ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ — ФИЛИАЛ ВНЦ РАН
СЕВЕРО-ОСЕТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ К. Л. ХЕТАГУРОВА
РЕГИОНАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ЮЖНОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

XV Владикавказская молодежная математическая школа
(г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

Владикавказ
2020

ББК 22.12 + 22.18
УДК 510.12

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2020.—248 с.

Сборник содержит пленарные лекции и тезисы докладов XV Владикавказской молодежной математической школы (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.). Школа проведена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-01-22015.

ISBN 978-5-904695-43-9

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ЛЕКЦИИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Пленарные лекции

Математический анализ

NONSTANDARD ANALYSIS OF CONTINUOUS VS DISCRETE IN MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCE[1]

E. I. Gordon

(USA, Charleston; EIU)

Introduction

Nowadays many applied mathematicians share a point of view that the continuous mathematics is an approximation of the discrete one but not vice versa. This point of view is motivated by a great significance of modern computer methods not only in the science but in the pure mathematics as well. Now we investigate continuous objects and draw continuous pictures by means of computers. Since computers deal only with finite objects, definitions and theorems of continuous mathematics are usually violated in computer modelling of continuous problems due to the finiteness of computer memory. This situation stimulates investigations of interrelation between discrete and continuous approaches to problems in science and mathematics and arises some foundational problems, which I'll try to explain in these lectures.

These interrelations and the problems arising in their study are discussed in the first lecture on three specific examples.

The first example relates to the definition of the limit of a function $f(x)$ at a point of the ambiguity a. It is known that the classical $\varepsilon - \delta$ definition fails in numerical calculations, since the argument x cannot approach arbitrary close to a. So, for the approximate calculation of the limit of $f(x)$ one needs to calculate f for the values of x close enough to a, but not too close to a. This statement cannot be formalized in the framework of classical mathematics.

In the second example we consider a linear system of three equations and three unknowns depending on two parameters a and b. We study the effects arising from the computer solution of the original linear system for values of parameters close to those ones, in which the system degenerates. The effects arising can be formalized in the framework of classical mathematics, but the obtained statements are rather cumbersome, and their proofs are rather complicated. However, the investigation of similar examples can be used as good topics for undergraduate research projects.

The impressive example of a thermodynamics problem, for which the continuous model failed to explain the results of experiments, while the discrete model perfectly worked for this purpose, was presented by M. Plank in his classical article [8]. This famous article originated the quantum mechanics.

[1]The research was supported financially by Russian foundation for basic research, projects № 95-01-00673, № 8-01-00045.

The subsequent presentation is forcedly short and superficial. It does not require the reader to have any knowledge of thermodynamics — only some vague understanding of the concepts of energy, radiation, frequency and, possibly, of a harmonic oscillator. For a more detailed, and at the same time accessible to non-specialists, acquaintance with the subject see Chapter I and Chapter VIII.1 of the classic book [10].

The result of the discussion in the first lecture is the following statement:

Modern rigorous mathematics is too strong an idealization for the "study of nature" as well as for the study of correspondence between computer and continuous solutions of both applied and theoretical mathematical problems.

The main reason for this is the fact that the properties of objects in natural science and computer mathematics are not well defined. In these lectures the term "vague properties" is used. Here's what Richard Feynman wrote about this in the 26th chapter of his famous lectures on physics:

"There are no actual boundaries between one range of wavelengths and another, because nature did not present us with sharp edges. The number associated with a given name for the waves are only approximate and, of course, so are the names we give to the different ranges."

This statement contradicts to the Axiom of the Least Upper Bound of continuous mathematics.

The modern pure mathematics deals only with well defined properties. This makes it impossible to formulate rigorously the laws of nature in the framework of continuous mathematics, and to carry out rigorous proofs of the consequences following from them.

In the 60th of the last century A. Robinson discovered a new approach to analysis, which he called the Nonstandard Analysis. This new analysis allowed to introduce the collections of objects defined by vague properties on the same level of rigour as is adopted in classical mathematics.

The second lecture is devoted to one modified version of Nonstandard Analysis. This version is a variant of Nonstandard Axiomatic Set Theory It is combination of the Nonstandard Class Theory [12] and the Theory of Hyperfinite Sets [13]. We call it Theory of Quasi-sets (TQS).

As in the von Neumann–Bernays–Gödel theory (NBG), the main objects of this theory are classes. Classes that are elements of other classes are called sets. Classes that are not sets are called proper subclusses. All theorems about set that can be proved in Cantor's Theory of Sets are theorems of TQS. Its main difference of TQS from NBG is that TQS admits proper subclasses of sets. These subclasses are called quasi-sets. The presence of quasi-sets makes it possible to include vague collection defined by vague properties in consideration. For example, a set is called small if it does not have quasi-sets. Using small sets it is is to define infitely large numbers and infinitesimals In this lecture we demonstrate also how the problems of interrelation between discrete and continuous mathematics discussed in the previous lecture can be treated within TQS.

Lecture 1. Examples of Interrelation between Discrete and Continuous Mathematics

1°. Nowadays many applied mathematicians share a point of view that the continuous mathematics is an approximation of the discrete one but not vice versa. This point of view is motivated by a great significance of modern computer methods not only in the science but in mathematics itself. Nowadays we investigate continuous objects and even draw continuous pictures by means of computers, in spite of the fact that computers deal only with finite objects. This situation stimulates more and more investigations of discretization of various continuous objects, e.g. topological and differential geometry structures and arises a lot of foundational problems, which I'll try to explain in these lectures.

I first heard this point of view in the report of the outstanding Russian pure and applied mathematician Alexander Semyonovich Kronrod at the Workshop on Mathematical Programming and Related Issues in March 1971 in Drogobych, Ukraine. In this talk he presented a new finite difference method for solving multidimensional parabolic equations. This method was fast and stable, but it did not converge. A.S. commented on this situation as follows. He reminded that differential equations are deduced from finite difference equations by setting $\Delta x \to 0$, but for numerical solution one forgets differential equations and returns to finite differences equations. Then he asked "What for the differential equations are needed?" and answered to this question himself. He said that finite differences equations do not have good formulas for solutions that differential equation do. So, if one has no powerful methods of calculation the differential equations provide approximate solution. Thus, the problem of convergence of finite differences equations to differential one is the problem of continuous approximations to a real natural science problem that is, indeed discrete. See [27] about A. S. Kronrod and his points of view on numerical methods.

The following citation from the classical book [2] is another illustration to the point of view on the correlation between continuous and discrete mathematics, described above.

It is worth recalling that difference equations, for example, are usually derived by first finding the finite approximation and then taking the limit. If the reverse step cannot be taken (when small steps are used), then there is some doubt about the validity of the differential equation.

In the book [3] V. I. Arnold retells his conversation with the prominent Russian physicist Ya. B. Zeldovich, who explains the point of view on derivates shared by physicists: "We are always interested in the ratio of finite increments, and not in some abstract mathematical limit. Making an argument increment, say the coordinates of a point or moment in time, is less than, say, 10^{-10}, or 10^{-30} (with reasonable units) — this is a clear excess of the model's accuracy, since the structure of physical space (or time) at such small intervals no longer corresponds to the mathematical model due to quantum phenomena.

The point is simply that it is difficult to find the ratios of finite increments of interest to us; therefore, approximate asymptotic formulas for them have been invented. These approximate formulas mathematicians call their limits and mathematical derivatives. In any real application of the theory, it should be taken into account that the increments should not be less than it is necessary for the results of the theory to be consistent with the experiment."

In his book [3], Arnold also retells the arguments regarding the correspondence to reality, of the uniqueness theorem for ODE of his friend M. L. Lidov, who was engaged in the calculation of trajectories satellites and spaceships.: "Like all mathematicians, Misha told me, you teach the uniqueness theorem, which states that the integral curves of an ODE do not intersect. But this is completely wrong (although you prove it flawlessly). For example, the equation $dx/dt = -x$ has solutions $x = 0$ and $x = e^{-t}$. Integral curves — graphs of these two solutions — any computer can draw beautifully, and you will see clearly that they intersect. Since, for example, for $t = 10$ between these two integral curves you cannot even insert an atom. So, *the uniqueness theorem is a mathematical fiction that has little to do with the real world.*

The same vision of relation between continuous and discrete mathematics is shared by D. Zeilberger in [4]:

"Continuous analysis and geometry are just degenerate approximations to the discrete world ... While discrete analysis is conceptually simpler ... than continuous analysis, technically it is usually much more difficult. Granted, real geometry and analysis were necessary simplifications to enable humans to make progress in science and mathematics ...".

Further, he expresses the opinion that with the development of computers, the role of pure mathematics and rigorous proofs will significantly decrease and calls for the widespread implementation of experimental mathematics in mathematical education and research [5].

I strongly support this idea, but during my teaching in the US universities for 19 years and in Russia for 25 year, I did not notice any serious implementations of experimental mathematics in pure mathematics courses, although, they are useful even in the very first stage of the study of Calculus.

2°. Consider one example from the Calculus text [6], that is very popular in US universities. This example is used there in the section where the notion of a limit is discussed.

EXAMPLE 1. Consider the function $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$. In this case $\lim_{t\to 0} f(x) = \frac{1}{6}$. (In [6] the function $f(x)$ is taken. Calculating values of $f(x)$ for small values of x on a calculator one obtains values of $f(x)$ that are close to $\frac{1}{6}$ as long as the value of x does not become too small (of the order of 10^{-7} in [6]). After that the calculator shows values for $f(x)$ that are very far from L.This effect has the following simple explanation. Let us consider the example from [6]. If $x \sim 10^{-7}$, then $x^2 \sim 10^{-14}$. That last number is smaller than the minimal number in our calculator, thus calculator replaces it by 0. Then $\sqrt{x^2 + 9} - 3$ is also replaced by 0, which is the (wrong) calculator's for $f(x)$ in this case. We see that this effect strongly depends on computing device that we use and even on the algorithm for calculating $f(x)$. So, it cannot be formulated as a theorem of the pure mathematics. Intuitively, this example shows that for numerical calculation of the limit $\lim_{t\to 0} f(x)$, one should calculate the values of $f(x)$ for values x, that are close to 0, but not too close.

Is it possible to modify the classical definition of a limit

$$\lim_{t\to 0} f(x) = L := (\forall\,\varepsilon)\,(\exists\,\delta)\,(\forall\,x)\ \ (0 < |x| < \delta \longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon), \tag{1}$$

so that it would reflect this numerical effect? It looks like this is barely possible. Let's try two version of such modification.

$$(\forall\,\varepsilon)\,(\exists\,\delta_1, \delta_2)\,(\forall\,x)\ \ (0 < \delta_1 < x < \delta_2 \longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon). \tag{2}$$

It is easy to see that that (2) is equivalent to the statement L is the limit point of the set range(f).

$$(\forall\,\varepsilon)\,(\exists\,\delta_2)\,(\forall\,x)\,(\exists\,\delta_1)\ \ (0 < \delta_1 < x < \delta_2 \longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon). \tag{3}$$

The statement (3) is equivalent to (1), so it allows arbitrary small x in the numerical calculation of limit.

However, the computational results in this example suggest that continuous mathematics should not be completely neglected. The fact that the calculation of the values of the function$f(x)$ shows incorrect results, starting at the value $x = 10^{-7}$, and at the value $x = 10^{-500}$ calculates the limit with more than 62 significant digits is apparently explained by the fact that these calculations use different methods of calculation: when the values of x have small number of digits after the point the standard algorithms of approximate calculations are used, while for values with very big number of digits the methods of computer algebra systems are used. In natural science we are dealing with quantities that are determined with accuracy that does not exceed two-digit number of digits after the decimal point.

Thus, in some cases, the results in pure mathematics, can explain some of the phenomena that arise in computer calculations, and sometimes suggest numerical solutions. This is demonstrated in the following example on correlation between continuous statements and their computer analogues. This example was elaborated by me together with Dr. Duane Broline and students Jessica Murray and Brad Heller from the Eastern Illinois University [7] in the framework of their undergraduate research project.

Example 2. Consider the following linear system of three equation with three unknows x, y, z, depending on two parameters a, b

$$\begin{cases} 5x - 7y + 8z = b; \\ 3x - ay + 4z = 5; \\ ax + 4y - bz = 2. \end{cases} \tag{4}$$

The determinants are of the following forms:

$$\begin{array}{l} \Delta = 8a^2 + 5ab - 28a - 21b + 16, \\ \Delta_x = ab^2 + 16a - 51b + 104, \\ \Delta_y = 4ab + 3b^2 - 40a - 25b + 8, \\ \Delta_z = a^2b - 45a + 12b - 58. \end{array} \tag{5}$$

We are interested in the case, when this system has infinitely many solutions. This happens if the parameters a and b satisfy the following system of equations:

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0. \tag{6}$$

Certainly, one of the equations (but not $\Delta = 0$) can be skipped. The solution of this system, obtained with the help of Maple has the following form:

$$a = -\frac{21}{29} + \frac{3}{464}b^3 + \frac{5}{464}b^2 - \frac{19}{232}b, \tag{7}$$

while b is the root of the polynomial

$$f(t) = 3t^4 - 25t^3 + 260t^2 - 2856t + 4288. \tag{8}$$

The resulting general solution of the system (4) also obtained using Maple is of the form

$$\begin{aligned} x &= 10 - b + u\left[\frac{245}{29} - \frac{19}{116}b + \frac{5}{232}b^2 + \frac{3}{232}b^3\right], \\ y &= u, \\ z &= -\frac{25}{4} + \frac{3}{4}b + u\left[\frac{357}{58} + \frac{95}{928} - \frac{25}{1856}b^2 - \frac{15}{1856}b^3\right], \end{aligned} \tag{9}$$

where b satisfies $f(b) = 0$ and $f$is the polynomial (8).

It is shown using Maple that the polynomial (8) has only two real solutions and both of them are irrational. The values of a obtained by formula (7) for these values of b are irrational as well.

Suppose that we try to solve the system (4) numerically with the parameters a and b, satisfying (6) and wish to find the general solution. In this case we may deal only with rational approximations of a and b. Substituting these rational approximations $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$ in the system (4) we obtain a system that has only a unique approximate solution. The question is how to find approximately the general solution (9). More general question is the following one. Given arbitrary rational parameters a and b how can one determine whether these parameters are close to solutions of system (6) and, thus, to the case of infinitely many solutions, or to the case of non-existence of solutions. In other words: both of these cases for the system (4) belongs to continuous mathematics. How can they be reflected in computer mathematics? To investigate this problem we calculate approximately the values $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$ with 10, 12 and 15 significant digits and substitute them to the system (4). We obtained the following solutions:

$$\begin{array}{ccc} & 10\ Significant\ Digits & \\ x = 2.8850116341 & y = 0.6249221609 & z = -1.038737628 \\ & 12\ Significant\ Digits & \\ x = 1.83282895579 & y = 0.747271181171 & z = -0.274065119805 \\ & 15\ Significant\ Digits & \\ x = 1.61877806403204 & y = 0.772161155406311 & z = -0.118504584998824 \end{array} \tag{10}$$

It can be seen from the table (10) that a very small perturbation of parameters leads to a significant change in solutions. However, it is easy to check, using formula (9), that each of solutions in the table is very close to the solution obtained by the formula (9) for an an appropriate value of the parameter u. Taking differences of any two of this solutions vectors, proportional to the vector

$$\frac{245}{29} - \frac{19}{116}b + \frac{5}{232}b^2 + \frac{3}{232}b^3,\ 1,\ \frac{357}{58} + \frac{95}{928} - \frac{25}{1856}b^2 - \frac{15}{1856}b^3$$

of coefficients at the parameter u in (9). So, all these differences are elements of the space of solutions of the homogeneous system, corresponding to the system 4. In our case this space is one-dimensional.

These experiments allow to suggest that the following qualitative statements.

1. If a system of n linear equations with n unknowns, that contain k parameters ($k < n$) is such that any small perturbation of parameters provide a small perturbation of solutions, then the determinant of this system significantly differs from 0 and this system has a unique solution.

2. If small perturbations of parameters of this system leads to a significant change in solutions, then each of this solutions is very close to some particular solution of this system.

These statements can be precisely formulated and proved in the continuous mathematics, though to do this is not an easy exercise for undergraduate students. However, investigation of similar situations could be good topics for undergraduate research.

Example 3. The impressive example of a thermodynamics problem, for which the continuous model failed to explain the results of experiments, while the discrete model perfectly worked for this purpose, was presented by M. Plank in his classical article [8]. This famous article originated the quantum theory.

The subsequent presentation is forcedly short and superficial. It does not require the reader to have any knowledge of thermodynamics — only some vague understanding of the concepts of energy, radiation, frequency and, possibly, of a harmonic oscillator. For a more detailed, and at the same time accessible to non-specialists, acquaintance with the subject, I recommend Chapter I and Chapter VIII.1 of the classic book [10].

The problem lies in the study of the dependence of the blackbody radiation energy on the radiation frequency, in other words, of the spectrum of this radiation.

A blackbody is an object that is perfect absorber of radiation. In ideal case it absorbs all light that falls on it — no light is reflected and no light passes through it. However, when heated, it can emit light.

It is assumed that a blackbody consists of a finite number of emitters with their own frequencies. The total energy of emitters with a frequency ν is denoted by $E(\nu)$. If the number of emitters is very large, then the set of their frequencies is considered continuous, and $E(\nu)$ is interpreted as the density of energy distribution, energy distribution, i.e., total energy in the frequency $[\nu, nu + d\nu]$, where $d\nu$ is an infinitesimal. For low frequencies, the black body radiation spectrum satisfies the *Reyleigh-Jeans* law

$$E(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT, \tag{11}$$

where c is the speed of light, T is the absolute temperature and k is the Boltzmann's constant. This formula was obtained by some theoretical considerations based on statistical physics and the Maxwell theory of electricity under assumption that emitters are harmonic oscillators. In particular, it used the Boltzmann formula for average energy $\overline{E} = kT$ (actually this equality can be considered as the definition of the temperature in classical thermodynamics).

$$kT = \frac{\int\limits_0^\infty Ee^{-\frac{E}{kT}}\,dE}{\int\limits_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}}\,dE}. \tag{12}$$

For high frequencies the Reyleigh-Jeans law does not work. Moreover it leads to the contradiction named the "ultraviolet catastrophe", since it shows that the energy emitted by the unit volume of blackbody for high frequencies is infinitely large. This contradicts to another law of radiation due to *Wien*

$$E(\nu) = A\nu^3 e^{-\theta\nu T} \tag{13}$$

for certain parameters A and θ. This law agrees with experiments for high frequences.

Trying to find the general law (that works for all frequencies), M. Planck first found a formula that is asymptotically equal to the Reyleigh-Jeans formula for low frequencies and to the Wien's formula for high frequencies [9]. This is the formula

$$E(\nu) = \frac{A\nu^3}{e^{\frac{\theta\nu}{T}} - 1}.$$

To explain this formula Planck replaced the improper integrals, involved in the formula (12) by infinite Riemann sums, with the width of partition $\varepsilon = h\nu$:

$$\int\limits_{n=0}^{\infty} f(\nu)\,d\nu \longrightarrow h\nu \sum_{n=0}^{\infty} f(nh\nu).$$

After simple calculations one obtains the discrete version of the Boltzman average energy the Boltzman (12) formula

$$\overline{E}_d = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}} = \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1}. \tag{14}$$

Substituting the expression for kT from (14) in (11) one comes to the *Plank's radiation law*

$$E(\nu) = \frac{8\pi h}{kTc^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{15}$$

which completely agrees with the experiments and s asymptotically equal to the Reyleigh-Jeans formula for low frequencies and to the Wien's formula for high frequencies. Here and above h is the universal Plank constant, the value of which was obtained experimentally:

$$h = 6.62 \times 10^{-34} joules/sec.$$

Quantum mechanics has introduced some correction to Planck's law. In fact, according to quantum mechanics, discrete values of energy are of the form $(n+\frac{1}{2})h\nu$. To obtain the corrected formula for quantum discrete average $\overline{E}_{qd}$ replace n by $n+\frac{1}{2}$ in the formula (14) and obtain

$$\overline{E}_{qd} = \frac{h\nu}{2} + \overline{E}_d. \tag{16}$$

Remark 1. It was shown in the fundamental Calculus text [11] that, if a function f is monotonically decreasing to 0, then

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} f(n\varepsilon) = \int_0^{\infty} f(x)\, dx. \tag{17}$$

A necessary and sufficient condition for function f to satisfy the equality (17) is contained in [11, Section 1.2, Example 2].

The functions $f(E) = Ee^{-\frac{E}{kT}}$, and $g(E) = e^{-\frac{E}{kT}}$ satisfy the above conditions for the formula (17). After replacement improper integrals in (12) by infinite Riemann sums with $\varepsilon = h\nu$ we obtain $\overline{E}_d$. Thus, by (17), we have

$$\lim_{h \to 0} \overline{E}_d = \lim_{h \to 0} \overline{E}_{qd} = kT \tag{18}$$

Since we have the classical thermodynamics energy average on the right hand side of the second equality in (18) and on the left hand side the limit of the quantum average, the equality (18) can be considered as a particular case of the general principle: The classical mechanics is the limit of quantum mechanics as $h \to 0$.

From the discussion at the beginning of the lecture and the examples considered, we can draw the following conclusion:

Contemporary rigorous mathematics is a too strong idealization for the language of natural science.

This conclusion does not contradict the well-known statement of Galileo "The Book of Nature is written in the language of Mathematics", no nor Wigner's article [17], since neither of them kept in mind the modern rigorous mathematics.

For further discussion, it is necessary to clarify what is "modern rigorous mathematics".

Lecture 2. Perfect Rigor in Mathematics

1°. Modern rigour in mathematics goes back to Euclid's Principles. The rigorous proofs in this book have had a tremendous impact on the development of mathematics as well as philosophy history and other humanistic sciences. This influence was far from always positive. It is enough to mention the "proofs" of the existence of God, sustained in the canons of Euclidean proofs. See e.g. "The Open Society and its Enemies" by K. Popper and "Pythagoras and Monkey" by A. I. Fet.

Perfect rigour in geometry was developed by D Hilbert in the book "Foundations of Geometry", where primary concepts were clearly identified that are not defined, but are given axiomatically by enumerating their properties and relations between them. Moreover, they had to be specified so that the truth of statements about them did not depend on the names of these concepts. As an example, Hilbert said that in the axiomatic formulation of geometry, the words "point", "straight", "plane" can be replaced by the words "chair", "table", "beer mug".

Perfect rigour in mathematical analysis was developed in the 19th century. Its development is primarily associated with the names of Cauchy, Bolzano, Weierstrass and Cantor. When studying some problems on the convergence of Fourier series, Cantor introduced the concept of a set, defined the comparison of the cardinalities of infinite sets, proved the uncountability of the set of real numbers, from which it immediately followed, for example, the existence of transcendental numbers. This was Cantor's first published work on set theory [18]. In subsequent publications, Cantor developed set theory, which was destined to become the basis for the strict formalization of all mathematics. In fact, any mathematical statement can be formulated and proved in terms of set theory. Such reformulation can be very long and unnatural, and in practice no one conducts it. However, the overwhelming majority of mathematicians do not doubt that, in principle, this is possible.

Remark 2. This does not mean that the way of thinking in mathematics is reducible to one in set theory.

The concept of a set is primary and is not formally defined. Cantors formulated the concept of a set on an intuitive level as follows [19]: "*We think of a set M as of a combining of certain well distinguished objects of our observation or of our thought in some single whole*".

This formulation of Cantor can be clarified as follows:

Pseudo-definition 1. A set is the collection of all objects that satisfy some well-defined property and are combined into a single whole. In this case, a property means some statement $P(x)$ about sets, a property is well-defined if it is possible to say unambiguously about any object x whether it has this property P, i. e., $P(x)$ is true or not, i. e., $P(x)$ is false. Otherwise, the property is called *vague*. The set of all objects x that satisfy P is denoted $\{x \mid P(x)\}$.

Already this Cantor's pseudo-definition does not agree with reality. The definitions of physical concepts are of an approximate intuitive nature. Their formalization within the framework of modern pure mathematics based on Cantor's Set Theory often does not correspond to any physical intuition. Definitions of physical concepts sometimes do not exist at all. Once I asked the famous Russian physicist Professor M. A. Miller how to formulate a general definition of the concept of a wave, he replied that when he and his friend professor A. V. Gaponov-Grekhov — a member of the Russian Academy of Science — wrote the article "Waves" for the Great Soviet Encyclopedia, they dealt with this issue a lot, studied a large amount of literature and realized that such a definition does not exist.

Real numbers in the Cantor's Set Theory are defined as Dedekind cuts — the specific subsets of the set of all rational numbers. Then the well-known Axiom of the Least Upper bound is a theorem of Set Theory. Compare this theorem with the following statement taken from the Chapter 26.1 of the famous Feynman Lectures on Physics, vol. I: "There are no actual boundaries between one range of wavelengths and another, because nature did not present us with sharp edges. The number associated with a given name for the waves are only approximate and, of course, so are the names we give to the different ranges."

The physical results are fundamentally approximate for the reasons stated above by Ya. B. Zel'dovich (page 10). The exact boundary between quantum and classical sizes does not exist in principle.

That is why mathematically rigorous definitions of physical notions are rarely used by physicists and mathematically rigorous proofs of the properties of such notions often do not exist and if they do, they are not interesting for physicists.

Similar difficulties are encountered when studying the correspondence between computer and continuous solutions of both applied and theoretical mathematical problems. In this case the difficulties since we have to deal with numbers that are not very close to the computer's memory boundaries. Otherwise the computer operations do not longer approximate operations in the field of reals, and even do not satisfy the usual laws of arithmetic.

This circumstance makes it very hard, if not to say impossible to study the correspondence between continuous mathematics and its computer simulation within the framework of classical mathematics. See the discussion in the Example 1.

2°. At the beginning of the 20th century, some well-defined properties were discovered such that the statements about the existence of the sets defined by them led to a contradiction. These were the well-known paradoxes of set theory. The simplest of them the Russel's paradox: Consider the well-defined property $P(x) := x \notin x$. Let $y = \{x \mid x \notin x\}$. If $y \in y$, then y does not satisfy property P, thus $y \notin y$ and y satisfy P and $y \in y$. We obtained the contradiction. So it was necessary to impose axiomatically some restrictions on the properties, that defines sets. The first system of axioms for set theory was proposed by E. Zermelo 1908, later it was improved by A. Fraenkel. It is called Zermelo–Fraenkel's axiomatic and is denoted by ZFC (C stays for the Axiom of Choice.)

The Pseudo-definition above is reformulated in ZFC as follows:

Axiom of Separation. For any well-defined property $P(x)$ and any set y there exists the set z such that

$$z = \{x \in y \mid P(x)\}.$$

Sometimes this axiom is called the Axiom of Comprehension. Certainly the existence of any set (except the empty set) can be deduced from this axiom. The axioms about existence of sets, determined by well-defined properties, without he restriction imposed by the Axiom of Separation are the following ones:

Axiom of Pair. For any two sets a and b, there exists the set $\{a, b\}$.

Axiom of Union set. For any set x there exist the set $\{y \mid \exists\, z \in x\, (y \in z)\}$.

Axiom of Power set For any set x there exist the set $\mathscr{P}(x) = \{y \mid\ y \subseteq x\}$.

Axiom of infinity There exists a set x such that $\emptyset \in x$ and for any $y \in x$, $y \cup \{y\} \in x$.

The minimal set that satisfies the Axiom of infinity is the set $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\}$. This set is the set $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ in ZF. The Principle of Mathematical Induction follows from the minimality.

There are also the well-known Axiom of Choice and the Axioms of Regularity and Foundation needed mainly in the Foundation of Mathematics. The Axiom of Choice is not included in axiomatic. Zermelo–Fraenkel axiomatic without the Axiom of Choice is denoted ZF. The definition of equality of two sets is given by the Axiom of Extensionality: two sets are equal if they consist of the same elements. This axiom is not needed if the logic of predicate with equality is used.

The axiomatic ZFC introduced above strictly speaking is not perfectly rigorous, since the notion of property is not well defined. For this axiomatic the term "Naive Set Theory" is used. This is the title of the book [20] containing a detailed exposition of the basic set theory for non-logicians.

However, all statements of Cantor's set theory including the axioms of ZFC can be written as sentences of the formal language of first-order predicate logic with equality and a single extra-logical symbol of a binary membership predicate $\in$. These sentences form a countable effectively enumerable set. The axioms of ZFC form is an effectively enumerable subset. This subset is infinite since that the Axiom of Separation is not one axiom, but a countable set of axioms — its own axiom for each formal sentence.

A finite sequence of formal sentences is said to be a proof of a theorem T of ZFC, if each of these sentences is either an axiom of the predicate logic with equality, or an axiom of ZFC, or follows from the previous by deduction rules of the first-order logic and the last sentence is T. The formalization of the ZFC in predicate logic is necessary mainly for proving the consistency of certain theories or the unprovability of some sentences in the ZFC, and therefore, in view of the remarks on pages and in mathematics.

The formalization of the ZFC in predicate logic is necessary mainly for proving the consistency of certain theories or the unprovability of some sentences in the ZFC, and therefore, in view of the remarks on pages and in mathematics. According to Gödel's second incompleteness theorem, the consistency of the ZFC cannot be proved in the ZFC. Therefore, all statements about the consistency (independence) of sentences are conditional, i. e., begin with the words "If the ZFC is consistent, then ..."

As it was mentioned on the page 17 most mathematicians are content with proofs that can be formalized at the level of rigour adopted in Naive Set Theory.

3°. In the monograph [21], devoted to the proof of the consistency of the Axiom of Choice and the Continuum of the Hypothesis, the author uses by necessity the formal version of the ZFC, but makes it as accessible as possible for non-logicians. To do this, he makes the ZFC finitely axiomatized, proving that it is sufficient to formulate the Axiom of Separation for a certain finite number of well-defined properties, from which it can be proved, as a theorem for any other well-defined property. The primary objects are interpreted as properties, called here classes and the sets are defined such classes that can be included as elements in other classes. The classes that are not sets are called **proper classes**. Sets are denoted by lowercase letters and classes are denoted by uppercase letters. The axiomatic presented in [21] is called *von Neumann–Bernays–Gödel* (NBG-axiomatic) or simply NBG.

Let us clarify how the finite axiomatizability of the NBG is obtained

Denote $\mathscr{L}_{ZFC}$ the formal language of ZFC. Set-theoretic statements formalized in ZFC are called formulas of $\mathscr{L}_{ZFC}$. If a variable ξ occurs in a formula φ under the universal quantifier or the existential quantifier, it is called bounded, otherwise it is called free. Formula that does not contain free variables is called a **Proposition**. Notation $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, means that each free variable included in φ is a variable from the list $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. This formula is interpreted as a statement about variables $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, i. e., when substituting specific values of these variables, the corresponding statement is either true or false. Whether a statement is true or false is independent of bounded variables.

The language of NBG is the same as the language $\mathscr{L}_{ZFC}$. The formalization of the property of a class X to be a set is formalized $\mathscr{L}_{ZFC}$ by a formula: $(\exists\, Y)\ X \in Y$. The notation $\varphi(x_1, \ldots, x_k, Y_1, \ldots, Y_m)$ means that variables $(x_1, \ldots, x_k)$ assume values of sets (are set-type variables) and $Y_1, \ldots, Y_m$ assume values of arbitrary classes. This formula can be easily rewritten as $\mathscr{L}_{ZFC}$-formula where all variable are denoted by uppercase letters and free variables are among $Y_1, \ldots, Y_m$.

Definition 1. We say that $\varphi(x_1, \ldots, x_k, Y_1, \ldots, Y_m)$ is a set-type formula if all its bounded variables are set-type variables.

We say the formula $\varphi(x_1, \ldots, x_k, Y_1, \ldots, Y_m)$ define the class $A(Y_1, \ldots, Y_m) = \{\langle x-1, \ldots, x_k\rangle \mid \varphi(x_1, \ldots, x_k, Y_1, \ldots, Y_m)\}$.

