ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ВЛАДИКАВКАЗСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК И ПРАВИТЕЛЬСТВА РЕСПУБЛИКИ
СЕВЕРНАЯ ОСЕТИЯ-АЛАНИЯ

ПОРЯДКОВЫЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ:

тезисы докладов
международной научной конференции
(Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

Владикавказ
2013

ББК 22.16+
УДК 517 + 519.372.8

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2013.—252 с.

Сборник содержит тезисы докладов Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.), которая проведена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-06818-мол_г.

ISBN 978-5-904695-18-7

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

СЕКЦИЯ I
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

СЕКЦИЯ II
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

СЕКЦИЯ III
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

СЕКЦИЯ IV
СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Пленарные доклады

ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

А. В. Абанин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Весовые пространства голоморфных функций играют важную роль в задачах разрешимости различных функциональных уравнений (в том числе, уравнений в частных производных и свертки), в анализе Фурье, теории роста целых функций, в других разделах математики и ее приложений [1, 2]. Их изучению и использованию посвящено значительное число работ. Основная проблема, которая, явно или неявно, в них решается, состоит в получении результатов в терминах весов, задающих пространства.

В докладе будет представлен обзор новых методов исследования данной проблемы, позволяющих достичь существенных продвижений по ряду направлений и получить по ним результаты завершенного характера (см., в частности, [3–5]). Будут сформулированы главные, по мнению автора доклада, открытые проблемы структурной теории весовых пространств голоморфных функций и указаны возможные пути их решения.

Литература

1. *Bierstedt K. D., Bonet J., Taskinen J.* Associated weights and spaces of holomorphic functions // Studia Math.—1998.—Vol. 127.—P. 137–168.
2. *Bierstedt K. D.* A survey on some results and open problems in weighted inductive limits and projective description for spaces of holomorphic functions // Bull. Soc. Roy. Sci. Liége.—2001.—Vol. 70.—P. 167–182.
3. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Convolution operators in $A^{-\infty}$ for convex domains // Ark. Mat.—2012.—Vol. 50.—P. 1–22.
4. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Painlevè null sets, dimension and compact embedding of weighted holomorphic spaces // Studia Math.—2012.—Vol. 213.—P. 169–187.
5. *Абанин А. В., Варзиев В. А.* Достаточные множества в весовых пространствах Фреше целых функций // Сиб. мат. журн.—2013.—Т. 54, № 4.—(В печати).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения № 14.A18.21.0356 и № 8210, а также гранта ЮФУ «Весовые пространства бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций. Общая теория и приложения».

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПУЛЬСОВОГО ДВИЖЕНИЯ КРОВИ В АРТЕРИАЛЬНЫХ СОСУДАХ

В. А. Батищев (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Ю. А. Устинов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
А. А. Поддубный (Россия, Ростов-на-Дону; НИИМиПМ)

Доклад посвящен краткому обзору результатов, полученных авторами, в области математического моделирования спиральных течений в крупных и периферийных артериальных сосудах, а также моделированию кровотока в области стенозов для оценки влияния геометрических размеров и форм стенозов (сужений сосудов) на энергетические потери пульсовой волны.

Выделено два типа спиральных волновых движений крови.

Первый тип — волны, локализованные в окрестности стенки сосуда. Для их описания стенка сосуда моделируется тонкой оболочкой, упругие свойства которой обладают винтовой анизотропией, порождаемой спиральным распределением мышечных волокон в медии. Кровь моделируется вязкой несжимаемой жидкостью, движение которой описывается линейными уравнениями Навье — Стокса. На основе проведенных исследований выделено три типа волн: квази-продольные, квази-крутильные и волны давления. Этот тип волн достаточно подробно описан в ряде публикации одного из авторов и, в частности, результаты исследований докладывались на аналогичной конференции в 2008 г.

В настоящем докладе анонсируется математическая модель движения крови в толстенных сосудах мышечного типа, обладающих винтовой анизотропией. К этому классу, в частности, относится плечевая артерия и большинство периферийных артериальных сосудов. В предлагаемой математической модели квази-продольные и квази-крутильные волны стенки сосуда описываются системой двух дифференциальных уравнений гиперболического типа, которые вытекают из асимптотического анализа трехмерных уравнений теории упругости, описывающих динамические процессы в полом толстостенном упругом цилиндре с учетом винтовой анизотропии его стенки. Движение крови по-прежнему описывается линейными уравнениями Навье — Стокса, а взаимодействие между стеной сосуда и кровью — условием прилипания. Волна давления в данной модели описывается классическим уравнением Гельмгольца, а ее скорость определяется из решения задачи Ляме для полого цилиндра с винтовой анизотропией, которое позволяет определить жесткость цилиндра на «раздутие» при воздействии на него внутреннего гидростатического давления.

Второй тип спиральных волн возникает на входе в аорту и порождается, судя по всему, гофрированной структурой стенки левого желудочка во время систолы. Для описания этого типа волн стенка сосуда рассматривается как тонкостенная анизотропная оболочка, а движение крови исследуется на основе асимптотического анализа нелинейных уравнений Навье — Стокса. Как показали расчеты, длины внутренних волн существенно меньше длин пристеночных волн, а механизмом их переноса является стационарная часть потока, при этом волновые числа и декременты затухания внутренних спиральных волн убывают с ростом средней скорости стационарного потока.

Известно, что стенозы могут существенно изменять гемодинамику, что в свою очередь может привести к образованию тромбов. Исследования влияния сужения сосуда на энергетические характеристики потока на отрезке времени равному периоду сердечного цикла проводилось на основе обобщенного уравнения Громека, описывающей распространение волны давления

$$\partial_z \left(c^2(z)\partial_z p\right) - \partial_t^2 p = 0. \tag{1}$$

Здесь ∂_z, ∂_t — частные производные по осевой координате z и времени t, $c(z)$ — фазовая скорость волны давления.

В качестве характеристики потерь при прохождении сужений сосуда было выбрано изменение вектора Пойнтинга — Умова. Расчеты были проведены для двух типов сужений сосуда — скачкообразного и параболического, а также для двух последовательных цилиндрических сужений.

A GEOMETRIC CHARACTERIZATION OF ALGEBRA HOMOMORPHISMS ON BIRKHOFF-PIERCE FUNCTION ALGEBRAS

M. A. Ben Amor (Tunisia, Tunis; IPEST)

An Archimedean semiprime f-algebra A for which

$$I_A \wedge f \in A \quad \text{for all} \quad f \in A$$

is called a Stone f-algebra, where I_A is the identity operator on A. Moreover, an operator T between two Stone f-algebras A and B is said to be contractive if

$$f \in A \quad \text{and} \quad 0 \leqslant f \leqslant I_A \quad \text{imply} \quad 0 \leqslant Tf \leqslant I_B.$$

The set $\mathcal{K}\,(A, B)$ of all positive contractive operators from A into B is a convex set. This paper characterizes extreme points in $\mathcal{K}\,(A, B)$. In this regard, we prove that $T \in \mathcal{K}\,(A, B)$ is extreme if and only if T is an algebra homomorphism. Furthermore, we show that $T \in \mathcal{K}\,(A, B)$ is extreme if and only if T is a Stone operator, meaning that,

$$T\,(I_A \wedge f) = I_B \wedge Tf \quad \text{for all} \quad f \in A.$$

These extend previous results by Huijsmans and de Pagter whom studied the unital case.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ В КОЛМОГОРОВСКОЙ ШКОЛЕ

В. В. Вавилов (Россия, Москва; СУНЦ МГУ)

Имена классиков, которые фигурируют в самом названии статьи, столь значимы для России и становления системы научных исследований, организации среднего и высшего образования, что ко многому обязывают. Оба люди универсальных знаний, ученые — энциклопедисты, патриоты и гуманисты. Те семена, которые за два века до А. Н. Колмогорова посеял М. В. Ломоносов, взошли именно в Московском университете, основной традицией которого стал отбор талантов, создание условий для их развития, непосредственное участие в этом широкой научной общественности. Одно из самых плодотворных зерен, — создание гимназии при Московском университете. М. В. Ломоносов так говорил об этом: «При университетах должна быть гимназия, без которой университет как пашня без семени. Здесь следует преподавать школьные предметы так, чтобы вышедшие оттуда должны быть способны приступить к занятиям высшего порядка в университетах». Это зерно вновь взошло и заколосилось, когда по инициативе ведущих ученых страны — академиков А. Н. Колмогорова, И. К. Кикоина, И. Г. Петровского и при поддержке Академии наук в лице М. В. Келдыша в 1963 г. при МГУ была создана физико-математическая школа-интернат. В 1988 г. на базе школы-интерната был организован Специализированный учебно-научный центр МГУ (куда вошла и школа), который стал самостоятельным структурным подразделением Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова со всеми его атрибутами. Сама школа-интернат получила официальное название — школа имени академика А. Н. Колмогорова. Она обучает юношей и девушек из разных регионов страны, которые любят учиться и уже проявили стойкий интерес к углубленному изучению той или иной дисциплины [1–3].

В докладе речь идет только об одной составляющей работы математического коллектива преподавателей школы — о математическом практикуме (МП), об его конкретных заданиях и некоторых методических вопросах с ними связанных. Это А. Н. Колмогоров, со всей настойчивостью, реализовал сначала в университете, а затем и в школе при МГУ такое нововведение в нашей стране. Он сам и руководил, поначалу, этими практикумами, сам придумывал новые постановки задач, используя часто самые современные научные достижения. Именно эта конкретная и вычислительная работа (плюс постановка задач) при выполнении заданий математического практикума не на словах, а на деле показывает силу математических методов исследований в различных областях человеческой деятельности, осуществляет прикладную составляющую математического образования в школе и реализует межпредметные связи. Общие установки при создании математического практикума в школе А. Н. Колмогоров в предисловии к одной из книг о математике в нашей школе описывал так: «Часы математического практикума, проводящегося, в идеале, одновременно для всего потока (в школе имелся тогда только физико-математический профиль; классы делились на потоки — в них работала одна группа преподавателей математики — курсив автора статьи), используются частично для унификации требований к различным классам письменных работ, состоящих из серии задач обычного школьного типа. Но в основном эти часы отводятся для выполнения работ большого объема, требующих больших вычислений и чертежного оформления. Например, фактически осуществляется программа оценки числа Пи, после изучения в классе движения по циклоиде исследуются графически более сложные случаи сложения движений, находятся и изображаются графически системы дифференциальных уравнений последовательного радиоактивного распада... В проведении практикума участвуют преподаватели, работающие в классах, но отдельная небольшая группа преподавателей его организует и готовит для него материал [3].

Задания практикума состоят из одной или нескольких ступеней: от очень конкретной до исследовательской. Начальная часть обязательна для всех учащихся, исследование — только для желающих; задания иногда содержат темы творческого характера для проведения самостоятельных исследований. Довольно значительный промежуток времени в учебном плане школы был отдельный предмет (1970–1988), который так и назывался «Математический практикум» (и оценка за него заносилась в аттестат). Сейчас МП не организован в единую схему преподавания математики и проходит в рамках изучения математических дисциплин, но в планах концепции развития системы математического образования Колмогоровской школы одну из центральных позиций занимает вопрос о придании этой учебной форме обучения современного звучания и еҷ реализации.

В докладе будут описаны задания практикумов, которые упоминает А. Н. Колмогоров в предисловии к книге [3], и о некоторых других.

Литература

1. *Вавилов В. В.* Школа математического творчества.—М.: РОХОС, 2004.—72 с.
2. *Колмогоров А. Н.* Математика — наука и профессия.—М.: Наука, 1988.—288 с.
3. *Колмогоров А. Н., Гусев В. А., Сосинский А. Б., Шершевский А. А.* Курс математики для физико-математических школ.—М.: Изд-во МГУ, 1971.—223 с.

МОДЕЛИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И ПРИНЦИПЫ ЕГО ИДЕНТИФИКАЦИИ[1]

Ватульян А. О. (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Недин Р. Д. (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Предварительные напряжения (ПН) существуют в теле при отсутствии внешних воздействий. Как правило, предварительное напряженное состояние (ПНС) возникает в теле либо в процессе технологической обработки (особенно сварки, прокатки и термообработки), либо является результатом действия нагрузок при упругом или вязкоупругом деформировании и может достигать больших значений. Одним из важнейших направлений развития современных методик численного моделирования ПН (особенно МКЭ) является выбор наиболее адекватной теоретической модели ПН для постановки и решения конкретных практических задач, в том числе и идентификации. В настоящее время для определения ПН, описывающих напряженное состояние в текущей конфигурации, необходимо решать некоторые коэффициентные обратные задачи, в которых дополнительной информацией является информация о полях смещений или компонентах деформаций на границе тела.

В настоящей работе описаны основные теоретические модели ПН, используемые в настоящее время в зарубежной и отечественной литературе и отличающиеся друг от друга видом определяющего соотношения, связывающего симметричный тензор предварительных напряжений с несимметричным тензором напряжений Пиолы. Построено определяющее соотношение для линейного упругого тела на основе классического способа наложения малых деформаций на конечные.Построены краевые задачи для операторов с переменными коэффициентами для определения полей смещений при установившихся колебаниях. Осуществлено сравнение решений задач о продольных и изгибных колебаниях балок для каждой из рассмотренных моделей ПН. С помощью метода конечных элементов проведено численное сравнение решений для пластин при наличии ПН. Осуществлен анализ влияния компонент ПН на динамические характеристики (амплитудно-частотные характеристики и на спектр собственных частот) пластин.

В рамках модели ПН, предложенной В. В. Новожиловым, А. Н. Гузем [1], Л. Робертсоном и др., рассмотрена обратная задача об идентификации плоского неоднородного поля ПН в тонкой пластине, характеризующегося тремя компонентами тензора ПН, на основе метода акустического зондирования; исследованы краевые задачи для планарных и изгибных колебаний пластины. Предложен способ решения обратной задачи о восстановлении переменных компонент ПН на основе разбиения плоской области сечения пластины на элементы, на каждом

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00196.

из которых компоненты ПН выражены через функции напряжений Эри, представленные в виде квадратичных полиномов; на основе интегрального уравнения для поправок построен итерационный процесс решения обратной задачи, на каждом шаге которого решается прямая задача с помощью МКЭ и плохо обусловленная система линейных алгебраических уравнений с помощью метода регуляризации Тихонова. Начальное приближение для компонент ПН искалось в классе линейных функций; в качестве начального приближения использовалось решение обратной задачи, получаемое методом, представленным в работе [2], основанном на проекционной схеме и аппроксимации бигармонической функции Эри во всей области пластины бигармоническими полиномами второй и третьей степени. Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции различных двухмерных законов неоднородных ПН для планарного и изгибного режима колебаний пластины; проведена оценка различных типов зондирующего нагружения пластины с точки зрения влияния на точность решения обратной задачи.

Литература

1. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях.—Киев: Наукова Думка, 1973.—271 с.
2. *Nedin R., Vatulyan A.* Concerning one approach to the reconstruction of heterogeneous residual stress in plate // Z. Angew. Math. Mech.—2013.—DOI: 10.1002/zamm.201200195.

НЕСТАНДАРТНЫЕ ОБОЛОЧКИ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Э. Ю. Емельянов (Турция, Анкара; METU)

Нестандартные оболочки нормированных пространств, введенные В. Люксембургом в конце 60-х гг. прошлого века, оказались весьма эффективным инструментом в задачах функционального анализа и теории операторов (см., например, [1, 2]). В работах автора [3, 4] (см. также [5]) были введены и исследованы регулярные и порядковые нестандартные оболочки векторных решеток. В недавней работе [6] было положено начало изучению возможности переноса техники бесконечно малых [5] с векторных решеток на произвольные полуупорядоченные пространства. В настоящем докладе введены и исследованы два типа нестандартых оболочек полуупорядоченных пространств. Это регулярная оболочка, являющаяся фактором пространства порядково-финитных элементов нестандартного расширения полуупорядоченного пространства по пространству равномерно бесконечно малых, и порядковая оболочка, являющаяся фактором порядково-финитных элементов по пространству порядково бесконечно малых.

Литература

1. *Альбеверио С., Фенстад Й., Хеэг-Крон Р., Линдстрем Т.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике.—М.: Мир, 1990.—616 с.
2. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.—344 с.
3. *Емельянов Э. Ю.* Нестандартые оболочки векторных решеток // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 1.—С. 83–95.
4. *Емельянов Э. Ю.* Порядковые и регулярные оболочки векторных решеток // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 6.—С. 1243–1252.
5. *Emel'yanov E. Yu.* Infinitesimals in vector lattices // Nonstandard Analysis and Vector Lattices.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000.—P. 161–230.
6. *Emel'yanov E. Yu.* Infinitesimals in ordered vector spaces // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, № 1.—С. 18–22.

О РАЗРЕШИМОСТИ САМОСОПРЯЖЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ГРАФЕ

М. Г. Завгородний (Россия, Воронеж; ВГУ),
С. П. Майорова (Россия, Воронеж; ВГУ)

В докладе обсуждаются вопросы однозначной разрешимости самосопряженных краевых задач на геометрическом графе.

Пусть Γ — геометрический граф, и $\mathfrak{I}$ — объединение всех его ребер. Пусть $q, f \in C(\mathfrak{I})$, $g \in C^1(\mathfrak{I})$, $\inf_{x\in\mathfrak{I}} g(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$ на $\mathfrak{I}$. На графе Γ рассмотрим краевую задачу (см. [1, 2]) для дифференциального уравнения второго порядка

$$-\big(g(x)u'(x)\big)' + q(x)u(x) = f(x) \tag{1}$$

при самосопряженных условиях общего вида

$$\begin{cases} u(a_\gamma) + \sum\limits_{\eta\in I_1^a} \alpha_{\gamma n}^a u(a_\eta) = 0, & \gamma \in I_0^a; \\ (gu')(a\gamma) - \sum\limits_{\eta\in I_0^a} \alpha_{\gamma n}^a (gu')(a_\eta) + \sum\limits_{\eta\in I_1^a} \alpha_{\gamma n}^a u(a_\eta) = 0, & \gamma \in I_1^a, \end{cases} \tag{2}$$

заданных в каждой вершине a графа Γ. Здесь $u(a_\gamma)$ — односторонний предел функции $u(x)$, вычисленный вдоль ребра $\gamma \in I_0^a$, I_0^a — множество ребер, инцидентных вершине a, $I_0^a = I_1^a \setminus I_0^a$ и $\alpha_{\gamma n}^a$ — константы, удовлетворяющие условиям $\alpha_{\gamma n}^a \alpha_{n\gamma}^a$ при $\gamma, n \in I_1^a$.

Лемма. *Если $q(x) \not\equiv 0$ на каждом ребре графа, то краевая задача* (1)–(2) *невырождена, т. е. однозначно разрешима для любой функции $f(x)$.*

Пусть $\mathfrak{I}_0 \in \mathfrak{I}$ — множество всех ребер, на которых $q(x) \equiv 0$, и n количество его элементов. Положим $J_k^a = I_k^a \cap \mathfrak{I}_0$, $k = 0, 1$. Для каждой вершины a составим матрицу $B^a = (\beta_{\gamma n}^a)_{\gamma\in I_0^a, \eta\in\mathfrak{I}_0}$, у которой блок $(\beta_{\gamma n}^a)_{\gamma,\eta\in\mathfrak{I}_0^a}$ является единичной матрицей, $\beta_{\gamma n}^a \alpha_{n\gamma}^a$ при $\gamma \in I^a$, $n \in J_1^a$, $\beta_{\gamma n}^a = 0$ при всех остальных γ и n. Из матриц B^a составим блочную матрицу-столбец $B = (B^a)$.

Теорема 1. *Краевая задача* (1)–(2) *невырождена тогда и только тогда, когда ранг матрицы B равен n.*

Аналогичные результаты получены для краевых задач старших порядков.

Литература

1. *Покорный Ю. В. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2007.—272 с.
2. *Завгородний М. Г., Майорова С. П.* Краевые задачи, описывающие процессы сетевых технических систем // Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложения.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2010.—С. 48–64.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 4).

A CLASSIFICATION OF INJECTIVE BANACH LATTICES[1]

A. G. Kusraev (Russia, Vladikavkaz; SMI)

The aim of this work is to give a complete isometric classification of injective Banach lattices. The proofs relay upon two key results: the concrete description of AL-spaces by means of the Maharam theorem on representation of Boolean algebras and the Boolean-valued transfer principle saying that every injective Banach lattice embeds into an appropriate Boolean-valued model, becoming an AL-space [1, 2].

A real Banach lattice X is said to be *injective* if, for every Banach lattice Y, every closed vector sublattice $Y_0 \subset Y$, and every positive linear operator $T_0 : Y_0 \to X$ there exists a positive linear extension $T : Y \to X$ with $\|T_0\| = \|T\|$. Equivalently, X is an injective Banach lattice if, whenever X is lattice isometrically imbedded into a Banach lattice Y, there exists a positive contractive projection from Y onto X.

This concept was first introduced Lotz [3]. Cartwright [4] characterized injective Banach lattices in terms of order intersection property. Haydon [5] discovered that a general injective Banach lattice has a mixed AM-AL-structure. The problem of isomorphic classification of injective Banach lattices was studied by Lindenstrauss and Tzafriri [6] and Manheni [7].

Lotz [3] proved among other things that a Dedekind complete AM-space with unit and an AL-space are injective Banach. We demonstrate that actually every injective Banach lattice can be constructed involving Dedekind complete AM-spaces with unit and AL-spaces making use of tensor product and direct sum type operations. In other words, Dedekind complete AM-spaces with unit (L^∞ spaces) and AL-spaces (L^1 spaces) are the 'building blocks' for any injective Banach lattice [8].

References

1. *Kusraev A. G.* Boolean Valued Analysis Approach to Injective Banach Lattices.—Vladikavkaz: South. Math. Inst. VSC RAS, 2011.—28 p.—(Preprint № 1).
2. *Kusraev A. G.* Boolean valued analysis and injective Banach lattices // Dokl. Ross. Akad. Nauk.—2012.—Vol. 444, № 2.—P. 143–145; Engl. transl.: Dokl. Math.—2012.—Vol. 85, № 3.—P. 341–343.
3. *Lotz H. P.* Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.—Vol. 211.—P. 85–100.
4. *Cartwright D. I.* Extension of positive operators between Banach lattices // Memoirs Amer. Math. Soc.—1975.—Vol. 164.—P. 1–48.
5. *Haydon R.* Injective Banach lattices // Math. Z.—1977.—Vol. 156.—P. 19–47.
6. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* On the isomorphic classification of injective Banach lattices // Advances Math.—1981.—Vol. 7B.—P. 489–498.
7. *Mangheni P. J.* The classification of injective Banach lattices // Israel J. Math.—1984.—Vol. 48.—P. 341–347.
8. *Kusraev A. G.* The classification of injective Banach lattices // Dokl. Ross. Akad. Nauk.—2013.—(To appear).

[1]The study was supported by The Ministry of education and science of Russian Federation, agreement 8210; by a grant from the Russian Foundation for Basic Research, project 12-01-00623-a.

ORDER ANALYSIS AND DECISION MAKING

S. S. Kutateladze (Russia, Novosibirsk; Sobolev Institute of Mathematics)

Analysis is a very old term of science with a long history stemming from Ancient Hellas. Moris Kline stated that the term was introduced by Theon of Alexandria (355–405 CE). Francois Viete used the term "analytic art" for algebra in 1591 in *In artem analyticem isagoge*. David Hilbert wrote that analysis is "the most aesthetic and delicately erected structure of mathematics" and called it "a symphony of the infinite."

Prevalence of one magnitude over the other is one of the earliest abstractions of humankind. In the modern mathematical parlance, the idea of transitive antisymmetric relation had preceded the concept of order.

Order and analysis were combined in the first third of the twentieth century which marked an important twist in the content of mathematics. Mathematical ideas imbued the humanitarian sphere and, primarily, politics, sociology, and economics. Social events are principally volatile and possess a high degree of uncertainty. Economic processes utilize a wide range of the admissible ways of production, organization, and management. The nature of nonunicity in economics transpires: The genuine interests of human beings cannot fail to be contradictory. The unique solution is an oxymoron in any nontrivial problem of economics which refers to the distribution of goods between a few agents. It is not by chance that the social sciences and instances of humanitarian mentality invoke the numerous hypotheses of the best organization of production and consumption, the most just and equitable social structure, the codices of rational behavior and moral conduct, etc.

The twentieth century became the age of freedom. Plurality and unicity were confronted as collectivism and individualism. Many particular phenomena of life and culture reflect their distinction. The dissolution of monarchism and tyranny was accompanied by the rise of parliamentarism and democracy. Quantum mechanics and Heisenberg's uncertainty incorporated plurality in physics. The waves of modernism in poetry and artistry should be also listed. Mankind had changed all valleys of residence and dream.

In mathematics the quest for plurality led to the abandonment of the overwhelming pressure of unicity and categoricity. The latter ideas were practically absent, at least minor, in Ancient Greece and sprang to life in the epoch of absolutism and christianity. G. Cantor (1845–1918) was a harbinger of mighty changes, claiming that "*Wesen* der *Mathematik* liegt gerade in ihrer *Freiheit*."

Decision making has become a science in the twentieth century. The presence of many contradictory conditions and conflicting interests is the main particularity of the social situations under control of today. Management by objectives is an exceptional instance of the stock of rather complicated humanitarian problems of goal agreement which has no candidates for a unique solution.

The extremal problems of optimizing several parameters simultaneously are collected nowadays under the auspices of *vector* or *multiobjective optimization*. Search for control in these circumstances is *multiple criteria decision making*. The mathematical apparatus of these areas of research is not rather sophisticated at present (see [1–3] and the references therein).

The today's research deals mostly with the concept of *Pareto optimality*. Consider a bunch of economic agents each of which intends to maximize his own income. The Pareto efficiency principle asserts that as an effective agreement of the conflicting goals it is reasonable to take any state in which nobody can increase his income in any way other than diminishing the income of at least one of the other fellow members. Formally speaking, this implies the search of maximal elements of the set comprising the tuples of incomes of the agents at every state; i.e., some vectors of a finite-dimensional arithmetic space endowed with the coordinatewise order. Clearly, the concept of Pareto optimality was already abstracted to arbitrary ordered vector spaces.

The variational principles of mechanics, precursors of variational calculus, served at least partly to justifying the Christian belief in the unicity and beauty of the act of creation. The extremal problems, generously populating all branches of mathematics, use only scalar targets. Problems with many objectives have become the topic of research rather recently and noticeably beyond mathematics, which explains the substantial gap between the levels of complexity and power of the mathematical tools available for single objective and multiple objective problems. This challenges the task of enriching the stock of vector optimization problems within the theoretical core of mathematics.

For the sake of simplicity, it stands to reason to start with the problems using the concept of Pareto optimality. The point is that each problem of the sort is in fact equivalent to a parametric family of single objective problems that can be inspected by the classical methods. For instance, there is a curve joining the Legendre and Chebyshev polynomials which consists of the polynomials "Pareto-optimal" with respect to the uniform and mean square metrics. Clearly, some physical processes admit description in terms of vector optimization. For instance, we may treat the Leidenfrost effect of evaporation of a liquid drop in the spheroidal state as the problem of simultaneous minimization of the surface area and the width of a drop of a given volume.

Under study in this article is the class of geometrically meaningful vector optimization problems whose solutions can be found explicitly to some extend in terms of conditions on surface area measures. As model examples we give explicit solutions of the Urysohn-type problems aggravated by the flattening condition or the requirement to optimize the convex hull of a few figures. Technically speaking, everything reduces to the parametric programming of isoperimetric type problems with many subsidiary constraints along the lines of the approach developed in [4]. We will pay a special attention to vector problems of the space of Minkowski balls as presented in [5].

References

1. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Subdifferentials: Theory and Applications.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.

2. *Figueira J., Greco S., Ehrgott M.* Multiple Criteria Decision Analysis. State of the Art Surveys.—Boston: Springer Science + Business Media Inc., 2005.
3. *Boţ R. I., Grad S-M., Wanka G.* Duality in Vector Optimization.—Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
4. *Kutateladze S. S.* Multiobjective Problems of Convex Geometry // Siberian Math. J.—2009.—Vol. 50, № 5.—P. 887–897.
5. *Kutateladze S. S.* Multiple Criteria Problems over Minkowski Balls // J. Appl. Indust. Math.—2013.—Vol. 7, № 2.—P. 208–214.

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ЗАДАЧИ. ПРИЛОЖЕНИЯ К ГИДРОДИНАМИКЕ[1]

В. Б. Левенштам (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных) с быстро осциллирующими по времени (высокочастотными) членами служат математическими моделями многих задач естествознания. Например, при изучении механических объектов (стержней, оболочек, сосудов с жидкостью и т. д.), подверженных высокочасотным вибрациям. Приближенное решение таких задач численными методами, как известно, связано с серьезными проблемами даже в случае самых современных компьютеров. В связи с этим на первый план здесь выходят асимптотические методы (обычно, в сочетании с численными). В докладе речь пойдет об асимптотическом интегрировании такого рода задач. Мы рассмотрим, в частности, линейные эвлюционные задачи с высокочастотными младшими членами и вырожденной стационарной главной частью. Здесь речь пойдет, например, о построении полной асимптотики периодического по времени решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с оператором Стокса в главной части. (Эта задача исследована совместно с аспирантом М. Р. Ишмеевым.) Рассмотрим и некоторые нелинейные задачи. Например, отметим результаты об асимптотическом интегрировании обобщенной задачи конвекции в выскочастотном силовом поле (получены совместно с аспиранткой Н. С. Ивлевой) и некоторые другие.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00402.

GEOMETRIC FLOWS ON HOMOGENEOUS SPACES[1]

Yu. G. Nikonorov (Russia, Vladikavkaz; SMI)

At first, we will discuss various types of geometric flows with some details related to the homogeneous case. Then we will consider some recent results on *the normilazed Ricci flow* on homogeneous spaces that are known as *generalized Wallach spaces* (see [4, p. 6346–6347] and [3]). Some of these results are published in very recent preprint [1], below we discuss some details.

The equation $\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}(t) = -2\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}} + 2\mathbf{g}(t)\frac{S_{\mathbf{g}}}{n}$ for the normalized Ricci flow on such (n-dimensional) spaces reduces to the system of ODE of the following type

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1,x_2,x_3), \quad \frac{dx_2}{dt} = g(x_1,x_2,x_3), \quad \frac{dx_3}{dt} = h(x_1,x_2,x_3), \tag{1}$$

where $x_i = x_i(t) > 0$, $i = 1,2,3$, are the parameters of invariant metrics,

$$f(x_1,x_2,x_3) = -1 - a_1x_1\left(\frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2}\right) + x_1B,$$

$$g(x_1,x_2,x_3) = -1 - a_2x_2\left(\frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3}\right) + x_2B,$$

$$h(x_1,x_2,x_3) = -1 - a_3x_3\left(\frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3}\right) + x_3B,$$

$B = \left(\frac{1}{a_1x_1} + \frac{1}{a_2x_2} + \frac{1}{a_3x_3} - \left(\frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_1x_3} + \frac{x_3}{x_1x_2}\right)\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)^{-1}$ and $a_i \in (0,1/2]$ are some real numbers. On the surface $V := x_1^{1/a_1}x_2^{1/a_2}x_3^{1/a_3} \equiv 1$ the system (1) is equivalent to the system of two differential equations of the type

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \widetilde{f}(x_1,x_2), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = \widetilde{g}(x_1,x_2), \tag{2}$$

where $\widetilde{f}(x_1,x_2) = f(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))$, $\widetilde{g}(x_1,x_2) = g(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))$, $\varphi(x_1,x_2) = x_1^{-\frac{a_3}{a_1}}x_2^{-\frac{a_3}{a_2}}$.

It is easy to see that the singular points of the system (1) are exactly Einstein invariant metrics on the generalized Wallach space under consideration. It is known [4], that every generalized Wallach space admits at least one Einstein invariant metric. Later in [2], a detailed study of invariant Einstein metrics was developed for all generalized Wallach spaces. In particular, it was proved that there are at most four Einstein metrics (up to homothety) for every such space.

[1]The project was supported in part by the State Maintenance Program for the Leading Scientific Schools of the Russian Federation (grant № NSh-921.2012.1) and by Federal Target Grant «Scientific and educational personnel of innovative Russia» for 2009–2013 (agreement № 8206, application № 2012-1.1-12-000-1003-014).

It should be noted that (x_1^0, x_2^0, x_3^0) is a singular point of the system (1) with $V = 1$ if and only if (x_1^0, x_2^0) is a singular point of (2). One of the main purpose of [1] is to determine the types of singularity of such points. The main result of [1] in this direction gives a qualitative answer for almost all points (in measure theoretic sense) $(a_1, a_2, a_3) \in (0, 1/2] \times (0, 1/2] \times (0, 1/2]$.

We will discuss also various interrelation of the systems (1) and (2) with other fields of mathematics.

References

1. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P.* The Ricci flow on generalized Wallach spaces.—2013.—arXiv: 1305.0440.—(Preprint).
2. *Firsov E. V., Lomshakov A. M., Nikonorov Yu. G.* Invariant Einstein metrics on three-locally-symmetric spaces // Sib. Adv. Math.—2004.—Vol. 14, № 3.—P. 43–62.
3. *Nikonorov Yu. G.* On a class of homogeneous compact Einstein manifolds // Sib. Math. J.—2000.—Vol. 41, № 1.—P. 168–172.
4. *Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavskii V. V.* Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // J. Math. Sci.—N. Y., 2007.—Vol. 146, № 7.—P. 6313–6390.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЯНГИАНА СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ ТИПА $A(n, n)$[1]

В. А. Стукопин (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ, ЮМИ)

1. Описание неприводимых представлений янгианов супералгебр Ли является важной задачей для теории точно-решаемых моделей статистической механики и квантовой теории поля. С точки зрения теории янгианов конструкция трансфер-матрицы основана на нахождении образа универсальной $R-$матрицы квантового дубля янгиана при действии тензорного произведения неприводимого представления и тождественного отображения [1]. Вычисление спектра гамильтониана и корреляционных функций также может быть проведено на основе теории представлений янгианов при использовании формулы для универсальной R-матрицы. Основным результатом данной работы является теорема о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана базисной супералгебры Ли типа $A(n, n)$ [4]. Классификация неприводимых представлений янгиана полной линейной алгебры $\mathfrak{gl}(m, n)$ получена ранее в работах [2]. Классификация конечномерных неприводимых представлений янгиана $Y(A(m, n))$, $m \neq n$, получена в работе [3].

2. Напомним определение супералгебры Ли $A(n, n)$. Это базисная супералгебра Ли, порождённая образующими $h_i, x_i^{\pm}, i \in \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n+1\}$. Система определяющих соотношений задачтся матрицей Картана.

Часто бывает удобнее использовать симметрическую матрицу Картана, элементы которой определяются следующими условиями: $a_{ii} = 2$, $i < m+1$, $a_{mm} = 0$, $a_{i,i} = -2$, $n+1 < i \leqslant 2n+1$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1$ для $i < n+1$, и $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$ для $i \geqslant n+1$. Все другие матричные элементы равны нулю.

Напомним определение янгиана $Y(A(n, n))$. Пусть $\mathfrak{g} = A(n, n)$.

Пусть $Y(\mathfrak{g})$ [5] супералгебра (над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел), порожденная образующими $h_{i,k}$, $x_{i,k}^{\pm}$, $i \in I = \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$, $k \in Z_+$ ($p(x_{m+1,k}^{\pm}) = 1$, $p(x_{i,k}^{\pm}) = p(h_{j,k}) = 0$, $i \in I \backslash \{n+1\}$, $j \in I$, $k \in Z_+$), которые удовлетворяют следующим

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 14.A18.21.0356.

определяющим соотношениям:

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, \quad i,j \in I,\ k \in Z_+;$$
$$\left[x_{i,k}^+, x_{j,l}^-\right] = \delta_{i,j} h_{i,k+l}, \quad i,j \in I,\ k,l \in Z_+;$$
$$\left[h_{i,k+1}, x_{j,l}^\pm\right] = \left[h_{i,k}, x_{j,l+1}^\pm\right] \pm (a_{ij}/2)\left(h_{i,k}x_{j,l}^\pm + x_{j,l}^\pm h_{i,k}\right),$$
$$i,j \in I,\ k,l \in Z_+; \quad i \neq m \quad \text{или} \quad j \neq m;$$
$$[h_{n+1,k+1}, x_{n+1,l}^\pm] = 0;$$
$$[h_{i,0}, x_{j,l}^\pm] = \pm a_{ij} x_{j,l}^\pm, \quad i,j \in I, l \in Z_+;$$
$$[x_{i,k+1}^\pm, x_{j,l}^\pm] = [x_{i,k}^\pm, x_{j,l+1}^\pm] \pm (a_{ij}/2)(x_{i,k}^\pm x_{j,l}^\pm + x_{j,l}^\pm x_{i,k}^\pm),$$
$$i,j \in I,\ k,l \in Z_+; \quad i \neq n \quad \text{или} \quad j \neq n;$$
$$\left[x_{n+1,k}^\pm, x_{n+1,l}^\pm\right] = 0;$$
$$\left[x_{i,k_1}^\pm, [x_{i,k_2}^\pm, x_{j,k_3}^\pm]\right] + \left[x_{i,k_2}^\pm, [x_{i,k_1}^\pm, x_{j,k_3}^\pm]\right] = 0,$$
$$|i-j| = 1, \quad i,j \in I, \quad k_1,k_2,k_3 \in Z_+;$$
$$[x_{i,k}^\pm, x_{j,l}^\pm] = 0, \quad |i-j| > 1; \quad \left[[x_{n,r}^\pm, x_{n+1,0}^\pm], [x_{n+1,0}^\pm, x_{n+2,s}^\pm]\right] = 0.$$

3. Основной результат работы — следующая теорема [4].

Теорема 1. 1) *Каждый неприводимый конечномерный $Y(A(m,n))$-модуль V является модулем со старшим весом d: $V = V(d)$. 2) Модуль $V(d)$ конечномерен тогда и только тогда, когда существуют многочлены P_i^d, $i \in \{1,2,\ldots,n,n+2,\ldots 2n+1\} = I\backslash\{n+1\}$, а также многочлены P_{n+1}^d, Q_{n+1}^d, удовлетворяющие следующим условиям:*

a) все эти многочлены со старшими коэффициентами, равными 1;

b)
$$\frac{P_i^d(u + a_{ii}/2)}{P_i^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k} \cdot u^{-k-1}, \quad i \in I\backslash\{n+1\}, \tag{1}$$
$$\frac{P_{n+1}^d(u)}{Q_{n+1}^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{n+1,k} \cdot u^{-k-1}. \tag{2}$$

Здесь a_{ii} — матричный элемент симметричной матрицы Картана супералгебры Ли $A(n-1,n-1)$.

Литература

1. *Тарасов В. О.* О строении квантовых L операторов для R-матрицы XXZ модели // Теорет. и матем. физика.—1984.—Т. 61, № 2.—С. 163–173.
2. *Zhang R. B.* The $\mathfrak{gl}(M,N)$ super Yangian and its finite-dimensional representations // Lett. Math. Phys.—1996.—Vol. 37.—P. 419–434.
3. *Стукопин В. А.* О представлениях янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$ // Изв. РАН. Сер. мат.—2013.—Т. 77, № 4.—(В печати).
4. *Stukopin V.* On representations of Yangian of Lie superalgebra $A(n,n)$ // J. of Phys. CS.—2013.—Vol. 411.—P. 1–13.
5. *Стукопин В. А.* О янгианах супералгебр Ли типа $A(m,n)$ // Функц. анализ и его приложения.—1994.—Т. 28, № 3.—С. 85–88.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛИНОМАМИ БЕРНШТЕЙНА КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

И. В. Тихонов (Россия, Москва; МГУ),
В. Б. Шерстюков (Россия, Москва; НИЯУ МИФИ),
М. А. Петросова (Россия, Москва; МПГУ)

Дается обзор классических результатов, связанных с приближением непрерывных функций полиномами Бернштейна [1–13]. Указаны продвижения в общей теории, полученные в последнее время [14–17]. Обсуждаются новые экспоненциальные оценки уклонения полиномов Бернштейна от кусочно-линейных функций. Особо выделен случай функций типа модуля, для которых удается получить исчерпывающую картину приближения [16].

Литература

1. *Bernstein S.* Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur la calcul des probabilités // Сообщенія Харьковскаго математическаго общества.—1912.—Т. 13, № 1.— С. 1–2.
2. *Вороновская Е. В.* Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР, А.—1932.—№ 4.—С. 79–85.
3. *Popoviciu T.* Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur // Mathematica.— 1935.—Vol. 10.—P. 49–54.
4. *Kac M.* Une remarque sur les polynomes de M. S. Bernstein // Stud. Math.—1938.—Vol. 7.— P. 49–51.
5. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций.—М.–Л: ГИТТЛ, 1949.—684 с.
6. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials.—Toronto: University of Toronto Press, 1953.
7. *Aramă O.* Rroprientăţi privind monotonia şirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein şi aplicarea lor la studiul aproximării funcţiilor // Studii şi cercetări de Matematică(Cluj).—1957.—T. 8, № 3–4.—P. 195–210.
8. *Schoenberg I. J.* On Variation Diminishing Approximation Methods // On Numerical Approximation. Proceedings of a Symposium conducted by the Math. Research Center US Army, University of Wisconsin, Madison, April 21–23, 1958. Ed.: R. E. Langer—Madison: University of Wisconsin Press, 1959.—P. 249–274.
9. *Коровкин П. П.* Линейные операторы и теория приближений.—М.: ГИФМЛ, 1959.— 213 с.
10. *Davis P. J.* Interpolation and Approximation.—N. Y.: Dover, 1975.—393 p.
11. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу.—Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990.
12. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation.—Berlin, Heidelberg, N.Y.: Springer-Verlag, 1993.
13. *Phillips G. M.* Interpolation and Approximation by Polynomials.—N. Y., Berlin, Heidelberg: Springer, 2003.
14. *Теляковский С. А.* О скорости приближения функций многочленами Бернштейна // Тр. ин-та мат-ки и механики УрО РАН.—2008.—Т. 14, № 3.—С. 162–169.
15. *Теляковский С. А.* О приближении многочленами Бернштейна в точках разрыва производных // Мат. заметки.—2009.—Т. 85, № 4.—С. 622–629.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00281.

16. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челябинского гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика.—2012.—Т. 15, № 26.—С. 6–40.
17. *Петухова Н. Ю., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Свойство склеивания полиномов Бернштейна для кусочно-линейных непрерывных функций // Математика, информатика, физика в науке и образовании: Сб. науч. тр. к 140-летию МПГУ.—М.: Прометей, 2012.—С. 81–82.

Секция I

Математический анализ

ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА n-РАЗ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ[1]

А. В. Абанин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)**,**
И. Н. Боева (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В работе исследуются весовые пространства n-раз непрерывно дифференцируемых функций:

$$C_w^n(G) = \left\{ f \in C^n(G) : \|f\|_{w,n} = \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in G} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{w(x)} < \infty \right\},$$

где G — открытое в $\mathbb{R}^N$ множество, а $w(x)$ — положительная на G функция (вес).

Приводятся свойства этих пространств и ассоциированных с ними весов

$$\tilde{w}(x) := \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant n} \sup \left\{ |f^{(\alpha)}(x)| : f \in B_w(G) \right\}.$$

Рассматривается вопрос о вложении указанных пространств друг в друга. Для пространств, задаваемых каноническими весами (т. е., эквивалентных ассоциированным), доказаны критерии вложения и совпадения пространств в терминах весов. Установлены, в частности, следующие результаты.

Теорема 1. *Предположим, что веса w_1 и w_2 являются локально ограниченными сверху и непрерывными в G. Для того чтобы $C_{w_1}^n(G) \subset C_{w_2}^n(G)$, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $C > 0$ и всех $x \in G$ выполнялось неравенство $w_1(x) \leqslant C w_2(x)$.*

Теорема 2. *Предположим, что веса w_1 и w_2 являются локально ограниченными сверху и полунепрерывными снизу в G. Пространство $C_{w_1}^n(G)$ не может быть вложено компактно в пространство $C_{w_2}^n(G)$.*

С другой стороны, пространства большей гладкости могут быть вложены компактно в пространства меньшей гладкости.

Пример. Пусть $w(x) \equiv 1$ на G. Тогда пространство $C_w^1(a,b)$ является компактно вложенным в пространство $C_w(a,b)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения № 14.A18.21.0356 и № 8210, а также гранта ЮФУ «Весовые пространства бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций. Общая теория и приложения».

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ДОСТАТОЧНЫЕ МНОЖЕСТВА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ И ОПЕРАТОР СУЖЕНИЯ НА НИХ[1]

А. В. Абанин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ),
В. А. Варзиев (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

С каждой непрерывной в $\mathbb{C}$ функцией (весом) φ свяжем банахово пространство целых функций

$$E(\varphi) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ \|f\|_\varphi := \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \exp\left(-\varphi(z)\right) < \infty \right\},$$

а с убывающей последовательностью весов $\Phi = (\varphi_n)$ — пространство Фреше $P(\Phi) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E(\varphi_n)$. Если в определении норм брать супремумы не по всей плоскости, а по какому-то ее подмножеству S, то мы получим в $P(\Phi)$ более слабую локально выпуклую топологию. Следуя [1] назовем S *достаточным множеством* (коротко, ДМ) для $P(\Phi)$, если задаваемая им топология совпадает с исходной топологией пространства Фреше в $P(\Phi)$.

Установлено, что ДМ для $P(\Phi)$ заведомо переполнены. Именно, при условии что весовые функции разделены логарифмом, из каждого ДМ для $P(\Phi)$ можно исключить любое конечное число точек, не нарушив его свойства быть ДМ. В связи с этим представляется разумным следующее понятие минимальности ДМ. Образуем более широкое, чем $P(\Phi)$, но близкое к нему пространство целых функций

$$\widehat{P}(\Phi) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} E(2\varphi_n - \varphi_m).$$

Для последовательности $\Lambda = (\lambda_k) \subset \mathbb{C}$ через $\mathcal{L}(\Phi; \lambda)$ обозначим семейство всех нетривиальных функций из $\widehat{P}(\Phi)$, для которых λ_k являются простыми нулями. Последовательность Λ называется *минимальной* для $P(\Phi)$, если класс $\mathcal{L}(\Phi; \Lambda)$ не пуст.

В докладе будут представлены результаты о необходимых и достаточных условиях, при которых минимальная для $P(\Phi)$ последовательность является ДМ для $P(\Phi)$.

Каждая уходящая в бесконечность последовательность $\Lambda := (\lambda_k)$ комплексных чисел порождает оператор сужения $R : f \mapsto (f(\lambda_k))$. Нетрудно видеть, что он действует линейно и непрерывно из $P(\Phi)$ в соответствующее пространство числовых последовательностей

$$P(\Phi, \Lambda) := \left\{ c = (c_k) : |c|_n := \sup_{k\in\mathbb{N}} |c_k| \exp(-\varphi_n(\lambda_k)) < \infty \ \forall\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проекты 14.A18.21.0356 и 8210, а также гранта ЮФУ, № 213.01-24/2013-63.

С точки зрения приложений к вопросам представления функций рядами обобщенных экспонент значительный интерес представляют те последовательности Λ, для которых этот оператор имеет линейный непрерывный левый обратный (коротко, ЛНЛО). Необходимым условием существования ЛНЛО у $R : P(\Phi) \to P(\Phi, \Lambda)$ является то, что Λ — ДМ для $P(\Phi)$. В докладе будут представлены критерии существования ЛНЛО у оператора сужения на минимальное ДМ для $P(\Phi + \psi)$, где ψ — некоторая положительная весовая функция.

Отметим, что ранее исследовался лишь индуктивный случай (ДМ в [2], а существование ЛНЛО у оператора сужения в [3]). При этом, за счет модификации методов последней работы нам удается избавиться от многих использованных в ней ограничений (в частности, мы не требуем, как в [3], чтобы рассматриваемые функции имели конечный порядок). Полное изложение представленных в докладе результатов будет опубликовано в статьях [4] и [5].

Литература

1. *Ehrenpreis L.* Fourier analysis in several complex variables // Pure and Appl. Math.—Vol. 17.—N. Y.: Wiley-Interscience Publishers, 1970.—506 p.
2. *Абанин А. В.* Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы: Дисс.... докт. физ.-мат. наук.—Ростов н/Д., 1995.—268 с.
3. *Мелихов С. Н.* О левом обратном к оператору сужения на весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2002.—Т. 14, вып. 1.—С. 99–133.
4. *Абанин А. В., Варзиев В. А.* Достаточные множества в весовых пространствах Фреше целых функций // Сиб. мат. журн.—2013.—Т. 54, № 4.—С. 725–741.
5. *Абанин А. В., Варзиев В. А.* О существовании линейного непрерывного левого обратного у оператора сужения на пространствах Фреше целых функций // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2013.—№ 4.—(В печати).

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ[1]

А. В. Абанин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ),
П. С. Сергунин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Д. Фогтом в [1] были введены топологические инварианты $(\underline{DN})$ и $(\overline{\Omega})$. А именно, пространство Фреше E принадлежит классу $(\underline{DN})$, если выполняется условие:

$$(\exists\, n \in \mathbb{N})\ (\forall\, m \in \mathbb{N})\ (\exists\, k \in \mathbb{N})\ (\exists\, \alpha \in (0,1))\ (\exists\, C > 0)$$
$$\|x\|_m \leqslant C\|x\|_n^{\alpha}\|x\|_k^{1-\alpha} \quad (\forall\, x \in E).$$

Пространство Фреше E принадлежит классу $(\overline{\Omega})$, если выполняется условие:

$$(\forall\, m \in \mathbb{N})\ (\forall\, \mu \in (0,1))\ (\exists\, \ell \in \mathbb{N})\ (\exists\, C > 0)$$
$$\|L\|'_\ell \leqslant C(\|L\|'_m)^{\mu}(\|L\|'_B)^{1-\mu}, \quad L \in E',$$

где B — некоторое ограниченное множество в E, $\|L\|'_m := \sup\{|L(x)| :\ \|x\| \leqslant 1\}$, $\|L\|'_B := \sup\{|L(x)| :\ x \in B\}$.

Известно (см. [1, 2]), что если ядерное пространство Фреше E удовлетворяет условиям $(\underline{DN})$ и $(\overline{\Omega})$, то E имеет базис.

Пусть G — произвольная область в $\mathbb{C}^N$, $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность локально липшицевых функций $\varphi_n : G \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\varphi_{n+1}(z) \leqslant \varphi_n(z) + C_n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N},\ z \in G).$$

Образуем пространства

$$E(\varphi_n) = \left\{ f \in H(G) :\ |f|_{\varphi_n} := \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_n(z)}} < \infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим пространство

$$P(\Phi) := \mathrm{proj}_n\, E(\varphi_n) = \bigcap_n E(\varphi_n)$$

с топологией проективного предела, задаваемой последовательностью норм $(|\cdot|_{\varphi_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

В докладе будут представлены условия ядерности пространства $P(\Phi)$ и его принадлежности инвариантным классам $(\underline{DN})$ и $(\overline{\Omega})$. На их основе формулируется результат общего характера о существовании базиса в пространствах вида $P(\Phi)$. Ранее результаты подобного рода были получены в работах [2, 3] для весовых последовательностей специального вида.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения № 14.A18.21.0356 и № 8210, а также гранта «Весовые пространства бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций. Общая теория и приложения».

Литература

1. *Vogt D.* Charakterisierung der Potenzreihenraume von endlichem Typ und ihre Folgerungen // Manuscripta Math.—1982.—Vol. 37, № 3.—P. 269–301.
2. *Haslinger F.* Weighted spaces of entire functions // Indiana Univ. Math. J.—1986.—Vol. 35, № 1.—P. 193–208.
3. *Ахтямов Н. Т., Мусин И. Х.* О существовании базиса в весовом пространстве целых функций // Уфимский мат. журн.—2009.—Т. 1, № 1.—С. 3–15.

THE ALGEBRAIC EQUALITY BETWEEN WEIGHTED INDUCTIVE LIMITS OF HOLOMORPHIC FUNCTION SPACES AND ITS TOPOLOGICAL CONSEQUENCES[1]

A. V. Abanin (Russian, Rostov-on-Don; SMI, SFU),
Pham Trong Tien (Viet Nam, Hanoi; VNU, SFU)

Let G be an open subset of $\mathbb{C}^N$ and v be a strictly continuous function on G, here called a *weight*. Concider the following weighted Banach spaces of holomorphic functions on G:

$$H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_v := \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\},$$

$$H_{v0}(G) := \Big\{ f \in H(G) : f(z)/v(z) \ \text{ vanishes at infinity on } \ G \Big\},$$

endowed with the norm $\|\cdot\|_v$. For an increasing sequence $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of weights v_n on G, consider the spaces

$$\mathcal{V}H(G) := \mathrm{ind}_n\, H_{v_n}(G) \ \text{ and } \ \mathcal{V}_0H(G) := \mathrm{ind}_n\, H_{(v_n)0}(G),$$

endowed with the natural inductive limit topologies.

In many papers [1, 2] it was shown that the algebraic equality $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0H(G)$ implies that the spaces involved in this equality have some strong topological properties. Such results have important applications in the projective description problem of inductive topologies in spaces of holomorphic functions. In this work, developing a new approach, we obtain stronger results than the corresponding ones in the above-mentioned papers.

In particular, in [1, Theorem 1.6(d)] it was shown that, for radial weights v_n on a balanced domain G in $\mathbb{C}^N$ such that $H_{v_1 0}(G)$ contains the polynomials, the algebraic equality $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0H(G)$ implies that $\mathcal{V}_0H(G)$ is reflexive.

In [2, Theorem 4(a)] K. D. Bierstedt and J. Bonet obtained that if for each $n \in \mathbb{N}$ every discrete sequence in G contains a subsequence which is interpolating for $H_{v_n}(G)$, then the algebraic equality $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0H(G)$ implies that $\mathcal{V}H(G)$ is a (DFS)-space. For the notion of interpolating sequence see [2, Definition 2]. As is well known, each (DFS)-space is reflexive.

The assumption on interpolating subsequences in [2] is rather restrictive. We prove that the result is valid without additional conditions.

Theorem 1. *The algebraic equality $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0H(G)$ always implies that $\mathcal{V}H(G)$ and $\mathcal{V}_0H(G)$ are (DFS)-spaces.*

[1]The research was supported by Ministry of Education and Science of Russia, agreements 14.A18.21.0356 and 8210, and a grant of the Southern Federal University «Weighted spaces of infinitely differentiable and holomorphic functions. Theory and applications».

In [2, Theorem 4(c)] it was shown that if the closure of the unit ball $B_{v_n 0}(G)$ of $H_{v_n 0}(G)$ in the compact-open topology *co* coincides with the unit ball $B_{v_n}(G)$ of $H_{v_n}(G)$, then the converse statement is also true.

The assumption on the unit balls is very complicated for using. Up to now there are known only a few number of very special cases in which this assumption holds: for radial weights v_n on the unit ball in $\mathbb{C}^N$ with $\lim\limits_{r\to 1-} v_n(r) = +\infty$ [2, Corollary 5(c)] and for the half-plane, strips or bounded starshaped open sets with a central point in $\mathbb{C}$ and sequences of weights with certain regular behavior near their boundaries (see [2, Proposition 8] and [3, Theorem 4.2.3]).

We remove all restrictions on the weight systems for a wide class of domains and prove the following result.

