((u, \nabla)u\big). \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Аналитической ведомственной целевой программы развития научного потенциала высшей школы, грант № 211/6095.

В докладе будут изложены результаты автора, полученные полугрупповыми методами для уравнения (3). В первую очередь следует отметить, что возмущенный оператор Озеена $\widetilde{A} = A + B$ в каждом пространстве $S_p = S_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$ порождает аналитическую полугруппу операторов $\widetilde{T}(t)$, для которой при определенных условиях для стационарного поля v выполняются степенные оценки

$$\|\tilde{T}(t)\Pi\partial^\alpha\|_{p\mapsto q} \leqslant c^\alpha_{pq} t^{-|\alpha|/2-(n/2)(1/p-1/q)}, \tag{5}$$

где $1 < p \leqslant q < \infty$, $|\alpha| \leqslant 1$.

Для невозмущенного оператора Озеена в случае внешней области в трехмерном пространстве такие оценки впервые были получены в [1], для возмущенного оператора в [2] с использованием теории обратимости в некоторых банаховых алгебрах, связанных с полугруппой Озеена.

Дальнейшие результаты получаются при исследовании интегрального уравнения для вомущений

$$u(t) = \tilde{T}(t)a + \int\limits_0^t \tilde{T}(t-s)(Ku)(s)\,ds. \tag{6}$$

К числу таких результатов относятся теоремы о существовании малых решений возмущенной системы Навье — Стокса в некоторых функциональных пространствах, теоремы об устойчивости и неустойчивости стационарных решений [3] и оценки сходимости нестационарных решений к устойчивым стационарным.

Литература

1. *Сазонов Л. И.* Обоснование метода линеаризации в задаче обтекания // Изв. РАН. Сер. матем.—1994.—Т. 58, № 5.—С. 85–109.
2. *Сазонов Л. И.* Оценки возмущенной полугруппы Озеена // Владикавк. матем. журн.—2009.—Т. 11, вып. 3.—С. 50–61.
3. *Сазонов Л. И.* Об устойчивости стационарных решений задачи обтекания // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. Спецвыпуск. Актуальные проблемы математической гидродинамики.—2009.—С. 195–200.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 231–232.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

В. И. Седенко (Россия, Ростов-на-Дону; РГЭУ (РИНХ))

Нелинейные колебания упругой пологой оболочки при движении в сверхзвуковом потоке газа описываются следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{gathered}\ddot{u}(\ ,t) - \gamma\Delta u_{tt} + \varepsilon\Delta^2\dot{u}(\ ,t) + \\ +\Delta^2 u(\ ,t) - \big[u(\ ,t) + f, \nu(\ ,t) + \theta\big] + \rho\,\frac{\partial u(\ ,t)}{\partial x_1} = p(x),\end{gathered} \tag{1}$$

$$\Delta^2\nu(\ ,t) - \big[u(\ ,t) + 2f, u(\ ,t)\big] = 0, \tag{2}$$

с краевыми условиями жестокого закрепления края оболочки

$$u(\ ,t)\big|_\Gamma = \frac{\partial u(\ ,t)}{\partial n}\bigg|_\Gamma = 0, \tag{3}$$

и начальными условиями

$$u(\ ,t)\big|_{t=0} = u_0(x), \quad \dot{u}(\ ,t)\big|_\Gamma = u_1(x). \tag{4}$$

Оболочка проектируется на область Ω в $\mathbb{R}^2$ с границей Γ.

Гильбертово пространство $B_2^{2,1}(Q)$ $\left(\ \overset{\circ}{B}{}_2^{2,1}\ \right)$ — это пополнение множества бесконечно дифференцируемых финитных на $Q = \Omega \times \big[0, t_f\big]$ функций

$$\big(u_1, u_2\big)_{\widetilde{H}_2^{2,1}(\Omega)} = \int\limits_0^{t_f} \Big[\big(u_{1t}, u_{2t}\big)_{L_2(\Omega)} + \big(u_1, u_2\big)_{H_2^2(\Omega)}\Big]\,dt.$$

Обобщенными решениями начально-краевой задачи (1)–(4) называются функции $u \in B_2^{2,1}(Q)$ и $\nu \in L_\infty\Big(\big[0,t_f\big], \overset{\circ}{H}{}^2_2(\Omega)\Big)$ такие, что

$$\begin{gathered}\int_0^{t_f}\int_\Omega \Big[-u_t u_t' + \varepsilon u_t u' + \Delta u \Delta u' - [u+f,\nu+\theta]\,u' + \rho\frac{\partial u}{\partial x_1}\,u' - \\ -pu'\Big]\,dx\,dt\,(\mu+1)\int_0^{t_f}\int_\Omega \chi\frac{du}{dn}\frac{du}{dn}\,ds - \int_\Omega u_1 u'(x,0)\,dx = 0,\end{gathered} \tag{5}$$

$$\int_0^{t_f}\int_\Omega \big(\Delta\nu\Delta\nu' + [u+2f,\nu']\,u\big)\,dx = 0 \tag{6}$$

для любых функций $u' \in B_2^{2,1}(Q)$, $\nu' \in B_2^{2,1}(Q)$, и начальному условию

$$\lim_{t\to 0}\big\|u(\ ,t) - u_0\big\|_{L_2(\Omega)} \tag{7}$$

Теорема. *Пусть* $f \in H_2^3(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^2_2(\Omega)$, $u_0, u_1 \in H_2^2(\Omega,\mu)$, $p \in L_2(\Omega)$. *Тогда существуют единственные обобщенные решения* u *и* ν *начально-краевой задачи* (1)–(4) *в смысле* (5)–(7), *причем*

$$\begin{gathered}u \in C\Big(\big[0,t_f\big], \overset{\circ}{H}{}^1_2(\Omega)\Big) \cap L^{0,1}_{2,\infty}\big(\Omega\times[0,t_f]\big) \cap L_\infty\Big([0,t_f], H_2^2(\Omega,\mu)\Big), \\ \nu \in L_\infty\Big([0,t_f], \overset{\circ}{H}{}^2_2(\Omega)\Big).\end{gathered}$$

Замечание. Существование обобщенных решений для случая ограниченной области с гладкой границей доказано в [1], единственность в [2] (с помощью метода, предложенного в [3]). Основное развитие этих результатов, которое анонсируется здесь, это рассмотрение задачи (1)–(4) в неограниченной области.

Литература

1. *Морозов Н. Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1978.—182 с.
2. *Monvel A. B., Chueshov I. D.* Unigueness theorem for weak solutions of von Karman evolution equations // J. of Math. Anal. and Appl.—1998.—T. 221.—P. 419–429.
3. *Седенко В. И.* Единственность обобщенного решения начально-краевой задачи нелинейной теории колебаний пологих оболочек // Докл. АН СССР.—1991.—Т. 316, № 6.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 233–234.

О СПЕКТРАХ ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ДВУХМАГНОННЫХ СИСТЕМ В ИЗОТРОПНОЙ ПРИМЕСНОЙ НЕГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ

С. М. Ташпулатов (Узбекистан, Ташкет; ИЯФ АН РУз)

Рассматривается двухмагнонная система в изотропной примесной негейзенберговской ферромагнитной модели с произвольным значением спина s в ν-мерной решетке Z^ν с взаимодействием ближайших соседей и исследуются существенные и дискретные спектры этой системы. Рассматриваемая система состоит из трех частиц: из двух магнонов и примесного спина.

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = -\sum_{m,\tau}\sum_{n=1}^{2s} J_n(\vec{S}_m\vec{S}_{m+\tau})^n - \sum_{\tau}\sum_{n=1}^{2s}(J_n^0 - J_n)(\vec{S}_0\vec{S}_\tau)^n,$$

и он действует в симметрическом пространстве Фока $\mathcal{H}$. Здесь $J_n > 0$ — параметры мультипольных обменных взаимодействий между ближайшими атомами решетки Z^ν, а $J_n^0 \neq 0$ — параметры мультипольных обменных взаимодействий между атомами и примесями, $\vec{S}_m$ — оператор атомного спина величины s в узле m, по τ ведется суммирование по ближайшим соседям. Обозначим через φ_0 вектор, называемый вакуумным и однозначно определяемый условиями: $S_m^+\varphi_0 = 0$, $S_m^z\varphi_0 = s\varphi_0$, где $\|\varphi_0\| = 1$. Положим $S_m^\pm = S_m^x \pm iS_m^y$, где S_m^- и S_m^+ — соответственно операторы рождения и уничтожения магнона в узле m. Вектор $S_m^- S_n^- \varphi_0$ описывает состояние системы двух магнонов со значением спина s, находящихся в узлах m и n. Гильбертово пространство, натянутое на эти векторы, обозначим через $\mathcal{H}_2$. Обозначим через H_2 сужение оператора H на $\mathcal{H}_2$. Пространство $\mathcal{H}_2$ инвариантно относительно оператора H. Оператор H_2 является ограниченным самосопряженным оператором.

Спектральные свойства рассматриваемого трехчастичного дискретного оператора тесно связаны со спектральными свойствами его двухчастичных подсистем. Сначала исследуется спектр и локализованные примесные состояния (ЛПС) одномагнонных примесных систем [1], а также спектр и связанные состояния (СС) двухмагнонных систем [2].

Используя тензорные произведения гильбертовых пространств и тензорные произведения операторов в гильбертовых пространств [3], можно убедиться, что оператор $\tilde{H}_2$ можно представлять в виде: $\tilde{H}_2 = \tilde{H}_1 \otimes E + E \otimes \tilde{H}_1 + K_1 + K_2$, где E — единичный оператор в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_1$ — в пространстве одномагнонных состояний оператора H, а операторы K_1 и K_2 являются конкретные интегральные операторы.

При фиксированном полном квазиимпульсе двухмагнонной подсистемы, можно разложить в прямой интеграл оператор H_2' и пространство $\mathcal{H}_2$ так, что после этого разложения операторы $K_{1\Lambda}$ становятся компактными операторами. Более того, операторы $K_{1\Lambda}$ и K_2 являются операторами конечного ранга. Спектр оператора $\widetilde{H}_1$ состоит из непрерывного спектра и не более чем трех собственных значений.

Показано, что существенный спектр рассматриваемой трехчастичной системы состоит из объединения не более чем четырех отрезков, и получены нижняя и верхняя оценка для N — количества трехчастичной СС системы.

Литература

1. *Ташпулатов С. М.* Одномагнонные системы в изотропной примесной негейзенберговской ферромагнитной модели // Теоретическая и матем. физика.—2005.—Т. 142, № 1.—С. 83–92.
2. *Ташпулатов С. М.* Spectra and bound states of the energy operator of two-magnon systems in a isotropic non-Heisenberg ferromagnet with nearest-neighbour interactions and arbitrary spin value S // Узб. мат. журн.—2008.—№ 1.—С. 95–111.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ.—М: Мир, 1977.—358 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 235–236.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ УПРУГОСТИ С ПАМЯТЬЮ

Ж. Д. Тотиева-Туаева (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

В работе [1] была представлена многомерная математическая модель сейсмики с памятью, представляющая собой начально-краевую задачу для системы дифференциальных уравнений Ламэ с памятью (случай вертикально-неоднородной среды). Для исследования модели применялся метод разложений по параметру и для задачи в нулевом приближении была доказана теорема о существовании и единственности решения для некоторого класса обобщенных функций. Решение этой задачи получено в виде интегрального уравнения. Далее необходимо исследовать задачу в первом приближении.

Постановка задачи. Определить вектор-функцию $u^1(x,t) = \big(u_1^1(x,t), u_2^1(x,t), u_3^1(x,t)\big)$, удовлетворяющую в области $\Omega = \{x = (x_1,x_2,x_3) \in R^3$, $x_3 > 0$, $t \geqslant 0$ следующим равенствам:

$$\rho_0(x_3)\frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 T_{ij}^1}{\partial x_j} - \rho_1(x_2,x_3)\frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2}, \quad i = 1,2,3, \tag{1}$$

$$u_i^1\Big|_{t<0} = 0, \tag{2}$$

$$T_{3i}^1\Big|_{x_3=+0} = 0, \tag{3}$$

где $\big(u_1^0(x,t), u_2^0(x,t), u_3^0(x,t)\big)$ — известное нулевое приближение искомой функции [1],

$$T_{ij}^1(x,t) = \sigma_{ij}[u^1] + \int\limits_0^1 K(x_3, t-\tau)\sigma_{ij}[u^1]\,d\tau,$$

$$\sigma_{ij}[u^1] = \mu_0(x_3)\left(\frac{\partial u_i^1}{dx_j} + \frac{\partial u_j^1}{dx_i}\right) + \delta_{ij}\lambda_0(x_3)\operatorname{div} u^1.$$

Функция $K(x_3, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$K(x_3, t) \in C^2\big(R_+ \times [0, T]\big), \quad K(x_3, 0) = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial t}(x_3, 0) = 0, \tag{4}$$

$T > 0$ — фиксировано,

$$\begin{gathered} \rho_0(x_3), \mu_0(x_3), \lambda_0(x_3) \in C^2(R_+), \\ \frac{d\rho_0}{dx_3}(+0) = \frac{d\mu_0}{dx_3}(+0) = \frac{d\lambda_0}{dx_3}(+0) = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

$\rho_1(x_2, x_3) \in C(R \times R_+)$ — первое приближение функции плотности в разложении по параметру.

Для некоторого упрощения задачи (1)–(3) вводится замена переменной $y = \psi(x_3)$ по правилу:

$$\psi(x_3) = \int\limits_0^{x_3} \frac{d\xi}{\nu(\xi)}, \quad \nu^2(\xi) = \frac{\mu_0(x_3)}{\rho_0(x_3)}.$$

Пусть r — фиксированное положительное число, $X = \psi^{-1}\left(\frac{T}{2}\right)$.

Будем считать, что $\rho_1(x_2, x_3) \in \Lambda(r, X)$ тогда и только тогда, когда преобразование Фурье $\tilde{\rho}_1(\nu, x_3) = F_{x_2}[\rho_1](\nu, x_3) \in C(R \times R_+)$ и для любого фиксированного $x_3 \in [0, X]$ $\sup \rho_1(0, x_3) \subset [-r, r]$. Введем класс обобщенных функций $U_1(r, T)$, в котором решение задачи (1)–(3) существует и единственно.

Основным результатом исследования является следующая теорема.

Теорема. *Пусть r, T — фиксированные положительные числа, $x = \tau^{-1}\left(\frac{T}{2}\right)$. Функции $K(x_3, t)$, $\lambda_0(x_3)$, $\mu_0(x_3)$, $\rho_0(x_3)$ заданы и удовлетворяют условиям* (4), (5). *Пусть $u^0(x, t)$ — решение прямой задачи в нулевом приближении, $\rho_1(x_2, x_3) \in \Lambda(r, x)$ — фиксированная функция. Тогда существует единственное решение $u^1(x, t) \in U_1(r, T)$ задачи* (1)–(3).

Литература

1. *Туаева Ж. Д.* Многомерная математическая модель сейсмики с памятью // Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—С. 297–306.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 237–238.

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА И. Н. ВЕКУА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ СФЕРИЧЕСКИХ КУПОЛОВ

Е. В. Тюриков (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В рамках мембранной теории выпуклых оболочек [1] (см. также [2, гл. 17]) изучается граничная задача T безмоментного напряженного состояния тонкой упругой оболочки T, серединная поверхность S которой есть строго внутренняя односвязная часть выпуклой поверхности S_0 класса регулярности $W^{3,p}$, $p > 2$, с кусочно-гладким краем $L = \bigcup_{j=1}^{n} L_j$, состоящим из конечного числа дуг L_j класса регулярности $C^{1,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$. Предполагается, что в каждой точке дуги L_j $(j = 1, \dots, n)$ задана проекция $\sigma(s)$ *вектора усилий* на направление вектора $\vec{r}(s) = \{\alpha(s), \beta(s)\}$ с касательной и нормальной составляющими α, β соответственно, где s — натуральный параметр, $\alpha^2(s) + \beta^2(s) = 1$, $\beta(s) > 0$ на L_j. Рассматривается случай, когда угловые точки c_j границы L с внутренними углами ν_j $(0 < \nu_j < 2\pi)$ — омбилические точки поверхности S_0, вектор-функция $\vec{r}(c)$ точки c контура L непрерывна в этих точках, а функции $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\sigma(s)$ — гельдеровы на каждой из дуг L_j.

Пусть $\mathfrak{I}$ — отображение поверхности S на комплексную плоскость $\zeta = u^1 + iu^2$, заданное выбором сопряженно изометрической параметризации (u^1, u^2) на S, $D = \mathfrak{I}(S)$ — ограниченная в плоскости ζ область с границей $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{n} \mathfrak{I}(L_j)$, содержащей угловые точки $\zeta_j = \mathfrak{I}(c_j)$. Согласно [1], задача T сводится к отысканию в области D комплекснозначного решения $w(\zeta)$ уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} + B(\zeta)\,\overline{w}\,(\zeta) = F(\zeta), \tag{1}$$

где $i^2 = -1$, $\partial_{\bar{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u^1} + i\frac{\partial}{\partial u^2}\right)$ — оператор комплексного дифференцирования, $w(\zeta)$ — *комплексная* функция напряжений, выражаемая через компоненты контрвариантного *тензора усилий* и коэффициенты метрической формы поверхности, $B(\zeta)$ — заданная поверхностью S функция класса $L_p(\overline{D})$, $p > 2$, $F(\zeta)$ — *комплексная функция внешней нагрузки оболочки*, по заданному граничному условию

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{d\zeta}{ds}\left(\beta\frac{d\zeta}{d\ell} - \alpha\frac{d\zeta}{ds}\right) w(\zeta)\right\} = \gamma(\sigma, K, k_s, \tau_g, X), \quad \zeta \in \Gamma, \tag{2}$$

в котором $d\zeta/ds = s^1 + is^2$, s^i $(i = 1, 2)$ — координаты касательного к Γ орта, $d\zeta/d\ell = \ell^1 + i\ell^2$, ℓ^i $(i = 1, 2)$ — координаты орта направления на плоскости ζ, являющегося $\mathfrak{J}$-образом направления тангенциальной нормали, γ — вполне определенная функция своих аргументов, K, k_s, τ_g — соответственно гауссова кривизна поверхности, нормальная кривизна и геодезическое кручение поверхности в направлении края в точке $c = \mathfrak{J}^{-1}(\zeta)$, X — *нормальная компонента вектора поверхностных и объемных сил на единицу площади.* Задачу (1), (2) назовем задачей R. Угловую точку c_j назовем неособенной точкой k-типа $(k = 1, \ldots, 6)$, если $\frac{k-1}{3}\pi < \nu_j < \frac{k}{3}\pi$. Точку c_j, для которой $\nu_j = k\pi/3$ $(k = 1, \ldots, 5)$ будем называть особенной и относить к k-типу соответственно.

Пусть $c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}$ — произвольно отмеченные неособенные *угловые точки* задачи R. Будем отыскивать решение класса $h(\zeta_{i_1}, \ldots, \zeta_{i_m})$, т. е. решение, ограниченное в точках $\zeta_{i_1}, \ldots, \zeta_{i_m}$ и допускающее в некоторой окрестности остальных точек ζ_j $(j \neq i_k,\ k = 1, \ldots, m)$ оценку $\bigl|w(\zeta)\bigr| \leqslant A|\zeta - \zeta_j|^{-\alpha}$, $0 < \alpha_j < 1$, $A = \mathrm{const}$.

Обозначим через N_k число *угловых точек задачи* R, принадлежащих классу k-типу. Справедлива

Теорема. *Пусть S — заданная выше односвязная поверхность класса регулярности $W^{3,p}$, $p > p_0$, где $p_0 = \max\{1, \nu_1/\pi, \ldots, \nu_n/\pi\}$, а c_{i_1}, …, c_{i_m} — произвольно отмеченные* неособенные точки *из числа угловых точек c_j. Если $N \equiv \sum_{k=1}^{6}(3 - k)N_k \geqslant 3 + m - n$, то задача* R *безусловно разрешима в классе $h(c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}) \cap W^{1,q}$, $2 < q < 2p/\bigl(2 + p(1 - 1/p_0)\bigr)$. Если же $N < 3 + m - n$, то задача* R *однозначно разрешима в указанном классе тогда и только тогда, когда для функции $\gamma(s)$ выполняется конечное число условий разрешимости интегрального типа.*

Литература

1. *Векуа И. Н.* Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек // Мат. сб.—1952.—Т. 31, № 2.—С. 217–314.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория тонких упругих оболочек.— М.: Наука, 1976.— 512 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 239.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛИНЯ — РЕЙССНЕРА — ЦЗЯНА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Х. Г. Умаров (Россия, Грозный; ЧГУ)

Для дифференциального уравнения в частных производных, являющегося линеаризацией уравнения Линя-Рейсснера-Цзяна, моделирующего нестационарные малые возмущения в трансзвуковом потоке газа,

$$u_{xt} + k\, u_{xx} + a\, u_x = u_{yy} + u_{zz} + f(x, y, z, t),$$

где k и a — числовые параметры, получен явный вид решения задачи Коши и начально-краевых задач в полупространстве $z \geqslant 0$ и пространственном слое $0 \leqslant z \leqslant \ell$, используя методы теории сильно непрерывных полугрупп.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 240–242.