Gödel defined eight set-type-formulas (called Gödel operations) and postulated the existence of classes, defined by these formulas. Using these eight axioms of NBG he proved the existence of a class defined by an arbitrary set-type formula $\varphi(x_1, \ldots, x_k, Y_1, \ldots, Y_m)$.

The **Axiom of Separation** is formulated here as a single axiom: $(\forall\, x, X)\,(\exists\, y)$ $x \cap X = y$. Other axioms of NBG are the same as axioms of ZFC.

Theorem 1. *Every set-type proposition is a theorem of NBG, if and only if it is a theorem of ZFC.*

This means that NBG and ZFC are equally consistent.

Lecture 3. Will Nonstandard Analysis Become the Analysis of the Future?

In the second decade of the 20th century, mathematicians became decisively convinced that the vague properties, which were mentioned in the previous lecture, could not be introduced into mathematics at the level of rigor that was then formed. This belief was overturned in the early 60s by A. Robinson who built a model of mathematics in which infinitely large and infinitely small numbers are present, which are defined by vague definitions. The analysis developed on these models was called Nonstandard Analysis (NSA) by Robinson. A brief introduction to Robinson's NSA can be found in the Section 2 of [22], familiarity with which is not necessary, but useful for understanding the main content of this lecture. In the NSA many intuitive mathematical formulations that go back to Leibniz and later to Cauchy, such as, for example, the definition of limit: "$\lim_{x\to a} f(x) = L$ means that if x is infinitely close to a but $x \neq a$, then $f(x)$ is infinitely close to L", received the status of rigorous mathematical statements. This made it possible to simplify significantly the proofs of many theorems of standard analysis and even obtain new results in standard mathematics using nonstandard analysis. After the first edition of Robinson's book [14] was published in 1966, many articles appeared, in which nonstandard analysis was used to obtain new results in various fields of standard mathematics, especially in functional analysis, stochastic analysis and mathematical physics (see e.g. [23]). Most of these applications were associated with the use of hyperfinite sets, i. e., such cardinalities, which were infinitely large numbers in the sense of NSA. Retaining many properties of finite sets, these sets made it possible to more directly use intuition of finite mathematics in the continuous one and to obtain rigorous results.

In 1973 Abraham Robinson gave a talk about the nonstandard analysis (NSA) at the Institute for Advanced Study. After his talk Kurt Gödel made a comment, in which he predicted that "...there are good reasons to believe that Non-Standard Analysis in some version or other will be the analysis of the future" (see Robinson's Preface to the 1973 edition of the book [15]).

One has to admit that during more, than forty years since this prediction, it did not come true. Although the NSA simplified proofs of many deep results in standard mathematics and even allowed to obtain new standard results, among which there are some long standing open problems, it did not become the working tool for the most part of mathematicians. When they are interested in some result obtained with the help of the NSA, they prefer to reprove it in standard terms. One of the reasons of rejecting the NSA, is that as a rule the job of reproving is not difficult. The other reason is that the transfer principle of the NSA that is crucial for deduction of standard results from nonstandard ones relies significantly on formalization of mathematics in the framework of superstructures or of the Axiomatic Set Theory. For mathematicians working in ODE, PDE and other areas oriented toward applications, who use at most the naïve set theory, these formal languages may be difficult and irrelevant, so they may not feel confident in nonstandard proofs. At the beginning of our century the interest in NSA and its applications significantly decreased. The stream of publications on NSA has turned into a thin brook. I don't remember any big meeting dedicated to the NSA within at least the last decade. There are very few people who continue research in the field of NSA. I am one of them and I am doing this because I believe that this Gödel's prediction can come true. The purpose of these lectures is to present some arguments in favor of this belief.

In order to facilitate the perception of the NSA for a wide range of mathematicians, E. Nelson developed an axiomatic version of NSA based on the Zermelo–Fraenkel's axiomatic of set theory (**ZFC**), which, as noted in the first lecture, is acceptable for most mathematicians at least in its non-formal version — naive set theory [20]. It is called "Internal Set Theory" (**IST**). He added the unary predicate of standardness St and three axioms for this predicate to ZFC. The first axiom is the Transfer Principle, similar to one in the Robinson's (Model theoretic) version of the NSA. The second one, the Idealization Principle ensures the existence of nonstandard elements. This axiom is close to the Polysaturation Principle in Model Theoretic version of the NSA (see [24, Section 2.9]), but it is somewhat weaker than the latter. The third axiom — the Standardization Principle is of a technical nature and is not used in the future.

In 1987, Nelson published a revolutionary, from my point of view, book [25]. In this book, he developed a new approach to the foundations of probability theory based on hyperfinite probability spaces. The presentation was based on **IST**, but only some fragments of this theory were used, formulated informally, but intuitively clear. The fundamental results of the theory of probability, on which its applications are based, were formulated in this language. These formulations had a clear physical meaning and were available not only to pure mathematicians, but also to all kinds of applied mathematicians. This favorably distinguished them from formulations within the framework of Kolmogorov's axioms based on measure theory. This is how Nelson himself wrote about it in the preface to his book:

"The foundations of probability theory were laid just over fifty years ago, by Kolmogorov. I am sure that many other probabilists teaching a beginning graduate course have also had the feeling that these measure-theoretic foundations serve more to salve our mathematical consciences than to provide an incisive tool for the scientist who wishes to apply probability theory."

The problem of axiomatization of probability theory is a part of Hilbert's 6th problem [26]:

"6. Mathematical Treatment of the Axioms of Physics.

'*The investigations on the foundations of geometry suggest the problem: to treat in the same manner, by means of axioms, those physical sciences in which already today mathematics plays an important part; in the first rank are the theory of probabilities and mechanics.*'

In a further explanation Hilbert proposed two specific problems: (i) axiomatic treatment of probability with limit theorems for the foundation of statistical physics and (ii) the rigorous theory of limiting processes 'which lead from the atomistic view to the laws of motion of continua':

'*As to the axioms of the theory of probabilities, it seems to me desirable that their logical investigation should be accompanied by a rigorous and satisfactory development of the method of mean values in mathematical physics, and in particular in the kinetic theory of gases ... Boltzmann's work on the principles of mechanics suggests the problem of developing mathematically the limiting processes, there merely indicated, which lead from the atomistic view to the laws of motion of continua*'."

Before the appearance of Nelson's book, the overwhelming majority of publications on applications of NSA were related only to obtaining new results or simplifying proofs of known results of standard mathematics. In my opinion, this is also one of the reasons for the decline in interest in NSA over the past decades. Nelson's book was apparently the first book in which this was said and illustrated using the example of probability theory that NSA "in some version or other" is more appropriate language for the book nature than the language of modern standard mathematics.

The fundamental book [27] is devoted to various axiomatic versions of NSA.

As noted in the first lecture, the absence of variables that take values of classes (i. e., collections of objects determined by properties) in **ZFC** makes it more complicated for use than **NBG**, where they are present. These difficulties are even stronger in **IST**, where, in addition to the well-defined aggregates should also be used the vague ones. In order to make the nonstandard axiomatic set theory more convenient for use, we have developed a non-standard class theory (**NCT**) [12], which is an extension of the **NBG**.

On the basis of this theory, the Theory of Hyperfinite Sets (**THS**) was developed [13], in which only hyperfinite sets are considered, and classes are subclasses of such sets. Among the subclasses of sets, proper classes are also allowed, i. e., those that are not sets. Such classes here are called **quasi-sets**. P. Vopenka's books [28, 29] use the term "semiset". The book [29] develops the so-called Alternative Set Theory (**AST**), that can be considered as a variant of NSA, which differs both from Robinson's model-theoretic analysis, and from the axiomatic versions considered in [27]. However, the concept of a semiset in is equivalent to the concept of a quasi-set here. Also the idea of defining standard finite sets (here they are called small) as those that do not contain proper subclasses belongs to Vopenka. The concept of a semiset in the book [28] has a different content.

In the **THS** indiscernibility relations on a hyperfinite sets are defined that are vague equivalence relations such that each hyperfinite subset contains at least one pair of indiscernible elements. Continuous objects arise in the **THS** from factorization of sets by indiscernibility relations. Moreover, a significant part of the theorems of **ZFC** concerning continuous objects can be formalized and proved in **THS**.

In a sense, **THS** can be seen as a formalization of Plato's famous allegory about the cave, presented in his work "Republic" (360 BC) as a dialogue between Plato's brother Glaucon and his mentor Socrates.

In the allegory, Socrates describes a group of people who have lived chained to the wall of a cave all of their lives, facing a blank wall. The people watch shadows projected on the wall from objects passing in front of a fire behind them and give names to these shadows. The shadows are the prisoners' reality but are not accurate representations of the real world.

In **THS** the real world (the world of ideas according to Plato) is thought of as a discrete (atomistic) world — the world of finite sets, while continuous objects are shadows that prisoners see. I hope that this theory may be appropriate for investigation of problems (i) and (ii), formulated above in Hilbert's explanations to the sixth problem. The very first examples in this direction will be formulated in forthcoming lectures.

The theory **THS** can be used to study the relationship between discrete and continuous mathematics. We will demonstrate this below with Examples 1 and 2 of the previous lecture. We actually use the Theory of Quasi-Sets (**TQS**) presented here for this goal. The theory **THS** is a mixture of theories **NCT** and **THS**, but technically simpler, than **THS**. All theorems on the relationship between discrete and continuous mathematics, proved in **THS**, can be, after some effort, re-proved in **THS**. However, the latter seems to me to be the most adequate formalization of the dialectic of the discrete and the continuous in mathematics.

Lecture 4. Theory of Quasi-sets (TQS)

4.1. Axioms of TQS. As in **NBG** the variables of **TQS** are classes and the sets are classes that are elements of other classes.

1°. Axiom of Extensionality (AE) is the same as in **NBG**:

$$X = Y \longleftrightarrow (\forall u)\,(u \in X \longleftrightarrow u \in Y).$$

The principle difference between **NBG** and **TQS** is that the **TQS** allows classes for which Axiom of Separation of **NBG** fails. The classes, for which the Axiom of Separation holds are called the **well defined classes**, i. e., a class X is well defined (a w.d. class), if $\forall x\ x \cap X$ is a set.

2°. Axiom of Weak Transfer [Weak Transfer Principle] (WTP). *Every theorem of* **NBG** *is a theorem about w.d. classes in* **TQS**.

Remark 3. If X is not a well defined set, then there exists a set x such that $x \cap X$ is a proper class, that is a subclass of x. The proper subclasses of sets are called *quasi-sets*. As in **NBG** we use to denote set variables, by low-case letters and classes by uppercase letters. Since the classes that are not quasi-sets will be used very rarely, by default an uppercase letter is interpreted as a quasi-set. In very rare occasions, in which it is not so, this will be specified explicitly. A semiset that is not a set is called a **proper semiset**.

Remark 4. In the Robinson's version of nonstandard analysis and in axiomatic versions, where the predicate of standardness is involved, a strong transfer principle is included as an axiom This strong , which is formulated approximately as follows: any sentence that does not contain a standard predicate is a theorem of the standard theory if and only if its version relativized to the predicate of standardness is a theorem of non-standard theory. The strong Transfer Principle is key for proving standard theorems using NSA. The **TQS** is intended for proving theorems in non-standard mathematics, i. e., theorems containing vague concepts (sometimes using standard mathematics). Therefore, **TQS** does not need the predicate of standardness and the strong transfer principle.

Question 1. The absence of a strong Transfer Principle in **TQS** gives grounds to assume the existence of **NBG** statements, unprovable in **NBG**, but provable in **TQS**. It would be interesting to find meaningful examples of such statements. In reverse mathematics examples of number theory statements are known that can only be proved using the axioms of the existence of higher cardinals. It is interesting to find out whether it is possible to prove these statements in the **TQS**. Is it possible to place the **TQS** in any form in the Gödel hierarchy? See e.g. [30].

3°. Axiom of Class Formation (ASF). *If* $P(x)$ *is any statement that involves a free* (*not bounded by a quantifier*) *variable* x *and such that all quantifiers are applied only to quasi-set variables, then there exists a class* A *that consists of those and only those elements that satisfy* $P(x) : \forall x\ (x \in A \longleftrightarrow P(x))$.

The proper quasi-sets serve as a formalization of vague aggregates of objects, that was discussed in Introduction. For example a set x is called *small* if it does not contain proper subclasses. In what follows

$$\mathbf{S}(x) := (\forall X)\ (X \subseteq x \longrightarrow \exists\, Y\ X \in Y), \tag{19}$$

i. e., $\mathbf{S}(x)$ means that x is a small set. We denote the collection of all small sets by $\mathbf{S}$. It follows from the Axiom of Class Formation that this collection is a class. It is easy to see that the class $\mathbf{S}$ is not a quasi-set. For any class X denote $\mathbf{S}(X)$ the class of all small sets in X (here X may be a set) A natural number $n \in \mathbb{N}$ is small if the set $\bar{n} = \{0, 1, \ldots, n-1\} \in \mathbf{S}(\mathbb{N})$ is small. We denote the quasi-set of small natural numbers by $\mathbf{S}(\mathbb{N})$ also and write $\mathbf{S}(n)$, if n is small. We also denote $n \cup \{n\}$ by $n+1$.

The class $\mathbf{S}(\mathbb{N})$ satisfies the following **Strong Induction Principle**:

Proposition 1. *If* $X \subseteq \mathbf{S}(\mathbb{N})$, $0 \in X$ *and* $\forall n \in X\ n+1 \in X$, *then* $X = \mathbf{S}(\mathbb{N})$.

$\lhd$ Let $m \in \mathbf{S}(\mathbb{N}) \setminus X$, then $Y = \overline{m+1} \setminus X \subseteq \overline{m+1}$. Thus Y is a set, since $\overline{m+1} \in \mathbf{S}(\mathbb{N})$. Thus, $\exists\ k = \min Y$ by the WTP. Then $k \neq 0$ and $k-1 \in X$. So $k \in X$ by the conditions of the proposition. Contradiction. $\rhd$

Remark 5. By the WST $\mathbb{N}$ is the set in **TQS** satisfy Induction Principle

$$(\forall x \subseteq \mathbb{N})\ (0 \in x \wedge (\forall n \in x)\ \ n+1 \in x) \longrightarrow x = \mathbb{N}.$$

Thus, in the Strong Induction Principle all *subclasses* of $\mathbf{S}(\mathbb{N})$ are involved, while in the standard one only all *subsets* of $\mathbb{N}$. This does not imply yet that $\mathbb{N} \neq \mathbf{S}(\mathbb{N})$. This inequality follows from the Axiom of Compactness, that will be introduced later.

We also define the quasi-set of small integers as follows: $\mathbf{S}(\mathbb{Z}) := \mathbf{S}(\mathbb{N}) \cup (-\mathbf{S}(\mathbb{N}))$.

Natural numbers (integers) that are not small are called **infinite** or **infinitely large**. Notations: $\mathbb{N}_\infty := \mathbb{N} \setminus \mathbf{S}(\mathbb{N})$ ($\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Z} \setminus \mathbf{S}(\mathbb{Z})$).

Proposition 2. $\mathbb{N}_\infty \neq \emptyset$.

$\lhd$ This Proposition will be proved later. $\rhd$

Definition 2. A finite set a is said to be hyperfinite, if its cardinality is an infinite number: $|a| \in \mathbb{N}_\infty$.

Thus, every finite set a is either small or hyperfinite.

Definition 3. 1. A real $\alpha \in \mathbb{R}$ is called bounded ($\alpha \in \mathbb{R}_b$), iff $|\alpha| < n$ for some $n \in \mathbf{S}(\mathbb{N})$.

2. A real $\alpha \in \mathbb{R}$ is called an infinitesimal ($\alpha \in \mathscr{M}_0$), if $|\alpha| < n^{-1}$ for all $n \in \mathbf{S}(\mathbb{N})$. The quasi-set $\mathscr{M}_0$ is called the monad of 0. Reals $\alpha, b \in \mathbb{R}$ a said to be infinitesimally close ($\alpha \approx \gamma$), if $\alpha - \gamma \in \mathscr{M}_0$. Sometimes we right $\alpha \approx 0$ for $\alpha \in \mathscr{M}_0$ and

$$|\alpha| \gg 0$$

for $\alpha \notin \mathscr{M}_0$.

3. A real $\Omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_b$ is called infinitely large ($\Omega \in \mathbb{R}_\infty$). Obviously $IR = (\mathscr{M}_0 \setminus \{0\})^{-1}$.

Proposition 3. *The monad* $\mathscr{M}_0$ *is the maximal ideal in the ring* $\mathbb{R}_b$.

$\lhd$ The statement "M_0 is an ideal in $\mathbb{R}_b$" is is similar to the theorem "The sum of two infinitesimal functions is an infinitesimal function and the product of an infinitesimal function by a bounded one is an infinitesimal function" of Calculus I. The proofs are also similar.

If $\mathscr{I}$ is an ideal in $\mathbb{R}_b$ such that $\mathscr{M}_0 \subsetneqq \mathscr{I}$ and $a \in \mathscr{I} \setminus \mathscr{M}_0$, then obviously $1/a \in \mathbb{R}_b$, so $1 \in \mathbb{R}_b$. Thus, $\mathscr{I} = \mathbb{R}_b$. $\rhd$

In what follows the quotient class $\alpha + \mathscr{M}_0$ for $\alpha \in \mathbb{R}_b$ is denoted $\mathscr{M}_\alpha$.

REMARK 6. Since any monad $\mathscr{M}_\alpha$ is a proper quasi-set one can not use the quotient class $\mathbb{R}_b/\mathscr{M}_0$ that consists of monads. However, it will be shown later that the existence of complete system of representative of monads $\mathscr{M}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_b$ exists.

Proposition 4. *The classes $\mathbb{N}_\infty$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_\infty$, $\mathbb{R}_b$, $\mathscr{M}_0$ are proper quasi-sets.*

$\lhd$ Suppose that $\mathbb{N}_\infty$ is a set. Then, since $\mathbb{N}_\infty \subseteq \mathbb{N}$ there exist a number $N = \min \mathbb{N}_\infty$ by WTS, so $N - 1 \in \mathbf{S}(\mathbb{N})$. Thus $N \in \mathbf{S}(\mathbb{N})$ by Proposition 1, while $N \in \mathbb{N}_\infty$. The contradiction. So, $\mathbb{N}_\infty$ is a proper quasi-set as well as $\mathbb{Z}_\infty$.

If $\mathbb{R}_\infty$ is a set, then $\mathbb{Z}_\infty = \{\rfloor\alpha\lfloor \mid \alpha \in \mathbb{R}_\infty\}$ is a set by WST. So $\mathbb{R}_\infty$ is a proper quasi-set. The proof of this Proposition for $\mathbb{R}_b$ and $\mathscr{M}_0$ follows immediately from Definition 3 (3). $\rhd$

Some simple properties of quasi-sets that may be needed later are listed in the following

Proposition 5. *If X, Y are quasi-sets, then* $\operatorname{dom}(X)$, $\operatorname{range}(X)$, *$X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \setminus Y$, $X \times Y$, Y^X are also quasi-sets.*

$\lhd$ Let $X \subseteq x$, $Y \subseteq y$. Then first five operations applied to X and Y are subclasses of the same operations applied to x and y. The latter are sets by WTP. So, the first ones are quasi-sets. To complete the proof recall the Kuratowski's definition of an ordered pair.

$$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\} \tag{20}$$

So, for $a \in X,\ b \in Y$ $\langle a, b\rangle \in \mathscr{P}(X \cup Y) \subseteq \mathscr{P}(x \cup y)$ and $X \times Y \subseteq \mathscr{P}(x \cup y)$. Since $Y^X \subseteq X \times Y$, one has $X \times Y, Y^X \subseteq x \times y$. Thus both of them are quasi-sets. $\rhd$

DEFINITION 4. We say that a quasi-set X is sharp, if any its subset is small.

Proposition 6. *The quasi-set $\mathbf{S}(\mathbb{N})$ is sharp.*

$\lhd$ Let $x \subseteq \mathbf{S}(\mathbb{N})$. By Proposition 2 there exists $N \in \mathbb{N}_\infty$. If x is an infinite set, then the following theorem is true:

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\, (\exists\, m \in x)\ (m > n).$$

This is an **NBG** theorem and by WTP there exists $M \in x$ such that $M > N$. This contradicts to the above assumption. So, x is a finite set. Since $x \subseteq [\min x, \max x] \subseteq \mathbf{S}(\mathbb{N})$, x is small. $\rhd$

Proposition 7. 1. *Any subquasi-set of a sharp quasi-set is sharp.*

2. *If X and Y are sharp quasi-sets, then $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \setminus Y$, $X \times Y$ is a sharp quasi-set.*

3. *If $F : X \to Y$ is a surjective map and X is a sharp quasi-set, then Y is a sharp quasi-set as well.*

4. *If F is a function and $\operatorname{dom}(F)$ is sharp, then F is a sharp quasi-set.*

4°. Axiom of Compactness[2]. Let X be a sharp quasi-set that has finite intersection property (FIP), i. e., every subset of X has a nonempty intersection, then $\bigcap X \neq \emptyset$.

[2]This axiom is the analog of the Axiom of Polysaturation in NSA.

The Axiom of Compactness implies Proposition 2.

$\lhd$ Consider the sharp quasi-set $X = \{\mathbb{N}\backslash\{0,1,\ldots,n-1\} \mid n \in \mathbf{S}(\mathbb{N})$ that exists by the Axiom of class Formation. By the Axiom of Compactness $\bigcap X = \mathbb{N} \setminus \mathbf{S}\mathbb{N} \neq \emptyset$. $\rhd$

Proposition 8. *Let F be a function such that* $\mathrm{dom}(F)$ *is a sharp quasi-set. Then there exists a function f such that $F \subseteq f$.*

Though we cannot include classes in sets we can consider classes that are indexed families of some classes.

Definition 5. We say that a class X is a family of classes $\{X_i \mid i \in I\}$, indexed by elements of the set I (I-family), if $\mathrm{dom}(X) = I$ and $\forall\, i \in I\ X_i = \{x \mid \langle i, x\rangle \in X\}$.

5°. Axiom of Choice for quasi-sets. If F is a family of quasi-sets, indexed by a sharp set I (i. e., $\mathrm{dom}(F) = I$) and $\forall\, i \in I\ F_i \neq \emptyset$, then there exists a function $G \subseteq F$, such that $\mathrm{dom}(G) = I$ and $\forall\, i \in I\ G(i) \in F_i$. This function is called a choice function as usual.

6°. Axiom of Exponentiation[3]. *If X is a sharp quasi-set, then there exists the sharp family of quasi-sets $\mathbf{p}(X)$. This means that*

$$(\forall\, i \in I)\ (\mathbf{p}(X)_i \subseteq X)\ \textit{and}\ (\forall\, Y \subseteq X)\ (\exists\, i \in I)\ (\mathbf{p}(X)_i = Y), \tag{21}$$

where $I = \mathrm{dom}(\mathbf{p}(X))$.

The theory **TQS** can be interpreted in **NCT**, whose consistency with respect to **ZFC** is proved in [13]. So, the theory **TQS** is consistent with **ZFC** as well.

4.2. Standard Sets in TQS. Consider the set $V_{\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$, where $V_0 = \emptyset$ and $V_{n+1} = \mathscr{P}(V_n)$[4]. The elements of $V_{\mathbb{N}}$ are those and only those sets that are *hereditarily finite*, i. e., those that are small, their elements are small, elements of elements are small, etc.

Definition 6. We say that a set x is standard $\mathbf{St}(x)$ if it is hereditary small.

Obviously the class of standard sets $\mathbf{St} = \mathbf{S}(V_{\mathbb{N}}) = \bigcup_{n\in\mathbf{S}(\mathbb{N})} V_n$. It is clear that $\mathbf{St}$ a sharp class. The classes $\mathbf{S}(\mathbb{N})$, $\mathbf{S}(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbf{St}$. Since every rational number can be (uniquely) represented by an ordered pair of co-prime integers and each such pair is a standard set we conclude, that $\mathbf{S}(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbf{St}$. In what follows we use sometimes the notation $\mathbf{St}(\mathbb{Q})$ instead of $\mathbf{S}(\mathbb{Q})$

Now we able to formulate rigorously and prove the existence of complete system of representatives of monads $\in \mathbb{R}_b$ (c.s.r.m.), mentioned in Remark 6.

Theorem 2. *There exists a sharp class $R \subseteq \mathbb{R}_b$, whose intersection with every monad $\mathscr{M}_\alpha$, $a \in \mathbb{R}_b$, has only one element.*

$\lhd$ For every $\alpha \in \mathbb{R}_b$ set

$$C_\alpha = \{q \in \mathbf{S}(\mathbb{Q}) \mid q < \alpha\} \cup \{q \in \mathbf{S}(\mathbb{Q}) \mid q > \alpha\}\,.$$

Obviously, if $\alpha \approx \gamma$, then $C_\alpha = C_\gamma$ and $\mathscr{M}_\alpha = \bigcap \{(q, q') \mid q, q' \in C_\alpha\}$. The family $\mathscr{C} = \{C_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}_b\}$, is a subfamily of the class $\mathbf{p}(\mathbf{S}(\mathbb{Q}))$. By the Andreev's Axiom

[3]This axiom was suggested by P. Andreev for the Theory of Hyperfinite Sets introduced in [13]. It is included in **TQS** without any changes.

[4]Those readers, who are familiar with axiomatic set in more detail will recognize in $V_{\mathbb{N}}$ the first infinite set V_ω of the von Neumann hierarchy. The general von Neumann hierarchy will not be needed in these lectures (see e.g. the book [31]).

of Exponentiation the latter is a sharp class, thus $\mathscr{C}$ is a sharp class as well. So, the family of monads in $\mathbb{R}_b$ indexed by the sharp class $\mathscr{C}$ has a choice function by the Axiom of Choice for quasi-sets. The range of this choice function is a c.s.r.m. in $\mathbb{R}_b$. $\triangleright$

There are infinitely many c.s.r.m.'s. since if $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}_b$ is a choice function and $g : \mathscr{C} \to \mathbb{R}_b$ is a function such that $\forall\, C \in \mathscr{C}\;\; f(C) \approx g(C)$, then g is also a choice function and the range of g is a c.s.r.m. as well. Moreover, there does not exists any definable in **TQS** c.r.s.m. This statement was proved in [13, Proposition 6.3.] in the framework of **THS**. The proof presented there can be easily modified for **TQS**.

Operations in any c.s.r.m R are uniquely determined based on the requirement that R must be a field isomorphic to $\mathbb{R}_b/\mathscr{M}_0$. Thus, for $a, b \in R$

$$a \oplus b = c \in R,\;\; c \approx a + b; \quad a \odot b = d \in R,\;\; d \approx a \cdot b. \tag{22}$$

Here $+$ and $\cdot$ are operation in $\mathbb{R}$. The linear order in R is inherited from $\mathbb{R}_b$. The following Proposition is easy.

Proposition 9. *For every c.s.r.m. R the algebraic system $\langle R; \oplus, \odot, < \rangle$ is a complete linearly ordered field. The completeness here means that every bounded from above quasi-set $A \subseteq \mathbb{R}_b$ has the least upper bound.*

The next proposition follows immediately from the construction of c.s.r.m.

Proposition 10. *For every $a \in \mathbb{R}_b$ there exists $\alpha \in R$ such that $a \approx \alpha$.*

We see that generally speaking operations in R, are not equal to those in $\mathbb{R}$ but only infinitesimally close to them. They depend on a choice of a set $\mathbb{R}$. In other versions of NSA, in which there is an external (i. e., not definable in standard terms) predicate of standardness, the external set (quasi set in our version) of standard elements is a c.s.r.m. that is a subfield of $\mathbb{R}_b$. In the **TQS** we can always choose a c.s.r.m. R so that the field $\mathbf{St}(\mathbb{Q})$ that is a subfield of R. It follows from the non-definability of c.s.r.m. in **TQS**, that no any c.s.r.m. in R can be a subfield of $\mathbb{R}_b$. However, there exists a definable extension of the field $\mathbf{St}(\mathbb{Q})$ in any c.s.r.m. $\mathbb{R}$. Let $\mathscr{A}$ be the field of all algebraic reals. If $\xi \in \mathscr{A}$ and its minimal polynomial $\mathbf{p}(x) \in \mathbf{St}(\mathbb{Q})[z]$[5], then $\xi \in \mathbb{R}_b$.

Definition 7. 1) We say that a statement $S(x, a_1, \ldots, a_n)$ is an st-statement, if x is a variable, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{St}$ and every occurrence of a quantifier in S is either of the form $\forall\, x \in \mathbf{St}$ or of the form $\exists\, x \in \mathbf{St}$.

2) We say that a quasi-set $A \subseteq \mathbf{St}$ is standard definable ($\mathbf{St}^d$ — quasi-set), if there exists an st-statement $S(x, a_1, \ldots, a_n)$ such that $A = \{x \mid S(x, a_1, \ldots, a_n)\}$.

3) A real number $x \in \mathbb{R}_b$ is said to be an $\mathbf{St}^d$-number, if there exists an st-statement $P(x, B_1, \ldots, B_k)$, where constants $B_1, \ldots, B_k$, are $\mathbf{St}^d$ — quasi-sets, the statement

$$(\exists\,!\, x)\; (P(x, B_1, \ldots, B_k)\; \wedge P(\xi, B_1, \ldots, B_k)) \text{ is true in } \mathbf{TQS}.$$

The configuration $\exists\,!\, X \ldots$ is the usual abbreviation for "there exists a unique X such that $\ldots$"

[5] We assume that the highest coefficient of $p(x)$ is equal to 1.

The following lemma is obvious:

Lemma 1. *The class* $\mathbf{St}$ *is standard definable.*

$\lhd$ The class $\mathbf{St} = ac \restriction \mathbf{S}(\mathbb{N})$, where ac is the Ackermann's function, that is definable in **ZFC** and thus, in **TQS**. $\rhd$

Theorem 3. 1) *The field of algebraic numbers over* $\mathbf{St}(\mathbb{Q})$ *is a* $\mathbf{St}^d$ *— quasi-set, that is denoted* $\mathbf{St}^d(\mathscr{A})$ *below.*

2) *Every number in* $\mathbf{St}^d(\mathscr{A})$ *is a* $\mathbf{St}^d$*-number.*

$\lhd$ Let ξ be an algebraic number over $\mathbf{St}(\mathbb{Q})$ and $p(x) \in \mathbf{St}(\mathbb{Q})[x]$ be the minimal polynomial for ξ. The condition $p(\xi) = 0$ does not define ξ uniquely, so it is necessary to indicate interval (q_1, q_2), $q_1, q_2 \in \mathbf{St}(\mathbb{Q})$, that contains ξ and does not contain other zeros of the polynomial $p(x)$. So, ξ satisfies the statement

$$S(x, q_1, q_2, \mathbf{p}) := x \in (q_1, q_2), \wedge \mathbf{p}(x) = 0 \wedge \forall\, y \in (q_1, q_2)(\mathbf{p}(y) = 0 \longrightarrow y = x), \quad (23)$$

where $\mathbf{p}$ denotes the polynomial with coefficients in $\mathbf{St}(\mathbb{Q})$. Identifying the polynomial with the tuple of its coefficients we may assume that the triple $\langle q_1, q_2, \mathbf{p}\rangle \in \mathbf{St}$. The number ξ is definable by the statement $S(x, q_1, q_2, \mathbf{p})$ since ξ satisfies it by construction and $\exists!\, x\ S(x, q_1, q_2, \mathbf{p})$ is true. However, it is not a $\mathbf{St}^d$ — number since the variable y assumes values not only of standard sets. So, we need to modify the definition of ξ. Notice that a polynomial $\mathbf{p}(x)$ for ξ is minimal iff

$$\mathbf{p}(x) = 0 \wedge \gcd(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = 1. \quad (24)$$

The condition of uniqueness of zero on (q_1, q_2) for a polynomial $\mathbf{p} \in \mathbf{St}(\mathbb{Q})[t]$[6] is the conjunction of the following statements

1. $S1(x, q_1, q_2, \mathbf{p}) := x \in (q_1, q_2)\ \wedge \mathbf{p}(x) = 0$;
2. $S2(q_1, q_2, \mathbf{p}) := \gcd(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = 1 \wedge \mathbf{p}(q_1) \cdot \mathbf{p}(q_2) < 0$.
3. $S3(q_1, q_2, \mathbf{p}) := \forall\, y \in (q_1, q_2) \cap \mathbf{St}(\mathbb{Q})\ \mathbf{p}(q_1) \cdot \mathbf{p}'(y) < 0$.