Theorem 2. *Suppose that G is either a domain in $\mathbb{C}$ whose complement has no one-point component or an absolutely convex open and bounded subset of $\mathbb{C}^N$. Then, for any weight system $\mathcal{V}$, the algebraic equality $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0 H(G)$ is equivalent to $\mathcal{V}H(G)$ and $\mathcal{V}_0 H(G)$ (DFS)-spaces.*

References

1. *Bierstedt K. D., Bonet J., Galbis A.* Weighted spaces of holomorphic functions on balanced domains // Michigan Math. J.—1993.—Vol. 40.—P. 271–297.
2. *Bierstedt K. D., Bonet J.* Weighted (LB)-spaces of holomorphic functions: $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0 H(G)$ and completeness of $\mathcal{V}_0 H(G)$ // J. Math. Anal. Appl.—2006.—Vol. 323.—P. 747–767.
3. *Holtmanns S.* Operator representation and biduals of weighted function spaces.—Paderborn, 2000.—99 p.

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Д. А. Абанина (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

В работе рассматриваются пространства целых функций $H(U,V)$ со смешанной топологической структурой, задаваемые двучленными весами общего вида $u_n(z) + v_m(z)$, $m, n \in \mathbb{N}$, состоящими из радиальной и нерадиальной компонент. Основным результатом является теорема, полностью описывающая все мультипликаторы данного весового пространства. В качестве частного случая пространства $H(U,V)$ содержат изоморфные реализации сильных сопряженных к известным пространствам УДФ Румье. Существенную роль в исследовании играют результаты работ [1, 2].

Пусть $\rho(t) : [0,\infty) \to (0,1]$ — регулярная функция расстояния [1], т. е. C^1 — функция, обладающая свойствами:

$$\rho'(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty; \quad \ln \rho(e^t) \text{ вогнута на } \mathbb{R}.$$

Положим $\rho(z) := \rho(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Функция $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется ρ-медленно меняющейся, если существует $C_0 > 0$ такое, что

$$|\varphi(z) - \varphi(\zeta)| \leqslant C_0; \quad \forall\, z, \zeta \in \mathbb{C} : |z - \zeta| \leqslant \rho(z).$$

Далее, пусть весовые функции $u_n : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условиям:

(1) u_n непрерывна и не убывает на $[0,\infty)$;

(2) $u_n(e^x)$ выпукла на $[0,\infty)$;

(3) $u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \ldots$;

(4) семейство $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ является равномерно ρ-медленно меняющимся;

(5) $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ $(\exists\, D_n > 0)$:

$$u_{n+1}(t) + \ln \frac{1+t^2}{\rho(t)} \leqslant u_n(t) + D_n \quad (\forall t \geqslant 0).$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения № 14.A18.21.0356 и № 8210, а также гранта ЮФУ «Весовые пространства бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций. Общая теория и приложения».

Продолжим функции u_n в $\mathbb{C}$, положив $u_n(z) := u_n(|z|)$.

Вторые, нерадиальные, компоненты весов — это функции $v_m : \mathbb{C} \to [0, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$, ρ-медленно меняющиеся и субгармонические в $\mathbb{C}$, для которых $v_1 \leqslant v_2 \leqslant \dots$

Введем в рассмотрение следующие пространства целых функций:

$$E(u_n + v_m) := \Big\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ \|f\|_{n,m} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{u_n(z) + v_m(z)}} < \infty \Big\}, \quad n, m \in \mathbb{N};$$

$$H(U, V) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} E(u_n + v_m).$$

Пространство $H(U, V)$ наделяется топологией $\operatorname{ind}_m \operatorname{proj}_n E(u_n + v_m)$.

Основной результат работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Множеством всех мультипликаторов пространства $H(U, V)$ является*

$$M\big(H(U, V)\big) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} E\big((u_m - u_n) + (v_n - v_m)\big).$$

Литература

1. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Continuation of holomorphic functions with growth conditions and some its applications // Stud. Math.—2010.—Vol. 200, № 3.—P. 279–295.
2. *Епифанов О. В.* О разрешимости неоднородного уравнения Коши — Римана в классах функций, ограниченных с весом и системой весов // Мат. заметки.—1992.—Т. 51, № 1.—С. 83–92.

ЭКСТЕНСИОНАЛЬНЫЕ, РЕГУЛЯРНЫЕ, k-ЗНАЧНЫЕ МЕРЫ В БУЛЕВОЗНАЧНОМ АНАЛИЗЕ

Н. М. Абасов (Россия, Москва; «МАТИ» — РГТУ)

Для вполне регулярного (или тихоновского) пространства $\mathfrak{X}$ введем обозначения: $V(\mathfrak{X})$ — базы топологии; $\mathfrak{V}(\mathfrak{X})$ — σ-алгебры порожденной $V(\mathfrak{X})$; $O(\mathfrak{X})$ — класса открытых множеств; $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ — борелевой σ-алгебры.

Пусть X также, некоторое вполне регулярное пространство, а E — K-пространство с единицей $\mathbf{1}$, совпадающей с единицей умножения в нем [1]. Векторзначная борелева вероятность $P:\ \mathfrak{B}(X)\to E$ $(P(X)=\mathbf{1})$ называется экстенсиональной, если из равенства перемешиваний характеристических функций борелевых множеств следует равенство соответствующих перемешиваний вероятностей соответствующих борелевых множеств, на подходящих элементах базы E.

Далее придерживаемся терминологии [2, 3].

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}=X\uparrow$, $V(\mathfrak{X})=(O(X))\uparrow$. Подъем $P\uparrow=p$ всякой экстенсиональной, регулярной борелевой вероятности P на $(X,\mathfrak{B}(X))$ — регулярная вероятность на $(\mathfrak{X},\mathfrak{V}(\mathfrak{X}))$, имеющая единственное регулярное борелево продолжение $\tilde{p}$ на $(\mathfrak{X},\mathfrak{B}(\mathfrak{X}))$.*

Доказательство теоремы основано на применении методов булевозначного анализа, которые в последнее время весьма успешно используются в функциональном анализе [2].

Рассматриваемые в [3] E-значные регулярные вероятности являются спусками скалярных регулярных вероятностей, которые, очевидно, являются экстенсиональными.

Литература

1. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматлит, 1961.—408 с.
2. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление.—М.: Наука, 2007.—559 с.
3. *Абасов Н. М.* Операторная версия теоремы Рисса — Маркова // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Тез. докл.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2010.—С. 66–68.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НАД ПРОСТРАНСТВАМИ БЕРГМАНА И ХАРДИ[1]

Х. Х. Бурчаев (Россия, Грозный; ЧГУ),
В. Г. Рябых (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Г. Ю. Рябых (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Основные определения и обозначения. $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$; $T = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$; A_p пространство Бергмана — множество функций $x(z)$, аналитических в D, являющихся подпространством $L_p(D)$, $0 < p < \infty$; H_p — обычное пространство Харди; f — экстремальная функция линейного непрерывного функционала $l(f) : \{\|f\| \leqslant 1,\ |l(f)| = \|l\|\}$.

Как известно, нахождение экстремальных функций линейных функционалов над пространствами Бергмана и Харди — трудная нелинейная задача, подходы к решению которой начали появляться только в последние годы [1]. Поэтому, начиная с работ основоположников этой тематики Я. Л. Геронимуса [2], A. J. Macintyre, W. W. Rogosinski [3] начались исследования связи ядра функционала со свойствами экстремальной функции.

В 1972 г. в [4] была установлена связь между гладкостью ядра функционала над H_1 и гладкостью экстремальной функции. В 2006 г. [5] аналогичные результаты были получены и для H_p, $1 < p < \infty$.

В [6] было установлено, что для экстремальной функции f функционала $l(x) \in A_p^*$, $1 < p < \infty$, с ядром $\omega(z) \in H_q$ выполняется $f \in H_p$ $(1/p + 1/q = 1)$.

В [7] доказано: из $\omega \in C^1(T)$ следует $f \in H_1$.

Фергюсон в [8] показал, что, если ω_k (тейлоровы коэффициенты ядра функционала) достаточно малы, то экстремальная функция функционала $l(x) \in A_q^*$, $1 < q < \infty$, принадлежит H_∞.

Авторами доказано, что при ядре $\omega(z)$, аналитичном в D_R, $R > 1$, экстремальная функция обладает аналогичными свойствами в A_p и H_p при $1 \leqslant p \leqslant 2$.

В последнее время удалось установить, что, как в A_p, так и в H_p, $1 \leqslant p < \infty$, справедливо утверждение: если ω — многочлен, то экстремальная функция f аналитична в $\mathbb{C}$.

Литература

1. *Рябых В. Г.* Необходимое и достаточное условие существования линейного функционала над H_1 // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 6.—С. 1351–1360.
2. *Геронимус Я. Л.* О проблеме коэффициентов для ограниченных функций // Докл. АН СССР.—1937.—Т. 14, № 3.—С. 95–96.
3. *Macintyre A. J., Rogosinski W. W.* Extremum problems in the theory of analytic functions // Acta Math.—1950.—№ 82.—P. 275–325.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00065.

4. *Carleson L., Jacobs S.* Best approximation by analytic functions // Arciv Math.—1972.—№ 10.—P. 219–229.
5. *Рябых В. Г.* Приближение аналитических функций неаналитическими // Мат. сб.—2006.—Т. 197, № 2.—С. 86–94.
6. *Рябых В. Г.* Экстремальные задачи для суммируемых аналитических функций // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 3.—С. 212–217.
7. *Пожарский Д. А., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Интегральные операторы в пространствах аналитических функций и близких к ним.—Ростов н/Д.: ИЦ ДГТУ, 2011.—183 с.
8. *Ferguson T.* Continuity of extremal elements in uniformly convex spaces // Proc. Amer. Math. Soc.—1937(2009).—№ 8.—P. 2645–2653.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НА СФЕРЕ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОМУ ЗНАЧЕНИЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МИНКОВСКОГО — ФУНКА

Т. Э. Баграмян (Россия, Москва; РУДН)

Преобразованием Минковского — Функа называется интегральное преобразование, переводящее функцию на сфере во множество ее интегралов по всевозможным большим кругам. Каждый большой круг на $\mathbb{S}^2$ получается как пересечение этой сферы с плоскостью, проходящей через 0: $\langle \xi, x\rangle = 0$, $|\xi| = 1$. Этим же равенством определим семейство подмногообразий сферы $\mathbb{S}^{d-1}$, параметризованное точками единичной сферы $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$. Заметим, что диаметрально противоположным точкам отвечает одно и то же многообразие. Соответствующее интегральное преобразование будем, по аналогии, называть преобразованием Минковского-Функа.

Рассмотрим пространство $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, $d \geqslant 3$. Для его элементов имеет место представление в виде ряда Фурье по ортонормированной системе сферических гармоник

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l)} f_{kl} Y_k^l(x), \quad N(l) = \frac{(2l+d-2)(d+l-3)!}{l!(d-2)!}, \quad l \geqslant 1,\ N(0) = 1.$$

Определим оператор $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$ (сферический Лапласиан) формулой

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2} f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} d_l^{\alpha/2} \sum_{k=1}^{N(l)} f_{kl} Y_k^l(x), \quad d_l = l(l+d-2),\ \alpha > 0.$$

Обозначим через W следующий класс

$$W = \left\{ f \in L_2^+(\mathbb{S}^{d-1}) :\ \|(-\Delta_S)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant 1 \right\},$$

где $L_2^+(\mathbb{S}^{d-1})$ — пространство четных квадратично интегрируемых функций.

Пусть для каждой функции $f \in W$ мы знаем ее преобразование Минковского — Функа, заданное с погрешностью. А именно, известна функция $g \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ такая, что $\|Mf - g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant \delta$. По этой информации требуется восстановить функцию f. Назовем методом восстановления произвольное отображение $m :\ L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Погрешностью метода называется величина

$$e(\delta, m) = \sup_{\substack{x \in W,\ g \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|Mf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant \delta}} \|f - m(g)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Из всего множества методов нас будут интересовать те, на которых достигается погрешность оптимального восстановления

$$E(\delta) = \inf_{m\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e(\delta, m).$$

Рассмотрим множество точек плоскости $\{(x_l, y_l)\}_{l=0}^{\infty}$, задаваемых формулами $x_l = \frac{d_{2l}^{\alpha}}{m_{2l}^2}$, $y_l = \frac{1}{m_{2l}^2}$, где $m_{2l} = 2\pi^{(d-2)/2}\frac{\Gamma(l+1/2)}{\Gamma(l+(d-1)/2)}$ — собственные числа оператора Минковского — Функа, соответствующие сферическим гармоникам степени $2l$. Пусть $x_s < \delta^{-2} \leqslant x_{s+1}$, $s \geqslant 0$, тогда положим $\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_{s+1}-y_s}{x_{s+1}-x_s}$, $\widehat{\lambda}_2 = \frac{y_s x_{s+1} - y_{s+1}x_s}{x_{s+1}-x_s}$.

Теорема. *Погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2}.$$

Методы

$$m(g)(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l)} a_l\,\frac{g_{k2l}}{m_{2l}}\,Y_k^{2l}(x),$$

где

$$g_{kl} = \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} g(x)Y_k^l(x)\,dx,$$

а числа a_l удовлетворяют условиям

$$a_l = \frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 x_l + \widehat{\lambda}_2} + \epsilon_l\frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2}}{\widehat{\lambda}_1 x_l + \widehat{\lambda}_2}\sqrt{\frac{x_l}{y_l}}\sqrt{x_l\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 - y_l}, \quad \epsilon_l \in [-1;1],$$

являются оптимальными.

Литература

1. *Баграмян Т. Э.* Оптимальное восстановление гармонической функции по неточно заданным значениям оператора радиального интегрирования // Владикавк. мат. журн.—2012.—Т. 14, № 1.—С. 19–25.
2. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление операторов по неточной информации // Исследования по выпуклому анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2009.—С. 158–192.—(Мат. форум. Т. 2. Итоги науки. ЮФО).
3. *Michelli C. A., RIvlin T. J.* Lecture on optimal recovery // Numerical Analysis (Lancaster, 1984).—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—C. 21–93.—(Lecture Notes in Math., 1129).

РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПО ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМ СДВИГАМ ОБОБЩЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КОШИ

Виноградова Т. А. (Россия, Воронеж; ВИ МВД)

В последнее время среди получивших широкое распространение методов разложения функций часто используются аппроксимации мультипликативными сдвигами некоторой целой функции $w(z)$ вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \; w(a_k z),$$

где f_k — коэффициенты разложения, а a_k — набор параметров мультипликативных сдвигов, а также аппроксимации аддитивными сдвигами некоторой целой функции $w(z)$ вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \; w(z-k).$$

Наиболее распространенные и известные разложения по мультипликативным сдвигам — это ряды Фурье, ряды Неймана, Каптейна, Струве по различным модификациям функций Бесселя. Еще более распространены разложения по аддитивным сдвигам с использованием всплесков, сплайнов, sinc-функций, функций Рвачевых, квадратичных экспонент (функций Гаусса).

В настоящей работе при анализе спектров предлагается использовать разложение исследуемого сигнала по компонентам заданного вида, полученным из каких-либо теоретических соображений. И если для работы с гауссовыми функциями существуют разработанные методы [1–4], то в случае функции Лоренца или распределений Коши такие методы только находятся в стадии разработки.

В работе изучаются интерполяционные разложения произвольной функции по целочисленным сдвигам обобщенного распределения Коши (Лоренца) вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \frac{a}{b+(x-k)^c},$$

где a, b, c — некоторые положительные постоянные.

Для решения интерполяционной задачи в явном виде нужно найти коэффициенты разложения f_k, а эти коэффициенты выражаются через значения узловой функции $G_{a,b,c}(x)$, которая удовлетворяет соотношениям

$$G_{a,b,c}(0)=1, \quad G_{a,b,c}(m)=0, \quad m\in\mathbb{Z},\ m\neq 0.$$

Для указанного метода интерполяции при значениях параметра $c \geqslant 2$ выведена явная формула для узловой функции, проведено подробное численное исследование задачи.

Отметим, что случай $c=2$ был исследован ранее Л. А. Мининым и Е. А. Киселевым [5]. Ими было получено разложение по указанной системе и найдена явная интегральная формула для коэффициентов. В нашей работе получено в том числе обобщение этой формулы для случая $c>2$.

Литература

1. *Maz'ya V., Schmidt G.* Approximate approximations.—Sweden: University of Linköping, 2007.—349 p.
2. *Zhuravlev M. V., Kiselev E. A., Minin L. A., Sitnik S. M.* Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // J. Math. Sci.—Springer, 2011.—Vol. 173, № 2.—P. 231–241.
3. *Журавлев М. В., Киселев Е. А., Минин Л. А., Ситник С. М.* Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и ее приложения. Уравнения в частных производных.—2010.— Т. 67.—С. 107–116.
4. *Минин Л. А., Ситник С. М., Журавлев М. В.* О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета.—2009.—Вып. 17/2, № 13 (68).—С. 89–99.
5. *Минин Л. А., Киселев Е. А.* Личное сообщение.—2012.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ЛОКАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Т. А. Волковая (Россия, Славянск-на-Кубани; филиал КубГУ),
А. Б. Шишкин (Россия, Славянск-на-Кубани; филиал КубГУ)

Пусть $O(\mathbf{C})$ — пространство целых функций, с топологией равномерной сходимости на компактах, $\pi \in O(\mathbf{C})$, $\mathbf{C}[\pi]$ — кольцо многочленов от π, P — произвольное множество в $O(\mathbf{C})$, обладающее структурой отделимого локально выпуклого пространства над полем $\mathbf{C}$ и структурой топологического модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$.

Функция φ,голоморфная в точках множества $E \subseteq \mathbf{C}$, называется *π-симметричной*, если для каждого $\lambda \in \pi(E)$ найдутся открытая окрестность U множества $\pi^{-1}(\lambda) \cap E$ и открытая окрестность V точки λ, содержащая $\pi(U)$, такие, что сужение φ на U представляется в виде $\Phi \circ r$, где Φ — некоторая голоморфная на V функция. Простейшие π-симметричные функции — это отображения, осуществляемые элементами кольца $\mathbf{C}[\pi]$.

Пусть $\lambda \in \mathbf{C}$, $\tilde{\lambda}$ — π-слой $\pi^{-1}(\lambda)$, ω — фиксированное подмножество $\tilde{\lambda}$, $\{U\}_\omega$ — фундаментальная система окрестностей ω, $O(U)$ — кольцо голоморфных на $U \in \{U\}_\omega$ функций, $O_\pi(U)$ — множество всех π-симметричных на $U \in \{U\}_\omega$ функций. Очевидно, что $O_\pi(U)$ — подкольцо $O(U)$. Рассматриваем $O(U)$ как модуль над кольцом $O_\pi(U)$. Индуктивный предел модулей $O(U)$, $U \in \{U\}_\omega$, относительно гомоморфизмов сужения $O(U') \to O(U)$, $U \subseteq U'$ обозначим символом $O(\omega)$, а индуктивный предел колец $O_\pi(U)$, $U \in \{U\}_\omega$, относительно гомоморфизмов сужения $O_\pi(U') \to O_\pi(U)$, $U \subseteq U'$ обозначим символом $O_\pi(\omega)$. Индуктивный предел $O_\pi(\omega)$ обладает структурой кольца, а индуктивный предел $O(\omega)$ обладает структурой модуля над этим кольцом (и векторного пространства над полем $\mathbf{C}$).

Легко увидеть, что имеют место естественные вложения (взаимно однозначные отображения) $O(\tilde{\lambda}) \to O(\omega)$, $O_\pi(\tilde{\lambda}) \to O_\pi(\omega)$. При этом $O(\tilde{\lambda}) = \bigcap_{\omega \Subset \tilde{\lambda}} O(\omega)$, где символ $\omega \Subset \tilde{\lambda}$ означает, что перебираются лишь конечные подмножества ω π-слоя $\tilde{\lambda}$. Кроме того, отображение $O_\pi(\tilde{\lambda}) \to O_\pi(\omega)$ является кольцевым изоморфизмом. Это позволяет рассматривать $O_\pi(\omega)$ как модуль над кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda})$.

Пусть $\lambda \in \mathbf{C}$, $\tilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$, ω — конечное подмножество $\tilde{\lambda}$, I — замкнутый подмодуль в P. Обозначим $I(\omega)$ минимальный подмодуль $O_\pi(\tilde{\lambda})$-модуля $O(\omega)$, включающий I. Ясно, что $I(\omega)$ состоит из всевозможных конечных сумм f вида

$$f = \sum c_i \varphi_i, \quad c_i \in O_\pi(\omega),\ \varphi_i \in I. \tag{1}$$

Пересечение $\bigcap_{\omega \Subset \tilde{\lambda}} I(\omega)$ называется *локальным подмодулем* I, ассоциированным с π-слоем $\tilde{\lambda}$ и обозначается $I(\tilde{\lambda})$. Согласно этому определению, локальный подмодуль $I(\tilde{\lambda})$ исчерпывается ростками функций, голоморфных в окрестностях $\tilde{\lambda}$ и представимых в виде (1) в окрестности каждого множества $\omega \Subset \tilde{\lambda}$. Представление (1) называется *локальным представлением* функции f в окрестности множества $\omega \Subset \tilde{\lambda}$. Целая функция f принадлежит I *локально*, в записи $f \underset{\mathrm{loc}}{\in} I$, если $f \in I(\tilde{\lambda})$ при любом $\lambda \in \mathbf{C}$. Подмодуль I допускает *локальное описание* (или является *бильным*) если справедлива импликация:

$$f \in P,\ f \underset{\mathrm{loc}}{\in} I \Rightarrow f \in I.$$

Задача локального описания состоит в нахождении условий, при которых замкнутые подмодули $I \subseteq P$ являются обильными.

В работах [1, 2] разрабатывается *метод резольвентной функции*, в основе которого лежит возможность деления аналитической функции на двучлен $z-\lambda$ при обращении этой функции в нуль в точке λ. Этот метод существенно опирается на равномерную устойчивость пространства P. Аксиома равномерной устойчивости [2] является основным ограничителем класса пространств, к которым применимы результаты статей [1, 2]. В работе [3] аксиома равномерной устойчивости заменена менее ограничительной аксиомой — аксиомой локальной устойчивости. Метод резольвентной функции адаптирован авторами к рассматриваемой ситуации, в которой деление на двучлен $z-\lambda$ заменено делением на целую функция $\pi - \lambda$.

Литература

1. *Красичков-Терновский И. Ф.* Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1979.—Т. 43, № 1.—С. 44–66.
2. *Красичков-Терновский И. Ф.* Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. II // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1979.—Т. 43, № 2.—С. 309–341.
3. *Красичков-Терновский И. Ф.* Абстрактные приемы локального описания замкнутых подмодулей аналитических функций // Мат. сб.—1990.—Т. 181, № 12.—С. 1640–1658.

О ГЕЛЬДЕРОВОСТИ ОБОБЩЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ СТРИХАРЦА ПО ШАРОВОМУ СЛОЮ[1]

М. Н. Гуров (Россия, Ростов-на-Дону; ЮМИ, ЮФУ),
В. А. Ногин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮМИ, ЮФУ)

В работе исследуются дифференциальные свойства обобщенных потенциалов Стрихарца, введенных в [1]:

$$(A_\theta^\beta \varphi)(x) = (a_\theta^\beta * \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_{1-\delta\leqslant|t|\leqslant1+\delta} \theta(t) \left(1 - |t|^2 + i0\right)^{\beta-1} \varphi(x-t)\, dt,$$

с плотностями из пространств Харди H^p, $0 < p < \infty$ (при этом $\beta > 0$, $0 < \delta < 1$, $\theta(t) = \theta_1(|t|) \cdot \theta_2(t')$ $\left(t' = \frac{t}{|t|}\right)$ — бесконечно дифференцируемая функция в $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, называемая характеристикой оператора A_θ^β, и $\theta_1(1) \neq 0$).

В работе доказаны необходимые и достаточные условия ограниченности оператора A_θ^β из пространств L^1, H^p $(0 < p < \infty)$ и BMO в пространство Λ_s $(s > 0)$ гёльдеровских функций. При этом были получены специальные представления для символов рассматриваемых операторов в виде суммы некоторых интегралов, содержащих осциллирующие экспоненты и средние характеристики $\theta_2(t')$ на плоских сечениях единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, к которым применены метод стационарной фазы и результаты A. Miyachi для «модельных» мультипликаторов [2].

Основными результатами работы являются следующие утверждения:

Теорема 1. *Оператор A_θ^β ограничен из H^p в Λ_s тогда и только тогда, когда*

$$0 < p \leqslant 1, \quad \beta > 1 + n/p - n, \quad s \leqslant n - n/p + \beta - 1$$

или

$$1 < p < \infty, \quad \beta > 1/p, \quad s \leqslant \beta - 1/p.$$

Теорема 2. *Оператор A_θ^β ограничен из L^1 в Λ_s тогда и только тогда, когда $\beta > 1$, $s \leqslant \beta - 1$.*

Теорема 3. *Оператор A_θ^β ограничен из BMO в Λ_s тогда и только тогда, когда $s \leqslant \beta$.*

Литература

1. *Miyachi A.* On some singular Fourier multipliers // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.—1981.—Vol. 28.—P. 267–315.
2. *Strichartz R. S.* Convolutions with kernels having singularities on a sphere // Trans. Amer. Math. Soc.—1970.—Vol. 146, № 5.—P. 461–471.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения № 14.A18.21.0356 и № 8210.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ЛИЕВЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА ПОДАЛГЕБРАХ ЛОКАЛЬНО ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

И. М. Жураев (Узбекистан, Бухара; БухГУ)

Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра. Линейный оператор $D : A \to A$ называется *(ассоциативным) дифференцированием*, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ при всех $x, y \in A$. Каждый элемент $a \in A$ определяет дифференцирование D_a в алгебре A по правилу $D_a(x) = ax - xa = [a, x]$, $x \in A$. Дифференцирования вида D_a называются *внутренними*. Линейный оператор $L : A \to A$ называется *лиевым дифференцированием*, если $L([x, y]) = [L(x), y] + [x, L(y)]$, для всех $x, y \in A$, где $[x, y]$ — коммутатор элементов x, y. Ясно,что любое ассоциативное дифференцирование является лиевым дифференцированием. Обратное, вообще говоря, неверно.

Обозначим через $Z(A)$ центр алгебры A. Линейный оператор $\tau : A \to Z(A)$ называется *центрозначным следом* на A, если $\tau(xy) = \tau(yx)$ для всех $x, y \in A$. Каждый центрозначный след на алгебре A является примером лиевого дифференцирования, не являющегося, как правило, ассоциативным дифференцированием.

Пусть H — гильбертово пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, $B(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H, M — подалгебра фон Неймана в $B(H)$.

Множество $LS(M)$ всех операторов, локально измеримых относительно M, является унитальной $*$ — алгеброй над полем $\mathbb{C}$ относительно операций сильного сложения и умножения и перехода к сопряженному оператору, при этом, M есть $*$ — подалгебра в $LS(M)$ [1, § 2.3].

Рассмотрим лиеву подалгебру

$$[LS(M), LS(M)] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x_i, y_i] : x_i, y_i \in LS(M),\ \alpha_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{1, n},\ n \in N \right\}$$

в алгебре $LS(M)$. Имеет место следующая

Теорема 1. *Для любого лиевого дифференцирования $L : [LS(M), LS(M)] \to LS(M)$ существует ассоциативное дифференцирование на $LS(M)$, являющееся продолжением L на $LS(M)$.*

В случае алгебр фон Неймана типа I_∞, всегда верно равенство $[LS(M), LS(M)] = LS(M)$ [2]. В частности, для таких алгебр, любой $Z(LS(M))$ — значный след на $LS(M)$ тождественно равен нулю. В силу теоремы 1, верно следующее

Следствие. *Если M — алгебра фон Неймана типа I_∞, то любое лиево дифференцирование в $LS(M)$ является ассоциативным дифференцированием.*

Литература

1. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов // Тр. ИМ НАН Украины.—Киев, 2007.—Т. 69.—390 с.
2. *Чилин В. И., Жураев И. М.* Коммутаторы локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана типа I // Матер. респ. научн. конф.—Ургенч, 2012.—Т. 2.—С. 122–124.

О КОЭФФИЦИЕНТАХ РЯДОВ ПО ФУНКЦИЯМ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

О. А. Иванова (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть G — ограниченная ρ-выпуклая область, $0 \in G$; K — ρ-выпуклый компакт, $0 \in K$; $A(G)$ — пространство Фреше всех функций, аналитических в G; $h_G(-\theta)$, $h_K(-\theta)$ — ρ-опорные функции G и K соответственно. Для последовательности $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $|\lambda_j| \to \infty$, введем пространство Фреше числовых последовательностей

$$\Lambda := \left\{ c = (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \colon \; \|c\|_n := \sum_{j=1}^{\infty} |c_j| \exp\left(\left(h_G(\arg\lambda_j) - \frac{1}{n}\right)|\lambda_j|^{\rho}\right) < +\infty \; \forall\, n \in N \right\}.$$

Положим $e_\lambda(z) := E_\rho(\lambda z)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$, где $E_\rho(t) := \sum_{k=0}^{\infty} t^k/\Gamma(1+k/\rho)$, $t \in \mathbb{C}$, — функция Миттаг-Леффлера. Ряд $\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{\lambda_j}$ сходится абсолютно в $A(G)$ тогда и только тогда, когда $c \in \Lambda$. Оператор представления $\Pi(c) := \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{\lambda_j}$ линейно и непрерывно отображает Λ в $A(G)$. Если последовательность $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ такова, что оператор $\Pi : \Lambda \to A(G)$ сюръективен (т. е. $(e_{\lambda_j})_{j=1}^{\infty}$ является абсолютно представляющей системой в $A(G)$), то возникает естественная задача о существовании линейного непрерывного правого обратного (коротко: ЛНПО) к $\Pi : \Lambda \to A(G)$. Она решена в статье [1] для $\rho = 1$ в случае, когда $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — нули некоторой специальной $(1, h_G + h_K)$-интерполирующей функции. Мы переносим результаты работы [1] на случай $\rho \neq 1$. Если внутренность компакта K пуста, то оператор представления не имеет ЛНПО. Для случая, когда внутренность K непуста, доказан критерий существования ЛНПО к Π. Как и в [1], он получен в терминах конформных отображений φ и ψ единичного круга $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на G и $\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}$ ($\bar{D}$ — замыкание D в $\mathbb{C}$, $\bar{\mathbb{C}}$ — расширенная комплексная плоскость) на $\bar{\mathbb{C}} \setminus K$ соответственно (при этом при $\rho > 1$ делается дополнительное предположение о ρ-выпуклости соответствующих множеств уровня конформных отображений φ и ψ).

Положим $D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $r > 0$; $\tilde{G}_n := \varphi(D_{\exp(-1/n)})$, $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{W}_n := \psi(\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}_{\exp(1/n)})$, $n \in \mathbb{N}$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть внутренность K непуста и $0 \in \mathrm{int}K$.*

(I) *Для $\rho \in (0,1)$ следующие утверждения равносильны:*

1) $\Pi : \Lambda \to A(G)$ *имеет ЛНПО;*

2) a) $\sup\limits_{|z|<1} |\varphi'(z)| < \infty$ *и* b) $\inf\limits_{|z|>1} |\psi'(z)| > 0$.

(II) *Пусть $\rho > 1$. Тогда 1) $\Rightarrow$ 2). Предположим, что множества уровня $\tilde{G}_n$ и $\mathbb{C} \setminus \tilde{W}_n$, $n \in \mathbb{N}$, ρ-выпуклы. Тогда 1) $\Leftrightarrow$ 2).*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 14.A18.21.0356.

Литература

1. *Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н.* Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки // Сиб. мат. журн.—1993.— Т. 34, № 1.—С. 70–84.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ОБ ОБОБЩЕНИИ НЕРАВЕНСТВА В. ЯНГА ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ ЧИСЕЛ

А. А. Ковальчук (Россия, Воронеж; ВИ МВД),
С. М. Ситник (Россия, Воронеж; ВИ МВД)

Оценка произведений нескольких величин в терминах суммы некоторых других величин является известной математической задачей. Подобные неравенства играют существенную роль в самой математике и многих ее приложениях: математической экономике, вариационном исчислении, теории оптимального управления, дифференциальных уравнениях, теории сигналов, оценивании сложности прикладных алгоритмов и т. д. Примером таких оценок является неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим. Другим классическим примером является доказанное в 1912 г. английским математиком Вильямом Янгом знаменитое неравенство, названное впоследствии его именем. Для двух чисел в простейшем случае неравенство Янга записывается в виде

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{1}$$

при условиях $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q > 1$, $x, y > 0$.

Было замечено, что на самом деле неравенство В. Янга в традиционной формулировке — это не одно, а пара неравенств [2–4]. Так как левая часть неравенства (1) симметрична, то на самом деле справедливо аналогичное второе неравенство

$$xy \leqslant \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p}, \tag{2}$$

и поэтому возникает естественная задача о сравнении неравенств (1) и (2).

Результаты получены и для n чисел, но только в том случае, когда все числа лежат с одной стороны от единицы. Когда числа могут быть расположены с разных сторон от единицы, то результаты неизвестны даже для трех чисел. Получены только некоторые результаты на основе компьютерных вычислений. Всего в этом случае получаем $n!$ вариантов обобщений неравенства Янга. Они имеют вид

$$x \cdot y \cdot z \cdot \ldots \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} + \frac{z^r}{r} + \ldots,$$

при этом упорядочение параметров $x, y, z, \ldots$ можно зафиксировать, а оптимальное упорядочивание параметров $p, q, r \ldots$ для $n!$ вариантов перестановок в правой части—исследовать (n — число чисел или параметров).

Теорема 1. *При условии, что выполнены неравенства $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant \ldots$, наилучшим (в смысле с наименьшей правой частью) из неравенств Янга будет то, в котором параметры $p, q, r \ldots$ упорядочены по возрастанию $p \leqslant q \leqslant r \ldots$, а наихудшим (в смысле с наибольшей правой частью) — по убыванию.*

Теорема 2. *При условии, что выполнены неравенства* $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant \ldots$, *наилучшим (в смысле с наименьшей правой частью) из неравенств Янга будет то, в котором параметры* $p, q, r \ldots$ *упорядочены по убыванию* $p \geqslant q \geqslant r \ldots$ *а наихудшим (в смысле с наибольшей правой частью) — по возрастанию.*

По обычной схеме [1] можно из полученного уточненного неравенства Янга вывести уточненное неравенство Гёльдера (или исторически более точно: Роджерса — Гёльдера — Рисса [2]). Результаты получаются как для дискретного, так и для интегрального случаев.

Литература

1. *Mitrinovic D. S., Pecaric J. E., Fink A. M.* Classical and New Inequalities in Analysis.—Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1993.—757 p.
2. *Sitnik S. M.* Generalized Young and Cauchy–Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey.—2012.—51 p.—URL: http://arxiv.org/abs/1012.3864.
3. *Ситник С. М.* Уточнения и обобщения классических неравенств // Исследование по мат. анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2009.—С. 221–266.—(Итоги науки. ЮФО. Мат. форум. Т. 3).
4. *Ситник С. М.* Сколько неравенств заключено в неравенстве Юнга? // Тр. Всерос. заочной научно-практ. конф. «Актуальные проблемы обучения математике», посвящ. 155-летию со дня рождения А. П. Киселева.—Орел: ОГУ, 2007.—С. 464–469.

ПОРЯДКИ МАЛОСТИ И ПОРЯДОК НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ В АКСИОМАТИЧЕСКОМ НЕСТАНДАРТНОМ АНАЛИЗЕ

Ю. Н. Ловягин (Россия, Санкт-Петербург; СПбГУ)

Классический нестандартный анализ разработан А. Робинсоном. А. Г. Драгалиным предложен аксиоматический подход к нестандартному анализу. Основываясь на этих идеях и идее арифметики А. Тарского. Н. К. Косовский предложил исследовать «градуированную» непрерывность, определяемую с помощью некоторого актуального бесконечно малого числа. В рамках гиперарифметики и теории гиперрациональных чисел автором и Е. В. Праздниковой развита теория непрерывности, дифференциальное и интегральное исчисление. Все изложение, однако, применимо и к слабой арифметикике, которая введена автором и модель которой положена в основу настоящей работы.

Основываясь на арифметике Пресбургера и ее консервативном расширении, полученном добавлением бесконечно большого натурального числа через введении слабой арифметики, строится модель теории упорядоченных полей, являющаяся консервативным расширением теории рациональных чисел — теория гиперрациональных чисел. На основе модели этой теории строится поле вещественных чисел. Класс всех утверждений языка теории упорядоченных полей истинных в поле вещественных чисел известен как арифметика Тарского. К языку арифметики Тарского добавляется бесконечно большое натуральное число Ω и, как следствие, бесконечно малые гипервещественные числа. Пусть $\alpha = \frac{1}{\Omega} \approx 0$.

Определение 1. Будем говорить, что гипервещественные числа x и y s-близки и обозначать это $x \approx_s y$, если $x - y < \alpha^s$.

Определение 2. Пусть f — определимая в арифметике Тарского функция. Функцию f назовчм $s{-}t$-непрерывной в точке x ее области определения, если из $\Delta x \approx_s 0$ следует $\Delta f\left(\Delta x\right) = f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right) \approx_t 0$ для любых Δx, для которых определено значение $f\left(x + \Delta x\right)$.

Теорема 1. *Для $s{-}t$-непрерывных функций справедливы все теоремы классического анализа.*

Теорема 2. *Функция f, заданная правилом*

$$f\left(x\right) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

является $s - 0$-непрерывной, но не является $s - t$-непрерывной при $t > 0$.

Литература

1. *Robinson A.* Non-Standard Analysis.—Amsterdam: Nord-Holland publ. comp.—1966.—293 p.
2. *Драгалин А. Г.* Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ.—М.: Едиториал УРСС, 2003.—544 с.

3. *Tarski A.* Decision Method for Elementary Algebra und Geometry.—Los Angeles: Berkeley, 1951.—301 p.
4. *Косовский Н. К., Тишков А. В.* Логики конечнозначных предикатов на основе неравенств.—СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000.—268 с.
5. *Ловягин Ю. Н.* Гиперрациональные числа и функции гиперрационального аргумента и их применение для измерения длин отрезков и площадей плоских фигур // Тр. VIII междунар. колмогор. чтений.—Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010.—С. 128–134.
6. *Праздникова Е. В.* Моделирование вещественного анализа в рамках аксиоматики для гипернатуральных чисел // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1.—2007.—Вып. 7.—С. 41–66.
7. *Ловягин Ю. Н.* Гиперрациональные числа как основа измерений и вычислений // Сб. междунар. конф. «Теория приближений».—СПб.: 2010.—С. 59–61.
8. *Ловягин Ю. Н.* Гиперрациональные числа как основа математического анализа // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1.—2007.—Вып. 7.—С. 17–34.
9. *Ловягин Ю. Н.* Арифметика А. Тарского как методологическая основа преподавания математического анализа // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: Материалы науч. конф. «Герценовские чтения–2012».—СПб, 2012.—С. 182–194.

НАИЛУЧШЕЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ НОРМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Г. Г. Магарил-Ильяев (Россия, Москва; МГУ),
К. Ю. Осипенко (Россия, Москва; «МАТИ» — РГТУ)

Задача наилучшего восстановления решения разностного уравнения в данный момент времени по неточным его измерениям в другие моменты времени, как правило, представляет собой частный случай следующей общей постановки: приближенно известны некоторые степени конечномерного оператора, и по этой информации надо наилучшим образом восстановить любую его промежуточную степень. В докладе будет рассказано об одном общем результате такого сорта, а в качестве иллюстрации, будет рассмотрена задача оптимального восстановления температуры тела в разностной модели уравнения теплопроводности.

Сформулируем здесь указанный общий результат. Пусть $T\colon \mathbb{C}^d \mapsto \mathbb{C}^d$ — линейный оператор. Предположим, что $x \in \mathbb{C}^d$ и $T^n x$ известны неточно, а именно, известны векторы $y_0, y_n \in \mathbb{C}^d$ такие, что $\|x - y_0\| \leqslant \delta_0$ и $\|T^n x - y_n\| \leqslant \delta_n$ ($\|\cdot\|$ — евклидова норма), $\delta_0, \delta_n > 0$. По этой информации мы хотим восстановить (по возможности, наилучшим образом) значение $T^k x$, $0 < k < n$. В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные отображения $\varphi\colon \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \mapsto \mathbb{C}^d$. Погрешностью метода φ назовем величину

$$e(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n, \varphi) = \sup_{\substack{x, y_0, y_n \in \mathbb{C}^d \\ \|x - y_0\| \leqslant \delta_0, \\ \|T^n x - y_n\| \leqslant \delta_n}} \|T^k x - \varphi(y_0, y_n)\|.$$

Нас интересует величина

$$E(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \mapsto \mathbb{C}^d} e(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n, \varphi), \tag{1}$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления* и те методы, на которых нижняя грань достигается, называемые *оптимальными методами восстановления*.

Перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения. Пусть $T\colon \mathbb{C}^d \mapsto \mathbb{C}^d$ — нормальный оператор, т. е. $TT^* = T^*T$. Тогда существует ортонормированный базис, состоящий из его собственных векторов. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ — соответствующие собственные числа. Можно считать, что их модули упорядочены по возрастанию и тем самым $|\lambda_1| = \ldots = |\lambda_{s_1}| < \ldots < |\lambda_{s_{r-1}+1}| = \ldots = |\lambda_{s_r}|$. Общее значение модулей собственных чисел в j-ой группе обозначим через μ_j, $1 \leqslant j \leqslant r$. Разобьем полупрямую $(0, \infty)$ на промежутки: $\Delta_0 = (0, \mu_1^n]$, $\Delta_1 = (\mu_1^n, \mu_2^n], \ldots, \Delta_{r-1} = (\mu_{r-1}^n, \mu_r^n]$, $\Delta_r = (\mu_r^n, \infty)$, причем полуинтервал Δ_0

отсутствует, если $\mu_1 = 0$. Каждому промежутку Δ_j сопоставим пару чисел u_j и v_j, $0 \leqslant j \leqslant r$ (если $\mu_1 = 0$, то $1 \leqslant j \leqslant r$) по правилу: $u_0 = 0$,

$$u_j = \frac{\mu_j^{2k}\mu_{j+1}^{2n} - \mu_j^{2n}\mu_{j+1}^{2k}}{\mu_{j+1}^{2n} - \mu_j^{2n}}, \quad v_j = \frac{\mu_{j+1}^{2k} - \mu_j^{2k}}{\mu_{j+1}^{2n} - \mu_j^{2n}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant r-1,$$

где $u_r = \mu_r^{2k}$, $v_0 = \mu_1^{-2(n-k)}$ и $v_r = 0$.

Теорема. *Пусть $T\colon \mathbb{C}^d \mapsto \mathbb{C}^d$ — ненулевой нормальный оператор и $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ — его собственные числа в ортонормированном базисе из его собственных векторов. Если $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_j$, $0 \leqslant j \leqslant r$, то*

$$E(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n) = \sqrt{\delta_0^2 u_j + \delta_n^2 v_j},$$

и для любого $\theta \in \mathbb{C}$ такого, что $|\theta| \leqslant 1$, и любого линейного оператора $B\colon \mathbb{C}^d \mapsto \mathbb{C}^d$, для которого тот же базис является базисом из его собственных векторов с собственными числами

$$\beta_i = \frac{v_j\overline{\lambda}_i^n\lambda_i^k}{u_j + |\lambda_i|^{2n}v_j} + \theta\frac{\sqrt{u_jv_j}}{u_j + |\lambda_i|^{2n}v_j}\sqrt{-|\lambda_i|^{2k} + u_j + |\lambda_i|^{2n}v_j}, \quad 1 \leqslant i \leqslant d,$$

линейный оператор $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \mapsto \mathbb{C}^d$, действующий по правилу

$$\widehat{\varphi}(\xi, \eta) = (T^k - BT^n)\xi + B\eta,$$

является оптимальным методом восстановления.

Литература

1. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб.—2009.—Т. 200, № 5.—С. 37–54.
2. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации // Тр. МИАН.—2010.—Т. 269.—С. 181–192.

СКОРОСТЬ УБЫВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ — ЯКОБИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ p-ВАРИАЦИИ

И. И. Магомедов (Россия, Махачкала; ДГУ),
Р. И. Магомедов (Россия, Махачкала; ДГУ)

Пусть последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$, где

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad a_i > 0,\ i = 0, 1, \ldots, n,$$

ортономирована по весу $h(\alpha, \beta, x) = h(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, а последовательность $\{Q_m(y)\}$, где

$$Q_m(y) = b_0 + b_1 y + \ldots + b_m y^m, \quad b_j > 0,\ j = 0, 1, \ldots, m,$$

ортонормирована по весу $\ell(\alpha', \beta', y) = \ell(y) = (1-y)^{\alpha'}(1+y)^{\beta'}$, $\alpha' > -1$, $\beta' > -1$, и эти последовательности заданы на $[-1, 1]$.

Тогда последовательность $\{\Phi_{nm}(x, y)\}$, где

$$\Phi_{nm}(x, y) = P_n(x) Q_n(y),$$

будет ортонормирована в области $D = \{-1 \leqslant x \leqslant 1; -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ по весу [1, 3]

$$\rho(x, y) = h(x)\ell(y),$$

т. е.

$$\iint\limits_D \rho(x, y)\, \Phi_{ij}(x, y)\, \Phi_{i'j'}(x, y)\, dx\, dy = \delta_{ij}\delta_{i'j'}, \quad i, j, i', j' = 0, 1, \ldots, n.$$

Пусть функция $f(x, y) \in H_p$ задана в области D, где $p \geqslant 1$, H_p — класс функций ограниченной p-вариации, для которых при любых разбиениях отрезка $[-1, 1]$

$$-1 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1 \quad \text{и} \quad -1 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots \leqslant y_m = 1$$

будут выполнены три условия:

$$\sup_{x_\nu,\, y} \sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu, y) - f(x_{\nu-1}, y)|^p < \infty; \quad \sup_{x,\, y_\mu} \sum_{\mu=1}^{m} |f(x, y_\mu) - f(x, y_{\mu-1})|^p < \infty;$$

$$\sup_{x_\nu,\, y_\mu} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} |f(x_\nu, y_\mu) - f(x_{\nu-1}, y_\mu) - f(x_\nu, y_{\mu-1}) + f(x_{\nu-1}, y_{\mu-1})|^p < \infty.$$

При $p = 1$ получается класс Харди [2]. Если $1 \leqslant p < \infty$, то справедливо строгое включение $H_p \subset H_q$.

Предположим, что такая функция $f(x,y)$ в области D разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье — Якоби по многочленам $\Phi_{nm}(x,y)$.

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m} \Phi_{nm}(x,y), \tag{1}$$

где

$$c_{n,m} = \iint\limits_{D} \rho(x,y)\, f(x,y)\, \Phi_{nm}(x,y)\, dx\, dy \tag{2}$$

— коэффициенты Фурье. Тогда верна следующая оценка скорости коэффициентов: *если функция $f(x,y) \in H_p$ $(p \geqslant 1)$ задана на $[-1,1]$, то*

$$c_{n,m}(f) = O\left(\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{(n \cdot m)^{\frac{3}{2}q}} \right)^{\frac{1}{q}} = O\Big\{ (n \cdot m)^{-\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \Big\}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

если функция $f(x,y) \in H_p$ имеет на сегменте $[-1,1]$ производные по каждой переменной порядка r_1, r_2, т. е. $f^{(r_1,r_2)}(x,y) \in H_p$, то

$$c_{n,m}(f) = O\left\{ (n \cdot m)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{p} - r_1 - r_2} \right\} \quad (r_1, r_2 = 0, 1, 2, \ldots).$$

В [4] рассматривался вопрос равномерной сходимости двойных рядов Фурье по тригонометрической системе.

Литература

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2.—М: Мир, 1962.
2. *Hardy G. H.* On double Fourier series and espesially those wich represent the double zeta-function with reale and in commensurable parameres // Quart. J. Math.—1906.—Vol. 37, № 1.—P. 53–79.
3. *Суетин П. К.* Ортогональные многочлены по двум переменным.—М: Наука, 1988.—384 с.
4. *Голуубов Б. И.* О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной обобщенной вариации // Сиб. мат. журн.—1974.—Т. 15, № 2.—С. 262–291.
5. *Голуубов Б. И.* О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной обобщенной вариации. II // Сиб. мат. журн.—1974.—Т. 15, № 4.—С. 768–783.
6. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены.—М: Физматлит, 2007.—480 с.

БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМЫ ХААРА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

М. Г. Магомед-Касумов (Россия, Махачкала; ЮМИ)

Пусть $p(x)$ — измеримая на E функция такая, что $1 \leqslant \underline{p}(E) \leqslant \overline{p}(E) < \infty$, где $\underline{p}(M) = \operatorname{ess\,inf}_{x\in M} p(x)$, $\overline{p}(M) = \operatorname{ess\,sup}_{x\in M} p(x)$. Пусть $w(x)$ — весовая функция, определенная на E, т. е. $w(x)$ — неотрицательная, почти всюду (п. в.) положительная суммируемая функция. Через $L_w^{p(x)} = L_w^{p(x)}(E)$ обозначим пространство измеримых функций, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_E |f(x)|^{p(x)}\, w(x)\, dx < \infty.$$

Пространство $L_w^{p(x)}$ называется весовым пространством Лебега с переменным показателем. Норма в этом пространстве вводится следующим образом:

$$\|f\|_{p(\cdot),w}(E) = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_E \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} w(x)\, dx \leqslant 1\right\}.$$

Детальное рассмотрение этих пространств можно найти, например, в [1–3]. Отметим лишь, что важную роль в пространствах Лебега с переменным показателем играет условие Дини — Липшица

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{1}{|x-y|} \leqslant C. \tag{1}$$

Большой интерес представляют вопросы базисности классических ортогональных систем в упомянутых пространствах [4, 5]. В данной работе исследуется базисность системы Хаара $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ (определение функций Хаара [6]).

Ясно, что $\chi_k \in L_w^{p(\cdot)}$ для любого суммируемого веса $w(x)$. Но не при всяком весе $w(x)$ для функции $f \in L_w^{p(x)}$ существует ряд Фурье:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \chi_k, \quad c_k = \int\limits_0^1 f(x)\, \chi_k(x)\, dx. \tag{2}$$

Лемма. *Если выполнены условия:*

1) $w(x) \geqslant C_1(w) > 0$, $x \in E_1 = \{x : p(x) = 1\}$,

2) $\left\|w^{-1/p(\cdot)}\right\|_{p'(\cdot)}(E_2) < \infty$, $E_2 = [0,1] \setminus E_1$,

то для любой функции $f \in L_w^{p(\cdot)}$ можно построить ряд Фурье (2).

Таким образом, при условиях 1), 2) каждому элементу $f \in L_w^{p(x)}$ можно поставить в соответствие ряд Фурье (2). Возникает вопрос о том, в каких случаях указанный ряд будет сходиться к самой функции f. Ответ на этот вопрос дает теорема, приведенная ниже.

Введем некоторые обозначения. Пусть $E=[0,1]$. Через $\mathfrak{B}_\varepsilon$ обозначим множество всех двоичных интервалов из E длины меньше ε, а через $\mathfrak{B}_\varepsilon^{1,p}$ — такие двоичные интервалы $\Delta_k \in \mathfrak{B}_\varepsilon$, что $\underline{p}(\Delta_k)=1$:

$$\mathfrak{B}_\varepsilon = \{\Delta_k : |\Delta_k| < \varepsilon\}, \quad \mathfrak{B}_\varepsilon^{1,p} = \left\{\Delta_k \in \mathfrak{B}_\varepsilon : \underline{p}(\Delta_k) = 1\right\}.$$

Теорема. *Пусть дано пространство Лебега с переменным показателем $L_w^{p(x)}(E)$, где $p(x)$ удовлетворяет условию* (1)*, а $w(x)$ удовлетворяет условиям* 1), 2)*. Система Хаара будет базисом пространства $L_w^{p(x)}(E)$, если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняются условия:*

$$\sup_{B\in\mathfrak{B}_\varepsilon^{1,p}} \frac{1}{|B|}\int\limits_B w(x)\,dx < C(w),$$

$$\sup_{B\in\mathfrak{B}\setminus\mathfrak{B}_\varepsilon^{1,p}} \left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w(x)^{-\frac{1}{\underline{p}(B)-1}}\right)^{\underline{p}(B)-1} < C(p,w).$$

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Мат. заметки.—1979.—Т. 26, № 4.—С. 613–632.
2. *Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012.—267 с.—(Итоги науки. Юг России. Мат. монография. Вып. 5).
3. *Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents.—Berlin: Springer, 2011.—518 p.—(Lecture Notes in Math. Vol. 2017).
4. *Шарапудинов И. И.* О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(t)}([0,1])$ и принципе локализации в среднем // Мат. сб.—1986.—Т. 130, вып. 2 (6), № 172.—С. 275–283.
5. *Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближений в пространствах $L^{p(x)}$ // Anal. Math.—2007.—Vol. 33, № 2.—P. 135–153.
6. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды.—М.: АФЦ, 1999.—560 с.

О РАЗДЕЛЕНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

Мелихов С. Н. (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

В теории аппроксимации, уравнений свертки в пространствах аналитических функций довольно часто используется следующее утверждение о разделении особенностей аналитических функций, называемое теоремой Пуанкаре — Ароншайна (при этом $A(G)$ — пространство всех аналитических в G функций).

Пусть G_1, G_2 — открытые подмножества $\mathbb{C}$, имеющие непустое пересечение. Для любой функции $f \in A(G_1 \cap G_2)$ существуют функции $f_j \in A(G_j)$, $j = 1, 2$, такие, что $f = f_1 - f_2$ в $G_1 \cap G_2$.

Отметим, что этот результат является следствием гораздо более общего результата о расщеплении, используемого при доказательстве теоремы Миттаг-Леффлера (см., например, [1, теорема 3.2.2]). Он основан на использовании пары пространств $A(G)$, $C^\infty(G)$, оператора Коши — Римана $d/d\overline{z}$ (G — открытое подмножество $\mathbb{C}$) и следующих их свойств:

1) $A(G)$ — ядро оператора $d/d\overline{z} : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$.

2) Оператор $d/d\overline{z} : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ сюръективен.

В докладе идет речь об обобщении результата о расщеплении на случай некоторого пространства $E(G) \subset A(G)$ и соответствующего ему пространства бесконечно дифференцируемых функций $E^\infty(G)$. При этом тройка $E(G)$, $E^\infty(G)$, $d/d\overline{z}$ обладает свойствами 1), 2). В частности, доказан аналог приведенного выше варианта теоремы Пуанкаре — Ароншайна для пространства $A^{-\infty}(G)$ аналитических функций полиномиального роста вблизи границы G (при этом G_1, G_2 — ограниченные выпуклые области в $\mathbb{C}$).

Литература

1. *Berenstein C. A., Gay R.* Complex Variables. An Introduction.—N. Y.: Springer-Verlag, 1991.—652 p.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 14.A18.21.0356.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ДУАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АЛГЕБР

А. Х. Назиев (Россия, Рязань; РГУ им. С. А. Есенина)

В теории топологических векторных пространств важную роль играют классы борнологических, бочечных, инфрабочечных и близких им пространств. Это пока трудно сказать об их аналогах в теории топологических алгебр, для которых не найдено даже удобных дуальных характеризаций. На наш взгляд, причина этого заключается в том, что определения соответствующих классов топологических алгебр дословно переносят из теории топологических векторных пространств (например, бочечными называют топологические алгебры, являющиеся бочечными топологическими векторными пространствами). Мы же полагаем, что определения нужно не переносить дословно, а соответствующим образом модифицировать для каждого класса алгебр отдельно. Проделаем это для одного класса топологических алгебр с инволюцией.