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ЯДРОМ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА

С. М. Умархаджиев (Россия, Грозный; ЧГУ)

Основными объектами исследования являются многомерные интегральные уравнения первого рода с ядром типа потенциала

$$\mathbf{M}^\alpha \varphi := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{c(x,y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, \varphi(y)\, dy = f(x), \quad \alpha > 0, \tag{1}$$

с непрерывными характеристиками $c(x,y)$. Наша цель — свести уравнение (1), рассматриваемое в некотором пространстве суммируемых функций, к уравнению второго рода вида

$$\varphi(x) + (\mathbf{A}\varphi)(x) = F(x), \tag{2}$$

где $F(x)$ — некоторая функция, зависящая от функций $f(x)$ и $c(x,y)$, а оператор $\mathbf{A}$ компактен в рассматриваемом пространстве. Эта задача была ранее решена [2] для пространств $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < n/\alpha$. Здесь мы распространяем это утверждение на случай обобщенных пространств Лебега $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с переменным показателем, пользуясь недавним прогрессом в теории таких пространств.

Пусть $p : \mathbb{R}^n \to [1,\infty)$ — измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция и $p_- = \operatorname{ess}\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} p(x)$, $p_+ = \operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} p(x)$. Через $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ обозначается множество всех измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций f, для которых конечен модуляр $I^p(f) := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)}\, dx < \infty$. При условии $1 \leqslant p(x) \leqslant p_- < \infty$ на $\mathbb{R}^n$ множество $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leqslant 1\right\}.$$

Через $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество функций $p(x)$, удовлетворяющих условиям:

a) $\left|p(x)-p(y)\right| \leqslant \frac{A}{-\ln|x-y|}$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x-y| \leqslant \frac{1}{2}$, где A не зависит от x и y;

b) существует постоянная p_∞, такая что $\left|p(x) - p_\infty\right| \leqslant \frac{A}{\ln(2+|x|)}$ $x \in \mathbb{R}^n$.

Определим класс гельдеровских в $\mathbb{R}^n$ функций, выходящих на бесконечности на константу «гельдеровским» образом: $0 < \lambda \leqslant 1$,

$$H^\lambda(\dot{\mathbb{R}}^n) = \left\{ f(x) \in C(\dot{\mathbb{R}}^n),\ \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \frac{C|x-y|^\lambda}{(1+|x|)^\lambda(1+|y|)^\lambda} \right\}.$$

Теорема. *Пусть $\alpha < \lambda \leqslant 1$, функция $c(x,y)$ принадлежит классу $H^\lambda(\dot{\mathbb{R}}^n)$ по первой переменной равномерно относительно второй, $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |c(x,x)| > 0$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \left|c(x,x)\right| < \infty$, $p(x) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha p_+ < n$. Тогда гиперсингулярный оператор*

$$\mathbf{R}f = \frac{\mu}{c(x,x)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(x-y)}{|y|^{n+\alpha}}\, dy,$$

где $\mu = \frac{\alpha}{2\pi^{n+1}} \sin\frac{\alpha\pi}{2} \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)$, является регуляризатором для оператора $\mathbf{M}^\alpha$ в пространстве $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Причем оператор $\mathbf{R}$ приводит уравнение (1) к виду (2) с оператором

$$(\mathbf{A}\varphi)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}(x, x-y)\, \varphi(y)\, dy,$$

где $\mathcal{K}(x,y) = \frac{\mu}{c(x,x)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c(x,y)-c(\xi,y)}{|x-\xi|^{n+\alpha}|y-\xi|^{n-\alpha}}\, dy$ и $F(x) = (\mathbf{R}f)(x)$, компактным в пространстве $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

При доказательстве этого утвеждения существенно использовалось следующее обстоятельство. В 1960 г. М. А. Красносельским [1] была показана возможность «односторонней» интерполяции свойства компактности в пространствах L^p с постоянным p. Для пары пространств L^p и $L^{p(\cdot)}$ такая односторонняя интерполяция компактности была установлена в работе [3]. Эффективность последнего результата для приложений очевидна: оно позволяет получать компактность в $L^{p(\cdot)}$ с переменным показателем, располагая для переменных показателей лишь ограниченностью, а компактность зная только при постоянных показателях.

Литература

1. *Красносельский М. А.* О теореме Рисса // Докл. АН СССР.—1960.—№ 1.—С. 229–231.
2. *Самко С. Г., Умархаджиев С. М.* Приложения гиперсингулярных интегралов к многомерным интегральным уравнениям // Тр. мат. ин-та АН СССР.—1985.—Т. 172.—С. 299–312.
3. *Rabinovich V. S., Samko S. G.* Boundedness and Fredholmness of pseudo-differential operators in variable exponent spaces // Integr. Eq. Oper. Theory.—2008.—Vol. 60, № 4.—P. 507–537.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 243–244.

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Е. А. Уткина (Россия, Казань; ТГГПУ)

Рассмотрим уравнение

$$L(u) = D_x^2 D_y^2 u(x,y) + \sum_{\substack{i=0 \\ i+j<4}}^{2} \sum_{j=0}^{2} a_{ij}(x,y) D_x^i D_y^j u(x,y) = f(x,y), \qquad (1)$$

являющееся обобщением уравнения Буссинеска-Лява [1], которое описывает продольные волны в тонком упругом стержне с учетом эффектов поперечной инерции. Считаем, что D — оператор дифференцирования $D_t^k \varphi \equiv \partial^k \varphi / \partial t^k$ при $k = 1, 2, \ldots$ и D_t^0 — оператор тождественного преобразования.

Пусть $D = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1\}$, $p = [0, y_1]$, $q = [0, x_1]$, а коэффициенты уравнения (1) принадлежат классам $a_{ij} \in C^{i,j}(\bar{D})$, $f \in C^{0,0}(\bar{D})$.

Задача. Найти функцию $u(x,y) \in C^{2,2}(D) \cap C^{1,0}(D \cup p) \cap C^{0,1}(D \cup q) \cap C^{0,0}(\overline{D})$, являющуюся в D решением уравнения (1) и удовлетворяющую условиям

$$u(0,y) = \varphi_0(y), \quad u(x,0) = \psi_0(x), \qquad (2)$$

$$u(x_1,y) = \varphi_1(y), \quad u(x,y_1) = \psi_1(x). \qquad (3)$$

Из принадлежности $u(x,y)$ классу $C(\bar{D})$ следуют соотношения:

$$\varphi_0(y_1) = \psi_1(0), \quad \varphi_0(0) = \psi_0(0), \quad \psi_0(x_1) = \varphi_1(0), \quad \varphi_1(y_1) = \psi_1(x_1).$$

Для единственности решения достаточно доказать, что при однородных условиях (2), (3) однородное уравнение (1) имеет только нулевое решение. Воспользовавшись определениями скалярного произведения $(u,v) = \int_0^{x_1}\int_0^{y_1} u(x,y)v(x,y)dydx$ и нормы $\|u\|^2 = \int_0^{x_1}\int_0^{y_1} u^2(x,y)\,dy\,dx$ в пространстве $L_2[0,x_1] \times [0,y_1]$, вычислим скалярное произведение $(L(u),u)$, которое и оценим снизу. Так как функции $a_{ij}(x,y)$ являются непрерывными на компакте, то они достигают своих точных верхних и точных нижних граней. Обозначив $\sup_{(x,y)\in D} a_{ij}(x,y) = sa_{ij}$, $\inf_{(x,y)\in D} a_{ij}(x,y) = ia_{ij}$,

$$\alpha_1 = -\frac{sa_{21xxy}}{2} - \frac{sa_{12xyy}}{2} + \frac{ia_{20xx}}{2} + \frac{ia_{02yy}}{2} + \frac{ia_{11xy}}{2} - \frac{sa_{10x}}{2} - \frac{sa_{01y}}{2} + ia_{00},$$

$$\alpha_2 = \frac{ia_{21y}}{2} - sa_{20}, \quad \alpha_3 = \frac{ia_{12x}}{2} - sa_{02},$$

приходим к неравенству

$$\frac{\|f\|^2}{2} \geqslant \|u_{xy}\|^2 + \|u\|^2 \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+\|u_x\|^2 \left(\alpha_2 - \varepsilon|s(a_{12y} + a_{21x} - a_{11})|^2\right) + \|u_y\|^2 \left(\alpha_3 - \frac{1}{4\varepsilon}\right).$$

Потребуем неотрицательности коэффициентов при нормах. Полагая $f = 0$, получим, что функция $u \equiv 0$.

Таким образом, имеет место

Теорема. *Если коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют неравенствам* $\alpha_1 - 0,5 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_3 \geqslant 0$, $4\alpha_2\alpha_3 \geqslant |s(a_{12y} + a_{21x} - a_{11})|^2$, *то задача* (1)–(3) *имеет единственное решение.*

Условия теоремы являются существенными. Рассмотрим, например, задачу Дирихле для уравнения $u_{xxyy} + u_{xx} = 0$ в области $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$ с нулевыми условиями на границе. В нем коэффициент $a_{20} = 1 > 0$, а все остальные равны нулю, условие теоремы не выполнено. Решением, в чем можно убедиться непосредственно, является $u(x,y) = \sin x \cdot \sin y$, отличная от тождественного нуля в области D.

Литература

1. *Солдатов А. П., Шхануков М. Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А.Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. РАН.—1987.—Т. 297, № 3.—С. 547–552.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 245–246.

H_λ-ОПЕРАТОРЫ В ЛОКАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В. Г. Фетисов (Россия, Шахты; ЮРГУЭС, ЮМИ)**,**
В. Н. Козоброд (Россия, Шахты; ВИС ЮРГУЭС, ЮМИ)

Доклад содержит новые результаты, относящиеся к базовым свойствам класса H_λ-операторов, охватывающих основные типы нелинейных атомических операторов, действующих в локально ограниченных пространствах измеримых по Лебегу вектор-функций. Через $E(X)$обозначим локально ограниченное идеальное пространство (кратко, ЛОИП) всех измеримых вектор-функций $\overrightarrow{x} : T \to X$ таких, что F-квазинорма $\|\overrightarrow{x}; E(X)\| = \|\|\overrightarrow{x}\|_X\|_E < +\infty$.

Пусть $E_1(X_1)$ и $E_2(X_2)$ — два ЛОИП измеримых по Лебегу вектор-функций, оператор $A : E_1(X_1) \to S(X_2)$, $\overrightarrow{x} \in E_1(X_1)$ и $\lambda \in R$. Назовем оператор A H_λ-оператором, если для любого $\overrightarrow{v} \in E_1(X_1)$ выполняется условие

$$\|A(\overrightarrow{v}) - A(\overrightarrow{v} + \lambda \cdot \overrightarrow{x}); E_2(X_2)\| \leqslant h(\|A(\overrightarrow{v}) - A(\overrightarrow{v} + \lambda \cdot \chi_{D_1}\overrightarrow{x}); E_2(X_2)\|) + \\ + h(\|A(\overrightarrow{v}) - A(\overrightarrow{v} + \lambda \cdot \chi_{D_2}\overrightarrow{x}); E_2(X_2)\|),$$

где функция $h : R^+ \to R^+$ принадлежит классу $\Phi(L)$ П. Л. Ульянова, для каждого элемента $\overrightarrow{x} \in E_1(X_1)$ и для любых измеримых подмножеств D_1 и D_2 из T_1 таких, что $D_1 \cup D_2 = T_1$ и $D_1 \cap D_2 = \oslash$, χ_{D_i} — индикатор множества D_i, $i = 1, 2$.

Для любой пары ЛОИП $(E_1(X_1), E_2(X_2))$ и данного оператора $A : E_1(X_1) \to E_2(X_2)$ обозначим через $A^\lambda_{\overrightarrow{v}} : E_1(X_1) \to E_2(X_2)$ оператор

$$A^\lambda_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{x}(s)) = A(\overrightarrow{v}(s)) - A(\overrightarrow{v}(s) + \lambda \cdot \overrightarrow{x}(s)). \tag{1}$$

Приведем один из основных результатов.

Теорема. *Условия* (A, C_k) *и* $(A^\lambda_{\overrightarrow{v}}, C'_k)$ $(k = \overrightarrow{1,5})$ *эквивалентны в каждом из следующих случаев:*

А) *для* $\overrightarrow{v}(s) \in E_1(X_1)$, *где* $A(\overrightarrow{v}(s)) \in E_2(X_2)$ *и множество* $M \subset E_1(X_1)$,

$$C_1 : \ A(M) \subset E_2(X_2); \quad C'_1 : \ A^\lambda_{\overrightarrow{v}}\left(\frac{(M \setminus \overrightarrow{v}(s))}{\lambda}\right) \subset E_2(X_2),$$

где через $\frac{(M\setminus\overrightarrow{v}(s))}{\lambda}$ обозначено множество функций $\Big\{\frac{\overrightarrow{y}(s)-\overrightarrow{v}(s))}{\lambda}$, $\overrightarrow{y}(s)\in M,\ \lambda\neq 0\Big\}$;

B) *для* $\overrightarrow{v}(s)\in E_1^0(X_1)$ (*соответственно для* $\overrightarrow{v}(s)\in E_1(X_1)$), *где* $A(\overrightarrow{v}(s))\in E_2^0(X_2)$,

$$C_2:\ A(E_1^0(X_1))\subset E_2^0(X_2)\quad (\textit{соответственно}, A(E_1(X_1))\subset E_2^0(X_2));$$

$$C_2':\ A^{\lambda}_{\overrightarrow{v}}\left(E_1^0(X_1)\right)\subset E_2^0(X_2)\ \ (\textit{соответственно}, A^{\lambda}_{\overrightarrow{v}}(E_1(X_1))\subset E_2^0(X_2);$$

C) *для* $\overrightarrow{v}(s)\in E_1\circ(X_1)$ (*соответственно*, $\overrightarrow{v}(s)\in E_1(X_1)$), *где* $A(\overrightarrow{v}(s))\in E_2\circ(X_2)$,

$$C_3:\ A(E_1\circ(X_1))\subset E_2\circ(X_2)\ \ (\textit{соответственно}, A(E_1(X_1))\subset E_2\circ(X_2));$$

$$C_3':\ A^{\lambda}_{\overrightarrow{v}}(E_1\circ(X_1))\subset E_2\circ(X_2)\ \ (\textit{соответственно}, A^{\lambda}_{\overrightarrow{v}}(E_1(X_1))\subset E_2\circ(X_2));$$

D) *для* $\overrightarrow{v}(s)\in E_1(X_1)$, *где* $A(\overrightarrow{v}(s))\in E_2^0(X_2)$ *и* $M\subset E_1(X_1)$,

$$C_4:\ A(M)\subset E_2(X_2)$$

и является абсолютно ограниченным множеством в $E_2(X_2)$;

$$C_4':\ A^{\lambda}_{\overrightarrow{v}}\left(\frac{(M\setminus\overrightarrow{v}(s))}{\lambda}\right)$$

— *абсолютно ограниченное множество в* $E_2(X_2)$;

E) *для окрестности* $B^{\lambda}(\overrightarrow{\theta},r)=\big\{\overrightarrow{v}(s)\in E_1(X_1)$, *где* $\|\lambda\cdot\overrightarrow{v}(s);E_1(X_1)\|<r\big\}$,

C_5 : *множество значений* $A\left(B\left(\overrightarrow{\theta},r\right)\right)$ *ограничено по* F-*норме пространства* $E_2(X_2)$;

C_5' : *множество значений* $A^{\lambda}_{\overrightarrow{v}}\left(B^{\lambda}\left(\overrightarrow{\theta},r\right)\right)$ *ограничено по* F-*норме пространства* $E_2(X_2)$.

Литература

1. *Randriananga R. R.* Sur les h_λ-operateurs dans certains F-espaces // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris.—1988.—Vol. 325.—P. 667–669.
2. *Фетисов В. Г., Филиппенко В. И., Козоброд В. Н.* Операторы и уравнения в линейных топологических пространствах.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2006.—432 с.
3. *Vath M.* Continuity of single- and multivalued superposition operators in generalized ideal spaces of measurable vector functions // Nonlinear Funct. Anal.—2006.—Vol. 11, № 4.—P. 607—646.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 247–248.

О ЗАДАЧЕ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

К. У. Хубиев (Россия, Нальчик; НИИ ПМА КБНЦ РАН)

Рассмотрим нагруженное [1] уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y + au_x + cu + \lambda_0 u(x,0), & (x,y) \in \Omega_0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda_k u(x-y,0), & (x,y) \in \Omega_k,\ k = 1,2, \end{cases} \tag{1}$$

в области $\Omega = \left(\bigcup_{i=0}^{2} \Omega_i\right) \cup J_1 \cup J_2$, где Ω_0 — область, ограниченная отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = r_2$, $y = h > 0$ соответственно при $y > 0$; Ω_1 — область, ограниченная отрезком AE оси x и характеристиками волнового уравнения $AC_1 : x + y = 0$, $EC_1 : x - y = r_1$; Ω_2 — область, ограниченная отрезком EB оси x и характеристиками $EC_2 : x + y = r_1$, $BC_2 : x - y = r_2$ при $y < 0$; J_0 — интервал $0 < x < r_2$, J_k — интервал $(k-1)r_1 < x < r_k$, $a = a(x,y)$, $c = c(x,y)$, $\lambda_0 = \lambda_0(x,y)$, $\lambda_k = \lambda_k(x-y)$ — заданные функции, $k = 1,2$.

Под регулярным решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в Ω_i $(i = 0,1,2)$, из класса $C(\overline{\Omega}_i) \cap C^1(\Omega_i \cup J_i)$, кроме того, $u_y(x,+0) \in L(J_0)$, $u_y(x,-0) \in L(J_k)$ $(k = 1,2)$.

Задача $\mathbf{G_1}$. Найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1) в Ω_i $(i = 0,1,2)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(r_2,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{2}$$

$$u\big|_{EC_1} = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r_1, \tag{3}$$

$$u\big|_{EC_2} = \psi_2(x), \quad r_1 \leqslant x \leqslant r_2, \tag{4}$$

и условиям сопряжения

$$u(x,-0) = \alpha_k(x) u(x,+0) + \gamma_k(x), \quad x \in \overline{J}_k, \tag{5}$$

$$u_y(x,-0) = \beta_k(x)\, u_y(x,+0) + \delta_k(x)\, u(x,+0) + \zeta_k(x), \quad x \in J_k, \tag{6}$$

где $\varphi_k(y)$, $\psi_k(x)$, $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$, $\gamma_k(x)$, $\delta_k(x)$, $\zeta_k(x)$ $(k = 1, 2)$ — заданные функции, причем $\alpha_k(x)\beta_k(x) \neq 0$,

$$\alpha_1(r_1)\big[\psi_2(r_1) - \gamma_2(r_1)\big] = \alpha_2(r_1)\big[\psi_1(r_1) - \gamma_1(r_1)\big].$$

Задача $\mathbf{G_2}$. Найти регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (1) в Ω_i $(i = 0, 1, 2)$, удовлетворяющее краевым условиям (2), (3), вместо условия (4) условию

$$u\big|_{BC_2} = \psi_2(x), \quad r_1 \leqslant x \leqslant r_2,$$

и условиям сопряжения (5), (6), причем

$$\psi_2(r_2) = \alpha_2(r_2)\varphi_2(0) + \gamma_2(r_2).$$

Задачи $\mathbf{G_1}$ и $\mathbf{G_2}$ для ненагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с постоянными коэффициентами изучены в [2].

В данной работе доказаны теоремы существования и единственности решения задач $\mathbf{G_1}$ и $\mathbf{G_2}$. Единственность решения задач доказывается методом Трикоми, существование — методом интегральных уравнений.

Литература

1. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения.—1976.—Т. 12, № 1.—С. 103–108.
2. *Джураев Т. Д., Сопуев А. С., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.—Ташкент: ФАН, 1986.—220 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 249.

ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ОБЛАСТИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

М. З. Худалов (Россия, Владикавказ; СОГУ)

1. Постановка задачи. Рассмотрим в области $Q = \{(x,t) : 0 < x < s(t),\ 0 < t < T\}$ задачу

$$D_{0t}^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - r(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t), \qquad 0 < x < s(t),\ 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u\big(s(t),t\big) = 0, \tag{2}$$

$$D_{0t}^{\alpha-1}u\Big|_{t=0} = u_0(x), \tag{3}$$

где D_{0t}^{α} — оператор дробного интегро-дифференцирования порядка α [1, 2].

Допустив существование регулярного решения задачи (1)–(3), имеет место следующая априорная оценка:

$$\|U\|_0^2 \leqslant M(t)\big(\|f\|_{2,Q_t}^2 + \|u_0(x)\|_0^2\big).$$

Если $f \equiv 0$, $u_0(x) \equiv 0$, то и $U = 0$ или $U = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = 0$ и соответственно $u(x,t) = 0$, т. е. единственность решения задачи доказана.

Литература

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—301 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 250–251.

О СПЕКТРЕ ОДНОЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ

И. Д. Цопанов, С. В. Келехсаева
(Россия, Владикавказ; СОГУ)

Рассмотрим дифференциальный оператор T, определяемый равенствами

$$Ty = -y'', \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = y'(1), \tag{1}$$

Спектральные свойства оператора (1) изучены в работе [2]. В частности, доказано, что последовательность корневых векторов $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ оператора T образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. Для произвольного ограниченного оператора B верна

Теорема 1. *Корневые векторы оператора $T+B$ образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$.*

Формулой регуляризованных следов для оператора $A = T+B$ называется формула (см. [6]) вида $\sum_\nu \big(\mu_\nu^s - \lambda_\nu^s - c_\nu(s)\big) = F(s)$, где μ_ν и λ_ν — собственные значения операторов A и T соответственно, пронумерованные по неубыванию модуля с учетом кратностей, s — натуральный параметр, значение которого задает порядок следа, $c_\nu(s)$ и $F(s)$ — вычисляемые величины. Если B — оператор Гильберта — Шмидта, то верна

Теорема 3. *Пусть T — оператор в $L_2(0,1)$, определяемый* (1), *а $B \in \mathfrak{S}_2(L_2(0,1))$. Если $s \in \mathbb{N}$, то существует подпоследовательность натурального ряда $\{M_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$:*

$$\lim_{\nu\to\infty} \Bigg\{ \sum_{m=1}^{M_\nu} \big[\mu_m^s - \lambda_m^s - s\lambda_m^{s-1}(B\varphi_m, \psi_m)\big] + c_\nu(s) -$$
$$- \sum_{k=2}^{s-1} \sum_{m_1=\ldots=m_k=1}^{M_\nu} c_{s-k}(B\varphi_{m_1}, \psi_{m_k}) \prod_{j=2}^{k} (B\varphi_{m_j}, \psi_{m_{j-1}}) \Bigg\} =$$
$$= \kappa_s Tr(G^{-1}B^sG),$$

$$\kappa_s = \begin{cases} 1, & if \ s \geqslant 2 \\ 0, & if \ s = 1 \end{cases}, \quad c_\nu(1) = 0, \quad c_{s-k} = \big[\lambda^s : \lambda_{m_1}, \ldots, \lambda_{m_k}, \lambda_{m_k}\big].$$

Здесь G — ограниченный обратимый оператор на $L_2(0,1)$ такой, что для ортонормированного базиса $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$: $\varphi_i = Ge_i$, $(i = 0,1,2,\ldots)$. Символом $[f : \lambda_{m_1}, \ldots, \lambda_{m_k}, \lambda_{m_k}]$ обозначается разделенная разность (см. [1]) порядка k функции f.

Пусть B — произвольный ограниченный оператор. Собственные значения оператора $T + B$ согласно методу Галеркина — Петрова с системами координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ (корневые векторы оператора T^*) являются пределами соответствующих нулей определителей $\delta_n = \delta_n(\mu)$ матриц систем линейных алгебраических уравнений (см. [3], [4]).

Следуя [5], перейдем к задаче $(E + S - \mu A)\,u = 0$, где $S = (B - E)(T + E)^{-1}$ и $A = (T + E)^{-1}$ — ядерные операторы. Для ядерного оператора $L = L_\mu = -S + \mu A$ рассмотрим характеристический определитель $\Delta(\mu) = \det\,(E - L(\mu)) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \lambda_k(L_\mu))$, где $\lambda_k(L)$ — собственные значения оператора L. Верна

Теорема 3. *$\mu_* \in \mathbb{C}$ является собственным значением (3) тогда и только тогда, когда $\Delta(\mu_*) = 0$.*

Теорема 4. *Пусть $\lambda_k^{(n)}$ $k = 1,2,\ldots,n$ — нули $\delta_n(\mu)$. Тогда $\lambda_k^{(n)} \to \lambda_k$, если $n \to \infty$, $\forall\ k = 1,2,\ldots,n$.*

Литература

1. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей.—М.: Наука, 1967.—376 с.
2. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения—1977.—Т. 13, № 2—С. 294–304.
3. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений.—М.: Наука, 1989.—455 с.
4. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.—М.: Наука, 1970.—512 с.
5. *Нейман-Заде М. И., Шкаликов А. А.* О вычислении собственных значений задачи Орра — Зоммерфельда // Фундам. и прикл. матем.—2002.—Т. 8, № 1—С. 301–305.
6. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов // УМН—2006.—Т. 61, вып. 5(371)—С. 89–156.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 252–253.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В. А. Чадаев (Россия, Грозный; ЧГУ)

Рассмотрено уравнение вида

$$\partial^{\alpha}_{0x} u(t,y) + \partial^{\beta}_{0y} u(x,s) = 0 \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,y) = \psi(y), \quad \varphi(0) = \psi(0), \tag{2}$$

где ∂^{δ}_{0z} — регуляризованный оператор дробного дифференцирования порядка $\delta \leqslant 1$, с началом в точке 0 и с концом в точке $z \in [0,r]$,

$$\big(\varphi(x), \psi(y)\big) \in C[0,X] \times [0,Y],$$

$$u(x,y) \in C^2[0,X] \times [0,Y], \quad \alpha \leqslant 1,\ \beta \leqslant 1,$$

(см [1]).

Для $h = X/n$ $\tau = Y/m$, $(n,m) \in N$; $x_j = jh$, $y_i = i\tau$ где $j = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,m}$, получены оценки погрешностей аппроксимации дробных производных их разностными аналогами дробного порядка

$$O_x(h) = \frac{h}{2\Gamma(2-\alpha)} \max_{[0,x_j]} \left| \frac{\partial^2 u(x,y_i)}{\partial x^2} \right| x_j^{1-\alpha}, \tag{3}$$

$$O_y(\tau) = \frac{\tau}{2\Gamma(2-\beta)} \max_{[0,y_i]} \left| \frac{\partial^2 u(x_j,y)}{\partial y^2} \right| y_i^{1-\beta}. \tag{4}$$

Предложена явная схема для решения полученной разностной задачи

$$\begin{gathered} u_{i,j} = \frac{\tau^{\beta}\Gamma(2-\beta)\left(u_{i,0}\Delta S^{\alpha}_{j-1} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} u_{i,k} R\, S^{\alpha}_{j-k}\right)}{\tau^{\beta}\Gamma(2-\beta) + h^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)} + \\ + \frac{h^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)\left(u_{0,j}\Delta S^{\beta}_{i-1} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} u_{k,j} R\, S^{\beta}_{i-k}\right)}{\tau^{\beta}\Gamma(2-\beta) + h^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)}, \end{gathered} \tag{5}$$

где R — Римана (или симметрический) разностный оператор второго порядка, а

$$S_k^\delta = k^{1-\delta}, \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 1$$

— степенная сеточная функция.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Самарский А. А.* Введение в численные методы.—М.: Наука, 1997.—239 с.
3. *Чадаев В. А.* Модификация метода Эйлера для дифференциального уравнения с дробной производной // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук.—2005.—Т. 7, № 2.—С. 78–81.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 254–256.

О НЕЛИНЕЙНОМ КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Т. З. Чочиев (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

В основе решения многих дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка лежит решение нелинейного уравнения первого порядка

$$\frac{\partial l}{\partial t} + A(x,t)l^2 + B(x,t)l + C(x,t) = 0, \tag{1}$$

где A, B и C — заданные непрерывно-дифференцируемые функции. Через λ обозначим корни квадратного трехчлена (1); последнее представим так:

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\left|\frac{l-\lambda_1}{l-\lambda_2}\right| + \frac{1}{l-\lambda_1}\frac{\partial\lambda_1}{\partial t} - \frac{1}{l-\lambda_2}\frac{\partial\lambda_2}{\partial t} = -A(\lambda_1-\lambda_2). \tag{2}$$

Доказывается, что если выполнено равенство

$$\begin{gathered} e^{-\int A\lambda_1\,dt}\int A\alpha\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}\,e^{\int A\lambda_1\,dt}\,dt- \\ -e^{-\int A\lambda_2\,dt}\int A\alpha\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}\,e^{\int A\lambda_2\,dt}\,dt = A\alpha\,(\lambda_1-\lambda_2), \end{gathered} \tag{3}$$

где α — неизвестна, то

$$\begin{gathered} \begin{cases} l-\lambda_1 = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\Delta}\,e^{-\int A\lambda_1\,dt}\int A\alpha\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}\,e^{\int A\lambda_1\,dt}\,dt, \\ l-\lambda_1 = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\Delta}\,e^{-\int A\lambda_2\,dt}\int A\alpha\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}\,e^{\int A\lambda_2\,dt}\,dt, \end{cases} \\ \Delta = e^{-\int A\lambda_2\,dt}\int A\alpha\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}\,e^{\int A\lambda_2\,dt}\,dt- \\ -e^{-\int A\lambda_1\,dt}\int A\alpha\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}\,e^{\int A\lambda_1\,dt}\,dt, \end{gathered} \tag{4}$$

обращает (2) в тождество. Необходимо установить выполнимость (3). Пусть

$$u = \int A\alpha\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}\,e^{\int A\lambda_1\,dt}\,dt; \quad v = \int A\alpha\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}\,e^{\int A\lambda_2\,dt}\,dt.$$

Тогда (3) можно представить как систему равенств:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + l^* \frac{\partial \lambda_2}{\partial t}\, e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)\,dt}\right) u = \rho, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \frac{1}{l^*} \frac{\partial \lambda_1}{\partial t}\, e^{\int A(\lambda_1-\lambda_2)\,dt}\right) v = -\frac{\rho}{l^*}, \\ \frac{l^*}{\lambda_1-\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial t}\, e^{-\int (\lambda_1-\lambda_2)\,dt} \cdot u + \rho = -\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial t}\, e^{A(\lambda_1-\lambda_2)\,dt} \cdot v, \end{cases} \tag{5}$$

где ρ — решение, l^* — некоторое решение нелинейного уравнения

$$\frac{\partial l^*}{\partial t} + A_1 {l^*}^2 + B_1 l^* + C_1 = 0, \tag{6}$$

$A_1(x,t)$, $B_1(x,t)$ и $C_1(x,t)$ — заданные непрерывно-дифференцируемые функции. Рассуждения, проведенные для (1), можно повторить для (6). Условие разрешимости (3) для (6) будет иметь аналогичную форму

$$\begin{gathered} e^{-\int A_1\lambda_1^*\,dt} \int A_1\alpha^* \frac{\partial \lambda_1}{\partial t}\, e^{\int A_1\lambda_1^*\,dt}\, dt - \\ - e^{-\int A_1\lambda_2^*\,dt} \int A_1\alpha^* \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial t}\, e^{\int A_1\lambda_2^*\,dt}\, dt = A_1\alpha^*(\lambda_1^* - \lambda_2^*). \end{gathered} \tag{7}$$

Доказывается, что если удовлетворяет (7), то выполняется (6). Составляем соотношение, подобное (7)

$$\begin{gathered} e^{-\int A_1\lambda_2^*\,dt} \int A_1\alpha^* \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial t}\, e^{\int A_1\lambda_1^*\,dt}\, dt - \\ - e^{-\int A_1\lambda_1^*\,dt} \int A_1\alpha^* \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial t}\, e^{\int A_1\lambda_2^*\,dt}\, dt = -A_1\alpha^*(\lambda_1^* - \lambda_2^*)\gamma, \end{gathered} \tag{8}$$

где α^* — неизвестна, а γ — задана.

Теорема. *Если неизвестные интегралы, содержащиеся в* (7) *и* (8), *определены соответственно*

$$\int A_1\alpha^* \frac{\partial \lambda^*}{\partial t}\, e^{\int A_1\lambda^*\,dt}\, dt =$$
$$= \begin{cases} e^{\int \frac{re^{-\int A_1\lambda_1\,dt} - e^{-\int A_1\lambda_2^*\,dt}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*} \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial t}\, e^{\int A_1\lambda_2^*\,dt}\, dt}, & \lambda^* = \lambda_2^*, \\ e^{-\int \frac{re^{-\int A_1\lambda_2^*\,dt} - e^{-\int A_1\lambda_1^*\,dt}}{r(\lambda_1^*-\lambda_2^*)\gamma} \frac{\partial \lambda_1}{\partial t}\, e^{\int A_1\lambda_1^*\,dt}\, dt}, & \lambda^* = \lambda_1^*, \end{cases}$$

то равенства (7) *и* (8) *обращаются в тождества, причем* r — *решение нелинейного уравнения*

$$\frac{\partial r}{\partial t} + A^* r^2 + B^* r + C^* = 0,$$

приводимого к классу Бернулли.

Согласно теореме, l^* удовлетворяет уравнению (6) и из системы (5) сразу находим u, v и ρ функции. Но найденные u и v будут удовлетворять условию (3), что влечет за собой выполнимость уравнения (2) или (1).

Литература

1. *Чочиев Т. З.* Линейные дифференциальные уравнения второго порядка // Исследования по дифференц. уравнениям и мат. моделированию.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А.—С. 144–155.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 257–258.

О РАСШИРЕНИЯХ КДФ ИЕРАРХИИ[1]

А. Б. Шабат, Р. А. Габиев
(Россия, Карачаевск; КЧГУ)

Задача о допустимых «интегрируемых правых частях» в обобщенном уравнении Бюргерса $u_t + uu_x = F$, описывающем процесс опрокидывания нелинейных волн при $F = 0$, представляет интерес как с прикладной так и с теоретической точек зрения. Ответ в этой задаче зависит от характера интегрируемости и, помимо известного уравнения Бюргерса ($F = \varepsilon u_{xx}$), здесь имеется не менее известное уравнение Кортевега де Фриза (КдФ), соответствующее $F = u_{xxx}$. Мы рассматриваем, восходящие к работам В. К. Мельникова, обобщения уравнения КдФ, используя алгебру Ли инфинитезимальных (и сохраняющих вронскиан) преобразований решений линейного уравнения Шредингера, $\psi_{xx} = U(x, \lambda)\psi$, $U(x, \lambda) = u(x) - \lambda$.

Природа указанных Мельниковым [2] обобщений солитонных уравнений интенсивно исследуется в последнее десятилетие двумя большими группами китайских ученых. Предлагаемый нами подход дает на наш взгляд исчерпывающее объяснение обсуждаемым китайскими учеными вопросов (ср. [4]).

Связанная с уравнением Шредингера алгебра Ли (см. определение, ниже) строится более или менее явно при помощи известного линейного уравнения третьего порядка

$$D^3(\phi) = (4UD + 2U_x)(\phi), \quad D \equiv \frac{d}{dx}, \tag{1}$$

эквивалентного (см. [1]) уравнению второго порядка $\psi_{xx} = U\psi$.

Лемма. *Пусть* $U = u - \lambda$, $u \in C^\infty(\mathbb{R})$. *Тогда формальный ряд по обратным степеням спектрального параметра* $A = \sum_0^\infty a_j\lambda^{-j}$ *является решением уравнения третьего порядка* (1) *в том и только в том случае, когда его коэффициенты* a_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, *удовлетворяют соотношениям* $4D(a_{j+1}) = \mathcal{L}(a_j)$, $a_0 = \mathrm{const}$, $\mathcal{L} := -D^3 + 4uD + 2u_x$.

[1]Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ России, грант № НШ-6501.2010.2.

Определение. Пусть задан формальный ряд $A = \sum_0^\infty a_j\lambda^{-j}$, $a_0 = 1$ по обратным степеням параметра λ с гладкими коэффициентами $a_j = a_j(x) \in C^\infty$ и

$$A_n = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n \equiv (\lambda^n A)_+, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Алгеброй $\mathcal{A}$, соответствующей формальному степенному ряду A, мы называем алгебру Ли, образующими которой, служат векторные поля $D_n - A_n D_0$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\big[D_m - A_m D_0, D_n - A_n D_0\big] = 0 \;\Leftrightarrow\; D_m(A_n) - D_n(A_m) = \langle A_m, A_n\rangle. \tag{3}$$

Здесь $\langle a,\ b\rangle := ab_x - ba_x$ обозначает вронскиан функций $a, b \in C^\infty$, а дифференцирования D_n в алгебре C^∞ гладких функций предполагаются коммутирующими с $D_0 = d/dx$.

В случае производящей функции $A = \sum_0^\infty a_j\lambda^{-j}$ из леммы, коэффициенты формального степенного ряда A выражаются непосредственно в терминах потенциала u оператора Шредингера и уравнения КдВ иерархии можно представить в виде

$$D_n(u) = \mathcal{L}_\lambda(A_n); \quad \mathcal{L}_\lambda := -\frac{1}{2}D^3 + 2UD + U_x, \quad U \equiv u - \lambda. \tag{4}$$

Само уравнение КдВ соответствует $n = 1$ и $A_1 = \lambda + a_1$. Для того, чтобы включить в иерархию, так называемые уравнение КдФ с самосогласованными источниками [2]

$$u_t + 6uu_x = u_{xxx} + \Phi_x, \tag{5}$$

оказывается достаточным включить в иерархию КдФ коммутирующие векторные поля

$$\hat{D}_n - \hat{A}_n, \quad \hat{A}_n = A_n + \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{\lambda - \lambda_j}. \tag{6}$$

Литература

1. *Drach J.* Sur l'integration par quadratures de l'equation differentielle $y'' = [\varphi(x) + h]\ y$ // Compt. Rend. Acad. Sci.—1919.—T. 168.—С. 337–340.
2. *Mel'nikov V. K.* Interaction of solitary waves in the system described by the Kadomtsev-Petviashvili equation with a self-consistent source // Comm. Math. Phys.—1989.—T. 126.—С. 201–215.
3. *Martínez Alonso L., Shabat A. B.* Towards a theory of differential constraints of a hydrodynamic hierarchy // J. Non. Math. Phys.—2003.—T. 10, № 2.—С. 229–242.
4. *Y. Yao, Y. Huang, Y. Zeng* Много-солитонные решения двух компонентного уравнения Камассы-Холма с самосогласованными источниками // ТМФ.—2010.—Т. 162, № 1.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 259–261.

ЭКОНОМИЧНАЯ ФАКТОРИЗОВАННАЯ СХЕМА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В РЕЛАКСИРУЮЩИХ СРЕДАХ

М. Х. Шхануков-Лафишев (Россия, Нальчик; КБГУ)

В цилиндре $Q_T = G \times (0, T]$ рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta u + m c_0^2 \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}\,\Delta u - \\ - m c_0^2 \tau_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\Delta u + f(x,t)(x,t) \in Q_T,\end{gathered} \tag{1}$$

$$u\big|_{\Gamma} = 0, \quad (x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа, $G = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = \overline{1,p}\}$ — p-мерный параллелепипед, τ_0 — время релаксации, $m = (c_\infty^2 - c_0^2)/c_0^2$, c_0 — скорость звука, когда период звуковой волны $T \gg \tau_0$, c_∞ — скорость звука, когда $T \ll \tau_0$.

Задаче (1)–(2) поставим в соответствие разностную схему

$$y_{\bar{t}t} = c_0^2 \Lambda y^{(\sigma_1,\sigma_2)} + m c_0^2 \tau_0 \Lambda y_{\bar{t}} - m c_0^2 \tau_0^2 \Lambda y_{\bar{t}t} + \varphi, \tag{3}$$

$$y\big|_{\gamma_h} = 0, \quad y(x,0) = u_0(x), \quad y_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \tag{4}$$

$$y^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_1 \overset{\frown}{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y + \sigma_2 \breve{y}, \quad \Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha,$$

$$\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,p}.$$

Второе начальное условие будем аппроксимировать так, как указано в [2 с. 95].