The formula $S3$ means that $\mathbf{p}(y)$ is increasing (decreasing) on the interval (q_1, q_2), if $\mathbf{p}(q_1) < 0 (> 0)$, since if $\mathbf{p}'(q_1)$ is positive (negative) for all rational points in this interval, then it is true for all points in this interval. So, $S3$ implies the uniqueness of a root of $\mathbf{p}$ in the interval (q_1, q_2).

Set dec $= \{\langle q_1, q_2, \mathbf{p}\rangle \mid S2(q_1, q_2, \mathbf{p})\ \wedge\ S3(q_1, q_2, \mathbf{p})\}$ is an element of $\mathbf{St}$ and defines an algebraic number $\xi \in \mathbf{St}^d(\mathscr{A})$ by the st-statement

$$SA(x, q1, q_2, \mathbf{p}) := S1(x, q_1, q_2, \mathbf{p})\ \wedge\ S2(q_1, q_2, \mathbf{p})\ \wedge\ S3(q_1, q_2, \mathbf{p}). \quad (25)$$

So, the surjective map $\mathrm{dec} : \mathscr{D} \to \mathbf{St}^d(\mathscr{A})$ such that

$$\mathrm{dec}(\langle q_1, q_2, \mathbf{p}\rangle) = \xi \Longleftrightarrow SA(\xi, q_1, q_2, \mathbf{p})$$

is defined. The map dec is not bijective. Consider the equivalence relation $\equiv \subseteq \mathscr{D} \times \mathscr{D} \subseteq$ such that

$$\langle q_1, q_2, \mathbf{p}\rangle \equiv \langle q_1', q_2', \mathbf{p}'\rangle := \mathrm{dec}(\langle q_1, q_2, \mathbf{p}\rangle) = \mathrm{dec}\langle q_1', q_2', \mathbf{p}'\rangle.$$

[6] Here t is not a variable — $\mathbf{St}(\mathbb{Q})[t]$ is a notation for the ring of polynomials over the field $\mathbf{St}(\mathbb{Q})$.

Obviously, if $\langle q_1, q_2, \mathbf{p}\rangle \equiv \langle q_1', q_2', \mathbf{p}'\rangle$, then $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$. It is easy to see using Tarski's theorem about quantifier elimination in the theory of real-closed fields (see e.g. [32]) that the relation $\equiv$ is decidable. The set of pairs of rational numbers can be effectively enumerated. So, there exists a decidable complete system $\mathscr{D}'$ of representatives for $\equiv$. So, dec $\restriction$ is an st-definable bijective function are $\mathbf{St}$-codes of $\mathbf{St}^d$-algebraic numbers. It is easy to see that operations $+$ and $\times$ are st-definable. Thus, the field $\mathbf{St}^d(\mathscr{A})$ is $\mathbf{St}^d$-definable. $\rhd$

It is easy to see that any two infinitesimally close numbers in $\mathbf{St}^d(\mathscr{A})$ are equal. So, we can assume that a field $R \subseteq \mathbb{R}_b$ that is a c.s.r.m. contains $\mathbf{St}^d(\mathscr{A})$ as a subfield[7]. Below we fix some c.s.r.m that contains $\mathbf{St}^d(\mathscr{A})$ as a subfield and denoted it $\mathbf{St}(\mathbb{R})$. For any $a \in \mathbb{R}_b$ denote by $^\circ a$ the element of $\mathbf{St}(\mathbb{R})$ such that $a \approx \alpha$ (see Proposition 10 above). The element $^\circ a$ is said to be the **standard part of** a or the **shadow of** a (recall the Plato's allegory above).

As it was mentioned above this quasi-set is sharp but it is not standard definable.

Theorem 4. *A number $\xi \in \mathbf{St}^d(\mathbb{R})$ is standard definable if and only if $\xi \in \mathbf{St}^d(\mathscr{A})$.*

$\lhd$ For simplicity, we restrict ourselves to the standard definability of numbers in the language $L_{\mathbf{St}(\mathscr{A})}$ of the theory of real ordered fields, extended by the definable algebraic numbers as constants and the quasi-set $\mathbf{St}(\mathscr{A})$ as a constant quasi-set. So,

$$L_{\mathbf{St}(\mathscr{A})} = \langle +, \cdot, -, <, \{\mathbf{St}(\mathscr{A})\} \cup \mathbf{St}(\mathscr{A})\rangle.$$

We assume that $\xi \in \mathbf{St}^d(\mathbb{R})$ is standard definable in the language $L_{\mathbf{St}(\mathscr{A})}$ if and $\exists!\,\psi(x)$ are true and a statement $\psi(x)$, which involves only one free variable x, may involve constants from $\mathbf{St}(\mathscr{A})$ and all bound variables are restricted to $\mathbf{St}^d(\mathscr{A})$, i.e., they are involved in configurations of the form $\forall^{st} y$ and $\exists^{st} y$, which are abbreviations for $\forall\, y \in \mathbf{St}(\mathscr{A})$ and $\exists y \in \mathbf{St}^d(\mathscr{A})$ respectively.

We call such statement $\psi(x)$ a standard algebraic bounded statement (sab-statement).

It is easy to see by Theorem 3 that every sab-statement is equivalent to a statement of **TQS** that satisfies Definition 7.1. It looks like the converse proposition also can be prove using the Ackermann function. However, this proof is not presented here due to its technical complexity. Thus, only a slightly weaker version of Theorem 4 is presented here. I formulated this version in terms of Robinson's NSA as an open question in my letter to W. Henson in 2017. He proved it for an arbitrary real closed field $\mathbb{R}$ using model theory of real ordered fields. This proof can be adjusted to our case. $\rhd$

The predicate of standardness can be extended to the superstructure $\mathbf{St}(\mathscr{S}(\mathbb{R})$ over $\mathbf{St}(\mathbb{R})$ as follows (see [22]):

$$\mathbf{St}(\mathscr{S}(\mathbb{R})) = \bigcup_{n \in \mathbf{St}(\mathbb{N})} \mathbf{St}_n(\mathscr{S}(\mathbb{R})),$$

where

$$\mathbf{St}_0(\mathscr{S}(\mathbb{R})) = \mathbf{St}(\mathbb{R}), \quad \mathbf{St}_{n+1}(\mathscr{S}(\mathbb{R})) = \mathbf{St}_n(\mathscr{S}(\mathbb{R})) \cup \mathbf{p}(\mathbf{St}_n(\mathscr{S}(\mathbb{R})).$$

[7]Recall that operations in R are not the same as in $\mathbb{R}_b$ but their restrictions on $\mathbf{St}^d(\mathscr{A})$ are.

Sharp quasi-sets simulate standard mathematics within **TQS** as follows. For any sharp quasi-sets X, and Y set:

$$X\varepsilon Y := \exists\, i \in \mathrm{dom}(Y)\ X = Y_i, \quad X \equiv Y := \forall\, Z\ Z\varepsilon X \longleftrightarrow Z\varepsilon Y. \tag{26}$$

Let us denote the $\mathbf{ZC}^-$ — the system of axioms of set theory that contains all the axioms of the Zermelo–Fraenkel theory, except for the axioms of substitution and regularity. This is a fairly rich theory, within which the proofs of a wide class of theorems, especially those focused on applications in various fields of natural science are formalized.

Theorem 5. *Every* $\mathbf{ZC}^-$*-theorem written in* $(\varepsilon, \equiv)$*-language is a theorem about sharp quasi-sets in* **TQS**.

This theorem was proved for THS in [13]. This proof can be modified for the case of **TQS**.

In **TQS** we can consider the superstructure $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ as nonstandard extension of the standard superstructure $\mathbf{St}(\mathscr{S}(\mathbb{R})$ in the spirit of Robinson's NSA, with the exception that only weak Transfer Principle holds. By Theorem 5 we can use standard theorems about $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ for investigation of $\mathbf{St}(\mathscr{S}(\mathbb{R}))$. Various examples of applications of this theorem, including those discussed in Lecture 2 will be demonstrated in forthcoming lectures

References

1. *Landis E. M., Yaglom I. M.* About Aleksandr Semenovich Kronrod // Russian Math. Surveys.—2001.—Vol. 56.—P. 993–1007. DOI: 10.1070/RM2001v056n05ABEH000448.
2. *Hamming R.* Numerical Methods for Scientists and Engeneers. 2nd edition.—New York: McGraw-Hill, 1962.—411 p.
3. *Arnold V. I.* What is Mathematics?—Moscow: Moscow Center of Continuous Math. Education, 2002.—104 p.
4. *Zeilberger D.* Real Analysis is a degenerate case of Discrete Analysis // New Progress in Difference Equations / Eds. B. Aulbach, S. Elyadi, G. Ladas (B. Aulbach (Ed). Proceedings of the Sixth International Conference on Difference Equations), CRS, Boca Raton, Fl.—2004.—P. 25–33.
5. *Zeilberger D.* [Contemporary Pure] Math Is Far Less Than the Sum of its [Too Numerical] Parts // Notices of the Amer. Math. Soc.—2013.—Vol. 60, № 11.—P. 9.
6. *Stewart J.* Calculus. 8th edition.—Mason, OH: Cengage Learning, 2015.
7. *Broline D., Gordon E., Heller B., Murray J.* Examples of Using Computer Algebra Systems in Teaching Algebra // PRIMUS (Promblems, Resources, issues in Mathematics Undergraduate Stadies).—2007.—Vol. 17, № 3.—P. 209–227. DOI: 10.1080/10511970601134419.
8. *Plank M.* Zur theorie des gesetzes der energieverteilung im normal spectrum // J. Physical Society: magazine.—1900.—Vol. 2.—P. 237–245. (in German). English transl.: On the Theory of the Energy Distribution Law of the Normal Spectrum // Old Quantum Theory / ed. by D. ter Haar: Pergamon Press, 1967.—P. 82–90. Russian transl. in Selected Scientific Works.—Moscow: Nauka, 1975.—P. 237–245.
9. *Planck M.* Über eine Verbesserung der Wien'schen Spectralgleichung // German Physical Society: magazin.—1900.—Vol. 2.—P. 202–204. (in German). English transl.: On an Improvement of Wien's Equation for the Spectrum // Old Quantum Theory / ed. by D. ter Haar: Pergamon Press, 1967.—P. 79–81. Russian transl. in Selected Scientific Works.—Moscow: Nauka, 1975.—P. 202–204.
10. *Born M.* Atomic Physics. 8th edition.—New York: Dover Publications, 1989.—495 p.—(Dover Books on Physic). Russian transl.: Atomic Physics. 2nd edition.—Moscow: Mir, 1967.—493 p.

11. *Fichtenholz G. M.* Course on Differential and Integral Calculus, Vol. II.—Moscow: Fizmatlit, 1970.—800 p.
12. *Andreev P. V., Gordon E. I.* An axiomatic for nonstandard set theory based on von-Neumann–Bernays–Gödel theory // J. of Symbolic Logic.—2001.—Vol. 66, № 3.—P. 1321–1341.
13. *Andreev P. V. , Gordon E. I.* A theory of hyperfinite sets // Annals of Pure and Applied Logic.—2006.—Vol. 143, № 1.—P. 3–19.
14. *Robinson A.* Nonstandard Analysis // Proceedings of the Royal Academy of Sciences.—Amsterdam, ser. A, 1961.—Vol. 64.—P. 432–440.
15. *Robinson A.* Nonstandard Analysis, Revised edition.—Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1996.—313 p.
16. *Nelson E.* Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis // Bulletin of the Amer. Math. Soc.—1977.—Vol. 83, № 6.—P. 1165–1198.
17. *Wigner E.* The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences // Communications in Pure and Applied Mathematics.—1960.—Vol. 13, № 1.—P. 1–14. Russian transl. in UFN.—Vol. 94, № 3.—P. 535–546.
18. *Cantor G.* Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen // J. für die Reine und Angewandte Mathematik.—1874.—Vol. 77.—P. 258–262. English transl.: Ewald W. B., ed. From Immanuel Kant to David Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics.—New York: Oxford University, 1996. Russian transl.: F. A. Medvedev. Development of Set Theory i the XIX Century.—Moscow: Nauka, 1965.—232 p.
19. *Cantor G.* Beiträge zur Gründung der transfiniten Mengenlehre I // Mathematische Annalen.—1895.—Vol. 46, № 4.—P. 481–512. DOI: 10.1007/bf02124929; Beiträge zur Gründung der transfiniten Mengenlehre I // Mathematische Annalen.—1897.—Vol. 49, № 2.—P. 207–246. DOI: 10.1007/bf01444205. English transl.: Contributions to the theory of transfinite numbers. Translation, Introduction and Notes by P. E. B. Jourdain.—Dover Publications, INC., 1915. Russian transl.: F. A. Medvedev. Development of Set Theory in the XIX Century.—Moscow: Nauka, 1965.—232 p.
20. *Halmos P.* Naive Set Theory.—Princeton, NJ: D. Van Nostrand Company, 1960. Reprinted by Springer-Verlag, New York, 1974.
21. *Gödel K.* Consistency of Continuum Hypothesis.—Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1940.
22. *Gordon E. I.* Some remarks about nonstandard methods in analysis. I // Vladikavkaz Math. J.—2019.—Vol. 21, № 4.—P. 25–41.
23. *Albeverio S., Fenstad J. E., Høegh-Krohn R., Lindström T.* Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics.—Orlando, etc.: Academic Press, 1990.—514 p.
24. *Loeb P. A., Wolff M.* Nonstandard Analysis for the Working Mathematician.—Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000.—293 p.
25. *Nelson E.* Radically Elementary Probability Theory.—Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1987.—111 p.
26. *Gorban A. N.* Hilbert's sixth problem: the endless road to rigor // Phil. Trans. R. Soc.: The Royal Society Publishing, 2018.—Vol. 376, Issue 2118. DOI: 10.1098/rsta.2017.0238.
27. *Kanovei V., Reeken M.* Nonstandard Analysis, Axiomatically.—Berlin: Springer-Verlag, 2004.—408 p.
28. *Vopenka P., Hajek P.* The Theory of Semisets.—Prague–Amsterdam–London: Academia, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences and North-Holland Publishing Company, 1972.—332 p.
29. *Vopenka P.* Mathematics in the Alternative Set Theory.—Leipzig: Teubneg, 1979.
30. *Simpson S. G.* The Gödel Hierarchy and reverse mathematics // Kurt Gödel. Essays for his Centennial. Association for Symbolic Logic. Lecture Notes series.—New York, NY, 2010.—P. 109–127.
31. *Cohen P.* Set Theory and the Continuum Hypothesis.—New York: Dover Publications, 2008.
32. *Cohen P. J.* Decision procedures for real and p-adic fields // Comm. Pure Appl. Math.—1969.—Vol. 22.—P. 131–151.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

BOOLEAN VALUED ANALYSIS AND INJECTIVE BANACH LATTICES[1]

A. G. Kusraev (Russia, Vladikavkaz; SMI VSC RAS),
S. S. Kutateladze (Russia, Novosibirsk; IM SB RAS)

Introduction

In 1963 P. Cohen discovered his *method of 'forcing'* and also proved the independence of the Continuum Hypothesis. A comprehensive presentation of the Cohen forcing method gave rise to the *Boolean-valued models of set theory*, which were first introduced by D. Scott and R. Solovay (see Scott [1]) and P. Vopěnka [2]. A systematic account of the theory of Boolean-valued models and its applications to independence proofs can be found in [3, 4].

D. Scott forecasted in 1969: "We must ask whether there is any interest in these nonstandard models aside from the independence proof; that is do they have any mathematical interest? The answer must be yes, but we cannot yet give a really good arguments."

The development of Boolean-valued analysis started at the end of the seventies have shown that Scott was perfectly right (see, for example, [5, 6]). Boolean-valued analysis starts with the fact that each internal field of reals of a Boolean-valued model descends into a universally complete vector lattice. This remarkable fact was discovered by E. Gordon in [7]. In the same period, two important particular cases were independently studied by G. Takeuti, who observed that the vector lattice of (equivalence classes of) measurable function and a commutative algebra of (unbounded) self-adjoint operators in Hilbert space can be considered as instances of Boolean-valued reals [8, 9].

The aim of these lectures is to survey recent results on injective Banach lattices, outline a Boolean-valued approach, and pose some open problems. The central idea of the presentation is a *Boolean-valued transfer principle* from AL-spaces to injective Banach lattices: Every injective Banach lattice is embedded into an appropriate Boolean-valued model, becoming an AL-space. According to this fact and fundamental principles of Boolean-valued models, each theorem about the AL-space within Zermelo–Fraenkel set theory has its counterpart for the original injective Banach lattice interpreted as a Boolean-valued AL-space.

[1]The research was supported financially by Russian foundation for basic research, projects № 15-51-53119, № 14-01-91339.

Lecture 1. Boolean Valued Analysis

The term *Boolean-valued analysis,* coined by G. Takeuti (see [8]), signifies the technique of studying properties of an arbitrary mathematical object by means of comparison between its representations in two different set-theoretic models whose construction utilizes principally distinct Boolean algebras. As these models, the classical Cantorian paradise in the shape of the von Neumann universe $\mathbb{V}$ and a specially-trimmed Boolean-valued universe $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ are usually taken. Von Neumann universe is defined as $\mathbb{V} := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} \mathbb{V}_\alpha$, where On is the class of all ordinals and

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_0 &:= \varnothing, \\ \mathbb{V}_{\alpha+1} &:= \mathscr{P}(\mathbb{V}_\alpha), \\ \mathbb{V}_\beta &:= \bigcup_{\alpha<\beta} \mathbb{V}_\alpha \quad (\beta \text{ is a limit ordinal}). \end{aligned}$$

Given a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$, we can define the universe $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ of $\mathbb{B}$-valued sets or *Boolean valued universe* as follows [3, 5, 6]:

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} \mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})},$$

where

$$\mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})} := \Big\{x:\ \mathrm{Funct}(x) \wedge (\exists\,\beta)\,(\beta<\alpha \wedge \mathrm{dom}(x) \subset \mathbb{V}_\beta^{(\mathbb{B})} \wedge \mathrm{im}(x) \subset \mathbb{B})\Big\}.$$

To speak about $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ take an arbitrary formula $\varphi = \varphi(u_1,\dots,u_n)$ of the language of set theory and replace the variables $u_1,\dots,u_n$ by $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Then we obtain some statement about $x_1,\dots,x_n$. There is a natural way of assigning to each such statement some element $[\![\varphi(x_1,\dots,x_n)]\!] \in \mathbb{B}$ which acts as the Boolean truth-value of $\varphi(u_1,\dots,u_n)$ in the universe $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ and is defined by assigning the truth-values $[\![x\in y]\!] \in \mathbb{B}$ and $[\![x=y]\!] \in \mathbb{B}$ by putting

$$\begin{aligned} [\![x\in y]\!] &:= \bigvee_{z\in\mathrm{dom}(y)} y(z) \wedge [\![z=x]\!], \\ [\![x=y]\!] &:= \bigwedge_{z\in\mathrm{dom}(x)} x(z) \ \Rightarrow\ [\![z\in y]\!] \wedge \bigwedge_{z\in\mathrm{dom}(y)} y(z) \Rightarrow [\![z\in x]\!], \end{aligned}$$

where $x,y\in\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, and by naturally interpreting the propositional connectives and quantifiers in the Boolean algebra $\mathbb{B}$ (making use of induction on the complexity of φ) as

$$\begin{gathered} [\![\varphi\wedge\psi]\!] := [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!], \quad [\![\varphi\vee\psi]\!] := [\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!], \\ [\![\varphi\to\psi]\!] := [\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\psi]\!], \quad [\![\neg\,\varphi]\!] := [\![\varphi]\!]^*, \\ [\![(\forall\,x)\,\varphi(x)]\!] := \bigwedge_{x\in\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}} [\![\varphi(x)]\!], \quad [\![(\exists\,x)\,\varphi(x)]\!] := \bigvee_{x\in\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}} [\![\varphi(x)]\!]. \end{gathered}$$

We say that $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ is valid within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ if $[\![\varphi(x_1,\dots,x_n)]\!] = \mathbb{1}$. In this event, we also write $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_1,\dots,x_n)$.

There is a smooth mathematical toolkit, the *ascending-and-descending technique* for revealing interplay between the interpretations of one and the same fact in the two models $\mathbb{V}$ and $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Definition 1.1. Given an arbitrary element X of the Boolean-valued universe $\mathrm{V}^{(\mathbb{B})}$, we define the *descent* $X{\downarrow}$ of X as $X{\downarrow} := \{y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} : [\![y \in x]\!] = \mathbb{1}\}$. The class $X{\downarrow}$ is a set, i. e., $X{\downarrow} \in \mathbb{V}$ for all $X \in \mathrm{V}^{(\mathbb{B})}$. If $[\![X \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1}$ then $X{\downarrow}$ is nonempty.

Definition 1.2. Let $X \in \mathbb{V}$ and $X \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$; i. e., let X be some set composed of $\mathbb{B}$-valued sets. There exists a unique $X{\uparrow} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ such that $[\![y \in X{\uparrow}]\!] = \bigvee\{[\![x = y]\!] : x \in X\}$ for all $y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. The element $X{\uparrow}$ is called the *ascent* of X.

Definition 1.3. Given $X \in \mathbb{V}$, we denote by $X^{\wedge} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ the *standard name* of X. The standard name is an embedding of $\mathbb{V}$ into $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Moreover, the standard name sends $\mathbb{V}$ onto $\mathbb{V}^{(2)}$, i. e., $\mathbb{V} \simeq \mathbb{V}^{(2)} \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, where $\mathbb{2} := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\} \subset \mathbb{B}$.

Observe that the ascent extend the standard name in the sense that $Y^{\wedge}$ is the ascent of $\{y^{\wedge} : y \in Y\}$ whenever $Y \in \mathbb{V}$.

A general scheme of applying the method is as follows, see [6, 10]. Assume $\mathbf{X} \subset \mathbb{V}$ and $\mathbb{X} \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ are two classes of mathematical objects. Suppose we are able to prove.

The *Boolean Valued Representation Result:* Every external $X \in \mathbf{X}$ embeds into an Boolean valued model, becoming an internal object $\mathscr{X} \in \mathbb{X}$ within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

The *Boolean Valued Transfer Principle* then tells us that every theorem about $\mathscr{X}$ within ZFC has its counterpart for the original object X interpreted as a Boolean valued object $\mathscr{X}$.

The *Boolean Valued Machinery* enables us to perform some translation of theorems from $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ to $X \in \mathbb{V}$ making use of appropriate general operations (ascending–descending) and the following principles of Boolean valued analysis.

Recall the following three basic principles of Boolean-valued set theory.

Theorem 1.4 (Transfer Principle). *For every theorem φ of ZFC, we have $[\![\varphi]\!] = \mathbb{1}$ (also in ZFC); i. e., φ is true inside the Boolean-valued universe $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.*

Theorem 1.5 (Maximum Principle). *Let $\varphi(x)$ be a formula of ZFC. Then (in ZFC) there is a $\mathbb{B}$-valued set x_0 satisfying $[\![(\exists\, x)\varphi(x)]\!] = [\![\varphi(x_0)]\!]$.*

Definition 1.6. A formula is called *restricted* provided that each bound variable in it is restricted by a bounded quantifier; i. e., a quantifier ranging over a particular set. The latter means that each bound variable x is of the form $(\forall\, x \in y)$ or $(\exists\, x \in y)$.

Theorem 1.7 (Restricted Transfer Principle). *Let $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ be a bounded formula of ZFC. Then (in ZFC) for all $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ we have*

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \iff \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_1^{\wedge}, \dots, x_n^{\wedge}).$$

Recall the well-known assertion of ZFC: *There exists a field of reals that is unique up to isomorphism.* Denote by $\mathbb{R}$ the field of reals (in the sense of $\mathbb{V}$). Successively applying the transfer and maximum principles, we find an element $\mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ for which $[\![\,\mathscr{R}$ is a field of reals$\,]\!] = \mathbb{1}$. Moreover, if an arbitrary $\mathscr{R}' \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ satisfies the condition $[\![\,\mathscr{R}'$ is a field of reals$\,]\!] = \mathbb{1}$ then $[\![\,$the ordered fields $\mathscr{R}$ and $\mathscr{R}'$ are isomorphic$\,]\!] = \mathbb{1}$. In other words, there exists an internal field of reals $\mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ which is unique up to isomorphism.

Definition 1.8. We call $\mathscr{R}$ the *internal reals* in $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Consider another well-known assertion of ZFC: *If $\mathbb{P}$ is an Archimedean ordered field then there is an isomorphic embedding h of the field $\mathbb{P}$ into $\mathbb{R}$ such that the image $h(\mathbb{P})$ is a subfield of $\mathbb{R}$ containing the subfield of rational numbers. In particular, $h(\mathbb{P})$ is dense in $\mathbb{R}$.*

Note also that $\varphi(\cdot)$, presenting the conjunction of the axioms of an Archimedean ordered field, is bounded; therefore, $[\![\varphi(\mathbb{R}^{\wedge})]\!] = \mathbb{1}$ by the Restricted Transfer Principle, i.e., $[\![\mathbb{R}^{\wedge}$ is an Archimedean ordered field$]\!] = \mathbb{1}$. "Pulling" the above assertion through the transfer principle, we conclude that $[\![\mathbb{R}^{\wedge}$ is isomorphic to a dense subfield of $\mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}$. We further assume that $\mathbb{R}^{\wedge}$ is a dense subfield of $\mathscr{R}$. It is easy to see that the elements $0^{\wedge}$ and $1^{\wedge}$ are the zero and unity of $\mathscr{R}$.

Definition 1.9. The *descent* $\mathbf{R} := \mathscr{R}{\downarrow}$ of the algebraic structure $\mathscr{R} := (\mathrm{R}, \oplus, \odot, \leqq, 0, 1)$ is defined as the descent $\mathrm{R}{\downarrow}$ of the underlying set R together with the descended operations $\oplus{\downarrow}$ and $\odot{\downarrow}$ and order $\leqq{\downarrow}$ of the structure $\mathscr{R}$. For simplicity, we will denote the operations and order in $\mathscr{R}$ and $\mathscr{R}{\downarrow}$ by the same symbols $+$, $\cdot$, and $\leqslant$.

The fundamental result of Boolean-valued analysis is the Gordon Theorem which describes an interplay between $\mathbb{R}$, $\mathscr{R}$, and $\mathbf{R}$ and reads as follows: *Each universally complete vector lattice is an interpretation of the reals in an appropriate Boolean-valued model.*

Theorem 1.10 (Gordon [7]). *Let $\mathscr{R}$ be a field of reals in $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ and $\mathbf{R} = \mathscr{R}{\downarrow}$. Then the following assertions hold:*

(1) *The algebraic structure $\mathbf{R}$ (with the descended operations and order) is an universally complete vector lattice.*

(2) *The internal field $\mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ can be chosen so that*

$$[\![\mathbb{R}^{\wedge} \text{ is a dense subfield of the field } \mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}.$$

(3) *There is a Boolean isomorphism χ from $\mathbb{B}$ onto $\mathbb{P}(\mathbf{R})$ such that*

$$\chi(b)x = \chi(b)y \iff b \leqslant [\![x = y]\!],$$
$$\chi(b)x \leqslant \chi(b)y \iff b \leqslant [\![x \leqslant y]\!]$$
$$(x, y \in \mathbf{R};\ b \in \mathbb{B}).$$

Definition 1.11. The *restricted descent* $\Lambda \subset \mathbf{R} = \mathscr{R}{\downarrow}$ of $\mathscr{R}{\downarrow}$ is the order ideal in $\mathbf{R}$ generated by $1^{\wedge}$ equipped with the order-unit norm $\|\cdot\|_{\infty}$:

$$\Lambda := \{x \in \mathbf{R} : (\exists\, C \in \mathbb{B}) \quad -C1^{\wedge} \leqslant x \leqslant C1^{\wedge}\};$$
$$\|x\|_{\infty} := \inf\{C > 0 : -C1^{\wedge} \leqslant x \leqslant C1^{\wedge}\} \quad (x \in \Lambda).$$

Write $\Lambda = \Lambda(\mathbb{B})$, since Λ is uniquely defined by $\mathbb{B}$. Clearly, Λ is a Dedekind complete AM-space with unit $1^{\wedge}$. By Kreĭns–Kakutani Representation Theorem $\Lambda \simeq C(K)$ with K being an extremally disconnected compact Hausdorff space.

Theorem 1.12 (Gordon Theorem for Complexes). *Each complex universally complete vector lattice is an interpretation of the complexes in an appropriate Boolean-valued model. In more details, if $\mathscr{C}$ is the field of complex numbers within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ then $\mathscr{C}{\downarrow} = \mathscr{R}{\downarrow} \oplus i\mathscr{R}{\downarrow}$.*

Lecture 2. Injective Banach Lattices

DEFINITION 2.1. A real Banach lattice X is said to be *injective* if, for every Banach lattice Y, every closed vector sublattice $Y_0 \subset Y$, and every positive linear operator $T_0 : Y_0 \to X$ there exists a positive linear extension $T : Y \to X$ with $\|T_0\| = \|T\|$. This definition is illustrated by the commutative ($T_0 = T \circ \iota$) diagram:

$$\begin{tikzcd} & X & \\ Y_0 \arrow[ur, "T_0"] \arrow[rr, "\iota"'] & & Y \arrow[ul, dashed, "T"'] \end{tikzcd}$$

Other equivalent conditions are presented in the next result, see Lotz [11].

Theorem 2.2. *For a Banach lattice X the following are equivalent:*

(1) *X is injective.*

(2) *If X is lattice isometrically embedded into a Banach lattice Y and T_0 is a positive linear operator from X to a Banach lattice Z then there exists a positive linear extension $T : Y \to Z$ with $\|T_0\| = \|T\|$.*

(3) *If X is lattice isometrically embedded into a Banach lattice Y then there exists a positive contractive projection from Y onto X.*

Thus, the injective Banach lattices are the injective objects in the category of Banach lattices with the positive contractions as morphisms. Arendt [12, Theorem 2.2] proved that the injective objects are the same if the regular operators with contractive modulus are taken as morphisms.

Lotz [11] was the first who introduced this concept and proved among other things the following two results. But the first example of injective Banach lattice was indicated by Abramovich [13].

Theorem 2.3 (Abramovich [13]; Lotz [11])**.** *A Dedekind complete AM-space with unit is an injective Banach lattice.*

Taking into account the Kakutani–Kreĭns Representation Theorem one can state Theorem 2.3 equivalently: The Banach lattice of continuous function $C(K)$ is injective, whenever K is an extremally disconnected Hausdorff compact topological space.

Theorem 2.4 (Lotz [11])**.** *Every AL-space is an injective Banach lattice.*

Theorem 2.4 shows that there is an essential difference between injective Banach lattices and injective Banach spaces, since $C(K)$ with extremally disconnected compactum K is the only (up to isomorphism) injective object in the category of Banach spaces and linear contractions (see Goodner [14], Kelley [15], Nachbin [16]).

DEFINITION 2.5. A separable Banach lattice X is said to be *separably-injective* if for every pair of separable Banach lattices $Y \subset Z$ and every positive (continuous) linear map from Y to X, there exists a norm preserving positive linear extension from Z to Y.

In [17, Theorem 3] Buskes observed that every separably-injective Banach lattice is injective.

A geometric property which enables us to characterize injective Banach lattices was discovered by Cartwright [18].

DEFINITION 2.6. A Banach lattice X has the *splitting property* if, given $x_1, x_2, y \in X_+$ with $\|x_1\| \leqslant 1$, $\|x_2\| \leqslant 1$, and $\|x_1 + x_2 + y\| \leqslant 2$, there exist $y_1, y_2 \in X_+$ such that $y_1 + y_2 = y$, $\|x_1 + y_1\| \leqslant 1$, and $\|x_2 + y_2\| \leqslant 1$.