Будем называть LC^*-алгеброй произвольную коммутативную ассоциативную комплексную алгебру с единицей и инволюцией, наделенную топологией, определяемой подходящей системой C^*-полунорм. Для любой LC^*-алгебры A через $\mathrm{X}^*(\mathrm{A})$ (соответственно, $\mathrm{X}^*_{\mathrm{c}}(\mathrm{A})$) будем обозначать множество всех (соответственно, всех непрерывных) гомоморфизмов из A в поле $\mathbb{C}$, сохраняющих единицу и инволюцию, наделяя это множество топологией поточечной сходимости. Множество $S \subset \mathrm{X}^*(\mathrm{A})$ будем называть слабо (соответственно, сильно) ограниченным, если для любого конечного (соответственно, ограниченного) множества $B \subset A$ множество $\{\chi(b)\colon \chi \in S,\ b \in B\}$ ограничено в $\mathbb{C}$. LC^*-алгебру A будем называть: а) C^*-борнологической, б) C^*-бочечной, в) C^*-инфрабочечной, если на A непрерывна каждая C^*-полунорма, которая, соответственно: а) ограничена на всех ограниченных множествах алгебры A; б) полунепрерывна снизу; в) обладает свойствами а) и б). Так определенные объекты уже обладают всеми «надлежащими» свойствами. В частности, для них имеют место удобные дуальные характеризации, вполне аналогичные своим прообразам из теории локально выпуклых пространств.

Теорема 1. *LC^*-алгебра A C^*-борнологична тогда и только тогда, когда каждый сильно ограниченный компакт из $\mathrm{X}^*(\mathrm{A})$ равностепенно непрерывен.*

Теорема 2. *LC^*-алгебра A C^*-бочечна тогда и только тогда, когда в $\mathrm{X}^*_{\mathrm{c}}(\mathrm{A})$ замыкание каждого слабо ограниченного множества компактно и равностепенно непрерывно.*

Теорема 3. *LC^*-алгебра A C^*-инфрабочечна тогда и только тогда, когда в $\mathrm{X}^*_{\mathrm{c}}(\mathrm{A})$ замыкание каждого сильно ограниченного множества компактно и равностепенно непрерывно.*

Заметим, что эти теоремы являются обобщениями (и даже усилениями) известных теорем Нахбина и Сироты о пространствах непрерывных функций.

ВЕСОВЫЕ КЛАССЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Н. Ю. Нестеров (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть (X, ρ) — некое метрическое пространство. Весом будем называть некоторую фиксированную функцию $v : X \to (0, \infty)$. Обозначим через $C(X)$ множество всех непрерывных комплекснозначных функций на X и рассмотрим его весовой подкласс:

$$C_v(X) = \left\{ f \in C(X) : \ \|f\|_v = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{v(x)} < \infty \right\}.$$

Для пространств $C_v(X)$ решены следующие задачи. Во-первых, изучен вопрос о нетривиальности пространства $C_v(X)$. Именно, доказано, что для того чтобы класс $C_v(X)$ содержал функцию f, отличную от 0 в заданной точке $x_0 \in X$, необходимо и достаточно, чтобы вес v был локально отграничен от 0 в точке x_0.

Далее, как в [1] и [2], введено понятие ассоциированного веса $\widetilde{v}$ с весом v и показано, что он задает то же пространство, что и v, причем с сохранением нормы. Это позволяет ограничиться при рассмотрении пространств $C_v(X)$ только полунепрерывными снизу весами.

Вопрос о полноте $C_v(X)$ полностью решен в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть v — полунепрерывный снизу вес на X. Пространство $C_v(X)$ банахово тогда и только тогда, когда вес v локально ограничен сверху на X.*

Изучены также задачи о вложениях и компактных вложениях классов $C_v(X)$.

Теорема 2. *Пусть v_1, v_2 полунепрерывные снизу, локально ограниченные сверху на X веса. Для того чтобы $C_{v_1}(X)$ было (непрерывно) вложено в $C_{v_2}(X)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа $C > 0$, при которой $v_1(x) \leqslant C\, v_2(x)$ для всех $x \in X$.*

Теорема 3. *Пусть X имеет хотя бы одну предельную точку; v_1, v_2 локально ограничены сверху и полунепрерывны снизу на X. Тогда компактное вложение пространства $C_{v_1}(X)$ в $C_{v_2}(X)$ не может иметь места.*

В случае же, когда у X нет предельных точек, на примере демонстрируется, что компактное вложение может выполняться.

Наконец, на основании теоремы Ханса Хана [3] установлено необходимое и достаточное условие того, что фиксированный класс $C_v(X)$ может быть задан с помощью эквивалентного непрерывного веса.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 14.A18.21.0356, а также гранта ЮФУ «Весовые пространства бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций. Общая теория и приложения».

Теорема 4. *Пусть вес $v \in W_X$. Для того чтобы пространство $C_v(X)$ могло быть задано непрерывным весом, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{x \in X} \frac{\lim\limits_{\delta \to +0} \sup\limits_{\rho(x,y)<\delta} v(y)}{v(x)} < \infty.$$

В работе приводится пример веса v, для которого последнее условие нарушено. Это говорит о том, что при рассмотрении пространств $C_v(X)$ нельзя ограничиться полунепрерывными снизу весами.

Литература

1. *Bierstedt K. D., Bonet J., Taskinen J.* Associated weights and spaces of holomorphic functions // Stud. Math.—1998.—Vol. 127.—P. 137–168.
2. *Абанин А. В.* Весовые пространства непрерывных и голоморфных функций // Мат. анализ и мат. моделирование: тр. междунар. конф. молодых учен.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2010.—С. 15–20.
3. *Hahn H.* Theorie der reellen Funktionen.—Berlin, 1921.—616 p.
4. *Baire R.* Sur la representation des fonctions discontinues // Acta Math.—1906.—Vol. 30.—P. 1–48.
5. *Katětov M.* On real-valued functions in topological spaces // Fundamenta Math.—1951.—Vol. 38.—P. 85–91.

NARROW ORTHOGONALLY ADDITIVE OPERATORS[1]

M. A. Pliev (Russia, Vladikavkaz; SMI)

We extend the notion of narrow operators to nonlinear maps on vector lattices. The main objects are orthogonally additive operators and, in particular, abstract Uryson operators. Most of the results extend known theorems obtained by O. Maslyuchenko, V. Mykhaylyuk and M. Popov published in Positivity 13 (2009), pp. 459–495, for linear operators. For instance, we prove that every orthogonally additive laterally-to-norm continuous C-compact operator from an atomless Dedekind complete vector lattice to a Banach space is narrow. Another result asserts that the set $\mathcal{U}_{on}^{lc}(E,F)$ of all order narrow laterally continuous abstract Uryson operators is a band in the vector lattice of all laterally continuous abstract Uryson operators from an atomless vector lattice E with projection property to a Dedekind complete vector lattice F. The band generated by the disjointness preserving laterally continuous abstract Uryson operators is the orthogonal complement to $\mathcal{U}_{n}^{lc}(E,F)$.

References

1. *Maslyuchenko O. V., Mykhaylyuk V. V., Popov M. M.* A lattice approach to narrow operators // Positivity.—2009.—Vol. 13, № 3.—P. 459–495.
2. *Pliev M. A.* Narrow operators on lattice-normed spaces // Cent. Eur. J. Math.—2011.—Vol. 9, № 6.—P. 1276–1287.
3. *Popov M., Randrianantoanina B.* Narrow Operators on Function Spaces and Vector Lattices.—2013.—(De Gruyter Stud. in Math. 45).

[1]The study was supported by by a grant from the Russian Foundation for Basic Research, project 12-01-00623-a.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА[1]

Д. М. Поляков (Россия, Воронеж; НИИМ ВГУ)

Пусть $L_2[0,1]$ — гильбертово пространство суммируемых с квадратом на $[0,1]$ комплекснозначных функций. Через $W_2^4[0,1]$ обозначим пространство Соболева $\{y \in L_2[0,1] \to \mathbb{C} : y$ имеет три непрерывные производные, y''' абсолютно непрерывна и $y^{IV} \in L_2[0,1]\}$.

Рассматривается оператор

$$L : D(L) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1],$$

который определяется следующим дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{IV} - a(t)y'' - b(t)y, \quad a, b \in L_2[0,1].$$

Область определения

$$y \in D(L) = \left\{ y \in W_2^4[0,1] : y(0) = y(1) = 0,\ y''(0) = y''(1) = 0 \right\}.$$

Оператор

$$L_0 : D(L_0) = D(L) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad L_0 y = y^{IV},$$

хорошо изученный самосопряженный оператор с компактной резольвентой. Спектр $\sigma(L_0)$ допускает представление

$$\sigma(L_0) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}, \quad \lambda_n = \pi^4 n^4, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ_n, $n \in \mathbb{N}$, является одномерным. Соответствующая собственная функция имеет вид $e_n(t) = \sqrt{2} \sin \pi n t$.

С помощью метода подобных операторов [1] были получены следующие результаты [2].

Теорема 1. *Дифференциальный оператор L является оператором с компактной резольвентой, и его собственные значения $\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \dots$ допускают следующую асимптотику*

$$\widetilde{\lambda}_n = (\pi n)^4 + (\pi n)^2 \int_0^1 a(t)\, dt - (\pi n)^2 \int_0^1 a(t) \cos 2\pi n t\, dt - \frac{1}{\pi^4} \sum_{\substack{l=1,\\ l \neq n}}^{\infty} \frac{a_{nl} a_{ln}}{l^4 - n^4} + \alpha_n n^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

где (α_n) — суммируемая последовательность и

$$a_{nl} = \pi^2 l^2 \left(\int_0^1 a(t) \cos \pi(l-n)t\, dt - \int_0^1 a(t) \cos \pi(l+n)t\, dt \right), \quad n, l \geqslant 1.$$

Теорема 2. *Оператор $-L$ является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов.*

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00378.

Литература

1. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов.—Воронеж: Изд-во ВГУ, 1986.—165 с.
2. *Поляков Д. М.* Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка // Вестник ВГУ.—2012.—№ 1.—С. 179–181.

О ЧИСЛЕННОМ ДИАПАЗОНЕ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА[1]

Т. Х. Расулов (Узбекистан, Бухара; БухГУ),
Г. И. Ботиров (Узбекистан, Бухара; БухГУ)

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство, и $\mathcal{A}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ — линейный оператор с областью определения $D(\mathcal{A})\subset\mathcal{H}$. Множество

$$W(\mathcal{A}) := \{(\mathcal{A}x, x) :\, x\in D(\mathcal{A}),\ \|x\|=1\}$$

называется численным диапазоном оператора $\mathcal{A}$. Из определения видно, что множество $W(\mathcal{A})$ является подмножеством комплексной плоскости и геометрические свойства множества $W(\mathcal{A})$ дает некоторые информации об операторе $\mathcal{A}$.

Изучение численного диапазона линейного оператора в гильбертовом пространстве является одним из основных методов в изучении местоположения спектра таких операторов. Это понятие впервые введено в работе [1] и доказано, что численный диапазон матрицы содержит все ее собственные значения. В работе [2] показано, что численный диапазон оператора является выпуклым. Вышесказанные результаты верны не только для матриц, но и в более общем случае для любого линейного ограниченного оператора. В работе [3] доказано, что спектр любого линейного ограниченного оператора содержится в замыкании численного диапазона этого оператора. Вслед за этим это понятие обобщено разными способами, см. например [4].

В настоящей работе исследован численный диапазон обобщенной модели Фридрихса. Такие операторы обычно встречаются в задачах квантовой механики, статистической механики и гидродинамики.

Пусть $\mathbf{T}^3$ — трехмерный тор, т. е. куб $(-\pi,\pi]^3$ — с соответствующим отождествлением противоположных граней, $L_2(\mathbf{T}^3)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbf{T}^3$.

Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0=\mathbf{C}$ и $\mathcal{H}_1=L_2(\mathbf{T}^3)$, т. е. $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1$.

Рассмотрим обобщенную модель Фридрихса $\mathcal{A}(p)$, $p\in\mathbf{T}^3$, действующую в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ как блочно-операторная матрица

$$\mathcal{A}(p)=\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00}(p) & \mathcal{A}_{01} \\ \mathcal{A}_{10} & \mathcal{A}_{11}(p)\end{pmatrix},$$

где элементы $\mathcal{A}_{ii}(p):\mathcal{H}_i\to\mathcal{H}_i$, $i=0,1$, $p\in\mathbf{T}^3$ и $\mathcal{A}_{ij}:\mathcal{H}_j\to\mathcal{H}_i$, $i,j=0,1$, $i\neq j$, определяются по формулам

$$(\mathcal{A}_{00}(p)f_0)_0=u(p)f_0,\quad (\mathcal{A}_{01}f_1)_0=\int\limits_{\mathbf{T}^3} v(s)\,f_1(s)\,ds,$$

$$(\mathcal{A}_{10}f_0)_1(q)=v(q)f_0,\quad (\mathcal{A}_{11}(p)f_1)_1(q)=w(p,q)f_1(q).$$

[1]Работа поддержана грантом Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG), проект № TR368/6-2.

Здесь $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1$, $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и $w(\cdot, \cdot)$ — вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbf{T}^3$ и $(\mathbf{T}^3)^2$ соответственно.

Очевидно, что оператор $\mathcal{A}(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, ограничен и самосопряжен в $\mathcal{H}$.

Пусть оператор $\mathcal{A}_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, действует в $\mathcal{H}$ как

$$\mathcal{A}_0(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{11}(p) \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbf{T}^3.$$

Оператор возмущения $\mathcal{A}(p) - \mathcal{A}_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, оператора $\mathcal{A}_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, совпадает с существенным спектром оператора $\mathcal{A}_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$. Известно, что

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_0(p)) = [w_{\min}(p), w_{\max}(p)],$$

где числа $w_{\min}(p)$ и $w_{\max}(p)$ определяются следующим образом:

$$w_{\min}(p) = \min_{q \in \mathbf{T}^3} w(p, q), \quad w_{\max}(p) = \max_{q \in \mathbf{T}^3} w(p, q).$$

Из последних фактов следует, что $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}(p)) = [w_{\min}(p), w_{\max}(p)]$.

При каждом фиксированном $p \in \mathbf{T}^3$ определим регулярную в $\mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}(p))$ функцию (детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором $\mathcal{A}(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$)

$$\Delta(p\,; z) = u(p) - z - \int\limits_{\mathbf{T}^3} \frac{v^2(s)}{w(p, s) - z}\, ds.$$

Установим связь между собственными значениями оператора $\mathcal{A}(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, и нулями функции $\Delta(p\,; \cdot)$, $p \in \mathbf{T}^3$.

Лемма 1. *При каждом фиксированном $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $\mathcal{A}(p)$ имеет собственное значение $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}(p))$ тогда и только тогда, когда $\Delta(p\,; z) = 0$.*

Из леммы 1 вытекает, что

$$\sigma(\mathcal{A}(p)) = \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}(p)) \cup [w_{\min}(p); w_{\max}(p)],$$

где

$$\sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}(p)) = \big\{z \in \mathbf{C} \setminus [w_{\min}(p); w_{\max}(p)] : \Delta(p\,; z) = 0\big\}, \quad p \in \mathbf{T}^3.$$

Далее, будем предполагать, что функция $w(\cdot, \cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $(p_0, q_0) \in (\mathbf{T}^3)^2$ и единственный невырожденный максимум в точке $(p_1, q_1) \in (\mathbf{T}^3)^2$. Положим $m := w(p_0, q_0)$, $M := w(p_1, q_1)$. Тогда из непрерывности функции $v(\cdot)$ на $\mathbf{T}^3$ следует, что

$$\int\limits_{\mathbf{T}^3} \frac{v^2(s)}{w(p, s) - m}\, ds > 0, \quad \int\limits_{\mathbf{T}^3} \frac{v^2(s)}{w(p, s) - M}\, ds < 0, \quad p \in \mathbf{T}^3,$$

являются конечными интегралами.

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует, что

$$\Delta(p_0\,; m) = \lim_{p \to p_0} \Delta(p\,; m), \quad \Delta(p_1\,; M) = \lim_{p \to p_1} \Delta(p\,; M),$$

и следовательно, функции $\Delta(\cdot\,; m)$ и $\Delta(\cdot\,; M)$ непрерывны на $\mathbf{T}^3$.

Следующая лемма описывает условия существования собственных значений оператора $\mathcal{A}(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, на полуосях $(-\infty, m)$ и (M, ∞).

Лемма 2. 1) *Если* $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p\,; m) < 0$, *то для любого* $p \in \mathbf{T}^3$ *оператор* $\mathcal{A}(p)$ *имеет единственное собственное значение* $e(p)$, *лежащее в полуоси* $(-\infty, m)$.

2) *Если* $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p\,; M) > 0$, *то для любого* $p \in \mathbf{T}^3$ *оператор* $\mathcal{A}(p)$ *имеет единственное собственное значение* $E(p)$, *лежащее в полуоси* (M, ∞).

Основной результат настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p\,; m) < 0$ *и* $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p\,; M) > 0$, *то для любого* $p \in \mathbf{T}^3$ *имеет место равенство*

$$W(\mathcal{A}(p)) = [e(p), E(p)],$$

причем $e(p) < m$ *и* $E(p) > M$ *при всех* $p \in \mathbf{T}^3$.

Первый автор приносит благодарность Математическому институту университета Берна (Берн, Швейцария) за гостеприимство и поддержку.

Литература

1. *Toeplitz O.* Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer // Math. Z.—1918.—Vol. 2, № 1–2.—P. 187–197.
2. *Hausdorff F.* Der Wertvorrat einer Bilinearform // Math. Z.—1919.—Vol. 3, № 1.—P. 314–316.
3. *Wintner A.* Zur Theorie der beschrankten Bilinearformen // Math. Z.—1929.—Vol. 30, № 1.—P. 228–281.
4. *Langer H., Markus A. S., Matsaev V. I., Tretter C.* A new concept for block operator matrices: the quadratic numerical range // Linear Algebra Appl.—2001.—Vol. 330, № 1–3.—P. 89–112.

ИНДЕКС И ГРАФЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ W^*-ПОДАЛГЕБР

А. А. Рахимов (Узбекистан, Ташкент; ТАДИ),
Х. Х. Болтаев (Узбекистан, Ташкент; ИМ НУУз)

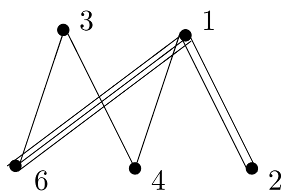
Пусть R и $Q(\subset R)$ — пара конечных вещественных W^*-подфакторов. Число $[M : N] = \dim_Q L^2(R)$ называется индексом Q в R. Например, для матричных алгебр $[M_n(\mathbb{R}) : M_m\mathbb{R}] = \left(\frac{n}{m}\right)^2$.

Пусть $R \cong \bigoplus_{i+1}^k M_{n_i}(F)$ и $Q \cong \bigoplus_{j+1}^l M_{m_j}(F)$ — конечномерные вещественные W^*-алгебры с $Q \subset R$, где $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{H}$ — тело кватернионов. Положим $\overrightarrow{n} = (n_1, \ldots, n_k)$, $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_l)$ и назовем их вектор-размерностями R и Q соответственно. Определим элементы Λ_{ij} $k \times l$-матрицы Λ_Q^R: Λ_{ij} — число i-го слагаемого в представление R в j-м слагаемом Q [1]. Покажем на примере.

Пример 1. Пусть $R = M_6(\mathbb{R}) \bigoplus M_4(\mathbb{R}) \bigoplus M_2(\mathbb{R})$ и $Q = M_3(\mathbb{R}) \bigoplus \mathbb{R}$. Вложение $Q \subset R$ задается как:

$$(x, y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x \in M_3(\mathbb{R}),\ y \in \mathbb{R} \right).$$

Так как слагаемые $M_3(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}$ в представление Q участвуют в первом слагаемом R, один и три раза соответственно, то $\Lambda_{11} = 1$ и $\Lambda_{21} = 3$; а во втором слагаемом алгебры R они участвуют по одному разу и поэтому $\Lambda_{12} = \Lambda_{22} = 1$. Аналогично, $\Lambda_{13} = 0$ и $\Lambda_{23} = 2$. Таким образом, этот вложение имеет следующую матрицу: $\Lambda_Q^R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. С помощью матрицы Λ_Q^R построим соответствующий граф следующим образом. Верхние и нижние вершины графа определяются количеством слагаемых в представлении Q и R, соответственно. Их нумерация совпадает с координатами векторов $\overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{m}$ соответственно. Число ребер, соединяющих две вершины, определяется числом Λ_{ij}. Например, так как $\Lambda_{11} = 1$, то число ребер между верхней вершиной 3 и нижней вершиной 6 равно 1. Таким образом, матрице Λ_Q^R соответствует следующий граф:

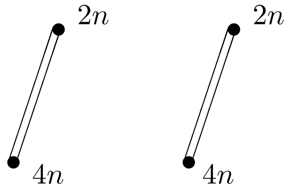


Легко видеть, что вложение неединственно, а следовательно, матрица Λ_Q^R и ее граф также имеют не единственное представление.

Теорема 1. *Пусть $N \subset M$ и $N_1 \subset M_1$ — пары конечномерных W^*-алгебр, для которых имеются совпадающие графы. Тогда существует изоморфизм θ : $M \to M_1$ с $\theta(N) = N_1$.*

Замечание 1. Теорема 1 неверна в вещественном случае, как показывает следующий пример.

Пример 2. Пусть $Q_1 = M_n(\mathbb{H}) \subset R_1 = M_{2n}(\mathbb{H})$ и $Q_2 = M_{2n}(\mathbb{R}) \subset R_2 = M_{4n}(\mathbb{R})$, $n \geqslant 1$. Рассмотрим графы этих пар.



Очевидно, что графы одинаковы. Однако, как известно [2], вещественные факторы R_1 и R_2 и вещественные подфакторы Q_1 и Q_2 не изоморфны соответственно.

В комплексном случае верно равенство $[M : N] = \|\Lambda_N^M\|^2$ [1]. Известно [3], если $Q \subset R$ — пара вещественных W^*-факторов, то $[R : Q] = [R + iR : Q + iQ]$, а следовательно, $[R : Q] = [R + iR : Q + iQ] = \|\Lambda_{Q+iQ}^{R+iR}\|^2 = \|\Lambda_Q^R\|^2$. Однако, в общем случае возможно $[R : Q] \neq \|\Lambda_Q^R\|^2$ или $[R : Q] \neq [R + iR : Q + iQ]$.

Пусть $e_N : L^2(M) \to L^2(N)$ — канонический проектор, $E_N : M \to N$ — τ-инвариантное условное ожидание и $\langle M, e_N\rangle = \{M \cup \{e_N\}\}''$ [1].

Теорема 2. *След τ продолжается на W^*-алгебру $\langle M, e_N\rangle$ так, что $E_M(e_N) = \lambda \cdot \mathbb{1}$ (для некоторого λ) тогда и только тогда, когда $\Lambda^T\Lambda\overline{x} = \lambda^{-1}\overline{x}$. В этом случае: $\lambda^{-1} = \|\Lambda\|^2$ и след τ называется Марковским. Здесь $x \in \mathbb{R}^k$, $\overline{x} = x^t$.*

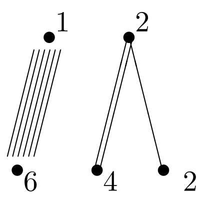
Теорема 3. *Для пары $N \subseteq M$ существует единственный Марковский след тогда и только тогда, когда граф является связным.*

Пример 3. Пусть $R = M_6(\mathbb{R}) \bigoplus M_2(\mathbb{H}) \bigoplus \mathbb{H}$ и $Q = \mathbb{R} \bigoplus \mathbb{H}$. Легко видеть, что подалгебру Q можно вложит в R единственным образом:

$$(x, y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, (y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{H} \right),$$

которая имеет следующую матрицу и граф:

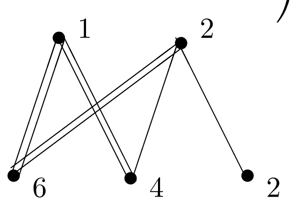
$$\Lambda_Q^R = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Очевидно, что этот граф является несвязным. Теперь, рассмотрим его обертывающие W^*-алгебры: $M = R + iR$ и $N = Q + iQ$. Тогда $M =$

$M_6(\mathbb{C}) \bigoplus M_4(\mathbb{C}) \bigoplus M_2(\mathbb{C})$ и $N = \mathbb{C} \bigoplus M_2(\mathbb{C})$. Вложение $N \subset M$, задаваемое $(x, y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}, (y) : x \in \mathbb{C},\ y \in M_2(\mathbb{C}) \right)$, имеет следующую матрицу и граф:

$$\Lambda_N^M = \Lambda_{Q+iQ}^{R+iR} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$



Здесь, очевидно, граф является связным. Этот пример интересен тем, что вещественная пара не имеет связный граф, в то время как их обертывающая комплексная пара имеет связный граф. Поэтому, по теореме 3, для пары $N \subset M$ существует единственный Марковский след τ, а для пары $Q \subset R$, след не является Марковским.

Из этого следует

Теорема 4. *Существует пара $Q \subset R$ вещественных W^*-алгебр такая, что пара $Q + iQ \subset R + iR$ имеет единственный Марковский след, а для пары $Q \subset R$ след не является Марковским.*

Замечание 2. Как показывает пример 3 матрицы Λ_Q^R и Λ_{Q+iQ}^{R+iR} могут не совпадать.

Литература

1. *Jones V., Sunder V. S.* Introduction to Subfactors.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.—162 p.—(London Math. Soc. Vol. 234).
2. *Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A., Usmanov Sh. M.* Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.—235 p.—(Math. Appl. Vol. 418).
3. *Albeverio S., Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A., Dadakhodjaev R. A.* On Jones' index for real W^*-algebras // Eurasian Math. J.—2010.—Vol. 1, № 4.—P. 5–19.

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ АБЕЛЕВЫ И КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЯДЕРНЫЕ C^*-АЛГЕБРЫ

А. А. Рахимов (Узбекистан, Ташкент; ТАДИ),
М. Э. Нуриллаев (Узбекистан, Ташкент; ИМ НУУз)

Пусть A и B — комплексные или вещественные C^*-алгебры. Рассмотрим $A \otimes B$ – их алгебраическое тензорное произведение. Норма γ на инволютивной алгебре $A \otimes B$ называется C^*-нормой, если $\gamma(x^*x) = \gamma(x)^2$ для всех $x \in A \otimes B$. Любая C^*-норма на $A \otimes B$ является так называемой *кросснормой*, т. е. удовлетворяет условию $\gamma(a \otimes b) = \|a\| \cdot \|b\|$ для всех $a \in A$, $b \in B$. На $A \otimes B$ всегда существуют следующие две нормы:

$$\|u\|_\lambda = \sup\left\{ | \otimes_{i=1}^n f_i(u)| : \ f_i \in X_i^*, \ \|f_i\| \leqslant 1, \ 1 \leqslant i \leqslant n \right\},$$

$$\|u\|_\gamma = \inf \left\{ \sum_j \prod_{i=1}^n \|x_j^{(i)}\| \right\},$$

где $u = \sum_j \otimes_{i=1}^n x_j^{(i)} \in \otimes_{i=1}^n X_i$ и $\otimes_{i=1}^n f_i(u) = \sum_j \prod_{i=1}^n x_j^{(i)}$.

Легко показать, что для любой C^*-кросснормы $\| \cdot \|_\eta$ имеет место

$$\| \cdot \|_\lambda \leqslant \| \cdot \|_\eta \leqslant \| \cdot \|_\gamma,$$

т. е. $\| \cdot \|_\lambda$ — наименьшая, а $\| \cdot \|_\gamma$ — наибольшая C^*-норма на $A \otimes B$.

Определение. Комплексная (вещественная) C^*-алгебра A называется *ядерной*, если для любой комплексной (соответственно, вещественной) C^*-алгебры B нормы $\|\cdot\|_{\min}$ и $\|\cdot\|_{\max}$ на $A \otimes B$ (и тем самым все C^*-нормы на $A \otimes B$) совпадают, т. е. A называется ядерной, если на $A \otimes B$ существует единственная C^*-норма.

В комплексном случае ядерные C^*-алгебры, в частности W^*-алгебры, достаточно хорошо изучены. Благодаря работ А. Конна, Э. Штермера, У. Хаагерупа, Э. Эфросса, С. Ланса и М. Чоя для W^*-алгебр доказана эквивалентность таких понятий, как ядерность, инъективность, гиперфинитность, полудискретность и аменабельность (за исключением $B(H)$). Однако, для вещественных C^*-алгебр, ядерность алгебры пока не изучена.

Верна следующая

Теорема 1. *Для любой вещественной C^*-алгебры $\Re$ на тензорном произведение $M_n(F) \otimes \Re$ существует единственная C^*-норма $\| \cdot \|_\otimes$, т. е. вещественная C^*-алгебра $M_n(F)$ является ядерной, где $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{H}\}$, и $\mathbb{H}$ — тело кватернионов. В этом случае $M_n(F) \otimes \Re \cong M_m(\Re)$ $(m \leqslant n)$.*

Отсюда получим

Следствие. *Всякая конечномерная вещественная C^*-алгебра является ядерной C^*-алгеброй.*

Далее рассмотрим абелевы C^*-алгебры.

Известно [1–3], что если A — вещественная абелева C^*-алгебра, тогда A изоморфна прямой сумме алгебр $L^\infty_\mathbb{R}(\Omega, \nu)$ и $L^\infty_\mathbb{C}(\Omega, \nu)$, где Ω — гиперстоунский компакт с мерой Радона ν, $L^\infty_\mathbb{R}(\Omega, \nu)$ (соответственно, $L^\infty_\mathbb{C}(\Omega, \nu)$) — алгебра всех существенно ограниченных вещественных (соответственно, комплексных) ν-измеримых функции на Ω.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 2. *Всякая вещественная абелева C^*-алгебра является ядерной.*

Литература

1. *Li BingRen.* Real Operator Algebras.—Singapore: World Sci. Publ. Company, 2003.—241 p.
2. *Li BingRen* Introduction to Operator Algebras.—Singapore: World Sci. Publ. Company, 1992.—738 p.
3. *Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A.* Real W^*-algebras, Actions of Groups and Index Theory for Real Factors.—Beau-Bassin: VDM Publ. House, 2010.—138 p.

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ НА ЖОРДАНОВУ СТРУКТУРУ ДЛЯ ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ РАЗМЕРА $n = 5$

М. В. Сеничев (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Ответ на вопрос подобна ли данная матрица теплицевой имеет значения для решения многих задач математики и ее приложений. В частности, задача об описании всех возможных ж.н.ф теплицевых матриц была поставлена Маки в июле 1999 г. на восьмой конференции ILAS в Барселоне. Он же в [1] показывает, что для матриц, собственным числам которых соответствует только одна жорданова клетка, всегда существует подобная теплицева матрица.

Определенное продвижение в решении вопроса «Любая ли матрица подобна теплицевой» было сделано Хейнигом в работе [2]. В частности, автор показывает, что существуют матрицы не подобные теплицевым, например, ($c \neq 0$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & c \end{pmatrix}$$

одним из его результатов является частичная классификация ж.н.ф теплицевых матриц размера 5×5 с одноточечным спектром.

Определение. $d_k = d_k(T, \lambda)$ число жордановых клеток, размером больше k для собственного значения $\lambda = 0$.

Определение. $(q + 2)$-набор $(n, d_0, d_1, \ldots, d_q)$ называется теплицево-допустимым, где n — размерность матрицы, $d_0 \geqslant d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_q \geqslant 0$ и $\sum_{k=0}^{q} d_k \leqslant n$, для которого существует теплицева матрица T размера $n \times n$ такая, что $d_k = d_k(T)$ для $k = 0, 1, \ldots, q$.

Теорема 1 (Хейниг, [2])**.** *Наборы* $(5, 3, 2)$ *при* $c = 0$, $(5, 2, 2, 1)$, $(5, 2, 1)$ *являются теплицево-допустимыми.*

Мы расширили результат, полученный Хейнигом. Для случая теплицевых матриц размера 5×5 с одноточечным спектром имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Набор* $(5, 4, 1)$ *является теплицево-допустимым.*

В дальнейшем планируется получить ответ на вопрос является ли телицево-допустимым набор $(5, 3, 1)$, тем самым добившись полной классификации для теплицевых матриц размера 5×5 с одноточечным спектром.

Литература

1. *Mackey D. S., Mackey N., Petrovic S.* Is every matrix similar to a Toeplitz matrix? // Linear Algebra Appl.—1999.—Vol. 1, № 297.—P. 87–105.
2. *Heinig G.* Not every matrix is similar to a Toeplitz matrix // Linear Algebra and its Appl.—2001.—Vol. 1, № 332–334.—P. 519–531.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БУШМАНА — ЭРДЕЙИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

С. М. Ситник (Россия, Воронеж; ВИ МВД)

Теория операторов преобразования составляет самостоятельный раздел современной математики, имеющий многочисленные приложения [1–4]. Важным классом операторов преобразования являются операторы Бушмана — Эрдейи. Название «операторы Бушмана — Эрдейи» было предложено автором, в последнее время оно стало общепринятым.

Изучение разрешимости и обратимости данных операторов было начато в 1960-х годах в работах Р. Бушмана и А. Эрдейи. Операторы Бушмана — Эрдейи или их аналоги изучались также в работах T. P. Higgins, Ta Li, E. R. Love, G. M. Habibullah, K. N. Srivastava, Динь Хоанг Ань, В. И. Смирнова, Н. А. Вирченко, И. Федотовой, А. А. Килбаса, О. В. Скоромник и ряде других работ. При этом изучались задачи о решении интегральных уравнений с этими операторами, их факторизации и обращения [5].

Важность операторов Бушмана — Эрдейи во многом обусловлена их многочисленными приложениями [6–10]. Например, они встречаются в следующих вопросах теории уравнений с частными производными: при решении задачи Дирихле для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу в четверти плоскости и установлении соотношений между значениями решений уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу на многообразии начальных данных и характеристике, теории преобразования Радона, так как в силу результатов Людвига действие преобразования Радона при разложении по сферическим гармоникам сводится как раз к операторам Бушмана — Эрдейи по радиальной переменной, при исследовании краевых задач для различных уравнений с существенными особенностями. Автором было впервые показано [8], что операторы Бушмана — Эрдейи являются операторами преобразования для дифференциального выражения Бесселя и изучены их специальные свойства именно как операторов преобразования.

В докладе рассматриваются приложения операторов преобразования Бушмана — Эрдейи различных классов к вложению пространств И. А. Киприянова в весовые пространства С. Л. Соболева, формулам для решений уравнений с частными производными с операторами Бесселя, уравнениям Эйлера — Пуассона — Дарбу, включая лемму Копсона, построению операторов обобщенного сдвига, операторам Дункла, преобразованию Радона, построению обобщенных сферических гармоник и B-гармонических полиномов, а также доказательству унитарности в пространстве Лебега обобщений классических операторов Харди. Приведен обзор результатов В. В. Катрахова по приложению операторов преобразования Бушмана — Эрдейи к построению нового класса псевдодифференциальных операторов и изучению введенного им класса краевых задач с K-следом с существенными особенностями в решениях.

Литература

1. *Carroll R. W.* Transmutation, Scattering Theory and Special Functions.—Amsterdam–N. Y.: North Holland Publ. Co., 1982.—457 p.—(Math. Stud. Vol. 69.)
2. *Carroll R. W.* Transmutation Theory and Applications.—Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1985.—351 p.—(Math. Stud. Vol. 117.)
3. *Ситник С. М.* Операторы преобразования и их приложения // Исследования по современному анализу и мат. моделированию / Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев.—Владикавказ, 2008.—С. 226–293.
4. *Sitnik S. M.* Transmutations and Applications: a Survey.—2010.—141 p.—[arXiv: 1012.3741].
5. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.—Gordon and Breach Science Publ., 1993.—1014 p.
6. *Sitnik S. M.* Buschman–Erdelyi Transmutations, Classification and Applications.—2013.—67 p.—[arXiv: 1304.2114].
7. *Sitnik S. M.* Buschman–Erdelyi transmutations, classification and applications // Analytic Methods of Anal. and Dif. Eq. (Amade 2012) / Ed. by M. V. Dubatovskaya, S. V. Rogosin.—Cambridge: Cambridge Sci. Publ. Cottenham, 2013.—31 p.
8. *Ситник С. М.* Унитарность и ограниченность операторов Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости.—Владивосток, 1990.—44 с.—(Препринт / ИАПУ ДВО РАН).
9. *Ситник С. М.* Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сонина — Пуассона // Научные ведомости БелГУ.—2010.—№ 5 (76), вып. 18.—С. 135–153.
10. *Sitnik S. M.* Some problems in the modern theory of transmutations // Spectral Theory and Differential Equations (STDE–2012).—Kharkiv, 2012.—P. 101–102.

STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRUM AND DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF THREE-MAGNON SYSTEMS IN THE ISOTROPIC FERROMAGNETIC NON-HEISENBERG MODEL WITH SPIN ONE AND NEAREST-NEIGHBOR INTERACTIONS

S. M. Tashpulatov (Uzbekistan, Tashkent; INP AS RUz)

We consider a three-magnon system in the isotropic Non-Heisenberf ferromagnet model with a coupling between nearest-neighbors. The structure of essential spectrum and discrete spectrum of the systems in a ν — dimensional lattice are investigated.

Let $\mathcal{H}$ be the symmetrical Fo'ck space and be system Hamiltonian

$$H = -J\sum_{m,\tau}(\vec{S}_m\vec{S}_{m+\tau}) - J_1\sum_{m,\tau}(\vec{S}_m\vec{S}_{m+\tau})^2, \tag{1}$$

acting in $\mathcal{H}$, where $\vec{S}_m = (S_m^x; S_m^y; S_m^z)$ is the atomic spin $s = 1$ operator in the node m, $J > 0$, $J_1 > 0$ are the bilinear and biquadratic exchange interaction parameters for nearest-neighbor atoms of the lattice, and τ denotes summation over the nearest neighbors. We set $S_m^{\pm} = S_m^x \pm iS_m^y$, where S_m^- and S_m^+ are the respective magnon creation and annihilation operators at the site m. Let φ_0 be the so-called vacuum vector, which is fully determined by the conditions $S_m^+\varphi_0 = 0$ and $S_m^z\varphi_0 = \varphi_0$, $||\varphi_0|| = 1$. The vectors $S_m^-S_n^-S_l^-\varphi_0$ describe the state of the system of three magnons located at the nodes m, n and l. Let $\mathcal{H}_3$ be the closure of the space formed by all linear combinations of these three vectors. Let H_3 be the restriction of the operator H in the space $\mathcal{H}_3$.

Proposition 1. *The space $\mathcal{H}_3$ is invariant with respect of the operator H. The operator H_3 is a bounded self-adjoint operator. It generates the bounded self-adjoint operator $\overline{H}_3$, acting in the space $l_2\left((Z^\nu)^3\right)$. The operator H_3 acts on the vector $\psi \in \mathcal{H}_3$ according to the formula $H_3\psi = \sum_{p,q,r}(\overline{H}_3 f)(p;q;r)S_p^-S_q^-S_r^-\varphi_0$.*

Proposition 2. *The Fourier transformation transforms the operator $\overline{H}_3$ into the bounded self-adjoint operator $\widetilde{H}_3$ acting in the space $\widetilde{\mathcal{H}}_3$.*

In the isotropic non-Heisenberg Ferromagnet model the spectral properties of the considered operator of the energy of three-magnon systems are closely related to those of its two-particle subsystems. We first study the spectrum and bound states (BS) of two-magnon systems. We can verify that the operator $\widetilde{H}_{3\Lambda}$ can be represented in the form $\widetilde{H}_{3\Lambda} = \widetilde{H}_{2\Lambda^1}\bigotimes I + I\bigotimes(\widetilde{H}_{2\Lambda^2} + \widetilde{H}_{2\Lambda^3}) + K_\Lambda$, where I is the unit operator in the space $\mathcal{H}_1$, and $H_{2\Lambda^1}$ and $H_{2\Lambda^2}$ and $H_{2\Lambda^3}$ are the energy operator of two-magnon systems, and K_Λ are finite-dimensional operator, $\Lambda = \lambda + \mu + \gamma$, $\Lambda^1 = \lambda + \mu$, $\Lambda^2 = \lambda + \gamma$, $\Lambda^3 = \mu + \gamma$.

Theorem 1. *If $J = 2J_1$ and ν be arbitrary. Then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_{2\Lambda^1}\bigotimes I + I\bigotimes\left(\widetilde{H}_{2\Lambda^2} + \widetilde{H}_{2\Lambda^3}\right)$ consists of the set of five points, $\sigma_{ess.}\left(\widetilde{H}_{2\Lambda^1}\bigotimes I + I\bigotimes\left(\widetilde{H}_{2\Lambda^2} + \widetilde{H}_{2\Lambda^3}\right)\right) = \big\{0, -2J_1, -4J_1, -(4\nu+2)J_1 -$*

$4J_1\sum_{i=1}^{\nu}\cos\Lambda_i^1, -2(4\nu+2)J_1-4J_1\left(\sum_{i=1}^{\nu}\cos\Lambda_i^2+\sum_{i=1}^{\nu}\cos\Lambda_i^3\right)\}$, *and the relation* $4\leqslant N\leqslant 8\nu+4$ *holds for the number* N *of three-magnon BSs.*

Let $\widetilde{\pi}=(\pi,\pi,\dots,\pi)\in T^{\nu}$.

Theorem 2. *Let* $\Lambda^1=\widetilde{\pi},\Lambda^2=\widetilde{\pi},\Lambda^3=\widetilde{\pi}$ *and* $J\neq J_1$. *Then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_{2\Lambda^1}\bigotimes I+I\bigotimes\left(\widetilde{H}_{2\Lambda^2}+\widetilde{H}_{2\Lambda^3}\right)$ *consists of the set of seven points* $\sigma_{ess.}\left(\widetilde{H}_{2\Lambda^1}\bigotimes I+I\bigotimes\left(\widetilde{H}_{2\Lambda^2}+\widetilde{H}_{2\Lambda^3}\right)\right)=\{8\nu(J-2J_1), 16\nu(J-2J_1), 8\nu(J-2J_1)-2(J-J_1), 16\nu(J-2J_1)-4(J-J_1), 24\nu(J-2J_1), 24\nu(J-2J_1)-4(J-J_1), 24\nu(J-2J_1)-2(J-J_1)\}$, *and the relation* $1\leqslant N\leqslant 8\nu+1$ *holds for the number* N *of three-magnon BSs.*

Theorem 3. *Let* $\nu=1$, $J<J_1$ *and* $\Lambda^1\in]0;\pi[$, $\Lambda^2\in]0;\pi[$, $\Lambda^3\in]0;\pi[$ *or* $\Lambda^1\in]\pi;2\pi[$, $\Lambda^2\in]\pi;2\pi[$, $\Lambda^3\in]\pi;2\pi[$. *If* $\cos\frac{\Lambda^1}{2}>-\frac{J-J_1}{2J_1}$, $\cos\frac{\Lambda^2}{2}>-\frac{J-J_1}{2J_1}$, $\cos\frac{\Lambda^3}{2}>-\frac{J-J_1}{2J_1}$ *or* $\cos\frac{\Lambda^1}{2}<\frac{J-J_1}{2J_1}$, $\cos\frac{\Lambda^2}{2}<\frac{J-J_1}{2J_1}$, $\cos\frac{\Lambda^3}{2}<\frac{J-J_1}{2J_1}$, *then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_{2\Lambda^1}\bigotimes I+I\bigotimes\left(\widetilde{H}_{2\Lambda^2}+\widetilde{H}_{2\Lambda^3}\right)$ *consists of the union of five intervals:* $\sigma_{ess.}(\widetilde{H}_{3\Lambda})=[8(J-2J_1)\left[3-\cos\frac{\Lambda^1}{2}-\cos\frac{\Lambda^2}{2}-\cos\frac{\Lambda^3}{2}; 8(J-2J_1)\left[3+\cos\frac{\Lambda^1}{2}+\cos\frac{\Lambda^2}{2}+\cos\frac{\Lambda^3}{2}\right]\right]\cup\left[z_1+8(J-2J_1)\left[2-\cos\frac{\Lambda^2}{2}-\cos\frac{\Lambda^3}{2}\right]; z_1+8(J-2J_1)\left[2+\cos\frac{\Lambda^2}{2}+\cos\frac{\Lambda^3}{2}\right]\right]\cup\left[z_2+8(J-2J_1)[2-\cos\frac{\Lambda^2}{2}-\cos\frac{\Lambda^3}{2}]; z_2+8(J-2J_1)\left[2+\cos\frac{\Lambda^2}{2}+\cos\frac{\Lambda^3}{2}\right]\right]\cup\left[2z_3+8(J-2J_1)\left[1-\cos\frac{\Lambda^1}{2}\right]; 2z_3+8(J-2J_1)\left[1+\cos\frac{\Lambda^1}{2}\right]\right]\cup\left[2z_4+8(J-2J_1)\left[1-\cos\frac{\Lambda^1}{2}\right]; 2z_4+8(J-2J_1)\left[1+\cos\frac{\Lambda^1}{2}\right]\right]$, *and the relation* $4\leqslant N\leqslant 8\nu+4$ *holds for the number* N *of three-magnon BSs.*

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

О КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ В ЗАДАЧАХ КВАДРАТИЧНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

А. С. Тимашов (Россия, Воронеж; ВИ МВД)

Рассмотрим задачу о приближении достаточно произвольной функции в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Для численного анализа и приложений основную роль играют приближения данного типа конечными суммами, которые возникают при усечении соответствующих рядов. Исследованию таких конечных приближений и посвящена данная работа. Историю вопроса, основные результаты и многочисленные приложения см. в [1–4].

Более точно, будет исследована следующая основная задача: рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, заданную на всей оси $x \in \mathbb{R}$, и некоторый параметр $s > 0$, который в приложениях играет роль среднеквадратичного отклонения. Будем искать интерполирующую функцию $g(x)$, так же определенную на всей оси $x \in \mathbb{R}$, которая представляется в виде ряда по целочисленным сдвигам функции Гаусса

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2s^2}\right),$$

и совпадает с интерполируемой функцией $f(x)$ во всех целых точках $x = m$, $m \in \mathbb{Z}$:

$$g(m) = f(m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Известны два подхода к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета-функций Якоби [1]. Как показано в [2–4], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели, оценки которых получены в [4]. Другой подход разрабатывался в [3], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Такой подход имеет определенную вычислительную ценность, но она достигается ценой существенного усложнения алгоритма. Поэтому в настоящей работе предлагается наиболее простой прямой метод решения поставленной задачи, основанный на сведении ее к решению конечных систем линейных уравнений.

Существенным препятствием для развития этого метода являлось отсутствие результатов по доказательству однозначной разрешимости соответствующих систем линейных уравнений. В настоящей работе получены результаты, устанавливающие требуемую однозначную разрешимость линейных систем. Эти результаты являются теоретическим обоснованием для разработки практических численных алгоритмов, избавленных от необходимости работы со специальными функциями или ДПФ [5, 6].

В работе получены теоретические результаты, касающиеся корректной разрешимости основной системы линейных уравнений для конечномерного приближения бесконечной системы, а также проведен достаточно существенный объем компьютерных вычислений.

Литература

1. *Maz'ya V., Schmidt G.* Approximate Approximations.—Sweden: University of Linköping, 2007.—361 p.
2. *Zhuravlev M. V., Kiselev E. A., Minin L. A., Sitnik S. M.* Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // J. Math. Sci.—2011.—Vol. 173, № 2.—P. 231–241.
3. *Журавлев М. В., Киселев Е. А., Минин Л. А., Ситник С. М.* Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и ее приложения. Т. 67. Уравнения с частными производными.—Тбилиси, 2010.—С. 107–116.
4. *Минин Л. А., Ситник С. М., Журавлев М. В.* О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Науч. ведомости БелГУ.—2009.—№ 13 (68), вып. 17/2.—С. 89–99.
5. *Ситник С. М., Тимашов А. С.* Применение экспоненциальной интерполяции в задачах сжатия и хранения информации // Сб. материалов II Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием «Информационная безопасность в государственных и негосударственных структурах».—Курск: Юго-Западный гос. ун-т, 2012.—С. 50–59.
6. *Тимашов А. С.* О решении систем уравнений, определяющих коэффициенты разложения по целочисленным сдвигам функций Гаусса // Тр. VIII Всерос. науч. конф. с междунар. участием «Математическое моделирование и краевые задачи», посвященной 75-летию Ю. П. Самарина (ММиКЗ).—Самара, 2011.—С. 234–236.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ОБОБЩЕННЫЕ ГРАНД-ПРОСТРАНСТВА МОРРИ

С. М. Умарходжиев (Россия, Грозный; НИИ МФиС ЧГУ)

Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $0 \leqslant \lambda < n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество, и $w(x)$ — вес на Ω. Классическое весовое пространство Морри обозначается через $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega, w)$ и определяется нормой

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega,w)} := \sup_{x\in\Omega,\, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(\widetilde{B}(x,r),w)}.$$

Гранд-пространства Морри были введены в [1, 2] по аналогии с определением гранд-пространства Лебега (с изменением параметра p). Недавно в [3, 4] введены более общие гран-пространства Морри по двум параметрам p и λ. В этих работах доказана ограниченность классических операторов гармонического анализа в введенных пространствах. Мы вводим обобщение весовых пространств Морри $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega, w)$, изменяя три параметра: p, λ и вес w. Возмущение весовой функции $w(x)$ рассматривается в виде $w(x)[a(x)]^\varepsilon$ с неотрицательной функцией $a(x)$. Такой выбор связан с использованием интерполяционной теоремы [5], играющей существенную роль при изучении гранд-пространств Морри.

Определение. Пусть $1 < p < \infty$, $0 \leqslant \lambda < n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, и w — вес на Ω. Обобщенное гранд-пространство Морри $\mathcal{L}^{p),\lambda}_{a,\nu}(\Omega, w)$ вводится как множество функций $f : \Omega \to R$ с конечной нормой

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p),\lambda}_{a,\nu}(\Omega,w)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{\mathcal{L}^{p-\varepsilon,\lambda-\nu\varepsilon}(\Omega,wa^\varepsilon)}, \tag{1}$$

где ν — некоторое действительное число, и a — неотрицательная функция на Ω.

Обобщенное гранд-пространство Морри является расширением классического весового пространства Морри при следующих условиях:

$$a \in \mathcal{L}^{p,\lambda-\nu p}(\Omega, w) \quad \text{и} \quad -\frac{n-\lambda}{p} < \nu \leqslant \frac{\lambda}{p}.$$

Основное утверждение содержится в следующей теореме.

Теорема. *Пусть $1 < p_0 < p < \infty$ и $\lambda, \lambda_0 \in [0, n)$. Пусть линейный оператор T*

i) *ограничен из пространства Лебега $L^p(\Omega, u)$ в пространство Морри $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega, v)$ с нормой M_1;*

ii) *ограничен из пространства $L^{p_0}(\Omega, ua)$ в пространство Морри $\mathcal{L}^{p_0,\lambda_0}(\Omega, vb)$ с нормой M_2, для некоторых неотрицательных на Ω функций $a \in L^p(\Omega, u)$ и $b \in \mathcal{L}^{p,\lambda-\nu p}(\Omega, v)$, $\nu = \frac{\lambda-\lambda_0}{p-p_0}$.*

Тогда T ограничен из обобщенного гранд-пространства Лебега $L^{p)}_a(\Omega, u)$ в обобщенное гранд-пространство Морри $\mathcal{L}^{p),\lambda}_{b,\nu}(\Omega, v)$ с нормой $M \leqslant \max\{M_1, M_2\}$.

Литература

1. *Meskhi A.* Maximal functions and singular integrals in Morrey spaces associated with grand Lebesgue spaces // Proc. A. Razmadze Math. Inst.—2009.—Vol. 151.—P. 139–143.
2. *Meskhi A.* Integral operators in maximal functions, potentials and singular integrals in grand Morrey spaces // Complex Variables and Elliptic Equations.—2011.—P. 1–19.
3. *Rafeiro H.* A note on boundedness of operators in grand grand Morrey spaces // Operator Theory: Advances and Applications.—2011.—Vol. 1, № 8.—P. 1–8.
4. *Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro U.* Riesz type potential operators in generalized grand Morrey spaces // Georgian Math. J.—2013.—P. 1–22.
5. *Umarkhadzhiev S. M.* Riesz–Thorin–Stein–Weiss Interpolation Theorem in a Lebesgue–Morrey Setting // Operator Theory: Advances and Applications. Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory.—Birkhäuser: Springer Basel, 2013.—Vol. 229.—P. 387–392.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ОБОБЩЕННЫЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ЛИНЕЙНЫМ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В. И. Филиппенко (Россия, Шахты; ЮЭРГУЭС, ЮМИ)

В данной работе рассматриваются вопросы связанные, с построением обобщенных резольвент и спектральных функций симметрического отношения, порожденного минимальным линейным квазидифференциальным оператором в гильбертовом пространстве вектор-функций, суммируемых с квадратом модуля.

Основное содержание настоящей работы является продолжением предыдущих исследований автора [1].

Пусть H — конечномерное гильбертово пространство со скалярным произведением $(.,.)$ и нормой $\|.\|$. Рассмотрим на интервале (a,b) измеримую операторную функцию $A(t)$, значениями которой являются неотрицательные самосопряженные операторы в H, т. е. такую матричную функцию размерности $m \times m$, что для всех $x \in H$ $(A(t)x, x) \geqslant 0$. Предположим, что $\|A(t)\|$ — суммируемая функция на любом конечном отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a,b)$. Обозначим через l_n квазидифференциальное выражение порядка n, порожденное некоторой матрицей-функцией $\mathbf{F}$.

Пусть $\mathbf{F} = (f_{ij})$ — $(n \times n)$-матрица, составленная из операторнозначных функций, определенных на интервале $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, непрерывных в равномерной операторной топологии, значениями которых являются ограниченные самосопряженные операторы в H, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $f_{ij} = 0$ в интервале $\mathbb{I} = (a,b)$ для индексов, удовлетворяющих неравенствам $2 \leqslant i+1 < j \leqslant n$;

2) f_{ij} — локально суммируемы, т. е. $f_{ij} \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{I})$ для $1 \leqslant i,j \leqslant n$;

3) $f_{i,i+1} \neq 0$ в $\mathbb{I}$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Определим квазипроизводные $y^{[k]}$ следующим образом:

$$y^{[0]} = y, \quad y^{[i]} = f_{i,i+1}^{-1}\left[(y^{[i-1]})' - \sum_{j=1}^{i} f_{i,j} y^{[j-1]}\right], \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Пусть $AC(\mathbb{I})$ — множество матричных функций абсолютно непрерывных на любом компактном подынтервале промежутка $\mathbb{I}$. В дальнейшем предполагаем, что функции y и их квазипроизводные до $(n-1)$-го порядка включительно принадлежат множеству $AC(\mathbb{I})$.

Квазидифференциальное выражение γ определим формулой

$$\gamma(y) = \left(y^{[n-1]}\right)' - \sum_{i=1}^{n} f_{ni} y^{[i-1]}$$

для y таких, что $y^{[i-1]} \in AC(\mathbb{I})$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Предположим, что матрица $\mathbf{F}$ кроме требований 1)–3) удовлетворяет также условию симметричности $\mathbf{F} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}^*\mathbf{J}$, где

$$\mathbf{J} = \left((-1)^i \delta_{i,n+1-j} E_m\right), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

а $\delta_{k,l}$ — символ Кронекера.

Положим $\tau = \gamma$, если n четно, и $\tau = \pm i\gamma$, если n нечетно.