Задача для определения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,0) = v$ в этом случае принимает вид

$$\begin{gathered}\Delta v + \frac{1}{m c_0^2 \tau_0^2} v = F, \quad F = c_0^2 \Delta u_0(x) + m c_0^2 \tau_0 \Delta u_1(x) + f(x,0), \\ v\big|_{\Gamma} = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Известно условие разрешимости задачи (5), при $p = 2$ оно имеет вид

$$\frac{1}{mc_0^2\tau_0^2} \neq \lambda_{k_1,k_2} = \left(\frac{k_1\,\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2\,\pi}{l_2}\right)^2, \quad k_1 = 1, 2, \ldots,\ k_2 = 1, 2, \ldots.$$

Условие устойчивости схемы (3)–(4) имеет вид $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 \geqslant 0.5$, если $\tau + 2\tau_0 \leqslant \frac{1}{2m\tau_0 \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^{-2}}$. В частном случае кубической сетки $h_1 = h_2 = \ldots = h_p = h$ имеем $\tau + 2\tau_0 \leqslant \frac{h^2}{2m\tau_0 p}$.

Для решения разностной задачи (3)–(4) не удается построить устойчивую факторизованную схему. Перепишем (3)–(4) в виде четырехслойной схемы

$$y_{\bar{t}t} = c_0^2\Lambda y^{(\sigma_1,\sigma_2)} + mc_0^2\tau_0\Lambda y_{\bar{t}} + \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = -mc_0^2\tau_0^2\Lambda \breve{y}_{\bar{t}t} + \varphi, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} y\big|_{\gamma_h} = 0, \quad y(x,0) = u_0(x), \quad y(x,\tau) = \bar{u}_1(x), \\ \bar{u}_1(x) = u_0(x) + \tau\tilde{u}_1(x). \end{gathered} \tag{7}$$

Задача (6)–(7) недоопределена, требуется задать еще одно начальное условие $y(x, 2\tau)$.

Для определения $y(x, 2)$ запишем разложение

$$\begin{aligned} u(x, 2\tau) &= u(x,0) + \dot{u}(x,0)\cdot 2\tau + \ddot{u}(x,0)2\tau^2 + O(\tau^3) = \\ &= u_0(x) + 2\tau u_1(x) + \ddot{u}(x,0)2\tau^2 + O(\tau^3). \end{aligned}$$

Значение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\big|_{t=0}$ определяется из дифференциального уравнения (1). Приведем схему (6)–(7) к каноническому виду

$$\begin{gathered} \big((\sigma_1 - \sigma_2)\tau A + m\tau_0 A\big) y_{\overset{\circ}{t}} + \\ + \tau^2\left(\frac{E}{\tau^2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}A - \frac{m\tau_0}{2\tau}A\right) y_{\bar{t}t} + Ay = \tilde{\varphi}, \end{gathered} \tag{8}$$

$y(0)$, $y(\tau)$, $y(2\tau)$ — заданы, $A = -c_0^2\Lambda$ и найдем $B + 2\tau R = \frac{2}{\tau}(E + \sigma_1\tau^2 A)$. Пусть $A = A_1 + A_2$. Заменим $B + 2\tau R$ факторизованным оператором

$$\tilde{B} + 2\tau\tilde{R} = \frac{2}{\tau}(E + \sigma_1\tau^2 A_1)(E + \sigma_1\tau^2 A_2) = B + 2\tau R + 2\sigma_1^2\tau^3 A_1 A_2.$$

Далее, следуя [2, с. 498] приведем факторизованную схему к каноническому виду

$$(B+\sigma_1\tau^3A_1A_2)y_{\overset{\circ}{t}}+\tau^2(R+\frac{\sigma_1^2}{2}\tau^2A_1A_2)y_{\bar{t}t}+Ay=\tilde{\varphi}.$$

Итак, $\tilde{B}=B+\sigma_1\tau^3A_1A_2$, $\tilde{R}=R+\frac{\sigma_1^2}{2}\tau^2A_1A_2$.

Отсюда следует устойчивость факторизованной схемы по правой части $\tilde{\varphi}$ и начальным данным при $\sigma_1\geqslant\sigma_2$, $\sigma_1+\sigma_2\geqslant 0.5$, $\tau\leqslant\frac{h^2}{2m\tau_0 p}$.

Изложенное справедливо и в случае уравнений с переменными коэффициентами.

Литература

1. *Виноградов М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн.—М.: Наука, 1979.—384 с.
2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 262–263.

ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С РАЗЛИЧНЫМИ НАЧАЛАМИ

Л. М. Энеева (Россия, Нальчик; НИИ ПМА КБНЦ РАН)

Как известно, дифференциальные уравнения дробного порядка являются основой математического моделирования процессов во фрактальных средах [1, гл. 5]. Введение понятия эффективной скорости [2] приводит к дифференциальным уравнениям, содержащим композицию операторов дробного дифференцирования с различными началами [2–4]. В данной работе исследуется спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения с композицией операторов дробного дифференцирования в смысле Римана — Лиувилля и Капуто с различными началами.

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}u(x) = \lambda u(x), \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{0x}^{\alpha}u(x) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{2}$$

где

$$D_{0x}^{\alpha}h(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{h(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}, \quad \partial_{1x}^{\alpha}h(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^1 \frac{h'(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}},$$

— операторы дифференцирования дробного порядка α, $0 < \alpha < 1$, в смысле Римана — Лиувилля и Капуто с началом в точке $x = 0$ и $x = 1$ соответственно; λ — спектральный параметр; $x \in]0, 1[$.

Отметим, что при $\alpha = 1$ задача (1), (2) переходит в задачу

$$-u'' = \lambda u, \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Теорема. *Пусть* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. *Задача* (1), (2) *имеет бесконечное число собственных значений* λ_k *и собственных функций* $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ *Все собственные значения* λ_k *вещественны и положительны. Собственные функции* $u_k(x)$ *задачи* (1), (2) *образуют полную ортогональную систему в* $L_2(0, 1)$.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Рехвиашвили С. Ш.* К определению физического смысла дробного интегродифференцирования // Нелинейный мир.—2007.—Т. 5, № 4.—С. 194–197.
3. *Рехвиашвили С. Ш.* Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики // Письма в ЖТФ.—2004.—Т. 30, № 2.—С. 33–37.
4. *Stanković B.* An equation with left and right fractional derivatives // Publ. de l'inst. Math. Nouvelle Sér.—2006.—№ 80 (94).—P. 259–272.
5. *Atanackovic T. M., Stankovic B.* On a differential equation with left and right fractional derivatives // Fract. Calc. and Appl. Anal.—2007.—Vol. 10, № 2.—P. 139–150.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 264–265.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КОНТИНУАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ[1]

Б. И. Эфендиев (Россия, Нальчик; НИИ ПМА КБНЦ РАН)

Рассмотрим уравнение

$$u''(x) + \lambda D_{0x}^{[\alpha,\beta]} u(x) = 0, \tag{1}$$

где $D_{0x}^{[\alpha,\beta]}$ — оператор интегро-дифференцирования континуального порядка $[\alpha,\beta]$ (см. [1, с. 33]); α, β, λ — константы, $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$, $0 < x < l$.

В данной работе исследуются спектральные вопросы задачи

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0 \tag{2}$$

для уравнения (1). Вопрос об однозначной разрешимости задачи Дирихле (2) для уравнения (1) сводится к вопросу существования вещественных нулей у функции $G(x;\lambda,\alpha,\beta)$ [2], где

$$G(x;\lambda,\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \nu_n(x),$$

$$\nu_0(x) = x, \quad \nu_n(x) = \int\limits_0^x \nu_{n-1}(x-t)\frac{1}{t} Vi(2-\beta, 2-\alpha, t)\, dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$Vi(\gamma,\delta,x) = \int\limits_{\gamma}^{\delta} \frac{x^s}{\Gamma(s)}\, ds, \quad x \geqslant 0,\ 0 \leqslant \gamma \leqslant \delta,$$

$\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

Теорема 1. *Пусть $\alpha, \beta \in]0, 1/3]$ и $\beta - \alpha$ достаточно мало. Тогда функция $G(x;\lambda,\alpha,\beta)$ при $x > 0$ имеет вещественные нули.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-96510.

Теорема 2. *Функция $G(x;\lambda,\alpha,\beta)$ при $x>0$ может иметь лишь конечное число вещественных нулей.*

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее следствие.

Теорема 3. *При $\alpha,\beta\in\,]0,1/3]$ и достаточно малом $\beta-\alpha$ существуют $\lambda\in\mathbb{R}$, при которых задача Дирихле* (2) *для уравнения* (1) *имеет нетривиальное решение.*

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Эфендиев Б. И.* Задача Коши и задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной // Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук.—2008.—Т. 10, № 1.—С. 83–84.

Секция III

Математическое моделирование

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 268–269.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ В ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

В. А. Богачев (Россия, Ростов-на-Дону; РГУПС),
Т. В. Богачев (Россия, Ростов-на-Дону; РГЭУ (РИНХ))

В настоящей работе система аналитических вычислений **Maple** используется в качестве эвристического инструмента в теоретико-вероятностных исследованиях. Отправляясь от одной элементарной задачи, будем рассматривать всевозможные наборы из k натуральных чисел n_i таких, что $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Исследуем поведение вероятности события, состоящего в том, что выбранные наугад три числа из такого набора окажутся длинами сторон треугольника, когда $k \to \infty$.

Начнем с соответствующего эксперимента, использующего псевдослучайные числа, получаемые посредством функции **randcomb ()** из пакета **combinat**. Приведем один из результатов, полученных для $k = 100, \ldots, 800$:

$$0,58468; \quad 0,49782; \quad 0,49083; \quad 0,53480;$$

$$0,48799; \quad 0,48755; \quad 0,49906; \quad 0,50103.$$

Отчетливо прослеживается тенденция в поведении рассматриваемых вероятностей, состоящая в стремлении их при $k \to \infty$ к числу $0,5$. (Обнаруженная закономерность, конечно, не носит всеобщего характера. Например, для наборов n_i, состоящих из последовательных чисел Фибоначчи, по самому определению последних рассматриваемые вероятности равны нулю.)

В случае, когда числа n_i составляют арифметическую прогрессию, имеет место более точный результат. Для тех же значений k получаются (приведенные с округлением) вероятности

$$0,49242; \quad 0,49623; \quad 0,49749; \quad 0,49812;$$

$$0,48849; \quad 0,49874; \quad 0,49892; \quad 0,49916,$$

образующие возрастающую последовательность.

Найдена формула, дающая явное выражение указанных вероятностей для $k \geqslant 4$, имеющая вид:

$$p_k = \frac{(2k-3)\left(2k^2-6k+1\right)+3(-1)^k}{8k(k-1)(k-2)},$$

которая обосновывает результаты эксперимента.

Показано, что для наборов чисел n_i иной, более сложной структуры, характер монотонности последовательности $\{p_k\}_{k=4}^{\infty}$ может быть другим.

Дана также статистическая иллюстрация к рассмотренным вопросам, обращенная к закону больших чисел.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 270.

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ПЛОХООБУСЛОВЛЕННЫХ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Ю. Г. Булычев (Россия, Шахты; ЮРГУЭС),
В. Ю. Булычев (Россия, Шахты; ЮРГУЭС),
Т. Н. Челахова (Россия, Ростов-на-Дону; ИЭИВЭС ЮФУ),
В. М. Челахов (Россия, Ростов-на-Дону; РВИРВ)

Известно, что многие задачи параметрической идентификации, возникающие в теории и практике математического моделирования, относятся к классу плохообусловленных, что в конечном итоге приводит к построению неустойчивых алгоритмов формирования искомых оценок. Кроме того, решение задач высокой размерности (так называемых сверхбольших задач) сопряжено на практике со значительными вычислительными затратами, что обременительно даже для современных ЭВМ.

В настоящее время для построения устойчивых алгоритмов параметрической идентификации используются процедуры ортогональных разложений и приближенного решения некорректных задач. Анализ показывает, что на практике непосредственное использование указанных алгоритмов для сверхбольших задач линейного оценивания также представляет собой трудно разрешимую проблему вычислительного плана.

В докладе рассматривается новый декомпозиционный подход к решению плохообусловленных задач параметрической идентификации, позволяющий строить устойчивые оценки метода наименьших квадратов на базе двух параллельных алгоритмов, размерность которых существенно меньше размерности классической процедуры построения оценок. Основу данного подхода составляет процедура условной оптимизации с использованием метода множителей Лагранжа, учитывающая условия инвариантности и несмещенности при построении оптимальной оценки.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 271–272.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА ИНВАРИАНТНО-НЕСМЕЩЕННОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Ю. Г. Булычев (Россия, Шахты; ЮРГУЭС),
В. Ю. Булычев (Россия, Шахты; ЮРГУЭС),
Т. Н. Челахова (Россия, Ростов-на-Дону; ИЭИВЭС ЮФУ),
В. М. Челахов (Россия, Ростов-на-Дону; РВИРВ)

При решении прикладных задач математического моделирования зачастую возникает необходимость в нахождении оптимальных оценок значений некоторых линейных функционалов над полезными сигналами по результатам измерений (например, сглаженных значений, производных различных порядков в фиксированный момент времени, определенных интегралов, спектральных плотностей и т. д.). Для этих целей можно использовать линейный или нелинейный метод наименьших квадратов (МНК) восстановления регрессионных зависимостей. При этом наиболее простые вычислительные схемы имеют алгоритмы линейного МНК, которые широко используются на практике, например при решении задач экспериментальной космической баллистики. Данные алгоритмы эффективны, когда в канале измерения присутствует только флуктуационная ошибка. Однако реальные измерения могут сопровождаться и другими типами ошибок, например непрерывными динамическими ошибками с известной структурой их математической модели и неизвестными параметрами.

Более сложной является задача оценивания при наличии в измерениях кусочно-непрерывных ошибок, подобных описанным выше, но со случайной сменой структур, принадлежащих некоторому априорно заданному множеству. Примером источника возникновения таких ошибок является измерительный комплекс, содержащий разнородные датчики с различными точностными характеристиками.

В предыдущих работах были рассмотрены алгоритмы обработки измерений, содержащих сингулярные ошибки. Однако следует отметить, что применение в этом случае расширенного МНК приводит к значительному увеличению размерности задачи, пропорциональному количеству структур помехи, и к эффекту «размазывания» точности. Применение алгоритмов, описанных ранее, целесообразно в случае, когда структура помехи не меняется в течение сеанса измерения.

Таким образом, задача оценивания значений линейных функционалов от полезного сигнала на основе обработки измерений, содержащих динамические помехи наблюдения со случайной сменой структур, актуальна. Примером помех такого рода являются кусочно-непрерывные помехи, описываемые на интервалах непрерывности произвольными обобщенными многочленами с неизвестными коэффициентами.

В докладе рассматривается задача оценивания значений линейных функционалов при наличии в измерениях кусочно-непрерывных помех детерминированной структуры с неизвестными параметрами. Разработана вычислительная схема, обеспечивающая инвариантность формируемых линейных оценок к указанным помехам и их несмещенность. Приведен иллюстративный пример.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 273–274.

ОБУЧАЕМЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ПОЛНЫЕ НЕЙРОПОДОБНЫЕ СТРУКТУРЫ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Ю. Г. Булычев (Россия, Шахты; ЮРГУЭС),
В. Ю. Булычев (Россия, Шахты; ЮРГУЭС),
Е. А. Самойлин (Россия, Ростов-на-Дону; РВИРВ),
Т. Н. Челахова (Россия, Ростов-на-Дону; ИЭИВЭС ЮФУ),
В. М. Челахов (Россия, Ростов-на-Дону; РВИРВ)

В настоящее время различные модели нейронных сетей (НС) все шире начинают использоваться для решения многих задач обработки данных, таких как распознавание образов, фильтрация сигналов, предсказание процессов, адаптивное управление и т. д. Главные достоинства моделей НС заключаются в их универсальных аппроксимационных свойствах, позволяющих справляться со сложными трудно- и неформализуемыми, а также разнородными по сути задачами. Возможности НС определяются двумя главными их свойствами — вычислительной мощностью (что обеспечивает параллелизм) и функциональной полнотой.

Как правило, модели НС строятся по многослойной архитектуре, поскольку однослойные сети, как и лежащие в их основе нейроподобные элементы (НПЭ) ограничены в аппроксимации некоторых простых функций. Ставшая уже классическим примером проблема «Исключающее ИЛИ» наглядно демонстрирует невозможность аппроксимации НПЭ двух логических (булевых) функций (неравнозначности и эквивалентности) из полного набора 2^{2^n} от $n = 2$ переменных. Ранее известные решения по построению двухпороговых моделей НПЭ, реализующих функцию неравнозначности, приводят к невозможности аппроксимации других, более простых булевых функций, но реализуемых однопороговым НПЭ.

В данном докладе рассматривается построение обучаемых функционально-полных нейроподобных элементов, т. е. способных аппроксимировать все логические функции из полного их набора. Функциональная полнота нейроподобных элементов обеспечивается за счет использования биортосигмоидной нелинейности в качестве функции активации. Показано, что при такой нелинейности модели нейроподобных элементов обладают функциональной полнотой в классе двумерных булевых функций, а также повышенной степенью функциональной полноты в классе трехмерных булевых функций.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 275.

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОДНОРОДНОЙ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ[1]

О. П. Гладунова (Россия, Барнаул; АлтГУ),
Е. Д. Родионов (Россия, Барнаул; АлтГПА),
В. В. Славский (Россия, Барнаул; АлтГПА)

Пакеты символьных вычислений являются одним из основных вычислительных инструментов компьютерного моделирования и находят применение в различных областях науки. Естественно использование систем компьютерной математики и при решении задач однородной римановой геометрии, в том числе для исследования инвариантных тензорных полей на однородных римановых многообразиях и, в частности, на группах Ли, поскольку изучение этих полей может быть сведено к их исследованию в алгебрах Ли.

В настоящей работе разработаны алгоритмы и комплексы программ в системах аналитических расчетов Maple и Mathematica, позволяющие вычислять компоненты связности, тензоров кривизны Римана, Риччи, одномерной кривизны, скалярной кривизны, тензоров Вейля и Схоутена — Вейля, находить компоненты их дифференциальных операторов, определять автодуальные и анитиавтодуальные составляющие тензора Вейля на конечномерных группах Ли с левоинвариантными римановыми метриками.

С привлечением данных алгоритмов решены задачи: о почти гармоническом тензоре Схоутена — Вейля и гармонической свертке тензора Схоутена — Вейля по направлению произвольного вектора на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой; о гармоничности тензора Вейля, его автодуальной и антидуальной составляющих на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 08-01-98001, Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ Российской Федерации, проект № НШ-5682.2008.1, а также при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., гос. контракт № 02.740.11.0457.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 276–278.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ РАДИАЛЬНОГО ПОДШИПНИКА С ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СМАЗКОЙ В МАГНИТНОМ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ

А. И. Задорожный (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ),
Е. О. Лагунова (Россия, Ростов-на-Дону; РГУПС)

Рассматривается установившееся движение электропроводящей смазки в зазоре радиального подшипника при наличии электрического и магнитного полей. Предполагается, что подшипник неподвижен, шип вращается с постоянной угловой скоростью ω. Всюду в задаче считаем, что величины: напряженность электрического поля, магнитная индукция и скорость течения жидкости — таковы, что можно пренебречь влиянием потока жидкости на приложенные электрическое и магнитное поля (это предположение подразумевает малость магнитного числа Рейнольдса). При этом напряженность электрического поля и магнитная индукция заданы, удовлетворяют уравнениям Максвелла [1, 2]. Данную задачу решаем, исходя из уравнений «тонкого слоя» для электропроводящей вязкопластичной смазки и уравнения неразрывности, которые выведены с использованием метода оценок [3]. Осуществляя переход к безразмерным переменным, получаем искомую систему уравнений:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial^2 r} = \frac{dp}{d\theta} + \widetilde{A} - A\varphi + Nv\varphi^2, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0, \tag{1}$$

где $A = \frac{E'\sigma\delta^2\varphi^*}{r_0^2\mu\omega}$, $N = \frac{B^{*2}\sigma\delta^2\varphi^{*2}}{r_0^2\mu}$, $\widetilde{A} = \frac{2\tau_0\delta^2}{r_1^2\mu\omega}$ — коэффициент пластичности, τ_0 — параметр текучести при чистом сдвиге, $\sigma \equiv \sigma_e$ — электрическая проводимость смазочного материала, p — гидродинамическое давление.

Условия прилипания таковы: $u = 0$, $v = 0$ при $r = 1 + \eta\cos\theta$; $u = 0$, $v = 1$ при $r = 0$, где $\eta = \frac{e}{\delta}$.