DEFINITION 2.7. A Banach lattice X has the *Cartwright property* if, given $x_1, x_2, y \in X_+$ and $0 < r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ with $\|x_1\| \leqslant r_1$, $\|x_2\| \leqslant r_2$, and $\|x_1 + x_2 + y\| \leqslant r_1 + r_2$, there exist $y_1, y_2 \in X_+$ such that $y_1 + y_2 = y$, $\|x_1 + y_1\| \leqslant r_1$, and $\|x_2 + y_2\| \leqslant r_2$.

DEFINITION 2.8. A Banach lattice X has the *finite order intersection property* if, given $z \in X_+$, finite collections $x_1, \dots, x_n \in X_+$, $y_1, \dots, y_m \in X_+$, and strictly positive reals $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}_+$, $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{R}_+$ such that $\|x_i\| \leqslant r_i$, $\|y_j\| \leqslant s_j$, and $\|x_i + y_j + z\| \leqslant r_i + s_j$ for all $i := 1, \dots, n$ and $j := 1, \dots, m$, there exist $u, v \in X_+$ with

$$z = u + v, \quad \|x_i + u\| \leqslant r_i, \quad \|y_j + v\| \leqslant s_j \quad (i := 1, \dots, n, \ j := 1, \dots, m).$$

Theorem 2.9 (Cartwright [18]). *For a Banach lattice the splitting property, the Cartwright property, and the finite order intersection property are equivalent.*

Theorem 2.10 (Cartwright [18]). *A Banach lattice has the splitting property if and only if its second dual is injective.*

DEFINITION 2.11. A Banach lattice X is said to have: the *property* (P) if there exists a positive contractive projection in X'' onto X [19, p. 47]; the *Levi property* if $0 \leqslant x_\alpha \uparrow$ and $\|x_\alpha\| \leqslant 1$ imply that $\sup_\alpha x_\alpha$ exists in X [20, Definition 7 (2)]; the *Fatou property* if $0 \leqslant x_\alpha \uparrow x$ implies $\|x_\alpha\| \uparrow \|x\|$ [20, Definition 7 (3)]. A Banach lattice with the Levi (Fatou) property is also called *order semicontinuous* (resp. *monotonically complete*) [19].

Cartwright [18, Corollary 3.8] proved that a Banach lattice is injective if and only if it has the Cartwright property and the property (P). Haydon demonstrated that the property (P) may be replaced with the intrinsic 'completeness' property.

Theorem 2.12 (Haydon [21]). *A Banach lattice is injective if and only if it has the Cartwright, Fatou, and Levi properties.*

A crucial role in the structure theory of injective Banach lattices plays the concept of M-projection which, in addition to their structure as Banach lattices, determines important peculiar properties. The notion of an M-projection goes back to [22].

DEFINITION 2.13. A band projection π in a Banach lattice X is called an *M-projection* if $\|x\| = \max\{\|\pi x\|, \|\pi^\perp x\|\}$ for all $x \in X$, where $\pi^\perp := I_X - \pi$. The set $\mathbb{M}(X)$ of all M-projections in X forms a Boolean subalgebra of $\mathbb{P}(X)$. The f-subalgebra of the center $\mathscr{Z}(X)$ generated by $\mathbb{M}(X)$ is called the *M-center* of X and denoted by $\mathscr{Z}_m(X)$. Clearly, $\mathscr{Z}_m(X) = \mathbb{R} \cdot I_X$ if and only if $\mathbb{M}(X) = \{\mathbb{O}, \mathbb{1}\}$.

Observe that $\mathbb{M}(X)$ is an order closed subalgebra of $\mathbb{P}(X)$ whenever X has the Fatou and Levi properties. In this event the relations $\mathbb{B} \simeq \mathbb{M}(X)$ and $\Lambda(\mathbb{B}) \simeq \mathscr{Z}_m(X)$ are equivalent. Note also that if X is an AL-space and Y is a Dedekind complete AM-space with unit then $\mathbb{M}(X) = \{0, I_X\}$ and $\mathbb{M}(Y) = \mathbb{P}(Y)$.

Theorem 2.14 (Haydon [21]). *An injective Banach lattice X is an AL-space if and only if there is no M-projection in it other than zero and identity, i. e., $\mathbb{M}(X) = \{0, I_X\}$ (or, equivalently, if and only if its M-center is one-dimensional, i. e., $\mathscr{Z}_m(X) = \mathbb{R} \cdot I_X$).*

Definition 2.15. A real Banach lattice X is said to be λ-*injective*, if for every Banach lattice Y, closed sublattice $Y_0 \subset Y$, and positive $T_0 : Y_0 \to X$ there exists a positive extension $T : Y \to X$ with $\|T\| \leqslant \lambda \|T_0\|$.

It was proved in [23] that every finite-dimensional λ-injective Banach lattice is lattice isomorphic to $\big(\sum_{j \leqslant k}^{\oplus} l_1(n_j)\big)_{l_\infty}$, while it was shown in [24] that every order continuous λ-injective Banach lattice is lattice isomorphic to $L_1(\mu)$ space. But the general question is still open:

Problem 2.16. Is every λ-injective Banach lattice order isomorphic to 1-injective Banach lattice?

One of the intriguing problems is the classification of the Banach space whose duals are isometric to an AL-space, see also [25]. We believe that the injective version of this problem deserves an independent study.

Problem 2.17. Classify and characterize the Banach spaces whose duals are injective Banach lattices.

Lecture 3. Boolean Valued Banach Lattices

In this lecture we present some Boolean valued representation results for Banach lattices needed in the sequel. Assume that X is a Banach lattice and $\mathscr{B}$ is a complete subalgebra of a complete Boolean algebra $\mathbb{B}(X)$ consisting of projection bands and denote by $\mathbb{B}$ the corresponding Boolean algebra of band projections. If $\mathscr{B}$ is isomorphic to a Boolean algebra $\mathbb{B}$ then we will identify the Boolean algebras $\mathscr{B}$ and $\mathbb{B}$, writing $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}(X)$. We also will identify $\mathbb{P}(\Lambda)$ and $\mathbb{B}$.

Definition 3.1. If $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ is a partition of unity in $\mathbb{B}$ and $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ is a family in X, then there is at most one element $x \in X$ with $b_\xi x_\xi = b_\xi x$ for all $\xi \in \Xi$. This element x, if existing, is called the *mixing* of (x_ξ) by (b_ξ). Clearly, $x = o\text{-}\sum_{\xi \in \Xi} b_\xi x_\xi$. A Banach lattice X is said to be $\mathbb{B}$-*cyclic* or $\mathbb{B}$-*complete* if the mixing of every family in the unit ball $U(X)$ of X by each partition of unity in $\mathbb{B}$ (with the same index set) exists in $U(X)$.

A Banach lattice $(X, \|\cdot\|)$ is $\mathbb{B}$-cyclic with respect to a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$ of band projections on X if and only if there exists a $\Lambda(\mathbb{B})$-valued norm $|\!\!|\cdot|\!\!|$ on X such that $(X, |\!\!|\cdot|\!\!|)$ is a Banach–Kantorovich space, $|x| \leqslant |y|$ implies $|\!\!|x|\!\!| \leqslant |\!\!|y|\!\!|$ for all $x, y \in X$, and $\|x\| = \||\!\!|x|\!\!|\|_\infty$ $(x \in X)$, see Kusraev and Kutateladze [10, Theorems 5.8.11 and 5.9.1].

Definition 3.2. Let X and Y be Banach spaces with $\mathbb{B} \subset \mathscr{L}(X)$ and $\mathbb{B} \subset \mathscr{L}(Y)$. An operator $T : X \to Y$ is called $\mathbb{B}$-*linear*, if it is linear and commutes with all projections from $\mathbb{B}$, i. e., if $b \circ T = T \circ b$. (Here, of course, we mean $\varphi_Y(b) \circ T = T \circ \varphi_X(b)$ with $\varphi_X : \mathbb{B} \to \mathbb{B}(X)$ and $\varphi_Y : \mathbb{B} \to \mathbb{B}(Y)$ being Boolean isomorphism.) A bijective $\mathbb{B}$-linear operator is called a $\mathbb{B}$-*isomorphism* and an isometric $\mathbb{B}$-*isomorphism* is called a $\mathbb{B}$-*isometry.* A $\mathbb{B}$-isometric lattice homomorphism is referred to as *lattice* $\mathbb{B}$-*isometry.*

Let $\mathscr{L}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ stands for the set of all bounded $\mathbb{B}$-linear operators from X into Y. Clearly $\mathscr{L}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ is a $\mathbb{B}$-cyclic Banach space whenever Y is.

Definition 3.3. Denote by $X^{\#} := \mathscr{L}_{\mathbb{B}}(X,\Lambda)$, where $\Lambda = \Lambda(\mathbb{B})$, the $\mathbb{B}$-*dual* to X.

Now we are able to answer the question: What kind of category is produced by applying the descending procedure to the category of Banach lattices in $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$? The answer is given in the following two results.

Let $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$ be a Banach lattice within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Define the map $N : \mathscr{X}{\downarrow} \to \mathbf{R} := \mathscr{R}{\downarrow}$ as the descent $N(\cdot) := (\|\cdot\|){\downarrow}$ of the norm $\|\cdot\|$. Then $\mathscr{X}{\downarrow}$ (with the descended operations and order) is a vector lattice and N is an $\mathbf{R}$-valued norm on $\mathscr{X}{\downarrow}$.

Definition 3.4. The *bounded descent* $\mathscr{X}{\Downarrow}$ of $\mathscr{X}$ is defined as the set

$$\mathscr{X}{\Downarrow} := \{x \in \mathscr{X}{\downarrow} : N(x) \in \Lambda\}$$

equipped with the descended operations, order relation and *mixed norm*:

$$|\!|\!|x|\!|\!| := \|N(x)\|_{\infty} \quad (x \in \mathscr{X}{\Downarrow}).$$

Theorem 3.5. *A restricted descent of a Banach lattice from the model $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ is a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice. Conversely, if X is a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice, then in the model $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ there exists up to the isometric isomorphism a unique Banach lattice $\mathscr{X}$ whose restricted descent $\mathscr{X}{\Downarrow}$ is isometrically $\mathbb{B}$-isomorphic to X. Moreover, $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$ if and only if $[\![$there is no M-projection in $\mathscr{X}$ other than 0 and $I_{\mathscr{X}}]\!] = \mathbb{1}$.*

$\lhd$ See Kusraev and Kutateladze [10, Theorem 5.9.1]. $\rhd$

Definition 3.6. The elements $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ in Theorem 2.2 and $\mathscr{T} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ in Theorem 2.4 below are said to be the *Boolean valued representations of* X and T, respectively.

Denote by $\mathscr{L}^{r}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ the space of all regular $\mathbb{B}$-linear operators from X to Y equipped with the *regular norm* $\|T\|_r := \inf\{\|S\| : S \in \mathscr{L}_{\mathbb{B}}(X,Y),\ \pm T \leqslant S\}$. Let $\mathscr{X}$ and $\mathscr{Y}$ be the Boolean valued representations of $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattices X and Y, respectively, while $\mathscr{L}^{r}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ stands for the space of all regular operators from $\mathscr{X}$ to $\mathscr{Y}$ with the regular norm within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. The following result states that $\mathscr{L}^{r}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ is the *Boolean valued representation of* $\mathscr{L}^{r}_{\mathbb{B}}(X,Y)$.

Theorem 3.7. *Assume that X and Y are $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattices, while $\mathscr{X}$ and $\mathscr{Y}$ are their respective Boolean valued representations. The space $\mathscr{L}^{r}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ is order $\mathbb{B}$-isometric to the bounded descent $\mathscr{L}^{r}(\mathscr{X},\mathscr{Y}){\Downarrow}$ of $\mathscr{L}^{r}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. The isomorphism is set up by assigning to any $T \in \mathscr{L}^{r}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ the element $\mathscr{T} := T{\uparrow}$ of $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ is uniquely determined from the formulas $[\![\, \mathscr{T} : \mathscr{X} \to \mathscr{Y} \,]\!] = \mathbb{1}$ and $[\![\, \mathscr{T}x = Tx \,]\!] = \mathbb{1}$ $(x \in X)$.*

$\lhd$ Observe that $\mathscr{L}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ and $\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y}){\Downarrow}$ are $\mathbb{B}$-isometric by [26, Theorem 8.3.6]. Since $T(X_+){\uparrow} = T{\uparrow}(X_+{\uparrow}) = \mathscr{T}(\mathscr{X}_+)$, it follows that $T(X_+) \subset Y_+$ if and only if $[\![\mathscr{T}(\mathscr{X}_+) \subset \mathscr{Y}_+]\!] = \mathbb{1}$. This means that the bijection $T \leftrightarrow \mathscr{T} = T{\uparrow}$ preserves positivity and hence is an order $\mathbb{B}$-isomorphism between $\mathscr{L}^{r}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ and $\mathscr{L}^{r}(\mathscr{X},\mathscr{Y}){\Downarrow}$. Since for $S \in \mathscr{L}^{r}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ and $\mathscr{S} := S{\uparrow}$ the relations $\pm T \leqslant S$ and $[\![\pm\mathscr{T} \leqslant \mathscr{S}]\!] = \mathbb{1}$ are equivalent, we have $[\![\|\mathscr{T}\|_r = |T|_r]\!] = \mathbb{1}$, where $|T|_r = \inf\{|S| : S \in \mathscr{L}^{r}_{\mathbb{B}}(X,Y),\ \pm T \leqslant S\}$ and $|S| := \sup\{|Sx| : |x| \leqslant \mathbb{1}\}$. Thus, it remains to prove that $\|T\|_r = \||T|_r\|_{\infty}$ $(T \in \mathscr{L}^{r}_{\mathbb{B}}(X,Y))$.

If $\pm T \leqslant S$ then $\|\boldsymbol{|}T\boldsymbol{|}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{|}S\boldsymbol{|}\|_\infty = \|S\|$ and hence $\|T\|_r \geqslant \|\boldsymbol{|}T\boldsymbol{|}_r\|_\infty$. To prove the reverse inequality take an arbitrary $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ and choose a partition of unity $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ in $\mathbb{B}$ and a family $(S_\xi)_{\xi\in\Xi}$ in $\mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)$ such that $S_\xi \geqslant \pm T$ and $\pi_\xi\boldsymbol{|}S_\xi\boldsymbol{|} \leqslant (1+\varepsilon)\boldsymbol{|}T\boldsymbol{|}_r$ for all $\xi \in \Xi$. Define an operator $S \in \mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)$ by $Sx := \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi} \pi_\xi S_\xi x$ $(x \in X)$, where the mixing exists in Y, since $\boldsymbol{|}S_\xi x\boldsymbol{|} \leqslant (1+\varepsilon)\boldsymbol{|}T\boldsymbol{|}_r\boldsymbol{|}x\boldsymbol{|}$ and hence $(S_\xi x)$ is norm bounded in Y. Moreover, $Sx = \sum_\xi \pi_\xi S_\xi x$ in the sense of Λ-valued norm on Y. Therefore, $S \geqslant \pm T$ and $\boldsymbol{|}S\boldsymbol{|} \leqslant (1+\varepsilon)\boldsymbol{|}T\boldsymbol{|}_r$, whence $\|T\|_r \leqslant \|S\| = \|\boldsymbol{|}S\boldsymbol{|}\|_\infty \leqslant (1+\varepsilon)\|\boldsymbol{|}T\boldsymbol{|}_r\|_\infty$. $\triangleright$

Theorem 3.8. *Let X be a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice and let $\mathscr{X}$ be its Boolean valued representation in $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Then the following hold:*

(1) *$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models$ "$\mathscr{X}$ is Dedekind complete" if and only if X is Dedekind complete.*

(2) *$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models$ "$\mathscr{X}$ is injective" if and only if X is injective.*

(3) *$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models$ "$\mathscr{X}$ is an AM-space" if and only if X is an AM-space.*

(4) *$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models$ "$\mathscr{X}$ is an AL-space" if and only if X is injective and $\mathbb{B} \simeq \mathbb{M}(X)$.*

$\triangleleft$ See Kusraev and Kutateladze [10, Theorems 5.9.6 (1) and 5.12.1]. $\triangleright$

Now, we describe a Boolean valued analysis approach to the theory of injective Banach lattices. First we clarify what the Boolean-valued representation of injective Banach lattice is, see [27, Theorem 4.1].

Theorem 3.9. *Suppose that X is a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice and $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ is its Boolean-valued representation. Then the following assertions hold:*

(1) *X is injective if and only if $[\![\mathscr{X}$ is injective$]\!] = \mathbb{1}$.*

(2) *X is injective and $\mathbb{B} \simeq \mathbb{M}(X)$ if and only if $[\![\mathscr{X}$ is injective and $\mathbb{M}(\mathscr{X}) = \{0, I_{\mathscr{X}}\}]\!] = \mathbb{1}$.*

Theorem 3.10 (Haydon [21])**.** *Let X is an injective Banach space. Then X is an AL-space if and only if $\mathbb{M}(X) = \{0, I_X\}$.*

Now, putting together Theorems 3.5, 3.9, and 3.10 we arrive at our main representation theorem for injective Banach lattice, see [27, Theorem 4.4].

Theorem 3.11. *A bounded descent $\mathscr{X}{\Downarrow}$ of an AL-space $\mathscr{X}$ from $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ is an injective Banach lattice with $\mathbb{B} \simeq \mathbb{M}(\mathscr{X}{\Downarrow})$. Conversely, if X is an injective Banach lattice and $\mathbb{B} \simeq \mathbb{M}(X)$, then there exist an AL-space $\mathscr{X}$ in $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ whose bounded descent is lattice $\mathbb{B}$-isometric to X; in symbols, $X \simeq_{\mathbb{B}} \mathscr{X}{\Downarrow}$.*

Theorem 3.11 implies the *transfer principles* from AL-spaces to injective Banach spaces which can be stated as follows:

(1) Every injective Banach lattice embeds into an appropriate Boolean valued model, becoming an AL-space (Theorem 3.11).

(2) Each theorem about the AL-space within Zermelo–Fraenkel set theory with choice has its counterpart for the original injective Banach lattice interpreted as a Boolean-valued AL-space (Boolean-valued Transfer Principe, Theorem 1.4).

(3) Translation of theorems from AL-spaces to injective Banach lattices is carried out by general operations and principles of Boolean-valued analysis (outlined at the beginning of Sections 6).

The following important representation result (see [27, Corollary 4.5]) which do not involve the concept of Boolean-valued model can deduce immediately from Theorem 3.11. Before stating this result, recall some definitions.

DEFINITION 3.12. A positive operator $T : X \to Y$ between vector lattices is said to: 1) be a *Maharam operator* whenever it is an order continuous and order interval preserving, i. e., $T([0,x]) \subset [0,Tx]$ for all $x \in X_+$; 2) have the *Levi property* if $\sup x_\alpha$ exists in Y for every increasing net $(x_\alpha) \subset X_+$, provided that the net (Tx_α) is order bounded in Y; 3) be *strictly positive* if $Tx = 0$ implies $x = 0$ for all $x \in X_+$.

If $Y = \Lambda$ and T is strictly positive then $L^1(T)$ denotes the domain of T endowed with the norm $|||x||| = \|T(|x|)\|_\infty$ $(x \in L^1(T))$, see Definition 3.4.

Theorem 3.13. *If T is a strictly positive Maharam operator with the Levi property taking values in a Dedekind complete AM-space Λ with unit, then $(L^1(\Phi), |||\cdot|||)$ is an injective Banach lattice with $\mathbb{M}(L^1(\Phi)) = \mathbb{P}(\Lambda)$.*

Conversely, any injective Banach lattice X is lattice $\mathbb{B}$-isometric to $(L^1(T), |||\cdot|||)$ for some strictly positive Maharam operator T with the Levi property taking values in a Dedekind complete AM-space Λ with unit, where $\mathbb{B} = \mathbb{M}(L^1(T)) \simeq \mathbb{P}(\Lambda)$.

Haydon proved three representation theorems for injective Banach lattices (see [21, Theorems 5C, 6H, and 7B]). These results may be also deduced from the above representation theorem (see Theorems 3.11 and 3.13 and [27, Remark 4.13]).

As is seen from Theorem 3.13 an injective Banach lattice X has a mixed L-M-structure. Thus, the dual X' and the $\mathbb{B}$-dual $X^{\#}$ should have, in a sense, an M-L-structure. Hence a natural question arises:

PROBLEM 3.14. What kind of duality theory is there for injectives?

The following result may be helpful towards problem 3.14.

Theorem 3.15. *Let X be a Banach space with the dual X' and the duality pairing $\langle\cdot,\cdot\rangle$. If $\mathbb{B} := \mathbb{P}_L(X)$ then there exists a Banach space $\mathscr{X}$ unique up to linear isometry within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ such that the following hold:*

(1) *$\mathscr{X}$ has no nontrivial L-projections and $\mathscr{X}'$ has no nontrivial M-projections.*

(2) *X is linearly $\mathbb{B}$-isometric to $\mathscr{X}{\downarrow}^L$ and X' is linearly $\mathbb{B}$-isometric to $\mathscr{X}'{\downarrow}^M$.*

(3) *There exists a bilinear operator $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle : X \times X' \to L^1(\mathbb{B}, \phi)$ satisfying*

$$\langle \pi x, x' \rangle = \phi(\pi \langle\!\langle x, x' \rangle\!\rangle) \quad (x \in X,\ x' \in X',\ \pi \in \mathbb{B}).$$

Lecture 4. Boolean Simplex Spaces

In this lecture we present some conditions on an ordered Banach space that are necessary and sufficient for the space to be a predual of an injective Banach lattice. We confine exposition to real Banach spaces, although the method we use works for complex spaces as well. The positive cone of an ordered Banach space is assumed closed and the dual space is endowed with the dual order.

DEFINITION 4.1. Let X be a normed vector space ordered by a positive cone X_+. Then X_+ is said to be *normal* if $x \leqslant y \leqslant z$ implies that $\|y\| \leqslant \max\{\|x\|, \|z\|\}$. We say that X *directed* if the closed unit ball of X is upward directed; i. e., for all $x_1, x_2 \in X$ with $\|x_1\| \leqslant 1$ and $\|x_1\| \leqslant 1$ there exists $y \in X$ such that $x_1, x_2 \leqslant y$ and $\|y\| \leqslant 1$.

The following characterization of AL-spaces is due to Davies [29] (also see Asimow and Ellis [22]).

Theorem 4.2. *Let (X, X_+) be an ordered Banach space. Then the dual X' is an AL-space if and only if X has the Riesz decomposition property, X is directed, and X_+ is normal.*

Remark 4.3. For L^1-predual spaces the name *simplex spaces* was introduced by Effros [30]. Thus, the Davies theorem tells us that an ordered Banach space X is a simplex space if and only if X has the Riesz decomposition property, X is directed, and X_+ is normal. Interpreting this fact in an appropriate Boolean valued model we will characterize the preduals of injective Banach lattices. It is natural to call them *Boolean simplex spaces.* The following result on Boolean valued representation of injective Banach spaces together with Theorem 3.8 provides a key to the characterization of Boolean simplex spaces.

Given a Banach lattice X, denote by $\mathbb{M}(X)$ the set of the M-projections that are simultaneously band projections: $\mathbb{M}(X) := \mathbb{P}(X) \cap \mathbb{P}_M(X)$. Then $\mathbb{M}(X)$ is a subalgebra of the Boolean algebra $\mathbb{P}(X)$. Moreover, $\mathbb{M}(X)$ is an order closed subalgebra of $\mathbb{P}(X)$ whenever each upward directed set in the unit ball of X has the least upper bound belonging to the unit ball of X; see [21].

Theorem 4.4. *A Banach lattice X is injective with $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$ if and only if there exists an AL-space $\mathscr{X}$ unique up to lattice isometry within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ whose bounded descent $\mathscr{X}{\downarrow}^M$ is $\mathbb{B}$-isometric to X.*

$\lhd$ See [31, Theorem 2.1] or [10, Theorem 5.9.1]. $\rhd$

Lemma 4.5. *$\mathbb{P}_M(X) = \mathbb{M}(X)$ for every injective Banach lattice X.*

$\lhd$ Let X and $\mathscr{X}$ be the same as in Theorem 4.4. The mapping $\pi \mapsto \pi{\Downarrow} := \pi{\downarrow}|_X$ is an isomorphism of $\mathbb{P}_M(\mathscr{X}){\downarrow}$ and $\mathbb{P}_M(X)$. This can be proved as in [10, Theorem 5.9.1]. If $P \in \mathbb{P}_M(X)$ and $P \notin \mathbb{M}(X)$ then $\pi := P{\uparrow}$ is a nontrivial M-projection in $\mathscr{X}$ according to [10, Theorem 5.8.12], because $\mathbb{B}$-linearity of P amounts to saying that P commutes with each operator from $\mathbb{M}(X)$. Apart from the trivial case $X = \mathbb{R}$, this contradicts to Behrends' dichotomy (see [32, Theorem 1.8]), since the AL-space $\mathscr{X}$ has nontrivial L-projections. As to the trivial case, the M-projections of $\mathscr{R}{\downarrow}^M \simeq C(K)$ coincide with the characteristic projections $P_U(f) = \chi_U f$ $(f \in C(K))$ for clopen sets $U \subset K$ [32, Example 1.4 (a)]. $\rhd$

Now we introduce the Boolean versions of the concepts of normality and directedness of ordered Banach spaces which appear in the Davies characterization of L^1-predual spaces.

Definition 4.6. The norm on X is said to be $\mathbb{B}$-*normal* if for $x, y, z \in X$ with $x \leqslant y \leqslant z$ there exists a projection $\pi_0 \in \mathbb{B}$ such that $\|\pi_1 y\| \leqslant \|\pi_1 x\|$ and $\|\pi_2 y\| \leqslant \|\pi_2 z\|$ for all $\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{B}$ with $\pi_1 \leqslant \pi_0$ and $\pi_2 \leqslant \pi_0^*$.

Definition 4.7. Given $a \in X$, define $B_a(X) \subset X$ as the set of $x \in X$ with $\|\pi x\| \leqslant \|\pi a\|$ for all $\pi \in \mathbb{P}_L(X)$. Say that $B_a(X)$ is upward $\mathbb{B}$-*directed* if, for all $x_1, x_2 \in B_a(X)$, there exists $y \in B_a(X)$ with $y \geqslant x_1, x_2$.

Lemma 4.8. *Let X be the E-descent of an ordered Banach space $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ where E is a Dedekind complete Banach lattice and $\mathbb{B} = \mathbb{P}(E)$. Then the following hold:*

(1) *$\mathscr{X}_+$ is normal if and only if X_+ is $\mathbb{B}$-normal.*

(2) *$\mathscr{X}$ is directed if and only if $B_a(X)$ is upward $\mathbb{B}$-directed for all $a \in X$.*

$\lhd$ Recall that the E-valued norm $|\cdot|$ of X is the descent of the norm $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ of $\mathscr{X}$ and $\|x\|_X = \big\||x|\big\|_\infty$ for all $x \in X$. Observe first that for $a, b \in E_+$ we have $a \leqslant b$ if and only if $\|\pi a\|_E \leqslant \|\pi a\|_E$ for all $\pi \in \mathbb{B}$ (see the proof of Lemma 2.8). It follows that the conditions $|x| \leqslant |y|$ and $\|\pi x\| \leqslant \|\pi y\|$ for all $\pi \in \mathbb{B}$ are equivalent. Now it is clear that $B_a(X) = \{x \in X : \ |x| \leqslant |a|\}$.

(1) Suppose that $\mathscr{X}_+$ is normal and pick $x, y, z \in X$ with $x \leqslant y \leqslant z$. Then $[\![x \leqslant y \leqslant z]\!] = \mathbb{1}$ and $\|y\|_{\mathscr{X}} \leqslant \max\{\|x\|_{\mathscr{X}}, \|z\|_{\mathscr{X}}\}$. It follows that $|y| \leqslant |x| \vee |z|$ and there exists a band projection $\pi_0 \in \mathbb{B}$ such that $|x| \vee |z| = \pi_0|x| + \pi_0^*|z|$. The simple argument indicated above shows that $\|\pi y\| \leqslant \|\pi\pi_0 x\| + \|\pi\pi_0^* z\|$ for all $\pi \in \mathbb{B}$. Taking $\pi := \pi_1 \leqslant \pi_0$, we get $\|\pi_1 y\| \leqslant \|\pi_1 x\|$ and for $\pi := \pi_2 \leqslant \pi_0^*$ we have $\|\pi_2 y\| \leqslant \|\pi_2 z\|$. The converse can be proven by similar arguments.

(2) Denote by $B_1(\mathscr{X})$ the closed unit ball of $\mathscr{X}$ and put $B_\alpha(\mathscr{X}) = \alpha B_1(\mathscr{X})$. Note that $B_1(\mathscr{X})$ is upward directed if and only if so is $B_\alpha(\mathscr{X})$ for all $\alpha = \|a\|_{\mathscr{X}} \in \mathscr{R}$ with $a \in \mathscr{X}$. The straightforward calculation of Boolean truth-values yields that $B_\alpha(\mathscr{X})$ is upward directed if and only if $B_a(X)$ is upward directed for $\alpha = |a|$. Thus the directedness of X implies that $B_a(X)$ is upward directed for all $a \in X$, since $B_\alpha(\mathscr{X}){\downarrow} \subset X$. To show the converse, choose a partition of unity (π_ξ) in $\mathbb{B}$ and a family (a_ξ) in X such that $\pi_\xi a_\xi \in X$ and $\pi_\xi|a_\xi| = \pi_\xi\mathbf{1} \in X$ for all ξ. For $\mathbb{O} \neq b \in \mathbb{B}$ denote by $b\mathbb{B}$ the relative subalgebra $[\mathbb{O}, b]$. Assuming that all $B_{a_\xi}(X)$ are upward directed and taking into account the rule for transition to the relative universe $\mathbb{V}^{(b\mathbb{B})}$ (see [10, 1.3.7]) we infer that $B_{\alpha_\xi}(\mathscr{X}) = B_1(\mathscr{X})$ within $\mathbb{V}^{(\pi_\xi\mathbb{B})}$ and so $B_1(\mathscr{X})$ is upward directed within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. $\rhd$

Theorem 4.9. *For an ordered Banach space X the following are equivalent:*

(1) *X' is an injective Banach lattice.*

(2) *The four conditions hold:*

  (a) *X has the Riesz decomposition property.*

  (b) *$\mathbb{P}_L(X)$ consists of positive projections.*

  (c) *X_+ is $\mathbb{P}_L(X)$-normal.*

  (d) *$B_a(X)$ is upward $\mathbb{P}_L(X)$-directed for all $a \in X$.*

In cases (1) *and/or* (2) *the Boolean algebras $\mathbb{M}(X')$ and $\mathbb{P}_L(X)$ are isomorphic.*

$\lhd$ Let $\mathscr{X}$ be a Boolean valued representation of X as in Theorem 3.8. Just as in [10, Theorem 5.9.1] we can demonstrate that $X_+{\uparrow}$ is a pointed cone in $\mathscr{X}$ over $\mathbb{R}^\wedge_+$; i.e., $X_+{\uparrow} + X_+{\uparrow} \subset X_+{\uparrow}$ and $\mathbb{R}^\wedge_+ \cdot X_+{\uparrow} \subset X_+{\uparrow}$. Define the positive cone $\mathscr{X}_+$ as the closure of $X_+{\uparrow}$. Then $\mathscr{X}_+$ is a closed, possibly unpointed, cone so that $(\mathscr{X}, \mathscr{X}_+)$ is a preordered Banach space within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Recall that for $A \subset X$ we have $A{\uparrow}{\downarrow} = \operatorname{mix}(A) \subset \mathscr{X}{\downarrow}$, where $\operatorname{mix}(A)$ consists of all $x \in \mathscr{X}{\downarrow}$ for which there exists a partition of unity (π_ξ) in $\mathbb{B}$ and a family (a_ξ) in A such that $\pi_\xi x = \pi_\xi a_\xi$ for all ξ; see [10, 1.6.6]. Moreover, if $x \in X$ then $x = \sum_{\xi \in \Xi} \pi_\xi a_\xi$ by Lemma 2.11.