Получена

Теорема. *Если L_0 — минимальное симметрическое отношение, порожденное квазидифференциальной операцией $l_n[y]$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, где $\mathcal{H} = L^2(H, A(t); a, b)$, то его обобщенная резольвента имеет вид*

$$R_\lambda f = \int\limits_a^b K(t, s, \lambda) A(s) f(s)\, ds \quad \big(f \in L^2(H, A(t); a, b)\big).$$

Ядро $K(t, s, \lambda)$ представимо формулой

$$K(t, s, \lambda) = W(t, \lambda)\Big[M_1(\lambda) - \operatorname{sgn}(s - t) J_n^{-1}(s)/2\Big] W^*(s, \overline{\lambda}),$$

где $M_1(\lambda) = M_0 \bigoplus M(\lambda)$ — некоторая операторнозначная функция, принимающую значения в H^n.

Литература

1. *Филиппенко В. И.* Расширения и резольвенты симметрических операторов с неплотной областью определения // Исследования по мат. анализу.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—С. 206–214.—(Мат. форум. Т. 1. Итоги науки. ЮФО.)

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТОК И ФУНКЦИОНАЛЫ НА НИХ[1]

Б. Н. Хабибуллин (Россия, Уфа; БашГУ),
Е. Г. Кудашева (Россия, Уфа; БГАУ),
Л. Ю. Чередникова (Россия, Уфа; БГАУ)

Пусть A — упорядоченое направленное вверх множество с отношением порядка $\leqslant$, т. е. для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{A}$ найдется элемент $\alpha_3 \in \mathrm{A}$, для которого одновременно $\alpha_1 \leqslant \alpha_3$ и $\alpha_2 \leqslant \alpha_3$. Это множество A называем далее *множеством индексов*. Пусть задано отображение множества индексов на некоторое множество упорядоченных векторных пространств, т. е. $\alpha \mapsto (X_\alpha, \leqslant_\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{A}$, где $\leqslant_\alpha$ — отношения порядка на X_α. Далее часто вместо $(X_\alpha, \leqslant_\alpha)$ будем писать просто X_α. Проекцию элемента $x = (x^\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ из декартового произведения $\prod_{\alpha \in \mathrm{A}} X_\alpha$ будем обозначать $\mathrm{pr}_\alpha x := x^\alpha$. Кроме того, пусть для каждой пары $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathrm{A}^2$ при $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ задано линейное положительное отображение

$$p_{\alpha_2\alpha_1} \colon X_{\alpha_2} \to X_{\alpha_1} \quad \bigl((0 \leqslant_{\alpha_2} x^{\alpha_2} \in X_{\alpha_2}) \Longrightarrow (0 \leqslant_{\alpha_1} p_{\alpha_2\alpha_1}(x^{\alpha_2}))\bigr). \tag{1}$$

Класс всех отображений $p_{\alpha_2\alpha_1}$, $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$, обозначим через P.

В декартовом произведении $\prod_{\alpha \in \mathrm{A}} X_\alpha$ каждому элементу $x = (x^\alpha) \in \prod_{\alpha \in \mathrm{A}} X_\alpha$ сопоставляется его проекция $\mathrm{pr}_\alpha x := x^\alpha \in X_\alpha$ и на этом декартовом произведении устанавливается естественное отношение порядка: $x_1 \leqslant x_2$ для $x_1, x_2 \in \prod_{\alpha \in \mathrm{A}} X_\alpha$, если и только если, $\mathrm{pr}_\alpha x_1 \leqslant_\alpha \mathrm{pr}_\alpha x_2$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$ (это отношение порядка $\leqslant$, конечно же, не имеет, вообще говоря, ничего общего с отношением порядка $\leqslant$ на множестве индексов A). Выделим во введенном декартовом произведении специальное векторное подпространство

$$X := \left\{ x \in \prod_{\alpha \in \mathrm{A}} X_\alpha \colon p_{\alpha_2\alpha_1}(\mathrm{pr}_{\alpha_2} x) = \mathrm{pr}_{\alpha_1} x \text{ для любых } \alpha_1 \leqslant \alpha_2,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{A} \right\}.$$

Такое подпространство X, наделенное индуцированным с $\prod_{\alpha \in \mathrm{A}} X_\alpha$ отношением порядка $\leqslant$, будем называть *проективным пределом упорядоченных векторных пространств* X_α *относительно класса* P, а обозначать его будем как $X := \mathrm{P}\text{-}\operatorname{proj}\lim_{\alpha \in \mathrm{A}} X_\alpha$. Мы рассматриваем проективный предел X векторных решеток X_α. Через X^{lin} обозначаем пространство линейных функционалов $l \in \mathbb{R}^X$ на X. Пусть Y — векторное подпространство в X. Функционал $q \in [-\infty, +\infty]^X$ допускает двойственное линейное представление сверху на векторе $y \in Y$ относительно Y, если [1, определение 3.3]

$$q(y) = \inf \left\{ l(y) \colon\ l \in Y^{\mathrm{lin}},\ q(y') \leqslant l(y')\ \forall\, y' \in Y \right\}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00030.

Через X^{aff} обозначаем векторное пространство над $\mathbb{R}$ аффинных функционалов $a \in \mathbb{R}^X$ на X. Функционал $q \in [-\infty, +\infty]^X$ допускает двойственное аффинное представление сверху на векторе $y \in Y$ относительно $Y \subset X$, если

$$q(y) = \inf \Big\{ a(y)\colon\ a \in Y^{\mathrm{aff}},\ q(y') \leqslant a(y')\ \forall\, y' \in Y \Big\}.$$

Мы изучаем следующие вопросы.

- При каких условиях на специальную ассоциированную с q систему функционалов q_α на X_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, сам функцинал q допускает двойственное линейное представление сверху на векторе $y \in Y$ относительно Y, а также на векторах из $Y^{\downarrow}$, где последнее множество $Y^{\downarrow}$ получается из Y добавлением точных нижних граней направленных вниз и ограниченных снизу вектором из X подмножеств пространства Y.

- Тот же вопрос о двойственное аффинном представление сверху на векторе $y \in Y$ или на векторе $y \in Y^{\downarrow}$ относительно Y.

Ранее эти вопросы в случае, когда $\mathrm{A} = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, частично для двойственного линейного представления векторов из Y исследовались в [1] и нашли многочисленные применения при решении задач теории функций комплексных переменных.

Литература

1. *Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I // Изв. РАН. Сер. мат.—2001.—Т. 65, № 4.—С. 205–224.

ОБ ОБРАЩЕНИИ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

А. Г. Чшиев (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Пусть X — комплексное банахово пространство, $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов в X, $LR(X)$ — множество всех линейных отношений на X.

Определение 1. Полугруппой линейных отношений на подпространстве $X_0 \subset X$ называется функция

$$S : (0, \infty) \to LR(X)$$

со свойством

$$S(t+s)\, x = S(t)\, S(s)\, x, \quad t, s > 0,$$

для любого $x \in X_0$.

Определение 2. *Траекторией точки* $x \in X_0$ относительно полугруппы S называется функция ξ_x со свойством

$$\xi_x(t) \in S(t)x, \quad t > 0.$$

Непрерывная на $(0, \infty)$ траектория ξ_x точки $x \in D_2(S)$ называется *основной*, если

$$\lim_{t \to 0+} \xi_x(t) = x.$$

Положим

$$S : (0, \infty) \to LR(X), \quad S(t) = T(t)^{-1},$$

где $T : (0, \infty) \to \operatorname{End} X$ — полугруппа операторов в X.

Теорема 1. *Функция S есть сильно непрерывная в нуле справа полугруппа линейных отношений на подпространстве*

$$D_2(S) = \bigcap_{t,s>0} \bigl\{T(s)y : \, y \in \operatorname{Im} T(t)\bigr\}.$$

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$ — генератор полугруппы T. Тогда линейное отношение*

$$\mathcal{G} = \bigl\{(x, -y) : \, x \in D_2(S), \text{ где } (x, y) \in \mathcal{A}\bigr\}$$

является генератором полугруппы S.

Литература

1. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Изв. РАН. Сер. мат.—2009.—Т. 73, № 2.—С. 3–68.
2. *Rhonda Jo Hughes.* Semigroups of unbounded linear operators in Banach space // Trans. Amer. Math. Soc.—1977.—Vol. 230.—P. 113–145.
3. *Cross R.* Multivalued Linear Operators.—N. Y.: M. Dekker, 1998.—335 p.
4. *Баскаков А. Г.* Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов // Мат. заметки.—2008.—Т. 84, № 2.—С. 175–192.

СМЕШАННЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА И ИХ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

Т. И. Шарапудинов (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Ранее в работах [1, 2] были рассмотрены смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и общим полиномам Якоби. В частности, были исследованы также некоторые свойства смешанных рядов по полиномам Чебышева первого рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

Настоящая работа посвящена исследованию аппроксимативных свойств дискретизованных смешанных рядов по полиномам Чебышева первого рода на классах аналитических функций. Дискретизация производится путем замены интегралов, определяющих в смешанном ряде по полиномам Чебышева $T_k(x)$ коэффициенты Фурье — Чебышева $f_{r,k}$ r-й производной функции $f(x)$ с индексами $k \leqslant 2N - 1$ квадратурными формулами с узлами в точках $t_j = \cos\frac{\pi j}{N}$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$, являющихся экстремумами полинома Чебышева $T_N(x)$. Слагаемые непрерывного смешанного ряда по полиномам $T_k(x)$, содержащие $f_{r,k}$ с $k \geqslant 2N$ отбрасываются. Это позволяет применять быстрое преобразование Фурье при численной реализации дискретных смешанных рядов по полиномам $T_k(x)$. При этом возникает вопрос о том, сохранится ли после дискретизации основное свойство смешанного ряда, которое состоит в том, что частичные суммы смешанного ряда в определенном смысле наилучшим образом одновременно приближают функцию и несколько ее производных. Полученные в настоящей работе результаты позволяют утвердительно ответить на поставленный вопрос.

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Мат. сб.—2003.—Т. 194, № 3.—С. 115–148.
2. *Шарапудинов И. И., Шарапудинов Т. И.* Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация // Мат. заметки.—2010.—Т. 88, № 1.—С. 116–147.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

О РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Т. Н. Шах-Эмиров (Россия, Махачкала; ЮМИ)

Пусть $p = p(x) \geqslant 1$ — 2π-периодическая измеримая и существенно ограниченная функция, а $w(x)$ — почти всюду положительная весовая функция. Через $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ обозначим пространство измеримых 2π-периодических функций $f = f(x)$ таких, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p(x)}\, w(x)\, dx < \infty.$$

Пространство $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ нормируемо [1] при $p(x) \geqslant 1$ и одна из эквивалентных норм вводится следующим образом:

$$\|f\|_{p(\cdot),\,w} = \inf\left\{\alpha > 0 : \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} w(x)\, dx \leqslant 1\right\}.$$

Пусть для каждого $\lambda \geqslant 1$ задана измеримая 2π-периодическая и существенно-ограниченная функция (ядро) $k_\lambda = k_\lambda(x)$. Тогда для любой функции $f(x) \in L^1_{2\pi}$ мы можем определить линейный оператор $\mathcal{K}_\lambda(f)(x)$:

$$K_\lambda(f)(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, k_\lambda(t - x)\, dt.$$

В настоящей работе рассмотрена задача об условиях на переменный показатель, ядра $k_\lambda(x)$ и весовую функцию $w(x)$, которые гарантируют равномерную ограниченность семейства операторов свертки $\{\mathcal{K}_\lambda(f)(x)\}_{1\leqslant\lambda<\infty}$ в весовых пространствах $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ с переменным показателем $p(x)$.

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Мат. заметки.—1979.—Т. 26, № 4.—С. 613–632.

РАДИУС ПОЛНОТЫ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

О. В. Шерстюкова (Россия, Москва; НИЯУ МИФИ)

В пространстве аналитических в круге функций изучается вопрос [1, 2] о полноте систем экспонент с вещественными симметричными показателями. Предполагается, что последовательности показателей имеют заданные верхнюю, нижнюю плотности и шаг. В терминах указанных характеристик распределения показателей получена новая оценка сверху радиуса круга полноты. Соответствующее утверждение обобщает (в направлении учета шага последовательностей показателей систем экспонент) результаты работ [3, 4].

Литература

1. *Malliavin P., Rubel L. A.* On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France.—1961.—Vol. 89.—P. 175–206.
2. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота системы экспонент и множества единственности.—Уфа: РИЦ БашГУ, 2006.—172 с.
3. *Попов А. Ю.* О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика.—1999.—№ 5.—С. 48–52.
4. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. мат.—2011.—Т. 75, № 1.—С. 3–28.

ОПЕРАТОРНЫЕ ИДЕАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ИНВАРИАНТНЫМИ КЛАССАМИ ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ

М. А. Шубарин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

1. В докладе изучаются свойства опреторных идеалов в смысле А. Пича [1, 2]. Пусть $\mathcal{K}$ — категория банаховых пространств или пространств Фреше (в качестве пространств морфизмов в этой категории рассматривается множество всех линейных непрерывных операторов $L(\cdot,\cdot)$), $\mathfrak{I}$ — семейство линейных непрерывных операторов, действующих в в пространствах из $\mathcal{K}$ и $\mathfrak{I}(X,Y) := \mathfrak{I} \cap L(X,Y)$.

Определение. Семейство $\mathfrak{I}$ называют операторным идеалом (над категорией $\mathcal{K}$), если для произвольных пространств X, Y, X_j, Y_j из $\mathcal{K}$ выполняются следующие условия:

1) если $X \in \mathcal{K}$ — конечномерное пространство, то $1_X \in \mathfrak{K}(X,X)$;

2) $\mathfrak{I}(X,Y)$ —векторное подпространство в $L(X,Y)$;

3) если $T \in \mathfrak{I}(X_0,X_1)$, $T \in L(Y_0,X_0)$, $T \in L(X_1,Y_1)$, то $T_0TT_1 \in \mathfrak{I}(Y_1,Y_1)$.

Пример. По определению линейный оператор T, действующий из пространства Фреше X в пространство Фреше Y, называют

- компактным, если существует абсолютно выпуклая окрестность нуля U в X такая, что ее образ TU является относительно компактным множеством в Y.
- ограниченым, если существует абсолютно выпуклая окрестность нуля U в X такая, что ее образ TU является ограниченным множеством в Y.

Через $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{B}$ обозначим идеал компактных и ограниченных операторов, действующих в пространствах Фреше. Непосредственно проверяется, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{K} \subset \mathfrak{B}$.

Пример. Линейные непрерывный оператор $T : X \to Y$ отнесем к классу $\mathfrak{D}N(X,Y)$, $\mathfrak{M}(X,Y)$, $\overline{\mathfrak{M}}(X,Y)$ или $\underline{\mathfrak{D}N}(X,Y)$, если выполняется соответственно условие (1), (2), (3) или (4):

$$\exists p_0 \, \forall p \, \exists p_1 \, \exists \tau \in (1/2,1) \, \exists C > 0 : \quad \forall x \in X \ |Tx|_p \leqslant C\|x\|_{p_0}^{\tau}\|x\|_{p_1}^{1-\tau}; \quad (1)$$

$$\forall p_0 \, \exists p \, \forall p_1 \exists \tau \in (1/2,1) \, \exists C > 0 : \quad \forall x' \in X' \ \|T'x'\|_p' \leqslant C(|x'|_{p_0}')^{1-\tau}(|x'|_{p_1}')^{\tau}; \quad (2)$$

$$\exists p_0 \, \forall p \, \exists p_1 \, \exists \tau \in (0,1) \, \exists C > 0 : \quad \forall x \in X \ |Tx|_p \leqslant C\|x\|_{p_0}^{\tau}\|x\|_{p_1}^{1-\tau}; \quad (3)$$

$$\forall p_0 \, \exists p \, \forall p_1 \, \exists \tau \in (0,1) \, \exists C > 0 : \quad \forall x' \in X' \ \|T'x'\|_p' \leqslant C(|x'|_{p_0}')^{1-\tau}(|x'|_{p_1}')^{\tau}. \quad (4)$$

Здесь $(\|\cdot\|_p')$ и $(|\cdot|_p')$ — сопряженные наборы норм соответственно в X' и Y'. Например, $\|x'\|_p' := \sup\{|x'(x)| : x \in X, \|x\|_p \leqslant 1\}$.

Семейства операторов $\mathfrak{D}N$, $\mathfrak{M}$, $\overline{\mathfrak{M}}$ и $\underline{\mathfrak{D}N}$ являются операторными идеалами.

2. Произведением $\mathfrak{I}_1 \circ \mathfrak{I}_0$ операторных идеалов $\mathfrak{I}_0$ и $\mathfrak{I}_1$ называют множество операторов, действующих в пространствах Фреше и определяемых компонентами $\mathfrak{I}_1 \circ \mathfrak{I}_0(X,Y)$: $T \in \mathfrak{I}_1 \circ \mathfrak{I}_0(X,Y) \Leftrightarrow$ существует пространство Фреше E и

операторы $T_0 \in \mathfrak{I}_0(X, E)$, $T_1 \in \mathfrak{I}_1(E, Y)$ такие, что $T = T_1 T_0$ для произвольных пространств Фреше X, Y.

В докладе предполагается рассмотрение «таблицы умножения» для операторных идеалов, определяемых инвариантными классами.

Литература

1. *Пич А.* Операторный идеалы.—М.: Мир, 1982.—536 с.
2. *Junek H.* Locally Convex Spaces and Operator Ideals.—Leipzig: Teubner–Texte zur Math., 1983.—180 с.

Секция II

Дифференциальные и интегральные уравнения

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Е. А. Аршава (Украина, Харьков; ХНУСА)

Решение ряда задач физики приводит к интегральным уравнениям с разностным ядром. К таким задачам относятся задачи оптимального синтеза, рассеяния света в атмосфере, дифракция на ленте, движения крыла под водой [3–5].

В основе работы лежит метод операторных тождеств [1], который Л. А. Сахнович использовал для изучения класса уравнений вида

$$Sf = \frac{d}{dx}\int\limits_0^\omega S(x-t)f(t)\,dt = \varphi(x).$$

Основная идея метода состоит в доказательстве конечномерности соответствующего интегрального оператора. В этом случае обратный оператор к данному интегральному оператору строится при помощи функций, которые определяют вырожденность коммутационного оператора.

Задача обращения некоторых новых классов интегральных операторов методом операторных тождеств, доказательство конечномерности соответствующих коммутационных операторов, исследование структуры обратного оператора и использование полученных результатов при решении задач фильтрации и прогноза нестационарных случайных процессов и сигналов автором настоящей статьи представлены в работе [2]. На основе полученных результатов изучается уравнение со специальной правой частью, которое играет существенную роль в астрофизике, теории переноса излучения.

Используя основные результаты, полученные при изучении задачи обращения оператора вида

$$Sf = L_x(\alpha)\int\limits_0^\omega S(x,t)f(t)\,dt,$$

с ядром $S(x,t)$, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных гиперболического типа

$$(L_x(\alpha) - L_t(\alpha))\,S(x,t) = 0, \quad L_x(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial x}, \quad \alpha = \overline{\alpha} \neq 0,$$

рассмотрено уравнение со специальной правой частью $Sf = e^{i\lambda x}$.

Если оператор S ограниченный и существуют функции $N_i \in L_2(0,\omega)$, $i = \overline{1,4}$, удовлетворяющие равенствам

$$SN_1 = M_1(x), \quad SN_2 = M_2(x), \quad SN_3 = 1, \quad SN_4 = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha},$$

см. [2], тогда имеют место соотношения:

$$SB(x,\lambda) = e^{i\lambda x},$$

где

$$B(x,\lambda) = u(x,\lambda) + \frac{i\lambda\alpha - \lambda^2}{\alpha + 2i\lambda} \int\limits_0^x u(t,\lambda) \left(e^{i\lambda(t-x)} + e^{(\alpha+i\lambda)(x-t)} \right) dt,$$

$$u(x,\lambda) = a(\lambda)N_1(x) + b(\lambda)N_2(x) + c(\lambda)N_3(x) + d(\lambda)N_4(x),$$

$$a(\lambda) = \int\limits_0^\omega e^{i\lambda t} \left(i\lambda\alpha - \lambda^2\right) N_3(\omega - t)\, dt,$$

$$b(\lambda) = \int\limits_0^\omega e^{i\lambda t} \left(i\lambda\alpha - \lambda^2\right) N_4(t)\, dt,$$

$$c(\lambda) = \int\limits_0^\omega e^{i\lambda t} \left(i\lambda\alpha - \lambda^2\right) \left(\frac{1 - e^{\alpha(\omega - t)}}{\alpha} + N_1(\omega - t) - \frac{1 - e^{\alpha\omega}}{\alpha} N_2(t) \right) dt,$$

$$d(\lambda) = \int\limits_0^\omega e^{i\lambda t} \left(i\lambda\alpha - \lambda^2\right) \left(-\alpha N_1(\omega - t) - N_2(\omega - t) - \alpha N_1(-t) - 1\right) dt.$$

Литература

1. *Сахнович Л. А.* Уравнение с разностным ядром на конечном отрезке // Успехи мат. наук.—1980.—Т. 35, вып. 4 (214).—С. 69–129.
2. *Аршава Е. А., Янцевич А. А.* Обращение интегральных операторов методом коммутационных соотношений // Диф. уравнения.—1996.—Т. 32, № 10.—С. 1427–1428.
3. *Амбарцумян В. А.* Научные труды. Т. 1.—Ереван, 1960.—350 с.
4. *Соболев В. В.* Рассеяние света в атмосферах планет.—М.: Наука, 1972.—270 с.
5. *Иванов В. В.* Перенос излучения и спектры небесных тел.—М.: Наука, 1969.—285 с.

ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ С НЕЧЕТНОСТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[1]

С. Н. Асхабов (Россия, Грозный; ЧГУ)

Рассмотрим дискретный оператор свертки H:

$$(Hu)_n = (h * u)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} u_k$$

в пространствах ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, с нормой $\|u\|_p = \left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p}$.

Всюду в данной работе, если не оговорено иное, предполагается, что ядро $h = \{h_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ оператора H удовлетворяет условию:

$$h \in \ell_1 \quad \text{и} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \cdot \cos(n\,t) \geqslant 0 \quad (\forall\, t \in [0, \pi]). \tag{1}$$

В монографии [1] доказано, что это условие необходимо и достаточно для положительности оператора свертки H в пространстве ℓ_p.

Введем в рассмотрение весовое пространство $\ell_p(\varrho)$. Пусть $\varrho = \{\varrho_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ есть последовательность положительных чисел. Обозначим через $\ell_p(\varrho)$, $1 < p < \infty$, множество всех вещественных числовых последовательностей $u = \{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ таких, что

$$\|u\|_{p,\,1} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n |u_n|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

Известно, что $\ell_p(\varrho)$ является рефлексивным банаховым пространством и $\ell_p^*(\varrho) = \ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$, $p' = p/(p-1)$, есть сопряженное с ним пространство. Норму в $\ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$ обозначим через $\|\cdot\|_{p',\,1-p'}$.

Лемма 1. *Пусть $2 < p < \infty$ и вес ϱ удовлетворяет условию:*

$$\gamma = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n^{-2/(p-2)}\right)^{(p-2)/(2p)} < \infty. \tag{2}$$

Тогда справедливы непрерывные вложения: $\ell_p(\varrho) \subset \ell_2 \subset \ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$, причем $\|u\|_{p',\,1-p'} \leqslant \gamma \cdot \|u\|_2 \leqslant \gamma^2 \cdot \|u\|_{p,\,1}$ для любого $u \in \ell_p(\varrho)$.

Теорема 1. *Пусть $p > 2$ — четное число, ядро h удовлетворяет условию (1), а вес ϱ — условию (2). Тогда при любом $f \in \ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$ нелинейное дискретное уравнение типа свертки*

$$\varrho_n \cdot u_n^{p-1} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} u_k = f_n$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00422.

имеет единственное решение $u^* \in \ell_p(\varrho)$. *Если, дополнительно,* $h_{-n} = h_n$ *при любом* n, *то к этому решению* u^* *сходится по норме пространства* $\ell_p(\varrho)$ *последовательность* $u^{(i)} = \{u_n^{(i)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, *определяемая по формуле*

$$u_n^{(i+1)} = u_n^{(i)} - \delta^{(i)} \cdot \varrho_n^{-1/(p-1)} \cdot \left\| Au^{(i)} - f \right\|_{p',\,1-p'}^{(p-2)/(p-1)} \left| Au_n^{(i)} - f_n \right|^{(2-p)/(p-1)} \bigl(Au_n^{(i)} - f_n\bigr),$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots$, $u^{(0)} = \{u_n^{(0)}\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell_p(\varrho)$ *— любое начальное приближение,* $Au = \varrho \cdot u^{p-1} + Hu$,

$$\delta^{(i)} = \min\left\{1, \frac{2}{\varepsilon + (p-1)\bigl(\|u^{(i)}\|_{p,\,1} + \|Au^{(i)} - f\|_{p',\,1-p'}\bigr)^{p-2} + \gamma^2 \|h\|_1}\right\},$$

$\varepsilon > 0$ *— произвольное число.*

В случае когда ядро h имеет специальный вид, теорема 1 доказана в [2]. Заметим, что нелинейные дискретные уравнения типа свертки возникают при решении плоских задач теории упругости, стохастических задач и других [1–3].

Литература

1. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свертки.—М.: Физматлит, 2009.—304 с.
2. *Асхабов С. Н.* Приближенное решение нелинейных дискретных уравнений типа свертки // Современная математика. Фундам. направления.—2012.—Т. 45.—С. 18–31.
3. *Дедагич Ф., Забрейко П. П.* Об операторах суперпозиции в пространствах ℓ_p // Сиб. мат. журн.—1987.—Т. 28, № 1.—С. 86–98.

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ТЕПЛОЕМКОСТЬЮ

А. К. Баззаев (Россия, Владикавказ; СОГУ)

В цилиндре $Q_T = G \times (0, T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : 0 < x_\alpha < \ell_\alpha, \ \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей Γ, рассмотрим задачу

$$\partial_{0t}^{\nu} u = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \varkappa_{-\alpha}\partial_{0t}^{\nu} u + \beta_{-\alpha}(x,t)u - \mu_{-\alpha}(x,t), & x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \varkappa_{+\alpha}\partial_{0t}^{\nu} u + \beta_{+\alpha}(x,t)u - \mu_{+\alpha}(x,t), & x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{3}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),$$

$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha \leqslant c_1, \quad \beta_{\pm\alpha} \geqslant \beta_* > 0, \quad \varkappa_{\pm\alpha} = \mathrm{const} > 0,$$

где $\partial_{0t}^{\nu} u = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\int\limits_0^t \frac{\dot u(x,\eta)}{(t-\eta)^\nu}\,d\eta$ — регуляризованная дробная производная Римана — Лиувилля порядка ν, $0 < \nu < 1$, $\dot u = \frac{\partial u}{\partial t}$.

По аналогии с [1, с. 522] разностный аналог задачи (1)–(3) имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{1}{\Gamma(2-\nu)}\sum_{s=1}^{pj+\alpha}\left(t_{j+(\alpha-s+1)/p}^{1-\nu} - t_{j+(\alpha-s)/p}^{1-\nu}\right) u_{\bar t}^{s/p} = \overline{\Lambda}_\alpha y^{j+\alpha/p} + \Phi^{j+\alpha/p}, \\ y(x,0) = u_0(x), \quad u_{\bar t}^{s/p} = \frac{u^{s/p} - u^{(s-1)/p}}{\tau/p}, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\overline{\Lambda}_\alpha y = \begin{cases} \Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar x_\alpha})_{x_\alpha}, & x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^- y = \frac{a^{(1\alpha)} y_{x_\alpha,0} - \beta_{-\alpha} y_0}{p\varkappa_{-\alpha} + 0.5h_\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \Lambda_\alpha^+ y = -\frac{a^{(N_\alpha)} y_{\bar x_\alpha, N_\alpha} + \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}}{p\varkappa_{+\alpha} + 0.5h_\alpha}, & x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} \varphi, & x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \overline{\mu}_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \overline{\mu}_{+\alpha}, & x_\alpha = \ell_\alpha. \end{cases}$$

Для решения разностной задачи (4) с помощью принципа максимума для сеточного уравнения общего вида [2, с. 339] получена априорная оценка в равномерной метрике

$$
\begin{gathered}
\|y^{j+1}\|_{C_h} \leqslant \|y^0\|_{C_h} + \max_{0\leqslant k\leqslant j} \frac{1}{\beta_*} \left(\|\overline{\mu}_{-\alpha}(t_k)\|_{C_\gamma} + \|\overline{\mu}_{+\alpha}(t_k)\|_{C_\gamma}\right) + \\
+ p^{1-\nu}\Gamma(2-\nu) \sum_{j'=0}^{j} \tau^\nu \sum_{\alpha=1}^{p} \max_{0\leqslant s\leqslant \alpha} \|\varphi^{j'+s/p}\|_{C_h}.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Справедлива

Теорема. *Пусть задача (1)–(3) имеет единственное непрерывное в* $\overline{Q}_T$ *решение и существуют непрерывные в* $\overline{Q}_T$ *производные*

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2},\ \frac{\partial^{2+\nu} u}{\partial x_\alpha^2 \partial t^\nu},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2},\quad 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant p,\ \frac{1}{2} < \nu < 1,
$$

$$
\varkappa_{-1} = \varkappa_{-2} = \ldots = \varkappa_{-p} = \varkappa_1 > 0, \quad \varkappa_{+1} = \varkappa_{+2} = \ldots = \varkappa_{+p} = \varkappa_2 > 0,
$$

тогда решение разностной задачи (4) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(3) со скоростью

$$
O\Big(\frac{h^2}{\tau^{1-\nu}} + \tau^{2\nu-1}\Big), \quad h^2 = O(\tau^{1-\nu}).
$$

Литература

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656 с.
2. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—415 с.

МЕТОД АНАЛИЗА ДАННЫХ ПРИ МНОГОКРАТНОМ ЗОНДИРОВАНИИ НЕИЗВЕСТНОЙ СРЕДЫ В ПОЛИХРОМАТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ[1]

Е. Ю. Балакина (Россия, Новосибирск; ИМ СО РАН, НГУ)

Рассматривается процесс переноса частиц (в частности, фотонов). В качестве математической модели взято линейное дифференциальное уравнение переноса:

$$\omega \cdot \nabla_r f(r,\omega,E) + \mu(r,E) f(r,\omega,E) = J(r,\omega,E). \tag{1}$$

Здесь $r \in G \subset \mathbb{R}^3$; G — выпуклая ограниченная область; $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$; $E \in I = [E_{\min}, E_{\max}]$.

В этом уравнении $f(r,\omega,E)$ — плотность потока частиц в точке r, летящих в направлении ω. Функции μ и J характеризуют среду G.

Среда G — неоднородная. Для характеристики этой неоднородности введем в рассмотрение подмножество G_0 области G. Множество G_0 предполагается открытым в $\mathbb{R}^3$, плотным в G ($\overline{G}_0 = \overline{G}$) и является объединением счетного числа областей. Области G_i можно интерпретировать как части неоднородной среды G, заполненные i-ым веществом. Функции $\mu(r,E)$ и $J(r,\omega,E)$ по пространственной переменной r принадлежат классу $\mathcal{C}^2$ в каждом G_i и могут претерпевать скачок на ∂G_0.

К уравнению (1) добавим два краевых условия:

$$f(\xi,\omega,E) = h(\xi,\omega,E), \quad (\xi,\omega,E) \in \Gamma^- \times \Omega \times I,$$

здесь функция $h(\xi,\omega,E)$ имеет смысл плотности падающего потока, и

$$\int\limits_{E_1}^{E_2} f(\eta,\omega,E)\,dE = H(\eta,\omega), \quad (\eta,\omega) \in \Gamma^+ \times \Omega,$$

здесь функция $H(\xi,\omega)$ имеет смысл средней по энергии плотности выходящего потока, Γ^+ и Γ^- — некоторые подмножества ∂G.

Рассмотрим задачу, соответствующую многократному зондированию среды.

Задача. Найти поверхность ∂G_0 из уравнений

$$\omega \cdot \nabla_r f_q(r,\omega,E) + \mu(r,E) f_q(r,\omega,E) = J(r,\omega,E),$$

и краевых условий

$$f_q(\xi,\omega,E) = h_q(\xi,\omega,E), \quad (\xi,\omega,E) \in \Gamma^- \times \Omega \times I,$$
$$\int\limits_{E_1}^{E_2} f_q(\eta,\omega,E)\,dE = H_q(\eta,\omega), \quad (\eta,\omega) \in \Gamma^+ \times \Omega,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00275 А, а также Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 14.B37.21.0355.

где известными являются поверхность ∂G и функции $H_q(\eta, \omega)$, $q = 1, \ldots, K$.

Для решения задачи строится функция $\mathrm{Ind}(r)$:

$$\mathrm{Ind}(r) = \sum_{q=1}^{K} \left| \nabla \int\limits_{\Omega} H_q(r + d(r,\omega)\omega, \omega)\, d\omega \right|,$$

зависящая от известных функций $H_q(\eta, \omega)$, $q = 1, \ldots, K$ ($d(r, \omega)$ — расстояние от точки r до границы ∂G в направлении ω). Используя ограничения, близкие к [1–3], и результат работы [4], доказывается, что эта функция может быть неограниченной только вблизи искомой поверхности.

Доказывается теорема единственности решения при довольно общих предположениях. Проведены численные эксперименты, иллюстрирующие эффективность применения данного метода.

Литература

1. *Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В.* Использование уравнения переноса в томографии.—М.: Логос, 2000.—224 с.
2. *Владимиров В. С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. МИАН СССР.—1961.—Вып. 61.—С. 3–158.
3. *Гермогенова Т. А.* Локальные свойства решений уравнения переноса.—М.: Наука, 1986.—272 с.
4. *Аниконов Д. С., Балакина Е. Ю.* Полихроматический индикатор неоднородности неизвестной среды для задачи рентгеновской томографии // Сиб. мат. журн.—2012.—Т. 53, № 4.—С. 721–740.

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ[1]

Л. Н. Бондарь (Россия, Новосибирск; ИМ СО РАН)

В работе рассматривается вопрос о необходимых и достаточных условиях разрешимости второй краевой задачи в полупространстве $R^3_+ = \{x = (x', x_3) : x' \in R^2,\ x_3 > 0\}$ для системы теории упругости [1, 2]:

$$\mathcal{L}(D_x)U = F(x), \quad x \in R^3_+, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{L}(D_x) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}\triangle + (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_1} & (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_1x_2} & (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_1x_3} \\ (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_1x_2} & \boldsymbol{\mu}\triangle + (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_2} & (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_2x_3} \\ (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_1x_3} & (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_2x_3} & \boldsymbol{\mu}\triangle + (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})D^2_{x_3} \end{pmatrix},$$

с краевым условием

$$\mathcal{B}(D_x)U\big|_{x_3=0} = 0, \tag{2}$$

$$\mathcal{B}(D_x) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}D_{x_3} & 0 & \boldsymbol{\mu}D_{x_1} \\ 0 & \boldsymbol{\mu}D_{x_3} & \boldsymbol{\mu}D_{x_2} \\ \boldsymbol{\lambda}D_{x_1} & \boldsymbol{\lambda}D_{x_2} & (\boldsymbol{\lambda}+2\boldsymbol{\mu})D_{x_3} \end{pmatrix}.$$

Здесь $U = (U_1, U_2, U_3)^T$, $F = (F_1, F_2, F_3)^T$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ — постоянные Ламе, $\boldsymbol{\mu} > 0$, $3\boldsymbol{\lambda} + 2\boldsymbol{\mu} > 0$, $\triangle$ — оператор Лапласа по x. Система (1) является однородной эллиптической, а краевая задача (1), (2), очевидно, удовлетворяет условию Лопатинского [3]. Определитель Лопатинского $\det L(s)$, $s \in R^2$, для краевой задачи (1), (2) обращается в 0 при $s = 0$. Поэтому краевая задача (1), (2) может не иметь решений в соболевском пространстве $W^2_p(R^3_+)$, $p \geqslant 1$, даже при бесконечно дифференцируемых финитных вектор-функциях $F(x)$ [4, 5]. В следующей теореме указаны условия разрешимости задачи (1), (2) в соболевском пространстве $W^2_2(R^3_+)$.

Теорема. *Краевая задача* (1), (2) *однозначно разрешима в соболевском пространстве* $W^2_2(R^3_+)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{R^3_+} F_j(x)\, dx = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 14.B37.21.0355, Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-31030, и Сибирского отделения Российской академии наук, междисциплинарный проект № 80.

Литература

1. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек.—М.: Наука, 1982.—288 с.
2. *Новацкий В.* Теория упругости.—М.: Наука, 1975.—872 с.
3. *Волевич Л. Р.* Локальные свойства решений квазиэллиптических систем // Мат. сб.—1962.—Т. 59, № 3.—С. 3–52.
4. *Бондарь Л. Н.* Разрешимость краевых задач для квазиэллиптических систем в весовых соболевских пространствах // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика.—2010.—Т. 10, вып. 1.—С. 3–17.
5. *Бондарь Л. Н.* Условия разрешимости краевых задач для квазиэллиптических систем в полупространстве // Диф. уравнения.—2012.—Т. 48, № 3.—С. 341–350.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОДУ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

А. И. Вагабов (Россия, Махачкала; ЮМИ)

Рассматривается система

$$Y' - (\lambda A(x) + A_1(x))Y = F(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{1}$$

где Y, $A(x)$, $A_1(x)$, $F(x)$ — $n \times n$ комплекснозначные матрицы, λ — комплексный параметр. Предполагается, что $A(x)$, $A_1(x)$ покомпонентно суммируемые и ограниченные на $[0, \infty)$ функции. Полагаем также, что φ-корни уравнения $\det(A(x) - \varphi I) = 0$ различны при всех x и $|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \geqslant c > 0$, $k = \overline{1, n-1}$.

λ-плоскость разбивается на конечное число секторов с центром в начале, в каждой из которых выполняются неравенства

$$\operatorname{Re} \lambda\, \varphi_1(x) \leqslant \operatorname{Re} \lambda\, \varphi_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re} \lambda\, \varphi_n(x).$$

Теорема 1. *Существует фундаментальное матричное решение системы* (1), (*при* $F \equiv 0$), *имеющее в любом заданном секторе* S *представление*

$$Y(x, \lambda) = \bigl(M(x) + F(x, \lambda) \exp \lambda\bigr) \int\limits_0^x D(\xi)\, d\xi,$$

где $M(x)$ — *матрица, трансформирующая* $A(x)$ *в диагональную* $D(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x))$ (*нумерация* φ*-корней своя для каждого сектора*). $E(x, \lambda)$ — *ограниченная покомпонентно матрица такая, что* $E(x, \lambda) \to 0$ *при* $\lambda \to 0$ *при* $\lambda \to \infty$ *для* $\lambda \in S$. *Обратно,* $(x, \lambda) \to 0$ $x \to \infty$, $\lambda \in S$, $|\lambda| > 1$.

Теорема 2. *В случае вещественных* φ*-корней для решения*

$$Y(x, \lambda, F) = \int\limits_0^x Y^{\tau}(x, \lambda)\, Y^{-1}(\xi, \lambda)\, F(\xi)\, d\xi - \int\limits_x^{\infty} Y^{n-\tau}(x, \lambda)\, Y^{-1}(\xi, \lambda)\, F(\xi)\, d\xi$$

уравнения (1), *где* τ — *число отрицательных* φ*-корней, а* Y^{τ} — *матрица из первых* τ *столбцов матрицы* Y, *верна формула*

$$-\frac{1}{\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda = H > 0} Y(x, \lambda, F)\, d\lambda = F(x), \quad x > 0.$$

Теорема 3. *Решением задачи Коши*

$$A(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + A_1(x) u(x, t), \quad t > 0,\ 0 < x < \infty,$$
$$u\,(x, 0) = F\,(x)$$

при условиях теорем 1, 2 *служит матрица*

$$u(x, t) = \frac{-1}{\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda = H > 0} e^{\lambda t} Y(x, \lambda, F)\, d\lambda.$$

Литература

1. *Раппопорт И. М.* Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР.—1951.—Т. 78.—С. 1097–1110.
2. *Вагабов А. И.* Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных систем с параметром на полуоси // Докл. РАН.—2010.—Т. 430, № 2.—С. 151–153.

УРАВНЕНИЯ В СВЕРТКАХ В МНОГОМЕРНОМ КОНУСЕ

В. Б. Васильев (Россия, Липецк; ЛГТУ)

1. Мы рассматриваем уравнение в свертках

$$\int\limits_{C_+^a} A(x-y)\,u(y)\,dy = v(x), \quad x \in C_+^a, \tag{1}$$

в многомерном конусе

$$C_+^a = \{x \in \mathbf{R}^m : x_m > a|x'|,\ x=(x',x_m),\ x'=(x_1,...,x_{m-1}),\ a>0\}$$

в пространствах Соболева — Слободецкого $H^s(C_+^a)$.

Уравнение (1) — типичное модельное уравнение при исследовании разрешимости псевдодифференциальных уравнений на многообразиях, граница которых содержит конические точки. Ситуация с гладкой границей подробно описана в [1]. Для описания условий уравнения (1) автор предложил концепцию волновой факторизации символа эллиптического псевдодифференциального оператора [2], и при ее наличии дал полное описание картины разрешимости уравнения (1) в двумерном случае.

2. Символ оператора свертки в (1) обозначаем $\hat{A}(\xi)$ и предполагаем выполненным условие

$$c_1 \leqslant |\hat{A}(\xi)(1+|\xi|)^{-\alpha}| \leqslant c_2, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

кроме того, $\hat{A}(\xi)$ должен допускать волновую факторизацию [2] относительно конуса C_+^a, $m \geqslant 3$, с индексом æ, $|æ - s| = n + \delta$, $n \in \mathbf{N}$, $|\delta| < 1/2$. В этом случае можно описать структуру общего решения уравнения (1) следующим образом.

Обозначим V_a псевдодифференциальный оператор с символом $\exp(ia|\xi'|)$, $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{m-1})$, $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ — элементы волновой факторизации символа $\hat{A}(\xi)$, $\tilde{u}$, Fu — преобразование Фурье функции u.

Справедлива следующая

Теорема. *Общее решение уравнения* (1) *в образах Фурье выражается формулой*

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi) G_m A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{lv}(\xi) + A_{\neq}^{-1}(\xi) V_a F\left(\sum_{k=1}^{n} c_k(\xi')\delta^{(k-1)}(\xi_m)\right), \tag{2}$$

где $c_k(x') \in H^{s_k}(\mathbf{R}^{m-1})$ — произвольные функции, $s_k = s - æ + k - 1/2$, $k = 1, 2, \ldots, n$, lv — произвольное продолжение v на $H^{s-\alpha}(\mathbf{R}^m)$, $\delta(\xi_m)$ — дельта-функция Дирака одной переменной, G_m — интегральный оператор вида

$$\lim_{\tau\to 0+} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \frac{u(y', y_m)}{(|x'-y'|^2 - a^2(x_m - y_m + i\tau)^2)^{m/2}}\,dy.$$

Основываясь на этом представлении, можно предложить различные постановки краевых задач для уравнения (1).

3. Некоторые вопросы разрешимости дискретных уравнений типа (1) рассматривались в работах [3, 4]. В частности, установлена одновременная разрешимость уравнений типа (1) в дискретном и континуальном случаях.

Литература

1. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1973.—273 с.
2. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. 2-е изд.—М.: КомКнига, 2010.—236 с.
3. *Vasilyev V. B.* Discrete convolutions and difference equations // Proceedings of Dynamic Systems and Appl.—2008.—Vol. 5.—P. 474–480.
4. *Vasilyev V. B.* Elliptic equations and boundary value problems in non-smooth domains // Operator Theory: Advances and Applications. Pseudo Differential Operators: Analysis, Applications and Computations.— Birkhäuser: Springer Basel, 2011.—Vol. 213.—P. 105–121.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

К. А. Волосов (Россия, Москва; МГУПС (МИИТ)),
Л. В. Пугина (Россия, Москва; МГУПС (МИИТ)),
А. К. Волосова (Россия, Москва; МГУПС (МИИТ))

Метод нефиксированной конструктивной замены переменных (МНФКЗП) наиболее глубоко разработан, в случае двух независимых переменных [1, 2]. Все функции ниже принадлежат $C^2[\Re \bigotimes \Re]$.

Рассмотрим уравнение KdV и сделаем замену переменных [4, 6]

$$\begin{gathered} {Z'}_t + R(t, Z, Z'_x) + Z'''_{xxx} = F(t, Z), \\ Z(x,t)_{\substack{x=x(\xi,\delta),\\ t=t(\xi,\delta)}}(\xi,\delta). \end{gathered} \tag{1}$$

При этом существуют формулы пересчета «старых» переменных x, t по «новым» переменным ξ, δ

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \det J \frac{\partial \delta}{\partial t}, \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} = -\det J \frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad \frac{\partial x}{\partial \delta} = -\det J \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial t}{\partial \delta} = \det J \frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{2}$$

Введем «дифференциальные связи» [1, 2]

$$\begin{gathered} \frac{\partial Z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x(\xi,\delta),\\ t=t(\xi,\delta)}} = Y(\xi,\delta), \quad \frac{\partial Z}{\partial t}\Big|_{\substack{x=x(\xi,\delta),\\ t=t(\xi,\delta)}} = T(\xi,\delta), \\ \frac{\partial Y(\xi(x,t),\delta(x,t))}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x(\xi,\delta),\\ t=t(\xi,\delta)}} = M(\xi,\delta), \quad {Z''}_{xt} = {Z''}_{tx}. \end{gathered} \tag{2}$$

Последнее соотношение в (3) является необходимым: это равенство смешанных производных в переменных ξ, δ. В работах [1, 3] впервые доказано, что система которая следует из (1)–(3) является **линейной** системой функциональных алгебраических уравнений (СФЛАУ) относительно переменных $\mathbf{X} = \left(x'_\xi, x'_\delta, t'_\xi, t'_\delta\right)$. На основе этого нового факта можно строить точные и приближенные решения ДУсЧП.

Теорема 1. *Пусть дана система уравнений в переменных ξ, δ которая следует из системы (1)–(3). Тогда СФЛАУ имеет вид:*

$$\begin{pmatrix} YU'_\delta & -YU'_\xi & TU'_\delta & -TU'_\xi \\ -Y'_\delta & Y'_\xi & -T'_\delta & T'_\xi \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_\xi \\ x'_\delta \\ t'_\xi \\ t'_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

и имеет единственное решение:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = g_1(\xi,\delta), \quad \frac{\partial x}{\partial \delta} = g_2(\xi,\delta), \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} = g_3(\xi,\delta), \quad \frac{\partial t}{\partial \delta} = g_4(\xi,\delta),$$

$$b_4 = (YY'_\delta - MU'_\delta)(Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi),$$
$$a_{33} = -MU'_\delta + YY'_\delta,$$
$$a_{34} = MU'_\xi - YY'_\xi,$$
$$a_{44} = Y^2(T'_\xi Y'_\delta - T'_\delta Y'_\xi) + MY(T'_\delta U'_\xi - U'_\delta T'_\xi) + MT(U'_\delta Y'_\xi - U'_\xi Y'_\delta),$$
$$P_2 = Y'_\delta U'_\xi - Y'_\xi U'_\delta,$$
$$\begin{gathered} T(\xi,\delta) = \left[M\left(M'_\xi U'_\delta - M'_\delta U'_\xi\right) + Y\left(M'_\delta Y'_\xi - M'_\xi Y'_\delta\right) + \right.\\ \left. + \left(F\left(t(\xi,\delta),U\right) - R\left(t(\xi,\delta),U,Y\right)\right)\left(Y'_\delta U'_\xi - Y'_\xi U'_\delta\right)\right]/P_2. \end{gathered} \tag{4}$$

Из условия разрешимости системы (4) $g''_{3_{\xi\delta}} = g''_{4_{\delta\xi}}$ следует сопутствующее KdV уравнение. Можно провести для него тест Пенлеве и построить иерархию, аналогично [6]. Примеры пары Лакса приведены в [3, 5].

Литература

1. *Volosov K. A.* Construction of solutions of PDE // Sib. J. Industr. Math.—2008.—Vol. 11, № 2(34).—P 29–39.—(English translation in J. of Applied and Industrial Math.—2009.—Vol. 3, № 4.—P. 519–527.).—URL: http://www.springerlink.com/content/h347004463516r68.
2. *Volosova A. K., Volosov K. A.* Construction of solutions of PDE in parametric form // International J. of Math. and Math. Sci.—2009.—Vol. 2009.—Article ID 319268.—17 p.—URL: http://www.hindawi.com/journals/ijmms/2009/319269.
3. *Volosov K. A., Vdovina E. K.* About expansion of number of models which have pairs of Lax's // Inter. J. Dif. Eq. and Appl.—2012.—Vol. 11, № 1.—P. 27–36.
4. *Bullough R. K., Caudrey P. J.* Solitons.—New York, 1980.—408 p.
5. *Волосов К. А., Вдовина Е. К.* Пары Лакса для класса нелинейных уравнений // Междунар. конф. по диф. урав.—Суздаль, 2012.—С. 41–43.
6. *Кудряшов Н. А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений.—Москва–Ижевск, 2004.—355 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Л. Х. Гадзова (Россия, Нальчик; НИИ ПМА КБНЦ РАН)

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial_{0x}^{\alpha_i} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[, \tag{1}$$

где $\alpha_i \in]1,2[$, $\lambda, \lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \neq 0$, $\alpha_1 > \alpha_i$ $(i = 2, 3, \ldots, m)$, $\partial_{0x}^{\beta} u(x)$ — регуляризованная дробная производная (производная Капуто) [1, с. 11].

В монографии [1] даны постановки видоизменных задач Коши и Неймана для уравнения второго порядка с дробной производной порядка $\alpha \in [1, 2]$. Начальные и краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с постоянными коэффициентами рассматривались в работах [2] (см. так же библиографию) и [3].

Регулярным решением уравнения (1) называем функцию $u = u(x)$, имеющая абсолютно непрерывные производные на отрезке [0,1] и удовлетворяющая уравнению (1).

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u'(0) = a, \quad u'(1) = b, \tag{2}$$

где a, b — заданные постоянные.

В данной работе постороено явное представление решения задачи Неймана для уравнения (1) и найдено условие однозначной разрешимости.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Псху А. В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сб.—2011.—Т. 200, № 4.—С. 111–122.
3. *Гадзова Л. Х.* Краевая задача для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Докл. Адыгской (Черкеской) Междунар. АН.—2011.—Т. 13, № 1.—С. 47–49.
4. *Wright E. M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc.—1933.—Vol. 8, № 29.—P. 71–79.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ НА ОТРЕЗКЕ

А. Л. Джабраилов (Россия, Грозный; ЧГУ)

Методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов для различных классов нелинейных интегральных уравнений с весовыми дробными интегралами, рассмотренных в [1], доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений в вещественных пространствах Лебега. Показано, что решения могут быть найдены в пространстве $L_2(0,1)$ методом последовательных приближений пикаровского типа и доказаны оценки скорости их сходимости. При этом не требуется, чтобы параметр перед нелинейной частью был «малым» по модулю

Литература

1. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свертки.—М.: Физматлит, 2009.—304 с.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА ЛИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ[1]

Жибер А. В. (Россия, Уфа; ИМ ВЦ УНЦ РАН),
Костригина О. С. (Россия, Уфа; УГАТУ)

В работе рассматриваются кольца Ли характеристических векторных полей для уравнений в частных производных [1–3]. Понятие характеристического векторного поля для гиперболических уравнений впервые ввел в расмотрение Э. Гурса в работе [4]. Важной вехой в формировании этого подхода послужила работа [5]. В докладе обсуждаются возможные приложения этого понятия в задачах классификации интегрируемых уравнений гиперболического типа с большим чем три числом характеристических направлений. А также к уравнениям эволюционного типа и к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В качестве примеров рассмотрены известные в математической физике модели, такие как система уравнений генерации второй гармоники, уравнение Кортевега-де Фриза, уравнение Бюргерса, обыкновенные дифференциальные уравнения Пенлеве. Например, характеристические кольца Ли уравнения Пенлеве I

$$u_{yy} = 6u^2 + y$$

определяются через гиперболические системы

$$p_{xy} = q_x, \quad q_{xy} = 6p_x^2 + y$$

либо

$$u_{xy} = v_x, \quad v_{xy} = 12uu_x.$$

Литература

1. *Жибер А. В., Муртазина Р. Д., Хабибуллин И. Т., Шабат А. Б.* Характеристические кольца Ли и интегрируемые модели математической физики // Уфим. мат. журн.—2012.—Т. 4, № 3.—С. 17–85.
2. *Жибер А. В., Муртазина Р. Д., Хабибуллин И. Т., Шабат А. Б.* Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения.—М.–Ижевск: Инст. комп. иссл., 2012.—376 с.
3. *Гюрсер М., Жибер А. В., Хабибуллин И. Т.* Характеристические кольца Ли дифференциальных уравнений // Уфим. мат. журн.—2012.—Т. 4, № 1.—С. 53–62.
4. *Goursat E.* Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre // Annales de la faculté des Sciences de I'Université de Toulouse 2^e série.—1899.—Т. 1, № 1.—P. 31–78.
5. *Шабат А. Б., Ямилов Р. И.* Экспоненциальные системы типа 1 и матрицы Картана.—Уфа, 1981.—20 с.—(Препринт / БФ АН СССР).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 11-01-97005-р-поволжье-а, № 13-01-00070-а.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

О СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. М. Каплицкий (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

В работе рассматривается задача получения асимтотических оценок собственных функций интегральных операторов в неограниченных областях. Выделен класс ядер и коэффицентов для которых главная часть ядра имеет разностную мажоранту вида $\exp(-S(x-y))$, где $S(x)$ — четная субаддитивная функция, а коэффиценты полного ядра удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Для операторов с ядрами из соответствующих классов получены оценки скорости убывания собственных функций. Намечен путь перенесения результатов на нелинейные интегральные уравнения.

Пусть Ω — неограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $k(x,y)$ — матрица-функция элементами которой являются измеримые функции, определенные на Ω, E — комплексное идеальное банахово пространство функций, определенных на Ω. Мы будем предполагать, что $E = X_{\mathbb{C}}$, где X — вещественное идеальное банахово простанство для которого сопряженное пространство X' имеет порядково непрерывную норму. Пусть

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\Omega} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad \varphi \in E^{(m)} = E \times E \times \ldots \times E.$$

Пусть $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ — измеримая функция, удовлетворяющая условиям:

$$S(-x) = S(x); \quad S(x+y) \leqslant S(x) + S(y).$$

Для $\theta \in (0,1)$ положим

$$(M_\theta\varphi)(x) = \int\limits_{\Omega} |k(x,y)|\exp(-\theta S(x-y))\varphi(y)\,dy.$$

Операторы M_θ будем называть мажорантными операторами для оператора K. Введем оператор-функцию $T : \mathbb{R} \to L\left(E^{(m)}, E^{(m)}\right)$, $T(\lambda) = I - U^{-1}(\lambda)KU(\lambda)$, где $U(\lambda)$ — оператор умножения на функцию $\exp(i\lambda S(x))(\lambda \in \mathbb{R})$:

$$(U(\lambda)\varphi)(x) = \exp(i\lambda S(x))\varphi(x).$$

Можно доказать, что оператор-функция $T(\lambda)$ обладает свойствами:

1) если мажорантные операторы M_θ ограничены и оператор $I-K$ является нетеровым, то оператор-функция $T(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение в полосу $|\operatorname{Im}\lambda| < 1$ и существует $\delta^* \in (0,1)$ такое, что оператор-функция $T(\lambda)$ нетерова в полосе $|\operatorname{Im}\lambda| < \delta^*$;

2) если мажорантные операторы M_θ компактны, то $T(\lambda)$ продолжается до аналитической нетеровой оператор-функции во всей полосе $|\operatorname{Im}\lambda| < 1$. Используя методику работы [2], можно показать, что для любой собственной функции φ оператора K, соответствующей собственному значению 1, справедливо включение: $\exp(\delta S(x))\varphi(x) \in E^{(m)}$, где $0 < \delta < \delta^*$, причем в случае, когда мажорантные операторы компактны можно взять $\delta^* = 1$. Пусть $E = L_p(\Omega)$. Тогда для ядер, допускающих представление:

$$k(x,y) = a(x)k_0(x,y)b(y),$$

где

$$|(k_0)_{ij}(x,y)| \leqslant C_{ij}A(x-y)e^{-S(x-y)},$$

где неотрицательная суммируемая функция $A(x)$ принадлежит пространству $L_{p',\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, а матричные коэффиценты $a(x)$, $b(y)$ ограниченны, из принадлежности φ соотвествующему весовому пространству выводятся поточечные оценки:

$$|\varphi_i(x)| \leqslant C_i \exp(-\delta S(x))$$

для любого $\delta < \delta^*$, причем в случае компактности мажорантных операторов можно взять $\delta^* = 1$. Такой же результат получен при условии, что ограничен только один из коэффицентов $a(x)$, $b(y)$, а матричные элементы второго локально принадлежат некоторому пространству L_q и ограниченны на бесконечности. Доказательства этих результатов для случая когда функция $S(x)$ имеет быстрый рост [2]. Полные доказательства в общем случае мы планируем привести в другой работе.