Следуя методике из [5], находим точное автомодельное решение задачи (1).

В результате вычислений для нахождения безразмерного гидродинамического давления приходим к следующему уравнению

$$\frac{dp}{d\theta} + \widetilde{A} = \frac{\widetilde{C_1}}{h^2} + \frac{\widetilde{C_2}}{h^3} \tag{2}$$

с граничным условием периодичности гидродинамического давления $p(0) = p(2\pi)$.

Проекции главного вектора сил, действующих на шип со стороны смазочного слоя, определяются формулами [4]:

$$F_x = r_0 \int\limits_0^{2\pi} p' \sin\theta \, d\theta, \quad F_y = -r_0 \int\limits_0^{2\pi} p' \cos\theta \, d\theta. \tag{3}$$

Находим далее силу трения, используя известное выражение

$$F = \mu \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\bigg|_{\xi=0} d\theta = \frac{\mu\omega r_0}{\delta} \int\limits_0^{2\pi} \widetilde{v}\,' \, d\theta. \tag{4}$$

Определяем расход смазки по формуле

$$Q = hu^* \int\limits_0^1 \widetilde{v}\,'(\xi) \, d\xi. \tag{5}$$

В результате отметим, что полученные результаты позволяют:

1) оценивать рабочие характеристики радиального подшипника, обладающего повышенной несущей способностью при наименьшем трении;

2) определять расход смазки, обеспечивающий жидкостный режим трения;

3) оценивать влияние безразмерных параметров $\widetilde{A}$ и N, присущих электропроводящей вязкопластичной смазке, на основные рабочие характеристики радиального подшипника.

Литература

1. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества.—М: Наука, 1989.—504 с.
2. *Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П.* Электродинамика.—М: Высш. шк., 1990.—352 с.

3. *Ахвердиев К. С., Колесников В. И., Приходько В. М.* Основы совершенствования тяжелонагруженных узлов трения транспортных систем.—М.: Маршрут, 2005.—336 с.
4. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа.—М: Наука, 1973.—848 с.
5. *Ахвердиев К. С., Никитин А. К.* Гидродинамическая теория смазки и расчет подшипников скольжения, работающих в стационарном режиме.—М: Наука, 1981.—316 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 279–281.

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННО-РАЗНОСТНОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГИДРОФИЗИКИ ВОДОЕМА В СЛУЧАЕ СУЩЕСТВЕННО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ПЛОТНОСТИ

О. В. Колгунова (Россия, Владикавказ; СОГУ),
А. И. Сухинов (Россия, Таганрог; ТТИ ЮФУ)

Система уравнений реализующих итерационный процесс для объединенной 2D модели движения водной среды, транспорта тепла и соли имеет вид [1]:

$$\frac{\widetilde{u}-u}{\tau}+uu_{\dot{x}}+vu_{\dot{y}}=\frac{\mu}{\rho}(u_{\overline{x}x}+u_{\overline{y}y}), \tag{1}$$

$$\frac{\widetilde{v}-v}{\tau}+uv_{\dot{x}}+vv_{\dot{y}}=\frac{\mu}{\rho}\left(v_{\overline{x}x}+v_{\overline{y}y}\right), \tag{2}$$

$$P^{k+1}_{\overline{x}x}+P^{k+1}_{\overline{y}y}=\frac{\rho^k-\rho}{\tau^2}+\frac{1}{\tau}\Big(\big(\rho^k\widetilde{u}\big)_{\overline{x}}+\big(\rho^k\widetilde{v}\big)_{\overline{y}}\Big), \tag{3}$$

$$\frac{u^{k+1}-\widetilde{u}}{\tau}=-\frac{1}{\rho^k}\big(P^{k+1}\big)_x, \tag{4}$$

$$\frac{v^{k+1}-\widetilde{v}}{\tau}=-\frac{1}{\rho^k}\big(P^{k+1}\big)_y, \tag{5}$$

$$\frac{T^{k+1}-T}{\tau}+u^{k+1}T^{k+1}_{\dot{x}}+v^{k+1}T^{k+1}_{\dot{y}}=\mu_T\Big(T^{k+1}_{\overline{x}x}+T^{k+1}_{\overline{y}y}\Big), \tag{6}$$

$$\frac{S^{k+1}-S}{\tau}+u^{k+1}S^{k+1}_{\dot{x}}+v^{k+1}S^{k+1}_{\dot{y}}=\mu_S\Big(S^{k+1}_{\overline{x}x}+S^{k+1}_{\overline{y}y}\Big), \tag{7}$$

$$\rho^{k+1}=\rho_0+a_1S^{k+1}+b_1T^{k+1}. \tag{8}$$

Граничные условия:

$$\overrightarrow{V}(x,y,t)=\overrightarrow{U}_{\Gamma}(x,y,t),\quad t>0,\ (x,y)\in\Gamma, \tag{9}$$

где $\overrightarrow{V}(x,y,t)=(u,v)$ — двумерный вектор скорости водной среды, $\overrightarrow{U}_\Gamma(x,y,t)$, $t>0$, $(x,y)\in\Gamma$ — заданная вектор функция граничных условий, Γ — граница области $\overline{G}$.

$$\begin{gathered} T(x,y,t)=\mu_T(x,y,t); \quad S(x,y,t)=\mu_S(x,y,t), \\ t>0,\ (x,y)\in\Gamma. \end{gathered} \tag{10}$$

Начальные условия на каждом временном интервале $t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}$ ставятся дополнительно. Если $q \in \{u,v,S,T,\rho\}$, то $q(t_n) \equiv \widehat{q}(t)$, $t=t_{n-1}+\tau$. Здесь $\widehat{q}(t)$ — значение соответствующей функции, полученное на предыдущем временном шаге $t_{n-1} \leqslant t \leqslant t_n$ для $t=t_n$, $n=1,2,\dots,k-2$, или начальное условие, если $n=0$. Исходная задача сводится к канонической форме для сеточных уравнений общего вида [2]:

$$A(P)\,Y(P)=\sum_{Q\in Ш'(P)} B(P,Q)\,Y(Q)+F(P); \quad P\in\omega_{h_1}\times\omega_{h_2}\times\omega_\tau.$$

Поскольку

$$D(P)=A(P)-\sum_{Q\in Ш'(P)} B(P,Q)>0; \quad A(P)>0;\ B(P,Q)\geqslant 0,$$

$$\min_{P\in\omega_h\times\omega_\tau} D(P)\geqslant \frac{1}{\tau}-\max_{P\in\omega_h\times\omega_\tau}\left|u^{k+1}+v^{k+1}\right|/h>0,$$

то [3]:

$$\|y\|_C \leqslant \left\|\frac{F(P)}{D(P)}\right\|_C.$$

После соответствующих преобразований получены достаточные условия сходимости инерционного процесса, которые характеризуются одновременным выполнением неравенств (11)–(13):

$$\tau<\frac{h}{\|u^k\|+\|v^k\|+\left(a_1\|S^{k-1}\|+b_1\|T^{k-1}\|\right)4M}\,, \tag{11}$$

$$\tau\leq\frac{h}{2\left(\|u\|+\|v\|\right)}; \quad \tau\leq\frac{h}{2\left(\|u^k\|+\|v^k\|\right)}\,, \tag{12}$$

$$N<\frac{1}{2\sqrt{5\,\|(\rho^{k-1})^{-1}\|\,\left(a_1\|S^{k-1}\|+b_1\|T^{k-1}\|\right)}}\,. \tag{13}$$

Данный итерационно-разностный алгоритм целесообразно использовать для решения задачи гидрофизики водоема в случае существенно изменяющейся плотности водной среды. В частности, к таким водоемам относятся устьевые районы крупных рек (Дон, Кубань, Волга), впадающих в море и др.

Литература

1. *Колгунова О. В., Сухинов А. И.* Исследование сходимости итерационного процесса для задачи термогидродинамики водоемов // Вестник Харьковского нац. ун-та.—2005, № 661.—С. 142–151.
2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.—226 с.
3. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—344 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 282–283.

ЭКРАНИРОВАНИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОВОДЯЩИХ ИЛИ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ОБОЛОЧЕК

Т. В. Кочубей, К. С. Шапошников
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮНЦ РАН)

На практике тонкие проводящие и ферромагнитные оболочки зачастую используются для экранирования высокочувствительного оборудования от воздействия электромагнитных полей. Также возможно их применение для защиты персонала или информации. Для работы в низкочастотном диапазоне наиболее удобны экраны из ферромагнитного материала, в случае же высоких частот в качестве электромагнитных экранов используются проводящие слои и оболочки. При моделировании подобных экранов возможен переход к поверхностям с идеальными магнитными и электрическими свойствами соответственно.

В большинстве работ, посвященных электромагнитному экранированию, рассматриваются экранирующие поверхности лишь специальных форм: сферической, сфероидальной, цилиндрической, т. е. совпадающие с координатными поверхностями какой-либо подходящей системы координат. В этих случаях задача допускает аналитическое решение. Наличие углов или отверстий усложняют задачу моделирования подобных экранов в несколько раз.

В данной работе рассматриваются математические модели для расчета ферромагнитных и проводящих оболочек сложной конфигурации. Для расчета идеально-намагничивающихся оболочек используется математическая модель на основе интегрального уравнения первого рода относительно плотности фиктивных магнитных зарядов, расчет идеально-проводящих оболочек выполняется с помощью модели на основе интегро-дифференциального уравнения первого рода относительно скалярной функции потока плотности поверхностных вихревых токов. Получение и исследование этих моделей рассмотрено в [1], там же предложены эффективные способы численного решения рассматриваемых задач, реализованные в виде пакетов программ. Последние можно использовать для расчета и оптимизации характеристик устройств электромагнитного экранирования при сложных конфигурациях экранирующих поверхностей. В предлагаемой работе с помощью созданных пакетов программ выполнено исследование влияния геометрии оболочек на их экранирующие свойства.

Литература

1. *Кочубей Т. В., Шапошников К. С.* Расчет трехмерного магнитного поля в присутствии искривленных поверхностей с идеальными магнитными или электрическими свойствами // Исследования по дифференц. уравнениям и мат. моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—С. 124–133.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 284.

УЧЕТ АНИЗОТРОПИИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЫ В ЗАДАЧАХ РАВНОВЕСИЯ ДВУХФАЗНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ[1]

С. М. Кузьменко (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Определение в теле заранее неизвестного местоположения некоторой поверхности — межфазной границы — является чрезвычайно важной задачей при моделировании фазовых и структурных превращений в упругих телах [1]. Причем в некоторых случаях экспериментальные данные показывают, что межфазная граница может иметь более сложную, чем достаточно гладкая поверхность, структуру, представляя собой слой конечной толщины [2].

В данной работе развивается предложенная ранее в соавторстве с В. А. Еремеевым математическая модель межфазной границы, в рамках которой фазовая граница представляет собой слой, разделяющий две фазы. При этом, основываясь на экспериментальных данных, делается предположение об анизотропных свойствах возникающего переходного слоя. Вариационным методом рассматривается равновесие двухфазного тела, фазы которого разделены переходным слоем, с заранее неизвестными расположением и толщиной, которые определяются в ходе решения задачи. Приводится решение модельной задачи о радиально симметричной деформации двухфазного шара. Проводится сравнение с решениями, полученными ранее [3, 4].

Литература

1. *Гринфельд М. А.* Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений.—М.: Наука, 1990.—312 с.
2. *Бойко В. С., Гарбер Р. И., Косевич А. М.* Обратимая пластичность кристаллов.—М.: Наука, 1991.—280 с.
3. *Еремеев В. А. Кузьменко С. М.* Фазовые границы конечной толщины в задачах равновесия двухфазных упругих тел // Вестник ЮНЦ РАН.—2006.—Т. 2, № 4.—С. 12–18.
4. *Еремеев В. А. Кузьменко С. М.* Некоторые задачи статики упругих тел при учете межфазных границ // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2007.—№ 3.—С. 6–9.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ведомственной целевой программы РНП.2.2.1.1/7176 (2009–2010).

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 285–286.

К ТЕОРИИ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ НАД МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В. И. Кесаев, И. Н. Малиев
(Россия, Владикавказ; СОГУ)

Исследование электромагнитного взаимодействия точечных заряда и диполя с плоской металлической поверхностью имеет давнюю историю (см., например, [1, 2]). В нашей работе получено новое представление для сил трения и притяжения в форме, удобной для применения принципа суперпозиции в проблеме движения пучков частиц вблизи плоской поверхности металла.

В низкочастотном приближении в пределе малых скоростей и больших расстояний от поверхности получено выражение для силы трения (диполь):

$$F_x(v \to 0) = -\frac{3v}{32\pi\sigma z_0^4}\left(3d_x^2 + 4d_z^2\right) + O(v^2), \tag{1}$$

где $d_{x,z}$ — проекции дипольного момента, z_0 — расстояние от поверхности металла, v — скорость, σ — проводимость.

В этом же приближении, но в случае больших скоростей получена формула:

$$F_x(v \to \infty) = -\frac{d_x^2 + 2d_z^2}{(2z_0)^3} \cdot \frac{2\pi\sigma}{v} + O(v^{-2}), \tag{2}$$

В высокочастотном приближении в отсутствии затухания плазменных колебаний сила трения F_x равна нулю. Поэтому вычисляется сила притяжения

$$F_z = \nabla\left(\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\text{met}}\right)\Big|_{\substack{x=vt\\ z=z_0}}, \tag{3}$$

где $\vec{\mathcal{E}}_{\text{met}}$ — электрическое поле (отклик) металла, $\vec{d}$ — дипольный момент. В пределе малых скоростей получено выражение

$$F_z(v \to 0) = -\frac{3}{32z_0^4}\left(d_x^2 + 2d_z^2\right) - \frac{45}{128}\frac{d_x^2}{(z_0)^4}\left(\frac{\eta}{z_0}\right)^2 - \frac{15}{32}\frac{d_z^2}{(z_0)^4}\left(\frac{\eta}{z_0}\right)^2, \tag{4}$$

где $\eta = \sqrt{2}\, v/\omega_p$ — характерный масштаб задачи, ω_p — плазменная частота.

В случае быстрого движения имеем:

$$F_z(v \to \infty) = \frac{1}{2(2z_0)^4}\left(\frac{v_0}{v}\right)^2\left(d_x^2 + g\left(\frac{v_0}{v}\right)d_z^2\right) + \\ + \text{малые поправки}. \tag{5}$$

Функция $g\left(\frac{v_0}{v}\right)$ — положительна, но ее вид остается неопределен при аналитической оценке. Из (5) мы видим, что взаимодействие диполя с металлом при достаточно малом v_0/v становится отталкиванием. Оценки показывают, что это будет иметь место для атома водорода при энергиях ~ 1 Мэв и расстоянии $z_0 \sim 10^{-8}$ м от поверхности металла.

Литература

1. *Дедков Г. В., Кясов А. А.* Электромагнитные и флуктуационно-электромагнитные силы взаимодействия движущихся частиц и нанозондов с поверхностями // ФТТ.—2002.—Т. 44, вып. 10.—С. 1729–1755.
2. *Дедков Г. В., Кясов А. А.* Физика твердого тела // ФТТ.—2009.—Т. 51, вып. 1.—С. 3–27.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 287–288.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ

М. М. Муртузалиев (Россия, Махачкала; ДГУ)

Развитие экономики и общества в XX веке привело к очевидной несбалансированности в технологической, экономической, экологической и социальной сферах. Обеспечение устойчивого развития аграрной сферы направлено на сбалансированное решение аграрных социально-экономических проблем развития АПК при недопущении разрушения и уменьшения его природно-ресурсного потенциала, сохранении и улучшении благоприятной окружающей среды, удовлетворении потребностей нынешнего и будущих поколений людей в сельскохозяйственной продукции и, прежде всего, в качественных, экологически безопасных продуктах питания.

Нами предложена интерпретация применительно к проблеме устойчивого развития АПК таких известных в экологии принципов, как принцип сложной системы, принцип разнообразия и принцип адаптивности. В процессе развития на устойчивость системы влияют разнообразные факторы в политической, экономической, экологической и социальной сферах. Основным фактором в современных условиях является, по нашему мнению, аграрная политика государства и меры государственного регулирования аграрного рынка на федеральном и региональном уровнях. В последнее время все большую опасность представляет экологическая ситуация в аграрной сфере. Угрожающие потери плодородия почв, гумусного слоя, эрозионные процессы и дефляция почвенного покрова, загрязнение и отравление окружающей среды могут привести к необратимым последствиям.

Устойчивое развитие АПК предполагает социальную стабильность сельского общества и создание условий для устойчивого социально-психологического состояния крестьян. Факторы, связанные с развитием социальной инфраструктуры, образования, здравоохранения и сферы обитания сельских жителей, во многом определяют общую устойчивость развития АПК и социальный климат в стране. Основными факторами, обусловливающими неустойчивое развитие в экономике АПК, являются:

– случайные колебания погодных условий (осадки, температура воздуха и почвы, влажность воздуха, интенсивность солнечной радиации, сила ветра и т. д.);

– наличие 3-, 5-, 11-летних циклов в изменении погодных условий;

– управленческие решения на всех уровнях управления, неадекватные складывающимся хозяйственным условиям, способные вызвать кризисные ситуации;

– случайного характера хозяйственные, технико-технологические факторы.

В качестве примера рассмотрим достаточно простую динамическую систему:

$$\begin{aligned}
&\frac{dY}{dt} = kY(A - Y) - (a + \gamma)Y,\\
&\frac{dA}{dt} = -bA + aY + C,\\
&\frac{dk}{dt} = \beta k(B - k) + \gamma Y,\\
&Y(0) = Y_0, \quad A(0) = A_0, \quad k(0) = k_0,
\end{aligned}$$

где Y — уровень экономического развития АПК, выраженный, например, в доле валового национального продукта, A — обобщенный экологический ресурс, ограничивающий предельный уровень экономического развития АПК, k — скорость экономического развития, зависящая от способности экономики к разработке собственных, а также использованию и внедрению внешних высоких технологий в АПК, B — предельный уровень технологического совершенства, лимитируемый законами природы, C — скорость самовосстановления экологической среды, aY — интенсивность затрат части валового продукта на поддержание необходимого состояния экологической среды, γY — то же на разработку собственных и импорт внешних высоких технологий, β — скорость разработки новых высоких технологий, Y_0, A_0, k_0 — начальное состояние экономической системы.

Литература

1. *Вентцель Е. С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. 2-е изд.—М.: Наука, 1998.—208 с.
2. *Глухов В. В., Медников М. Д., Коробко С. Б.* Математические методы и модели для менеджмента. Учебник для вузов.—СПб.: Изд-во «Лань», 2000.—480 с.
3. *Гранберг А. Г.* Основы региональной экономики: Учебник для вузов.—М.: ГУ ВШЕ, 2000.—495 с.
4. *Кремер Н. Ш.* Исследование операций в экономике. Учеб. пос. для вузов.—М.: Банки и Биржи, ЮНИТИ, 1997.—407 с.
5. *Малыхин В. И.* Математическое моделирование экономики.—М.: УРАО, 1997.—160 с.
6. *Кротов В. Ф.* Основы теории оптимального управления.—М.: Высшая школа, 1990.—430 с.
7. *Эддоус М., Стенсфильд Р.* Методы принятия решений.—М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997.—590 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 289–290.

ОБ ОДНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ШАРА

А. Б. Моргулис (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Речь пойдет о характеризации шара, возникающей из рассмотрения классической задачи Бьеркнеса об эффекте вибрирующей жидкости на движение погруженного в нее твердого тела. Вибрации жидкости могут создаваться, например, заданными движениями твердых границ или пульсациями погруженного в жидкость неподвижного упругого тела. Эффект заключается в появлении средней силы, действующей со стороны жидкости на твердое тело. В наших рассмотрениях ситуация предельно упрощена — жидкость считается идеальной, несжимаемой и однородной, а роль вибратора выполняет неподвижный точечный источник пульсирующей интенсивности $\varkappa = \varkappa(t)$ (последняя предполагается заданной). Предполагается, что в каждый момент времени жидкость заполняет внешность области, занятой телом, покоится на бесконечности, и ее поле скорости допускает скалярный потенциал. Последний однозначно определяется формой твердого тела, его текущим положением и мгновенной скоростью (а также текущей интенсивностью источника). Форма твердого тела неизменна. Чтобы задать ее, зафиксируем область $D_0 \subset \mathbb{R}^3$. Далее область D_0 предполагается гладкой, ограниченной и односвязной. Движение твердого тела может быть отождествлено с некоторым гладким путем $\mathrm{T} : t \mapsto \mathrm{T}(t)$ на группе $\mathcal{M}$ движений $\mathbb{R}^3$, сохраняющих ориентацию. В момент времени t тело занимает область $D^b(t) = \mathrm{T}(t)D_0$, при этом мгновенная скорость тела отождествляется с касательным вектором $\dot{\mathrm{T}}(t)$ в точке $\mathrm{T}(t) \in \mathcal{M}$. Если источника нет, то истинное движение подчиняется вариационному принципу наименьшего действия в форме Гамильтона, а соответствующий лагранжиан есть сумма кинетических энергий тела и жидкости, причем последняя выражается через $\mathrm{T}(t)$ и $\dot{\mathrm{T}}(t)$ (таким образом, лагранжиан есть гладкий функционал на $T\mathcal{M}$). Принцип Гамильтона применим и в том случае, если имеется точечный источник, хотя кинетическая энергия жидкости становится бесконечной и не каждый путь на $\mathcal{M}$ допустим (так как источник не должен сталкиваться с телом).