(1) $\Longrightarrow$ (2): If X' is an injective Banach lattice then $\mathbb{P}_M(X') = \mathbb{M}(X')$ by Lemma 4.4 and $\mathbb{P}_L(X)$ is isomorphic to $\mathbb{M}(X')$ by Theorem 2.10 (3). Applying the obvious duality representation $\mathbb{P}_L(X) = \{\pi \in \mathscr{L}(X) : \pi' \in \mathbb{P}_M(X)\}$, we conclude that L-projections on X are positive and so X_+ is invariant under all L-projections. Together with Lemma 2.11, this implies that $X_+ = \operatorname{mix}(X_+) \cap X = X_+{\uparrow}{\downarrow} \cap X$, which in turn yields that $X_+{\uparrow}$ is closed in $\mathscr{X}$; i.e., $\mathscr{X}_+ = X_+$. Thus, $\mathscr{X}$ is an ordered Banach space and $\mathscr{X}'$ is an AL-space within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ by Theorem 4.4. The Boolean

valued transfer principle enables us to apply the Davies Theorem to $\mathscr{X}$ and state that $\mathscr{X}$ has the Riesz decomposition property, $\mathscr{X}$ is directed, and $\mathscr{X}_+$ is normal. By Lemma 4.7 $B_a(X)$ is upward $\mathbb{P}_L(X)$-directed for all $a \in X$ and X_+ is $\mathbb{P}_L(X)$-normal. The Riesz decomposition property for $\mathscr{X}$ can be written in the equivalent form $\Sigma([0,a] \times [0,b]) = [0, \Sigma(a,b)]$, where $a, b \in \mathscr{X}_+$ and Σ is addition on $\mathscr{X}$. Then $\Sigma{\downarrow}$ is addition on X and $\Sigma([0,a] \times [0,b]){\downarrow} = \Sigma{\downarrow}([0,a]{\downarrow} \times [0,b]{\downarrow})$. The latter is equivalent to the Riesz decomposition property for X, since obviously the descent of an internal order interval $\{x \in \mathscr{X} : 0 \leqslant x \leqslant a\}$ coincides with $\{x \in X : 0 \leqslant x \leqslant a\}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Assume that X satisfies the conditions (a)–(d) of (2) and put $\mathbb{B} = \mathbb{P}_L(X)$. By (a), X_+ is invariant under L-projections, which together with the closedness of X_+ implies that X_+ is $\mathbb{B}$-complete. Defining the positive cone in $\mathscr{X}$ by $\mathscr{X}_+ := X_+{\uparrow}$, we can demonstrate just as in [10, Theorem 5.9.1] that $(\mathscr{X}, \mathscr{X}_+)$ is an ordered Banach space within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. As was shown above, X has the Riesz decomposition property if and only if so is $\mathscr{X}$ within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Prove that $\mathscr{X}$ is directed and $\mathscr{X}_+$ is normal. By Lemma 4.7, (c) and (d) imply that $\mathscr{X}_+$ is normal and $\mathscr{X}$ is directed. By the Boolean valued transfer principles Theorem 4.2 is true within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ and so $\mathscr{X}$ is an L^1-predual space; i. e., $\mathscr{X}'$ is an AL-space. It remains to appeal again to Theorem 4.4. By Lemma 4.5 $\mathbb{M}(X')$ and $\mathbb{P}_L(X)$ are isomorphic. $\rhd$

References

1. *Scott D. S.* Boolean-valued Models for Set Theory. Mimeographed notes for the 1967 American Math. Soc. Symposium on axiomatic set theory, 1967.
2. *Vopěnka P.* General theory of $\bigtriangledown$-models // Comment. Math. Univ. Carolin.—1967.—Vol. 8, № 1.—P. 147–170.
3. *Bell J. L.* Set Theory: Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—Oxford: Clarendon Press, 2005.—xxii+191 p.—(Oxford Logic Guides; Vol. 47).
4. *Takeuti G., Zaring W. M.* Axiomatic Set Theory.—New York: Springer-Verlag, 1973.—238 p.
5. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis.—Dordrecht a. o.: Kluwer, 1995.
6. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Introduction to Boolean Valued Analysis.—Moscow: Nauka, 2005.—526 p.
7. *Gordon E. I.* Real numbers in Boolean valued models of set theory and K-spaces // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1977.—Vol. 237, № 4.—P. 773–775.
8. *Takeuti G.* A transfer principle in harmonic analysis // J. Symbolic Logic.—1979.—Vol. 44, № 3.—P. 417–440.
9. *Takeuti G.* Boolean valued analysis // Applications of Sheaves. (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—P. 714–731.—(Lecture Notes in Math.; Vol. 753).
10. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—iv+400 p.
11. *Lotz H. P.* Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.—Vol. 211.—P. 85–100.
12. *Arendt W.* Factorization by lattice homomorphisms // Math. Z.—1984.—Vol. 185, № 4.—P. 567–571.
13. *Abramovich Y. A.* Weakly compact sets in topological Dedekind complete vector lattices // Teor. Funkciĭ, Funkcional. Anal. i Priložen.—1972.—Vol. 15.—P. 27–35.
14. *Goodner D. B.* Projections in normed linear spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1950.—Vol. 69.—P. 89–108.
15. *Kelley J. L.* Banach spaces with the extension property // Trans. Amer. Math. Soc.—1952.—Vol. 72.—P. 323–326.
16. *Nachbin L.* A theorem of Hahn–Banach type for linear transformation // Trans. Amer. Math. Soc.—1950.—Vol. 68.—P. 28–46.

17. *Buskes G.* Separably-injective Banach lattices are injective // Proc. Roy. Irish Acad. Sect.—1985.—Vol. A85, № 2.—P. 185–186.
18. *Cartwright D. I.* Extension of positive operators between Banach lattices // Memoirs Amer. Math. Soc.—1975.—Vol. 164.—P. 1–48.
19. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer, 1991.—xvi+395 p.
20. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D.* Positive operators // Handbook of the Geometry of Banach Spaces.—Amsterdam a. o.: Elsevier Science B. V., 2001.—Vol. 1.—P. 85–122. (Eds. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss).
21. *Haydon R.* Injective Banach lattices // Math. Z.—1974.—Vol. 156.—P. 19–47.
22. *Asimow L., Ellis A. J.* Convexity Theory and Its Applications in Functional Analysis.—London etc.: Academic Press, 1980.
23. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* On the isomorphic classification of injective Banach lattices // Advances Math.—1981.—Vol. 7B.—P. 489–498.
24. *Mangheni P. J.* The classification of injective Banach lattices // Israel J. Math.—1984.—Vol. 48.—P. 341–347.
25. *Lindenstrauss J., Wulbert D. E.* On the classification of he Banach spaces whose duals are L^1-spaces // J. Funct. Anal.—1969.—Vol. 4.—P. 332–349.
26. *Kusraev A. G.* Dominated Operators.—Dordrecht: Kluwer, 2000.
27. *Kusraev A. G.* Boolean valued transfer principle for injective Banach lattices // Siberian Math. J.—2015.—Vol. 56, № 5.—P. 1111–1129.
28. *Haydon R., Levy M., Raynaud Y.* Randomly Normed Spaces.—Paris: Hermann, 1991.
29. *Davies E. B.* The structure and ideal theory of the predual of a Banach lattice // Trans. Amer. Math. Soc.—1968.—Vol. 131.—P. 544–555.
30. *Effros E. G.* Structure in simplexes // Acta Math.—1967.—Vol. 117.—P. 103–121.
31. *Kusraev A. G.* Boolean valued transfer principle for injective Bananch lattices // Siberian Math. J.—2015.—Vol. 25, № 1.—P. 57–65.
32. *Harmand P., Werner D., Wener W.* M-Ideals in Banach Spaces and Banach Algebras.—Berlin etc.: Springer, 1993.—(Lecture Notes in Math.; Vol. 1547).

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

THE S. L. SOBOLEV SPACES. METHOD OF SYMMETRIZATION

A. F. Tedeev
(Russia, Vladikavkaz; SMI VSC RAS)

Introduction

The study of isoperimetric inequalities goes back to antiquity. The solution of Dido's problem states that, of all plane domains of given perimeter, the circular disc, and the disc alone, maximizes the enclosed area. Equivalently, of all domains of given area, the disc minimizes the perimeter. This is expressed via the classical isoperimetric inequality

$$L^2 \geqslant 4\pi A,$$

where L stands for the perimeter and A for the enclosed area of a domain in the plane. Equality is attained only for the disc. In three dimensional space, if S is the surface area of a body and V its volume, then

$$S^3 \geqslant 36\pi V^2$$

and equality is attained only for the sphere. In the case of N-dimensional case we proceed as follows. Fix $R > 0$, let $B(R)$ be a ball centered at origin then $V(R) = \omega_N R^N$ and $S(R) = N\omega_N R^{N-1}$.

In terms of V we have $S = N\omega_N^{\frac{1}{N}} V^{\frac{N-1}{N}}$. Therefore the isoperimetric inequality should be in the form

$$S \geqslant N\omega_N^{\frac{1}{N}} V^{\frac{N-1}{N}}.$$

The classical S. L. Sobolev inequality reads as follows. Let $u(x) \in W_0^{1,p}(R^N)$ and $1 < p < N$. Then

$$\left(\int\limits_{R^N} |u|^{p*} \, dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant S(N,p) \left(\int\limits_{R^N} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{0.1}$$

where $p^* = \frac{Np}{N-p}$ the critical Sobolev exponent. Applying the Hölder inequality we obtain the Gagliardo–Nirenberg inequality:

$$\|u\|_q \leqslant C \, \|\nabla u\|_p^\theta \, \|u\|_r^{1-\theta} ,$$

where $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, and θ is determined by the dimensional analysis:

$$\frac{N}{q} = \theta \frac{N-p}{p} + (1-\theta)\frac{N}{r}.$$

Here $0 < r < q$. Sobolev inequalities were developed in several directions. We refer the reader to monograph [1] for further references. Several approaches exist in literature when proving the Sobolev inequality. The classical approach is based on the integral representation:

$$u(x) = c \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{R^N} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^N} u_{y_i} dx,$$

which is valid for $u \in C_0^1(R^N)$. This approach works with $p > 1$. The case $p = 1$ is due the Gagliardo result, which reads as follows

$$\left(\int\limits_{R^N} |u|^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \leqslant S(N) \left(\int\limits_{R^N} |\nabla u| \, dx \right). \tag{0.2}$$

It is easy to prove that from the last inequality the Sobolev inequality for any $p > 1$ can be proved by choosing $u = v^\gamma$ in (0.2) for a suitable γ. Indeed, we have

$$\left(\int\limits_{R^N} |v|^{\frac{\gamma N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \leqslant S(N) \left(\int\limits_{R^N} \gamma \, |v|^{\gamma-1} |\nabla v| \, dx \right).$$

By the Hölder inequality we have

$$\int\limits_{R^N} |v|^{\gamma-1} |\nabla v| \, dx \leqslant \left(\int\limits_{R^N} |v|^{\frac{p(\gamma-1)}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{R^N} |\nabla v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Choose γ as follows:

$$\frac{p(\gamma-1)}{p-1} = \frac{\gamma N}{N-1}, \quad \text{that is } \gamma = \frac{p(N-1)}{N-p}.$$

Completely different approach to prove the Sobolev inequality was proposed by V. G. Maz'ya [1] and later by G. Talenti [2, 3]. The proof was based on the geometrical measure theory (see [4]). The symmetrization method which is based on the geometric measure theory as well was applied for proving the Sobolev inequality by G. Talenti [2, 3]. This way the precise constant in the Sobolev inequality was obtained.

The goal of the lectures is to give the proof of the Sobolev inequality applying the symmetrization technique following G. Talenti (see also [5]). Main ingredients of symmetrization technique are: representation of the Lebesgue integral as a Riemann integral by distribution function, the Federer co-area formula, the isoperimetric inequality in the sense of De Georgi. The structure of lectures are as follows. In the material of lectures 1 and 2 we use [1] in essential way. While in lectures we follow [2, 3, 5].

Lecture 1. Representation of the Lebesgue Integral as a Riemann Integral along a Halfspace

Theorem 1.1. *Let $u : X \to R^1$ be a μ-measurable nonnegative function. Then*

$$\int\limits_X u(x)\mu(d(x)) = \int\limits_0^\infty \mu(M_t)dt = \int\limits_0^\infty \mu(L_t)dt, \tag{1.1}$$

where $M_t = \{x \in X : u(x) > t\}$, $L_t = \{x \in X : u(x) \geqslant t\}$, $\mu(M_t) := \mathrm{meas}_N M_t$

$\lhd$ Let $u(x) \leqslant A < \infty$. Let $\{t_k\}_{k=0}^m$ be such that $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = A$. Then

$$X = M_{t_m} \cup \Big(\bigcup_{k=0}^{m-1} (M_{t_k} \backslash M_{t_{k+1}}) \Big),$$

and therefore by additivity property of integral we have

$$\int\limits_X u(x)\mu(d(x)) = \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{M_{t_k}\backslash M_{t_{k+1}}} u(x)\mu(d(x)) + \int\limits_{M_{t_m}} u(x)\mu(d(x)).$$

Hence

$$\sum_{k=0}^{m-1} t_k \mu(M_{t_k}\backslash M_{t_{k+1}}) + t_m \mu(M_{t_m}) \leqslant \int\limits_X u(x)\mu(d(x)) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} t_{k+1} \mu(M_{t_k}\backslash M_{t_{k+1}}) + t_m \mu(M_{t_m}).$$

Evidently $\mu(M_{t_k}\backslash M_{t_{k+1}}) = \mu(M_{t_k}) - \mu(M_{t_{k+1}})$. By the discrete version of the integration by parts formula we have

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k(b_k - b_{k+1}) = a_0 b_0 - a_{m-1} b_m + \sum_{k=0}^{m-1} b_k (a_k - a_{k-1}).$$

Thus, putting $a_k = t_k$, $b_k = \mu(M_{t_k})$, we have

$$\sum_{k=0}^{m} (t_k - t_{k-1})\mu(M_{t_k}) = \sum_{k=0}^{m-1} (t_k - t_{k-1})\mu(M_{t_k}) + (t_m - t_{m-1})\mu(M_{t_m}) \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_X u(x)\mu(d(x)) \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} (t_{k+1} - t_k)\mu(M_{t_k}).$$

Refining the partition and passing to the limit, we arrive at the inequality (1.1). For the unbounded function we use the trancated functions. That is $u_k(x) = \min\{u(x), k\}$. Note that $u_k(x), k \geqslant 1$ converge in measure to $u(x)$. Hence by Beppo–Levi theorem,

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_X u_k(x)\mu(d(x)) = \int\limits_X u(x)\mu(d(x)).$$

Finally, noting that

$$\int_X u_k(x)\mu(d(x)) = \int_0^k \mu(M_t)dt \to \int_0^\infty \mu(M_t)dt$$

as $k \to \infty$ we arrive at the desired result. $\rhd$

REMARK 1.1. The result of Theorem 1.1 is still valid if we formally replace the measure by charge and without assuming that $u(x)$ has the definite sign.

Lecture 2. The Fleming–Rishell–Federer Co-area Formula

Theorem 2.1. *Let $\Phi \in C(\Omega)$, $\Phi \geqslant 0$, and $u \in C^\infty(\Omega)$, where Ω is an open subset of R^N. Then*

$$\int_\Omega \Phi(x)\,|\nabla u|\,dx = \int_0^\infty dt \int_{E_t} \Phi(x)\,ds, \tag{2.1}$$

where $E_t = \{x \in \Omega : |u(x)| = t\}$

$\lhd$ Let w be an N-tuple vector functions in $D(\Omega)$. Using the integration by parts formula and applying Theorem 1.1. we have

$$\int_\Omega w\nabla u\,dx = -\int_\Omega u \operatorname{div} w\,dx = -\int_0^\infty dt \int_{u\geqslant t} \operatorname{div} w\,dx + \int_{-\infty}^0 dt \int_{u\leqslant t} \operatorname{div} w\,dx.$$

Since $u \in C^\infty(\Omega)$, then almost all t the sets $\{x : u(x) = t\}$ are infinitely differentiable manifolds. Therefore for almost all t

$$\int_{u\geqslant t} \operatorname{div} w\,dx = -\int_{u=t} w\nu\,ds = -\int_{u=t} w\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\,ds,$$

where ν is the normal to $\{x : u = t\}$ directed into the set $\{x : u \geqslant t\}$. The integral

$$\int_{u\leqslant t} \operatorname{div} w\,dx$$

must be treated analogously. Consequently,

$$\int_\Omega w\nabla u\,dx = \int_0^\infty dt \int_{u=t} w\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\,ds.$$

Setting

$$w = \Phi\frac{\nabla u}{\big(|\nabla u|^2 + \varepsilon\big)^{\frac{1}{2}}},$$

where $\Phi \in D(\Omega)$ and $\varepsilon > 0$, we obtain

$$\int_\Omega \Phi\frac{|\nabla u|^2}{\big(|\nabla u|^2 + \varepsilon\big)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_0^\infty dt \int_{u=t} w\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\,ds.$$

Passing to the limit as $\varepsilon \to 0$ and making use of Beppo Levi's monotone convergence theorem we obtain (2.1). $\rhd$

Lecture 3. The Decreasing Rearrangements

Schwarz symmetrization is particular kind of rearrangements of functions defined on domain $\Omega \subset R^N$. Given a real valued function on such a domain, we construct an associated function, on a ball centered at the origin and of he same measure of Ω. Given a Lebesgue measurable subset $E \subset R^N$, we denote its N -dimensional measure by $|E|$. Let $u : \Omega \to R$ be a measurable function. For $t \in R$, the level set $\{u > t\}$ is defined as $\{u > t\} = \{x \in \Omega : u > t\}$. Then the distribution function of u is given by $\mu_u(t) = |\{u > t\}|$. This function is a monotonically decreasing function of t and for $t \geqslant ess\sup u$, we have $\mu_u(t) = 0$, while for $t \leqslant ess\sup u$, $\mu_u(t) = |\Omega|$. Thus the range of μ_u is the interval $[0, |\Omega|]$.

Definition 3.1. Let $\Omega \subset R^n$ be a bounded and let $u : \Omega \to R$ be a measurable function. The decreasing rearrangement of u, denoted by u^*, is defined on $[0, |\Omega|]$ by $u^*(0) = \operatorname{ess\,sup} u$, $u^*(s) = \inf\{t : \mu_u(t) < s\}$, $s > 0$.

Let us remark that u^* is essentially the inverse function of the distribution function μ_u of u. However, since $\mu_u(t)$ is just monotonically decreasing, it can have jump discontinuities. If t is the point of discontinuity, then the above definition fixes the value of u^* is the interval $\{\mu_u(t+), \mu_u(t-)\}$ as t.

Example 3.1. Let $u(x) = |x|^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Then $\mu_{|x|^{-\alpha}}(t) = |\{|x|^{-\alpha} > t\}| = C_N t^{-\frac{N}{\alpha}}$. Therefore the inverse to $\mu_{|x|^{-\alpha}}(t)$ is $u^*(s) = C_N^{\frac{\alpha}{N}} s^{-\frac{\alpha}{N}}$. Denote by $u^{\#}(x) = u^*(C_N|x|^N)$ the spherical symmetrization of $u(x)$. Then for $u(x) = |x|^{-\alpha}$ we have $u^{\#}(x) = |x|^{-\alpha}$. That is for spherically symmetric functions $u(x) = u^{\#}(x)$

Proposition 3.1. *Let $u\colon \Omega \to R$ where Ω is bounded. Then u^* is a nonincreasing and left-continuous function.*

$\lhd$ (i) Let $s_1 < s_2$. Then $|\{u > t\}| < s_1$ implies that $|\{u > t\}| < s_2$. Thus, $\{t : \mu_u(t) < s_1\} \subset \{t : \mu_u(t) < s_2\}$. By definition of u^* it follows that $u^*(s_1) \geqslant u^*(s_2)$.

(ii) Let $s \in (0, |\Omega|)$. By definition of u^*, given $\varepsilon > 0$, there exists a t such that $u^*(s) \leqslant t \leqslant u^*(s) + \varepsilon$ and $\mu_u(t) < s$. Choose $h > 0$ such that $\mu_u(t) < s - h < s$. Then for all $0 < h' \leqslant h$, we have $\mu_u(t) < s - h' < s$ and thus $u^*(s) \leqslant u^*(s - h') \leqslant t < u^*(s) + \varepsilon$. That is u^* is left-continuous.

Proposition 3.2. *The mapping $u \to u^*$ is nondecreasing, that is if $u \leqslant v$ then $u^* \leqslant v^*$.*

Definition 3.2. The real valued functions are said to be equimeasarable if they have the same distributional function.

Proposition 3.3. *The functions $u\colon \Omega \to R$ and $u^*\colon [0, |\Omega|]$ are equimeasurable:* $|\{u > t\}| = |\{u^* > t\}|$.

$\lhd$ If $u^* > t$, then by definition, it follows that $|\{u > t\}| \geqslant s$. Thus, $\{s : \{u^* > t\}\} \subset \{s : \{u > t\} \geqslant s\}$. Since u^* is nonincreasing, we have $|\{u^* > t\}| = \sup\{s : \{u^* > t\}\} \leqslant |\{u > t\}|$. In he same time let $|\{u^* \geqslant t\}| = s$. Then by left-continuity and nonincreasing nature of u^* it follows that $u^*(s) = t$. Then, by definition, $|\{u^* \geqslant t\}| \leqslant s$. Thus, $|\{u > t\}| \leqslant |\{u^* > t\}|$. Applying above inequalities for $t + h$, we have $|\{u^* > t + h\}| \leqslant |\{u > t + h\}| \leqslant |\{u^* \geqslant t + h\}|$. Finally, letting $h \to 0$ we arrive at $|\{u^* > t\}| \leqslant |\{u > t\}| \leqslant |\{u^* > t\}|$. $\rhd$

Corollary 3.1. *The Cavalieri principle. If $u \geqslant 0$, and if $u \in L^p(\Omega)$ for $1 \leqslant p \leqslant \infty$, then $u^* \in L^p((0, |\Omega|)$ and*

$$\|u\|_{p,\Omega} = \|u^*\|_{p,(0,|\Omega|)}$$

$\lhd$ If $p = \infty$, then the result is obtained in the definition of the rearrangement. Let $1 \leqslant p < \infty$. By equimeasurability, both u and u^* have the same distribution function. We have

$$\|u\|^p_{p,\Omega} = p \int\limits_0^\infty t^{p-1}\mu_u(t)\, dt = -\int\limits_0^\infty \mu_u(t)\, dt^p = \|u^*\|^p_{p,(0,|\Omega|)} .$$

Proposition 3.4. *Let $\psi : R \to R$ be a nondecreasing function. Then*

$$\psi(u^*) = (\psi(u))^* .$$

Proposition 3.5. *Let $\Omega \subset R^N$ is bounded and let $u : \Omega \to R$ be an integrable function. Let $E \subset \Omega$ be a measurable subset. Then*

$$\int\limits_E u(x)\, dx \leqslant \int\limits_0^E u^*(s)\, ds.$$

Theorem 3.1 (Hardy–Littlewood)**.** *Let $f \in L^p(\Omega)$ and $g \in L^q(\Omega)$, where $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$.Then*

$$\int\limits_\Omega f(x)g(x)\, dx \leqslant \int\limits_0^{|\Omega|} f^*(s)g^*(s)\, ds$$

isoperimetric inequality.

In what follows we need the following isoperimetric inequality:

$$P(t) = \big|\, \{u = t\}\, \big|_{N-1} \geqslant n\omega_N^{\frac{1}{N}} \mu(t)^{\frac{N-1}{N}},$$

which holds true for $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

Theorem 3.2 (the Polya–Szegö inequality)**.** *Let $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$, $p > 1$. Then the following inequality holds true*

$$C_N \int\limits_0^\infty s^{\frac{N-1}{N}p}(-u^*_s(s))^p\, ds \leqslant \int\limits_\Omega |\nabla u|^p\, dx.$$

$\lhd$ By the Hölder inequality we have

$$\frac{1}{h} \int\limits_{t<|u|\leqslant t+h} |\nabla u|\, dx \leqslant \left(\frac{1}{h} \int\limits_{t<|u|\leqslant t+h} |\nabla u|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{h} \left(\mu(t+h) - \mu(t) \right) \right)^{\frac{p-1}{p}} .$$

Next we note that by Theorem 2.1 we have

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{t<|u|\leqslant t+h}|\nabla u|^p\,dx=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{t}^{t+h}d\tau\int\limits_{\{|u|=\tau\}}|\nabla u|^{p-1}\,dS=$$

$$=\int\limits_{\{|u|=t\}}|\nabla u|^{p-1}\,dS=-\frac{d}{dt}\int\limits_{|u|>t}|\nabla u|^p\,dx.$$

In particular, for $p=1$ we have

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_{|u|>t}|\nabla u|\,dx=\int\limits_{\{|u|=\tau\}}dS=P(t).$$

Therefore we have

$$P(t)\leqslant\left(-\frac{d}{dt}\int\limits_{|u|>t}|\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(-\frac{d\mu}{dt}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

By the isoperimetric inequality we have

$$\omega_n^{\frac{1}{n}}\mu(t)^{\frac{n-1}{n}}\leqslant\left(-\frac{d}{dt}\int\limits_{|u|>t}|\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(-\frac{d\mu}{dt}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Let $\mu(t)=s$. Then $u^*(s)=t$ and we obtain

$$N\omega_N^{\frac{1}{N}}s^{\frac{N-1}{N}}\leqslant\left(-\frac{1}{\frac{du^*(s)}{ds}}\frac{d}{ds}\int\limits_{|u|>u^*(s)}|\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(-\frac{1}{\frac{du^*(s)}{ds}}\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

that is

$$N^p\omega_N^{\frac{p}{N}}s^{\frac{N-1}{N}p}\left(-\frac{du^*(s)}{ds}\right)^p\leqslant-\frac{d}{ds}\int\limits_{|u|>u^*(s)}|\nabla u|^p\,dx.$$

Finally, integrating the last inequality between 0 and ∞, we arrive at the desired result. $\triangleright$

Corollary 3.2. *Let $s=\omega_N|x|^N$, $u^{\#}(x)=u^*(\omega_N|x|^N)$, $|\Omega^{\#}|=|\Omega|$, where $|\Omega^{\#}|$ is a ball centered at the origin. Then the inequality takes the form*

$$\int\limits_{\Omega^{\#}}\left|\nabla u^{\#}\right|^p dx\leqslant\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^p\,dx.$$

Lecture 4. The S. L. Sobolev Inequality

Theorem 4.1. *Let $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, and $1 < p < N$. Then the following Sobolev inequality holds true*

$$\|u\|_{p^*} \leqslant S(N,p)\,\|\nabla u\|_p\,, \tag{4.1}$$

where $p^* = \frac{Np}{N-p}$ is the critical Sobolev inequality.

$\lhd$ We will prove (4.1) by making use of the Lorentz spaces. Lorentz space $L^{p,q}(E)$ is defined as the space of measurable functions $u : u \to R$ such that

$$\|u\|_{p,q} := \left(\int\limits_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} u^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

where $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$. It is well known that

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(t^{\frac{1}{q}} u^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c(p,q)\left(\int\limits_0^\infty \left(t^{\frac{1}{q}} u^*(t)\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}},$$

where $p < q$. Choosing $q = p^*$, we get

$$\|u\|_{p^*} = \left(\int\limits_0^\infty u^*(t)^{p^*} dt\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant c(p,N)\left(\int\limits_0^\infty u^*(t)^p t^{-\frac{p}{N}}\, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

We claim that the following Hardy inequality holds true:

$$\int\limits_0^\infty u^*(t)^p t^{-\frac{p}{N}} dt \leqslant \left(\frac{Np}{N-p}\right)^p \int\limits_0^\infty \left(-\frac{d}{dt}u^*(t)\right)^p t^{p-\frac{p}{N}}\, dt.$$

Indeed, we have

$$\frac{d}{dt}\left(u^*(t)^p \int\limits_0^t s^{-\frac{p}{N}} ds\right) = u^*(t)^p t^{-\frac{p}{N}} + \frac{Np}{N-p} t^{1-\frac{p}{N}} u^*(t)^{p-1} \frac{d}{dt}\, u^*(t).$$

Integrating this inequality between 0 and ∞, we obtain

$$\int\limits_0^\infty u^*(t)^p t^{-\frac{p}{N}} dt = \frac{Np}{N-p}\int\limits_0^\infty u^*(t)^{p-1}\left(-\frac{d}{dt}u^*(t)\right) t^{1-\frac{p}{N}}\, dt.$$

Applying to the last inequality the Hölder inequality, we get

$$\int\limits_0^\infty u^*(t)^p t^{-\frac{p}{N}} dt \leqslant \frac{Np}{N-p}\left(\int\limits_0^\infty u^*(t)^p t^{-\frac{p}{N}}\, dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_0^\infty \left(-\frac{d}{dt}u^*(t)\right)^p t^{p-\frac{p}{N}}\, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Therefore, dividing both sides by

$$\left(\int_0^\infty u^*(t)^p t^{-\frac{p}{N}}\,dt\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

we arrive at the desired result. Finally, by the Hardy and the Polya–Szegö inequalities we have

$$\left(\int_0^\infty u^*(t)^p t^{-\frac{p}{N}}\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c(p,N)\left(\int_0^\infty \left(-\frac{d}{dt}u^*(t)\right)^p t^{p-\frac{p}{N}}dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant S(p,N)\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Therefore we arrive at the desired result. $\rhd$

The following results are consequences of the Sobolev inequality.

1) *The Hardy inequality*

Let $1<p<N$. Then for any $u\in C_0^\infty(R^N)$ he following inequality holds true

$$\int_{R^N}\frac{|u|^p}{|x|^p}\,dx \leqslant \left(\frac{p}{N-p}\right)^p\int_{R^N}|\nabla u|^p\,dx. \tag{4.2}$$

$\lhd$ We have by the Hardy–Littlwood inequality

$$\int_{R^N}\frac{|u|^p}{|x|^p}\,dx \leqslant \omega_N^{\frac{p}{N}}\int_0^\infty \frac{u^*(s)^p}{s^{\frac{p}{N}}}\,ds. \tag{4.3}$$

Next, we have the identity

$$\frac{d}{d\tau}\left[u^*(s)^p\left(\int_0^s\frac{d\tau}{\tau^{\frac{p}{N}}}\right)\right] = pu^*(s)^{p-1}\frac{du^*(s)}{ds}\left(\int_0^s\frac{d\tau}{\tau^{\frac{p}{N}}}\right)+\frac{u^*(s)^p}{s^{\frac{p}{N}}}.$$

Integrating this inequality between 0 and ∞, we obtain

$$\begin{aligned}\omega_N^{\frac{p}{N}}\int_0^\infty\frac{u^*(s)^p}{s^{\frac{p}{N}}}\,ds &= p\omega_N^{\frac{p}{N}}\int_0^\infty u^*(s)^{p-1}\left(-\frac{du^*(s)}{ds}\right)\left(\int_0^s\frac{d\tau}{\tau^{\frac{p}{N}}}\right) = \\ &= \frac{pN}{N-p}\omega_N^{\frac{p}{N}}\int_0^\infty s^{\frac{N-p}{N}}u^*(s)^{p-1}\left(-\frac{du^*(s)}{ds}\right)ds.\end{aligned} \tag{4.4}$$

By the Hölder inequality we have

$$\int_0^\infty s^{\frac{N-p}{N}}u^*(s)^{p-1}\left(-\frac{du^*(s)}{ds}\right)ds \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^\infty s^{\frac{N-1}{N}p}\left(-\frac{du^*(s)}{ds}\right)^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty\frac{u^*(s)^p}{s^{\frac{p}{N}}}\,ds\,ds\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Combining this inequality with (4.4) and making use the Polya-Szegö inequality, we get

$$\omega_N^{\frac{p}{N}} \int\limits_0^\infty \frac{u^*(s)^p}{s^{\frac{p}{N}}}\, ds \leqslant \left(\frac{p}{N-p}\right)^p \omega_N^{\frac{p}{N}} N^p \int\limits_0^\infty s^{\frac{N-1}{N}p} \left(-\frac{du^*(s)}{ds}\right)^p ds \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{p}{N-p}\right)^p \int\limits_{R^N} |\nabla u|^p \, dx.$$

Finally the last inequality together with (4.3) yield the desired result. $\rhd$

Let us remark that the constant in (4.2) is sharp.