Литература

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // Успехи мат. наук.—1967.—Т. 12, вып. 2 (74).—С. 43–118.
2. *Каплицкий В. М.* Метод оценки собственных функций некоторых классов интегральных операторов в неограниченных областях // Изв. РАН. Сер. мат.—2011.—Т. 75, вып. 5.—С. 65–92.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИОННОСТИ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА[1]

Р. Ч. Кулаев (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Пусть $\Gamma = (a,b) \setminus \{a_i\}_{i=1}^n$, где $a < a_1 < \ldots < a_n < b$. Для единообразия будем считать $a = a_0$, $b = a_{n+1}$. Через $C[\Gamma]$ обозначим пространство кусочно-непрерывных функций, допускающих разрывы только первого рода и только в точках a_i при $i = \overline{1,n}$, тогда для функции $u(x) \in C[\Gamma]$ под $u(a_i \pm 0)$ будем понимать соответствующие пределы. Через $C^k[\Gamma]$ обозначим пространство функций из $C[\Gamma]$, имеющих k производных, также принадлежащих $C[\Gamma]$.

На Γ рассматривается дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv (p(x)u'')'' - (q(x)u')' = f(x), \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

снабженное в точках a и b краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(a) + \alpha(a)D^3u(a) = 0, \quad \beta(a)u''(a) - \vartheta(a)u'(a) = 0,\\ u(b) - \alpha(b)D^3u(b) = 0, \quad \beta(b)u''(b) + \vartheta(b)u'(b) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

а в точках a_i $(i = 1,\ldots,n)$ — условиями согласования

$$\begin{gathered} u(a_i - 0) - u(a_i + 0) = 0, \quad u'(a_i - 0) - u'(a_i + 0) = 0,\\ (pu'')(a_i - 0) - (pu'')(a_i + 0) = 0,\\ D^3u(a_i - 0) - D^3u(a_i + 0) - \delta_i u(a_i) = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где через D^3u в (3) обозначена третья квазипроизводная $(p(x)u'')' - q(x)u'$.

Предполагаем, что $p \in C^2[\Gamma]$, $\inf_{x\in\Gamma} p(x) > 0$, $q \in C^1[\Gamma]$, $q \geqslant 0$ на Γ, $f \in C[\Gamma]$; $\alpha(\cdot), \vartheta(\cdot), \beta(\cdot) \geqslant 0$, $\vartheta(\cdot) + \beta(\cdot) \neq 0$; $\delta_i \geqslant 0$ для всех $i = 1,\ldots,n$.

Пусть $G_0(x,s)$ — функция Грина краевой задачи (1)–(3) в случае, когда все коэффициенты δ_i в условиях (3) равны нулю. Для всех $k \in \mathbb{N}$ и любых наборов $a < x_i < b$ и $a < s_i < b$, $i = 1,\ldots,k$, определим ассоциированные ядра функции $G_0(x,s)$:

$$G_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k\\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k \end{pmatrix} := \det \|G_0(x_i,s_j)\|_{j,m=1}^k.$$

Теорема 1. *Функция Грина $G(x,s)$ задачи (1)–(3) положительна на $(a,b)\times(a,b)$ тогда и только тогда, когда $(\delta_1,\ldots,\delta_n) \in \Sigma$, где*

$$\Sigma = \left\{ (\delta_1,\ldots,\delta_n) \in \mathbb{R}_+^n : \ 1 + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n,\\ j\notin\{i_1,\ldots,i_k\}}} g^j_{i_1\ldots i_k}\delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k} \geqslant 0 \right\},$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 8210.

и

$$g^{j}_{i_1\ldots i_k}=\lim_{s\to a+0}\frac{G_0\begin{pmatrix}a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & a_j\\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & s\end{pmatrix}}{G_0(a_j,s)},\quad j=2,\ldots,n,$$

$$g^{n+1}_{i_1\ldots i_k}=\lim_{(x,s)\to(b-0,a+0)}\frac{G_0\begin{pmatrix}a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & x\\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & s\end{pmatrix}}{G_0(x,s)},\quad j=n+1.$$

Теорема 2. *Функция Грина задачи* (1)–(3) *является осцилляционным ядром тогда и только тогда, когда она положительна на* $(a,b)\times(a,b)$.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Я. Т. Мегралиев (Азербайджан, Баку; БГУ)

Рассмотрим для уравнения [1]

$$u_{ttt}(x,t) - u_{txx}(x,t) + u_{tt}(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \qquad (1)$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_{tt}(x,0) = \varphi_2(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \qquad (2)$$

граничными условиями

$$u(0,t) = u_x(1,t) = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T) \qquad (3)$$

и интегральным условием переопределения

$$\int\limits_0^1 u(x,t)\,dx = h(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \qquad (4)$$

где α $(0 < \alpha < 1)$ — заданное число, $f(x,t)$, $\varphi_i(x)$ $(i = 0,1,2)$, $h(t)$ — заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ — искомые функции.

Определение 1. Классическим решением обратной краевой задачи (1)–(4) назовем пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:

1) функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);

2) функция $a(t)$ непрерывна на $[0,T]$;

3) все условия (1)–(4) удовлетворяются в обычном смысле.

Предположим, что данные задачи (1)–(4) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi_0(x) \in C^2[0,1],\ \varphi_0'''(x) \in L_2(0,1),\ \varphi_0(0) = \varphi_0'(1) = \varphi_0''(0) = 0;$
2. $\varphi_1(x) \in C^2[0,1],\ \varphi_1'''(x) \in L_2(0,1),\ \varphi_1(0) = \varphi_1'(1) = \varphi_1''(0) = 0;$
3. $\varphi_2(x) \in C^1[0,1],\ \varphi_2''(x) \in L_2(0,1),\ \varphi_2(0) = \varphi_2'(1) = 0;$
4. $f(x,t), f_x(x,t) \in C(D_T),\ f_{xx}(x,t) \in L_2(D_T),$
   $f(0,t) = f_x(0,t) = 0\ (0 \leqslant t \leqslant T);$
5. $h(t) \in C^3[0,T],\ h(t) \neq 0\ (0 \leqslant t \leqslant T).$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1–5 *и*

$$\int\limits_0^1 \varphi_0(x)\,dx = h(0), \quad \int\limits_0^1 \varphi_1(x)\,dx = h'(0), \quad \int\limits_0^1 \varphi_2(x)\,dx = h''(0).$$

Тогда при малых значениях T *задача задача* (1)–(4) *имеет единственное классическое решение*

Литература

1. *Варламов В. В.* О фундаментальном решении одного уравнения, описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—1987.—Т. 27, № 4.—С. 629–633.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Мерлин (Россия, Чебоксары; ЧувГУ)

На действительной оси рассматривается сингулярное интегральное уравнение вида [1, 2]

$$a(x)\varphi(x)+\frac{b(x)}{\pi i}\int\limits_R \frac{x-z_0}{\tau-z_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-x}\,d\tau=f(x),\qquad R=(-\infty,+\infty),\quad x_1,x_2,\dots,x_n\in R, \tag{1}$$

где $a(x)$, $b(x)$ — коэффициенты уравнения, удовлетворяющие условию Гёльдера всюду на R в следующем смысле: на любом конечном отрезке это условие имеет классический вид [1], а в окрестности бесконечно удаленной точки условие Гёльдера видоизменяется, известным образом [2] и при этом $a^2(x)-b^2(x)=1$, $f(x)$ — заданная правая часть уравнения, представимая в виде

$$f(x)=\frac{f_1(x)}{\Omega(x)},\quad f_1(x)\in H^\lambda(R),\quad \Omega(x)=\prod_{j=1}^n(x-x_j),\quad f(+\infty)=f(-\infty), \tag{2}$$

$x_1,x_2,\dots,x_n$ — попарно различные произвольно фиксированные точки, z_0 — произвольная фиксированная точка комплексной плоскости C, не принадлежащая действительной оси.

Решение $\varphi(x)$ уравнения (1) ищется в классе функций (2), ограниченных на бесконечности и таких, что $\varphi(+\infty)=\varphi(-\infty)$.

Применим к плоскости C дробно-линейное преобразование $w=\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$, которое переводит действительную ось в единичную окружность L с центром в начале координат, и отображает точки $x_1,x_2,\dots,x_n$ в попарно различные точки $t_1,t_2,\dots,t_n$ указанной окружности L, где в силу взаимно однозначного характера отображения $w=w(z)$ ни одна из точек t_i не совпадает с образом точки $x=\infty$.

При этом уравнение (1) принимает форму

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{t}{\tau_1}\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-t}\,d\tau_1=f(t). \tag{3}$$

Сингулярное интегральное уравнение (3) исследовалось автором в ряде работ, например, [3].

Для решения уравнения (3) сделаем в нем замену искомой функции на дробь следующего вида $\varphi(t)=\frac{\psi(t)}{\Omega_1(t)}$, где $\psi(t)\in H^\lambda(L)$. Преобразованное уравнение (3) имеет вид

$$a(t)\psi(t)+b(t)\left(\frac{1}{\pi i}\int\limits_R\frac{\psi(\tau)}{(\tau-t)}d\tau-L_n(t,S\psi,\Delta\cup\{t_0\}\right)=F(t), \tag{4}$$

где $F(t) = f(t)\Omega_1(t)$, и $L_n(t, g, \Delta \cup \{t_0\})$ — интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(t, g, \Delta \cup \{t_0\}) = \sum_{j=0}^{n} g(t_j)\omega_j(t), \quad \omega_j(t) = \prod_{i=0}^{n} \frac{t - t_i}{t_j - t_i},$$

построенный для интеграла типа Коши $S\psi(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{\psi(\tau)}{(\tau - t)} d\tau$ по узлам $\Delta = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \cup \{t_0\}$. Для решения сингулярного интегрального уравнения (4) вводим кусочно аналитическую функцию в виде

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\psi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{2} L_n(z, S\psi, \Delta \cup \{t_0\}).$$

Сингулярное интегральное уравнение (4) сводится к эквивалентной задаче Римана [1] относительно функции $\Psi(z)$ в классе кусочно-аналитических функций в комплексной плоскости C с полюсом на бесконечности порядка n и с дополнительными условиями в узлах Δ:

$$\Psi^+(t_j) + \Psi^-(t_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad \Psi(t_0) = 0.$$

Эта задача решается в явном виде: построено общее решение и проведен анализ разрешимости.

Таким образом, построено общее решение уравнения (1), подсчитано число линейно-независимых решений и условий его разрешимости. Картина разрешимости существенно зависит от числа нулей коэффициента $a(x)$ в узлах интерполяции Δ.

Литература

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—М.: Наука, 1977.—640 с.
2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
3. *Merlin A. W.* Singular integral equation with normalized nuclei // Progress in Analysis. Proceedings of the 8th Congress (Moscow, August 22–27, 2011.)—M.: Peoples Friendship University of Russia, 2012.—Vol. 1.—P. 411–420.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВЫХ ОБЛАСТЯХ

А. Б. Моргулис (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ),
К. И. Ильин (UK, York; The University of York)

Говоря об идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости, мы привычно представляем себе консервативную систему, при движении которой сохраняются полная энергия системы и циркуляции поля скорости вокруг замкнтуых материальных контуров. Однако, это верно лишь до тех пор, пока жидкость заключена в непроницаемые для нее границы, или поставлены условия пространственной периодичности. Например, законы сохранения нарушаются, если течение *открыто*, т. е. определенные части границы представляют собой вход и выход потока, рис. 1. В таком случае материальные частицы, входящие в область течения, вносят в нее энергию и вихрь, а уходящие — уносят. В результате включается и накачка, и диссипация энергии, причем механизм последней совершенно отличен от вязкого случая.

Рис. 1. Прямой канал и кольцевая область.

Таким образом, открытое течение — неконсервативная система (даже при нулевой вязкости), и потому следует ожидать динамических явлений общего положения, таких, например, как установление определенного режима течения со временем [1–3], причем начальное состояние потока в той или иной степени забывается. Предельный режим может быть стационарным или колебательным, причем колебания могут быть периодическими, квазипериодическими и даже более сложными. Все эти возможности реализуются в динамике течений в прямолинейном канале (рис. 1, слева) при весьма простых граничных условиях [4].

В настоящем сообщении речь идет о другой геометрии (см. рис. 1, справа). Постановка краевых условий такова: на S^+ и S^- задается нормальная скорость; дополнительно, на входе (т. е. на S^+) задается касательная скорость. Это граничное условие существенно отличается от принятого в [1–4], где на входе задавалась завихренность.

В кольцевой области всегда существует двупараметрическое семейство течений, создаваемых точечным вихреисточником, помещенным внутрь S^+. Параметры семейства — поток жидкости сквозь S^+ и циркуляция потока вокруг S^+.

В сообщении обсуждаются спектры краевых задач, возникающих при линеаризации уравнений гидродинамики на течении указанного семейства, и приводятся примеры критических значений параметров, при которых имеются ненулевые точки спектра на мнимой оси. Особое внимание к таким критическим значениям обусловлено тем, что с ними связано возникновение нелинейных периодических автоколебаний вблизи основного режима (бифуркация Пуанкаре — Андронова — Хопфа, см. [5–6]).

Литература

1. *Моргулис А. Б., Юдович В. И.* Асимптотическая устойчивость стационарного режима протекания идеальной несжимаемой жидкости // Сиб. мат. журн.—2002.—Т. 43, № 4.—С. 840–857.
2. *Morgulis A. B., Yudovich V. I.* Arnold's method for asymptotic stability of steady inviscid incompressible flow through a fixed domain with permeable boundary // Chaos.—2002.—Vol. 12, № 2.—P. 356–371.
3. *Morgulis A. B.* Non-linear asymptotic stability for the through-passing flows of inviscid incompressible fluid // Asymptotic Analysis.—2010.—Vol. 66—P. 229–247.
4. *Govorukhin V. N., Morgulis A. B., Vladimirov V. A.* Planar inviscid flows in a channel of finite length: washout, trapping and self-oscillations of vorticity // J. Fluid Mech.—2010.—Vol. 659, № 2.—P. 420–472.
5. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1978.—304 с.
6. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний жидкости // Прикл. математика и механика.—1971.—Т. 35, вып. 4.—С. 638–655.

ПАРА ЛАКСА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА КОМПЛЕКСНОЗНАЧНУЮ ФУНКЦИЮ

О. В. Новикова (Россия, Ставрополь; СКФУ)

Ранее было доказано, что нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\bar{p}_t - ip_{xx} + 2ip\big(p^2 + \bar{p}^2\big) = 0 \tag{1}$$

можно представить в виде операторного уравнения нулевой кривизны

$$L_t - A_x + [L, A] = 0,$$

эквивалентного системе двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_x = L\varphi, \\ \varphi_t = A\varphi, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varphi(x,t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,t) \\ \varphi_2(x,t) \end{pmatrix}$, операторы L и A имеют спектральное разложение по параметру λ вида

$$L = \begin{pmatrix} p & \bar{p} - \lambda \\ \bar{p} + \lambda & -p \end{pmatrix},$$

$$A = i\begin{pmatrix} -\bar{p}_x - 2\lambda p & p_x + p^2 + \bar{p}^2 - 2\lambda\bar{p} + 2\lambda^2 \\ p_x - p^2 - \bar{p}^2 - 2\lambda\bar{p} - 2\lambda^2 & \bar{p}_x + 2\lambda p \end{pmatrix}.$$

Подставив в систему (2) значения L и A и выполнив некоторые преобразования, получим систему (3):

$$\begin{cases} p\varphi_2 - \bar{p}\varphi_1 + \varphi_{2x} = \lambda\varphi_1, \\ p\varphi_1 + \bar{p}\varphi_2 - \varphi_{1x} = \lambda\varphi_2, \\ \varphi_{1t} = i(\bar{p}_x\varphi_1 - (p_x - p^2 - \bar{p}^2)\varphi_2 + 2\bar{p}\varphi_{1x} - 2p\varphi_{2x} - 2\varphi_{2xx}), \\ \varphi_{2t} = i((-p^2 - \bar{p}^2 - p_x)\varphi_1 - \bar{p}_x\varphi_2 - 2p\varphi_{1x} - 2\bar{p}\varphi_{2x} + 2\varphi_{1xx}). \end{cases}$$

Операторное уравнение Лакса

$$L_{1t} = [L_1, A_1] \tag{4}$$

эквивалентно системе двух линейных уравнений

$$\begin{cases} L_1\varphi = \lambda\varphi, \\ \varphi_t = -A_1\varphi. \end{cases} \tag{5}$$

Сопоставив системы (3) и (5), найдем операторы L_1 и A_1.

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} -\bar{p} & p \\ p & \bar{p} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$A_1 = 2i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2i \begin{pmatrix} -\bar{p} & p \\ p & \bar{p} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + i \begin{pmatrix} -\bar{p}_x & -p^2 - \bar{p}^2 + p_x \\ p^2 + \bar{p}^2 + p_x & \bar{p}_x \end{pmatrix}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Нелинейное уравнение в частных производных* (1) *эквивалентно уравнению Лакса* (4) *с дифференциальными операторами вида* (6).

Литература

1. *Кудряшов Н. А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений.—М.–Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2004.—250 с.
2. *Редькина Т. В.* Использование несамосопряженных операторов для построения нелинейных уравнений с солитонными свойствами // Вестн. Ставроп. гос. ун-та.—2011.—Т. 4, № 75.—С. 31–38.

ДВУМЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТЕПЛИЦА В ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ НА ТОРЕ ФУНКЦИЙ С РАЗРЫВНЫМИ СИМВОЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. Э. Пасенчук (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть Z — группа целых чисел, $Z_{\pm} = \{k \in Z : \pm k \geqslant 0\}$, $Z^2_{\pm\mp} = Z_{\pm} \times Z_{\mp}$. Обозначим через l счетно-нормированное пространство последовательностей $l = \Big\{\phi = \{\phi_{kj}\}_{(k,j)\in Z^2} : \|\phi\|_{m,n} = \sum (k+1)^m (j+1)^n |\phi_{kj}| < \infty\Big\}$ относительно покоординатных линейных операций и топологии, порожденной последовательностью норм $\|\phi\|_{m,n}$, $(m,n) \in Z^2_{+}$. Положим $l_{\pm\mp} = P_{\pm\mp} l$, где $P_{\pm\mp} : (P_{\pm\mp}\phi)_{(k,j)} = \frac{1}{4}(1+\operatorname{sign} k)(1+\operatorname{sign} j)\,\phi_{k,j}$ $(\operatorname{sign} 0 = 1)$.

Рассмотрим оператор Винера — Хопфа $W_\alpha : l_{++} \to l_{++}$; $W_\alpha \phi = P_{++}(\alpha * \phi)$, где последовательность $\alpha = \{\alpha_{kj}\}$ такова, что $\alpha_{kj} = 0$, если $(k,j) \notin Z^2_{--}$. Оператор W_α ограничен тогда и только тогда, когда по любым $(m,n) \in Z^2_{++}$ найдутся $c_{m,n} > 0$, $s_{m,n} \in Z_{+}$, $p_{m,n} \in Z_{+}$ так, что $|\alpha_{kj}| \leqslant c_{m,n}(|k|+1)^{s_{m,n}}(|j|+1)^{p_{m,n}}$. Символом оператора W_α называют функцию $a(\xi,\eta) = \sum \alpha_{kj}\xi^k\eta^j$; $|\xi| > 1$, $|\eta| > 1$. Оператор $W_\alpha : l_{++} \to l_{++}$ подобен оператору Теплица $(T_a\Phi)(\xi,\eta) = P^{++}a(\xi,\eta) \circ \Phi(\xi,\eta)$. При этом $\Phi = L\phi$, $a = L\alpha$, где L — преобразование Лорана. Операция $\circ$ определяется по правилу $a(\xi,\eta) \circ \Phi(\xi,\eta) = L\left(\left(L^{-1}a\right) * \left(L^{-1}\Phi\right)\right)$ и совпадает с поточечным произведением всюду, где определено последнее. Оператору T_a поставим в соответствие семейство одномерных операторов Теплица $T_a(\lambda)$ с символами $a(\xi,\lambda\xi)$, $\lambda \in \Gamma$. Семейство $T_a(\lambda)$ назовем равномерно ограниченным, если для последовательности $\alpha(\lambda) = \{\alpha_k(\lambda)\}_{k\in Z_-}$ имеют место оценки $|\alpha_k(\lambda)| \leqslant c(|k|+1)^m$, где $c > 0$ и $m \in Z_{+}$ не зависят от λ.

Теорема 1. *Оператор T_a ограничен тогда и только тогда, когда соответствующее ему семейство $T_a(\lambda)$ равномерно ограничено.*

Теорема 2. *Для ограниченного оператора Теплица T_a следующие условия равносильны:*

1) *оператор T_a нетеров,*

2) *оператор T_a обратим,*

3) *семейство $T_a(\lambda)$ содержит лишь обратимые операторы и семейство $T_a^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in \Gamma$, равномерно ограничено.*

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА НА ОТРЕЗКЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ[1]

Л. Ю. Плиева (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

В данной работе рассматривается гиперсингулярный интеграл вида:

$$H^{(1/2;1/2)}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt, \quad \varphi(t) \in H_r(\alpha) \quad (0 < \alpha \leqslant 1). \tag{1}$$

Интеграл (1) надо понимать в смысле конечной части по Адамару [1, 2]. Для приближенного вычисления интеграла (1) построим квадратурную формулу интерполяционного типа.

Заменим плотность $\varphi(t)$ интерполяционным многочленом по узлам Чебышева 2 рода

$$L_{n-1}(\varphi, t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_n(t)}{(t-t_k)U_n'(t_k)}\varphi(t_k),$$

$$U_n(t) = \frac{\sin((n+1)\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$t_k = \cos\frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Применяя формулу вида [1]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{U_n(t)}{(t-x)^2}\sqrt{1-t^2}\,dt = -(n+1)U_n(x),$$

для интеграла (1) мы получим следующую квадратурную формулу

$$\begin{aligned} H^{(1/2;1/2)}(\varphi, x) \approx \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(1-x_k^2)\varphi(t_k)}{(x-t_k)^2}\times \\ \times\big[T_{n+1}(x) - T_{n+1}(t_k) - (n+1)(x-t_k)U_n(x)\big]. \end{aligned} \tag{2}$$

В точках $x = t_k$ подразумевается соответствующий предел. Квадратурная формула (2) верна для любых $x \in [-1, 1]$.

Литература

1. *Гандель Ю. В.* Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.—Харьков: ХНУ, 2001.—92 с.
2. *Вайнико Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения.—М.: Янус-К, 2001.—508 с.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-01-00419-а.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПСЕВДОРИМАНОВОЙ МЕТРИКИ И ИЗОМЕТРИЙ

В. А. Попов (Россия, Москва; Финансовый университет)

Рассмотрим локально заданную псевдориманову аналитическую метрику g_{ij} и аналитическое продолжение этой метрики на всевозможные аналитические многообразия M. Инфинитезимальные изометрии на римановом многообразии — это векторные поля $\xi^k(x)$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\,\xi^k - g_{kj}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} - g_{ik}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}\right) = 0.$$

Лемма. *Инфинитеземальная изометрия, заданная на открытом подмножестве U псевдориманова аналитического многообразия M аналитически продолжается на все многообразие M.*

Теорема. *Пусть ζ — алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на псевдоримановом многообразии M, $\eta \subset \zeta$ — стационарная подалгебра, G — односвязная группа Ли с алгеброй Ли ζ и $H \subset G$ — подгруппа с алгеброй Ли η. Тогда, если алгебра ζ не имеет центра, то подгруппа H замкнута в G, и, таким образом, определено однородное псевдориманово пространство G/H.*

Для метрик, алгебра Ли векторных полей которых не имеет центра. определим квазиполное продолжение, как непродолжаемое многообразие M, которое не допускает нетождественных сохраняющих векторные поля Киллинга изометрий между своими открытыми подмножествами. Такое продолжение единственно, и каждая изометрия между открытыми подмножествами продолжается до изометрии всего M.

Даная работа является естественным продолжением работы [1].

Литература

1. *Popov V. A.* On analytic extensions of Riemannian manifolds // Contemporary Problems of Mathematics, Mechanics and Computing Sciences.—Kharkov: Apostrof, 2011.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

С. В. Ревина (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Рассматривается двумерное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$, описываемое системой уравнений Навье — Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} = -\nabla p + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t), \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0.$$

Сначала поле внешних сил предполагается периодическим по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами L_1 и L_2 соответственно. Средняя по прямоугольнику периодов скорость считается заданной. Предполагается, что один из пространственных периодов $L_2 = 2\pi/\alpha$, волновое число $\alpha \to 0$.

В [1] построена длинноволновая асимптотика задачи устойчивости стационарных сдвиговых течений

$$\boldsymbol{V} = (0, V_2)(x_1, \alpha x_2),$$

обобщающих классическое течение Колмогорова с синусоидальным профилем скорости. Выведены рекуррентные формулы и дан алгоритм нахождения k-го члена асимптотики.

Целью настоящей работы является распространение результатов для периодических течений на почти периодические по одной из пространственных переменных течения. Поле внешних сил предполагается условно периодическим по переменной x_1, поведение по x_2 остается прежним. Дана математическая постановка задачи и сформулированы условия, при которых результаты для периодических течений переносятся на почти-периодические.

Литература

1. *Ревина С. В.* Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений // ЖВМ и МФ.—2013.—Т. 53, № 6.—С. 223–237.

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ — СТОКСА В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ АСИМПТОТИКА

Л. И. Сазонов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Для системы Навье — Стокса в пространстве $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \Delta u - \nabla p = (u, \nabla)u + f, \\ \operatorname{div}\ u = 0 \end{cases}$$

исследован вопрос о существовании решений вида $u = v + u^\infty$, где $u^\infty = a(1, 0, 0, \ldots)$ и поле v принадлежит одному из пространств $L_p(\mathbb{R}^n)$. Применение теории мультипликаторов преобразования Фурье [1] позволяет выделить значения параметра p, для которых при определенных условиях для поля f существуют «малые» решения. Для данных решений доказана теорема единственности.

Без предположений о «малости» установлена регулярность решений из допустимых классов $L_p(\mathbb{R}^n)$. В частности, приведено новое доказательство результата Герхардта [2] о регулярности слабых решений в размерности $n = 4$.

Получены формулы, определяющие асимптотическое поведение решений при $|x| \mapsto \infty$. Для этого аналогично [3] найдено интегральное представление фундаментального решения линеаризованной системы Озеена, из которого подобно трехмерному случаю из [4] выведены оценки фундаментального решения.

Литература

1. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.—М.: Наука, 1969.—455 с.
2. *Gerhardt C.* Stationary solutions to the Navier–Stokes equations in dimension four // Math. Z.—1979.—Vol. 165, № 2.—P. 193–197.
3. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.—М.: Наука, 1970.—203 с.
4. *Сазонов Л. И.* Обоснование метода линеаризации в задаче обтекания // Изв. РАН. Сер. мат.—1994.—Т. 58, № 5.—С. 85–109.

ПРОТОННЫЕ ЗАРЯДОВЫЕ КЛАСТЕРЫ ЯДЕРНЫХ РАЗМЕРОВ ВОЗМОЖНЫЕ ИНИЦИАТОРЫ LERN И ХЯС

В. Г. Сапогин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
А. Г. Пижонков (Россия, Москва; ООО «Интеллект»)

Последние два десятилетия XX века ознаменовались открытием скоплений одноименных зарядов высокой плотности. В России они были обнаружены группой академика Месяца в потоках зарядов, возникающих у катода при взрывной термоэлектронной эмиссии. В США автономные скопления зарядов были обнаружены Шоулдерсом у поверхности острийного катода в вакууме, получили название «Electrum Validum» (EV) и были применены в технологии обработки металлических поверхностей.

Скопления зарядов (зарядовые кластеры), обнаруженные Шоулдерсом, имеют малые размеры (от долей до десятков микрометров), большой отрицательный заряд (от 10^8 до 10^{11} электронов в скоплении) и время высвечивания от 30 до 100 пс, которое превышает время возможного разлета зарядов за счет кулоновского расталкивания.

В эти же годы Флейшман и Понс обнаружили избыточное тепло при электролизе тяжелой воды. Они утверждали, что выделение энергии в воде можно объяснить только существованием безнейтронных ядерных реакций при низких температурах (холодный ядерный синтез, ХЯС).

Позже, сразу несколькими исследователями, были обнаружены так называемые низкоэнергетические ядерные реакции (low energy nuclear reactions, LENR), возникающие при протекании тока в тлеющем разряде. Эти реакции вызывали трансмутации в некоторых областях материала катода, которые обнаруживались в появлении в этих областях новых элементов.

Вместе с трансмутацией на электродах в водороде и гелии было обнаружено спорадически возникающее аномальное выделение тепловой энергии, которое до сих пор не имеет под собой никаких объяснений.

Последние пять лет, интернет переполнен информацией о работающей установке холодного ядерного синтеза итальянца Росси. На дно кварцевого сосуда насыпается порошок никеля, который принудительно прогревают до 700 K в водороде. Проходит некоторое время, нагрев снимают и установка продолжает выделять тепло самопроизвольно до таких температур, что требует водяного охлаждения. Выделяемая в установке энергия порядка ~ 1 МВт.

Авторами доклада выдвинута гипотеза о том, что возможными инициаторами LENR и ХЯС в водороде и гелии могут быть полые протонные зарядовые кластеры ядерных размеров, возникающие в активной зоне. Для этого развитая теория зарядовых кластеров была экстраполирована на пространственные размеры порядка ферми. Количество протонов, удерживаемых зарядовым кластером с минимальной концентрацией n_0 (м$^{-3}$), для диапазона температур, изменяющихся от 500 K до 2000 K представлено в таблице. В расчетах принято: параметр состояния $\alpha = 3$, а параметр среза поля $\beta = 10^{-7}$.

В этой же таблице, после черточки проставлены диаметры получившихся протонных ядер в ферми. Известно, что диаметр ядра никеля около 5 ферми.

Таблица 1

$T(K) \setminus n_0$	$2 \cdot 10^{36}$	$4 \cdot 10^{36}$	$6 \cdot 10^{36}$	$8 \cdot 10^{36}$	$10 \cdot 10^{36}$	$12 \cdot 10^{36}$	$14 \cdot 10^{36}$
500	7/7,2	5/5,1	4/4,1	3/3,6	3/3,2	3/2,9	2/2,7
750	13/8,8	9/6,2	7/5,1	6/4,4	6/3,9	5/3,6	5/3,3
1000	20/10,1	14/7,2	12/5,9	10/5,1	9/4,5	8/4,1	7/3,8
1250	29/11,3	20/8,0	16/6,5	14/5,7	12/5,1	11/4,6	10/4,3
1500	38/12,4	27/8,8	22/7,2	19/6,2	17/5,6	15/5,1	14/4,7
1750	48/13,4	34/9,5	27/7,7	24/6,7	21/6,0	19/5,5	18/5,1
2000	58/14,3	41/10,1	33/8,3	29/7,2	26/6,4	24/5,9	22/5,4

Литература

1. *Сапогин В. Г.* Механизмы удержания вещества самосогласованным полем.—Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000.—254 с.

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ К ФОРМИРОВАНИЮ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ КЛАСТЕРОВ В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

В. Г. Сапогин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
А. Г. Пижонков (Россия, Москва; ООО «Интеллект»),
О. В. Кравченко (Россия, Москва; МГТУ им. Н. Э. Баумана)

Исследуется математическая модель процесса формирования электронных кластеров плоским коллективным электрическим полем, которая описывается системой трех дифференциальных уравнений в частных производных: уравнения равновесия, уравнения непрерывности и уравнения Пуассона (в СГС)

$$\begin{cases} en\vec{E} + kT\nabla n + mn\nu\vec{v} = 0, \\ \dfrac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}) = 0, \\ \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi e(n_0 - n). \end{cases} \tag{1}$$

Система уравнений (1) относительно функций $y(\xi,\tau)$, $z(\xi,\tau)$, $u(\xi,\tau)$ имеет вид:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = -2(y+u)z, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{z}\left(\frac{\partial z}{\partial \tau} + u\frac{\partial z}{\partial \xi}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\beta^2}{2}(1-z), \tag{4}$$

где $\beta^2 = 2n_0kT/(E_*^2/8\pi) = T/T_*$ — параметр состояния системы (T_* — характеристическая температура системы). Система (2)–(4) при любых β имеет фундаментальное решение, соответствующее однородной плазме ($z = 1$, $y = 0$, $u = 0$).

Нестатическая система (2)–(4) может быть сведена к одному уравнению относительно функции $y(\xi,\tau)$:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} + y\left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = 0, \tag{5}$$

которое затем может быть приведено к паре автомодельных уравнений для двух фаз встречных плоских волн $\theta = \xi + \sigma\gamma\tau$ и $\psi = \xi - \sigma\gamma\tau$, где $\sigma = \pm 1$ — знаковый множитель, отличающий два возможных направления распространения волн.

Из автомодельных уравнений для малых напряженностей поля следуют четыре вида приближенных решений

$$y_1 = \frac{\beta^2}{4\sigma\gamma}\Big(\exp(2\sigma\gamma\theta) - 1\Big), \quad y_2 = \frac{\beta^2}{4\sigma\gamma}\Big(1 - \exp(-2\sigma\gamma\psi)\Big). \tag{6}$$

Сумма решений (6) с учетом комбинации знака σ дает явные выражения для распределения коллективного поля:

$$y = \pm \frac{\beta^2}{2\gamma} \exp(2\gamma^2 \tau) \sinh(2\gamma\xi), \tag{7}$$

для распределения концентрации электронов:

$$z = 1 \mp 2 \exp(2\gamma^2 \tau) \cosh(2\gamma\xi), \tag{8}$$

для распределения скорости электронов:

$$u = y \left(\frac{4\gamma^2}{\beta^2 z} - 1 \right). \tag{9}$$

Из решений (7)–(9) следует, что при выполнении условия $4\gamma^2 < \beta^2 z$ электрическая неустойчивость начинает формирование электронного кластера в холодной дырочной плазме (медленная неустойчивость), либо электронного кластера в горячей электронной плазме (быстрая неустойчивость, «взрывная неустойчивость» В. И. Пустовойта).

Литература

1. *Сапогин В. Г.* Механизмы удержания вещества самосогласованным полем.—Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000.—254 с.
2. *Пустовойт В. И.* О механизме возникновения молнии // Радиотехника и электроника.—2006.—Т. 51, № 8.—С. 996–1002.

ИНДУКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОВОДЯЩЕГО КОЛЬЦА С АЗИМУТАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ВИХРЕВОГО ТОКА

В. Г. Сапогин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Н. Н. Прокопенко (Россия, Шахты; ЮРГУЭС),
А. С. Будяков (Россия, Москва; ФГУП «НПП» Пульсар»)

Современные планарные технологии создания индуктивностей или трансформаторов в частотном диапазоне до 10 Ггц используют геометрию квадрата, либо октаэдра. Но технология многоугольников обладает одним существенным недостатком: при скачкообразном изменении ориентации токопровода в пространстве скин-эффект создает благоприятные условия для выбрасывания электрического заряда на подложку. Применение кольцевой геометрии в планарной технологии должно ослабить выбрасывание электрического заряда на подложку и тем самым позволит увеличить на указанных частотах, как параметр добротности, так и коэффициент передачи трансформаторов.

Известные методы расчета индуктивностей в микрометровом диапазоне геометрических размеров могут приводить к отрицательным значениям индуктивности. Этот недостаток требует создания принципиально новых электродинамических физико-математических моделей, которые были бы ориентированы на потребности планарной микросхемотехники.

В докладе предложен оригинальный подход к решению задач кольцевой геометрии, в которых между током и потоком может существовать конечный фазовый сдвиг. Подход объединяет в себе возможности двух- и трехмерных задач и не ограничивает возможный диапазон изменения частоты переменного тока.

Математическая модель расчета построена на решении первого уравнения Максвелла для цилиндрической симметрии исследуемых электромагнитных полей. В простейшей постановке задачи переменное однородное аксиальное магнитное поле формирует поток через цилиндрическое кольцо, при котором возникающее вихревое электрическое поле имеет одну азимутальную компоненту.

Рассчитаны распределения вихревого электрического поля, вызываемого им распределение плотности тока, удельной тепловой мощности, электродвижущей силы индукции, полного тока, индуцированного в кольце, и усредненное значение интегрального омического сопротивления кольца.

Показано, что тепловая мощность, выделяемая вихревыми токами во всем кольце, может принимать малые значения в тонких кольцах. Наличие фазового сдвига по времени между индукционным током и магнитным потоком приводит к необходимости рассчитывать значение вносимой индуктивности из энергетических соображений.

Для этого рассчитывается усредненная за период изменения энергия магнитного поля, вносимая в кольцо. Далее предполагается, что вносимая энергия магнитного поля затрачивается на создание вихревого электрического поля, которое в свою очередь формирует индукционный ток. Это приводит к тому, что усредненное значение магнитной энергии должно совпадать с усредненным значением энергии, запасенной индуктивностью.

Полученное значение вносимой индуктивности может варьироваться в широких пределах при изменении квадрата удельного сопротивления применяемого материала, квадрата частоты и полного объема, занимаемого кольцом.

Литература

1. *Сапогин В. Г., Крутчинский С. Г., Прокопенко Н. Н., Будяков А. С., Савченко Е. М.* Интегральные индуктивности и трансформаторы аналоговых микросхем СВЧ-диапазона.—Шахты: ГОУ ВПО «ЮРГУЭС», 2010.—273 с.
2. *Сапогин В. Г., Марчук В. И., Манжула В. Г.* Теоретические основы проектирования интегральных индуктивностей для сложных функциональных блоков и IP-модулей систем связи и телекоммуникаций нового поколения.—2012.—79 с.—(Отчет по гранту РФФИ; проект № 12-08-00654а).

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА[1]

М. А. Скворцова (Россия, Новосибирск; ИМ СО РАН)

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений нейтрального типа следующего вида:

$$\frac{d}{dt}\left(y(t) + Dy(t-\tau(t))\right) = Ay(t) + By(t-\tau(t)) + F\left(t, y(t), y\left(t-\tau(t)\right)\right). \qquad (1)$$

Здесь A, B, D — вещественные постоянные матрицы, $\tau(t) > 0$ — непрерывно дифференцируемая функция, $F(t,u,v)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по u и оценке

$$\|F(t,u,v)\| \leqslant q_1\|u\|^{1+\omega_1} + q_2\|v\|^{1+\omega_2}, \quad q_1, q_2, \omega_1, \omega_2 \geqslant 0.$$

Настоящая работа посвящена изучению асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1).

Следует отметить, что результаты об устойчивости решений уравнений с запаздывающим аргументом хорошо известны. Основными методами исследования являются изучение расположения корней квазимногочленов и методы функций Ляпунова — Разумихина и функционалов Ляпунова — Красовского [1]. Однако методы получения оценок скорости убывания решений без использования расположения корней квазимногочленов появились в литературе относительно недавно [2–4]. Результаты основаны на построении различных модификаций функционалов Ляпунова — Красовского.

В работе [4] был предложен модифицированный функционал Ляпунова — Красовского следующего вида:

$$V(t,y) = \big\langle Hy(t), y(t)\big\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \big\langle K(t-s)y(s), y(s)\big\rangle\, ds, \qquad (2)$$

где $H = H^* > 0$, $K(s) = K^*(s) > 0$, $s \in [0,\tau]$, $\tau > 0$. Используя этот функционал для системы с постоянным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}\, y(t) = Ay(t) + By(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)),$$

авторами были получены оценки решений, характеризующие убывание на бесконечности, и оценки областей притяжения нулевого решения. Предложенный

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 14.B37.21.0355, Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 12-01-31030, № 13-01-00329, и Сибирского отделения Российской академии наук, междисциплинарный проект № 80.

подход [4] также позволил получить аналогичные результаты и для систем нейтрального типа (1) в случае, когда $\tau(t) \equiv \tau = \mathrm{const}$ (см. [5–7]).

В настоящей работе для системы (1) получены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения, оценки областей притяжения нулевого решения и оценки решений, характеризующие скорость убывания на бесконечности. Доказательство результатов основано на использовании модифицированного функционала Ляпунова — Красовского, аналогичного функционалу (2).

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за постановку задачи и полезные замечания.

Литература

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.—М.: Мир, 1984.—424 с.
2. *Kharitonov V. L., Hinrichsen D.* Exponential estimates for time delay systems // Syst. Control Lett.—2004.—Vol. 53, № 5.—P. 395–405.
3. *Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Диф. уравнения.—2005.—Т. 41, № 8.—С. 1137–1140.
4. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика.—2005.—Т. 5, № 3.—С. 20–28.
5. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl.—2009.—Vol. 7, № 3.—P. 119–130.
6. *Демиденко Г. В., Котова Т. В., Скворцова М. А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений нейтрального типа // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика.—2010.—Т. 10, № 3.—С. 17–29.
7. *Скворцова М. А.* Оценки решений и области притяжения нулевого решения систем квазилинейных уравнений нейтрального типа // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование.—2011.—№ 37 (254), вып. 10.—С. 30–39.

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ[1]

И. А. Уварова (Россия, Новосибирск; ИМ СО РАН)

Мы продолжаем исследование связей между решениями систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнений с запаздывающим аргументом. Впервые такие связи были установлены при изучении уравнений, моделирующих многостадийный синтез вещества [1]. В работах [2–4] были определены некоторые классы систем, для которых приближенное нахождение значений компонент решений можно свести к решению одного уравнения с запаздывающим аргументом.

В данной работе мы рассматриваем задачу Коши для следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{n}{\tau}\,\varphi_1(x)x_1 + g(t,x_n), & t>0,\\ \frac{dx_j}{dt} = \frac{n}{\tau}\,\varphi_{j-1}(x)x_{j-1} - \frac{n}{\tau}\,\varphi_j(x)x_j, & j=2,\ldots,n-1,\\ \frac{dx_n}{dt} = \frac{n}{\tau}\,\varphi_{n-1}(x)x_{n-1} - \theta x_n, & \\ x|_{t=0}=0, & \tau>0,\ \theta\geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1) функция $g(t,z)\in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу;

2) функции $\varphi_j(x)\in C(\mathbb{R}_n)$, $j=1,\ldots,n-1$, при этом произведение $x_j\,\varphi_j(x)$ удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам;

3) найдутся такие постоянные α, β, ε, что

$$0<\alpha<\varphi_j(x)\leqslant\beta,\quad j=1,\ldots,n-1,$$

при $x\in U=\{x\in\mathbb{R}_n : |x_k|<\varepsilon,\ k=1,\ldots,n-1\}$;

4) выполнены неравенства

$$|x_j|\,\varphi_j(x) > |x_{j-1}|\,\varphi_{j-1}(x) \ \text{ при } \ |x_j|>|x_{j-1}|,\quad x\in U;$$

5) имеет место сходимость

$$n^{-1}\sum_{j=1}^{n-1}\max_{x\in U_n}|1-\varphi_j(x)|\to 0,\quad n\to\infty,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 14.B37.21.0355, Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 12-01-31030, № 13-01-00329, и Сибирского отделения Российской академии наук, междисциплинарный проект № 80.

где $U_n = \left\{x \in \mathbb{R}_n : |x_k| < \frac{\tau G}{n\alpha},\, k = 1, \ldots, n-1\right\}$.

При сформулированных выше условиях задача Коши (1) разрешима при любом n. Неограниченно увеличивая число уравнений в системе и рассматривая только последнюю компоненту решения задачи (1), получим последовательность функций $\{x_n(t)\}$.

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1)–5). *Тогда последовательность* $\{x_n(t)\}$ *равномерно сходится на любом отрезке* $[0, T]$, $T > \tau$. *Предельная функция* $y(t)$ *является решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом*

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), & t > \tau, \\ y(t) \equiv 0, & t \in [0, \tau],\ y(\tau + 0) = 0. \end{cases}$$

Также получена оценка скорости сходимости $x_n(t) \to y(t)$, $n \to \infty$.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г. В. Демиденко за постановку задачи и полезные дискуссии.

Литература

1. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г.* Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. мат.—2004.—Т. 7, № 1.—С. 73–94.
2. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 1.—С. 58–68.
3. *Демиденко Г. В.* О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Исследования по мат. анализу и диф. уравнениям.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011.—С. 45–56.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 5).
4. *Демиденко Г. В.* Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн.—2012.—Т. 53, № 6.—С. 1274–1282.

ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО БЕЗДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА – ПЕТВИАШВИЛИ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ[1]

Х. Г. Умаров (Россия, Грозный; ЧГУ)

Явный вид решения смешанной начально-краевой задачи для названного в заглавии уравнения:

$$v_{xt}{+}v_{yy} + f\,(x, y, t) = 0,$$

в котором область изменения пространственных переменных (x, y) — первая четверть плоскости, получен сведением рассматриваемой задачи к соответствующей абстрактной задаче в банаховом пространстве $C\,[0, +\infty]$ непрерывных ограниченных функций на полуоси.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00422-а.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА В СИНТЕЗЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. Г. Фетисов (Россия, Шахты; ЮЭРГУЭС, ЮМИ)

Как известно, исследование нелинейных динамических систем в ряде ситуаций, существенно упрощается, если их рассматривать с позиций операторного подхода. Характерным примером могут служить нелинейные многомерные системы обработки информации [1], содержащие функциональные операторы Немыцкого, интегральные операторы Гаммерштейна и Урысона и интегростепенные ряды Вольтерра — Пикара.

Качественные методы решения задач анализа и синтеза такого типа систем приводят к нелокальной разрешимости соответствующих операторных уравнений в исходных функциональных пространствах [2] как внешней среды системы.

При этом под задачей анализа подразумевается нахождение точного (аналитического) или приближенного решения соответствующего операторного уравнения, описывающего рассматриваемую динамическую систему, и ее дальнейшее исследование в заданной области пространства состояний.

В свою очередь, задача синтеза сводится к формированию оптимальных программных и стабилизирующих управлений, построению алгоритмов обработки входных наблюдений и структурных схем в рамках заданных критериев качества при наличии возмущающих факторов различной природы [3].

Для синтеза системы критического управления требуется предварительное построение как моделей собственно объекта управления, так и окружающей среды. И если модель объекта может быть описана в терминах «вход-выход», то влияние окружающей среды может быть учтено с помощью специального описания сигналов, действующих на объект. Выбор того или иного способа описания внешних сигналов как внешней среды системы является определяющем при выборе конкретного метода синтеза закона управления. В настоящее время широко известны пространства Лебега и Харди, позволяющие учитывать ограничения на амплитуды входных сигналов.

В данном сообщении обсуждается возможность использования в качестве внешней среды для указанных систем более широкого семейства локально ограниченных функциональных пространств Орлича.

Обозначим через $\Phi(x,y)$ — произвольную седловую функцию Юнга, $\Gamma_\Phi(x,y)$ — интегральный модуляр, $L^{*\Phi}(\Omega,\Sigma,\mu)$ — локально ограниченное F-квазинормированное пространство Орлича, где $\left\|x;L^{*\Phi}\right\| = \inf\left\{\varepsilon>0:\Gamma_\Phi\left(\frac{|(x,\cdot)|}{\varepsilon}\right)\leqslant\varepsilon\right\}$ (аналогично для элемента y).

В частности, если вогнуто-выпуклая седловая функция $\Phi(x,y)=|x(\tau)|^{y(\tau)}$, где $0<y(\tau)<1$, то получим соответствующее полуупорядоченное локально ограниченное пространство, определяемое интегральным модуляром $\Gamma(x,y) = \int_\Omega |x(\tau)|^{y(\tau)}\,d\mu(\tau)$.

Пусть φ — точный нормальный полуконечный след на алгебре Дж. фон Неймана M, $K(M,\varphi)$ — $(*)$-алгебра всех измеримых операторов, присоединенных к M. Через E обозначим линейное подпространство в $K(M,\varphi)$ с F-квазинормой $\|\cdot;E\|$, представляющее собой неассоциативное локально ограниченное пространство, природа которого также мало изучена.

Обозначим через L^{Φ} класс всех μ-измеримых почти-периодических функций $x(t)$, таких, что на каждом интервале длины $2T$ конечен верхний предел $\Gamma_{\Phi}(x) = \overline{\lim}_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} \Phi(|x(\tau)|) d\mu(\tau)$. Тогда соответствующее ЛОФП, обозначаемое M_{Φ} с F-квазинормой $\|x; M_{\Phi}\| = \inf\{\varepsilon > 0 : \Gamma_{\Phi}(|x|/\varepsilon) \leqslant \varepsilon < +\infty\}$, является локально невыпуклым пространством Марцинкевича — Орлича, служащим базовым для синтеза почти-периодических систем.

Литература

1. *Катулев А. Н., Соломаха Г. М.* Концепция идентифицируемости нелинейных многомерных систем обработки информации // Вестн. ТвГУ. Сер. Прикл. матем.—2010.—№ 18.—С. 49–58.
2. *Фетисов В. Г., Филиппенко В. И., Козоброд В. Н.* Операторы и уравнения в линейных топологических пространствах.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2006.—432 с.
3. *Балакшин О. Б.* Синтез систем.—М.: РАН ИМ им. А. А. Благонравова, 1995.—400 с.

ОЦЕНКИ ДОПУСТИМЫХ ТРАЕКТОРИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПАРАМЕТРА, С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО УПРАВЛЕНИЮ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

О. В. Филиппова (Россия, Тамбов; ТГУ им. Г. Р. Державина)

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство вектор-столбцов, с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; Ξ — метрическое пространство.

Пусть отображение $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям:

1) при каждом фиксированном $(x, u, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi$ функция $f(\cdot, x, u, \xi)$ измерима по Лебегу;

2) при почти всех $t \in [a, b]$ отображение $f(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ непрерывно;

3) для каждого ограниченного множества $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi$ существует суммируемая функция $m_W : [a, b] \to [0, \infty)$, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, u, \xi) \in W$ выполняется неравенство

$$|f(t, x, u, \xi)| \leqslant m_W(t).$$

Пусть также многозначное отображение $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^m]$ обладает свойствами:

4) при каждом $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$ отображение $U(\cdot, x, \xi)$ измеримо;

5) при почти всех $t \in [a, b]$ отображение $U(t, \cdot, \cdot)$ непрерывно по Хаусдорфу;

6) для каждого ограниченного множества $V \subset \mathbb{R}^n \times \Xi$ существует такая константа m_V, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, \xi) \in V$ выполняется неравенство

$$|U(t, x, \xi)| \leqslant m_V.$$

Рассмотрим управляемую систему, зависящую от параметра, с запаздыванием и импульсными воздействиями

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = f\big(t, x[p(t)], u(t), \xi\big), \quad t \in [a, b],\ \xi \in \Xi,\ \text{если } p(t) < a, \text{то } x[p(t)] = \varphi(t),\\ u(t) \in U(t, x[g(t)], \xi), \quad \text{если } g(t) < a,\ \text{ то } x[g(t)] = \psi(t),\end{gathered} \tag{1}$$

$$\Delta(x(t_k)) = I'_k(x(t_k), \xi), \quad k = 1, \ldots, p, \tag{2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{3}$$

где $x_0 \in \mathbb{R}^n$, измеримые по Борелю функции $\varphi : (-\infty, a) \to \mathbb{R}^n$, $\psi : (-\infty, a) \to \mathbb{R}^n$ ограничены, а измеримые по Лебегу функции $p : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ для любого $t \in [a, b]$ удовлетворяют неравенствам $p(t) \leqslant t$, $g(t) \leqslant t$. Отображения

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-01-00645, а также Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения № 14.132.21.1348.

$I'_k : \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots, p$, непрерывны, $\Delta(x(t_k)) = x(t_k + 0) - x(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, p$.

В силу теоремы об измеримом выборе [1, 2], задачу (1)–(3) можно свести к задаче Коши для дифференциального включения, множество решений которого будет совпадать с множеством всех фазовых траекторий системы (1)–(3).

В работе получены оценки в пространстве кусочно-непрерывных функций нормы разности допустимой траектории системы (1)–(3) и наперед заданной функции [3].

Литература

1. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач.—М.: Наука, 1974.—480 с.
2. *Филиппов А. Ф.* О существовании решений многозначных дифференциальных уравнений // Мат. заметки.—1971.—Т. 10, № 3.—С. 307–313.
3. *Булгаков А. И., Малютина Е. В., Филиппова О. В.* Оценки обобщенных решений дифференциальных включений с импульсными воздействиями и оператором, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений. Ч. 1, 2 // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и техн. науки.—2010.—Т. 15, № 6.—С. 1631–1644.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

К РАСЧЕТУ НАПРЯЖЕНИЙ И СМЕЩЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ТРЕЩИН[1]

Ш. С. Хубежты (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Как известно, определение распределения напряжении и смещении около трапеции, является одним из основных вопросов математической теории упругости [1, 2].

Упругое равновесие твердых тел описывается уравнениями плоской задачи теории упругости в случае плоской деформации упругой среды. В таких случаях для определения напряженно-деформированного состояния в произвольной точке деформируемого упругого изотропного тела необходимо найти три компоненты тензора напряжений X_x, X_y, Y_y [1] и две составляющие вектора перемещений Указанные компоненты в условиях плоской задачи теории упругости являются функциями только двух переменных (x и y).

В работах Г. В. Колосова, Н. И. Мусхелишвили [1] показано, что компоненты напряжения X_x, X_y, Y_y и смещения u, v в декартовой системе координат выражаются через две аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ от одного компонента аргумента $z = x + cy$ формулами

$$X_x + Y_y = 2\bigl[\Phi(z) + \bar{\Phi}(z)\bigr];$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2\bigl[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\bigr];$$

$$2\mu(u + iv) = \text{ae}\varphi(z) - z(\bar{z}) - \bar{\Psi}(z);$$

$$\Psi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z); \quad \Phi'(z) = \varphi''(z),$$

где μ — постоянная Ламе, $\text{ae} = (3-v)(1-y)$, v — коэффициент Пуасона ставится граничная задача следующим образом. В случае первой основной задачи, т. е. когда на контуре заданы внешние напряжения, граничное условие имеет вид

$$\phi(t) + \bar{\phi}(t) - e^{2i\alpha}\bigl[\bar{t}\phi'(t) + \psi(t)\bigr] = N - iT, \quad t \in L, \tag{2}$$

где N и T — заданные нормальная и касательная компоненты напряжения, действующего на границе тела, α — угол, которой составляет внешняя нормаль к контуру с осью Ox.