Опуская подробности, заметим, что соответствующий лагранжиан записывается в натуральном виде $\mathcal{L} = K + \Lambda - \Pi$, где K, Π и Λ в явной форме выражаются через $\mathrm{T}(t)$, $\dot{\mathrm{T}}(t)$, $\varkappa(t)$ и функцию Грина задачи Неймана во внешности D_0. Функционал $K = K\big(\mathrm{T}(t), \dot{\mathrm{T}}(t)\big)$ — положительно определенная квадратичная форма относительно скорости $\dot{\mathrm{T}}(t)$, а $\Pi = \Pi(\mathrm{T}(t), t)$ не зависит от скорости. Таким образом, K и Π естественно рассматривать как кинетическую и потенциальную энергии. Гидродинамическая характеризация шара возникает из рассмотрения $\Lambda = \Lambda\big(\mathrm{T}(t), \dot{\mathrm{T}}(t), t\big)$. В явном виде

$$\Lambda = \varkappa(t) \int\limits_{S(t)} G\big(0, y|t\big) v_b^n(y,t)\, dS_y,$$

где $S(t) = \partial D^b(t)$, $v_b^n(y,t)$ — проекция скорости тела на нормаль к $S(t)$, направленную от тела к жидкости, $G = G(x,y|t)$ — функция Грина задачи Неймана во внешности $D^b(t)$. Данное представление получено в предположении, что положение источника выбрано за нулевой элемент $\mathbb{R}^3$, что не умаляет общности. Нетрудно видеть, что Λ — линейная форма относительно $\dot{\mathrm{T}}(t)$, и потому определяет 1-форму на конфигурационном пространстве (оно несколько уже $\mathcal{M}$). Если эта форма точна (при каждом t), то Λ вносит в уравнения движения потенциальную силу, а в противном случае — гироскопическую силу типа силы Лоренца. (Заметим, что $\Lambda\big(\mathrm{T}(t), \dot{\mathrm{T}}(t), t\big)$ явно зависит от t и потому не сводится к полной производной даже в случае точности ассоциированной 1-формы.)

Теорема 1. *Пфаффова форма Λ точна тогда и только тогда, когда погруженное тело есть шар.*

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 291–293.

РЕДУЦИРОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СВЕРХМЕЛКОГО РУСЛОВОГО ПОТОКА С НЕСТАЦИОНАРНОЙ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ[1]

К. А. Надолин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Редуцированные уравнения математической модели сверхмелкого руслового потока при постоянной вязкости в безразмерных переменных имеют вид [1]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -g, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ u = v = w\big|_{z=h} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta} = -f_x, \quad \frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta} = -f_y,\end{gathered} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} - w\bigg|_{z=\zeta} = 0. \tag{2}$$

Здесь u, v, w — продольная, поперечная и вертикальная составляющие вектора скорости соответственно; g — гравитационный параметр уклона русла.

Прямоугольные декартовы координаты (x, y, z) введены так, что плоскость xy расположена на поверхности потока, ось z направлена в сторону дна, ось x направлена вдоль уклона русла, а ось y — от левого берега к правому. Начало координат находится во входном сечении рассматриваемого участка на одинаковом расстоянии от берегов. Дно потока определяется известной функцией $z = h(x, y)$ и считается твердым. Параметры f_x и f_y определяют постоянный вектор ветровой нагрузки, действующей на свободную поверхность потока, которая считается слабо деформируемой и заданной неизвестной функцией $z = \zeta(x, y, t)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП МО Российской Федерации «Развитие научного потенциала высшей школы на 2009–2010 гг.», грант № РНП.2.2.1.1/7176.

Решение уравнений (1), (2) может быть выписано явно:

$$
\begin{gathered}
u = \frac{1}{2}\, g\left[(h-\zeta)^2 - (z-\zeta)^2\right] + f_x(h-z), \quad v = f_y(h-z), \\
w = g(h-z)\left((h-\zeta)\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2}(h-z)\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \\
+ (h-z)\left(f_x\frac{\partial h}{\partial x} + f_y\frac{\partial h}{\partial y}\right).
\end{gathered} \tag{3}
$$

Заметим, что продольная скорость является параболической по z функцией — аналогом профиля Пуазейля для ламинарного течения в трубе.

Из (3) легко получить условие возникновения противотока (нагонного ветрового течения)

$$
f_x \leqslant -\frac{1}{2}\, g\, (h-\zeta).
$$

Очевидно, что у пологих берегов естественных водотоков противотечение будет возникать даже при незначительном встречном ветровом воздействии, поскольку глубина $(h-\zeta)$ в этих местах мала.

Давление и компоненты скорости в (3) выражены через возвышение свободной поверхности ζ, которое определяется из кинематического краевого условия (2). Подставляя выражения (3) в (2) и вводя функцию глубины

$$
H(x,y,t) = h(x,y) - \zeta(x,y,t),
$$

запишем кинематическое краевое условие (2) в виде

$$
\frac{\partial H}{\partial t} = -gH^2\frac{\partial H}{\partial x} - H\left(f_x\frac{\partial H}{\partial x} + f_y\frac{\partial H}{\partial y}\right). \tag{4}
$$

Полагая, что в начальный момент времени (при $t = 0$) свободная граница является плоской (т. е. $\zeta(x,y,0) = 0$), имеем

$$
H(x,y,0) = h(x,y). \tag{5}
$$

Формулы (4), (5) представляют собой задачу Коши для однородного гиперболического уравнения первого порядка, решение которой определяется методом характеристик [2]:

$$\xi + h(\xi,\eta)\,(gh(\xi,\eta) + f_x)\,t = x, \quad \eta + f_x h(\xi,\eta)t = y,$$
$$H(x,y,t) = h(\xi,\eta).$$

Литература

1. *Надолин К. А.* Об одном подходе к моделированию пассивного массопереноса в русловых потоках // Мат. моделирование.—2009.—Т. 21, № 2.—С. 14–28.
2. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.—М.: Мир, 1977.—638 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 294–295.

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Ю. В. Никонорова (Россия, Волгодонск; ВИС ЮРГУЭС)

В последние годы в научной среде и в математическом образовании приобрели большую популярность такие программные средства, как MathCad, MatLab, Mathematica и Maple. Указанные программные продукты позволяют освободиться от громоздких вычислений и сосредоточиться на аналитической обработке математических данных.

В настоящем докладе будут рассмотрены примеры геометрических задач, для решения которых удалось с успехом использовать возможностями пакета аналитических вычислений Maple [1–6]. Все эти задачи имеют достаточно простую постановку, хотя и некоторые из них, например, задача Т. Поповичи (T. Popoviciu) и задача Дж. В. Фике (J. W. Fickett), не находили своего решения в течение долгого времени. Так задача Т. Поповичи была поставлена в 1943 году, задача Фике была сформулирована в 80-е годы двадцатого века. Объединяет все рассматриваемые задачи также и тот факт, что при их решении вычисления получаются настолько громоздкими, что оперировать с ними вручную практически невозможно.

Исследование каждой из представленных задач проводилось по следующему плану. Первоначально проводились многочисленные проверки соответствующей гипотезы с помощью системы Maple. Затем создавалась удобная для вычислительной работы модель соответствующей задачи. С использованием традиционных алгебраических и геометрических методов производилось упрощение задачи. Затем строился ряд алгебраических задач, соответствующих каждому шагу геометрической задачи. Для решения алгебраических задач в системе Maple приходилось пользоваться либо уже существующими процедурами поиска решения (например, стандартными процедурами для разложения на множители, упрощения выражений, построения графиков), либо создавать собственные (например, более удобные процедуры решения для решения систем линейных уравнений и для вычисления определителей). Последним этапом в решении каждой из рассматриваемых задач было упрощение выкладок, полученных с помощью Maple. Надо отметить, что некоторые из выкладок было трудно предугадать и можно сказать, что система Maple «подсказала» дальнейший путь решения.

Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по выпуклой геометрии и геометрии пространств с внутренней метрикой. В то же время эти результаты, являясь точными, могут служить для проверки эффективности алгоритмов и программных продуктов, предназначенных для вычисления стандартных характеристик геометрических объектов. Это важно с той точки зрения, что в настоящее время не известно оптимальных алгоритмов для вычисления таких важных в геометрии и приложениях величин как внутреннее расстояние на поверхности заданного выпуклого тела, внутренний диаметр выпуклой поверхности и изопериметрические дефекты для плоских и пространственных областей.

Литература

1. *Никоноров Ю. Г., Никонорова Ю. В.* Решение обобщенной задачи Поповичи // Тр. Рубцовского индустр-го ин-та.—2000.—Т. 7.—С. 229–232.
2. *Никоноров Ю. Г., Никонорова Ю. В.* О внутренней геометрии поверхности прямоугольного параллелепипеда // Тр. Рубцовского индустр-го ин-та.—2000.—Т. 7.—С. 222–228.
3. *Никонорова Ю. В.* Об одной экстремальной задаче на евклидовой плоскости // Мат. тр.—2001.—Т. 4, № 1.—С. 111–121.
4. *Никонорова Ю. В.* Об одной изопериметрической задаче на евклидовой плоскости // Тр. Рубцовского индустр-го ин-та.—2001.—Т. 9.—С. 66–72.
5. *Никоноров Ю. Г., Никонорова Ю. В.* Применение системы Maple к решению геометрических задач, 2-е изд.—Рубцовск: Изд-во АлтГУ, 2005.—С. 80.
6. *Nikonorov Yu. G., Nikonorova Yu. V.* The intrinsic diameter of the surface of a parallelepiped // Discrete Comput. Geom.—2008.—Vol. 40, № 4.—P. 504–527.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 296–297.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ КРЕДИТОВАНИЯ С УЧЕТОМ ИНФЛЯЦИИ

М. М. Ошхунов (Россия, Нальчик; КБГУ),
З. М. Ошхунова (Россия, Нальчик; КБ филиал ЮТК)

Предположим, что банк выдает кредит под $q\%$ годовых на (k) лет. Если клиент взял кредит в сумме N_0 рублей, то без учета инфляционных процессов ему необходимо выплатить (возвратить банку за (k) лет) сумму

$$N = N_0\left(1 + \frac{k+1}{2}\frac{q\%}{100\%}\right), \quad k \geqslant 1. \tag{1}$$

Нетрудно также оценить выплаты клиента банку через (n) лет $(1 \leqslant n \leqslant k)$. Легко получить что

$$N(n) = N_0\left[\frac{n}{k} + q\left(\frac{k\,(k+1)}{2k} - \frac{(k-n)\,(k-n+1)}{2k}\right)\right]. \tag{2}$$

Формулы (1), (2) позволяют оценить выгоду банка в случае возврата клиентом долга за определенное время.

Например, если клиент взял $N_0 = 1$ млн. рублей на $k = 20$ лет под $q = \frac{20\%}{100\%} = \frac{1}{5}$, то он должен вернуть банку $N = N_0\left[1 + q\frac{k+1}{2}\right] = 10^6\left(1 + \frac{1}{5}\frac{21}{2}\right) \approx 3$ млн. 100 тыс. рублей.

Если кредит взят на $k = 10$ лет, то возврат составит $N = 10^6\left(1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{11}{2}\right) \approx 2$ млн. 100 тыс. рублей.

Заметим, что оценки кредитного возврата сделаны без учета инфляционного процесса. Кроме того из этих оценок следует, что удлинение срока возврата кредита выгодно банку.

Формула (2) позволяет ответить на вопрос, какую сумму клиент должен вернуть банку за определенное время $(n \leqslant k)$. Предположим, что взят кредит на $k = 20$ лет под $\frac{q\%}{100\%} = \frac{20\%}{100\%} = \frac{1}{5} = q$. Тогда при $N_0 = 10^6 = 1$ млн. рублей заемщик должен вернуть банку за $n = 10$

лет сумму

$$N\,(10) = 10^6\left[\frac{10}{20} + \frac{1}{5}\left(\frac{20\cdot 21}{2\cdot 20} - \frac{(20-10)(20-10+1)}{2\cdot 20}\right)\right] =$$

$$= 10^6[0,5 + 2,1 - 0,55] = 10^6\cdot 2,05 = 2 \text{ млн. } 50 \text{ тыс. рублей.}$$

Данная оценка означает, что банк вернул кредит и плюс 1 млн. за 10 лет.

Предположим, что реальный курс денег падает ежегодно, что означает падение фактического банковского процента. Обозначим соответствующие проценты по годам через $q_1\%$, $q_2\%$, $\ldots$, $q_i\%$, $\ldots$, $q_k\%$. Здесь $q_i\%$ — реальный банковский процент в (i)-й год с учетом денежной инфляции. Если, например, годовая инфляция составляет 5% при $q_1\% = 20\%$, то $q_2\% = 15\%$, $q_3\% = 10\%$, $q_4\% = 5\%$, $q_5\% = 0\%$, $q_6\% = -5\%$ $q_7\% = -10\%$ и т. д. Можно показать, что общая сумма выплат с учетом инфляции в этом случае составит

$$N\,(k) = N_0\left[1 + \frac{1}{k}\left(q_1k + q_2(k-1) + q_3(k-2) + \ldots + q_k\right)\right]. \qquad (3)$$

Полученные формулы позволяют оценить выгоду банка и клиента, а также учесть инфляцию.

Литература

1. *Кушхов О. И., Кумыкова Ж. С.* Роль бюро кредитных историй в развитии потребительского кредитования в современной банковской системе РФ // Известия КБНЦ РАН.—2008.—№ 5.
2. *Под. Ред. Лаврушина О. И., Веленцовой Н. И.* Банки и банковские операции. 2 изд.—М.: КНОРУС, 2008.
3. *Соколинская Н. Э.* Учет и анализ краткосрочных и долгосрочных кредитов.—М.: АО «Консал-Банкир», 1997.
4. *Положение о порядке начисления процентов по операциям, связанным с привлечением и размещением денежных средств банками. Указания ЦБ РФ от 26.11.2007, № 1931.—У.*

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 298–300.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ГЛАЗНОГО ЯБЛОКА ПРИ МИОПИИ

М. М. Ошхунов, Б. Х. Хацуков
(Россия, Нальчик; КБГУ)

Работа посвящена моделированию деформации глаза человека с учетом механических свойств ее тканей. Знание биохимических принципов работы глаза и глазного яблока в целом, а также упругих свойств отдельных анатомических его компонентов (в частности, склеры) позволят в рамках теории упругости построить в первом приближении математическую модель близорукости.

Изучению биомеханических свойств глаза в последние годы уделяется все большее внимание [1], [4]. Известно, что глаз является, по существу шаром (эллипсоидом), подверженным внутреннему давлению. Как утверждает В. Ф. Ананин [1], существует два механизма аккомодации глаза, когда четкость видения предмета обеспечивается по теории Гельмгольца за счет изменения кривизны хрусталика (в случае, если предмет расположен от глаза не слишком близко: metricconverterProductID50 см50 см и дальше) и за счет деформации оболочки склеры (если предмет находится слишком близко). Согласно этой модели изменение радиуса кривизны передней и задней части поверхности хрусталика от metricconverterProductID10 мм10 мм до metricconverterProductID6 мм6 мм позволяет видеть четко предметы, расположенные от metricconverterProductID1 метра1 метра до бесконечности [1, с. 13]. Следовательно, возможный диапазон настройки оптической системы человеческого глаза за счет изменения кривизны линз хрусталиков (по Гельмгольцу) этим практически исчерпывается. При рассмотрении предметов, расположенных на расстоянии metricconverterProductID10 см10 см–1м., включается другой механизм, приводящий к деформации (вытягиванию) сферы в горизонтальном направлении.

Анализ свойств тканей глаза показывает, что в первом приближении его физико-механические свойства могут быть описаны в рамках деформационной теории упругопластических деформаций

А. А. Ильюшина [3]. Как показано в работе [4], с. 187, при растягивании тканей склеры зависимость между напряжением и деформацией имеет явно выраженный упругий участок, где справедлив закон Гука, а затем происходит пластическая деформация

Таким образом, для определения напряженно-деформированного состояния склеры с нелинейными физико-механическими свойствами, необходимо решить три уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{1}$$

при условии, что связь между перемещениями u_i и деформациями ε_{ij} имеет вид (формулы Коши):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{2}$$

Для завершения модели, описывающей напряженно деформированное состояние ткани склеры, зададим определяющие законы вида:

$$\sigma_{ij} = K\theta\delta_{ij} + 2G\big(1 - \omega(e_n)\big)\left(\varepsilon_{ij} - \frac{\theta}{3}\,\delta_{ij}\right), \tag{3}$$

Для решения уравнений (1), (2), (3) необходимо задать граничные условия смешанного типа

$$u_i\big|_{s_1} = u_i^\circ \quad \sigma_{ij} n_j\big|_{s_2} = \sigma_i^\circ. \tag{4}$$

Здесь s_1, s_2 — части поверхности, на которых заданы перемещения и напряжения соответственно.

Краевая задача (1)–(4) — система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа и может быть решена методами последовательных приближений, когда в каждом приближении решается линейная краевая задача. Анализ условия сходимости итерационных процессов и примеры численных решений нелинейных краевых задач приведены в работах [5]–[8]. В работе [8] приводится расчет напряженно-деформированного состояния тела с криволинейной границей методом конечных элементов, когда нелинейные свойства среды описываются определяющими законами вида (3), аналогичными свойствам ткани склеры [4].

В работе предлагается также математическая модель деформирования глазного яблока с использованием контактной задачи Герца.

Полученные формулы позволяют оценить более адекватно смещение задней части склеры под действием внешних мышц.

Литература

1. *Ананин В. Ф.* Механизм близорукости.—М.: Изд-во «Гласность», Биомединформ, 1996.—53 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости.—М.: Наука, 1966.—198 с.
3. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории.—М.: АН СССР, 1963.—272 с.
4. *Иомдина Е. Н.* Механические свойства тканей глаза человека // Современные проблемы биомеханики.—2006.—№ 11.—С. 183–200.
5. *Ошхунов М. М.* О сходимости итерационных процессов в нелинейной упругости // Прикладная механика.—1995.—Т. 31, № 1.—С. 84–100.
6. *Oshkhunov M. M., Ozden S.* The general stress and strain relationship in non-linear materials // Int. J. «Non-linear Mechanics».—2001.—Vol. 35.—P. 763–767.
7. *Комаров Г. Н., Ошхунов М. М.* О разрешимости физически нелинейных задач теории упругости // Украинский мат. журн.—1996.—№ 6.—С. 132–138.
8. *Ошхунов М. М., Тхакахов Р. Б.* Математические модели и методы расчета на прочность поливинилхлоридных композиций // Пластические массы.—2007.—№ 11.—С. 43–47.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 301–302.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦИЛИНДРЕ С ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

И. А. Панфилов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Ю. А. Устинов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Цилиндр с винтовой анизотропией можно представить, в частности, как результат винтовой намотки слоев тонких нитей из жесткого материала на цилиндрическую поверхность с одновременным покрытием их полимерным материалом. Таким образом получается локально трансверсально-изотропный композит с осью симметрии, направленной по касательным к винтовым спиралям, для определения приведенных упругих характеристик которого можно использовать методы гомогенизации [1, 2]. Цилиндрическую оболочку с винтовой анизотропией можно получить путем свертывания прямоугольной ортотропной пластины в трубку, если направления главных осей упругой симметрии не совпадают с направлениями ее сторон. Винтовой анизотропией обладают стенки артериальных кровеносных сосудов [3, 4].

Основные соотношения линейной теории упругости для тел с винтовой анизотропией и результаты исследований задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией опубликованы в [5–7]. В этих работах, в частности, показано, что при растяжении–сжатии цилиндра с винтовой анизотропией помимо продольных деформаций возникают сдвиговые и, наоборот, при кручении помимо сдвиговых — продольные.