2) *The Friedrich inequality.*

Let $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *and* $p > 1$. Then

$$\int\limits_\Omega |u|^p \, dx \leqslant C(N,p)\, |\Omega|^{\frac{p}{N}} \int\limits_\Omega |\nabla u|^p \, dx. \tag{4.5}$$

$\lhd$ Applying the Hölder inequality and using (4.1) one gets

$$\int\limits_\Omega |u|^p \, dx \leqslant \left(\int\limits_\Omega |u|^{p^*} \, dx\right)^{\frac{p}{p^*}} |\Omega|^{\frac{p}{N}} \leqslant S(N,p)^p \, |\Omega|^{\frac{p}{N}} \int\limits_\Omega |\nabla u|^p \, dx.$$

As desired. $\rhd$

3) *The Hardy–Sobolev inequality.*

Let $1 < q < p$, and $p^*(q) = \frac{(N-q)p}{N-p}$. Then for any $u \in C_0^N(R^N)$ we have

$$\int\limits_{R^N} \frac{|u|^{p^*(q)}}{|x|^q}\, dx \leqslant \gamma \left(\int\limits_{R^N} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{N-q}{N-p}}.$$

$\lhd$ Indeed, applying the Hölder inequality, and making use Sobolev and Hardy inequalities, we have

$$\int\limits_{R^N} \frac{|u|^{p^*(q)}}{|x|^q}\, dx \leqslant \left(\int\limits_M \frac{|u|^p}{|x|^p}\, d\mu\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\left(\int\limits_{R^N} |u|^{p^*} \, dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \leqslant \gamma \left(\int\limits_{R^N} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{N-q}{N-p}}.$$

As desired. $\rhd$

Appendix. Lorentz spaces

Consider the space $L(p,q)$ of all those measurable functions f satisfying

$$\|f\|^*_{pq} = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

when $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, and

$$\|f\|^*_{pq} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty,$$

when $1 \leqslant p < \infty$ and $q = \infty$. When $p = q$, then

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty [f^*]^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|f^*\|_p\,, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Note that these definitions make sense also when $0 < p < 1$ and $0 < q < 1$. We don't consider these cases. Note also that $\|f\|^*_{pq}$ is not a norm in general.

Theorem A1. *If $f \in L(p, q_1)$ and $q_1 \leqslant q_2$ then*

$$\|f\|^*_{pq_2} \leqslant \|f\|^*_{pq_1} \tag{A1}$$

consequently,

$$L(p, q_1) \subset L(p, q_2). \tag{A2}$$

Suppose $\|\ \|$ is order preserving norm that is $\|g\| \leqslant \|f\|$ whenever $|g(x)| \leqslant |f(x)|$, a.e. defined on the simple function on Ω; then

$$\|\chi_E\| \leqslant \{\mu(E)\}^{\frac{1}{p}} \text{ for all } E \subset \Omega \text{ implies } \|f\| \leqslant \|f\|^*_{p1} \quad \text{for all simple functions } f, \tag{A3}$$

$$\{\mu(E)\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \|\chi_E\| \text{ for all } E \subset \Omega \text{ implies } \|f\|^*_{p\infty} \leqslant \|f\| \quad \text{for all simple functions } f. \tag{A4}$$

$\lhd$ Inequality (A1) for $q_2 = \infty$ can be shown simple way. Since f^* is nonincreasing,

$$t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = f^*(t) \left\{\frac{q_1}{p}\int_0^t u^{\frac{q_1}{p}-1} du\right\}^{\frac{1}{q_1}} \leqslant \left\{\frac{q_1}{p}\int_0^t \left[u^{\frac{1}{p}} f^*(u)\right]^{q_1} \frac{du}{u}\right\}^{\frac{1}{q_1}} \leqslant \|f\|^*_{pq_1}\,.$$

By taking supremum of $t^{\frac{1}{p}} f^*(t)$ over all $t > 0$, we obtain the desired result. When $q_2 < \infty$, it is enough to prove (A1) for simple functions. Let

$$f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}, \quad \text{where } E_j \cap E_k = \varnothing \text{ if } j \neq k.$$

We may assume that $c_1 > c_2 > \cdots > c_n$, $c_{n+1} = 0$. Let $d_j = \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, and define d_0 to be 0. Then the distributional function has a form

$$\mu(s) = d_j \text{ if } c_{j+1} \leqslant s \leqslant c_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \text{and } \mu(s) = 0 \text{ if } c_1 \leqslant s.$$

It follows that $f^*(t) = c_j$ if $d_{j-1} \leqslant t < d_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, and $f^*(t) = 0$ if $d_n \leqslant t$. Thus we have

$$\|f\|_{pq}^* = \left\{ \sum_{j=1}^n c_j^q \left(d_j^{\frac{q}{p}} - d_{j-1}^{\frac{q}{p}} \right) \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Setting $a_j = c_j^{q_2}$, $b_j = d_j^{\frac{q_2}{p}}$ and $\theta = \frac{q_1}{q_2}$ we have to prove that

$$\sum_{j=1}^n a_j \left(b_j - b_{j-1}\right) \leqslant \left\{ \sum_{j=1}^n a_j^\theta \left(b_j^\theta - b_{j-1}^\theta \right) \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{A5}$$

where $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$, $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n$ and $0 < \theta \leqslant 1$. We proceed by induction. When $n = 1$ (A5) reduces to $a_1 b_1 \leqslant \left(a_1^\theta b_1^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}$, which is true. Assume that (A5) is true for $n = N$. Let

$$\varphi(x) = \left\{ \sum_{j=1}^N a_j^\theta \left(b_j^\theta - b_{j-1}^\theta \right) + x^\theta \left(b_{N+1}^\theta - b_N^\theta \right) \right\}^{\frac{1}{\theta}} = \left(A + x^\theta B \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

and

$$l(x) = \sum_{j=1}^N a_j \left(b_j - b_{j-1}\right) + x(b_{N+1} - b_N) = A_1 + xB_1, \quad 0 \leqslant x \leqslant a_N.$$

We want to show that $\varphi(a_{N+1}) \geqslant l(a_{N+1})$ whenever $0 < a_{N+1} < a_N$. By the induction assumption $\varphi(0) \geqslant l(0)$ and $\varphi(a_N) \geqslant l(a_N.)$. On the other hand , since the derivative $\varphi'(x) = B(Ax^{-\theta} + B)^{\frac{1}{\theta}-1}$ of φ is decreasing on the positive real axis, the function φ must be concave. Thus, the fact it dominates the linear function l at the end of points 0 and a_N implies that $\varphi(x) \geqslant l(x)$ for $0 \leqslant x \leqslant a_N$. This proves (A1). Part (A2) is then an immediate consequence. Since $\| \ \|$ is order preserving it suffices to show (A3) when

$$f = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{E_j}$$

is a nonnegative simple function. Let $c_1 > c_2 > \cdots > c_n > c_{n+1}$ and the sets $E_1, \ldots, E_n$ are pairwise disjoint. If $k = 1, 2, \ldots, n$ define $f_k b_k \chi_{F_k}$, where $F_k = \cup_{j=1}^k E_j$ and $b_k = c_k - c_{k+1}$. Then

$$f^*(t) = \sum_{k=1}^n f_k^*(t), \quad t > 0,$$

and

$$\|f\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|f_k\| = \sum_{k=1}^{n} b_k \|\chi_{F_k}\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k \left\{\mu(F_k)\right\}^{\frac{1}{p}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p} \int\limits_0^{\infty} t^{\frac{1}{p}} f_k^*(t) \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{p} \int\limits_0^{\infty} t^{\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{n} f_k^*(t) \frac{dt}{t} = \frac{1}{p} \int\limits_0^{\infty} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \frac{dt}{t} = \|f\|_{p1}^*.$$

This proves (A3). In order to show (A4) we observe that, in terms of the notation developed before we have

$$\|f\|_{p\infty}^* = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} d_j^{\frac{1}{p}} c_j.$$

Suppose that the supremum on the right is assumed at $j = k$; thus

$$\|f\|_{p\infty}^* = d_k^{\frac{1}{p}} c_k.$$

Let $g = c_k \chi_{F_k}$. Then $0 \leqslant g \leqslant f$ and, thus,

$$\|f\|_{p\infty}^* = d_k^{\frac{1}{p}} c_k = c_k \left\{\mu(F_k)\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant c_k \|\chi_{F_k}\| = \|g\| \leqslant \|f\|.$$

The theorem is proved. $\rhd$

References

1. *Maz'ja V. G.* Sobolev Spaces.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—(Springer Series in Soviet Mathematics).
2. *Talenti G.* Best constants in Sobolev inequality // Ann. Mat. Pura Appl.—1976.—Vol. 110.—P. 353–372.
3. *Talenti G.* Elliptic equations and rearrangements // Ann. Scuola Norm. Pisa. Ser. IV.—1976.—Vol. 3.—P. 697–718.
4. *Federer H.* Geometric Measure Theory.—New York: Springer-Verlag, 1969.
5. *Kasevan S.* Symmetrization and Application / Ed. Roderick Wong.—Hong Kong, 2006.—(Series in Analysis; Vol. 3).

Пленарные лекции

Математическое моделирование

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЕРЕНОСА ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ХИМИЧЕСКИ АКТИВНЫХ СРЕДАХ

М. Ю. Жуков (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Т. Ф. Долгих (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Основная цель лекций — ознакомление с некоторыми методами построения математических моделей на примере построения уравнений мелкой воды, переноса вещества в многокомпонентных смесях под действием электрического поля, а также ознакомление с методами решения и исследования задач для моделей, описываемых системами квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка.

1. Способы построения математических моделей

Для построения моделей используется подход, который уместно назвать асимптотическим моделированием, основная цель которого это «доведение» известных основных базовых уравнений (в частности, уравнений гидродинамики, например, [1] и теории массопереноса электрическим полем, например, [2]) до такого уровня, при котором, не теряя общности можно либо строить точные решения, либо получать значительный объем информации о поведении решений.

1.1. Уравнения мелкой воды. Уравнения, для описания поведения сжимаемой вязкой жидкости, записанные в безразмерных переменных, имеют вид (уравнения Навье — Стокса (см., например, [1, с. 71–78]))

$$\begin{gathered}\rho_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0,\\ \rho(\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}) = -\nabla p(\rho) + \nu\Delta\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{F},\end{gathered} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость течения жидкости, ρ — плотность, p — давление, $\boldsymbol{F}$ — удельная сила (ускорение), ν — динамическая вязкость жидкости.

Система (1) не является замкнутой системой (имеется четыре уравнения — одно скалярное и одно векторное, и пять неизвестных — плотность ρ, три компоненты скорости $\boldsymbol{v}$ и давление p). Для замыкания системы уравнений (1) следует добавить еще одно уравнение, которое связывает между собой давление и плотность, и называется уравнением состояния

$$p = p(\rho). \tag{2}$$

Собственно говоря, это уже моделирование. Уравнение (2) указывает конкретную сплошную среду, тогда как уравнения (1), справедливы, в некотором смысле, для произвольной сплошной среды (жидкость, газ).

1.1.1. Некоторые модели. Принимая различные допущения о вязкости ν, удельной силе $\boldsymbol{F}$, уравнении состояния $p = p(\rho)$, исходя из (1), можно построить различные модели, в частности, модель *невязкой баротропной жидкости* (с известным уравнением состояния)

$$\rho_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\rho + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad \rho(\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\boldsymbol{v}) = -\nabla p(\rho), \tag{3}$$

невязкого политропного газа (с показателем политропы γ и скоростью звука c_0)

$$\rho_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\rho + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad \rho(\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\boldsymbol{v}) = -\nabla p(\rho), \quad p(\rho) = \frac{c_0^2}{\gamma - 1}\rho^{\gamma-1}, \tag{4}$$

модель *несжимаемой невязкой жидкости* в поле тяжести ($\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{k}g$, g — ускорение силы тяжести, $\boldsymbol{k}$ — орт оси z, направленной против действия силы тяжести)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\boldsymbol{v} = -\nabla p - \boldsymbol{k}g. \tag{5}$$

Модель (5) существенно отличается от моделей (3) и (4). Во-первых, отсутствует уравнение состояния (точнее, оно выбрано требованием $\rho = 1$). Во-вторых, имеется четыре уравнения для четырех неизвестных $\boldsymbol{v}$, p. В третьих уравнение $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ не является эволюционным уравнением.

1.1.2. Потенциальное течение идеальной жидкости.

$$\boldsymbol{v} = \nabla\varphi, \tag{6}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 0, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\boldsymbol{v} = -\nabla p - \boldsymbol{k}g \quad \Rightarrow \quad \nabla\left(\varphi_t + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + p + zg\right) = 0, \tag{8}$$

где φ — потенциал течения.

Это, вновь, моделирование, но уже иного уровня. Ранее использовались физические требования — выбиралась среда (уравнение состояния), пренебрегалось вязкостью. Здесь используется ограничение на класс решений — рассматриваются некоторые течения, обладающие определенными свойствами.

1.1.3. Пространственно одномерная модель мелкой воды. Для простоты ограничим рассмотрение пространственно одномерной моделью. Рассматриваем тонкий слой жидкости бесконечной в горизонтальном направлении, а в вертикальном направлении, ограниченный твердым дном $z = 0$ и свободной поверхность $z = h(x,t)$. В уравнениях (6)–(8) произведем замены переменных (масштабирование)

$$z \to \varepsilon z, \quad h \to \varepsilon h, \quad w \to \varepsilon w, \quad g = \frac{g_0}{\varepsilon}, \qquad g_0 = O(1), \quad \boldsymbol{v} = (u, 0, w),$$

и введем функцию тока ψ (это позволяет автоматически удовлетворить уравнению неразрывности $u_x + w_z = 0$)

$$u = \psi_z, \quad w = -\psi_x. \tag{9}$$

Здесь $h(x,t)$ — толщина слоя, $u(x,t)$, $w(x,t)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости, $\psi(x,t)$ — функция тока, ε — параметр, характеризующий отношение вертикального и горизонтального размеров слоя.

Уравнения (7), (8) после замен переменных и использовании условия потенциальности течения ($\boldsymbol{v} = \nabla\varphi$, $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0$) принимают вид

$$u_t + uu_x + wu_z = -p_x, \quad \varepsilon^2(w_t + uw_x + ww_z) = -p_z - g_0, \tag{10}$$

$$u_z - \varepsilon^2 w_x \equiv \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{zz} + \varepsilon^2\psi_{xx} = 0. \tag{11}$$

Собственно говоря, уравнения (10), (11) — это просто переписанные в иной форме уравнения (6)–(8), в которых сделаны предположения о порядках входящих в уравнения величин. Для построения модели требуется использовать некоторое асимптотическое разложение по параметру $\varepsilon \to 0$.

Сформулируем постановку задачи. Уравнения (10), (11)

$$u_t + uu_x + wu_z = -p_x, \quad \varepsilon^2(w_t + uw_x + ww_z) = -p_z - g_0, \tag{12}$$

$$\psi_{zz} + \varepsilon^2\psi_{xx} = 0.$$

дополним краевыми условия, которые выберем в следующем виде (следует сказать, что это еще один этап моделирования).

Кинематическое условие (частицы жидкости движутся вместе со свободной поверхностью)

$$\frac{d\Phi}{dt} \equiv w(z,x,t) - h_t(x,t) - u(z,x,t)h_x(x,t) = 0, \quad z = h(x,t), \tag{13}$$

$$\Phi(x,t) \equiv z - h(x,t), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla.$$

Динамическое условие (давление на свободной поверхности задано)

$$p(x,z,t) = 0, \quad z = h(x,t). \tag{14}$$

Условие непроницаемости (дна водоема)

$$w(x,z,t) = 0, \quad z = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(x,0,t) = 0.$$

1.1.4. Подход Лагранжа. Для построении асимптотики (модели) задачи (12)–(14) используем подход Лагранжа (см. например, [3, с. 32–39]), который заключается в конструировании решения недоопределенной задачи для функции $\psi(x,z,t)$

$$\psi_{zz} + \varepsilon^2\psi_{xx} = 0, \quad \psi(x,0,t) = 0$$

в виде асимптотического ряда, коэффициенты которого $\psi^k(x,z,t)$ автоматически удовлетворяют краевому условию

$$\psi(x,z,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}\psi^k(x,z,t), \quad \psi^k(x,0,t) = 0.$$

Ввиду недоопределенности задачи, решение содержит некоторую произвольную функцию $F(x,t)$. Опуская достаточно простые (но громоздкие) построения, запишем решение (подробнее см., например, [3, с. 32–39], а также [4, с. 139–152])

$$\psi(x,z,t)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\varepsilon^{2m}\frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}\partial_x^{2m}F(x,t).$$

Компоненты скорости u, w с учетом (9) имеют вид

$$u(x,z,t)=\psi_z=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\varepsilon^{2m}\frac{z^{2m}}{(2m)!}\partial_x^{2m}F(x,t), \tag{15}$$

$$w(x,z,t)=-\psi_x=-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\varepsilon^{2m}\frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}\partial_x^{2m+1}F(x,t). \tag{16}$$

Основная идея — «снос» уравнений (10) на поверхность $z=h(x,t)$, учет соотношений (15), (16), и использование динамического условия (14) для давления.

Дифференцируя условие (14) по x, получим

$$p(x,h(x,t),t)=0 \quad\Rightarrow\quad p_x+p_zh_x=0.$$

Тогда, с учетом уравнений (10)

$$(u_t+uu_x+wu_z)+(\varepsilon^2(w_t+uw_x+ww_z)+g_0)h_x=0, \quad z=h(x,t). \tag{17}$$

Кроме этого из (15), (16) при $z=h(x,t)$ имеем

$$\begin{gathered} u(x,h,t)=F(x,t)+O(\varepsilon^2), \quad u_z(x,h,t)=O(\varepsilon^2),\\ w(x,h,t)=-hF_x+O(\varepsilon^2). \end{gathered} \tag{18}$$

Подставляя (18) в (17) и кинематическое условие (13), окончательно получим (с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$)

$$\begin{gathered} h_t(x,t)+U(x,t)h_x(x,t)+U_x(x,t)h(x,t)=0,\\ U_t(x,t)+U(x,t)U_x(x,t)+g_0h_x(x,t)=0. \end{gathered}$$

Здесь величина $U(x,t)=F(x,t)=u(x,h(x,t),t)+O(\varepsilon^2)$, т. е. с точностью до $O(\varepsilon^2)$ — горизонтальная компонента скорости течения жидкости на свободной границе $z=h(x,t)$.

1.1.5. Об этапах построения модели мелкой воды. Классический вариант уравнений мелкой воды (законы сохранения массы и импульса) имеет вид ($U(x,t)$ заменено на u)

$$h_t+uh_x+hu_x=0, \quad u_t+uu_x+g_0h_x=0.$$

Перечислим этапы построения модели.

1. Выбор базовых уравнений (потенциальное течение несжимаемой невязкой жидкости).

2. Выбор области (тонкий слой жидкости со свободной поверхностью бесконечный в горизонтальном направлений), замены переменных (масштабирование и указание порядков величин), краевые условия и т. д.

3. Решение уравнения $\varepsilon^2\psi_{xx}+\psi_{zz}=0$ (с недоопределенными краевыми условиями). Можно не использовать разложения в ряд, а конструировать некоторый (нелокальный) оператор (см., например, [3]).

4. При использовании подхода Лагранжа — поиск решения в виде ряда, можно не ограничиваться членами $O(1)$, а строить более сложные модели (модели $\operatorname{mod} \varepsilon^{2m}$) (в частности, уравнения Буссинеска и, при некоторых дополнительных предположениях, уравнение Кортевега — де Вриза).

Обратим внимание, что уравнения мелкой воды формально совпадают с уравнениями политропного газа (4) при $\gamma=3$ ($\rho=h$, $v=u$, $c_0^2=g_0$).

1.2. Перенос массы электрическим полем в многокомпонентных химически активных растворах. Базовые уравнения (см., например, [2, с. 13–56])

$\partial_t c_k + \partial_x i_k = \sigma_k$, $k=1,\dots,n$	уравнения баланса массы;
$i_k = -\varepsilon D_k \partial_x c_k + z_k \gamma_k c_k E$	определяющие соотношения для потоков;
$\sum\limits_{k=1}^{n} z_k c_k = 0$	уравнение электронейтральности;
$j = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k i_k E$	определяющее соотношение — закон Ома;
$\partial_x j = 0$	уравнение неразрывности электрического тока;
$\sigma_k =$(на основе химкинетики)	определяющие соотношения для источников.

Здесь c_k — концентрации, i_k — плотность потока концентрации, σ_k — плотность источника массы, E — напряженность электрического поля, j — плотность электрического тока, z_k — зарядности (заряд в единицах заряда электрона), γ_k — подвижность компонент в электрическом поле (скорость на единицу напряженности электрического поля), εD_k — коэффициенты диффузии.

Система не является замкнутой — требуются соотношения для источников σ_k, которые можно получить на основе уравнений химической кинетики.

При наличии разнородных процессов одним из вариантов построения моделей, является разделение процессов по характерному времени их протекания.

В рассматриваемом случае имеется, по крайней мере, *три таких разноскоростных процесса — диффузия, перенос электрическим полем, протекание химических реакций.*

1. Характерное время диффузии намного превышает характерное время процессов переноса под действием электрического поля.

2. Характерное время процессов переноса под действием электрического поля, которое, в свою очередь, значительно больше характерного времени протекания химических реакций.

Естественный путь упрощения уравнений, описывающих такие «разноскоростные» процессы, — *выделение медленных переменных*, слабо изменяющихся при протекании всех остальных процессов.

Покажем принципиальную возможность выделения медленных переменных применительно к химически активной среде, в которой протекают обратимые реакции, на примере диссоциации кислоты и основания (подробнее см. [2, с. 52–55])

$$H^+A^- \underset{k_a^-}{\overset{k_a^+}{\rightleftharpoons}} A^- + H^+, \quad BH^+ \underset{k_b^-}{\overset{k_b^+}{\rightleftharpoons}} B + H^+.$$

Здесь H^+A^- — кислота, A^- — кислотный остаток, BH^+ — основание, B — основной остаток, H^+ — ион водорода, $k_a^\pm$, $k_b^\pm$ — скорости реакций.

Уравнения химической кинетики с переносом имеют вид

$$\begin{gathered}
\partial_t[H^+A^-] + \partial_x i_{[H^+A^-]} = -k_a^+[H^+A^-] + k_a^-[H^+][A^-], \\
\partial_t[A^-] + \partial_x i_{[A^-]} = +k_a^+[H^+A^-] - k_a^-[H^+][A^-], \\
\partial_t[BH^+] + \partial_x i_{[BH^+]} = -k_b^+[BH^+] + k_b^-[H^+][B], \\
\partial_t[B] + \partial_x i_{[B]} = -k_b^+[BH^+] + k_b^-[H^+][B], \\
\partial_t[H^+] + \partial_x i_{[H^+]} = (k_a^+[H^+A^-] - k_a^-[H^+][A^-]) + (k_b^+[BH^+] - k_b^-[H^+][B]).
\end{gathered}$$

Интегралы (медленные переменные) уравнений химической кинетики при отсутствии переноса (потоки равны нулю), очевидно, имеют вид

$$a = [H^+A^-] + [A^-], \quad b = [BH^+] + [B], \quad [H^+] + [BH^+] = [A^-].$$

Уравнения для медленных переменных записываем в форме (уравнения не являются замкнутыми)

$$\partial_t a + \partial_x i_a = 0, \quad \partial_t b + \partial_x i_b = 0, \quad i_a = i_{[H^+A^-]} + i_{[A^-]}, \quad i_b = i_{[BH^+]} + i_{[B]}.$$

Для замыкания системы считаем, что реакция протекает почти мгновенно, т. е. используем условие равновесия уравнений химической кинетики без переноса

$$-k_a^+[H^+A^-] + k_a^-[H^+][A^-] = 0, \quad -k_b^+[BH^+] + k_b^-[H^+][B] = 0,$$

решение которых имеет вид

$$[HA] = (1-\alpha)a, \quad [A^-] = \alpha a, \quad [B] = (1-\beta)b, \quad [BH^+] = \beta b,$$

$$\alpha([H^+]) = \frac{K_a}{K_a + [H^+]}, \quad \beta([H^+]) = \frac{[H^+]}{K_b + [H^+]}.$$

Здесь K_a, K_b — константы диссоциации кислоты и основания, $\alpha([H^+])$, $\beta([H^+])$ — степени диссоциации (доли ионов в кислоте и основании).

Задавая определяющие соотношения для потоков (бездиффузионные)

$$i_{[A^-]} = z_{[A^-]}\gamma_{[A^-]}[A^-]E, \quad i_{[H^+A^-]} = z_{[H^+A^-]}\gamma_{[H^+A^-]}[H^+A^-]E,$$

$$i_{[BH^+]} = z_{[BH^+]}\gamma_{[BH^+]}[BH^+]E, \quad i_{[B]} = z_{[B]}\gamma_{[B]}[B]E,$$

$$z_{[A^-]} = -1, \quad z_{[H^+A^-]} = 0, \quad z_{[BH^+]} = 1, \quad z_{[B]} = 0, \quad \gamma_{[A^-]} = \gamma_a, \quad \gamma_{[BH^+]} = \gamma_b,$$

окончательно получим *бездиффузионную модель* ($[H^+] = h$, обозначение)

$$a_t - (\gamma_a \alpha(h) a E)_x = 0, \quad b_t + (\gamma_b \beta(h) b E)_x = 0,$$

$$h + \beta(h) b = \alpha(h) a,$$

$$j = (\gamma_a \alpha(h) a + \gamma_b \beta(h) b)E, \quad j_x = 0.$$

$$\alpha(h) = \frac{K_a}{K_a + h}, \quad \beta(h) = \frac{h}{K_b + h}.$$

Заметим, что приведенные уравнения имеют интеграл $(a - b)_t = 0$.

1.2.1. Об этапах построения модели многокомпонентных смесей. Перечислим основные этапы построения модели.

1. Выбор базовых уравнений.

2. Разделение процессов по харктерному времени протекания (диффузионные процессы, перенос электрическим полем, химические реакции и т. д). Можно строго, вводя соответствующие параметры, характеризующие скорости процессов.

3. Выделение медленных переменных (на основе уравнений химической кинетики или иных соображений).

4. Поиск связей между медленными и быстрыми переменными (например, на основе гипотезы о мгновенных химических реакций — условия равновесия уравнений химической кинетики).

5. Упрощения, связанные с малостью тех или иных величин.

2. Исследование моделей

2.1. Инварианты Римана. Говорят, что система квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} A_k^i(\boldsymbol{u}) \frac{\partial u^k}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \boldsymbol{u} = (u^1, \ldots, u^n),$$

приводится к инвариантам Римана, если ее можно записать в форме (см., например, [5, с. 27–31], где также указан способ нахождения инвариантов Римана)

$$\frac{\partial R^k}{\partial t} + \lambda^k(\boldsymbol{R}) \frac{\partial R^k}{\partial x} = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \quad \boldsymbol{R} = (R^1, \ldots, R^n),$$

где $R^k(\boldsymbol{u})$ — инварианты Римана, $\lambda^k(\boldsymbol{R})$ — собственные значения матрицы $A_k^i(\boldsymbol{u})$ и существует обратная зависимость $\boldsymbol{u}^k(\boldsymbol{R})$.

В случае $n = 2$ инварианты Римана всегда существуют, но это не означает, что можно получить явную зависимость $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u})$. Для произвольного n имеется алгебраический критерий существования инвариантов Римана — некоторый тензор четвертого порядка, называемый тензором Хаантьеса, должен обращаться в нуль.

В случае $n = 2$ имеется достаточно простой способ построения некоторого обыкновенного дифференциального уравнения, решением которого являются инварианты Римана. Продемонстрируем этот способ на примере уравнений мелкой воды. Пусть даны уравнения мелкой воды, которые записаны в форме

$$h_t = -uh_x - hu_x, \quad u_t = -uu_x - gh_x. \tag{19}$$

Рассмотрим уравнение для какого-либо инварианта Римана

$$R_t(h, u) + \lambda(h, u)R_x(h, u) = 0.$$

Выполняя дифференцирование и подстановку u_t, h_t из (19), считая u_x, h_x независимыми, получим уравнение для определения λ (как условие существования нетривиального решения системы уравнений относительно R_u, R_h), а затем и уравнения для определения R

$$\lambda = u \mp \sqrt{gh}, \quad hR_h \pm \sqrt{gh}R_u = 0 \quad \Rightarrow \quad hdu \mp \sqrt{gh}\, dh = 0,$$

интегралы которого и будут инвариантами Римана

$$R^{1,2} = u \mp 2\sqrt{gh}, \quad \lambda^{1,2} = u \mp \sqrt{gh}.$$

2.1.1. Уравнения в инвариантах Римана и постановка задачи. Для уравнений мелкой воды и уравнений электрофореза имеется явная зависимость между инвариантами Римана и исходными переменными.

Мелкая вода:

$$R^{1,2} = u \mp 2\sqrt{gh}, \quad \lambda^{1,2} = u \mp \sqrt{gh}, \quad u = \frac{1}{2}(R^1 + R^2), \quad \sqrt{gh} = \frac{1}{4}(R^2 - R^1),$$

$$\lambda^1 = \frac{3}{2}R^1 + \frac{1}{4}R^2, \quad \lambda^2 = \frac{1}{4}R^1 + \frac{3}{4}R^2. \tag{20}$$

$$R^1_t + \lambda^1(R^1, R^2)R^1_x = 0, \quad R^2_t + \lambda^2(R^1, R^2)R^2_x = 0.$$

Электрофорез (обратные зависимости $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{R})$ опущены ввиду громоздкости):

$$\lambda^1 = R^1R^1R^2, \quad \lambda^2 = R^2R^1R^2. \tag{21}$$

$$R^1_t + \lambda^1(R^1, R^2)R^1_x = 0, \quad R^2_t + \lambda^2(R^1, R^2)R^2_x = 0,$$

Заметим, что модели, фактически, отличаются лишь зависимостями $\lambda^k(\boldsymbol{R})$, что позволяет сформулировать общую постановку задачи в инвариантах Римана.

Постановка задачи Коши.

$$R^1_t + \lambda^1(R^1, R^2)R^1_x = 0, \quad R^2_t + \lambda^2(R^1, R^2)R^2_x = 0, \tag{22}$$

$$R^1\big|_{t=0} = R^1_0(x), \quad R^2\big|_{t=0} = R^2_0(x), \tag{23}$$

где $R^1_0(x)$, $R^2_0(x)$ — заданные функции.

2.2. Метод годографа. Основная идея метода годографа заключается во взаимозамене зависимых и независимых переменных $(R^1, R^2) \leftrightarrows (x, t)$.