В случае второй основной задачи, т. е. когда на контуре заданы перемещения, граничное условие получается предельным переходом из соотношения (1)

$$\text{ae}\varphi(t) - t\phi(t) - \psi(t) = 2\mu[u(t) + iv(t)], \quad t \in L. \tag{3}$$

Здесь $u(t)$ и $v(t)$ — известные на L функции.

Итак, пусть имеется N прямолинейных трещин длиной x_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-01-00419-а.

Применяя метод Д. И. Шермана [1] задачи (2) и (3) сводятся к системе сингулярных интегральных уравнений следующего вида

$$\int\limits_{-l_n}^{l_n} \frac{g_n'(t)}{t-x}\,dt + \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq n}}^{N} \int\limits_{-l_k}^{l_k} \left[g_k'(t)K_{nk}(t,x) + g_k'(t)L_{nk}(t,x)\right] dt = f_n(x), \qquad (4)$$

$$|x| < l_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

где $g_k(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — разрывы перемещений, $q_k(x_k)$ — разрывы напряжений,

$$K_{nk}(t,x) = \frac{e^{i\alpha_k}}{2}\left[\frac{1}{T_n - X_n} + \frac{e^{-}2i\alpha_n}{\overline{T}_k - \overline{X}_n}\right],$$

$$L_{nk}(t,x) = \frac{e^{-i\alpha_k}}{2}\left[\frac{1}{\overline{T}_k - \overline{X}_n} - \frac{(\overline{T}_k - \overline{X}_n)^2}{e}^{-2i\alpha_n}\right],$$

$$T_k = te^{id_k} + z_k^0; \quad z_k = e^{-i\alpha_k}(z - z_k^0), \quad X_n = xe^{i\alpha_n} + z_n^0,$$

$z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0$ — центр трещин, α_k — угол между линии трещин и осью Ox, $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ — функции нагрузки на берегах трещин.

Далее, применяя квадратурные функции для сингулярных интегралов [3] дискретизируется система (4), сводятся к системе линейных алгебраических уравнений и окончательно находим неизвестных $g_n'(x_i)$ $(n = 1, 2, \ldots, N,\ i = 1, 2, \ldots, n_0)$. Затем, аналогично, с помощью квадратурных формул для интегралов типа Коши [3], вычисляются компоненты напряжений и смещений.

Литература

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.—М.: Наука, 1966.—706 с.
2. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках.—Киев: Наукова Думка, 1976.—442 с.
3. *Хубежты Ш. С.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011.—236 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

О СУММАХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

И. Д. Цопанов (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Рассмотрим полиномиальный операторный пучок

$$L_\lambda = E - \lambda\, A_1 - \lambda^2\, A_2 - \ldots - \lambda^n A_n,$$

где A_j $(j = 1, \ldots, n)$ — линейные компактные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Комплексное число λ будем называть характеристическим числом, если существует ненулевой вектор y, для которого $L_\lambda y = 0$. Известно, что характеристические значения с учетом кратностей [2] образуют не более чем счетную последовательность (λ_k) без конечных предельных точек. Собственными будем называть числа $\mu_k = \lambda_k^{-1}$. В последнее время вышло ряд работ [6, 7], посвященных оценкам сумм собственных значений и использованию этих оценок для локализации спектра полиномиального пучка.

В данной работе приводятся тождества для сумм степеней собственных значений. В случае, когда A_1 — ядерный оператор [1] и $A_j \in \mathfrak{S}_{1/j}$, в работах [3, 5] путем линеаризации посредством перехода к эквивалентным спектральным задачам с блочными оператор-матрицами, была получена формула следа $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = Tr(A_1)$.

В случае, когда пространство $\mathfrak{H}$ конечномерно, а операторы A_j $(j = 1, \ldots, n)$ — матрицы, в работе [8] были получены более общие формулы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^r = Tr(S_r), \tag{1}$$

где

$$S_r = \sum_{j=1}^{r-1} S_{r-j} A_j + r A_r, \quad S_1 = A_1 \text{ при } r \leqslant n \tag{2}$$

и

$$S_r = \sum_{j=1}^{n} S_{r-j} A_j \quad \text{при } r \geqslant n+1. \tag{3}$$

При $r \leqslant n$ эти формулы в работе [4] были перенесены на произвольные сепарабельные гильбертовы пространства при условии, что оператор $A_j \in \mathfrak{S}_{r/j}$ $(r > 1)$.

На основе формулы резольвенты пучка из работы [2] оказывается возможным перенести на бесконечномерный случай все формулы (1)–(3). При этом существенную роль в получении формул следов будет играть следующий результат из работы [2]:

Теорема 1. *Пусть* $E - L_\lambda$ — *аналитическая в области* $\mathfrak{D} \subseteq \mathbb{C}$ *оператор-функция со значениями в идеале* $\mathfrak{S}_\infty$ *компактных операторов, тогда след главной части оператора* $\frac{\partial L_\lambda}{\partial \lambda} L_\lambda^{-1}$ *для полюса* $\lambda = c$ *равен* $\frac{N}{\lambda - c}$, *где* N — *алгебраическая кратность характеристического значения* $\lambda = c$ *пучка* L_λ.

Основным результатом данной работы является

Теорема 2. *Пусть дан полиномиальный операторный пучок* L_λ, *действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$. *Пусть все операторы* $A_j \in \mathfrak{S}_1$, *тогда выполнены все формулы* (1)–(3), *где суммирование в* (1) *ведется с некоторой расстановкой скобок.*

Литература

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.—М.: Наука, 1965.—448 с.
2. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук.—1971.—Т. 26, № 4.—С. 15–41.
3. *Кулеско Н. А., Палант Ю. А.* К теореме Е. И. Сигала о следе операторного пучка // Мат. исследования.—1969.—Т. 6, № 2.—С. 150–153.
4. *Кулеско Н. А.* О следах полиномиального операторного пучка // Функцион. анализ. Лин. пространства.—Ульяновск, 1985.—С. 87–91.
5. *Сигал Е. И.* О следе операторного пучка // Мат. исследования.—1969.—Т. 4, № 2.—С. 148–151.
6. *Gil' M. I.* Sums of characteristic values of compact polynomial operator pencils // J. Math. Anal. Appl.—2008.—Т. 338.—С. 1469–1476.
7. *Gil' M. I.* Perturbations of Polynomials with Operator Coefficients // J. of Comp. Anal.—2013.—P.1–5.
8. *Franklin I. N.* On the numerical solution of characteristic equations in flatter analysis // J. Assc. Comp. Mach.—1958.—Vol. 5, № 1.—P. 45–51.

Секция III

Математическое моделирование

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ МЕТРИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ

Н. А. Абиев (Казахстан, Тараз; ТарГУ)

Определение возможных значений сигнатуры оператора Риччи на заданном однородном пространстве является одной из важных задач в теории римановых многообразий. Первой работой в этом направлении является работа Дж. Милнора [6], посвященная случаю, когда размерность метрической алгебры Ли не превышает 3. Для алгебр Ли размерности 4 аналогичная задача впервые решена в работах [2, 3] А. Г. Кремлева и Ю. Г. Никонорова. В частности, в работе [3] доказано, что для произвольной неунимодулярной разрешимой алгебры Ли размерности $\leqslant 4$ оператор Риччи имеет не менее 2 отрицательных собственных значений, и была выдвинута гипотеза о том, что такое свойство оператора Риччи сохраняется для неунимодулярных разрешимых метрических алгебр Ли s любой размерности. Данная гипотеза подтвердилась в ряде работ: в работе М. С. Чебарыкова [5], когда $\dim([s,s]) \leqslant 5$; в работе Ю. Г. Никонорова и М. С. Чебарыкова [4], когда s вполне разрешима; в работе [3], когда $[s,s]$ коммутативна; в работе Н. А. Абиева [1], когда $[s,s]$ двухступенно нильпотентна и $\dim([s,s]) = 6$. В недавней работе Ю. Г. Никонорова [7] гипотеза доказана для всех неунимодулярных разрешимых алгебр Ли, а также для всех некоммутативных нильпотентных алгебр Ли.

Основной результат работы [1] отражен в следующей теореме.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{s}$ — неунимодулярная разрешимая алгебра Ли, имеющая двухступенно нильпотентную производную алгебру Ли $\mathfrak{n} = [\mathfrak{s},\mathfrak{s}]$ размерности 6. Тогда для произвольного скалярного произведения Q на $\mathfrak{s}$ оператор Риччи Ric метрической алгебры Ли $(\mathfrak{s}, Q)$ имеет не менее двух отрицательных собственных значений.*

Для доказательства Теоремы 1 в [1] были использованы следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *При любых вещественных числах a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 и x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 справедливо неравенство*

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)-$$
$$-(a_1x_2+a_2x_6+a_3x_8)^2-(a_1x_1+a_2x_5-a_4x_7)^2-$$
$$-(a_4x_6-a_5x_4-a_6x_8)^2-(a_3x_5+a_5x_3+a_6x_7)^2 \geqslant 0.$$

Лемма 2. *При любых вещественных числах a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 и x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 справедливо неравенство*

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)-$$
$$-(a_1x_2+a_2x_4+a_3x_5+a_5x_8)^2-(a_1x_1+a_2x_3-a_4x_5-a_6x_8)^2-$$
$$-(a_3x_3+a_5x_6+a_4x_4+a_6x_7)^2 \geqslant 0.$$

Отметим, что Леммы 1 и 2 были доказаны с привлечением средств компьютерной математики (Maple), которые, благодаря своей эффективности, завоевывают все большее место в исследовательской практике.

Литература

1. *Абиев Н. А.* О кривизне Риччи разрешимых метрических алгебр Ли с двухступенно нильпотентными производными алгебрами // Мат. труды.—2013.—Т. 16, № 1.—С. 3–18.
2. *Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды.—2008.—Т. 11, № 2.—С. 115–147.
3. *Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды.—2009.—Т. 12, № 1.—С. 40–116.
4. *Никоноров Ю. Г., Чебарыков М. С.* Оператор Риччи вполне разрешимых метрических алгебр Ли // Мат. труды.—2012.—Т. 15, № 2.—С. 146–158.
5. *Чебарыков М. С.* О кривизне Риччи неунимодулярных разрешимых метрических алгебр Ли малой размерности // Мат. труды.—2010.—Т. 13, № 1.—С. 186–211.
6. *Milnor J.* Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math.—1976.—Vol. 21.—P. 293–329.
7. *Nikonorov Yu. G.* Negative eigenvalues of the Ricci operator of solvable metric Lie algebras.—2012.—Preprint. arXiv: 1209.4171.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ СНИЖЕНИЯ ВИБРАЦИИ СТИРАЛЬНЫХ МАШИН БАРАБАННОГО ТИПА

С. Н. Алехин (Россия, Шахты; ЮРГУЭС)**,**
С. П. Петросов (Россия, Шахты; ЮРГУЭС)**,**
В. Г. Фетисов (Россия, Шахты; ЮРГУЭС, ЮМИ)**,**
И. В. Фетисов (Россия, Москва; ООО «Пневмакс»)

Несмотря на актуальность проблем, связанных с разработкой стиральных машин барабанного типа, отвечающих требованиям надежности, безопасности, экономической эффективности и удобства в обслуживании, они не нашли должного отражения в отечественной научной литературе вплоть до 70-х годов прошлого столетия.

Похожая ситуация наблюдается и в зарубежной научной литературе, в которой, главным образом, можно выделить работы, посвященные, в основном, расчету отдельных узлов стиральных машин, подверженных динамическим нагрузкам при отжиме.

Обозначилась явная недостаточность научных исследований, посвященных как динамике стиральных машин, так и разработке эффективных виброзащитных систем. Лишь в некоторых научных публикациях [1–2] были рассмотрены отдельные вопросы, посвященные разработке математических моделей, адекватно описывающих колебания стиральных машин и проблемам снижения вибрации.

К настоящему времени обозначилась обширная литература, посвященная, главным образом, методам решения прямой задачи определения собственных свойств систем и проблеме снижения вибрации стиральных машин барабанного типа. Последнее объясняется тем, что решения дифференциальных уравнений движения выражаются через собственные свойства системы, введенные Л. Эйлером в 1744 г.

Более содержательная формулировка задачи или процедуры синтеза, рассматриваемая, в частности, в приложении к процессу развития естественных систем, может быть связана с определением условий (параметров, структуры), при которых реализуются заданные свойства системы (отклики, собственные свойства, внешние характеристики, форма и другое).

Подводя итог анализу и состоянию математических моделей динамики стиральных машин с горизонтальной осью вращения, можно сделать вывод, что к настоящему времени разработаны основные, концептуальные положения математической модели, описывающей колебания подвесной части при центробежном отжиме как твердого тела на упругих опорах, основанной на классических положениях теории колебаний и позволяющей проводить исследования динамики машин в зависимости от основных конструктивных параметров системы виброизоляции.

Вместе с тем, уровень разработки существующих математических моделей еще не позволяет проводить исследования динамики стиральных машин при решении таких задач, как:

– учет особенностей конструктивных параметров, присущих современным моделям стиральных машин, схем компоновки их колебательных систем, использования современных систем виброзащиты, в том числе систем виброизоляции, а также современных способов и методов снижения вибрации, в частности, специальных режимов вращения барабана;

– учет научно-обоснованных величин смещений центра масс текстильных изделий при отжиме в поперечной и продольной плоскостях стирального барабана и соответствующих значений внешних возмущающих сил, приложенных к подвесной части стиральных машин;

– учет случайного характера колебаний подвесной части.

Литература

1. *Рябинький Л. М.* Исследование виброизоляции стирально-отжимных машин для текстильных материалов: Дис. ... канд. техн. наук.—Л., 1972.—153 с.
2. *Малыгин А. В.* Снижение виброактивности стирально-отжимных машин бытового назначения: Дис. ... канд. техн. наук.—М., 1991.—127 с.

ВЛИЯНИЕ ОРГАНИЗОВАННЫХ ГРУПП НА ДИНАМИКУ ПРОТЕСТНЫХ АКЦИЙ[1]

Басаева Е. К. (Россия, Владикавказ; ЮМИ),
Каменецкий Е. С. (Россия, Владикавказ; ЮМИ),
Хосаева З. Х. (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Для описания динамики протестных акций была предложена модель основанная на аналогии с распространением вирусной инфекции [1].

В модели предполагалось разделение общества на три группы: пассивную, доля которой N_1, возбужденную, доля которой N_2 и активно протестующую N_3. Переход людей из пассивного состояния в возбужденное и участие возбужденных людей в протестных акциях определялись информацией, которая воздействует в течение достаточно продолжительного промежутка времени. В действительности, нередко, кратковременная информация является толчком вызывающим деятельность организованной группы, стремящейся организовать протестную акцию. Доля организованных людей, которые входят в возбужденную часть общества и активно участвуют в протестной акции обозначается N_{20} и N_{30} соответственно.

Уравнения, описывающие изменение численности групп в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\alpha N_1 N_2 - \alpha_0 N_1 N_{20},$$
$$\frac{dN_2}{dt} = \alpha N_1 N_2 + \alpha_0 N_1 N_{20} + (\delta - \delta_0 N_{30}) N_3 - \beta N_2 N_3 - \gamma_0 N_{20} N_2 - \gamma {N_2}^2,$$
$$\frac{dN_3}{dt} = -(\delta - \delta_0 N_{30}) N_3 + \beta N_2 N_3 + \gamma_0 N20 N_2 + \gamma {N_2}^2.$$

В этих уравнениях α, β, γ, γ_0 — константы определяющие интенсивность взаимодействия различных групп населения, а δ — определяющая прекращение участие в протестной акции, что может быть связано с воздействием, в том числе и силовым, властных структур. Значения констант. α и β зависят от сплоченности общества и стереотипов поведения его членов. На величине коэффициента β может также сказываться апатия общества, возможность принуждения со стороны активно протестующей части общества и реакция на силовые действия властей. Коэффициенты α_0, γ_0 и δ_0 характеризует влияние организованной группы на пассивную, возбужденную и протестующую части общества соответственно.

Сумма N_{20} и N_{30} остается постоянной, а переход участников организованной группы в число активно протестующих задается как функция времени.

Рассмотрены различные варианты развития протестных акций в зависимости от величины организованной группы, ее влияние и стратегии поведения.

[1]Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований президиума РАН «Фундаментальные проблемы модернизации полиэтничного макрорегиона в условиях роста напряженности» и гранта РГНФ «Социально-политическая напряженность как индикатор системного кризиса в полиэтничном регионе», проект № 12-03-00374.

Литература

1. *Хосаева З. Х.* Моделирование динамики протестных акций // Научное наследие Жданова Ю. А. и современные проблемы моделирования сложных социосистем (на материалах Юга России): материалы междунар. научных чтений (г. Ростов-на-Дону, 19 октября 2012 г.).—Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, 2012.—244 с.

ВЛИЯНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ РАЗМЕРОВ ПРЕПЯТСТВИЙ НА ДВИЖЕНИЕ ВОЗДУХА ЗА НИМИ

М. В. Волик (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

В работе представлены результаты расчетов движения воздуха для застройки разных продольных размеров. Исследования проводились с использованием пакета OpenFoam и удаленного доступа к технологической платформе «Университетский кластер» (http://www.unicluster.ru). Использовался решатель pisoFoam для нестационарного несжимаемого турбулентного потока. Турбулентность моделировалась с использованием моделей крупных вихрей LES и $K-\varepsilon$. Расчеты проводились с двумя видами граничных условий на стенках: прилипанием потока и пристеночными функциями [1].

Получены результаты для двумерного обтекания «обратной ступеньки», имитирующей плотную застройку на окраине города, и одиночного дома. Высота домов принималась равной 15 м. Расстояние от подветренной стороны домов до выходной границы принималось равным 10 их высотам, расстояние от нижней границы расчетной области до верхней границы — 6 высотам. В случае «обратной ступеньки» расстояние от входной границы до ступеньки составляло одну высоту дома, а в случае одиночного дома — 11 высот до его подветренной стороны при ширине дома, равной высоте. Использовалась равномерная сетка с шагом 1м и числом точек 165×90 и 315×90 для «ступеньки» и одиночного дома соответственно. Расчеты проводились для интервала времени 1000 секунд с шагом 0.001 секунды.

Результаты расчетов показали, что при использовании LES модели турбулентности с условием прилипания на стенках течение воздуха не установилось за указанный промежуток времени. За домами образовывалась система вихрей, конфигурация которых изменялась с течением времени. Возможно, течение в этом случае не устанавливается вообще. В случае одиночного дома поток воздуха над ним ускоряется и скорость течения воздуха в вихрях за домом так же выше, чем за ступенькой.

При использовании пристеночных функций или $K-\varepsilon$ модели с обоими видами граничных условий получено, что течение воздуха за домом устанавливается. За домом образуется один вихрь, скорость в котором ниже для $K-\varepsilon$ модели, особенно при условии прилипания.

Кроме того, рассмотрено течение за одиночным домом при разной его ширине.

Литература

1. Ресурсы технологической платформы программы «Университетский кластер».—URL: http://unihub.ru.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ КАК БАЛАНС МЕЖДУ ЦЕЛЕВЫМИ И НЕЦЕЛЕВЫМИ ИНТЕРЕСАМИ

О. И. Горбанева (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Будем рассматривать двухуровневую систему управления, состоящую из одного элемента верхнего уровня и одного элемента нижнего уровня. Верхний уровень имеет некоторое количество ресурсов, которое примем за 1. Часть полученных средств он передает нижнему уровню на общие цели, оставшуюся часть оставляет на нецелевое использование. В свою очередь, нижний уровень забирает часть средств на свои нужды, а остальное расходуется на общие цели. И верхний, и нижний уровни участвуют в доходе от системной деятельности и имеют свои функции выигрыша. Нужно определить, при какой схеме распределения средств внутри системы возникнет равновесие.

Модель строится в виде игры двух лиц, в которой находится равновесие по Штакельбергу.

В функцию выигрыша каждого из двух участников включаются два слагаемых: доход от нецелевой деятельности и соответствующая доля дохода от целевой деятельности системы.

Функции выигрыша имеют вид:

$$g_1(u_1,u_2) = a_1(1-u_1,u_2) + b(u_1,u_2)\cdot c(u_1,u_2) \to \max_{u_1},$$
$$g_2(u_1,u_2) = a_2(u_1,1-u_2) + b(u_1,u_2)\cdot c(u_1,u_2) \to \max_{u_2}$$

при ограничениях

$$0 \leqslant u_i \leqslant 1, \quad i=1,2,$$

и условиях на функции a, b, и c

$$a_i \geqslant 0; \quad \frac{\partial a_i}{\partial u_i} \leqslant 0, \quad \frac{\partial a_i}{\partial u_{j\neq i}} \geqslant 0, \quad i=1,2,$$
$$b_i \geqslant 0; \quad \frac{\partial b_i}{\partial u_i} \geqslant 0, \quad \frac{\partial c}{\partial u_i} \geqslant 0, \quad i=1,2.$$

Здесь u_i — доля ресурсов, выделенных i-м уровнем на развитие системы (соответственно, $1-u_i$ — остается на нецелевое использование ресурсов в личных интересах), g_i — функция выигрыша i-го уровня, a_i — функция частного выигрыша i-го уровня, b_i — доля от дохода общей деятельности, получаемая i-м уровнем; c — целевой доход системы.

В качестве функций a и c рассматриваются степенные, линейные, показательные и логарифмические функции относительно переменных u_1 и u_2 и кумулятивные по их совокупности, т. е.

$$a_1 = a_1(1-u_1), \quad a_2 = a_2(u_1(1-u_2)), \quad c = c(u_1u_2).$$

Соотношения $a_1 = a_1(1 - u_1)$, $a_2 = a_2(u_1(1 - u_2))$ отражают иерархическую структуру системы. Доход от нецелевой деятельности верхнего уровня не зависит от того, какую часть средств нижний уровень направит на общие цели. Но доход от нецелевой деятельности нижнего уровня зависит от того, какую часть средств передаст ему верхний уровень на общие цели.

Рассматривается равномерное распределение b, при котором доли участия в доходе от целевой деятельности одинаковы для обоих игроков.

$$b_i = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Данная модель является иерархической игрой с двумя участниками. Стратегией игрока системы является доля u_i от имеющихся у него средств, направленных на общие цели. Право первого хода принадлежит игроку верхнего уровня, который выбирает и сообщает игроку нижнего уровня значение u_1, после чего второй игрок выбирает оптимальное для себя значение u_2.

Рассмотрим случай, когда $a_1(u_1, u_2) = 1 - u_1$, $a_2(u_1, u_2) = u_1(1 - u_2)$, $c_2(u_1, u_2) = u_1 u_2$. Тогда $g_1(u_1, u_2) = 1 - u_1 + \frac{u_1 u_2}{2}$, $g_1(u_1, u_2) = u_1 - \frac{u_1 u_2}{2}$. Функция g_2 убывает по u_2, поэтому оптимальное ${u_2}^* = 0$, при котором $g_1(u_1, 0) = 1 - u_i$. Функция g_1 убывает по u_1, поэтому оптимальное ${u_1}^* = 0$, т. е. равновесие по Штакельбергу в данной игре $ST_1 = \{(0, 0)\}$, при этом выигрыши игроков $g_1 = 1$, $g_2 = 0$, т. е. оба игрока используют стратегии крайнего эгоизма (направляют весь имеющийся ресурс на личные интересы), однако верхний уровень получает максимальный выигрыш, а нижний уровень лишь нулевой.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

К ВОПРОСУ ОБ АНАЛИЗЕ СЛОЖНОСТИ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Д. П. Димитриченко (Россия, Нальчик; НИИ ПМА КБНЦ РАН)

В настоящей работе исследован вопрос об определении сложности процессов, описываемых при помощи k-значных логических функций. Основным способом проведения такого анализа является логическое дифференцирование. По аналогии с классическим математическим анализом разработаны методы логического интегро-дифференциального исчисления.

Рассмотрим множество k^k всевозможных k-значных логических функций $F(x)$ от одной переменной x, $x = 0, \dots, k-1$ [3].

Вводится следующее определение производной [1]:

Определение. Производной $F'(x_0)$ функции $F(x)$ в точке x_0 называется величина приращения функции при изменении значения аргумента x_0 на единицу в положительном направлении, такое что:

$$F(x_0 + 1) = F(x_0) + F'(x_0).$$

Согласно доказанной теореме [1]:

Теорема 1. *Всюду определенная функция $F(x)$ дифференцируема во всех точках области определения.*

Отсюда следует, что каждой функции $F(x)$ можно поставить в соответствие полностью определенную производную.

Так как k-значные функции обладают различной формой представления и их графики не являются наглядными, как в классическом анализе, то необходимо определить способ классификации функций в соответствии с их свойствами. Одним из таких критериев является количество последовательных дифференцирований обращающих исходную функцию $F(x)$ в тождественный ноль. Тогда нулевая константа будет иметь сложность равную нулю, ненулевые константы единице, линейные функции двум и т. д.

Определение. Рангом сложности r функции $F(x)$ называется количество дифференцирований функции $F(x)$, обращающих эту функцию в тождественный ноль.

Аналогично, можно ставить вопрос о максимальной сложности множества всех k-значных функций при заданном значении k. Для этого нет необходимости дифференцировать все k^k функции, достаточно опереться на следующую теорему о разложении произвольной k-значной функции [2]:

Теорема 2. *Пусть функция $F(x)$ определена в точке $x_0 = 0$ и имеет в ней производные до порядка $k-1$ включительно, тогда она представима в виде следующего интегрального разложения:*

$$F(x) = \sum_{j=0}^{k-1} F^{(j)}(0) I_j(x).$$

Таким образом, выявление основных свойств k-значных функций можно свести к анализу свойств интегральных коэффициентов. Достаточно последовательно дифференцировать совокупность интегральных коэффициентов до полного их обнуления, чтобы ответить на поставленный вопрос.

При $k = p$, где p — простое число, любая из k^k логических функций представима виде полинома с операциями сложения и умножения по модулю k. При этом каждый из $k - 1$ интегральных коэффициентов является точной первообразной порядка $j = 1, \ldots, k - 1$ от тождественной единицы $F(x) \equiv 1$. Это означает, что: для любого $k = p$, где p — простое число, k-ая производная всякой функции равна тождественному нулю.

Например, при $k = 3$ третья производная любой функции тождественно равна нулю. Это и есть максимальная сложность множества трехзначных функций.

В случае, когда $k = p^l$, где p — простое число, а l — натуральное, $l > 1$ получены следующие результаты вычислительного эксперимента: при $k = 4$ сложность $r = 6$; при $k = 8$ сложность $r = 16$.

В случае, когда k является составным числом во множестве k-значных функций, существуют такие функции $F(x)$, для которых выполнено следующее соотношение: $F^{(m)}(x) = F(x)$, $x = 1, \ldots, k-1$, где m — натуральное число. Функции, обладающие этим свойством, будем называть циклически дифференцируемыми. Минимальное число $m_{\min}$ в этом случае характеризует длину этого цикла, который будем называть дифференциальным циклом.

Таким образом, все множество k-значных функций разбивается на два непересекающихся класса:

1. функции, последовательное дифференцирование которых приводит к нулевой константе за конечное число шагов;

2. функции, для которых выполняется следующее соотношение: $F^{(m)}(x) = F(x)$, m — некоторое натуральное число.

В этом смысле функции второго класса можно считать дискретными аналогами тригонометрических функций «синус» и «косинус».

Очевидно, что сумма всех функций одного дифференциального цикла образует аналог экспоненты, производная которой равна самой себе. Однако, не во всех k-значных системах в случае составного k, можно обнаружить ненулевой аналог экспоненты.

В шестизначной системе функций существуют три дифференциальных цикла длины 6. В 10-значной системе также найдены три дифференциальных цикла длины 30, 60 и 62 соответственно.

Литература

1. *Димитриченко Д. П.* Об одном способе дифференцирования логических функций // Матер. междунар. конф. мол. ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики».—Нальчик, 2011.—С. 103–105.

2. *Димитриченко Д. П.* К вопросу о представлении логической функции через ее производные // Матер. 2-й междунар. Российско-Узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики».—Нальчик, 2012.—С. 92–94.
3. *Шибзухов З. М.* Конструктивные методы обучения ΣΠ-нейронных сетей.—М.: Наука, 2006.—160 с.
4. *Горбатов В. А.* Фундаментальные основы дискретной математики.—М.: Наука, 2000.—544 с.

О РЕКОНСТРУКЦИИ НЕОДНОРОДНОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ДЛЯ КОЛЬЦЕВОЙ ОБЛАСТИ[1]

В. В. Дударев (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

В работе рассмотрена задача о радиальных колебаниях кольцевой области при наличии неоднородного предварительного напряженного состояния. Представлена общая постановка задачи об установившихся колебаниях упругого тела в терминах компонент тензора Пиолы — Кирхгофа. При этом в качестве модели предварительных напряжений рассмотрена модель, предложенная А. Н. Гузем [1]. Выведены уравнения колебаний и определяющие соотношения при условии плоской деформации в полярной системе координат (r, φ). При формулировке задачи для кольцевой области предполагается, что среди компонент тензора предварительного напряженного состояния отличными от нуля являются компоненты $\sigma^0_{rr}(r)$ и $\sigma^0_{\varphi\varphi}(r)$, которые удовлетворяют условию равновесия. Колебания вызываются осесимметричной нагрузкой приложенной на внешней границе области, внутренняя область свободна от нагрузок. Уравнение движения представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка относительно радиальной компоненты смещения $u_r(r)$ с переменными коэффициентами. Решение прямой задачи об определении значений функции $u_r(r)$ при известных законах изменения компонент σ^0_{rr} и $\sigma^0_{\varphi\varphi}$ осуществлено численно в пакете Maple. Проведены вычислительные эксперименты о влиянии уровня предварительных напряжений на амплитудно-частотные характеристики и резонансные частоты.

При решении обратной задачи о реконструкции неоднородного предварительного напряженного состояния рассмотрено два подхода. При первом подходе в качестве дополнительной информации считаются известными узловые значения функции смещения в конечном наборе точек для заданной частоты [2]. При этом уравнение движения может быть рассмотрено как дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции изменения компоненты σ^0_{rr}. Его решение представлено в виде квадратур, а численная реализация осуществлена с помощью конечномерных аппроксимаций. Для вычисления первых и вторых производных функции смещения использован сплайн пятого порядка, построенный по заданным узловым значениям. При втором подходе в качестве дополнительной информации считаются известными данные об амплитудно-частотной характеристики на внешней границе кольцевой области в заданном частотном диапазоне [3, 4]. В этом случае решение предлагается строить с помощью итерационного метода. На основе метода линеаризации сформулировано необходимое соотношение относительно поправок к восстанавливаемой функции. Полученное соотношение представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, решение которого осуществлено численно с

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 13-01-00196, № 12-01-31501, а также Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения № 14.132.21.1358, № 14.132.21.1360.

помощью метода регуляризации А. Н. Тихонова [5]. Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции законов изменения предварительного напряженного состояния. Проведен анализ полученных результатов, даны практические рекомендации по осуществлению наиболее эффективной процедуры реконструкции в рамках каждого из предложенных подходов.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Ватульяну А. О. за предложенные пути решения задачи и ценные замечания.

Литература

1. *Гузь А. Н.* Упругие волны в сжимаемых материалах с начальными напряжениями и неразрушающий ультразвуковой метод определения двухслойных остаточных напряжений // Прикл. механика.—1994.—Т. 30, № 1.—С. 3–17.
2. *Ватульян А. О., Бурьян А. Ю., Осипов А. В.* Об идентификации переменной жесткости при анализе поперечных колебаний балки // Вестн. ДГТУ.—2010.—Т. 10, № 6.—С. 825–833.
3. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела.—М.: Физматлит, 2007.—223 с.
4. *Dudarev V. V., Vatulyan A. O.* On restoring of the pre-stressed state in elastic bodies // J. of Appl. Math. and Mech.—2011.—Vol. 91, № 6.—P. 485–492.
5. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.—М: Наука, 1979.—288 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ВЫПОЛНЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ В КВАНТОВЫХ ΣΠ-НЕЙРОНАХ

М. А. Казаков (Россия, Нальчик; НИИ ПМА КБН РАН)

В настоящей работе рассматривается способ реализации бинарных операций логического произведения и логической суммы при помощи унитарных преобразований над кубитами.

Первый слой ΣΠ-нейронов состоит из элементов, выполняющих операцию умножения. Операцию логического произведения можно выполнить при помощи элемента Тоффоли. Этот элемент, действуя на систему трех кубитов $|x, y, z\rangle$, реализует функцию

$$T\,|x, y, z\rangle \to |x, y, z \oplus x \wedge y\rangle\,,$$

при $z = 0$ элемент Тоффоли

$$T\,|x, y, 0\rangle \to |x, y, x \wedge y\rangle\,.$$

Второй слой ΣΠ-нейронов состоит из элементов, выполняющих операцию логического сложения. Эту операцию можно выполнить через операции логического отрицания и логического умножения:

$$x \vee y = \neg(\bar{x} \wedge \bar{y}).$$

Унитарное преобразование, соответствующее операциям отрицания можно составить из следующих однокубитовых операторов:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где 1 — тождественный оператор, σ_x представляет собой одну из матриц Паули.

Тензорное произведение этих матриц $NOT_{12} = 1 \otimes 1 \otimes \sigma_x$ образует матрицу 8×8, действующую на систему из трех кубитов. Эта матрица соответствует унитарному преобразованию, производящему инверсию первых двух кубитов.

Тензорное произведение $NOT_3 = \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes 1$ образует матрицу, соответствующую унитарному преобразованию, производящему инверсию третьего кубита.

Таким образом, операцию логического сложения можно выполнить последовательным действием трех унитарных операторов на систему трех кубитов. Первые два кубита — слагаемые, третий кубит — результат.

$$NOT_{12}\,T\,NOT_3\,|x, y, 0\rangle \to |\bar{x}, \bar{y}, x \vee y\rangle\,.$$

Литература

1. *Китаев А., Шень А., Вялый М.* Классические и квантовые вычисления.—М.: МЦМО, 1999.
2. *Шибзухов З. М.* Конструктивные методы обучения ΣΠ-нейронных сетей.—М: Наука, 2006.—160 с.

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ КОССЕРА В ЗАДАЧЕ О ДЕФОРМИРОВАНИИ ЦИЛИНДРА С КЛИНОВОЙ ДИСКЛИНАЦИЕЙ

М. И. Карякин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
О. А. Майорова (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В рамках теории упругости, учитывающей моментные напряжения, удается построить различные модели материалов, получить аналитические и численные результаты, которые по сравнению с результатами классической теории упругости лучше согласуются с экспериментом в том случае, если градиенты напряжений становятся значительными (что является существенным при концентрации напряжений вокруг внутренних дефектов).

Одна из основных проблем в применении моментной теории упругости — определение материальных параметров континуума Коссера.

Наиболее распространенным подходом к идентификации материальных констант для среды Коссера является их аналитическое или численное определение.

Целью данной работы было определение способов воздействия на цилиндр, при которых наблюдается различие напряженно-деформированного состояния в рамках классической теории упругости и теории, учитывающей моментные напряжения.

В работе рассмотрена задача о кручении и растяжении кругового цилиндра с клиновой дисклинацией. В случае плоской задачи обычно рассматривается два вида ортогонального тензора микроповорота $\mathbf{H}$ [1]:

$$\mathbf{H_I} = \cos\chi(r)\left(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi\right) + \sin\chi(r)\left(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\Phi - \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_R\right) + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_Z; \tag{1}$$

$$\mathbf{H_{II}} = \mathbf{e}_r\mathbf{e}_R + \cos\chi(r)(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_Z) + \sin\chi(r)(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_Z - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_\Phi). \tag{2}$$

Было показано, что представление (1) может быть использовано для анализа распределения напряжений и моментных напряжений в цилиндре с клиновой дисклинацией, но оно не подходит для случая кручения цилиндра. По этой причине мы использовали представление (2) для изучения возможности макрозакручивания в цилиндре с клиновой дисклинацией с полуобратным представлением для деформации следующего вида:

$$R = R(r), \quad \Phi = \kappa\varphi + \psi z, \quad Z = \lambda z.$$

В работе рассмотренно несколько моделей материалов, учитывающих микростуктуру материала:

$$W_1 = 2\mu\mathrm{tr}\left(\mathbf{Y} - \mathbf{I}\right) + \eta\left|\mathrm{tr}\mathbf{L}\right|, \tag{3}$$

$$W_2 = 2\mu\mathrm{tr}\left(\mathbf{Y} - \mathbf{I}\right) + \frac{\delta}{2}\mathrm{tr}^2\mathbf{L} + \frac{\gamma+\eta}{2}\mathrm{tr}\left(\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right) + \frac{\gamma-\eta}{2}\mathrm{tr}\mathbf{L}^2, \tag{4}$$

$$W_3 = 2\mu\mathrm{tr}\left(\mathbf{Y} - \mathbf{I}\right) + \eta\left|\mathrm{tr}\left(\mathbf{L}^2\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right)\right| + \delta\left|\mathrm{tr}\left({\mathbf{L}^{\mathrm{T}}}^2\cdot\mathbf{L}\right)\right| + \gamma\left|\mathrm{tr}\mathbf{L}^3\right|, \tag{5}$$

$$W_4 = 2\mu\mathrm{tr}\left(\mathbf{Y} - \mathbf{I}\right) + \eta\mathrm{tr}\left(\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right) + \gamma\mathrm{tr}\left(\mathbf{L}^3\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right), \tag{6}$$

где $\mathbf{Y}$ — мера деформации, $\mathbf{L}$ — тензор изгибной деформации [1], μ, η, δ, γ — материальные параметры. В случае отсутствия моментных напряжений, все модели (3)–(6) переходят в хорошо известный потенциал Бартенева — Хазановича [2].

Было показано, что возможно построить модель несжимаемого нелинейно-упругого псевдоконтинуума Коссера, для которого образование дисклинации сопровождается макрозакручиванием цилиндра — эффектом, который отсутствует в классической нелинейной теории упругости. Для этого следует учитывать слагаемые нечетной степени в функции удельной потенциальной энергии деформации.

В работе проведен анализ влияния моментных напряжений на изменение длины цилиндра при кручении. Установлено, что при некотором наборе материальных параметров длина цилиндра сначала увеличивается, затем начинает уменьшаться, в то время как в классической нелинейной теории упругости цилиндр при кручении всегда удлиняется.

Литература

1. *Зубов Л. М., Карякин М. И.* Дислокации и дисклинации в нелинейно-упругих телах с моментными напряжениями // Прикл. матем. и техн. физика.—1990.—№ 3.—С. 160–167.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости.—М.: Наука, 1980.—512 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БРОУНОВСКОЙ КОАГУЛЯЦИИ ВОДНО-КАПЕЛЬНОГО ОБЛАКА АТМОСФЕРЫ

Т. С. Кумыков (Россия, Нальчик; НИИ ПМА КБНЦ РАН)

Процесс коагуляции (слияния) является одним из основных процессов, характеризующих эволюцию дисперсных систем, т. е. двухфазных систем являющихся механической смесью газообразной среды с жидкой или жидкой среды с твердой. Такие системы возникают в различных естественных и техногенных процессах [1–3].

Обоснование методов расчета количественных характеристик вероятности столкновения дисперсных частиц в процессе броуновского движения рассматривается в рамках предположения о эквивалентности броуновского движения и диффузии.

В работе рассмотрен процесс слияния мельчайших пузырьков в водно–капельном облаке. В основе построения математической модели броуновской коагуляции используется схема столкновения двух дисперсных частиц. Для расчета вероятности встречи двух частиц (пузырьков) предполагаем, что одна частица находится неподвижно. Проведя вокруг этой частицы сферу радиуса $R = 2r_0$, где r_0 — радиус частицы, считаем, что всякая частица, входящая в эту систему, захватывается и соединяется с выделенной частицей. При этом на сферической поверхности радиуса R концентрация частиц поддерживается равной нулю. Поэтому вблизи этой поверхности возникает градиент концентрации и соответствующий ему диффузионный поток частиц. Вследствие броуновского движения диффузионный поток на поверхности радиуса R равен среднему числу частиц, пересекающих эту поверхность. При этом для описания полей взаимодействия коагуляции частиц в газонасыщенных водных растворах считаем, что в начальный момент в единице объема жидкости содержится n_0 пузырьков одинакового размера. Число частиц n_0 в единице объема системы предполагается достаточно малым, так, что вероятность тройных и более частых столкновений пренебрежимо мала.

С учетом коагуляции χ первичных пузырьков и условия сохранения масс пузырьков [1]

$$M = \chi m,$$

где $M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_a$ — масса составного пузырька, а $m = \frac{4}{3}\pi\, r_1^3 \rho_r$ — масса первичного пузырька, a — радиус пузырька, получающегося после коагуляции множества мелких пузырьков, r_1 — радиус первоначального пузырька, ρ_a и ρ_r — плотности воздуха в пузырьках, соответственно, получена формула для определения радиуса составного пузырька

$$a = r_1 \left[\ln(1 + Kt)\right]^{1/2},$$

где K — коагуляционная константа, t — время коагуляции. Также показано, что при слиянии мельчайших пузырьков радиус составного пузырька $a \sim \sqrt{\chi}$ тогда, как при слиянии капелек радиус составной капли $a_n \sim \sqrt[3]{\chi}$, и что пузырьки растут быстрее, чем капли в облачной среде.

Литература

1. *Френкель Я. И.* Собрание избраных трудов.—М.: Изд-во АН СССР, 1959.—460 с.
2. *Кройт Г. Р.* Наука о коллоидах.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955.—538 с.
3. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика.—М.: Физматиздат, 1959.—699 с.

РАБОТА СОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЫ В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНОГО ПОЛОСОВОГО КОНТУРА ПИТАНИЯ В АНИЗОТРОПНОМ ПЛАСТЕ[1]

Д. Г. Лекомцев (Россия, Орел; ОГУ)

Объемы добычи флюидов (воды, нефти) в настоящее время постоянно растут. Этим обусловлена необходимость создания новых математических моделей фильтрационных течений в пластах сложной геологической структуры (анизотропных и неоднородных). В работе поставлена задача о работе скважины в анизотропном пласте грунта в случае произвольного контура питания. Получено аналитическое решение задачи о работе совершенной скважины с бесконечным полосовым контуром питания.

Совершенная эксплуатационная скважина дебита Q расположена в горизонтальном пласте постоянной толщины. Грунт пласта, недеформируемый анизотропный и однородный, характеризуется коэффициентом проницаемости K — тензором второго ранга (вообще говоря, несимметричным). В предположении плоскопараллельности задачи $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$. Компоненты (K_{ij}) — постоянные. Для определения вклада в дебит различных компонентов тензора введем коэффициенты $\alpha = K_{22}/K_{11}$ и $\beta = (K_{12} + K_{21})/2K_{11}$.

Работу скважины моделируем стоком мощности Q, который расположен на оси Ox физической плоскости Oxy. Контур скважины L_C — окружность радиуса R_C, а контур питания — прямые $L_{\Pi 1}$: Oy и $L_{\Pi 2}$: $x = H$, $x \in (-\infty, \infty)$. Течение происходит в области D, ограниченной контуром $L_C \cup L_{\Pi 1} \cup L_{\Pi 2}$.

Полагаем, что жидкость несжимаемая и ее течение стационарное. Обобщенный потенциал $\varphi(M) = -(p + \rho\Pi)/\mu$ (Π — потенциал массовой силы — силы тяжести, p — давление, μ и ρ — вязкость и плотность жидкости) и скорость фильтрации $\vec{v}$ течения как функции точки $M = (x, y)$ удовлетворяют всюду в области D (за исключением изолированных особых точек $\varphi(M)$) уравнению [1]:

$$\nabla \cdot (K \cdot \nabla\varphi(M)) = 0, \quad M \in D. \tag{1}$$

Полагаем, что давления на контурах L_C, $L_{\Pi 1}$ и $L_{\Pi 2}$ постоянные, т. е. для $\varphi(M)$ имеем условия:

$$\varphi(M) = \varphi_C, \quad M \in L_C, \tag{2}$$

$$\varphi(M) = \varphi_{\Pi 1}, \quad M \in L_{\Pi 1} \quad \text{и} \quad \varphi(M) = \varphi_{\Pi 2}, \quad M \in L_{\Pi 2}, \tag{3}$$

где φ_C, $\varphi_{\Pi 1}$ и $\varphi_{\Pi 2}$ — константы, $\varphi_{\Pi 1} = \varphi_{\Pi 2} = \varphi_\Pi$ и $\varphi_\Pi \neq \varphi_C$.

Трудность решения поставленной задачи обусловлена сложным видом уравнения (1). Ее исследование значительно упрощается, если уравнение (1) привести к каноническому виду. Для этого перейдем на вспомогательную плоскость $O\xi\eta$, используя гомеоморфные (аффинные) преобразования координат (прямое и обратное) [2]. С целью изучения влияния анизотропии грунта на дебит введем величину $\epsilon = Q/Q_0 - 1$, характеризующую относительный дебит [3]. Q — дебит скважины в анизотропной среде, Q_0 — дебит скважины в изотропной среде, определяемый по известной формуле [4].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-97522 р_центр_а.

Была исследована зависимость относительного дебита ϵ от значений коэффициентов α и β. Анизотропия грунта может сильно сказываться на дебите Q (может его увеличивать или уменьшать по отношению к Q_0). С увеличением отношения недиагональных к диагональным компонентам тензора (K_{ij}) (увеличение коэффициента α, коэффициент β — фиксирован) влияние анизотропии уменьшается.

Литература

1. *Пивень В. Ф.* Постановка основных граничных задач фильтрации в анизотропной пористой среде // Тр. XIII Междунар. симпозиума «МДОЗМФ».—Харьков-Херсон: Изд-во центр Харьковского ун-та, 2007.—С. 239–243.
2. *Пивень В. Ф.* Решение граничных задач двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном слое пористой среды // Тр. Междунар. школ-семинаров «МДОЗМФ».—Орел: Изд-во Орловского ун-та, 2007.—С. 91–100.
3. *Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г.* Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта // Ученые записки Орловского гос. ун-та.—2012.—Т. 47, № 3.—С. 69–74.
4. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод.—М.: Наука, 1977.—348 с.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ МОДЕЛЕЙ

Ю. Б. Мельников (Россия, Екатеринбург; УрГЭУ)

Алгебраический подход к построению модели [2] состоит в выделении трех компонентов:

1) системы базовых элементов;

2) набора типовых преобразований;

3) механизма аппроксимирования.

Но имеются препятствия к его использованию для создания моделей.

Во-первых, неоднозначность трактовки термина «модель» затрудняет:

а) корректное определение «операций алгебры моделей»;

б) применение «операций алгебры моделей» к созданию новых моделей в случае разных трактовок термина «модель».

Во-вторых, большинство определений модели (кроме принятых в математической логике) не всегда позволяют однозначно отнести «объект» к классу моделей. Например, могут возникнуть недоразумения при интерпретации таких словосочетаний как «отображает и воспроизводит в более простом и огрубленном виде...» или «модель строится (или выбирается) для имитации объекта по такому-то набору характеристик...». Это затрудняет оценку адекватности как конкретной «операции алгебры моделей», так и результата выполнения этой «операции». В-третьих, невозможно гарантировать, что результат применения конкретной «операции алгебры моделей» будет моделью, т. е. «адекватно отражать свойства прототипа», «позволит получить новую информацию об объекте» и т. д. Значит, «операции алгебры моделей» будут на самом деле частичными операциями. Поэтому изучение свойств «алгебры моделей» будет затруднительно, поскольку частичные алгебры плохо поддаются изучению. В-четвертых, не видно очевидных подходов к решению задачи оценивания уровня адекватности модели, являющейся результатом применения «операции алгебры моделей» с помощью оценок адекватности «операндов». В-пятых, в процессе построения модели обычно бывает практически невозможно достоверно установить, в какой степени создаваемый объект «отражает существенные свойства моделируемого объекта» и др.

Модельно-содержательный компонент модели состоит из носителя (совокупности элементов, из которых состоит прототип с точки зрения данной модели), системы характеристик (т. е. функций, определенных на носителе модели, а характеристики с числовыми значениями называются *величинами*) и системы отношений.

Адекватность модели оценивается сравнением с эталонной моделью, в качестве которой иногда выступает прототип. Таким образом, в теории моделирования характеристика адекватности трактуется как функция, определенная на упорядоченных парах моделей (оцениваемая модель, эталонная модель), удовлетворяющая определенному набору аксиом [1]. В рамках одного исследования могут одновременно рассматриваться несколько характеристик адекватности.

В настоящее время теория моделирования содержит следующие компоненты:

1) формально-конструктивное определение модели;

2) алгебра моделей;

3) теория адекватности моделей: характеристики адекватности, оценивание адекватности, модели адекватности;

4) система частных типов моделей: модели различных научных областей (в частности, модели математики), модели управления (стратегии, пространства управления: естественно-научное, биологическое, ноосфера). Теория моделирования представляет новые возможности для построения моделей, анализа и улучшения их адекватности [3].

Таблица 1. Иллюстрация к формально-конструктивному определению модели

Прототип	Связи	Образ — «модель» в традиционной трактовке
	Модель — это система из двух компонентов	
	Интерфейсный компонент	Модельно-содержательный компонент

Литература

1. *Мельников Ю. Б., Ваганова Г. В., Матвеева Е. П.* Об определении и оценке адекватности модели // Образование и наука.—2007.—№ 6 (10).—С. 3–14.
2. *Мельников Ю. Б.* Алгебраический подход к созданию учебных презентаций по математике // Образование и наука.—2011.—№ 5 (84).—С. 129–141.
3. *Мельников Ю. Б.* Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей.—Екатеринбург: Уральское изд-во, 2004.—384 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ТИПИЧНЫЕ МОДЕЛИ ГРУППОВОГО ЭМОЦИОНАЛЬНОГО ВОСПРИЯТИЯ СОЦИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ[1]

И. Н. Мощенко, М. Д. Розин, М. И. Иванова
(Россия, Ростов-на-Дону; СКНЦ ВШ ЮФУ)

В работе на примере анализа эмоциональной составляющей групповых политических установок показана методика построения типичных (в смысле теории особенностей дифференцируемых отображений) моделей.

Первичная информация собиралась анкетированием, проводимым по технологии семантического дифференциала, разработанной в 50-х годах прошлого века Ч. Осгудом. Респондентам предлагалось по семантической шкале оценить четыре типа политических порядков. Два идеальных (по представлениям респондентам, положительный и отрицательный) и два реальных (местный и центральный политические порядки).

Для количественной характеристики эмоционального восприятия политического порядка в работе использовался уровень восприятия r, нормированный от -1 до $+1$. Основная цель моделирования — получить связь между этим уровнем и экспериментально определяемыми при мониторинге параметрами. Как нами показано ранее, скорость изменения уровня r при некоторых ограничениях можно представить как градиент от некоторой функции F общего положения, названной нами потенциалом восприятия.

$$\frac{dr}{dt} = -\operatorname{grad} F. \tag{1}$$

Где потенциал F зависит от экспериментально определяемых при мониторинге параметров и уровня восприятия. Градиентные системы общего положения хорошо исследованы в теории катастроф, и для определения типичного потенциала можно воспользоваться полученными там результатами. Однако для этого необходимо уменьшить размерность исходного семантического пространства, не теряя информации. Используемые для этого методики в свою очередь определяются применяемой при анализе моделью восприятия респондентами вопросов анкет. В социологии известны две модели восприятия, векторная и модель идеальной точки Кумбса. Нами исследованы оба подхода.

Для векторной модели восприятия наиболее подходящим для уменьшения размерности исходного пространства является факторный анализ, предложенный еще Ч. Осгудом. Обработка результатов наших экспериментальных данных (более 10 серий опросов) показали, что в этом случае четыре независимых фактора описывают 90 и выше процентов дисперсии исходных данных. И в качестве типичного потенциала можно взять потенциал шестой степени (катастрофу бабочки): $F = r^6/6 + ar^4/4 + br^3/3 + cr^2/2 + dr$. Здесь модельные параметры (a, b, c, d) всего лишь диффеоморфны выявленным факторам. И определение этого диффеоморфизма (привязка модели) — наиболее сложная задача моделирования. Нами использовалась наипростейшая линейная (с точностью до масштабных факторов) привязка. Обработка по разработанной модели конкретных экспериментальных данных показала, что получаемые результаты не всегда адекватно отражают ситуацию.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-06-00299а.

Выявлены причины этого. Во-первых, для технологии семантического дифференциала, более соответствует действительности не векторная модель восприятия, а модель идеальной точки. Во-вторых, необходима более обоснованная процедура привязки модели.

Нами предложено, для уменьшения размерности исходного пространства, использовать многомерное шкалирование, как более согласующееся с моделью идеальной точки. Получено, что для всех рассмотренных случаев, исходное пространство сводится к двум линейным функциям, описывающим более 90 процентов дисперсии исходных данных. При этом в качестве типичного потенциала можно взять более простой полином, четвертой степени (катастрофу сборки): $F = r^4/4 + ar^2/2 + br$. Показано, что выявленные параметры косимметричны уровню эмоционального восприятия политического порядка относительно группы перестановок образов идеальных конструктов. И на основе группового (представленческого) анализа обоснована привязка модели в этом случае.

Проверка на всех полученных экспериментальных данных показала, что моделирование в пространстве, получаемом многомерным шкалированием, по разработанной методике, более адекватно отражает ситуацию, чем моделирование в факторном пространстве.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА УСИЛЕНИЯ ИЛИ ОСЛАБЛЕНИЯ ЭФФЕКТА СЕЙСМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ВЫСОТНОЕ СООРУЖЕНИЕ

И. Д. Музаев (Россия, Владикавказ; СОГУ, ЦГИ)

В статье поставлена и решена контактная краевая задача совместных сейсмических колебаний системы, состоящей из двух слоев грунта, фундаментного массива и высотного сооружения.

На рисунке 1 представлен схематический чертеж стройплощадки под высотным зданием.

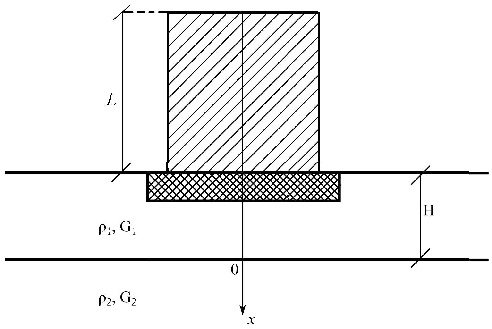


Рис. 1. Расчетная схема поставленной краевой задачи сейсмологии.

Математическую модель сейсмических колебаний всей системы представляет следующая контактная краевая задача математической физики:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } -H < x < 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - a_2^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } 0 < x < +\infty, \tag{2}$$

$$EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \rho s \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad \text{при } -(H+L) < x < -H, \tag{3}$$

$$U_1(x,t) = U_2(x,t) \quad \text{при } x = 0, \tag{4}$$

$$G_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = G_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \quad \text{при } x = 0, \tag{5}$$

$$(m + \rho s L) \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - G_1 s_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - EJ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при } x = -H, \tag{6}$$

$$W(x,t) = U_1(x,t) \quad \text{при } x = -H, \tag{7}$$

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = -H, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = -(H+L), \tag{9}$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при } x = -(H+L), \tag{10}$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{G_1}{\rho_1}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{G_2}{\rho_2}}, \tag{11}$$

где приняты следующие обозначения: t — время, x — вертикальная координата, $U_1(x,t)$, $U_2(x,t)$ — величины горизонтальных сдвиговых колебаний в слоях, EJ — жесткость высотного сооружения при его поперечном колебании, $W(x,t)$ — величина поперечных упругих колебаний сооружения, G_1, ρ_1, G_2, ρ_2 — модули сдвига и плотности грунтов в слоях, s — площадь поперечного сечения сооружения, s_1 — площадь планового сечения фундаментного массива, ρ — объемная плотность материала сооружения, схематизированного в виде вертикально стоящего бруса, m — масса фундаментного массива, H — мощность верхнего слоя, L — высота сооружения.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЛЕКТИВНЫХ ВОДОЗАБОРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПРИЛОЖЕНИИ САПР ОПТИМАЛЬНЫХ ВАРИАНТОВ ВОДОЗАБОРНЫХ УСТРОЙСТВ

Н. И. Музаев (Россия, Владикавказ; ЦГИ)

При включении водозаборного устройства на поверхности раздела слоев стратифицированного водоема образуются внутренние гравитационные волны, которые могут спровоцировать затекание воды из загрязненного либо недопустимого слоя. В связи с этим, при расчетах селективного водозабора из стратифицированного водоема прежде всего надо определить высоту критического положения поверхности раздела слоев у водозаборного окна. Критическое положение — это предельное положение поверхности раздела слоев, при котором еще не происходит захвата воды из недопустимых слоев.