В [8] для математического моделирования распространения пульсовых волн в артериальных сосудах на основе гипотез Кирхгофа — Лява получены уравнения колебаний оболочки с винтовой анизотропией. В [9] в рамках безмоментной теории исследованы некоторые особенности волновых процессов, порождаемых винтовой анизотропией. В [10, 11] анонсированы методы построения решений динамических краевых задач на основе прикладной теории типа Кирхгофа — Лява и результаты исследований некоторых конкретных задач, в [12] дается подробное описание этих результатов. Серия проведенных расчетов показала, что в осесимметричном случае винтовая анизотропия порождает связь между продольными и крутильными колебаниями, которая математически описывается амплитудными коэффициентами однородных волн.

Настоящая работа посвящена исследованию гармонических волн в полом цилиндре с винтовой анизотропией на основе трехмерных уравнений теории упругости. Также на основе полученных результатов анализируется область применения прикладной теории Кирхгофа — Лява (К.-Л.) и теории типа Тимошенко — Рейсснера (Т.-Р.).

Литература

1. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов.—М.: Мир, 1982.—334 с.
2. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов.—М.: МГУ, 1984.—335 с.
3. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов.—М.: Мир, 1983.—400 с.
4. *Пуриня Б. А., Касьянов В. А.* Биомеханика крупных кровеносных сосудов.—Рига: Знание, 1980.—260 с.
5. *Устинов Ю. А.* Решение задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией // Прикл. мат. и мех.—2003.—Т. 67, № 1.—С. 89–98.
6. *Устинов Ю. А.* Некоторые задачи для упругих цилиндрических тел с винтовой анизотропией // Успехи механики.—2003.—№ 4.—С. 37–62.
7. *Устинов Ю. А.* Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров.—М.: Наука, 2003.—128 с.
8. *Устинов Ю. А.* Модель винтового пульсосвого движения крови в артериальных сосудах // Докл. РАН.—2004.—Т. 398, № 3.—С. 344–348.
9. *Богаченко С. Е., Устинов Ю. А.* Некоторые особенности волновых процессов в цилиндрической оболочке с винтовой анизотропией // Эколог. вестн. науч. центров ЧЭС.—2006.—№ 1.—С. 18–21.
10. *Панфилов И. А., Устинов Ю. А.* Собственные частоты и формы цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией // Тр. XI междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды».—Ростов-на-Дону: ООО «ЦВВР», 2007.—Т. 2.—С. 166–171.
11. *Панфилов И. А., Устинов Ю. А.* Отражение однородных волн от торца полубесконечной цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией // Тр. XII междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды».—Ростов-на-Дону: ООО «ЦВВР», 2008.—Т. 2.—С. 166–171.
12. *Панфилов И. А., Устинов Ю. А.* Некоторые динамические задачи для цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Актуальные проблемы механики. Естеств. науки.—2009.—Спецвыпуск.—С. 97–105.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 303.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНФЛЯЦИОННЫХ РИСКОВ НА ПОТРЕБИТЕЛЬСКОМ РЫНКЕ

Попов В. А. (Россия, Москва; ФА при правительстве РФ),
Семёнов В. П. (Россия, Москва; РЭА им. Г. В. Плеханова)

Учет инфляционных процессов играет большую роль как при планировании расходов домашних хозяйств, так и в бизнесе.

Однако этот учет, как правило, основывается только на предсказаниях уровня инфляции и не рассматривает случайный характер и взаимосвязь цен различных товаров потребительской корзины.

Мы рассматриваем относительные изменения цен $a_i = \frac{P_{1i} - P_{0i}}{P_{0i}} \cdot 100\,\%$ на различные товары как зависимые нормально распределенные величины со средними значениями E_I и корреляционной матрицей ρ_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, n)$.

Изменение стоимости потребительской корзины (уровень инфляции) вычисляется по формуле $H_{\text{ПК}} = \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_n a_n$, где μ_i — доля i-го товара в ПК, $\mu_1 + \ldots + \mu_n = 1$.

Ожидаемая инфляция и дисперсия величины $H_{\text{ПК}}$ вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} E(H_{\text{ПК}}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i\, E_i; \\ D(H_{\text{ПК}}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \rho_{ij}\, \sigma_i\, \sigma_j\, \mu_i\, \mu_j, \end{cases} \tag{1}$$

где σ_i, σ_j — средние квадратические отклонения величин a_i и a_j.

Доклад посвящен анализу системы уравнений (1) и во многом базируется на теории портфельных инвестиций Г. Марковица, У. Шарпа, Дж. Тобина.

Основной вывод состоит в том, что меняя структуру потребления, т. е. коэффициенты μ_i, можно снижать ожидаемый уровень инфляции потребительской корзины $E\,(H_{\text{ПК}})$, не повышая риск $\sigma = \sqrt{D\,(H_{\text{ПК}})}$.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 304–305.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ ТЕЧЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ[1]

С. В. Ревина (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Рассматривается двумерное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами L_1 и L_2 соответственно и T-периодического по времени:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v} - \nu \Delta \boldsymbol{v} = -\nabla p + \boldsymbol{F}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

где ν — безразмерная вязкость. Средняя по пространству скорость считается заданной и T-периодической.

Предполагается, что один из пространственных периодов L_2, а также период по времени T, стремятся к бесконечности: $L_2 = \frac{2\pi}{\alpha}$, $T = \frac{2\pi}{w\alpha}$, волновое число $\alpha \to 0$. Строится длинноволновая асимптотика задачи устойчивости периодического по времени течения, когда основное поле скорости имеет вид:

$$\boldsymbol{V} = (\alpha V_1, V_2)\big(x_1, \alpha x_2, \alpha w t\big).$$

Исследованию длинноволновой неустойчивости стационарных параллельных течений вязкой жидкости и соответствующих вторичных автоколебательных режимов посвящены работы [1, 2]. Ответвлению длинноволновых автоколебательных режимов от двумерных и трехмерных стационарных течений посвящены работы [3–5].

Критическим называется такое значение параметра ν, при котором один или несколько мультипликаторов выходят на единичную окружность. В [6] обоснована законность линеаризации в задаче устойчивости периодических по времени течений жидкости в некритическом случае.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке аналитических ведомственных целевых программ «Развитие научного потенциала высшей школы» («Динамика распределенных и точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости», проект № 2.1.1/554 и «Математическая гидродинамика жидкостей со сложными физико-химическими свойствами», проект № 2.1.1/6095).

В данной работе доказано, что в нерезонансном случае, когда отношение среднего продольной компоненты скорости к характерной скорости течения $w = \frac{L_3}{T}$ иррационально: $\frac{\{\langle V_3\rangle\}}{w} \notin Q$ (через Q обозначено множество рациональных чисел), происходит колебательная потеря устойчивости — мультипликаторы пересекают единичную окружность в точках $\rho_{1,2} = e^{\pm i\lambda}$, $\lambda = \frac{m\{\langle V_3\rangle\}}{w} 2\pi$.

Для параллельного периодического по времени основного течения рассмотрен и случай $\frac{\{\langle V_3\rangle\}}{w} \in Q$. Оказывается, что при этом условии возможна монотонная потеря устойчивости и бифуркация удвоения периода.

Литература

1. *Юдович В. И.* О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений // Численные методы решения задач математической физики.—М: Наука, 1966.— С. 242–249.
2. *Юдович В. И.* Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений // Изв. АН СССР. МЖГ.—1973.—№ 1.—С. 32–35.
3. *Юдович В. И.* Неустойчивость длинноволновых течений вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.—1990.—№ 4.—С. 31–35.
4. *Ревина С. В., Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических трехмерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ.—2001.— № 2.—С. 29–41.
5. *Мелехов А. П., Ревина С. В.* Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических двумерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ.—2008.— № 2.—С. 41–56.
6. *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости.—Ростов на-Дону: Изд-во Ростовского гос. ун-та, 1984.—192 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 306–307.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛИТИЧЕСКОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ МЕТОДАМИ СЕМАНТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА И ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

М. Д. Розин, И. Н. Мощенко, Д. А. Джикаев
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

На конкретном примере (пилотное исследование для 4-х студенческих групп) показана разработанная методика моделирования групповой политической напряженности. В качестве количественной меры политической напряженности использовалась обобщенная вероятность поддержки или отрицания существующего политического порядка, нормированная от -1 (полное неприятие политического порядка) до $+1$ (полное приятие). Такая вероятность характеризует поведенческий компонент групповой установки по отношению к политическому порядку. Как показано в социальной психологии, поведенческий компонент тесно связан с аффективной составляющей групповой установки. Эта составляющая определялась экспериментально, путем анкетирования, проведенного по методике семантического дифференциала [1]. Респондентам предлагалось оценить воображаемые самый положительный и самый негативный политические порядки, а также реальный порядок, по 19 биполярным шкалам, которые описывают простейшие, первичные формы восприятия и эмоций. Проведенный многомерный факторный анализ показал, что 92% дисперсии 19 первичных эмоциональных характеристик описываются всего 4 независимыми факторами, названными нами в соответствии с [1] факторами «силы», «активности», «оценки» и «отношения». Получены усредненные семантические профили в пространстве этих факторов. Они показали, что эмоциональное отношение к существующему порядку по факторам «сила» и «активность» близко к нулевому. Это говорит о малой значимости политического порядка для респондентов и об отсутствии у них политической активности. По фактору «оценка» эмоциональное отношение исследуемой группы к существующему политическому порядку отрицательно и близко к их отношению к идеальному негативному порядку. По фактору «отношение» — положительно, но незначительно. Таким образом, существующий политический порядок оценивается исследуемой группой отрицательно, что говорит о наличии латентной политической напряженности.

Для определения уровня этой напряженности была использована разработанная ранее психосемантическая феноменологическая модель [2]. Как показано в этой работе, скорость изменения выше введенной обобщенной вероятности r градиентным образом зависит от некоторой функции общегл положеня F, названной нами потенциалом политической напряженности:

$$\frac{dr}{dt} = -\operatorname{grad} F. \tag{1}$$

В соответствии с вышесказанным, этот потенциал зависит от вышеописанных четырех эмоциональных факторов, играющих роль параметров управления для (1). Как показано в теории катастроф, в таком случае в качестве типичного потенциала можно взять функцию:

$$F = r^6/6 + ar^4/4 + br^3/3 + cr^2/2 + dr, \tag{2}$$

где d, c, b, a — феноменологические коэффициенты, диффеоморфным образом зависящие от параметров управления.

Используя полученные результаты, были рассчитаны феноменологические коэффициенты для (2) и проведено компьютерное симулирование. Получено, что на момент опроса исследуемая аудитория характеризуется обобщенной вероятностью равной $-0,19$. При незначительном изменении внешних условий следует ожидать гладкое небольшое изменение уровня политической напряженности. Однако если изменение внешних условий приведет к более чем 10% увеличению фактора «сила», обобщенная вероятность скачком измениться от $-0,19$ до примерно $0,2$.

Литература

1. *Осгуд Ч., Суси Дж., Танненбаум П.* Приложение методики семантического дифференциала к исследованиям по эстетике и смежным проблемам // Семиотика и искусствометрия.—М.: Мир, 1972.
2. *Мощенко И. Н.* Психосемантическая феноменологическая модель групповой политической напряженности // Инженерный вестник Дона.—2010.—№ 1, http://www.ivdon.ru/magazine/latest/n1e2010/173/

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 308–309.

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ДВУМЕРНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ЭЛЕКТРОПОТРЕБЛЕНИЯ

А. В. Седов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮНЦ РАН),
Е. В. Тришечкин (Россия, Новочеркасск; ЮРГТУ (НПУ))

В настоящее время одномерные вейвлет-преобразования широко используются для анализа и моделирования временных рядов, в том числе и электропотребления [1]. Однако они не позволяют эффективно учитывать сложные многофакторные зависимости процессов. Для этого предлагается использовать двумерное обобщение вейвлет-преобразования. Для анализа в этом случае используются двумерные масштабирующие функции $\varphi(x, y)$ и три двумерные вейвлет-функции $\psi^H(x, y)$, $\psi^V(x, y)$ и $\psi^D(x, y)$. Каждая из этих функций представляет собой произведения одномерных масштабирующих функций φ и соответствующих вейвлет-функций ψ:

$$\varphi(x, y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y), \quad \psi^H(x, y) = \psi(x) \cdot \varphi(y),$$
$$\psi^V(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y), \quad \psi^D(x, y) = \psi(x) \cdot \psi(y).$$

Результатом двумерного дискретного вейвлет-преобразования масштаба j двумерной функции электропотребления $P(x, y)$, заданной массивом значений размерностью $M \times N$, являются коэффициенты разложения, вычисленные по формулам [2]:

$$W_\varphi(j_0, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} P(x, y)\, \varphi_{j_0,m,n}(x, y),$$
$$W_\psi^i(j, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} P(x, y)\, \psi_{j,m,n}^i(x, y), \quad i = \{H, V, D\}.$$

Данные коэффициенты могут вычисляться при помощи процедуры фильтрации с прореживающей выборкой.

Для исследований были использованы 2 массива значений годового электропотребления энергосистемы G. Первый массив, обозначенный P, содержал суточные графики электропотребления за полный 2001 г., второй (T) — информацию об изменении температуры воздуха за тот же период. Используя вейвлеты Добеши 5-го порядка, были выполнены 4 итерации прямого вейвлет-преобразования над значениями массива P. В результате преобразования были получены массивы коэффициентов cA_i, cH_i cV_i, cD_i, где $i = \overline{1,4}$, — масштаб разложения, при этом cA, cH cV, cD соответствуют коэффициентам W_φ, W_ψ^H, W_ψ^V, W_ψ^D соответственно. Значения массива T также были подвергнуты преобразованию и были полученны наборы коэффициентов ctA_i, ctH_i ctV_i, ctD_i, $i = \overline{1,4}$.

Исследование отдельных составляющих электропотребления G, восстановленных по различным коэффициентам разложения путем обратного вейвлет-преобразования, позволило установить следующие зависимости:

• функция, восстановленная по коэффициентам cD_i, $i = \overline{1,4}$, и cV_1, представляет собой шум небольшой амплитуды, что позволяет не рассматривать ее при дальнейшем анализе и моделировании;

• значения функции, восстановленной по коэффициентам cV_i, $i = \overline{2,4}$, связаны с временем захода солнца;

• значения функции, восстановленной по коэффициентам cH_i, $i = \overline{1,3}$, зависят от чередования рабочих и выходных дней в году;

• составляющая функции электропотребления, вычисленная по коэффициентам разложения cH_4, зависит от составляющей графика температуры, вычисленной по аналогичным коэффициентам ctH_4.

Данная декомпозиция процесса позволит реализовать эффективные модели электропотребления при планировании и прогнозировании.

Литература

1. *Седов А. В., Тришечкин Е. В.* Особенности использования вейвлет-анализа при моделировании временных рядов электропотребления // Исследования по дифференц. уравнениям и мат. моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2009.—С. 99–112.
2. *Малла С.* Вейвлеты в обработке сигналов.—М.: Мир, 2005.—329 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 310–311.

РЕКОНСТРУКЦИЯ РАССЛОЕНИЙ В КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ НА ОСНОВЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ИНТРОСКОПИИ[1]

А. Н. Соловьев, А. С. Спожакин, Н. С. Макарчик
(Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Основой реконструкции внутренних дефектов в упругих и теплопроводных телах могут служить механические поля, измеренные на поверхности тела, а именно амплитуды смещений, ускорений или температура. В случае вибрационного воздействия на элементы конструкций внутренние дефекты являются зонами повышенного тепловыделения и это служит основой их определения с помощью температурного портрета поверхности элемента. Ранее в литературе были разработаны методы такой идентификации для однородных тел, основанные на применении теорем взаимности для поврежденного и неповрежденного состояния с применением набора пробных аналитических решений однородного уравнения теплопроводности. В случае неоднородных тел, например, слоистых композитов, набор таких решений ограничен, однако если рассматривать частный случай дефектов, а именно интерфейсных расслоений, то с помощью этой методики удается провести их частичную реконструкцию.

В настоящей работе рассматриваются колебания слоистого композита с дефектами типа расслоений, которые приводят к появлению внутренних источников тепловыделения. Задача реконструкции таких внутренних источников тепла состоит из неоднородного стационарного уравнения теплопроводности для слоистой среды переопределенных граничных условий, которые моделируют процесс измерения температурного портрета. В результате использование двух аналитических решений для этого тела и теоремы взаимности удается построить разрешающие уравнения для определения номера интерфейсной границы с дефектом и координат внутренней точки источника. В работе с помощью метода конечных элементов в пакете

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 10-08-01296, № 10-01-00194, № 10-08-00093.

ANSYS проведены модельные численные расчеты по реконструкции таких расслоений в двумерных и трехмерных телах. Расчеты, моделирующие мониторинг поврежденного состояния протяженных конструкций показывают, что в этом случае температура может быть измерена в некоторой ограниченной области содержащей дефект, а граничные условия на цилиндрической поверхности, ограничивающей эту область измерения, могут быть заменены приближенными (например, постоянной температурой или отсутствием потока тепла).

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 312–314.

К ВОПРОСУ УЧЕТА АНИЗОТРОПНОСТИ В НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВЛАГОУПРУГОСТИ

Т. Р. Тедеев (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Известно [1, 2], что между напряженно-деформированным состоянием и физическими параметрами структурно-неустойчивой грунтовой среды (плотность скелета среды ρ_d, влажность W и температура θ, ускорение частиц a) существует функциональные зависимости:

$$\varepsilon(\sigma, \rho_d, W, \theta, a) = 0, \quad \gamma(\sigma, \rho_d, W, \theta, a) = 0. \tag{1}$$

Для разновидностей грунтовых сред один из этих параметров является определяющим. К примеру для просадочных и набухающих грунтов определяющими являются их плотность и влажность. Для определения приращений деформаций в грунтовой среде рассмотрим всестороннее расширение (сокращения) грунта объемом V под воздействием приращения суммы главных сжимающих напряжений $d\sigma_\nu$ и влажности W:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \sigma_\nu}\, d\sigma_\nu - \frac{\partial V}{\partial W}\, dW. \tag{2}$$

Разделив равенство (2) на объем V и выразив через величину dV/V приращение объемной деформации можно получить:

$$d\varepsilon_\nu = \left(\frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial \sigma_\nu}\right)_W d\sigma_\nu - \left(\frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial W}\right)_{\sigma_\nu} dW. \tag{3}$$

Величина $(\partial\sigma_\nu/\partial\varepsilon_\nu)_W$ определяет интенсивность изменения среднего напряжения σ_ν в зависимости от изменения объема при постоянной влажности, или изовлажностный модуль K линейно-деформируемой грунтовой среды, а величина $(\partial\varepsilon_\nu/\partial W)_{\sigma_\varepsilon}$ — увеличение объема при единичном изменении влажности и имеет смысл коэффициента объемного расширения (сокращения). Коэффициент объемного расширения (сокращения) можно обозначить через β, тогда зависимость (3) можно привести к виду:

$$d\varepsilon_\nu = \frac{d\sigma_\nu}{K} - \beta\, dW. \tag{4}$$

По аналогии с зависимостью (3) для угловых деформаций можно предположить справедливость следующего уравнения

$$d\gamma = \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}\right)_W d\tau + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial W}\right)_\tau dW, \tag{5}$$

или

$$d\gamma = \frac{d\tau}{G} + \alpha\, dW, \tag{6}$$

где γ — угловая деформация, τ — касательные напряжения, α — коэффициент сдвиговой деформаций, G — модуль сдвига при $W =$ const.

Для случая плоской деформации физические уравнения влагоупругости с учетом анизотропности деформирования среды имеют следующий вид

$$\bar{\sigma} = E_y^*(W)[D](\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}_\sigma), \tag{7}$$

где $\bar{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$ — вектор напряжений, $E_y^*(W) = E_y(W)/(1 + \mu_x)(1 - \mu_x - 2\mu\mu_y)$ — приведенный модуль линейной деформаций, $[D]$ — матрица приведенных коэффициентов Лямэ, $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$ — вектор деформаций, $\bar{\varepsilon}_0$ — вектор влажностных деформаций, определяемый из следующей зависимости

$$\bar{\varepsilon}_0 = \psi(W) \left\{ \begin{array}{l} \beta_x(W) + \mu_x\beta_x(W) \\ \beta_y(W) + \mu_x\beta_x(W) \\ 0 \end{array} \right\} = \psi(W)\bar{\beta}(W), \tag{8}$$

где μ_x, μ_y — коэффициенты Пуассона по осям, $\bar{\beta}(W)$ — вектор коэффициентов набухания или просадки, T — знак транспонирования.