1. Классический вариант. Считаем, что $t = t(R^1, R^2)$, $x = x(R^1, R^2)$, и, производя очевидные замены переменных, например, для функции $t(R^1, R^2)$, получаем линейное уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами (подробнее см., например, [5, с. 33, 34])

$$(\lambda^1 - \lambda^2)t_{R^1R^2} + \lambda^1_{R^1}t_{R^2} - \lambda^2_{R^2}t_{R^1} = 0.$$

2. Обобщенный метод годографа (Дубровин, Новиков, Царев [6]). Если выполнены соотношения

$$\partial_{R^i}\left(\frac{\partial_{R^j}\lambda^k}{\lambda^j - \lambda^k}\right) = \partial_{R^j}\left(\frac{\partial_{R^i}\lambda^k}{\lambda^i - \lambda^k}\right),$$

то неявное решение исходных уравнений записывается в форме алгебраических соотношений $x - \lambda^k(\boldsymbol{R})t = w^k(\boldsymbol{R})$, где $w^k(\boldsymbol{R})$ — коммутирующие потоки, которые определяются уравнениями

$$\frac{\partial_{R^i}w^k}{w^i - w^k} = \frac{\partial_{R^i}\lambda^k}{\lambda^i - \lambda^k}.$$

2.2.1. Метод годографа на основе законов сохранения [7]. Для уравнений

$$R^1_t + \lambda^1 R^1_x = 0, \quad R^2_t + \lambda^2 R^2_x = 0$$

разыскиваем некоторый закон сохранения в виде

$$\varphi_t(R^1, R^2) + \psi_x(R^1, R^2) = 0, \tag{24}$$

где $\varphi(R^1, R^2)$, $\psi(R^1, R^2)$ — плотность и плотность потока для закона сохранения.

Выполняя дифференцирование, для определения $\varphi(R^1, R^2)$, $\psi(R^1, R^2)$, получим систему линейных уравнений в частных производных первого порядка

$$\psi_{R^1} = \lambda^1\varphi_{R^1}, \quad \psi_{R^2} = \lambda^2\varphi_{R^2}, \tag{25}$$

которая с использованием условия разрешимости приводится к одному линейному уравнению в частных производных второго порядка (с коэффициентами, зависящими от R^1, R^2), например, для функции φ (и аналогичное для ψ)

$$(\lambda^1 - \lambda^2)\varphi_{R^1R^2} + \lambda^1_{R^2}\varphi_{R^1} - \lambda^2_{R^1}\varphi_{R^2} = 0. \tag{26}$$

2.2.2. Построение неявного решения. Как уже говорилось, основная идея метода годографа — это взаимозамена переменных $(x, t) \leftrightarrows (R^1, R^2)$. На самом деле, гораздо эффективнее строить неявное решение исходной задачи (22), (23) в двухпараметрической форме, определив функции $t = t(a, b)$, $x = x(a, b)$, где a, b некоторые параметры такие, что $R^1(x, t) = R^1_0(b)$, $R^2(x, t) = R^2_0(a)$ (т. е. в конечном итоге, решение полностью определено начальными данными R^1_0, R^2_0). Для реализации сказанного воспользуемся законом сохранения (24), записав его в виде дифференциальной формы

$$d(\psi dt - \varphi dx) = \psi_x dx \wedge dt - \varphi_t dt \wedge dx = (\varphi_t + \psi_x) dx \wedge dt = 0. \tag{27}$$

Проинтегрируем (27) по замкнутому кусочно-гладкому контуру PQM, который показан на рис. 1. На левом рисунке изображен контур, который выбирается в общем случае, а на правом рисунке — контур, который следует выбирать в случае, когда начальные данные для задачи Коши выбираются при $t = 0$.

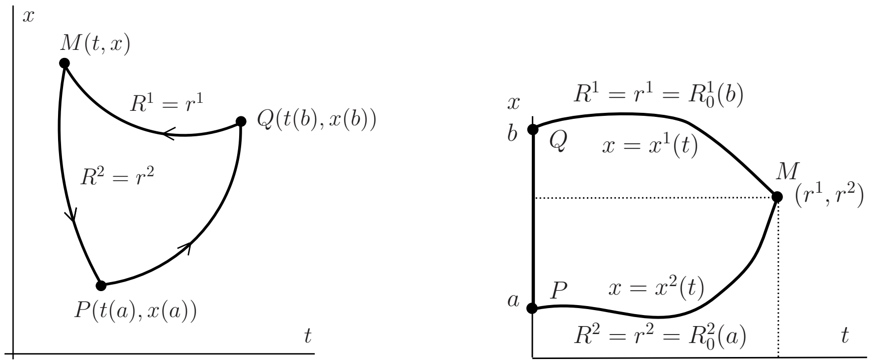


Рис. 1. Контур интегрирования PQM.

Удобнее рассматривать общий случай, не «привязываясь» к частной ситуации для начальных условий при $t = 0$. При выборе контура руководствуемся соображениями, аналогичными используемым при построении функции Римана для гиперболических линейных уравнений (см., например, [8, с. 446–453]).

В качестве части контура PQ выбираем отрезок $PQ = \{(t(\tau), x(\tau)) : a \leqslant \tau \leqslant b\}$, на которой заданы начальные условия

$$R^1 = R_0^1(t(\tau), x(\tau)), \quad R^2 = R_0^2(t(\tau), x(\tau)), \quad a \leqslant \tau \leqslant b,$$

где τ — параметр, a, b — определяют интервал изменения параметра (в случае начальных данных при $t = 0$ линия PQ — это отрезок $[a, b]$ на оси x).

Предполагаем, что линии PM и QM контура PQM задаются характеристическими направлениями, которые определяются уравнениями

$$QM: \quad \frac{dx}{dt} = \lambda^1, \quad PM: \quad \frac{dx}{dt} = \lambda^2.$$

Известно, что на характеристиках инварианты Римана сохраняются [5, с. 30]. Иными словами, на контуре QM имеем $R^1 = r^1 = \text{const}$ и на контуре MP имеем $R^2 = r^2 = \text{const}$ (см. рис. 1). В свою очередь, константы r^1, r^2 определяются начальными условиями

$$r^1 = R_0^1(t(b), x(b)), \quad r^2 = R_0^2(t(a), x(a)),$$

так как линии PM и QM проходят через точки P, Q.

Характеристики QM и PM (из различных семейств) пересекаются в точке M, которой соответствуют координаты (t, x). Это означает, что в точке (t, x) инварианты Римана имеют вид

$$R^1(x, t) = r^1(b) = R_0^1(b), \quad R^2(x, t) = r^2(a) = R_0^2(a),$$

и построено двухпараметрическое неявное решение.

Для того, чтобы «связать» между собой переменные (x,t) параметры (a,b) следует построить функции $t = t(a,b)$, $x = x(a,b)$, которые без труда (формально) получаются путем интегрирования закона сохранения (27) по области, ограниченной замкнутым контуром

$$0 = \oint\limits_{PQM} (\psi\, dt - \varphi\, dx) = \left(\int\limits_{PQ} + \int\limits_{QM} + \int\limits_{MP} \right) (\psi\, dt - \varphi\, dx).$$

На линиях QM, MP, которые заданы уравнениями $dx = \lambda^1\, dt$, $dx = \lambda^2\, dt$ и сохраняются инварианты Римана R^1, R^2 имеем

$$\int\limits_{QM} (\psi\, dt - \varphi\, dx) = \int\limits_{R^1=r^1} (\psi - \lambda^1 \varphi)\, dt, \quad \int\limits_{MP} (\psi\, dt - \varphi\, dx) = \int\limits_{R^2=r^2} (\psi - \lambda^2 \varphi)\, dt.$$

Потребуем выполнения условий

$$\begin{aligned} \left(\psi - \lambda^1 \varphi\right)\big|_{QM} &= \left(\psi - \lambda^1 \varphi\right)\big|_{R^1=r^1} = 1, \\ \left(\psi - \lambda^2 \varphi\right)\big|_{MP} &= \left(\psi - \lambda^2 \varphi\right)\big|_{R^2=r^2} = -1. \end{aligned} \tag{28}$$

Тогда, выполняя интегрирование (опуская громоздкие промежуточные преобразования), получим

$$2t = t(a) + t(b) - \int\limits_{PQ} (\psi\, dt - \varphi\, dx).$$

Это общее соотношение для случая, когда начальные данные заданы на линии PQ, существенно упрощается, если рассматривать начальные данные при $t = 0$, т. е. когда PQ является отрезком на оси x (см. правый рис. 1)

$$t(a,b) = \frac{1}{2} \int\limits_a^b \varphi\left(R_0^1(\tau), R_0^2(\tau)\right) d\tau.$$

Таким образом, функция $t(a,b)$ полностью определена начальными данными R_0^1, R_0^2 и функцией $\varphi(R^1,R^2)$, которая, в свою очередь, является решением задачи (25), (26), (28) [9–11]

$$(\lambda^1 - \lambda^2)\varphi_{R^1R^2} + \lambda^1_{R^2}\varphi_{R^1} - \lambda^2_{R^1}\varphi_{R^2} = 0, \quad \psi_{R^1} = \lambda^1 \varphi_{R^1}, \quad \psi_{R^2} = \lambda^2 \varphi_{R^2}, \tag{29}$$

$$\left(\psi - \lambda^1 \varphi\right)\big|_{R^1=r^1} = 1, \quad \left(\psi - \lambda^2 \varphi\right)\big|_{R^2=r^2} = -1. \tag{30}$$

Удобно использовать обозначение $\varphi = \varphi^t(R^1,R^2|r^1,r^2)$, подчеркивая, что функция получена для определения $t(a,b)$ и зависит от параметров $r^1 = R_0^1(t(b),x(b)) = r^1(b)$, $r^2 = R_0^2(t(a),x(a)) = r^2(a)$

$$t(a,b) = \frac{1}{2} \int\limits_a^b \varphi^t\left(R_0^1(\tau), R_0^2(\tau) | r^1(b), r^2(a)\right) d\tau. \tag{31}$$

Аналогичное соотношение можно получить для функции переменной $x = x(a,b)$.

Оказывается, что решение задачи (29), (30) с точностью до некоторого множителя $M(r^1, r^2$, который определяется условиями (30), совпадает с функцией Римана — Грина для уравнения (29). Способы построения функции Римана — Грина изложены, например, в [12, 13], [8, с. 446–453]). В случае уравнений мелкой воды и электрофореза уравнение (29) является хорошо известным уравнением Эйлера — Пуассона — Дарбу (т. е. при λ^k, определенными соотношениями (20), (21)), и функция Римана — Грина записывается в явном виде при помощи гипергеометрической функции (в случае электрофореза — в виде полинома Лежандра). Подробно процедура построения функции φ^t описана в [11, с. 20–40].

Окончательно, неявное решение записывается в форме

$$R^1(x,t) = r^1(b) = R_0^1(b), \quad R^2(x,t) = r^2(a) = R_0^2(a),$$
$$t = t(a,b), \quad x = x(a,b). \tag{32}$$

2.2.3. Построение явного решения на линиях уровня [9–11]. Основная проблема заключается в решении системы алгебраических уравнений (32), т. е. построении обратных функций

$$a = a(t,x), \quad b = b(t,x),$$

имея которые получим явное решение исходной задачи

$$R^1(x,t) = R_0^1(b(t,x)), \quad R^2(x,t) = R_0^2(a(t,x)).$$

Считая вид функции $t(a,b)$ известным (см. (31), выберем некоторый момент времени t_*, и рассмотрим линию уровня функции $t(a,b)$, так называемую, изохрону, полагая линию уровня параметризованой при помощи параметра μ:

$$t_* = t(a(\mu), b(\mu)). \tag{33}$$

Предполагая достаточную гладкость изохроны и дифференцируя (33) по параметру μ, получим соотношение

$$0 = t_a\big(a(\mu), b(\mu)\big)a_\mu(\mu) + t_b\big(a(\mu), b(\mu)\big)b_\mu(\mu),$$

которое будет автоматически выполнено, если, в частности, потребовать (в общем случае в правые части можно добавить произвольный множитель $K(a,b,\mu) \neq 0$)

$$a_\mu(\mu) = -t_b(a,b), \quad b_\mu(\mu) = t_a(a,b).$$

В [11, с. 46–51] показано, что для определения явной зависимости решения от пространственной координаты x в момент времени t_* (на изохроне) нет необходимости строить функцию $x(a,b)$, а достаточно интегрировать задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a_\mu(\mu) = -t_b(a,b), \quad b_\mu(\mu) = t_a(a,b), \quad X_\mu(\mu) = \big(\lambda^2(a,b) - \lambda^1(a,b)\big)\, t_a(a,b)t_b(a,b),$$
$$a(0) = a_*, \quad b(0) = b_*, \quad X(0) = X_*,$$

что позволяет в каждой точке μ вычислить решение

$$R^1(t_*,x) = R_0^1(b(\mu)), \quad R^2(t_*,x) = R_0^2(a(\mu)), \quad x = X(\mu) = x(a(\mu), b(\mu)).$$

Здесь a_*, b_* — параметры, идентифицирующие изохрону (точка на изохроне на плоскости (a,b), способ определения такой точки, а также X_*, детально описан в монографии [11, с. 46–51]).

3. Примеры применения метода

В качестве примеров, помимо уравнений мелкой воды (20) и уравнений электрофореза (21), рассмотрен ряд простых задач, демонстрирующих применимость и возможности метода годографа.

1. Задача Коши для пары уравнений Хопфа, связанных между собой начальными условиями

$$R^1_t + R^1 R^1_x = 0, \quad R^2_t + R^2 R^2_x = 0,$$

$$R^1\big|_{t=0} = R^1_0(x) = -F(x), \quad R^2\big|_{t=0} = R^2_0(x) = F(x),$$

в частности, при $F(x) = e^{-x^2}$

Приведенные уравнения соответствуют уравнениям политропного газа (4) при $\gamma = 3$. Кроме этого, пример демонстрирует связь метода годографа на основе закона сохранения для двух квазилинейных уравнений с обычным методом характеристик для одного квазилинейного уравнения гиперболического типа в частных производных первого порядка.

2. Эволюционная задача Коши для комплексного уравнения Хопфа, отвечающая исходным уравнениям (уравнения близкие к уравнениям мелкой воды на потолке, имеющие эллиптический тип)

$$h_t + w h_x + h w_x = 0, \quad w_t + w w_x - h h_x = 0.$$

Для этих уравнений инварианты Римана являются комплексно сопряженными и задача Коши записывается в форме

$$\boldsymbol{R}_t + \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}_x = 0, \quad \boldsymbol{R}\big|_{t=0} = \boldsymbol{R}_0(x), \quad \boldsymbol{R} = w - ih.$$

Интересно, что, помимо метода годографа, задача решается формальным применением метода характеристик и решение записывается в виде

$$\boldsymbol{R}(x,t) = \boldsymbol{R}_0(\boldsymbol{b}), \quad x = t\boldsymbol{R}_0(\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{b}$ — некоторый комплексный параметр (после выделения вещественных и мнимых частей решение записывается в исходных переменных h, w).

Все приведенные примеры (мелкая вода, электрофорез, варианты уравнения Хопфа) сопровождаются результатами расчетов (в виде сооответствующих графиков) для конкретных начальных данных. Формулируются условия, при которых метод позволяет эффективно строить решение (наличие явной связи инвариантов Римана с исходными переменными, наличие явной формы функции Римана — Грина). Подчеркивается, что метод не использует аппроксимаций уравнений (типичных для метода конечных разностей, метода конечных объемов, метода конечных элементов и т. п.) и, фактически, является точным — погрешности могут возникать лишь при численном решении задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Указано, что в случае гиперболических уравнений метод позволяет строить многозначные решения (опрокидывание волн). В случае эллиптических уравнений строго показано, что опрокидывание решений не происходит.

Литература

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. Т. VI.—М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986.—736 с.
2. *Жуков М. Ю.* Массоперенос электрическим полем.—Ростов н/Д.: Изд-во Ростов. ун-та, 2005.—216 с.
3. *Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.—Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1985.—319 с.
4. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Полякова Н. М.* Моделирование испарения капли жидкости.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2015.—208 с.
5. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений.—М.: Наука, 1978.—668 с.
6. Царев С. П. Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1990.—Т. 54 (5).—С. 1048–1068.
7. *Senashov S. I., Yakhno A. N.* Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // SIGMA. Special Issue: Geometrical Methods in Math. Physics.—2012.—Vol. 8.—16 p.—DOI: 10.3842/SIGMA.2012.071.
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.—М.: Мир, 1964.—830 с.
9. *Shiryaeva E. V., Zhukov M. Yu.* Hodograph Method and Numerical Integration of Two Hyperbolic Quasilinear Equations. Part I. The Shallow Water Equations, 2014.—19 p.—URL: http://arxiv.org/abs/1410.2832.
10. *Shiryaeva E. V., Zhukov M. Yu.* Hodograph Method and Numerical Integration of Two Quasilinear Hyperbolic Equations. Part II. The Zonal Electrophoresis Equations, 2014.—URL: http://arxiv.org/abs/1503.01762.
11. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Долгих Т. Ф.* Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2015.—126 с.
12. *Copson E. T.* On the Riemann–Green function // Arch. Ration. Mech. Anal.—1958.—Vol. 1.—P. 324–348.
13. *Zeitsch P. J.* On the Riemann function // Mathematics.—2018.—Vol. 6.—P. 316. DOI: 10.3390/math6120316.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

ЦЕРЕБРАЛЬНАЯ МЕХАНИКА: КЛИНИЧЕСКИЕ И ЛАБОРАТОРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

А. П. Чупахин
(Россия, Новосибирск; ИГиЛ СО РАН, НГУ)

Исследование мозга человека является сегодня одной из самых приоритетных программ мировой науки. Эта проблема имеет много аспектов: физиологический, медицинский, когнитивный и пр. Для исследования этих задач необходим комплексный подход, включающий работу медиков, физиков, математиков и других специалистов. Важное значение в этих исследованиях имеет изучение законов движения крови в сосудах головного мозга. Ведь именно кровь несет к различным функциональным зонам мозга кислород и питательные вещества, необходимые для постоянной его работы и активизации различных зон мозга. Понимание этого совершенного механизма, обуславливающего всю нашу как сознательную, так и бессознательную деятельность, требует развитого моделирования на основе надежных экспериментальных данных о законах движения крови в церебральных сосудах in vivo.

Сосуды головного мозга представляют собой геометрически разветвленную сеть, состоящую из сосудов различного типа — артерии, вены, синусы, капилляры — по которым движется пульсирующий поток крови — вязкой жидкости, несущей форменные элементы. Исследование законов движения гемодинамики представляет собой важную и трудную задачу, актуальную как для фундаментальной науки, так и для практической медицины.

В лекциях будет рассказано об исследованиях гемодинамики мозга и церебральных сосудов, осуществляемых совместно учеными из академических институтов Сибирского отделения РАН (Гидродинамики, Теоретической и прикладной механики, Томографического центра, Цитологии и Генетики), Новосибирского университета, медиков из Федерального нейрохирургического центра, Клиники Мешалкина, НИИТО.

1. Создание уникальной, не имеющей аналогов в мире, системы мониторинга кровотока во время нейрохирургических операций. Моделирование эмболизации артерио-венозных мальформаций.

2. Лабораторное и компьютерное моделирование реологии кровеносных сосудов головного мозга как норме, так и при патологиях.

3. Математическая хирургия — моделирование реальных нейрохирургических операций на основе математических и компьютерных моделей.

4. Энергетика кровеносных сосудов на основе гидроупругих моделей течения крови в церебральных сосудах.

5. Лабораторное моделирование церебральной гемодинамики на основе современных протоколов магнито-резонансной томографии, исследование пространственной структуры течения в упругих сосудах сложной геометрии.

Ниже приводится статья, положенная в основу цикла из двух лекций, прочитанных профессором А. П.Чупахиным на ВММШ-2020:

Parshin D. V.[1,2], *Kuyanova Yu. O.*[1,2], *Kislitsin D. S.*[3], *Windberger U.*[4], *Chupakhin A. P.*[1,2] On the impact of flow-diverters on the hemodynamics of human cerebral aneurysms // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.—2018.—Vol. 59, № 6.—P. 963–970. DOI: 10.1134/S0021894418060019.

ON THE IMPACT OF FLOW-DIVERTERS ON THE HEMODYNAMICS OF HUMAN CEREBRAL ANEURYSMS

Abstract. The impact of flow-diverters used for cerebral aneurysm treatment on human brain hemodynamics was evaluated qualitatively and quantitatively. Numerical simulation of flow-diverter placement in cerebral vessels with aneurysms was carried out for the case history of a real patient using the commercial ANSYS 17.2 package with different (Newtonian and non-Newtonian) hydrodynamic models for blood rheology in different parts of the vessel and aneurysm, which is due to experimental data. It is shown that after flow-diverter placement, the blood flow through the artery segment containing the aneurysm neck decreases, resulting in a redistribution of the cerebral blood flow, which becomes close to the blood flow in healthy subjects. Changes in wall shear stresses in the flow-diverter region are indicative of possible aneurysm recanalization.

Keywords: cerebral aneurysm, flow-diverter, brain hemodynamics, reconstruction of DICOM images, non-Newtonian blood rheology.

Introduction

Cerebral aneurysms (CAs) are a common pathology of cerebral vessels. They occur in 20 of 1000 people [1], and in some nationalities, even more frequently [2]. The main danger associated with CAs is their possible rupture, which leads to mortality in 30% of cases and to a significant neurological deficit in another 30% [3]. Treatment of CAs is regulated by various standards. Usually, this pathology is treated by in one of the two fundamentally different methods: microsurgical clipping or endovascular surgery. Both methods are aimed at isolating the anomaly from the blood flow. In microsurgical clipping, craniotomy is carried out to gain access to the aneurysm. Endovascular surgery is a minimally invasive, maximally gentle method which has recently been actively developed [4]. The choice of a method is determined, first, by surgical accessibility of the pathology and, second, by the characteristics of the

[1]Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia; parshin@hydro.nsc.ru; july9696@mail.ru; chupakhin@hydro.nsc.ru.

[2]Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, 630090 Russia.

[3]Meshalkin National Medical Research Center, Novosibirsk, 630055 Russia; kislitsinmd@gmail.com.

[4]Center for Biomedical Research Vienna Medical University, Vienna, 1090 Austria; ursula.windberger@meduniwien.ac.at.

aneurysm (the size of the dome of the aneurysm, its necks, the angles of blood vessels in the region of the aneurysm, the presence of chronic diseases, patient age, etc.) [5].

This paper is devoted to the endovascular surgery in which different treatment tactics are possible (Fig. 1). Tactic is chosen based on the clinical aspects of the pathology: microcoil embolization (see Fig. 1a), stent-assisted coil embolization (see Fig. 1b), and placement of a flow-diverter (see Fig. 1c) [6–8]. The aim of this work was to study the hemodynamics of a vessel with an aneurysm and with an implanted flow-diverter. Although the hemodynamics of cerebral vessels with flow-diverter or flow-diverters has been the subject of extensive research [9–17], the causes of recanalization (restoration of blood circulation) of aneurysms and their rupture are still not clear.

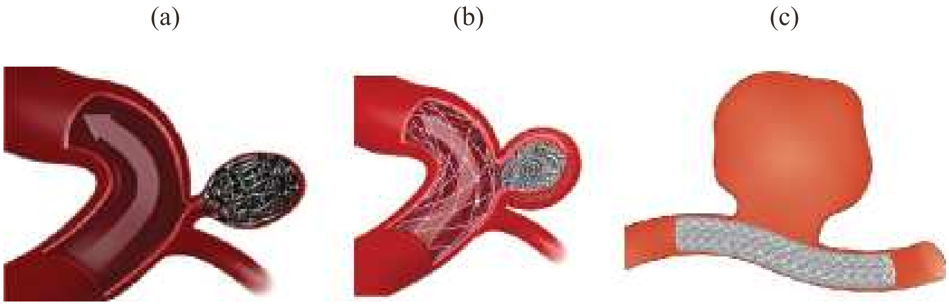


Fig. 1. Variants of endovascular treatment of CAs: (a) microcoil embolization; (b) stent-assisted coil embolization; (c) flow-diverter placement.

This paper addresses the case of treating a giant CA of the middle cerebral artery (MCA) located at the intersection of the internal carotid artery (ICA), the anterior cerebral artery (ACA), and the posterior communicating artery (PCA) at the beginning of the M1 segment (afferent of the ICA). Flow-diverter implantation surgery was performed in a patient (a woman aged 67 years) at the Meshalkin National Medical Research Center (Novosibirsk). Due to its localization, this aneurysm was a surgically difficult case, and assessment of hemodynamics before and after surgery was not a trivial task. Qualitative and quantitative changes after the treatment and indicators that could affect aneurysm recanalization were investigated.

Research Methods

The problem of assessing changes in cerebral blood flow and the risk of CA recanalization includes a number of problems related to the processing of medical image data and the setting and calculation using the ANSYS CFX 17.2 software.

Reconstruction of the Geometry of the Study Region

The region of the aneurysm vessel was reconstructed using data of three-dimensional rotational and computed tomography angiography [18]. An array of DICOM images with a resolution of 250×250 pixels, a pixel pitch of 0.5 mm, and pixel sizes of 0.465×0.465 mm was processed with the ITK-SNAP software [19]. Image processing was carried out using a Gaussian filter (Fig. 2).

(a) (b) (c)

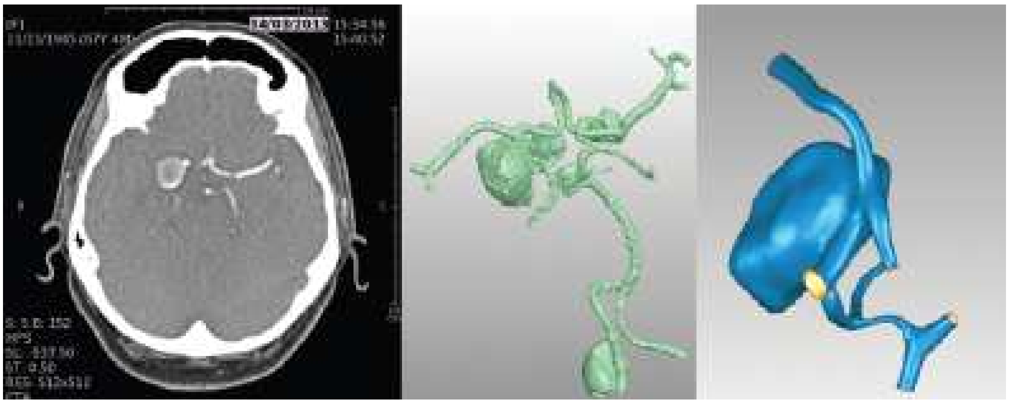


Fig. 2. Stages of processing of DICOM images: (a) DICOM file; (b) result of segmentation; (c) smoothed three-dimensional model.

Segmentation of the Flow Domain and Construction of the Grid

The main purpose of this work was preoperative simulation of the results of flow-diverter placement. Therefore, a number of reasonable assumptions are made to speed up the simulation process. Instead of an obstacle with complex geometry placed in the vessel, as is proposed in many papers (see, for example, [20, 21]), the presence of a flow-diverter in the vessel is modeled by a region of a porous medium [22] (Fig. 3). Flow-diverter placement reduces the blood flow to the body of the aneurysm by creating resistance to the flow through the neck. As a result, the blood flow in the aneurysm slows down and initiates thrombosis [23]. These effects, in aggregate, can be modeled by the formation of a kind of plug in the neck of the aneurysm, which slightly exceeds the size of the flow-diverter. In the computational domain $\Omega = \Omega_a + \Omega_v + \Omega_s$, a tetrahedral grid is constructed. Since we consider viscous fluid flow, additional (five) layers of the prismatic grid are constructed in the near-wall region for correct calculation of physical quantities in the region of the boundary layer (Fig. 4). Of great importance is the choice of a rheological model for describing blood flow. Generally speaking, blood is a non-Newtonian fluid [24]. However, in regions where the blood flow rate is high (16 cm/s or more), non-Newtonian effects are weak, and in the dome of the aneurysm after flow-diverter placement, it is significant [25, 26]. Therefore, a mixed blood rheology model was used. In the flow region with high velocities (MCA, ISA, and ACA segments), the fluid was assumed to be Newtonian, and its viscosity was considered constant: $\mu = \mu_0 = 0.004$ Pa $\cdot$ s. The steady flow equations have the form

$$\rho(u\nabla u - \mu\Delta u) = -\nabla p + F, \quad \operatorname{div} u = 0 \tag{1}$$

(u and ρ are the velocity and density of the fluid, p is the pressure, and F are the external forces). In the region of the aneurysm dome and part of the PCA (Fig. 5), rheology is described using the Casson model [21]:

$$\mu = \left(\sqrt{\tau_0/\dot{\gamma}} + \sqrt{\mu_0}\right)^2.$$

Here $\dot{\gamma} = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$ is the second invariant of the strain rate tensor for incompressible fluid, ε_{ij} is the strain rate tensor component, and τ_0 is the yield strength. In the ANSYS CFX and ANSYS Fluent solvers, the porous medium is modeled, e. g., by adding a term due to the work of external forces to the momentum equations (1):

$$F_i = -\left(\sum_{j=1}^{3} D_{ij}\mu u_j + \sum_{j=1}^{3} C_{ij}\frac{1}{2}\rho|u|u_j\right). \tag{2}$$

Here C and D are given isotropic tensors; the loss factors for the diffusion and advective terms are 0 and 1.

Figure 6 shows the streamlines in the region of the flow-diverter and the neck of the aneurysm using different blood rheology models: Casson and Newton. It is seen that the streamlines for these two models are fundamentally different in behavior. In the region of the basilar artery, this difference is less significant; therefore, an additional calculations for the Cason model in the region of the basilar artery is not reasonable.

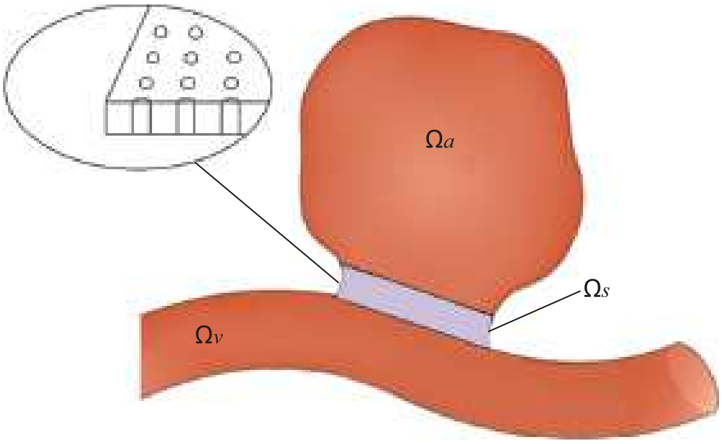


Fig. 3. Model of the vessel Ω_v with theaneurysm Ω_a and the flow-diverter implanted in it (Ω_s).

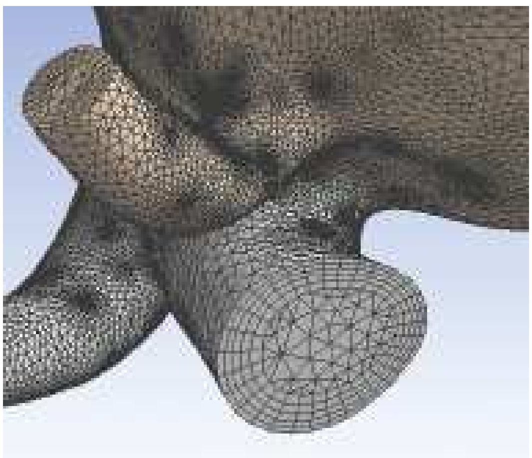


Fig. 4. Grid in the computational domain Ω.

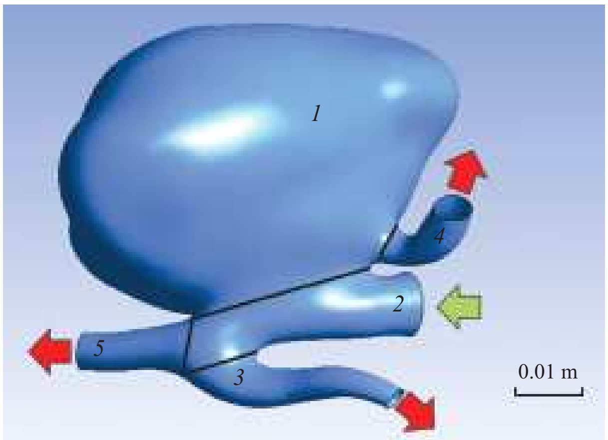


Fig. 5. Segmentation of the computational domain: (1) aneurysm; (2) internal carotid artery; (3) anterior cerebral artery; (4) posterior communicating artery; (5) M1 segment; the arrow show the direction of blood flow.