Математическая модель процесса селективного водозабора представляет пространственную контактную начально-краевую задачу для дифференциальных уравнений Лапласа либо Пуассона по пространственным координатам x, y и z.

$$\Delta_1(x, y, z, t) = f_1(x, y, z, t), \tag{1}$$

$$\Delta_2(x, y, z, t) = f_2(x, y, z, t), \tag{2}$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы скоростей в слоях воды, t — время.

Если забор воды происходит через боковые грани либо через дно, то функции f_1 и f_2 тождественно равны нулю. Если же забор происходит из внутренних пространств слоев, то $f_1(x, y, z, t)$ и $f_2(x, y, z, t)$ моделируют место и скорости водоотбора как непрерывно распределенные стоки.

Дифференциальные уравнения (1) и (2) сопряжены через граничные условия на поверхности раздела слоев.

В результате решения поставленных начально-краевых задач получены формулы и составлены пакеты программ на ЭВМ, которые позволяют автоматизированно проектировать оптимальные варианты водозаборных устройств, обеспечивающих селективный водоотбор из стратифицированного водоема.

Результаты этих исследований позволяют так спроектировать сооружение, чтобы воздействие сейсмической волны на сооружение было минимальным.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ

М. А. Назаралиев (Россия, Махачкала; ДГУ),
В. Д. Бейбалаев (Россия, Махачкала; ДГУ)

Изучение нелинейных математических моделей различных физико-химических процессов на данном этапе развития науки является одним из актуальных направлений современной математической физики. Как известно, линейные математические модели являются всегда лишь определенными приближениями при описании различных процессов. Их можно использовать только в тех случаях, когда исследуемые физические величины в рассматриваемом процессе изменяются незначительно

Большое количество реальных процессов не укладываются в представления механики сплошной среды и требуют привлечения представлений о фрактальности среды, в которой они происходят. Для описания таких процессов используется математический аппарат интегродифференцирования дробного порядка.

Рассмотрим в области краевую задачу для нелинейного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка.

Задача. Найти решение уравнения

$$\rho \cdot c \cdot \partial_{0t}^{\alpha} T(x,t) = \partial_{x+}^{\beta} \left(\lambda(T) \cdot \partial_{x+}^{\gamma} T(x,t) \right) + f(T), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию $T(x,0) = \varphi(x)$ и граничным условиям

$$T(0,t) = \mu_1(t), \quad T(1,t) = \mu_2(t). \tag{2}$$

Здесь

$$\partial_{0t}^{\alpha} T(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{T_t'(x,s)}{(t-s)^{\alpha}}$$

— частная дробная производная Caputo [2], $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 < \beta \leqslant 1$, $0 \leqslant 1$, $\lambda(T)$, $f(T)$ — достаточно гладкие функции и $0 < c_1 \leqslant k(T) \leqslant c_2$.

Задачу (1), (2) будем решать численным методом на равномерной сетке

$$w_{h\tau} = (x_m, t_n) : x_m = mh, \quad t_n = n\tau,$$
$$m = 0, 1, \ldots, M, \quad h = \frac{1}{M}, \quad n = 0, 1, \ldots, N, \quad \tau = \frac{T}{N}$$

с шагами h по x и τ по t.

Обозначим через $T(x_m, t_n)$ точное решение задачи (1), (2), а через $y_m^n = y(x_m, t_n)$ — приближенное решение в точке (x_m, t_n), $n = 0, 1, \ldots, N$, $m = 0, 1, \ldots M$.

Для дробной производной Caputo в случае $0 < \alpha \leqslant 1$ имеет место разностная аппроксимация [4]

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha} T(x,t) \right)_n \sim \frac{y(x, t_{n+1} - y(x, t_n)}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}. \tag{3}$$

Дифференциальное выражение

$$L^{\beta,\gamma} T = \partial_{x+}^{\beta} \left(\lambda(T) \partial_{x+}^{\gamma} T(x,t) \right) \tag{4}$$

при каждом фиксированном t аппроксимируем в точке (x_m, t_n) разностным отношением

$$\Lambda^{\beta,\gamma}(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)h^{\beta}}\left(\lambda_{m+1/2}\frac{y_{m+1}-y_m}{\Gamma(2-\gamma)h^{\gamma}} - \lambda_{m-1/2}\frac{y_m - y_{m-1/2}}{\Gamma(2-\gamma)h^{\gamma}}\right), \tag{5}$$

где $\lambda_{m+1/2} = \frac{\lambda(y_m)+\lambda(y_{m+1})}{2}$, $\lambda_{m-1/2} = \frac{\lambda(y_m)+\lambda(y_{m-1})}{2}$.

Воспользовавшись (3) и (5), для уравнения (1) получим неявную, линейную относительно y_m^{n+1}, $m = 0, 1, \ldots, M-1$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, разностную схему

$$\rho \cdot c \cdot \frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\Gamma(2-\beta)h^{\beta}}\left(\lambda_{m+1/2}\frac{y_{m+1}^{n+1} - y_m^{n+1}}{\Gamma(2-\gamma)h^{\gamma}} - \lambda_{m-1/2}\frac{y_m^{n+1} - y_{m-1/2}^{n+1}}{\Gamma(2-\gamma)h^{\gamma}}\right) + f\left(y_m^n\right) \tag{6}$$

для оценки собственных значений оператора перехода получаем выражение

$$\lambda \leqslant \left[1 + \frac{4\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}c_1}{\rho \cdot c \cdot \Gamma(2-\beta)\cdot\Gamma(2-\gamma)\cdot h^{\beta+\gamma}}\sin^2\frac{\alpha h}{2}\right]^{-1}. \tag{8}$$

Из неравенства (8) следует, что $|\lambda| < 1$, т. е. неявная разностная схема (6) безусловна устойчива.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Элементы дробного исчисления и их применение.—Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2003.—299 с.
2. *Бейбалаев В. Д.* Математическая модель переноса в средах с фрактальной структурой // Мат. моделирование.—2009.—Т. 21, № 5.—С. 55–62.
3. *Назаралиев М. А., Бейбалаев В. Д.* Численные методы решения краевой задачи для уравнения теплопереноса с производной дробного порядка // Вестн. ДГУ.—2008.—Вып. 6.—С. 46–53.
4. *Бейбалаев В. Д.* Одношаговые методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка // Вестн. ДГУ.—2011.—Вып. 6.—С. 67–72.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ

А. И. Недошивина (Россия, Воронеж; ВИ МВД)

При эксплуатации систем видеонаблюдения объектов различного назначения возникает задача сжатия полученных данных, так как даже при скромных характеристиках видеопотоков количество информации, подлежащей хранению, чрезвычайно велико. В работе рассмотрена задача, возникающая в процессе реализации одной из методик сжатия видеоинформации.

Рассмотрим результат сохранения видеонаблюдений как последовательность массивов данных, подлежащих хранению. Например, могут сохраняться кадры с камер видеонаблюдения. При этом информация может сохраняться не со всего кадра целиком, а только с заранее определённой области экрана, что приводит к существенной экономии в объемах хранимых данных. При этом возникает задача определения нужной сохраняемой части данных, например, попиксельное определение координат сохраняемых точек. Так возникает задача о локализации области. Рассмотрим эту задачу подробнее. Для этой задачи существуют несколько различных алгоритмов решения, каждый из них имеет как свои достоинства, так и недостатки. В работе предлагается алгоритм решения, основанный на интегральных формулах Коши из теории функций комплексного переменного.

Как уже было указано, алгоритм основан на использовании теоремы и формулы Коши. Вычислим величину

$$K = \int\limits_{\Delta} \frac{dz}{z - w},$$

где Δ — это контур данного многоугольника M, w — данная точка плоскости. Тогда из теоремы и формулы Коши следует, что при $K = 0$ точка $w \in M$, т. е. рассматриваемая точка попадает внутрь заданного многоугольника. При $K = 2\pi i$ точка $w \notin M$, т. е. рассматриваемая точка лежит снаружи от рассматриваемого многоугольника. А при $K = \infty$ точка $W \in \Delta$, т. е. оказывается на границе многоугольника, на практике в этом случае при вычислениях значением величины K оказывается некоторое большое число.

Вычислим величину К при данных координатах вершин многоугольника М и точки плоскости w. Рассмотрим случай многоугольника. Для этого возьмем одну его сторону и произведем все вычисления для нее. Интеграл для стороны многоугольника получается равен сумме арктангенсов и натуральных логарифмов. Но если включить сторону в замкнутый контур многоугольника, логарифмы сокращаются. Величина K для многоугольника становится равной сумме арктангенсов.

Окончательная формула имеет вид

$$K = i \sum_k \left(\operatorname{arctg} \frac{(x_0 - x_k)(x_k - x_{k+1}) + (y_0 - y_{k+1})(y_k - y_{k+1})}{y_0(x_{k+1} - x_k) + y_k(x_0 - x_{k+1}) + y_{k+1}(x_k - x_0)} - \right.$$
$$\left. - \operatorname{arctg} \frac{(x_0 - x_k)(x_k - x_{k+1}) + (y_0 - y_k)(y_k - y_{k+1})}{(y_0 - y_k)(x_{k+1} - x_k) + x_0(y_k - y_{k+1})} \right),$$

где (x_0, y_0) — точка, принадлежность которой многоугольнику мы исследуем, а суммирование распространяется на все стороны многоугольника.

Метод позволяет решать поставленную задачу о локализации точки также относительно криволинейных многоугольных областей аналитически при по-мощи явных вычислений. Кроме того, к числу достоинств предложенного метода можно отнести три его особенности:

- метод работает для криволинейных границ, составленных из кусков сплайнов, кривых Безье и т.д. при этом вычисления с помощью пакета MATHEMATICA несколько усложняются, однако без принципиальных затруднений доводятся до явных формул, как только заданы уравнения частей границы;
- метод выгодно применять, когда точка лежит вблизи границы области. Конкурирующие методы приводят к необходимости сравнивать практически равные числа, тогда как в данном методе сравнивать приходится существенно различающиеся по модулю величины: $0, 2\pi, \infty$;
- данный метод не требует выпуклости многоугольника в отличие от большинства других известных методов.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ ВИБРОКИПЕНИЯ

Орлова Н. С. (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Для определения оптимальных (с точки зрения обеспечения наибольшей площади поверхности контакта газа с твердыми частицами) режимов (значений амплитуды и частоты колебаний полки) виброкипения используется двухжидкостная модель на основе закона фильтрации Дарси. Подробное описание и исследование модели представлено в работе [1].

Исследуется процесс виброкипения, создаваемый колебаниями полки, на которой находится слой частиц стекла, диаметром 0,13 мм. С использованием двухжидкостной модели были проведены расчеты по распределению объемной доли частиц в виброкипящем слое при разных значениях амплитуды A и частоты f колебаний полки.

В литературе [2] приводятся значения порозности α_g в псевдоожиженном, а также кипящем слое, которые изменяются в пределах 0,55–0,75, соответственно значения объемной доли частиц α_s ($\alpha_s = 1 - \alpha_g$) изменяются от 0,25 до 0,45. Переходное состояние от кипения к пневмотранспорту ($\alpha_g > 0{,}9$ и выше) иногда называют разбавленной фазой [2]. При этом наблюдается унос частиц из слоя. Очень часто (например, в газоочистительных аппаратах, аппаратах для сушки различных материалов и т. д.) процесс виброкипения сопровождается дополнительным продуванием потоком газа. Поэтому при определении рекомендуемых (с точки зрения обеспечения наибольшей поверхности контакта фаз) режимов виброкипения важно учитывать эти значения порозности (или объемной доли частиц). В действительности, распределение объемной доли частиц в кипящем слое по высоте неравномерное, поэтому в расчетах целесообразно использовать среднее значение объемной доли частиц α_s в слое. Таким образом, рекомендуемые значения изменяются в диапазоне от 0,25 до 0,45.

Следует обратить внимание на то, что во многих случаях при определенных значениях амплитуды и частоты колебаний полки средние значения α_s удовлетворяют приведенному условию. При этом не во всех случаях слой разрыхляется в достаточной мере, чтобы обеспечить наибольшую площадь поверхности контакта фаз. А в некоторых случаях (при относительно низких значениях амплитуды колебаний $A < 2$ мм) наблюдается плотно упакованная зона в средней части слоя даже при высоких значениях частоты колебаний ($f > 50$ Гц). Поэтому при определении оптимальных режимов виброкипения также важно учитывать степень расширения слоя. Чем больше степень расширения, тем более равномерно распределен слой по высоте.

Были проведены расчеты степени расширения виброкипящего слоя (начальная высота слоя $H = 35$ мм) при различных значениях амплитуды (1,42–5,68 мм) и частоты (20–200 Гц) колебаний полки. Результаты расчетов показали, что степень расширения виброкипящего слоя зависит, в основном, от амплитуды колебаний полки, и возрастает с ее увеличением.

В результате полученных расчетов среднего значения объемной доли частиц (диаметром менее 0,29 мм) в виброкипящем слое и степени его расширения (при толщине слоя засыпки 35 мм) рекомендуемыми значениями амплитуды являются значения в диапазоне примерно от 3 до 6 мм, а рекомендуемые значения частоты колебаний полки в этом случае лежат в диапазоне от 20 до 50 Гц. Важно отметить, что при значениях амплитуды колебаний больше 6 мм среднее значение объемной доли частиц в слое не удовлетворяет вышеприведенному условию.

Литература

1. *Орлова Н. С.* Сравнение расчетов по двухжидкостной модели виброожиженного слоя с экспериментальными данными // Инж.-физ. журн.—2012.—Т. 85, № 6.—С. 1202–1207.
2. *Лыков М. В.* Сушка в химической промышленности.—М.: Химия, 1970.—432 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ЭНТРОПИЙНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Ф. Оськин (Беларусь, Полоцк; ПГУ)

Автором понятия «энтропия» является знаменитый немецкий физик Р. Клаузиус. Развивая свои термодинамические идеи, он в 1865 г. определил энтропию как меру необратимого рассеяния энергии и установил ее важнейшие характеристики.

В 1948 г. К. Шеннон в работе «Математическая теория коммуникаций» использовал энтропию как меру количества информации, содержащейся в передаваемом сообщении. Энтропия применяется и в других областях науки.

Настоящий доклад посвящен разработке классификации социальных систем, базирующейся на их энтропийных характеристиках. Классической формулой расчета энтропии является выражение

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log(p_i).$$

Здесь n — число объектов в рассматриваемой системе; p_i — вес i-го объекта в системе.

Очевидно, что своего максимального значения энтропия достигает при равных весах объектов:

$$H_m = \log(p_i).$$

Введем в рассмотрение относительную энтропию, определив ее как

$$H_r = \frac{H}{H_m}.$$

Удобство использования этой характеристики состоит в том, что она нормирована и изменяется в пределах от 0 до 1.

Введем также понятие стабильности S:

$$S = 1 - H_r,$$

и изменчивости V:

$$V = \frac{H_r}{1 - H_r}.$$

В системе имеет место состояние равновесия, когда

$$S = V. \tag{1}$$

Решив уравнение (1), получим, что состоянию равновесия соответствует значение относительной энтропии, равное 0,38.

Далее будем считать, что любая социально-экономическая система состоит из трех подсистем:

- экономической;
- политической;
- демографической.

Каждая из подсистем характеризуется своими значениями относительной энтропии, стабильности и устойчивости.

При этом относительная энтропия экономической подсистемы характеризует экономическую дифференциацию населения и подсчитывается на основании анализа доходов различных групп населения.

Относительная энтропия политической подсистемы оценивает уровень вариативности политических взглядов и суждений и рассчитывается, например, на основании анализа результатов всенародных выборов.

Относительная энтропия демографической подсистемы оценивает распределение населения по возрастным группам.

Для моделирования системы используется аппарат нечеткого логического вывода. Строится нечеткий логический контроллер, входными величинами для которого являются соответствующие энтропийные характеристики, а выходной величиной, например, вероятность наступления политического кризиса. Важной задачей при таком подходе становится обучение контроллера. Необходимо иметь соответствующие наборы входных и выходных данных, на которых можно провести обучение. В случае этнополитических кризисов для обучения контроллера могут быть использованы данные веб-ресурса «International Crisis Behavior Project» (www.cidcm.umd.edu/icb).

В докладе приводятся некоторые результаты такого моделирования.

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ И НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ НА РЕЗУЛЬТАТ МОДЕЛИРОВАНИЯ АТМОСФЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Д. Г. Пантилеев (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Рассматривается задача моделирования двумерных воздушных течений за обратной ступенькой в переменных вихрь-функция тока для k-модели турбулентности. Система уравнений описывающих движение потока записывается в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial\omega}{\partial t} = -\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) + \\ \qquad + \frac{\partial\nu}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\nu}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial z} + \frac{\partial^2\nu}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\nu}{\partial x\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}; \\ \Delta\psi = \omega; \\ \frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial k}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial k}{\partial z}\right) + G - D. \end{cases} \tag{1}$$

В расчетной области на примере данной задачи изучается влияние постановки граничных и начальных условий на установление решения и его физичность.

Влияние начальных условий проявляется в скорости формирования потока. Так как за ступенькой энергия срывающегося потока начинает диссипировать вследствие турбулентного трения, то за ступенькой начинает появляется сток энергии в виде вихря. Чем быстрее произойдет заполнение потоком области за ступенькой, тем быстрее установится вихрь. В качестве начального условия выбирается решение аналогичной системы уравнений записанной в физических переменных для ровной горизонтальной поверхности, которое потом сносилось с входной границы до выхода из области:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial k}{\partial z}\right) + \nu\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - c_D l^{-1} k^{\frac{3}{2}} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь k — кинетическая энергия турбулентности, u — горизонтальная составляющая скорости. Для них ставились следующие условия:

$$\begin{aligned} u|_{z=z_0} &= 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=z_H} = \frac{\alpha}{z}; \\ k|_{z=z_0} &= k_0; \quad \frac{\partial k}{\partial z}|_{z=z_H} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Выбранные граничные условия для системы (2) дают логарифмический профиль скорости. Для определения же значения функции тока вычислялся следующий интеграл:

$$\psi\left(z\right) = \int\limits_{z_0}^{z} u\,dz. \tag{4}$$

Полученные таким образом профили имеют ряд преимуществ также и при задании их в качестве граничного условия на входной границе. Так в расчетной области распределение по высоте искомых величин вне зависимости от значения на границе будет стремиться принять вид, определяемый видом уравнений. Если задаваемый на входной границе профиль не совпадает с соответствующим профилем, который формируется в расчетной области уже вблизи от границы на поверхности ступеньки (т. е. с профилем для ровной поверхности), то это будет приводить к торможению или к ускорению потока, что в свою очередь может создавать скачки скорости вблизи границы, которые могут распространиться на всю область искажая тем самым решение. Подобного можно избежать фиксируя полученный из (2) профиль на входной границе. В этом случае на краю ступеньки поток укоряется перед срывом, увеличивается вертикальный градиент скорости, что приводит к росту энергии турбулентности вблизи нижней границы, а значит к ускорению процесса стока энергии в область за ступенькой.

В качестве граничного условия на нижней границе при решении (1) задавалось нулевое значение функции тока. На выходной границе ставилась равная нулю вторая производная от функции тока.

В результате анализа решений системы (1) полученных при разных граничных условиях на верхней и входной границах был сделан вывод о том, что к наиболее быстрому формированию определенного режима течения приводит задание постоянного профиля на входе и постоянной первой производной от функции тока на верхней границе, что эквивалентно фиксированию значения скорости. Последнее условие справедливо, если вызываемые нижней границей возмущения в потоке быстро уменьшаются с высотой.

ПРИМЕНЕНИЕ MAPLE ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ[1]

Н. В. Рассказова (Россия, Рубцовск; РИИ АлтГТУ)

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве прямоугольный параллелепипед $P = ABCDA'B'C'D'$ с ребрами длины $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|AA'| = c$, для которых выполняется соотношение $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$. Сопоставим параллелепипеду P следующие интегралы поперечных мер Минковского W_i, $i = 0, 1, 2, 3$ [6]: $W_0(P) = V(P)$, $W_1(P) = F(P)/3$, $W_2(P) = M(P)/3$, $W_3(P) = \mathrm{const} = 4\pi/3$, где $V(P) = abc$ — объем, $F(P) = 2(ab+ac+bc)$ — площадь поверхности, $M(P) = \pi(a+b+c)$ — интеграл средней кривизны.

Рассмотрим следующую задачу:

Задача. Для прямоугольного параллелепипеда P с заданным геодезическим диаметром найти экстремальные значения интегралов поперечных мер Минковского (исключая тривиальный случай константы $W_3 = 4\pi/3$).

Под геодезическим диаметром $D(P)$ параллелепипеда P будем понимать максимальное геодезическое (внутреннее) расстояние между парой точек на поверхности параллелепипеда.

Экстремальные значения *площади поверхности* параллелепипеда P были найдены Ю. Г. Никоноровым и Ю. В. Никоноровой в [7], где было доказано, что максимум площади поверхности достигается на параллелепипедах с соотношением длин ребер $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$, а для произвольных параллелепипедов выполняется соотношение $ab+ac+bc \leqslant \frac{1+2\sqrt{2}}{6}\,(D(P))^2$. Минимум в данном случае, очевидно, равен 0 и достигается в точности на (вырожденных) параллелепипедах со свойством $a = b = 0$.

Для нахождения оставшихся неисследованных экстремальных значений (интеграла средней кривизны и объема) были проведены предварительные расчеты в математической системе Maple. При создании алгоритмов использовались формулы для расчета геодезического диаметра произвольного прямоугольного параллелепипеда, полученные Ю. Г. Никоноровым и Ю. В. Никоноровой в [7].

Применение математического моделирования в системе аналитических вычислений Maple (или других подобных системах) позволяет проверить различные предположения, возникающие при решении геометрических задач, и когда экспериментальные данные либо подтверждают выдвинутые гипотезы, либо подсказывают какие-либо пути решения, уже можно выстраивать теоретические обоснования полученных численных результатов. Кроме того, численное решение можно получить и для тех задач, для которых аналитического решения нет.

Таким образом, применяя математическое моделирование в системе аналитических вычислений Maple, а также результаты работы [7], было получено полное решение вышеприведенной задачи.

В [3] были найдены экстремальные значения для *интеграла средней кривизны* параллелепипеда P с заданным геодезическим диаметром $D(P)$. Наибольшее значение

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ, проект № НШ-921.2012.1, а также Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 8206.

интеграла средней кривизны достигается в точности на параллелепипедах с соотношением длин ребер $a : b : c = 0 : 1 : 1$, а наименьшее — на параллелепипедах с соотношением длин ребер $a : b : c = 0 : 0 : 1$. Таким образом, для произвольного прямоугольного параллелепипеда справедливо неравенство $\pi D(P) \leqslant \pi(a + b + c) \leqslant \pi\sqrt{2}D(P)$.

В работе [4] исследованы экстремальные значения *объема* параллелепипеда P с заданным геодезическим диаметром $D(P)$. Очевидно, что минимум равен 0 и достигается в точности на (вырожденных) параллелепипедах при $a = 0$. Наибольшее значение объема достигается в точности на параллелепипедах с соотношением длин ребер $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$. Таким образом, для произвольного прямоугольного параллелепипеда выполнено неравенство $abc \leqslant \frac{1}{6\sqrt{3}} \left(D(P)\right)^3$.

Литература

1. *Вялый М. Н.* Кратчайшие пути по поверхности параллелепипеда // Мат. просв. Сер. 3, 9.—М.: Изд-во МЦНМО, 2005.—С. 203–206.
2. *Никоноров Ю. Г., Никонорова Ю. В.* О внутреннем расстоянии на поверхности параллелепипеда // Тр. Рубцовского индустр. ин-та.—2000.—Т. 9.—С. 222–228.
3. *Рассказова Н. В.* Экстремальные значения интеграла средней кривизны на множестве параллелепипедов с заданным геодезическим диаметром // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, вып. 2.—С. 79–83.
4. *Рассказова Н. В.* Экстремальные значения объема на трехмерных параллелепипедах с заданным геодезическим диаметром // Владикавк. мат. журн.—(В печати).
5. *Сантало Л. А.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности.—М.: Наука, 1983.—360 с.
6. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.—М.: Наука, 1966.—416 с.
7. *Nikonorov Yu. G., Nikonorova Yu. V.* The intrinsic diameter of the surface of a parallelepiped // Discrete and Computational Geometry.—2008.—Vol. 40.—P. 504–527.

ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО[1]

Е. Д. Родионов (Россия, Барнаул; АлтГУ),
М. В. Куркина (Россия, Ханты-Мансийск; ЮГУ),
В. В. Славский (Россия, Ханты-Мансийск; ЮГУ)

В модели Клейна пространству Лобачевского соответствует внутренность шара, выпуклые подмножества совпадают с обычными выпуклыми подмножествами единичного шара, тем не менее выпуклая геометрия пространства Лобачевского в аналитическом плане более содержательна. В частности произвольному компактному выпуклому подмножеству Q можно естественным образом сопоставить конформно-плоскую метрику $ds^2 = \frac{dx^2}{h_Q^2(x)}$, $x \in R^{n-1}$ определенную на $\overline{R^{n-1}}$ и ограниченной одномерной секционной кривизны [1]:

$$-\frac{\kappa}{2} \leqslant h_Q \frac{d^2 h_Q}{d\xi^2} - \frac{1}{2}|\nabla h_Q|^2 \leqslant \frac{\kappa}{2}, \tag{1}$$

где f — положительная функция класса C^1, ∇f — градиент функции f удовлетворяющий условию Липшица, $\frac{d^2 f}{d\xi^2}$ — вторая производная функции f в смысле Ф. Кларка [2] вдоль единичного вектора $\xi \in R^{n-1}$, κ — кривизна пространства Лобачевского. В данной работе такие метрики называются опорными функциями выпуклого множества Q. В случае конечного выпуклого многогранника пространства Лобачевского справедлива формула

$$h_Q(x) = \min_i \{h_{\triangle_i}(x)\}, \tag{2}$$

где $h_{\triangle_i}(x)$ — опорные функции $(n-1)$-мерных граней границы Q. Вычисление функций $h_{\triangle_i}(x)$ происходит рекуррентно и сводится к случаю, когда $\triangle_i$ k-мерные симплексы $(k < n)$. Такие функции будем называть элементарными конформными сплайнами [3].

В отличии от обычных сплайн функций, представление (2) функции $h_Q(x)$ конформно-плоскими сплайн функциями имеет другую природу, здесь не требуется указывать область определения $h_{\triangle_i}(x)$. Функция $h_Q(x)$ имеет гладкость $C^{1,1}$ и любую функцию класса $f \in C^1$ можно сколь угодно точно приблизить функцией $h_Q(x)$ вида (2) в норме пространства C^1 на компактном подмножестве (при достаточно большом κ).

Явная формула (2) для функции $h_Q(x)$ позволяет упростить вычисление и сделать его более эффективным: не нужно разбивать область определения функции и можно использовать параллельные алгоритмы для вычисления элементарных сплайнов $h_{\triangle_i}(x)$. В работе с помощью пакета Mathematica исследуются свойства $h_{\triangle_i}(x)$

Литература

1. *Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Однородные пространства: теория и приложения.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
2. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ.—М.: Наука, 1988.—260 с.
3. *Куркина М. В., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Численные методы интерполяции для решения некоторых задач выпуклой геометрии в пространстве Лобачевского // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика.—2013.—(В печати).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ, проект № 12-12-22000-а(р), а также Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 8206.

ПРИМЕНЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ГРУПП ЛИ С ЛЕВОИНВАРИАНТНОЙ РИМАНОВОЙ МЕТРИКОЙ[1]

Е. Д. Родионов (Россия, Барнаул; АлтГУ),
В. В. Славский (Россия, Ханты-Мансийск; ЮГУ),
О. П. Хромова (Россия, Барнаул; АлтГУ)

В настоящее время широко распространено применение универсальных математических систем при решении научно-исследовательских задач. Это связано с тем, что пакеты прикладных программ позволяют, с помощью разработанных и реализованных в их среде компьютерных моделей, проводить не только численные, но и символьные вычисления. В геометрии и анализе существует множество примеров, подтверждающих эффективность использования пакетов аналитических расчетов при доказательстве теорем [1, 2].

В данной работе представлены алгоритмы и компьютерные модели для исследования тензора кривизны, оператора кривизны и его спектра в случае 4-мерных римановых многообразий; тензора Вейля, автодуальной и антиавтодуальной составляющих тензора Вейля в случае левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли.

Литература

1. *Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Однородные пространства: теория и приложения: монография.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
2. *Хромова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В.* О компонентах разложения тензора кривизны на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.—Saarbruken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012.—76 с.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ, проект № НШ-921.2012.1, Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 8206, а также программы стратегического развития ФГБОУ ВПО АлтГУ на 2012–2016 гг. «Развитие Алтайского государственного университета в целях модернизации экономики и социальной сферы Алтайского края и регионов Сибири» (мероприятие «Конкурс грантов» № 2012.312.2.3).

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ СИММЕТРИЧНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

В. И. Субботин (Россия, Новочеркасск; ЮРГТУ (НПИ))

Будем говорить, что ось симметрии замкнутого выпуклого многогранника в трчхмерном евклидовом пространстве *проходит через грань* многогранника, если она перпендикулярна этой грани. Грань, через которую проходит ось симметрии многогранника будем называть симметричной; в противном случае — несимметричной. Симметричную грань F многогранника будем называть *изолированной*, если все грани, входящие в звезду F, т. е. соседние с F по ребру, несимметричны. Если в многограннике каждая симметричная грань изолирована, то будем говорить, что замкнутый выпуклый многогранник в трехмерном евклидовом пространстве является *многогранником с изолированными симметричными гранями* Ранее [1] автором были рассмотрены многогранники с изолированными *несимметричными* гранями. В настоящей работе найдена точная верхняя оценка числа граней многогранников с изолированными симметричными гранями при некотором естественном условии. Без этого условия многогранник с изолированными симметричными гранями может иметь как угодно большое число граней.

Теорема. *Пусть каждая несимметричная грань многогранника с изолированными симметричными гранями входит в звезду только одной симметричной грани и пусть в звезде каждой несимметричной грани найдется еще только одна несимметричная грань звезды другой симметричной грани. Тогда максимально возможное число граней такого многогранника равно* 422.

Заметим, что многогранники с изолированными симметричными гранями не являются метрически двойственными к многогранникам с изолированными несимметричными гранями.

Литература

1. *Субботин В. И.* Симметричные многогранники с изолированными несимметричными гранями // Тр. участников междунар. школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова.—Ростов-на-Дону, 2008.—С. 74–75.

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО СЛОЯ[1]

П. С. Углич (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Рассмотрены прямая и обратная задачи о вынужденных колебаниях неоднородного упругого слоя. Считается, что механические характеристики слоя, его упругие модули и плотность, являются функциями поперечной координаты. Прямая задача после применения преобразования Фурье сведена к краевой задаче для канонической системы линейных дифференциальных уравнений. Полученная задача может быть численно решена методом пристрелки для любого закона распределения механических параметров.

После отыскания решения в трансформантах для построения решения задачи следует обратить преобразование Фурье. Для отыскания интегралов Фурье предложены два способа. Первый основан на непосредственном численном отыскании интеграла Фурье, второй — на теории вычетов. Приведен ряд численных примеров расчетов волновых полей в упругом слое для плоских и антиплоских колебаний. Произведено сравнение результатов работы двух методов друг с другом, а также с известными аналитическими результатами для однородного слоя.

Далее рассматривается обратная задача об определении неоднородных механических характеристик по данным о волновом поле на отрезке верхней поверхности слоя. Залача сведена к решению итеративной последовательности интегральных уравнений для определения поправок к неизвестным функциям распределения механических характеристик. Приведены численные примеры решения обратной задачи, указаны наиболее благоприятные для решения обратной задачи диапазоны частот.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00196.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА РАЗЛИЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ОГРАНИЧЕННОМ АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ[1]

Ю. С. Федяев (Россия, Орел; ОГУ)

Плоскопараллельную стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости в недеформируемом анизотропном однородном слое пористой среды постоянной толщины с тензором проницаемости K описывают обобщенный потенциал φ и функцией тока ψ. Они удовлетворяют в области фильтрации D системе уравнений [1]:

$$v_x = K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Здесь x, y — декартовы координаты в плоскости основания слоя, v_x, v_y — проекции скорости фильтрации. Компоненты тензора проницаемости K_{ij}, $i, j = 1, 2$, — постоянные величины.

Поставим двумерную задачу эволюции границы раздела жидкостей Γ_t на комплексной плоскости $z = x+iy$ (физической плоскости). Область фильтрации D ограничивает контур питания L_1 или непроницаемая граница L_2, которые в общем случае будем обозначать L. Граница L является прямой линией, которая совпадает с осью Ox. Течение жидкости происходит в верхней полуплоскости ($y > 0$). На границе L_1 должно выполняться условие

$$\varphi^+(z,t) = \text{const}, \quad z \in L_1, \tag{2}$$

а на L_2 — условие

$$\psi^+(z,t) = \text{const}, \quad z \in L_2. \tag{3}$$

Здесь и далее «+» («−») означает предельное значение функции при подходе к границе со стороны (с противоположной стороны) орта нормали к ней. Нормаль направлена внутрь области D.

Граница Γ_t делит область фильтрации D на части D_1 и D_2. В области D_1 движется жидкость вязкости μ_1 и плотности ρ_1, а в области D_2 — жидкость вязкости μ_2 и плотности ρ_2. Полагаем, что при движении одна жидкость полностью замещает другую и на границе раздела жидкостей капиллярные силы пренебрежимо малы. Тогда условия непрерывности давления и расхода жидкости на этой границе имеют вид:

$$\begin{gathered} \mu_1\varphi^+(z,t) - \mu_2\varphi^-(z,t) = (\rho_2 - \rho_1)\Pi(z,t), \\ \psi^+(z,t) = \psi^-(z,t), \quad z \in \Gamma_t, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\Pi(z,t)$ — потенциал массовой силы. Нормаль направлена в D_1.

Положение границы Γ_t на плоскости z в любой момент времени $t > 0$ задаем параметрическим уравнением (s — параметр)

$$z = z(t,s) \quad (x = x(t,s),\ y = y(t,s)), \quad z \in \Gamma_t. \tag{5}$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение границы Γ_t известно

$$z_0 = z(0,s) \quad (x_0 = x(0,s),\ y_0 = y(0,s)), \quad z \in \Gamma_0. \tag{6}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-97522 р_центр_а.

Дифференциальные уравнения движения границы Γ_t имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_t. \tag{7}$$

Таким образом, задано положение границ Γ_0, L, тензор проницаемости K. Необходимо найти положение границы Γ_t (5) при $t > 0$. Решение задачи состоит в интегрировании системы уравнений (1), (7) с учетом граничных условий (2)–(4) и начальных условий (6).

Поставленная задача решается на вспомогательной плоскости [1]. Граница L учитывается с помощью теоремы сопряжения на прямой. Тогда задача сводится к решению системы интегрального уравнения и дифференциальных уравнений движения границы Γ_t.

Для исследования эволюции границы раздела жидкостей построен численный алгоритм на основе метода дискретных особенностей. С его помощью изучено влияние анизотропии грунта, различия физических свойств жидкостей на движение границы Γ_t.

Литература

1. *Пивень В. Ф.* Исследование граничных задач плоскопараллельных течений жидкости в анизотропной пористой среде // Диф. уравнения.—2009.—Т. 45, № 9.—С. 1286–1297.

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕРМОАНЕМОМЕТРА ПОСТОЯННОГО ТОКА

Ю. Б. Ханжонков (Россия, Шахты; ЮРГУЭС),
В. В. Семенов (Россия, Шахты; ЮРГУЭС),
Ю. Г. Асцатуров (Россия, Шахты; ЮРГУЭС),
В. Г. Фетисов (Россия, Шахты; ЮЭРГУЭС, ЮМИ)

Авторами разработана методика расчета статических характеристик термоанемометра постоянного тока, оснащенного проволочным датчиком.

Перегрев нити датчика относительно исследуемого газового потока является важным параметром термоанемометра, так как без перегрева нити термоанемометр вообще не может работать. Выведена формула для расчета перегрева нити датчика

$$\Delta\Theta = \frac{I_{\text{н}}^2 R_{\text{н}0}(1+\alpha\Theta_{\text{в}})}{A+BV^n - I_{\text{н}}^2 R_{\text{н}0}\alpha}, \tag{1}$$

где $R_{\text{н}}$ — сопротивление нити датчика; $R_{\text{н}0}$ — сопротивление нити датчика при температуре 0°C; α — температурный коэффициент сопротивления нити датчика при температуре 0°C; $\Delta\Theta = \Theta_{\text{н}} - \Theta_{\text{в}}$ — перегрев нити датчика; $\Theta_{\text{н}}$ — температура нити датчика; $\Theta_{\text{в}}$ — температура исследуемого газового потока; V — скорость исследуемого газового потока; $I_{\text{н}}$ — ток, протекающий по нити датчика ($I_{\text{н}} = \text{const}$); A, B, n — постоянные коэффициенты.

Как следует из выражения (1) максимальный перегрев нити наблюдается при нулевой скорости исследуемого потока. Максимальный перегрев нити датчика зависит от величины электрического тока, протекающего через нить. По формуле (1) можно определить значения максимального и минимального перегрева нити в диапазоне измеряемых скоростей потока.

При разработке термоанемометра постоянного тока важным является выбор максимальной температуры нити датчика, а, следовательно, и ее перегрева. Для обеспечения стабильности тарировочных характеристик термоанемометра максимальную температуру нити датчика выбирают на порядок меньше температуры плавления нити. Минимальная температура нити датчика выбирается из условия допустимой минимальной чувствительности термоанемометра по формуле (6).

Как видно из равенства (1), перегрев нити являются нелинейной функцией протекающего по ней тока с разрывом в точке

$$I_{\text{э}} = \sqrt{\frac{A+BV^n}{R_{\text{н}0}\alpha}}, \tag{2}$$

где перегрев нити стремится к бесконечности, что приводит к ее перегоранию. Как следует из выражения (2), положение точки экстремума $I_{\text{э}}$ пропорционально скорости исследуемого газового потока. Если в выражении (2) скорость потока V приравнять к нулю, то минимальное экстремальное значение тока нити будет равно

$$I_{\text{э мин}} = \sqrt{\frac{A}{R_{\text{н}0}\alpha}}. \tag{3}$$

Рабочий ток нити следует выбирать с некоторым запасом меньше тока, рассчитанного по формуле (3), т. е.

$$I_{\text{н}} = \frac{I_{\text{э мин}}}{k} = \sqrt{\frac{A}{k^2 R_{\text{н}0}\alpha}}, \tag{4}$$

где k — коэффициент запаса.

В термоанемометре, работающего в режиме постоянного тока, выходное напряжение измерительного моста с током нити и параметрами моста связано следующим соотношением

$$U_{\text{вм}} = I_{\text{н}} \left[\frac{R_{\text{з}} R_{\text{c}}}{R_{\text{з}} + R_{\text{в}}} - \frac{R_{\text{н}0} R_{\text{в}} (A + BV^n)(1 + \alpha Q_{\text{в}})}{(R_{\text{з}} + R_{\text{в}})(A + BV^n - I_{\text{н}}^2 R_{\text{н}0} \alpha)} \right], \tag{5}$$

где $R_{\text{з}}$, R_{c}, $R_{\text{в}}$ — сопротивления резисторов измерительного моста.

С помощью формулы (5) можно рассчитать значение выходного напряжения термоанемометра постоянного тока в зависимости от нагревающего нить тока, скорости потока и температуры воздуха в потоке.

Чувствительность термоанемометра постоянного тока к скорости воздуха можно определить, вычислив значение производной выходного напряжения по скорости потока

$$S_v = \frac{\partial U_{\text{вм}}}{\partial V} = \frac{I_{\text{н}}^3 R_{\text{н}0}^2 R_{\text{в}} \alpha (1 + \alpha \Theta_{\text{в}}) n B V^{n-1}}{(R_{\text{в}} + R_{\text{з}})(A + BV^n - I_{\text{н}}^2 R_{\text{н}0} \alpha)^2}. \tag{6}$$

В результате анализа формулы (6) можно сделать вывод, что если n<1, то прибор обладает максимальной чувствительностью при нулевой скорости потока. При увеличении скорости чувствительность S_v уменьшается по гиперболическому закону. Увеличение чувствительности прибора при большой скорости потока можно обеспечить путем повышения тока нити. При этом необходимо учитывать, что ток не должен превышать значения, рассчитанного по формуле (4).

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ MAPLE ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАТОРА РИЧЧИ РАЗРЕШИМЫХ МЕТРИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ[1]

М. С. Чебарыков (Россия, Рубцовск; РИИ АлтГТУ)

В теории метрических алгебр Ли представляет интерес задача нахождения необходимых и достаточных условий того, что оператор Риччи произвольного скалярного произведения на заданной разрешимой алгебре Ли имеет не менее n ($n \geqslant 1$) отрицательных собственных значений.

Результаты работ Дж. Милнора и Г. Йенсена [1, 2] показывают, что разрешимой метрической алгебре Ли достаточно быть неунимодулярной, чтобы оператор Риччи имел по крайней мере одно отрицательное собственное значение для любого скалярного произведения.

А. Г. Кремлев и Ю. Г. Никоноров в работе [3] выдвинули гипотезу о том, что оператор Риччи произвольной неунимодулярной разрешимой метрической алгебры Ли имеет не менее двух отрицательных собственных значений. Для доказательства этой гипотезы был использован ряд неравенств, основанный на матричном представлении оператора Риччи метрических алгебр Ли [3–5].

Работа с такими объектами для каждого исследуемого класса алгебр Ли по отдельности связана с серьезными техническими трудностями. Во многом разрешить их помогает применение системы компьютерной алгебры Maple. Наличие в Maple широкого класса стандартных математических функций и множества команд для корректного представления результатов вычислений позволяет упростить расчеты и свести к минимуму рутинную работу, оставив больше времени на непосредственное доказательство необходимых утверждений.

В частности, были доказаны:

Теорема 1 [5]**.** *Пусть $(\mathfrak{s}, Q)$ — вполне разрешимая метрическая алгебра Ли. Тогда выполняется одно из трех взаимоисключающих утверждений:*

1. *Алгебра Ли $\mathfrak{s}$ коммутативна (оператор Риччи нулевой).*

2. *Алгебра Ли $\mathfrak{s}$ является прямой суммой алгебр Ли $\mathfrak{s}_1$ и $\mathfrak{s}_2$ и при этом выполнены следующие условия: $Q(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2) = 0$; алгебра Ли $\mathfrak{s}_2$ абелева; алгебра Ли $\mathfrak{s}_1$ имеет коммутативную производную алгебру $\mathfrak{n}$ коразмерности 1, причем любой нетривиальный вектор X из Q-ортогонального дополнения к $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{s}_1$ таков, что оператор присоединенного действия $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{s}_1 \to \mathfrak{s}_1$ нетривиален, симметричен относительно Q и имеет нулевой след (оператор Риччи имеет одно отрицательное собственное значение, тогда как остальные его собственные значения нулевые);*

3. *Оператор Риччи метрической алгебры Ли $(\mathfrak{s}, Q)$ имеет не менее двух отрицательных собственных значений.*

Теорема 2 [5]**.** *Пусть $\mathfrak{s}$ — неунимодулярная вполне разрешимая алгебра Ли. Тогда для произвольного скалярного произведения Q на $\mathfrak{s}$ оператор Риччи метрической алгебры Ли $(\mathfrak{s}, Q)$ имеет не менее двух отрицательных собственных значений.*

Применение Maple позволило получить ряд других результатов для унимодулярных, в частности нильпотентных, метрических алгебр Ли [3–5]. Дальнейшие исследования в данной области позволят сформулировать необходимые условия существования

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ, проект № НШ-921.2012.1, а также Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 8206.

трех и более отрицательных собственных значений у оператора Риччи произвольной метрической алгебры Ли.

Литература

1. *Jensen G.* The scalar curvature of left invariant Riemannian metrics // Indiana Univ. Math. J.—1971.—Vol. 20.—P. 1125–1143.
2. *Milnor J.* Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math.—1976.—Vol. 21.—P. 293–329.
3. *Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. тр.—2009.—Т. 12, № 1.—С. 40–116.
4. *Чебарыков М. С.* О кривизне Риччи неунимодулярных разрешимых метрических алгебр Ли малой размерности // Мат. тр.—2010.—Т. 13, № 1.—С. 186–211.
5. *Никоноров Ю. Г., Чебарыков М. С.* Оператор Риччи вполне разрешимых метрических алгебр Ли // Мат. тр.—2012.—Т. 15, № 2.—С. 146–158.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ КРИВЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

И. С. Чупров (Россия, Воронеж; ВИ МВД РФ)

Кривые второго и более высоких порядков относятся к числу основных математических понятий. История их изучения насчитывает почти три тысячи лет. Известно, какую важную роль играют кривые линии при решении огромного числа задач. В последнее время появились новые приложения теории кривых к задачам описания траекторий динамических систем, оптимизации и математического моделирования. Огромную роль играют плоские кривые и в компьютерной графике (например, кривые Безье).

Наиболее подробно и полно изучены кривые второго порядка, создана их законченная теория. Для кривых третьего и более высоких порядков, несмотря на ряд выдающихся результатов по их классификации (Ньютон, Плюккер, Клейн, Лориа), законченной теории не создано. Поэтому большую роль играет изучение отдельных кривых высокого порядка. В работе вводятся определения новых кривых на плоскости, обобщающих обычные кривые второго порядка. Эти классы кривых возникают как линии уровня для функций обобщенных расстояний. Стоит отметить, что нахождение допустимых параметров для построения и компьютерного моделирования функций обобщенных расстояний приводит к необходимости в различных ситуациях решать известные оптимизационные задачи на минимакс Ферма, Штернера, Вебера. Кроме простейших случаев явное аналитическое решение этих задач неизвестно, и для их решения требуются численные расчеты и методы компьютерного моделирования.

Отметим, что данная тематика связана со многими классическими задачами математики: задачей Ферма о нахождении точки Торричелли для треугольника, задачей Штернера о нахождении минимаксной точки в многоугольнике, задачей о построении минимальной сети Штернера на графах, задачей Вебера о минимизации функции обобщенного расстояния. Все эти задачи имеют многочисленные приложения, например, при конструировании микросхем, оценке пропускной способности информационных потоков и оптимизации их характеристик, в математической экономике.

Рассмотрим обобщения коник - кривых второго порядка на плоскости, на случай нескольких эллипсов или директрис.

Определение 1. Пусть на плоскости заданы n точек $F1, F2, \ldots, Fn$. Обобщенным эллипсом с фокусами в данных точках $F1, F2, \ldots, Fn$ называется множество точек, сумма расстояний от которых до фокусов есть величина постоянная.

Аналогично можно обобщить понятия гиперболы и параболы на случай нескольких фокусов или директрис.

Рассмотренные случаи являются специальными вариантами достаточно общей конструкции.

Определение 2. Пусть на плоскости задано произвольное количество n множеств любой природы. Обобщенным расстоянием на плоскости называется величина, равная сумме произвольного набора метрик от заданной точки до данных множеств.

Обобщенными кривыми будут являться линии уровня для функции обобщенного расстояния. Частными случаями, когда фиксированные множества—это точки (фокусы) или прямые (директрисы) являются упомянутые выше определения обобщенных эллипсов, гипербол и парабол.

При изучении введенного понятия линий уровня для обобщенных расстояний возникают несколько достаточно трудных задач, лишь малая часть которых может быть решена аналитически, а большинство требуют для своего решения использования численных методов и компьютерного моделирования.

Задача 1. Аналитическое описание полученных кривых и явное аналитическое определение их числовых характеристик.

Задача 2. Определение допустимых параметров в определении линий уровня для обобщенных расстояний.

Задача 3. Визуализация введенных кривых методами математического моделирования и компьютерной графики.

Для решения задачи 1 прежде всего следует получить рациональные уравнения кривых. Эта сложная и не всегда разрешимая задача. Введенные кривые после их рационализации имеют достаточно высокий порядок. Поэтому они очень сложны для исследования. Нами изучен ряд частных случаев.

ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕДУРЫ РЕКОНСТРУКЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ СВОЙСТВ ВЯЗКОУПРУГИХ СЛОИСТЫХ СРЕД[1]

О. В. Явруян (Россия, Ростов-на-Дону; ЮМИ),
И. В. Богачев (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Одной из важных проблем механики деформируемого твердого тела является задача надежного определения механических свойств объекта исследования (ОИ) по некоторой косвенной информации об отклике ОИ на механическое воздействие. Эти задачи выделяются в отдельный класс обратных коэффициентных задач и имеют приложения во многих областях науки и техники.

Стоит отметить, что поведение многих объектов (био-, гео- материалы, композиты, функционально-градиентные материалы) может быть описано моделями слоистых сред с существенно неоднородными свойствами.

При исследовании коэффициентных обратных задач для неоднородных слоистых структур основная проблема состоит в достаточно сложной процедуре построения операторных соотношений, связывающих искомые и измеряемые функции. Это обусловлено переменностью коэффициентов дифференциальных операторов и невозможностью построения в явном виде общих представлений решений для соответствующих операторов, как это имеет место для операторов с постоянными коэффициентами. В данной работе представлена схема, в которой восстанавливаемые функции связаны операторными соотношениями с интегральными характеристиками измеряемых функций.

Рассмотрена обратная коэффициентная задача о восстановлении неоднородных свойств ортотропной вязкоупругой слоистой среды по данным акустического зондирования верхней части границы слоя. Колебания носят установившийся характер и определяют плоскую деформацию. Механические характеристики среды представляют собой непрерывные функции координаты, меняющейся по толщине слоя.

Предложенная в работе [1] схема реконструкции развита для случая ортотропной неоднородной слоистой вязкоупругой среды в рамках принципа соответствия и концепции комплексных модулей. Учет вязкости позволяет более точно описывать поведение реальных сред, а также допускает практическую реализуемость задачи идентификации неоднородных свойств по интегральным характеристикам полей смещений, измеренным на всей верхней границе слоя.

Реконструкция свойств основана на предварительном сведении исходной двумерной краевой задачи к более простым одномерным задачам относительно усредненных характеристик полей смещений, которые описываются обыкновенными дифференциальными операторами второго порядка с непостоянными коэффициентами.

Последовательное исследование полученных задач позволяет поэтапно восстановить все неизвестные функции, характеризующие свойства среды.

Процедура реконструкции связана с применением к полученным задачам регуляризующих алгоритмов численного дифференцирования, итерационной регуляризации и методов численного исследования интегральных уравнений Фредгольма первого и второго родов.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 12-01-31501 мол-а, № 13-01-00196, а также Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 14.132.21.1358.

Составлена вычислительная программа решения обратной коэффициентной задачи, представлены результаты численных экспериментов по восстановлению неоднородных вязкоупругих свойств слоя для различных законов изменения (монотонные, немонотонные), осуществлен анализ влияния вязкости на процедуру реконструкции, выявлены наиболее эффективные режимы нагружения, доказывающие эффективность предложенного подхода.

Литература

1. *Ватульян А. О., Явруян О. В., Богачев И. В.* Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // Акуст. журн.—2011.—Т. 57, № 6.—С. 723–730.

Секция IV

Современные проблемы математического образования

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

РАЗВИТИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ РАСЧЕТНЫХ ПРОЕКТОВ

В. В. Богун (Россия, Ярославль; ЯГПУ)

В настоящее время проблема развития практического мышления студентов вузов является актуальной для формирования необходимых профессиональных компетенций учащихся с точки зрения будущей профессиональной деятельности. Мышление как вид умственной деятельности является опосредованным и обобщчнным отражением действительности, заключающийся в познании сущности вещей и явлений, закономерных связей и отношений между ними [1]. По характеру решаемых задач выделяют теоретическое и практическое мышление.

Теоретическое мышление строится на основе теоретических рассуждений и умозаключений с целью познания законов и правил окружающего мира. С точки зрения изучения математики теоретическое мышления подразумевает изучение аксиом, формулировку и доказательство теорем, а также их частных случаев, поэтому развитие теоретического мышления студентов вузов при изучении математики реализуется в рамках проведения лекционных аудиторных занятий.

Практическое мышление подразумевает мышление, выстроенное на основе суждений и умозаключений, реализуемых при решении практических задач. Основная задача практического мышления заключается в разработке средств практического преобразования действительности: постановка цели, создание плана, проекта с последующей реализацией необходимых операций.

С точки зрения изучения математики практическое мышление реализуется при решении теоретических и практических задач, подразумевающих применение изученных ранее аксиом и теорем в совокупности с необходимыми вычислительными и логическими операциями согласно разработанному для решения задачи алгоритму. Очевидно, что практическое мышление студентов вузов при изучении математики развивается как в рамках проведения практических и лабораторных аудиторных занятий, так и при реализации студентами самостоятельной учебной деятельности.

Согласно образовательным стандартам нового поколения самостоятельной работе студентов отводится существенный временной промежуток, однако отслеживать рациональное использование данного учебного времени учащимся не представляется возможным в силу отсутствия взаимосвязи между студентом и преподавателем. Очевидным выходом из данного положения является применение дистанционных систем обучения, однако их основным недостатком является проверка работоспособности студентов только с точки зрения проведения тестирования знаний, то есть реализации теоретического мышления, тогда как проверка его необходимых умений и навыков при решении практических задач, то есть применение практического мышления, практически отсутствует.

Для решения данной проблемы автором разработана и активно внедрена в процесс обучения математики студентов вузов дистанционная система динамических расчетных проектов [2, 3], которая позволяет заменить статические наборы тестовых заданий динамическими расчетными проектами, основанными на использовании необходимых программных алгоритмов. В рамках каждого расчетного проекта студент имеет возможность многократной корректировки ошибочно указываемых значений соответствующих расчетных коэффициентов с целью полноценного выполнения необходимых вычислительных и логических операций и, следовательно, развития практического мышления.

Литература

1. *Теплов Б. М.* Ум полководца.—М.: Педагогика, 1990.—208 с.
2. *Богун В. В.* Использование информационной динамической системы мониторинга дистанционных учебных проектов в обучении математике.—Канцлер, 2010.—136 с.
3. *Богун В. В.* Реализация расчетных проектов при организации дистанционного обучения математике // Компьютерные инструменты в образовании.—2011.—Вып. 6.—С. 33–37.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЗОЛОТОЙ ПРОПОРЦИИ

В. В. Богун (Россия, Ярославль; ЯГПУ)

При рассмотрении задач по математическому анализу иногда возникают ситуации, которые приводят к невозможности точного решения задачи аналитическими методами (например, решение алгебраических и трансцендентных уравнений или вычисление значений определенных «неберущихся» интегралов).