Экстремальная постановка задачи отыскания поля перемещений u в плоскодеформированном основании следующая: для данного распределения поля влажности $W(x, y, t)$ в момент времени t [3] найти соответствующий этому моменту вектор перемещений $\bar{u}(x, y)$ определенный и непрерывный в замкнутой области F вместе со своими производными, удовлетворяющий на границе S области кинематическим граничным условиям и сообщающий минимальное значение полной потенциальной энергии деформации

$$J(\bar{u}) = \iint \left\{ E_y^*(W)([A]\bar{u})^T[D]\big(0,5[A]\bar{u} - \varepsilon_0\big) - \bar{u}^T\bar{\rho} \right\} dF - \sum_I P_i\delta_i. \tag{9}$$

Здесь $\bar{\rho}$ — вектор массовых сил; P_i — сосредоточенные силы; δ_i — перемещение точек приложения этих сил; I — число сил; $[A]$ — матрица дифференциальных операций уравнений равновесия теории упругости [4].

Пусть заданная область F представлена совокупностью конечных элементов. Примем, что в пределах одного элемента ϵ справедливы соотношения:

$$\bar{u}(x,y) = [N]\bar{\delta}_э, \tag{10}$$

где $[N]$ — матрица функций формы элемента, $\bar{\delta}_э$ — вектор перемещений узлов элемента. Подставляя (10) в выражение (9) и минимизируя для одного элемента, получаем:

$$[K]_э\bar{\delta}_э + \bar{R}_{\rho э} + \bar{R}_{\varepsilon_0 э} - \bar{P}_э = 0,$$

где

$$[K]_э = \iint\limits_{F_э} \big([A][N]\big)^T [D]\big([A][N]\big)\, dx\, dy, \tag{12}$$

$$\bar{R}_{\varepsilon_0 э} = -\iint\limits_{F_э} E_y^*(W)\big([A][N]\big)^T [D]\bar{\beta}(W)\psi(W)\, dx\, dy, \tag{13}$$

$$\bar{R}_{\rho э} = -\iint\limits_{F_э} [N]^T \bar{\rho}\, dx\, dy. \tag{14}$$

Для всей области после суммирования вкладов отдельных элементов, имеем:

$$[K]\bar{\delta} + \bar{R}_\rho + \bar{R}_{\varepsilon_0} - \bar{P} = 0. \tag{15}$$

После удовлетворения граничным условиям из этой системы линейных алгебраических уравнений определяется итоговый вектор узловых перемещений $\bar{\delta}$, с помощью которого находятся характеристики напряженно-деформированного состояния области по обычным формулам метода конечных элементов.

Литература

1. *Тер-Мартиросян З. Г.* Механика грунтов.—М.: Изд-во АСВ, 2005.—488 с.
2. *Тер-Мартиросян З. Г.* Прогноз механических процессов в массивах многофазных грунтов.—М.: Недра, 1986.—292 с.
3. *Тедеев Т. Р., Арунянц Г. Г.* Методология и алгоритмы расчета полей влажности в задачах проектирования грунтовых сооружений.—Владикавказ: Терек, 2005.—203 с.
4. *Александров А. В., Потапов В. Д.* Основы теории упругости и пластичности.—М.: Высшая школа, 1990.—400 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 315–317.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В КОЛЬЦЕВЫХ ОБЛАСТЯХ

А. В. Трофимова, В. Г. Цибулин
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Для исследования гравитационной конвекции несжимаемой жидкости в пористых кольцевых областях развит метод расчета конвективных движений на основе уравнений в естественных переменных (скорость, давление, температура). Изучено ответвление семейства стационарных режимов для кольцевых сегментов, подогреваемых снизу, и исследованы переходы, связанные с возникновением неустойчивости на семействе при росте числа Рэлея.

Постановка задачи. Рассматривается плоская задача фильтрационной конвекции на основе уравнений Дарси в безразмерных переменных:

$$\dot{\theta} = \Delta\theta - J(\theta, u, v) + G(u, v), \quad \partial_r(ru) + \partial_\varphi v = 0, \tag{1}$$

$$0 = -\partial_r p - u + \lambda\,\theta\cos\varphi, \quad 0 = -\frac{1}{r}\partial_\varphi p - v - \lambda\,\theta\sin\varphi, \tag{2}$$

$$u\big|_{\partial D_1} = 0, \quad v\big|_{\partial D_2} = 0, \quad \theta\big|_{\partial D_1 \cup \partial D_2} = 0, \tag{3}$$

$$\theta\big|_{t=0} = \theta^{\,0}(r, \varphi). \tag{4}$$

$$J(\theta, u, v) = u\,\partial_r\theta + \frac{v}{r}\,\partial_\varphi\theta, \quad G(u, v) = u\cos\varphi - v\sin\varphi. \tag{5}$$

Здесь $\theta(r, \varphi, t)$ — отклонение температуры от равновесного профиля, $u(r, \varphi, t)$, $v(r, \varphi, t)$ — радиальная и азимутальная компоненты скорости, $p\,(r, \varphi, t)$ — давление, отсчитываемое от гидростатического, λ — фильтрационное число Рэлея. Задача исследуется в кольцевом сегменте $D = [R_1, R_2] \times [\Phi_1, \Phi_2]$, через ∂D_1 обозначены верхняя и нижняя границы области, а через ∂D_2 — боковые границы.

Метод численного решения. Для численного решения задачи (1)–(4) используется схема смещенных сеток. Вводится основная сетка $r_i = R_1 + ih_r$, $i = 1, \ldots, N$, $h_r = (R_2 - R_1)/(N+1)$, $\varphi_j = \Phi_1 + jh_\varphi$,

$j = 1, \ldots, M$, $h_\varphi = (\varPhi_2 - \varPhi_1)/(M+1)$, в узлах которой определяется температура, и смещенные узлы $r_{i-1/2} = R_1 + (i - 1/2)h_r$, $i = 1, \ldots, n+1$, $\varphi_{j-1/2} = \varPhi_1 + (j - 1/2)h_\varphi$, $j = 1, \ldots, m+1$, для вычисления давления $p_{i-1/2,j-1/2}$ и скоростей $u_{i,j-1/2}$, $v_{i-1/2,j}$. С использованием операторов первых разностных производных и вычисления среднего на двух-, трех- и четырехточечных шаблонах [1, 2] записывается конечно-разностная схема исходной задачи:

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}_{i,j} &= \Delta_h \theta_{i,j} - J_{i,j}(\theta, u, v) + G_{i,j}(u, v),\\
0 &= \bigl(- \delta_1 p - u + \lambda\theta\cos\varphi\bigr)_{i,j+1/2},\\
0 &= \left(-\frac{1}{r}\,\delta_2 p - v - \lambda\theta\sin\varphi\right)_{i+1/2,j},\\
0 &= \bigl[\delta_1(ru) + \delta_2 v\bigr]_{i+1/2,j+1/2},
\end{aligned}
$$

где $J_{i,j}(\theta, u, v)$ есть аппроксимация конвективного слагаемого аналогично формуле Аракавы, Δ_h — разностный аналог лапласиана, δ_1 и δ_2 — сеточные производные на двухточечных шаблонах.

Результаты численного эксперимента. Семейства конвективных режимов были рассчитаны для ряда кольцевых сегментов с $R_1 = 1$, $R_2 = 2$. Результаты вычислений критических чисел Рэлея, при которых механическое равновесие теряет устойчивость и ответвляется семейство стационарных движений (λ_{cr}) и при которых на семействе впервые появляются неустойчивые стационарные режимы (λ_*), представлены в таблице.

$[\varPhi_1, \varPhi_2]$	Сетка	λ_{cr}/λ_*	Количество валов
$[15\pi/16, 17\pi/16]$	16×18	$155/330$	от двух до трех
$[7\pi/8, 9\pi/8]$	16×24	$70/380$	от двух до пяти
$[\pi/2, 3\pi/2]$	16×48	$42/97$	от трех до шести

В зависимости от величины кольцевого сегмента реализуются разнообразные конвективные движения с числом валов от двух до шести (см. последний столбец таблицы). Во втором столбце таблицы указаны параметры сеток (количество внутренних узлов), на которых проводились вычисления.

Литература

1. *Karasözen B., Tsybulin V. G.* Mimetric discretization of two-dimensional Darcy convection // Comp. Phys. Comm.—2005.—Vol. 167, —P. 203–213.
2. *Трофимова А. В., Цибулин В. Г.* Расчет нестационарной конвекции в пористой кольцевой области // Соврем. пробл. МСС. Тр. XII межд. конф. Ч. 2.—2008.—С. 188–192.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 318–319.

ВЫНУЖДЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДВЕСНОЙ ЧАСТИ СТИРАЛЬНОЙ МАШИНЫ

И. В. Фетисов (Россия, Москва; ООО «Пневмакс», ЮРГУЭС),
В. Г. Фетисов (Россия, Шахты; ЮРГУЭС, ЮМИ)

Исследуется асимптотика процесса колебаний подвесной части стиральной машины при внешних случайных воздействиях. Большинство математических моделей, описывающих поведение подвесного блока стиральной машины барабанного типа, основано на предположении о детерминированном внешнем воздействии на неуравновешенный ротор блока и постоянстве параметров в рассматриваемой динамической системе. Решение же актуальной задачи о случайных вынужденных колебаниях подвесной части, ее устойчивого состояния, обусловленных изменением пространственных координат центра масс изделий при отжиме, учета крепления упругих элементов и демпферов, их ориентации в пространстве, коэффициентов жесткости и диссипации, вариации эксцентриситета, все еще далеко от завершения.

Целью доклада является решение и проверка его адекватности для слабо связанной системы дифференциальных уравнений, описывающих вынужденные колебания неуравновешенного ротора в подвесной части стиральной машины барабанного типа и его устойчивого состояния при случайных внешних воздействиях, учитывающих изменение эксцентриситета центра масс отжимаемых изделий.

Механические системы, нагруженные случайными возмущениями, имеют широкое применение в технике, например, в амортизаторах систем виброзащиты приборов, машин, конструкций. Решение нелинейных задач динамики, как правило, связано с большими трудностями. Как известно, получить решение нелинейного уравнения общего вида в аналитической форме (даже для наиболее простого уравнения второго порядка) нельзя, не говоря уже о решении системы нелинейных уравнений движения механических систем, нагруженных детерминированными или случайными силами.

Еще сравнительно недавно считалось, что при детерминированных нагрузках решение нелинейных уравнений является детерминированным, а при случайных нагрузках — случайным. Исследования в области нелинейной динамики, которые проводились в последние годы с использованием вычислительной техники, позволили установить новые физические явления, казавшиеся ранее просто невозможными в рамках традиционной нелинейной механики. Было установлено, что в детерминированной нелинейной системе возможны хаотические (непредсказуемые) движения, т. е. нелинейные системы без внешних случайных воздействий могут сами являться генераторами случайных процессов.

В настоящем докладе нами рассматривается один из методов, позволяющих изучить поведение общего решения исходной системы «в целом» без перехода к одному ЛОДУ, решение которого приводит, как правило, к утомительным в вычислительном отношении процедурам, не всегда корректным (точнее говоря, являющимися плохо обусловленными). Учитывая вышеупомянутые соображения, в докладе рассматривается система, описывающая покоординатные вынужденные случайные колебания с вынуждающими силами, представляющими эргодические случайные процессы, в которых переменные состояния разделены.

Целесообразно упомянуть, что авторским коллективом разработан и используется действующий экспериментальный стенд, на котором в течение ряда лет проводятся экспериментальные исследования в реальных условиях функционирования стиральных машин барабанного типа с целью контрольной проверки адекватности полученных вероятностных характеристик процесса колебаний подвесного блока при случайных воздействиях на блок и эмпирических данных, а также оптимизации параметров подвесного блока при решении основной задачи снижения его виброактивности.

Литература

1. *Блехман И. И.* Вибрационная механика.—М.: Физматлит, 1994.—400 с.
2. Вибрации в технике (справочник в 6-ти томах). Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / под ред. И. И. Блехмана.—М.: Машиностроение, 1979.—351 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 320–321.

О СВОЙСТВАХ КРИВИЗНЫ РИЧЧИ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК НА РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ЛИ[1]

М. С. Чебарыков (Россия, Рубцовск; РИИ АГТУ)

Одной из важных проблем теории однородных римановых многообразий является задача определения возможных значений сигнатуры кривизны Риччи инвариантных метрик на заданном однородном пространстве.

Хорошо известен ряд принципиальных результатов в этом направлении, в частности, сформулированная задача полностью решена для однородных пространств размерности $\leqslant 4$ (см. работы [1, 2] и процитированные в них источники). Например, Дж. Милнор в работе [3] определил возможные сигнатуры оператора Риччи левоинвариантных римановых метрик на всех группах Ли размерности $\leqslant 3$. В статьях [1] и [2] А. Г. Кремлев и Ю. Г. Никоноров получили аналогичный результат для групп Ли размерности 4.

Исследование левоинвариантных римановых метрик на группах Ли удобно производить в терминах метрических алгебр Ли, чем мы и пользуемся.

Авторы работы [2] показали, в частности, что оператор Риччи произвольной неунимодулярной разрешимой метрической алгебры Ли размерности $\leqslant 4$ имеет как минимум два отрицательных собственных значения. В этой же работе была выдвинута гипотеза о том, что тем же свойством обладает оператор Риччи неунимодулярной разрешимой метрической алгебры Ли *произвольной размерности.* Настоящая работа посвящена частичному подтверждению этой гипотезы, а именно, справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{s}$ — неунимодулярная разрешимая алгебра Ли, имеет производную алгебру $\mathfrak{n} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ размерности $\leqslant 5$. Тогда для произвольного скалярного произведения Q на $\mathfrak{s}$ оператор Риччи*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., государственный контракт № 02.740.11.0457.

метрической алгебры Ли $(\mathfrak{s}, Q)$ имеет по крайней мере два отрицательных собственных значения.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{s}$ — неунимодулярная разрешимая алгебра Ли размерности $\leqslant 6$. Тогда для произвольного скалярного произведения Q на $\mathfrak{s}$ оператор Риччи метрической алгебры Ли $(\mathfrak{s}, Q)$ имеет по крайней мере два отрицательных собственных значения.*

Заметим, что во многих случаях, если производная алгебра $\mathfrak{n}$ неунимодулярной разрешимой метрической алгебры Ли $\mathfrak{s}$ является двухступенчатой нильпотентной, то оператор Риччи неунимодулярной алгебры $\mathfrak{s}$ тоже имеет как минимум два отрицательных собственных значения. Это верно, например, если алгебра $\mathfrak{n}$ имеет центр размерности 1 или является алгеброй Гейзенберга. Есть основания полагать, что это утверждение может быть доказано для любой неунимодулярной разрешимой метрической алгебры Ли, имеющей производную двухступенчатую нильпотентную алгебру.

Литература

1. *Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. тр.—2008.—Т. 11, № 2.—С. 147–155.
2. *Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. тр.—2009.—Т. 12, № 1.—С. 40–116.
3. *Milnor J.* Curvature of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math.—1976.—Vol. 21.—P. 293–329.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. международной научной конференции, 2010. С. 322–323.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ БРУСА ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ[1]

Н. Ю. Шубчинская (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
М. И. Карякин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

На основе полуобратного представления, описывающего изгибание прямоугольника в сектор кругового кольца, изучена задача о равновесии и устойчивости бруса при чистом изгибе. Рассмотренное преобразование является одной из хорошо известных универсальных деформаций для несжимаемых сред; в настоящей работе рассмотрен случай сжимаемых материалов. Интерес к подобным проблемам связан, прежде всего, с тем, что деформация чистого изгиба является одной из базовых в экспериментальном определении и верификации параметров модели упругого, в частности — нелинейно-упругого, поведения материалов. Такая верификация представляется особенно актуальной в связи с необходимостью разрабатывать адекватные модели механического поведения биоматериалов и их искусственных заменителей из высокоэластичных материалов. Задача о потере устойчивости при изгибе в рамках нелинейной теории упругости может представлять интерес и для тестирования различных теорий и численных схем исследования устойчивости упругих труб, основывающихся, как правило, на различных вариантах теории оболочек.

Для описания нелинейно-упругих свойств среды в работе использованы нелинейной теории упругости: модель полулинейного материала, модель материала Блейтца и Ко, модель Адамара и сжимаемый вариант материала Муни. Для всех моделей анализ сводился к исследованию краевой задачи для нелинейного (в общем случае) дифференциального уравнения второго порядка для функции, описывающей радиус точки в деформированном состоянии. Рассмотрен ряд частных случаев, когда решение этого уравнения удается построить аналитически. В общем случае представлены результаты численного анализа нелинейной краевой задачи. Установлено, что диаграмма изгиба (график зависимости изгибающего момента от угла

[1]Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг, государственный контракт № П–361.

раствора сектора деформированного прямоугольника) имеет точку максимума, за которой следует падающий участок. Это свидетельствует о неустойчивости прямоугольника при больших углах изгиба.

Для изучения устойчивости использован бифуркационный подход, основанный на линеаризации уравнений равновесия в окрестности состояния, соответствующего конечному изгибу. Поиск точек бифуркации при этом основывается на анализе линейной однородной краевой задачи четвертого порядка, переменные коэффициенты которой зависят от найденной на первом этапе анализа функции радиального смещения точек бруса. В работе обсуждаются вопросы, связанные с расположением точек бифуркации на диаграмме нагружения, а также с влиянием геометрических и материальных параметров на возможность потери устойчивости при изгибе.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

İKU — İstanbul Kültür University
METU — Middle East Technical University
PMRC QUB — Pure Mathematics Research Centre Queen's University of Belfast
АлтГПА — Алтайская государственная педагогическая академия
АлтГУ — Алтайский государственный университет
БашГУ — Башкирский государственный университет
ВГТУ — Воронежский государственный технический университет
ВГУ — ГОУ ВПО «Воронежский государственный университет»
ВИ МВД — Воронежский институт МВД России
ВИС ЮРГУЭС — Волгодонский институт сервиса (филиал) Южно-Российского госуниверситета экономики и сервиса
ДГТУ — Донской государственный технический университет
ДГУ — Дагестанский государственный университет
ДНЦ РАН — Учреждение Российской академии наук Дагестанский научный центр Российской академии наук
ИМВЦ УфНЦ РАН — Институт математики с Вычислительным центром Уфимского научного центра РАН
ИМИТ АН РУз — Институт математики и информационных технологий Академии наук Республики Узбекистан
ИЯФ АН РУз — Институт ядерной физики АН РУз
КБГУ — Кабардино-Балкарский государственный университет
КЧГУ — Карачаево-Черкесский государственный университет
МАДИ-ГТУ — Московский автодорожный институт — ГТУ
МАТИ-РГТУ — Московский авиационно-технологический институт — РГТУ им. К. Э. Циолковского
МИРЭА — Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики
НИИ ПМА КБНЦ РАН — Учреждение Российской академии наук Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
НИИММ — Научно исследовательский институт математики и механики им. Н. Г. Чеботарева
НИЯУ МИФИ — Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
НУУз — Национальный университет Узбекистана
ПГУ — Пермский государственный университет (ПермГУ)
РВИРВ — ГОУ ВПО «Ростовский военный институт ракетных войск

им. Главного маршала артиллерии М. И. Неделина»
РГУПС — Ростовский государственный университет путей сообщения
РГЭУ (РИНХ) — Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)
РИИ АГТУ — Рубцовский индустриальный институт (филиал) Алтайского государственного технического университета им. Ползунова И. И.
РУДН — Российский университет дружбы народов
СГУ — Ставропольский государственный университет (СтавГУ)
СОГУ — ГОУ ВПО «Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова»
СумГУ — Сумской государственный университет
ТАИ — Ташкентский автодорожный институт
ТГГПУ — Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет
ТГПУ — Таганрогский государственный педагогический институт
ТИИЖТ — Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта
ТПИ — Ташкентский педагогический институт
ТТИ ЮФУ — Таганрогский технологический институт ЮФУ
УГАТУ — Уфимский государственный авиационный технический университет
УдГУ — Удмуртский государственный университет
ЦГИ — Учреждение Российской академии наук Центр геофизических исследований Владикавказского научного центра РАН и РСО-А
ЧГУ — Чеченский государственный университет
ЮМИ — Учреждение Российской академии наук Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
ЮНЦ РАН — Учреждение Российской академии наук Южный научный центр РАН
ЮРГТУ (НПИ) — Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт)
ЮРГТУ (НПУ) — Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт)
ЮРГУЭС — Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса
ЮФУ — ГОУ ВПО «Южный федеральный университет».