Для решения подобных задач применяют различных численные методы, которые подразумевают использование необходимых оптимизационных алгоритмов поиска значений определенных параметров при реализации нескольких итераций или шагов [1].

В качестве одного из численных методов решения задач по математическому анализу может выступать метод золотой пропорции, приводящий в большинстве случаев к получению как более высокой точности вычислений, так и минимизации количества итераций [2].

Суть золотой пропорции, изображенной на рис. 1, состоит в следующем: если разделить отрезок C на отрезки A и B таким образом, что это будет отражать золотую пропорцию, то A, деленное на B, будет равно C, деленному на A.

Символьная запись: $\frac{C}{A} = \frac{A}{B} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989$.

Действительно, пусть $\frac{C}{A} = \frac{A}{B} = X$.

Так как $A + B = C$, т. е. $\frac{A}{A} = \frac{B}{A} = \frac{C}{A}$, то получим квадратное уравнение: $1 + \frac{1}{X} = X \Rightarrow X^2 - X - 1 = 0$.

Положительный действительный корень квадратного уравнения (золотое число): $X = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989$.

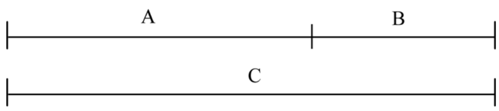


Рис. 1. Золотая пропорция.

Метод золотой пропорции [2] может быть использован, например, при решении алгебраических и трансцендентных уравнений вида $f(x) = 0$ с целью определения приближенного значения изолированного действительного корня x_ε на отрезке $[x_{A0}, x_{B0}]$ с необходимой точностью ε.

Если рассмотреть отрезок $[x_{A0}, x_{B0}]$ с условиями $x_{A0} < x_{B0}$ и $f(x_{A0}) \cdot f(x_{B0}) < 0$, на котором следует осуществлять нахождение приближенного значения изолированного действительного корня x_n, то метод золотой пропорции для решения данной задачи имеет следующую реализацию с точки зрения N-го шага:

1. На искомом отрезке $[x_{A0}, x_{B0}]$ при соблюдении условий $x_{A0} < x_{B0}$ и $f(x_{A0}) \cdot f(x_{B0}) < 0$ выбираются точки с абсциссами x_{C0} и x_{D0}, исходя из неравенства $x_{A0} < x_{C0} < x_{D0} < x_{B0}$, в соответствии с принципами золотой пропорции, согласно следующим соотношениям:

$$x_{C0} = x_{A0} + \frac{x_{B0} - x_{A0}}{\varphi^2} = x_{B0} - \frac{x_{B0} - x_{A0}}{\varphi},$$
$$x_{D0} = x_{A0} + \frac{x_{B0} - x_{A0}}{\varphi} = x_{B0} - \frac{x_{B0} - x_{A0}}{\varphi^2}.$$

2. Осуществляется анализ полученных данных:

2.1. Если $f(x_{A0}) \cdot f(x_{C0}) < 0$, то $x_{A1} = x_{A0}$ и $x_{B1} = x_{C0}$.

2.2. Если $f(x_{C0}) \cdot f(x_{D0}) < 0$, то $x_{A1} = x_{C0}$ и $x_{B1} = x_{D0}$.

2.3. Если $f(x_{D0}) \cdot f(x_{B0}) < 0$, то $x_{A1} = x_{A0}$ и $x_{B1} = x_{B0}$.

3. Если достигнута истинность выражения $|x_{B0} - x_{F0}| \leqslant \varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon = 0$ и в качестве приближенного решения уравнения выбирается абсцисса $x_\varepsilon = x_{A0}$.

4. Если $|x_{B0} - x_{F0}| > \varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Таким образом, метод золотой пропорции может успешно использоваться при решении алгебраических и трансцендентных уравнений, а также других задач по математическому анализу.

Литература

1. *Исаков В. Н.* Элементы численных методов.—М.: Академия, 2003.—192 с.
2. *Богун В. В., Смирнов Е. И.* Лабораторный практикум по математике с графическим калькулятором.—Ярославль: Изд-во «Канцлер», 2010.—272 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ СОДЕРЖАНИЯ ЗАДАЧ ЧАСТИ С В ЕГЭ ПОСЛЕДНИХ ЛЕТ

В. Н. Дятлов (Россия, Новосибирск; НГУ)

Содержание ЕГЭ по математике в последние годы состоит из двух частей, одна из которых предназначена для проверки элементарных знаний, а вторая — более глубоких знаний и умений и имеет целью в том числе ответить на вопрос о готовности экзаменуемого к продолжению обучения по специальностям с углубленным изучением математики.

Проверке подлежат компетенции, относящиеся к простейшим стереометрическим конструкциям, преобразованиям алгебраических выражений, навыкам в решении уравнений, неравенств и их систем, способности проводить анализ в задачах с параметрами и, наконец, нестандартность мышления.

В стереометрических конструкциях проверяются умение обращаться с основными понятиями — расстоянием от точки до прямой, до плоскости, расстояние между прямыми в пространстве, угол между прямыми, между прямой и плоскостью и между плоскостями. Как правило, предлагаемые задачи связаны с правильными фигурами и допускают простое решения аналитическими методами. С этой стороны нельзя утверждать, что с их помощью можно проверить навыки испытуемых в решении именно стереометрических задач.

Задачи, связанные с уравнениями и неравенствами, проверяют широкий спектр навыков и умений, начиная от простейшего метода интервалов решения рациональных неравенств и до решения непростых логарифмических неравенств, причем, как правило, рассматривается система и при ее решении предполагается свободное владение техникой и повышенная внимательность в процессу решения.

Задачи по планиметрии устроены обычно так, что требуют рассмотрения нескольких ситуаций, то есть их решение разветвляется по крайней мере на два фрагмента. Однако представляется, что главная проблема не в том, чтобы увидеть и проанализировать все возможные случаи, а в том, чтобы найти путь решения хотя бы в одном из них. Причина этому — низкая технологичность в обучении решению планиметрических задач, отчасти связанная с большим их разнообразием, а отчасти с отсутствием в учебниках регулярных рекомендаций по анализу произвольной планиметрической задачи.

Наибольшее разнообразие средств и методов просматривается в задачах с параметрами. Здесь проверяются способности к логическим рассуждениям, использованию широкого спектра свойств функций, пониманию аналитического описания множеств на координатной плоскости, умению переформулировать задачу и многое другое. Отметим, что в последние годы упор делается на использовании свойств функций и их графиков, а также множеств на координатной плоскости. Чаще всего решение ориентировано либо на анализ ситуации на координатных плоскостях «переменная — параметр» и «переменная — значение», даже в тех случаях, когда в постановке задачи это явно не просматривается. Нередко решение становится возможным в результате формулировки условия в таких терминах, в которых можно применить функциональные средства. Надо отметить, что задачи по проверке умения решать уравнения и неравенства и их системы, а также задачи с параметрами отражают уровень подготовки школьника и умение решать такие задачи позволяет гарантировать, что испытуемый готов к продолжению образования в вузах с сильной программой по математике.

Все описанные наблюдения основаны на сборниках задач для подготовки к ЕГЭ последних лет [1–4].

Литература

1. *Высоцкий И. Р., Гущин Д. Д., Захаров П. И. и др.* Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ: Математика / ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко.— М.: АСТ: Астрель, 2010.—96 с.
2. *Высоцкий И. Р., Гущин Д. Д., Захаров П. И. и др.* Самое полное издание типовых вариантов заданий ЕГЭ: Математика / ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко.—М.: АСТ: Астрель, 2011.—96 с.
3. *Высоцкий И. Р., Гущин Д. Д., Захаров П. И. и др.* Самое полное издание типовых вариантов заданий ЕГЭ: Математика / ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко.—М.: АСТ: Астрель, 2012.
4. *Высоцкий И. Р., Гущин Д. Д., Захаров П. И. и др.* Самое полное издание типовых вариантов заданий ЕГЭ: Математика / ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко.—М.: АСТ: Астрель, 2013.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

К ВОПРОСУ О ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННОМ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ

М. В. Егупова (Россия, Москва; МПГУ)

В настоящее время, согласно новым стандартам общего образования, одним из важных направлений обучения математике в школе является его практическая ориентация, означающая необходимость формирования у школьников понимания роли математики в описании объектов окружающего мира, подготовки учащихся к использованию математических методов для решения широкого круга проблем.

Это направление обучения не является новым. Исторический анализ показывает, что изучение в школе прикладных аспектов математики традиционно для российского образования. Приложения математики в результате реформирования, трансформации образовательных целей то выступали на первый план, то выполняли вспомогательную роль в обучении. Для современного периода характерна тенденция к возрастанию роли практических приложений математики на всех ступенях общего образования, что проявляется как в целях, так и в содержании основных образовательных программ, итогового контроля.

Систематизируя результаты исследований по обучению школьников практическим приложениям математики, мы пришли к следующим выводам:

1. В ряде исследований выделяется содержательно-методологическая линия, связанная с реализацией прикладной направленности обучения математике. Однако детальной разработки этой линии или методики реализации практико-ориентированного обучения математике в школе мы не встретили.

2. Имеется большое количество исследований по обучению школьников математическому моделированию. Но описанные в них методики практически не нашли отражения в современной методической литературе для учителя.

3. В представлении системы школьных задач, называемых авторами практическими, прикладными, практико-ориентированными и т.п., есть ряд нерешенных проблем: не определены современные методические требования к таким задачам; требуется выделение их уровней сложности для использования в итоговом контроле; необходимо расширение представлений об этом классе задач в связи с довольно широким распространением исследовательских и проектных заданий прикладного характера; количество задач, в которых подлинно отражена связь математики и реальности в целом невелико, требуется их дополнение, осовременивание фабульного содержания.

4. Необходима организация специальной методической подготовки учителя к реализации практико-ориентированного обучения математике в школе, как в высшем педагогическом образовании, так и в системе повышения квалификации.

Поддерживая указанную образовательную тенденцию, считаем, что для успешного внедрения в школе практико-ориентированного обучения математике, требуется безотлагательное разрешение поставленных проблем. В первую очередь, необходимо выстраивание соответствующей методической системы подготовки учителя в бакалавриате и магистратуре по направлению «Педагогическое образование». Это позволит в обозримые сроки подготовить грамотные кадры и решить с их помощью перечисленные проблемы.

Литература

1. *Егупова М. В.* Прикладная направленность обучения математике в историческом контексте // Математика в школе.—2007.—№ 2.—С. 65–71.
2. *Егупова М. В.* Обучение созданию собственных образовательных продуктов при методической подготовке студентов к реализации линии практических приложений школьной математики // Педагогическое образование и наука.—2012.—№ 3.—С. 37–41.
3. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5–9 кл.) // Министерство образования и науки РФ.—URL: http:// минобрнауки.рф/документы/938 (дата обращения: 29.05.2013).

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ПРОБЛЕМЫ ПОНИМАНИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

Н. Д. Кучугурова (Россия, Москва; МПГУ)

В настоящее время в математическом образовании возникает множество проблем, особенно при изучении геометрии как в школе, так и в вузе. Уровень геометрических знаний остается низким несмотря на усиление геометрического материала в ГИА и ЕГЭ.

Одной из проблем является организация обучения математике, которая должна стать средством развития личности каждого школьника. И здесь огромная роль принадлежит геометрии, где практически нет алгоритмов, но имеются большие возможности для развития умения рассуждать, аргументировать и т. д. Однако учащиеся не используют эти богатые моменты обучения, так как не понимают их огромное значение. А причиной этого является непонимание геометрического материала. Проблема здесь кроется в нежелании большинства школьников понять сущность понятий и теорем геометрии, а понимание — непременное условие познания.

Понимание является одной из наиболее трудных и сложных проблем, механизмы которого рассматриваются на протяжении длительного времени, но так и остаются недостаточно решенными, поскольку процесс понимания является скрытым и зависит от многих факторов.

Понимание в широком смысле — это установление существенных связей или отношений между предметами реальной действительности посредством применения знаний. Понимание в узком смысле — это компонент мышления, состоящий в выявлении и разрешении скрытых (невыраженных) вопросов в проблемных ситуациях на основе использования имеющихся знаний и применения специальных приемов [2].

В геометрии очень тесные связи между изучаемым материалом, поэтому при его изучении необходим целый ряд преобразований известной информации, поиск старых связей и осуществление новых, что является проблемой для школьников, которые слабо владеют методами научного познания. И опять возникает проблема: как научить учащихся анализу, синтезу, аналогии и т.п. Геометрический материал предоставляет большие возможности, а результат зависит от мастерства учителя, который на собственном примере покажет, как надо работать с геометрическим материалом, убедить школьников, что необходимо вдуматься и понять суть изучаемого вопроса. Однако и здесь проблема: каждый ли учитель способен это сделать? Существует множество методических причмов, в том числе, инновационных, но учитель либо их не знает, либо не желает применять.

Проблема: как научить студента, чтобы он стал «понимающим» учителем и смог воспитать «понимающего» ученика?

Следующая проблема — понимание в решении задач, когда нужно «вызвать» познавательную потребность ученика, стимулировать высказывание своего мнения, научить оценить ситуацию в задаче, представить образы рассматриваемых фигур или тел. И только тогда «пойдет» развитие мыслительной деятельности школьника.

Таким образом, «начав понимание, мы тем самым делаем шаг в познании, и, наоборот, познание в той или иной мере предполагает понимание» [2].

Литература

1. *Коржавина Н. В.* Проблема понимания в образовании // Современные наукоемкие технологии.—2006.—№ 7.—С. 73–75.—(URL: www.rae.ru/snt/?section=content&op=show_article&article_id=2050).
2. *Коробов Е. Т.* Понимание как дидактическая проблема // Моск. психологический журн.—2005.—№ 11.—(URL: http://magazine.mospsy.ru/nomer11/s10.shtml).

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

УЧИМ И УЧИМСЯ ФОРМУЛИРОВАТЬ ВОПРОСЫ

И. Е. Малова (Россия, Брянск; БГУ)

Комиссией ЮНЕСКО (1997 г.) были обозначены основные принципы образования XXI века, которые образно сформулированы так: «научиться познавать, делать, жить, жить вместе». В основе каждого из четырех принципов лежит умение вести диалог с самим собой, а также результативно участвовать или соучаствовать в диалоге с другими. Чаще всего, начало и развитие диалога зависят от умения его участников задавать вопросы.

Актуальность умения формулировать вопросы усиливается введением новых образовательных стандартов в школах и вузах.

Представим три ситуации, в которых происходит обучение или самообучение формулированию вопросов.

Ситуация 1. Постановка учебных целей.

Поскольку цель — это планируемый результат, эффективность любой деятельности зависит от качества постановки ее целей.

Если говорить об учебном занятии, то к формулировке его целей предъявляется требование конкретности: в формулировке целей должны быть видны те результаты, которые планируется достичь на учебном занятии.

Включить обучающихся в постановку целей учебного занятия можно различными прием-заданиями:

• прочитайте тему занятия и сформулируйте вопросы, на которые, на ваш взгляд, будут найдены ответы на занятии;

• познакомьтесь со списком тех видов задач, решение которых предстоит освоить, и составьте список вопросов, на которые, на ваш взгляд, желательно ответить на занятии;

• познакомьтесь со списком целей, которые предстоит достичь, и сформулируйте вопросы, на которые надо будет знать ответы.

Ситуация 2. Анализ математического содержания.

В методике обучения математике выделен ряд закономерностей по работе с математическими определениями, правилами, теоремами, задачами, которые отражены в базовых методиках обучения математике (методики формирования понятий, умений, изучения теорем, обучения решению задач). Описание базовых методик и демонстрация примеров их реализации [1] включают вопросы, которые участникам процесса обучения необходимо научиться задавать, чтобы понять математическую информацию и успешно ее использовать в определенных ситуациях.

Пониманию текста с математической информацией помогает и прием-задание: «Составьте вопросы: а) на которые есть в данном тексте ответы; б) которые возникают в связи с прочитанным».

Выделить признаки понятия, отраженные в его определении, помогает прием промежуточных вопросов.

Важным вопросом, как для учащихся, так и для учителя является вопрос «Можно ли сделать по-другому (или есть ли иные математические (методические) варианты решения)?».

Есть ряд вопросов, ответы на которые являются методической задачей повышенного уровня сложности. Одним из таких вопросов является вопрос «Как догадаться, что нужно выполнить это действие (дополнительное построение, данное преобразование, выбрать именно эту формулу, рассмотреть именно эту фигуру и др.)?». Найденные ответы собираются в методические копилки приемов.

Важным при работе с математическим текстом является выделение приемов доказательства или решения задач, которые могут помочь при работе с другими математическими объектами. Выделенные приемы желательно обобщить в виде некоторых правил, чтобы удобнее было их использовать в иных ситуациях. Многократно повторяющиеся приемы относятся к элементам математической культуры.

Обогатить методический опыт учителя может анализ учебных текстов проекта «Математика. Психология. Интеллект» (Гельфман Э. Г., Холодная М. А.; издательство БИНОМ), авторский коллектив которых включает математиков, психологов и методистов высокого уровня. Методическому обогащению помогает вопрос «Почему авторы...?» (вопросы помогают выделить приемы, направленные на учет и обогащение интеллектуального опыта учащихся, а ответы на них углубляют понимание психологических и методических особенностей обучения математике).

Ситуация 3. Анализ процесса достижения целей.

Важным этапом учебного занятия считается этап подведения его итогов. Задача этого этапа состоит в обобщении изученного, возвращении к возникшим на занятии проблемам и конструировании выводов по разрешению этих проблем. Потому ключевыми вопросами данного этапа являются:

• Какова была тема занятия? (Выделяется центр, вокруг которого происходит подведение итогов).

• Что о... узнали? (Обобщается теоретическая информация занятия).

• Какие виды задач учились решать? Как они решаются? (Обобщается практическая информация занятия).

• С какими трудностями столкнулись? Какие приемы помогли их преодолеть? (Обобщается индивидуальный опыт обучающихся).

Распространенной в практике обучения бывает ситуация, когда при самостоятельной работе над задачей (дома или в аудитории) большинство обучающихся не справились с решением. Традиционным выходом из такой ситуации является демонстрация правильного решения. Более эффективным является прием, когда при самостоятельной работе над трудной задачей на черновиках записываются все вопросы диалога с самим собой и ответы на них, а потом анализируются вопросы, которые помогли или могли бы помочь найти решение.

Методическому анализу учебного занятия помогают вопросы:

1. «Почему учитель (преподаватель)...?» (Вопросы помогают выделить методические приемы обучающего, а ответы учат обоснованию его методических действий).

2. «Почему учащиеся (студенты)...?» (Вопросы помогают выявить ситуации успешности (неуспешности) обучающихся, а ответы — их причины).

Продемонстрировать все три представленные ситуации можно на примерах компьютерных презентаций, слайды которых включают как вопросы диалога с обучающимися, так и ответы на них.

Литература

1. *Малова И. Е., Горохова С. К., Малинникова Н. А., Яцковская Г. А.* Теория и методика обучения математике в средней школе.—М.: ВЛАДОС, 2009.—445 с.

ОБУЧЕНИЕ СТРАТЕГИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ С ПОМОЩЬЮ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Ю. Б. Мельников (Россия, Екатеринбург; УрГЭУ)

Основой системы управления учебной деятельностью по выполнению заданий по соответствующему учебному предмету (например, решения уравнений или составления чертежа к геометрической задаче) является *план деятельности*. Каждый пункт плана воспринимается исполнителем либо как ссылка на определенный алгоритм (или описание алгоритма), либо как описание цели без указания на конкретный способ ее достижения. Обычно преподаватели воспринимают в качестве идеального план, максимально близкий к описанию алгоритма. Вместе с тем план, основные пункты которого воспринимаются как описание целей, обычно компактнее и проще в восприятии, обладает большей гибкостью и универсальностью. Умение выполнять такие планы требует от исполнителя не только более глубоких знаний по учебному предмету, но и компетенций в области управления деятельностью, инициативности, интеллектуальной смелости, готовности предпринимать действия, чреватые ошибками, и, следовательно, умения обнаруживать и исправлять ошибки. Поэтому актуальной является задача обучения построению планов, т. е. умения применять стратегии деятельности, где под стратегией мы понимаем механизм создания эталонных моделей, в частности, создания планов деятельности, см. таблицу 1.

Таблица 1

Стратегия	**Реализация стратегии**	**План деятельности**	**Выполнение плана**
Механизм создания планов	Использование механизма создания планов	Модель деятельности — результат реализации стратегии	Деятельность, для которой план является эталонной моделью

В монографии [1] описана стратегия составления уравнений и стратегия решения геометрических задач «на вычисление», входящих в школьный курс математики. Возможно обучение реализации стратегии без детального изучения самой стратегии. Однако, как показал опыт, обучение реализации достаточно сложных стратегий весьма затруднительно. Одним из вариантов разрешения этой проблемной ситуации является применение алгебраического подхода к построению стратегий деятельности [2], который состоит в выделении трех компонентов: 1) системы базовых стратегий; 2) набора типовых преобразований; 3) механизма аппроксимирования.

При построении плана деятельности с использованием стратегии, реализуемой с помощью алгебраического подхода, механизм аппроксимации состоит в анализе ситуации, сложившейся в результате применения очередной базовой стратегии, и выборе базовой стратегии, которая будет наиболее перспективной в этой ситуации. Предполагается, что для каждой базовой стратегии заранее описаны условия, при которых применение этой стратегии является наиболее перспективным [2]. Как показывает опыт, применение алгебраического подхода позволяет добиться определенных успехов в обучении созданию планов деятельности даже в ситуациях, которые обычно воспринимаются только как поле для творческой деятельности. Например, к настоящему моменту описаны базовые стратегии рутинной (т. е. не использующей инсайт, озарение) исследовательской деятельности [3], рутинной проектной деятельности (результат получен нами совместно с И. В. Хрипуновым, А. Н. Белоусовым, В. С. Чоповда). Обучение исследовательской деятельности как комбинации применения базовых исследовательских стратегий реализовано, например, в [4].

Литература

1. *Мельников Ю. Б.* Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей.—Екатеринбург: Уральское изд-во, 2004.—384 с.
2. *Мельников Ю. Б.* Алгебраический подход к созданию учебных презентаций по математике // Образование и наука.—2011.—№ 5 (84).—С. 129–141.
3. *Мельников Ю. Б., Поторочина К. С.* Алгебраический подход к математическому моделированию и обучению математической и «предматематической» деятельности // Ярославский педагогич. вестн. Сер. Физ.-мат. и естеств. науки.—2010.—№ 3.—С. 19–24.
4. *Мельников Ю. Б.* Алгебра и теория чисел. Изд. 4-е, испр. и доп.—Екатеринбург: Изд-во УрГЭУ, 2012.—URL: http://lib.usue.ru/resource/free/12/MelnikovAlgebra4/index.html.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ИСТОРИЧЕСКИЕ, КРАЕВЕДЧЕСКИЕ И ФОЛЬКЛОРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НАРОДОВ РОССИИ

Н. И. Мерлина (Россия, Чебоксары; ЧувГУ),
А. Б. Ольнева (Россия, Астрахань; филиал МГУПС (МИИТ))

Большие возможности для развития интереса учащихся к математике имеют задачи, содержащие краеведческий и исторический материал. Использование на уроках математики таких задач дает возможность повысить познавательную активность детей.

Текстовая задача, составленная на основе местного числового материала, позволяет заинтересовать детей жизнью и историй своего региона, совершенствовать умения и навыки в решении математических задач через их конструирование, развивает познавательные интересы школьников, позволяет сделать обучение математике содержательным и интересным. Это положение прежде всего справедливо в отношении младших школьников 5–7-х классов, у которых еще мал математический опыт, и для них составление задач представляет серьезную творческую деятельность. В старших классах уровень составляемых задач конечно должен быть существенно выше, чем в младших классах.

Каждый исторический или иной культурный объект, описанный на языке гуманитарных наук, может послужить основой для математических задач разного типа в зависимости от математической квалификации ученика. Ученики младших классов, узнав, например, возраст тех или иных исторических деятелей, могут составить арифметическую задачу на сравнение возрастов по величине, старшеклассники могут составить то или иное уравнение, корнями которого являются примечательные даты из жизни этих деятелей или составить неравенство, решением которого служат примечательные промежутки жизни тех людей, которые их заинтересовали.

С другой стороны, в математических задачах есть гуманитарный аспект. У народов, имеющих сопредельные территорию или живущих на общей территории, или имеющих общую историческую судьбу встречаются задачи, разные по вербальной формулировке, но имеющие одинаковую математическую сущность. Гуманитарность проблемы может быть в выяснении исторических исходов сходства.

Каждая этническая группа, развиваясь веками в определенных географических, природно-климатических, социально-экономических условиях, создает не только своеобразную производственную общность людей, но и присущие ей быт, миропонимание, мышление. Дети должны чувствовать себя наследниками предшествующих поколений, трудом которых создано богатство страны. Поэтому необходимо приобщать детей к пониманию истории своего края, его природного своеобразия, коренных особенностей национальных культур, живших и живущих в России. Конструирование задач может в этом помочь.

Приведем примеры тем и задач, которые могут быть актуальны для работы со школьниками (тематика и задачи взяты из коллективной монографии [1]), содержание которых может послужить образцом для создания новых задач:

1. Краеведческие математические задачи Санкт-Петербурга.

2. Старинные русские математические задачи.

3. Математические задачи Л. Н. Толстого.

4. Занимательные задачи Л. Ф. Магницкого.

5. Краеведческие математические задачи г. Архангельска.

6. Геометрические преобразования плоскости и элементы декоративно-прикладного искусства Удмуртии.

7. Краеведческие математические задачи г. Астрахани и Астраханской области.

8. Приемы измерения площадей и объемов у народа Адыгеи. Бытовые предметы как источник восстановления архаических приемов счета времени (на примере адыгских жезлов из ореха).

9. Неопределенные уравнения в математическом фольклоре монгольских народов.

10. Задачи на краеведческом материале Якутии.

11. Математические задачи на краеведческом материале г. Алатыря (Чувашия).

12. Фольклорные математические задачи чувашей и т. д.

Все вышесказанное показывает необходимость создания учебных пособий, построенных на национальном, краеведческом и историческом материале. Такой литературы очень мало и она малодоступна, но тем ценнее первые попытки создания таких учебно-методических пособий.

Сборник [1] содержит большой набор задач по математике, составленных на основе краеведческого, исторического и фольклорного материала различных регионов России. Задачи могут быть использованы учителями математики при изучении многих тем по математике для 5–11-х классов средней общеобразовательной школы. Задачи составлены таким образом, что кроме математического содержания в них присутствуют и сведения познавательного характера.

Использование местного исторического материала в учебных целях обостряет внимание учащихся к фактам и явлениям действительности, помогает выработке собственных убеждений. Историческое прошлое как бы приближается к сознанию учащихся, становится для них реальной действительностью, заставляет более внимательно относиться к тому, что их окружает.

Для иллюстрации приведем несколько задач из этого сборника (номера задач соответствуют нумерации этих задач в сборнике).

Краеведческие математические задачи Астраханской области

Задача № 97. Некоторые виды уток во время линьки укрываются под листьями лотоса.

а) Каков диаметр листьев лотоса, если длина крыла утки 30 см, а ширина спинки утки 20 см во время размаха крыльев?

б) Каков диаметр цветка лотоса, если он составляет 37,5% от диаметра листа лотоса?

в) Семена лотоса прорастают через 100 и 200 лет. Сколько семян можно получить от одного стебля через 200 лет, если плод-кубышка содержит 15–20 орехов и каждый орех прорастет через 100 лет?

Задача № 98. Сайгак — самый древний представитель фауны в Астраханской области. Он — современник мамонта. В 1970 г. численность животных удалось восстановить до 700 тыс. особей. В настоящее время численность сайгаков уменьшилась на 98%. Определите численность сайгаков в настоящее время.

Краеведческие математические задачи г. Архангельска

Чувашские фольклорные задачи

Задача № 4. Поп с попадьей и работником отправились в соседнюю деревню. По дороге нашли кошелек. В нем оказалось много золотых денег, сколько — нельзя было точно сказать. Но, так как монеты были сложены десятками, то нетрудно было установить, что монет было больше ста, хотя и не было двухсот. Поп начал делить находку: сначала взял себе, потом дал жене, в последнюю очередь — работнику. Когда кончил делить, остаток попытался взять себе. Но это заметила попадья и начала делить сама. В конце дележа опять из-за последней монеты вышел спор.

«Я-то сумею правильно разделить», — сказал работник и начал дележ.

«Эта монета мне, а эта — тебе», — сказал он попу. Затем попадье: «Эта монета тебе, а эта мне». Так разделил все монеты до последней, без остатка. Такой дележ всем понравился. Особенно радовался работник. Почему? По сколько монет досталось каждому? (Записана в 1948 г. в Больших Яльчиках у Т. Я. Большакова, 1871 года рождения).

Литература

1. *Мерлина Н. И., Мерлин А. В., Карташова С. А. и др.* Фольклорные и краеведческие математические задачи народов России / Под общ. ред. Н. И. Мерлиной.—Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2012.—290 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тез. докл. международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

ФОРМИРОВАНИЕ САМООБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ У СТУДЕНТОВ РАЗЛИЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Н. И. Мерлина (Россия, Чебоксары; ЧувГУ),
А. Б. Ольнева (Россия, Астрахань; АГТУ)

О важности математического образования говорится в Указе Президента РФ от 7 мая 2012 № 599 «О мерах по реализации государственной политики в области образования и науки», где в пункте один указано: «Разработать и утвердить в декабре 2013 г. Концепцию развития математического образования в РФ на основе аналитических данных о состоянии математического образования на различных уровнях образования».

Среди ключевых идей в тексте обсуждаемой в настоящее время Концепции есть такие: математика является важным элементом национальной культуры, национальной идеи, предметом нашей гордости и конкурентным преимуществом России; в современном обществе каждый гражданин должен обладать необходимой математической компетентностью, формирование которой — задача образования; информационная, цифровая цивилизация, экономика, основанная на знании, требуют новых видов и уровней математической грамотности, культуры и компетентности от профессионалов; различные сегменты математического образования важны и взаимно необходимы. Различные подходы обучения молодого поколения (деятельностный, компетентностный, личностно-ориентированный и др.) выдвигают на первое место не информированность студента, а умения решать проблемы, возникающие в познании и объяснении явлений действительности: освоении современной техники и технологии; взаимоотношениях людей, оценке собственных поступков; рефлексии жизненных проблем; самоорганизации себя, выборе стиля и образа жизни; разрешении конфликтов.

Важным свойством каждого обучаемого является способность к самообразовательной деятельности. Однако считается, что обучить самообразовательной деятельности студента нельзя.

Умение самообразовательной деятельности обучаемый приобретает сам, найдя и апробировав различные модели поведения в конкретной предметной области, отобрав из них те, которые соответствуют его индивидуальному стилю, притязаниям, эстетическому вкусу и нравственным ценностям. Самообразовательная деятельность выступает в качестве сложного синтеза когнитивного, предметно-практического и личностного опыта, ее нельзя сформировать, давая обучаемому учебное задание или включая его «в деятельность», студенту самому следует пройти последовательность ситуаций, близких к реальности и требующих от него все более компетентных действий, оценок, рефлексии приобретаемого опыта. Природа самообразовательной деятельности такова, что являясь продуктом обучения, она не прямо вытекает из него, а является следствием саморазвития студента причем не столько «технологического», сколько личностного роста, целостной самоорганизации и синтеза своего деятельностного и личностного опыта. При этом профессиональная деятельность человека не предопределена на весь период его профессиональной карьеры, она предусматривает необходимость непрерывного образования, процесса постоянного повышения своей профессиональной компетентности.

Следует заметить, что самообразовательная деятельность студента бакалавриата и магистратуры с позиций деятельностно-компетентностного подхода проявляется как способность индивида в различных формах: высокая степень умений, способ личностной самореализации (привычка, способ жизнедеятельности, увлечение); некий итог саморазвития личности, форма проявления индивидуального стиля учебно-познавательной деятельности.

Овладевая каким-либо способом деятельности, обучаемый получает опыт присвоения деятельности, формируя свой персональный ресурсный пакет.

Отметим, что формирование самообразовательной деятельности возможно при включении студента в такой вид учебной деятельности, которая моделировала бы условия высокоэффективной профессиональной деятельности. Стандарты третьего поколения ставят перед педагогическими коллективами нелегкие задачи по формированию самообразовательной деятельности в связи с уменьшением аудиторной нагрузки, выделяя половину учебного времени на самостоятельную работу студента (а для этого нужна хорошая методическая поддержка и мониторинг), требуя проведение занятий в интерактивной форме, не менее 20% учебного времени, кроме того, каждый студент должен иметь доступ ко всем учебным материалам, в том числе и для самостоятельной работы.

ИЗ ОПЫТА ЧТЕНИЯ КУРСА «ИСТОРИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК» ДЛЯ МАТЕМАТИКОВ

В. П. Одинец (Россия, Сыктывкар; КГПИ)

Впервые курс «История компьютерных наук» был мной прочитан в 2000 г. в Польше в Зеленогурском университете на математическом факультете как на дневном отделении, так и на заочном. При этом основное внимание было уделено истории алгоритмов и искусственного интеллекта — всего 10 лекций. Позже эти лекции были дополнены материалом по истории «железа» и языков программирования. В России полный курс «Истории компьютерных наук» впервые мной был прочитан в Сыктывкарском госуниверситете для будущих магистров математики в 2010/2011 учебном году (90 часов лекций и 45 часов лабораторных и практических занятий). С весны 2011 г. циклы лекций по этому курсу регулярно читались мной и в Коми techнституте для будущих специалистов-заочников по математике и информатике.

Основной курс «Истории компьютерных наук» состоял из 9 разделов, соответствующих американской классификации «Computer Science»:

1. Вычислительная техника и архитектура компьютера;
2. Алгоритмы;
3. Искусственный интеллект;
4. Языки программирования;
5. Базы данных и информационно-поисковых систем;
6. Операционные системы;
7. Компьютерные сети, включая Internet;
8. Системы взаимодействия человека и компьютера (HCI);
9. Компьютерная графика [1].

В первом разделе внимание слушателей было обращено на неполноту стандартных периодизаций развития компьютерной техники. Новые факты мы узнаем как из археологии (пример — Антикитерский механизм), так и восстановления моделей по имеющимся рукописям (машина Шиккарта), и, наконец, вследствие снятия секретности с истории создания компьютеров, в первую очередь в США и СССР.

Во втором разделе слушатели особо интересуются нерешенными проблемами теории алгоритмов, проблемами разрешимости (или неразрешимости) тех или иных математических задач.

В третьем разделе основной упор был сделан на историю развития экспертных систем, приведшего к изменению содержания многих видов деятельности человека (например, бухгалтерского учета). К сожалению, недостаточная лабораторная база тех вузов, где читались лекции, не позволила уделить внимание роботике.

В четвертом разделе слушателей, кроме изучения традиционных поколений алгоритмических языков, особо привлекает возможность самим на практических занятиях создавать новые языки, как для конкретных задач, так и метаязыки для разделов науки.

В пятом разделе слушателей особо привлекает возможность самостоятельного создания информационно-поисковой системы для конкретного раздела интересующей их науки.

В шестом разделе задания из упражнений выходят за рамки читаемого курса, требуя от слушателей более глубокого знакомства с операционными системами, хотя бы в рамках популярного учебника Э. Таненбаума.

В седьмом разделе слушатели на практических занятиях самостоятельно «строят» свою домашнюю локальную сеть, объединяющую все домашние приборы. С другой стороны, их интересуют новые глобальные сети (типа «Гонец» и «Галилео»).

Восьмой раздел в России оказался разнесенным по разным направлениям: вопросы эргономики взаимодействия человека и компьютера попали в инженерную психологию отдельно от интерфейса. Проблемы безопасности пользователей компьютеров (включая защиту от вирусов) пока еще во многом находятся в закрытых публикациях.

В девятом разделе рассмотрены 4 темы: CAD/CAM (САПР), анимация, интерактивные игры и история создания издательского языка PostScript. Слушатели с увлечением сами пишут программы для построения фракталов, для игры «крестики-нолики» на ограниченном квадрате, а более продвинутые строят кривые де Кастельжо/Безье.

В последние три года, кроме указанных выше разделов, в курс лекций вошел и новый раздел, посвященный истории информационных технологий в музыке [2].

Разумеется, в процессе чтения курса «История компьютерных наук» нельзя обойти вопросы методологии. (Подробнее см. [3]). При организации практической работы студентов для ряда разделов курса представляется перспективной система управления обучением «MOODLE», апробированная в Красноярске Н. И. Паком и Н. М. Андреевой [4].

Литература

1. *Одинец В. П.* Зарисовки по истории компьютерных наук.—Сыктывкар: Коми ПИ, 2011.—Ч. I.—200 с.; 2012.—Ч. II.—97 с.; 2013.—Ч. III.—150 с.
2. *Горбунова И. Б.* Информационные технологии в музыке. Т. 2.—СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2010.—205 с.
3. *Одинец В. П.* Методология истории компьютерных наук // Проблемы современного математического образования в вузах и школах России.—Киров: Изд-во ВВГУ, 2012.—С. 24—37.—(Материалы V Всерос. науч.-метод. конф.).
4. *Андреева Н. М.* Организация практической работы студентов по дисциплине «Информатика» в системе управления обучением «MOODLE» // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования.—СПб.: Изд-во БАН, 2012.—С. 213–215.—(Материалы науч. конф. Герценовские чтения 2012).

О РЕАЛИЗАЦИИ ФГОС В УСЛОВИЯХ КЛАССНО-УРОЧНОЙ СИСТЕМЫ

Л. П. Охват (Россия, Владикавказ; СОШ № 1 ст. Архонская)

«В последние десятилетия, при переходе к постиндустриальному обществу логика развития производственной сферы привела к осознанию того, что истинное совершенствование жизни связано не столько с внешней образованностью человека, усвоением им той или иной системы знаний и умений, сколько с развитием его ума и способностей, системы ценностей и мотивационных установок. Сегодня — это не просто вопрос успешности человека в жизни, но это еще и вопрос безопасности и конкурентоспособности страны». Все большее число людей становятся заинтересованными в максимальной реализации своих способностей и в развитии качеств других членов общества, с которыми приходится взаимодействовать. Неслучайно слово «общеобразовательная» появилось на вывесках школ. Это требование цивилизации, переходящей к очередному этапу развития. Однако современная школа общего образования пока не обеспечивает. Речь идет об обеспечении всеобщего культурно-образовательного уровня. Изменившиеся современные условия жизни, требуют уже иных качеств от подрастающего поколения: не бояться трудностей и уметь их преодолевать; уметь ставить цель, соотносить свои возможности с поставленной целью и достигать ее; уметь признавать свои ошибки и верить в собственные силы; уметь выражать и отстаивать свою точку зрения и уважать при этом мнение других; уметь общаться и договариваться с окружающими; уметь все время самообразовываться и давать себе адекватную самооценку. Поэтому учитель и школа должны четко знать чему и как учить детей.

На эти вопросы призван ответить ФГОС ООО, ориентированный на становление личностных характеристик выпускника: «...умеющий учиться, осознающий важность образования и самообразования для жизни и деятельности, способный применять полученные знания на практике; активно и заинтересованно познающий мир, осознающий ценность труда, науки и творчества;...» в основе которого лежит системно-деятельностный подход. Одной из главных задач школы становиться научить всех детей учиться.

Математика всегда считалась одним из самых трудных для учащихся предметов. А ведь от качества математического образования во многом зависит качество образования в целом. Поэтому если мы хотим воспитать молодое поколение людей, способное адекватно отвечать вызовам времени, мы должны создать условия для качественного математического и естественнонаучного образования всех обучающихся. Каждый может усвоить учебный материал, все зависит от индивидуальных способов и средств усвоения. Ведь интерес к предмету определяется не его содержанием, а успешными действиями ученика в процессе изучения данного предмета.

Однако распространенная сегодня в школах классно-урочная форма обучения не отвечает идеям ориентирования на личность. Большая часть учеников вынуждена из урока в урок переходить к изучению нового материала, не завершив освоение предыдущего. Возможность ликвидации пробелов в знаниях на уроках практически отсутствует. Ученик не чувствует успешности и остается недоученным. А та часть учеников, которая с успехом осваивает учебный материал, вынужденная работать в полсилы, в итоге также теряет интерес к образовательному процессу. Еще Гегель, работавший директором гимназии, подметил: «...мнение, что наставник должен тщательно изучать индивидуальность каждого ученика, сообразовываться с нею и развивать ее, является совершенно пустым и ни на чем не основанным. Для этого у него нет времени. Своеобразность детей терпима в семейном кругу, но в школе начинается жизнь... по общим для всех правилам. Тут приходится заботиться о том, чтобы дети отвыкли от своей оригинальности». Традиционная классно-урочная система и не учит и не стимулирует учащихся к тому, чтобы учиться самостоятельно.

В настоящее время существует множество попыток модифицировать классно-урочную систему обучения или заменить ее. Например, системой обучения, отличной от классно-урочной, является создаваемая сейчас система коллективного обучения по индивидуальным программам. По мнению М. А. Мкртчяна эта система будет преобладать к середине 21 века, а сейчас мы находимся в состоянии перехода от классно-урочной системы (групповой способ обучения) к коллективному способу обучения.

Встает вопрос, как в условиях классно-урочной системы во время переходного периода организовать обучение, чтобы оно стимулировало самостоятельность мышления, вызывало активную переработку новой информации, способствовало установлению связей между старым и новым материалом, направляло на усвоение рациональных приемов умственной деятельности? Как совместить индивидуальные программы и массовость школы? Учебная форма сотрудничества учителя и обучающегося не должна складываться стихийно, она должна строиться с учетом возможности учителя и способности обучающихся. «Личностная ориентированность», «индивидуальный подход» означает, что каждый ребенок индивидуален и этим ценен. Поэтому обучение это творчество и в нем возможны только элементы технологий. Таким образом, для реализации требований ФГОС к результатам образовательного процесса в условиях классно-урочной системы в работе школьного учителя математики целесообразно уместно сочетать элементы современных образовательных технологий (развитие критического мышления, технология учебных циклов, проектная технология и др.), методико-технологических находок педагогов-новаторов (В. Шаталов, Н. Гузик, С. Лысенкова и др.), индивидуальных и групповых форм занятий.

Но главное необходимо максимально занимать детей на уроке на пределе их индивидуальных возможностей. Каждый ребенок должен продвигаться вперед своим темпом и, причем, с постоянным успехом!

УЧЕБНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТЕКСТ КАК ФАКТОР ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ВОСПИТАНИЯ УЧАЩИХСЯ

М. А. Холодная (Москва, ИП РАН)

Современные социальные вызовы приводят к тому, что интеллектуальные ресурсы людей начинают рассматриваться в качестве важнейшего фактора прогрессивного развития общества. Поэтому задача интеллектуального воспитания подрастающего поколения в рамках общеобразовательной школы относится к числу национальных приоритетов.

В свою очередь, реализация задачи интеллектуального воспитания учащихся возможна только в рамках инновационных технологий обучения, разработанных на основе психодидактического подхода.

Психодидактика — это область педагогики, в рамках которой конструируются содержание, формы и методы обучения, основанные на интеграции психологических, дидактических, методических и предметных (соответственно определенному учебному предмету) знаний с приоритетом использования психических закономерностей развития личности в качестве основы организации учебного процесса и образовательной среды в целом (Давыдов, 1966; Панов, 2004; Гельфман, Холодная, 2006; Gelfman, Kholodnaya, Cherkassov, 1997; Kidron, 2010; Brousseau, 1997 и др.).

Результатом психодидактической работы является некоторая качественно новая педагогическая система, сконструированная с учетом одновременно психологического, дидактического, методического и предметного знания, — в виде нового типа образовательной школьной среды, инновационной образовательной технологии, развивающего метода обучения, учебных материалов нового поколения и т. д. В основе психодидактического подхода лежит педагогическая инженерия, то есть процесс проектирования, конструирования и эксплуатации того или иного педагогического продукта, по своему исходному замыслу ориентированного на решение задачи развития психических ресурсов каждого школьника. Основное назначение психодидактики — создание условий для психологического роста учащихся на основе повышения эффективности обучения конкретному предмету.

Пути реализации психодидактического подхода в школьном образовании могут быть разными: использование в учебном процессе «дидактических ситуаций», которые выстраивают знания учащихся, в том числе с опорой на метафоры и эмоциональный контекст (Broussau, 1997); ориентация на понимание учебного материала и формирования понятий на основе селекции математических задач и выдвижения гипотез относительно влияния каждой задачи на процесс обучения («Hypothetical Learning Trajectory» — HLT) (Simon, 1995; Simon, Tzur, 2004); формирование базовых познавательных действий, таких как опознание, комбинирование. Конструирование как основы концептуального обучения (RBC-модель) с опорой на личный опыт учеников (Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus, 2001; Bikner-Ahsbahs, 2004), развитие навыков креативного мышления учащихся (Burke, Williams, 2008) и др.

На наш взгляд, ключевое направление в психодидактике, обеспечивающее инновационный режим обучения, — это психологически обоснованное конструирование содержания школьного образования.

Соответственно необходимы учебники и учебные материалы нового поколения, построенные на принципиально иной основе. Во-первых, содержание, структура и форма учебников должны быть разработаны с учетом требований психодидактического подхода, то есть каждый элемент учебника (способы предъявления учебной информации, последовательность и компоновка учебного материала, стиль изложения и т. д.) должны иметь определенный психологический адресат и обеспечивать определенный развивающий психологический эффект. Во-вторых, учебник должен быть представлен в системе дополнительных учебных материалов (учебных книг для учеников, практикумов с разными типами заданий, рабочими тетрадями, компьютерными программами и т. д.) как часть учебно-методического комплекта (УМК), обеспечивающего вариативное и обогащенное образовательное пространство в рамках определенного школьного предмета.

Поскольку единицей содержания школьного образования является учебный текст, то, на наш взгляд, именно учебные тексты, сконструированные на основе психодидактических требований, могут выступать в качестве фактора интеллектуального воспитания учащихся.

Текст является ценнейшим элементом культуры и важнейшей составляющей образовательного процесса. Об особой роли текста в интеллектуальном развитии личности говорят многие специалисты, рассматривая текст как «мыслящую структуру» (В. В. Иванов), «модель приключения мысли» (Л. Э. Генденштейн), «партнера-собеседника» (М. М. Бахтин).

В области школьного образования интерес к текстам связан с пониманием их роли как условия эффективного обучения, в частности, в контексте «теории читателя» (reader-oriented theory), согласно которой читатель активно конструирует значения (понятия) в процессе чтения текста, в том числе когда ученик работает с учебником математики (Weinberg, Wiesner, 2011).

Решение задачи интеллектуального воспитания учащихся средствами учебных текстов предполагает:

1) создание условий для актуализации наличного ментального опыта конкретного ученика (учет предпочитаемых способов кодирования информации, наличных когнитивных схем, особенностей имеющейся базы знаний, уровня сформированности житейских и научных понятий, своеобразия интеллектуальной саморегуляции, индивидуальных познавательных предпочтений, индивидуального темпа обучения и т. д.);

2) создание условий для обогащения индивидуального ментального опыта этого ученика (выработка умения работать в режиме использования разных способов кодирования информации, расширение набора когнитивных схем, дифференциация и интеграция вербальных и невербальных семантических структур, формирование системы понятий, развитие способности осуществлять непроизвольный и произвольный контроль своей интеллектуальной деятельности, фор-

мирование открытой познавательной позиции и высокого уровня метакогнитивной осведомленности, создание условий для освоения широкого репертуара различных познавательных стилей и активизации широкого спектра эмоционально-оценочных впечатлений).

В рамках образовательного проекта «Математика. Психология. Интеллект» (МПИ) разработаны учебники и учебные материалы по математики для учащихся основной школы (5–9 классы) на основе «обогащающей» модели обучения. Ее основное назначение — интеллектуальное воспитание учащихся средствами содержания математического образования за счет специально сконструированных учебных математических текстов (Гельфман, Холодная, 2006).

В частности, в учебно-методических комплектах МПИ представлены линии обогащения компонентов когнитивного опыта (формирование разных способов кодирования информации, когнитивных схем, семантических структур), компонентов понятийного опыта (учет закономерностей усвоения понятий), компонентов метакогнитивного опыта (формирование непроизвольного и произвольного интеллектуального контроля, метакогнитивной осведомленности, открытой познавательной позиции) и компонентов интенционального (эмоционально-оценочного) опыта (создание условий для актуализации познавательных предпочтений, убеждений, умонастроений учащихся). Фактором обогащения индивидуального ментального опыта ученика являются учебные тексты.

Таким образом, организуя процесс обучения математике с помощью специально сконструированных учебных математических текстов, можно руководить интеллектуальным воспитанием учащихся — не только развитием их интеллектуальных способностей, но и ростом базовых интеллектуальных качеств личности (компетентности, инициативы, творчества, саморегуляции, уникальности склада ума — КИТСУ).

ОПТИМИЗАЦИЯ УЧЕБНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

И. Л. Шишкина (Россия, Славянск-на-Кубани; филиал КубГУ)

Одним из факторов повышения качества профессионального образования является системное использование педагогических измерений. Педагогические измерения в условиях компетентностно-ориентированного образовательного процесса направлены на оптимизацию структуры и содержания учебных дисциплин, системы тематического планирования, модернизации учебного процесса, связанного с внедрением модульно-рейтинговой технологии организации учебного процесса, повышения мотивации к обучению. Функциями педагогических измерений в условиях кредитно-модульной системы являются:

– оценивание трудоемкости учебных дисциплин: реализуется учебно-методическими комиссиями факультетов на этапе оптимизации модульной структуры курсов и разработки факультетского учебного плана;

– управление учебной деятельностью: реализуется преподавателями на этапе модульного структурирования учебной дисциплины в количественной оценке согласованности комплексной цели учебного модуля с содержанием диагностико-квалиметрических материалов;

– объективизация учебных достижений: реализуется в условиях мониторинга процесса формирования профессиональной компетентности обучающихся с помощью рейтинговых баллов;

– корректировка учебных планов с учетом межпредметных, внутрипредметных и преемственных связей: реализуется кафедрой на основе эмпирического материала в условиях экспертизы учебного процесса посредством функциональной модели диагностико-квалиметрического проектирования учебной деятельности.

Функциональная модель диагностико-квалиметрического обеспечения учебного процесса способствует в наиболее полном объеме использованию объективных данных для оптимизации содержания, структуры, методов планирования и оценки результативности образовательных процессов в вузе, структурированию учебных модулей и повышению качества, упрощению системы планирования, сокращению непроизводительных трат времени.

В нашем исследовании рассматривается методика составления учебных планов и программ, в основе, которой лежит организация модульного обучения. При решении поставленной задачи по этой методике основной проблемой является выделение модулей. Для ее решения в первую очередь определяется единица учебного материала — тема, раздел. Каждая единица учебного материала заполняется необходимым содержанием в соответствии с выделенным учебным временем. Каждый учебный элемент модуля (учебная тема) разбивается на отдельные относительно самостоятельные части — структурные элементы. Эти части располагаются в виде таблицы — матрицы тематических связей. В одной строке матрицы располагаются структурные элементы, связанные одной учебной темой. В одном столбце матрицы тематических связей располагаются учебные элементы, находящиеся во взаимосвязи друг с другом или с учебным элементом другого модуля и даже другого учебного курса (учебной дисциплины).

Количественным аналогом матрицы тематических связей является матрица временных связей. Переход к этой матрице осуществляется путем замены каждого структурного элемента числом — количеством учебного времени (в академических часах), отводимого на реализацию этого учебного элемента. Таким образом, матрицы тематических и временных связей в совокупности представляют собой не что иное, как двумерный тематический план модуля, составленный с учетом межпредметных, внутрипредметных и преемственных связей его структурных элементов со структурными элементами этой и других учебных дисциплин (модулей).

Описанная процедурная схема предполагает оценку степени освоения отдельных тем и всего курса с помощью интегративного тестирования и последующую корректировку тематического плана. При обработке результатов тестирования используется количественная инструментальная модель — модель временного межпредметного баланса. Математический пакет для обработки результатов тестирования представляет собой электронную таблицу в редакторе Microsoft Excel. Вычисления, таким образом, полностью автоматизированы.

Литература

1. *Шишкина И. Л., Шишкина А. Б.* Вопросы оптимизации содержания учебного курса и педагогического теста // Педагогические измерения.—2005.—№ 2.—С. 55–63.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

INP AS RUz — Institute of Nuclear Physics of Uzbekistan Academy of Sciences
IPEST — Institut Preparatoire aux Etudes Scientifiques et Techniques
VNU — Vietnam National University
SMI — South Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the RAS and the Government of Republic of North Ossetia-Alania
SFU — Southern Federal University
АГТУ — Астраханский государственный технический университет
АлтГУ — Алтайский государственный университет
БашГУ — Башкирский государственный университет
БГАУ — Башкирский государственный аграрный университет
БГУ — Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
БГУ — Бакинский государственный университет
БухГУ — Бухарский государственный университет
ВГУ — Воронежский государственный университет
ВИ МВД — Воронежский институт МВД России
ДГТУ — Донской государственный технический университет
ДГУ — Дагестанский государственный университет
ИМ НУУз — Институт математики при Национальном университете Узбекистана
ИМВЦ УНЦ РАН — Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН
ИМ СО РАН — Институт математики имени С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН
ИП РАН — Институт психологии РАН
КГПИ — Коми государственный педагогический институт
КубГУ — Кубанский государственный университет
ЛГТУ — Липецкий государственный технический университ
«МАТИ» — РГТУ — «МАТИ» — Российский государственный технологический университет имени К. Э. Циолковского
МГУ — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
МГУПС (МИИТ) — Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
МПГУ — Московский педагогический государственный университет
НГУ — Новосибирский государственный университет
НИИ ПМА КБНЦ РАН — Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН
НИИМ ВГУ — Научно-исследовательский институт математики Воронежского государственного университета
НИИМиПМ — Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики имени И. И. Воровича Южного федерального университета
НИИ МФиС ЧГУ — Научно-исследовательский институт математической физики и сейсмодинамики Чеченского государственного университета
НИЯУ МИФИ — Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

ОГУ — Орловский государственный университет
ПГУ — Полоцкий государственный университет
РГУ им. С. А. Есенина — Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
РИИ АлтГТУ — Рубцовский индустриальный институт (филиал) Алтайского государственного технического университета имени И. И. Ползунова
РУДН — Российский университет дружбы народов
СКНЦ ВШ ЮФУ — Северо-Кавказский научный центр высшей школы ЮФУ **СКФУ** — Северо-Кавказский федеральный университет
СОГУ — Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова
СПбГУ — Санкт-Петербургский государственный университет
СУНЦ МГУ — Специализированный учебно-научный центр МГУ им. М. В. Ломоносова
ТАДИ — Ташкентский автомобильно-дорожный институт
ТарГУ — Таразский государственный университет имени М. Х. Дулати
ТГУ им. Г. Р. Державина — Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина
УГАТУ — Уфимский государственный авиационный технический университет
УрГЭУ — Уральский государственный экономический университет
Финансовый университет — Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
ХНУСА — Харьковский национальный университет строительства и архитектуры
ЦГИ — Центр геофизических исследований Владикавказского научного центра РАН и РСО-А
ЧГУ — Чеченский государственный университет
ЧувГУ — Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова
ЮГУ — Югорский государственный университет
ЮМИ — Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук и Правительства Республики Северная Осетия-Алания
ЮРГТУ (НПИ) — Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт)
ЮРГУЭС — Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса
ЮФУ — Южный федеральный университет
ЯГПУ — Ярославский государственный педагогический университет имени К. Д. Ушинского

ПОРЯДКОВЫЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ:

тезисы докладов
международной научной конференции
(Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.)

Компьютерная верстка: М. С. Биченова

ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

ISBN 978-5-904695-18-7

9 785904 695187