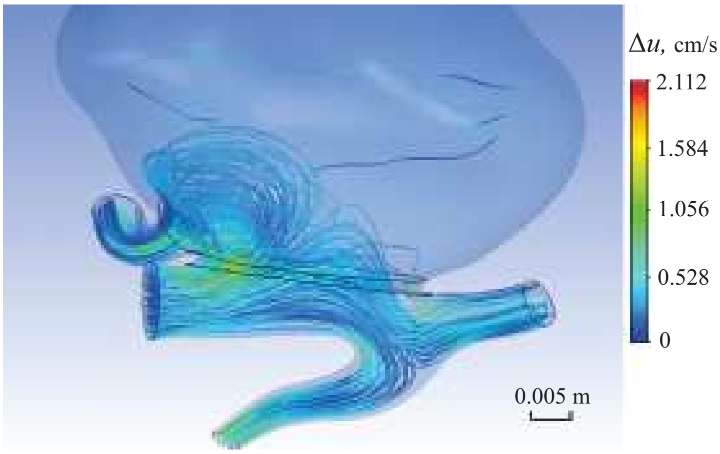


Fig. 6. Streamlines of the vector field of the velocity difference Δu for the Newtonian and non-Newtonian (Casson) fluid models in the computational domain Ω.

Since in the formulation considered, the flow-diverter is a plate with holes, it is assumed that there is no loss of mass inside the flow-diverter. This simplification is permissible since the real flow-diverter thickness does not exceed 0.2–0.3 mm and sticking of blood cells to the flow-diverter occurs already during thrombosis of the aneurysm, approximately 6 months after the surgery [27, 28].

Boundary Conditions and Solver Settings

To determine the boundary conditions at the entrance (before the occurrence of the anomaly in the vessel), we used data on the volumetric blood flow in the Willis circle vessels of a healthy person [29]. At the entrance to the ICA region, volumetric flow with a mass flow rate of 5 g/s was specified, and at the exits from the ACA, M1, and PCA, a pressure of 89.9, 90.0, and 90.0 mm Hg, respectively, was specified. The porosity coefficient in the flow-diverter region was set equal to 0.8, which corresponds to the real production standards for these devices [20]. An absolutely rigid material was used as the structural skeleton of the porous medium. At this stage of the simulation, where thrombosis was not taken into account, this assumption was valid. Material properties must be considered when the model includes heat transfer and (or) chemical reactions. In such cases, the correct determination of the flow-diverter material is of great importance. Pressure data were obtained by intraoperative intravascular monitoring using the ComboMap-ComboWire complex [30]. The steady problem was solved using the finite volume method with a node-centered scheme.

Results of the Study and their Discussion

Numerical simulation offow-diverter placement in the basilar artery showed qualitative changes in blood flow. As expected, the flow of blood entering the region of the aneurysm dome significantly reduced (Table 1), which is in good agreement with the average reduction in flow rate (20–50%) in such sort of interventions [31, 32].

In this case, there is a redistribution of blood flow from the aneurysm to the anterior cerebral vessels (see Table 1); as a result, the total blood flow rates in the M1 and ACA regions are close to those in a healthy person [29]. The presence of residual blood flow is normal for such surgical operations, and final thrombosis of the aneurysm region occurs, as a rule, within 6 months. The decrease in the flow rate is also significant (see Fig. 7 and Table 2), resulting in a considerable reduction in the risk of further growth of the aneurysm.

Table 1. Mass blood flow rate Q in cerebral vessels before and after flow-diverter placement

Segment of vessels	Q, g/s			
	Vessel without a flow-diverter	Vessel with a flow-diverter	Normal values for a healthy person	Difference of the values before and after the surgery
M1	2.582	2.606	2.617 ± 0.374	+0.024
ACA	0.708	0.989	0.997 ± 0.374	+0.281
PCA	1.660	1.405	0.997 ± 0.124	−0.255
Aneurysm	1.775	1.404	—	−0.371

Table 2. Maximum blood flow velocity u in cerebral vessels before and after flow-diverter placement

Segment of vessels	u, cm/s			
	Vessel without a flow-diverter	Vessel with a flow-diverter	Difference of values after and before surgery	Difference of the values after and before the surgery, % of the maximum values
M1	10.81	10.89	+0.08	+0.7
ACA	7.63	10.60	+2.97	+28.0
PCA	7.82	6.47	−1.35	−17.0
Aneurysm	0.44	0.35	−0.09	−20.5

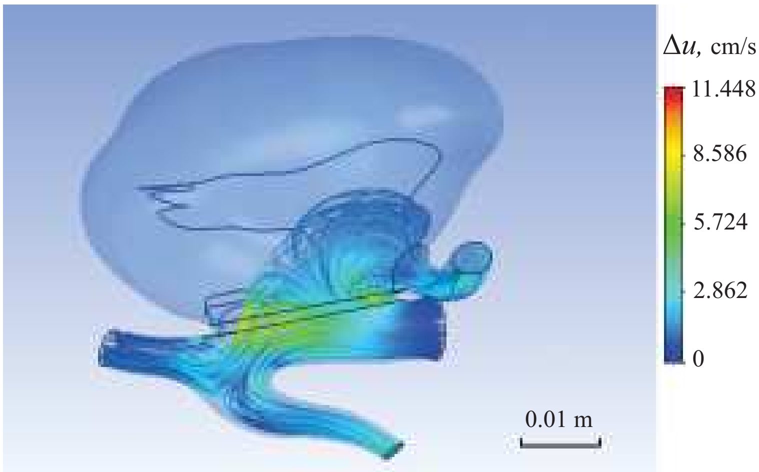


Fig. 7. Streamlines of the vector field of the velocity difference Δu in the region of Ω before and after the surgery.

Among all the changes that occurred in the aneurysm region after flow-diverter placement, of greatest interest is an increase in the wall shear stress S in the flow-diverter region by 2.71 Pa or 77% (Fig. 8). Interest in this quantity is due to the fact that endovascular treatment of aneurysms involves a high risk of their recanalization (10–30% depending on the factors complicating the course of the disease [33]). This process is caused either by the insufficiently dense packing of the aneurysm with coils due to inaccurate estimates of their size or number or by the occurrence of a recirculation region due to a change in the geometry of the near-wall region. This problem has scarcely been studied; however, in the opinion of the authors of this paper, a significant increase in S in the region of the flow-diverter placement may initiate changes in the geometry of the neck of the aneurysm and its subsequent recanalization.

Conclusions

The results of the numerical simulation show that flow-diverters can be successfully used to treat cerebral aneurysms. In the case considered, numerical calculation allows simulating blood flow in the cerebral vessels both before and after flow-diverter placement. It is shown that the use of different models for blood flow inside the aneurysm dome and in the aneurysm-bearing artery flow is a fundamental point, and the Casson model is adequate. The hypothesis that the wall shear stresses in the neck region of the aneurysm can cause its recanalization was confirmed. Results of the numerical calculations show that in addition to treating aneurysms (their removal from blood flow), flow-diverter placement normalizes cerebral blood flow abnormalities caused by the influence of the aneurysm.

This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Grant № 14.W03.31.0002).

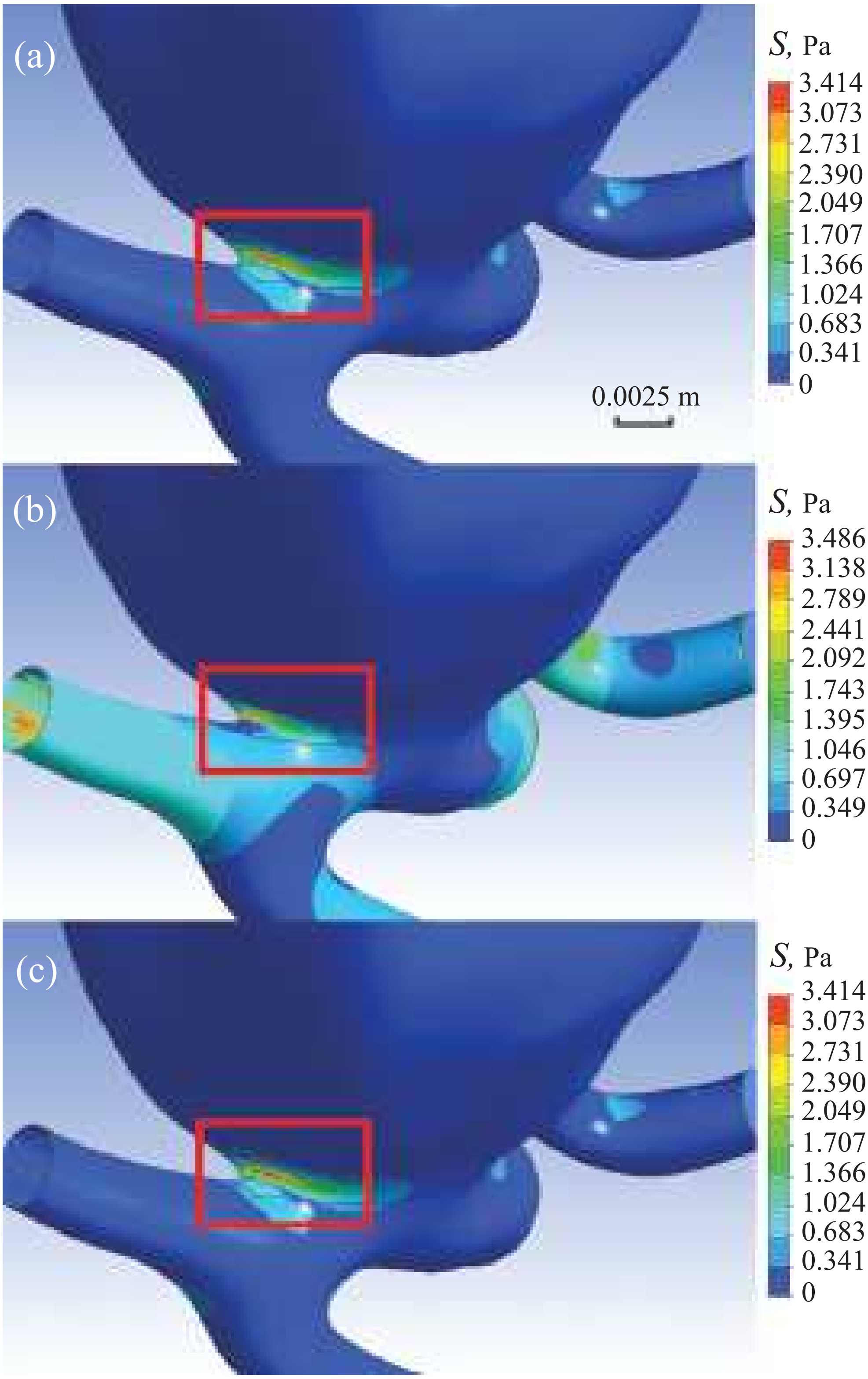


Fig. 8. Distributions of shear stresses S on the wall before (a) and after (b) the surgery and the differences of maximum shear stresses before and after the surgery in the region $\Omega_s(c)$.

References

1. «What is an Aneurysm?» Amer. Association of Neurological Surgeons.—URL: http://www.aans.org/Patients/Neurosurgical-Conditions-and-Treatments/Cerebral-Aneurysm.
2. *Yasuno K., Bakirciŏglu M., Low S.-K., et al.* Common Variant near the Endothelin Receptor Type A (EDNRA) Gene is Associated with Intracranial Aneurysm Risk // Proc. National Acad. Sci.—2011.—vol. 108 (49).—P. 19707–19712. DOI: 10.1073/pnas.1117137108.
3. *Rinkel G. J., Djibuti M., Algra A.* Prevalence and Risk of Rupture of Intracranial Aneurysms: A Systematic Review // Stroke.—1998.—Vol. 29.—P. 251–256. DOI: 10.1161/01.STR.29.1.251.
4. *Pierot L., Wakhloo A. K.* Endovascular Treatment of Intracranial Aneurysms // Stroke.—2013.—Vol. 44.—P. 2046–2054. DOI: 10.1161/STROKEAHA.113.000733.
5. *Weinkauf C., George E., Zhou W.* Open Versus Endovascular Aneurysm Repair Trial Review // Surgery.—2017.—Vol. 162 (5).—P. 974–978. DOI: 10.1016/j.surg.2017.04.009.
6. *Wang Y., Song S., Zhou G., et al.* Strategy of Endovascular Treatment for Renal Artery Aneurysms // Clinic. Radiology.—2018.—Vol. 73 (4).—P. 414.e1–414.e5. DOI: 10.1016/j.crad.2017.11.009.
7. *Lin N., Brouillard A. M., Keigher K. M., et al.* Utilization of Pipeline Embolization Device for Treatment of Ruptured Intracranial Aneurysms: US Multicenter Experience // J. Neurointerv. Surgery.—2015.—Vol. 7.—P. 808–815. DOI: 10.1136/neurintsurg-2014-011320.
8. *Lin N., Brouillard A. M.,. Krishna C, et al.* Use of Coils in Conjunction with the Pipeline Embolization Device for Treatment of Intracranial Aneurysms // Neurosurgery.—2015.—Vol. 76 (2).—P. 142–149. DOI: 10.1227/NEU.0000000000000579.
9. *Tanemura H., Ishida F., Miura Y., et al.* Changes in Hemodynamics after Placing Intracranial Stents // Neurol. Med. Chirurgica.—2013.—Vol. 53.—P. 171–178. DOI: 10.2176/nmc.53.171.
10. *Wang C., Tian Z., Liu J., et al.* Hemodynamic Alterations after Stent Implantation in 15 Cases of Intracranial Aneurysm // Acta Neurochir.—2016.—Vol. 158 (4).—P. 811–819. DOI: 10.1007/s00701-015-2696-x.
11. *Lv N., Cao W., Larrabide I., et al.* Hemodynamic Changes Caused by Multiple Stenting in Vertebral Artery Fusiform Aneurysms: A Patient-Specific Computational Fluid Dynamics Study // Amer. J. Neuroradiology.—2018.—Vol. 39 (1).—P. 118–122. DOI: 10.3174/ajnr.A5452.
12. *Vorobtsova N. A., Yanchenko A. A., Cherevko A. A., et al.* Modelling of Cerebral Aneurysm Parameters under Stent Installation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.—2013.—Vol. 28 (5).—P. 505–516. DOI: 10.1515/rnam-2013-0028.
13. *Parshin D. V., Kuianova I. O., Yunoshev A. S., et al.* On the Mechanics of Cerebral Aneurysms: Experimental Research and Numerical Simulation // J. Phys.: Conf. Ser.—2017.—Vol. 894. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012071.
14. *Khe A. K., Chupakhin A. P., Cherevko A. A., et al.* Viscous Dissipation Energy As a Risk Factor in Multiple Cerebral Aneurysms // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.—2015.—Vol. 30 (5).—P. 277–287.—URL: http://dodo.inm.ras.ru/biomath-archive/articlesVI/khe.pdf.
15. *Yanchenko A. A., Cherevko A. A., Chupakhin A. P., et al.* Nonstationary Hemodynamics Modelling in a Cerebral Aneurysm of a Blood Vessel // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.—2014.—Vol. 29 (5).—P. 307–317. DOI: 10.1515/rnam-2015-0025.
16. *Dhar S., Tremmel M., Mocco J., et al.* Morphology Parameters for Intracranial Aneurysm Rupture Risk Assessment // Neurosurgery.—2008.—Vol. 63 (2).—P. 185–197. DOI: 10.1227/01.NEU.0000316847.64140.81.
17. *Lindgren A. E., Kurki M. I., Riihinen A., et al.* Type 2 Diabetes and Risk of Rupture of Saccular Intracranial Aneurysm in Eastern Finland // Diabetes Care.—2013.—Vol. 36 (7).—P. 2020–2026. DOI: 10.2337/dc12-1048.
18. *Ren Y., Chen G. Z., Liu Z., et al.* Reproducibility of Image Based Computational Models of Intracranial Aneurysm: A Comparison between 3D Rotational Angiography, CT Angiography and MR Angiography // Biomed. Eng.—2016.—Vol. 15. DOI: 10.1186/s12938-016-0163-4.
19. *Yushkevich P. A., Piven J., Hazlett H. C., et al.* User-Guided 3D Active Contour Segmentation of Anatomical Structures: Significantly Improved Efficiency and Reliability // Neuroimage.—2006.—Vol. 31.—P. 1116–1128. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2006.01.015.
20. *Peach T. W., Ngoepe M., Spranger K., et al.* Personalizing Flow-Diverter Intervention for Cerebral Aneurysms: From Computational Hemodynamics to Biochemical Modeling // Int.

J. Numer. Meth. Biomed. Eng.—2014.—Vol. 30.—P. 1387–1407. DOI: 10.1002/cnm.2663.
21. *Cebral J. R., Mut F., Sforza D., et al.* Clinical Application of Image-Based CFD for Cerebral Aneurysms // Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng.—2011.—Vol. 27.—P. 977–992. DOI: 10.1002/cnm.1373.
22. *Raschi M., Mut F., Löhner R., Cebral J. R.* Strategy for Modeling Flow Diverters in Cerebral Aneurysms as a Porous Medium // Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng.—2014.—Vol. 30 (9).—P. 909–925. DOI: 10.1002/cnm.2635.
23. *Rumbaut R. E.* Platelet–Vessel Wall Interactions in Hemostasis and Thrombosis / Ed. by R. E. Rumbaut, P. Thiagarajan.—San Rafael: Morgan and Claypool Life Sci., 2010.
24. *Baskurt O. K., Hardeman M. R., Rampling M. W., Meiselman H. J.* Handbook of Hemorheology and Hemodynamics Biomedical and Health Research (IOS Press, Amsterdam, 2007).—URL: https://www.iospress.nl/book/handbook-of-hemorheology-and-hemodynamics/.
25. *Skiadopoulos A., Neofytou P., Housiadas Ch.* Comparison of Blood Rheological Models in Patient Specific Cardiovascular System Simulations // J. Hydrodynamics.—2017.—Vol. 29 (2).—P. 293–304. DOI: 10.1016/S1001-6058(16)60739-4.
26. *Mach G., Sherif C., Windberger U., Gruber A.* A Non-Newtonian Model for Blood Flow behind a Flow Diverting Stent.—URL: https://www.comsol.com/paper/a-non-newtonian-model-for-blood-flow-behind-a-flow-diverting- stent-40601.
27. *van Rooij W. J., Sluzewski M.* Opinion: Imaging Follow-up after Coiling of Intracranial Aneurysms // Amer. J. Neuroradiology.—2009.—Vol. 30 (9).—P. 1646–1648. DOI: 10.3174/ajnr.A1673.
28. *Orlov K., Kislitsin D., Strelnikov N., et al.* Experience Using Pipeline Embolization Device with Shield Technology in a Patient Lacking a Full Postoperative Dual Antiplatelet Therapy Regimen // Intervent. Neuroradiol.—2018.—Vol. 24 (3).—P. 270–273. DOI: 10.1177/1591019917753824.
29. *Zarrinkoob L., Ambarki K., Wahlin A., et al.* Blood Flow Distribution in Cerebral Arteries // J. Cerebral Blood Flow Metabolism.—2015.—Vol. 35 (4).—P. 648–654. DOI: 10.1038/jcbfm.2014.241.
30. *Khe A. K., Cherevko A. A., Chupakhin A. P., et al.* Monitoring of Hemodynamics of Brain Vessels // Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.—2017.—Vol. 58 (5).—P. 7–16 [J. Appl. Mech. Tech. Phys.—2017.—vol. 58 (5).—P. 763–770]. DOI: 10.1134/S0021894417050017.
31. *Chun On Tsang A., Lai S. S. M., Chung W. C., et al.* Blood Flow in Intracranial Aneurysms Treated with Pipeline Embolization Devices: Computational Simulation and Verification with Doppler Ultrasonography on Phantom Models // Ultrasonography.—2015.—vol. 34 (2).—P. 98–108 (2015). DOI: 10.14366/usg.14063.
32. *Goubergrits L., Schaller J., Kertzscher U., et al.* Hemodynamic Impact of Cerebral Aneurysm Endovascular Treatment Devices: Coils and Flow Diverters // Expert Rev. Med. Devices.—2014.—Vol. 11 (4).—P. 361–373. DOI: 10.1586/17434440.2014.925395.
33. *Ogilvy C. S., Chua M. H., Fusco M. R., et al.* Stratification of Recanalization for Patients with Endovascular Treatment of Intracranial Aneurysms // Neurosurgery.—2015.—Vol. 76 (4).—P. 390–395. DOI: 10.1227/NEU.0000000000000651.

Пленарные лекции

Фундаментальные проблемы образования

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННОМ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

В. С. Абатурова
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Лекция 1. Моделирование и математическое моделирование в философии, педагогике и теории и методике обучения математике

Стратегические документы руководства страны последних пятнадцати-двадцати лет направлены на решение проблем, связанных, с одной стороны, с глобальными вызовами, кризисами и угрозами (внутренними и внешними), и, с другой стороны, с перспективами, которые вызваны формирующимся в мире шестым технологическим укладом, включая появление нано- и клеточных технологий, беспрецедентное развитие цифровых технологий и глобальных информационных сетей, появление искусственного интеллекта, фактически создавших для людей новый уклад жизни. Кардинальные изменения в способах обработки информации, включая работу с большими данными, постепенно меняют институты общества, совершенствуют виды деятельности человека, подвергают качественным изменениям его мышление, актуализируя необходимость формирования у человека «многомодельного» мышления, способного осмысливать сложные явления на основе совокупности различных моделей, что, безусловно, влияет на изменения в научной сфере и в системе образования.

Результаты 2018 года международной программы PISA (Programme for International Student Assessment) по оценке образовательных достижений учащихся в возрасте 15 лет, показывают, что российские учащиеся испытывают трудности в решении заданий, описывающих реальные жизненные ситуации. Поэтому важной задачей в области математического образования становится развитие функциональной (математической) грамотности, которая определяется в этом проекте как «способность индивидуума проводить математические рассуждения и формулировать, применять, интерпретировать математику для решения проблем в разнообразных контекстах реального мира» [1, 2]. При этом, *умение формулировать ситуацию на языке математики; умение применять математические понятия, факты, процедуры; умение интерпретировать, использовать и оценивать математические результаты* — должны стать ключевыми умениями каждого учащегося старшей школы и студента вуза.

Один из крупнейших математиков 20 века академик АН СССР В. И. Арнольд отмечал, что формирование умения моделировать является условием интеллектуального развития. В работе ««Жесткие» и «мягкие» математические модели» [3] он пишет: «Умение составлять адекватные модели реальных ситуаций должно составлять неотъемлемую часть математического образования.

Успех приносит не столько применение готовых рецептов (жестких моделей), сколько математический подход к явлениям реального мира».

Математическое моделирование как научное направление возникло и утвердилось благодаря работам отечественных математиков — чл.-к. АН СССР С. П. Курдюмова (1928–2004), ак. АН СССР Н. Н. Моисеева (1917–2000), ак. АН СССР А. А. Самарского (1919–2008), ак. АН СССР А. Н Тихонова (1906–1993) и др., в которых достаточно полно освещены предмет, подходы, метод математического моделирования, приведено большое количество примеров математических моделей, уделено внимание методам исследования собственно математических моделей, качественному анализу решений. «Математическое моделирование — третий путь познания» считал ак. А. Н. Тихонов.

Академики А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, описывая суть методологии, отмечали, что изучение объекта с помощью математического моделирования можно представить в виде схемы: «модель — алгоритм — программа». При этом под «моделью» ими понималось уравнение или система уравнений, полученных в ходе изучения законов природы.

Большой вклад в экономико-математическое моделирование внесли зарубежные ученые — Л. Вальрас, О. Курно, В. Парето, Ф. Эджворт, Д. Хикс, Р. Солоу, П. Самуэльсон и др. Становление и развитие экономико-математического моделирования в Советском Союзе было связано с работами В. К. Дмитриева — модель полных экономических затрат труда и моделировании системы сбалансированных цен, Е. Е. Слуцкого — модель поведения потребителя, Н. Д. Кондратьева — открытие длинных волн в экономике, В. В. Леонтьева — разработка первого баланса народного хозяйства, В. С. Немчинова — модель расширенного воспроизводства, статистическая модель общественного разделения труда, Л. В. Канторовича — теория оптимального использования ресурсов, В. Л. Макарова — математическое и компьютерное моделирование экономики и др.

В основе математического моделирования лежит метод моделирования. Философские подходы к исследованию метода моделирования как метода познания отражены в работах К. Б. Батороева, В. С. Библера, М. Вартофского, В. А. Веникова, Н. Винера, Б. А. Глинского, К. Е. Морозова, И. Б. Новика, Н. Г. Салминой, И. Т. Фролова, В. А. Штоффа, А. И. Уемова и др.

Д.филос.н., профессор И. Б. Новик под моделированием понимает «метод опосредованного практического или теоретического оперирования объектом, при котором используется промежуточный или естественный «квазиобъект» (модель), находящийся в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом, способный замещать его в определенных отношениях и дающий при его исследовании в конечном счете информацию о самом моделируемом объекте» [4].

В одной из своих работ [5] д.п.н., профессор Л. М. Фридман пишет «Принцип моделирования в обучении математике означает, во-первых, изучение самого содержания школьного курса математики с модельной точки зрения, во-вторых, формирование у учащихся умений и навыков математического моделирования реальных явлений и ситуаций, и, наконец, в третьих, широкое использование моделей как внешних опор для внутренней деятельности, для развития научно-теоретического мышления».

Моделирование в обучении математике изучалось многими исследователями, в том числе: как принцип обучения (В. В. Давыдов и др.); как средство обучения (Е. С. Муравьев и др.); как метод обучения (Р. А. Низамов, А. А. Шибанов, А. А. Реан, В. С. Карапетян, В. А. Тайницкий); как эвристический метод учебного познания (А. Г. Мордкович, Ю. А. Кусый, Д. В. Вилькеев); как метод преподавания (Н. В. Кузьмина); как цель обучения и эффективное средство реализации ряда педагогических задач (Л. Г. Петерсон); как средство активизации познавательной деятельности в учебном процессе (Е. С. Муравьев); как один из методов решения задач (Е. С. Канин, Ф. Ф. Нагибин, Р. А. Майер); как способ исследовательской деятельности, обучение приемам которого способствует реализации дидактического принципа научности (И. Я. Мешкова).

В 90-х годах 20 века д.пед.н., к.ф.-м.н., профессором Е. И. Смирновым была разработана технология наглядного моделирования, согласно которой под наглядным моделированием в обучении математике понимается «процесс формирования адекватного категории диагностически поставленной цели устойчивого результата внутренних действий обучаемого на основе моделирования существенных свойств, отношений, связей и взаимодействий при непосредственном восприятии приемов знаково-символической деятельности с отдельным математическим знанием или упорядоченным набором знаний» [6].

Е. И. Смирнов отмечает там же, что «наглядно-модельное обучение математике как дидактический процесс формирования новых математических знаний включает в себя следующие компоненты:

1. Целеполагание (теоретический, практический, методический деятельностный модули).

2. Представление модели целостного математического объекта.

3. Оперирование знаково-символическими средствами (материальными и материализованными, перцептивными и идеальными).

4. Знаково-символическая деятельность (моделирование — схематизация, кодирование и замещение) и управление познавательной деятельностью.

5. Создание условий устойчивости перцептивного образа и представления.

6. Адекватность априорной модели (кода, схемы, заместителя) результату внутренних действий обучаемого (перцептивному образу)».

Последние 30 лет в педагогике изучается возможность введения элементов математического моделирования в школьное математическое образование. В программах по математике общеобразовательных школ и учебниках по математике, алгебре и геометрии для общеобразовательной и профильной школы д.пед.н., проф. В. А. Гусева, д.ф.-м.н., проф. Г. В. Дорофеева, д.пед.н., проф. А. Г. Мордковича, академика РАН АН СССР, д.ф.-м.н., проф. С. М. Никольского, д.ф.-м.н., проф. И. М. Смирновой введены понятия «математическая модель», «математическое моделирование».

Д.пед.н. А. С. Симоновым в ходе своего исследования был разработан спецкурс и факультатив «Экономика на уроках математики» для учащихся и студентов младших курсов и спецкурс «Основы математических знаний и их математический анализ» — для старшеклассников, обучающихся в классах с экономической ориентацией и студентов, а также методика обучения математике, использующая широкий набор экономических понятий и наполняющая новым теоретическим и практическим содержанием основные разделы курса алгебры 7–9 классов и алгебры и начал анализа 10–11 классов.

В период с 2003 по 2010 годы в Лаборатории образовательных технологий Южного математического института ВНЦ РАН, а также во Владикавказском Центре непрерывного математического образования и в общеобразовательных школах № 41, № 44, № 27 г. Владикавказа, школе № 6 г. Беслана, школе № 2 г. Алагира, школе № 1 с. Октябрьское РСО-А, нами проводилась работа по выявлению и теоретическому обоснованию педагогических условий, а также построению дидактической модели формирования познавательной самостоятельности учащихся профильных классов экономической направленности средствами математического моделирования.

Был разработан и реализован (факультативный) курс «Математическое моделирование — школьникам. Линейные модели» для учащихся профильных классов экономической направленности с целью внедрения в школьное обучение математике элементов экономико-математического моделирования и ознакомления учащихся с экономико-математическими моделями (модель пространства товаров и цен, модель рыночного равновесия, модель издержек, модель изменения цен (паутинообразная модель), модель принятия оптимального решения), которые описываются линейными моделями, включая оптимизационные.

В программу элективного (факультативного) курса была включена следующая тематика: линейные функции одной, двух и трех переменных, линейные уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств с двумя неизвестными; графический метод решения систем линейных неравенств с двумя и тремя неизвестными; линейные оптимизационные модели, симплекс-метод.

В 2007 году по итогам апробации этого элективного (факультативного) курса в школах РСО-А в Институте прикладной математики и информатики ВНЦ РАН (ныне — Южный математический институт ВНЦ РАН) вышло учебное пособие к.пед.н. В. С. Абатуровой [7] с таким же, как у курса, названием «Математическое моделирование — школьникам. 1. Линейные модели». Пособие предназначено для учителей, студентов педагогических вузов и школьников с целью ознакомления с методом математического моделирования на примере линейных моделей, включая оптимизационные, описывающих реальные экономические и производственные процессы.

В предисловии научного редактора д.ф.-м.н., профессора А. Г. Кусраева отмечается: «В ходе изучения элективного (факультативного) курса школьник вырабатывает навыки записывать в математических терминах качественные и количественные представления изучаемой практической задачи, к которым приводят модели, интерпретировать полученные решения в терминах исходной модели... Цель курса — показать, что математические понятия, такие, как линейная функция, линейное уравнение, линейное неравенство являются основой для построения линейных математических моделей, которые имеют многочисленные приложения, в частности, в экономике».

В ходе конструирования курса нами были разработаны граф согласования математических и экономических знаний, которые интегрируются в ходе проведения элективного курса; составлены банки мотивационно-прикладных (практико-ориентированных) задач на линейные модели реальных процессов;

описаны некоторые модели реальных линейных процессов: модель времени, модель равномерного прямолинейного движения, модель рыночного равновесия, модель национального дохода, линейные оптимизационные модели.

Под мотивационно-прикладной (***практико-ориентированной***) ***задачей мы понимаем сюжетную прикладную задачу, описывающую реальные процессы в природе, обществе и производстве и решаемую математическими средствами.***

С целью реализации принципа фундаментализации знаний все понятия вводятся на основе геометрического подхода, который реализован посредством координатного метода, позволяющего дать наглядную интерпретацию связи основных понятий алгебры и геометрии — чисел и точек соответственно. Кроме этого, курс построен на строгом доказательстве теоретических положений о графике линейной функции, графике линейного уравнения с двумя неизвестными, графическом способе решения систем линейных уравнений и неравенств с двумя неизвестными и их приложениях. В последние годы математическое моделирование все чаще проникает в школьное математическое образование, правда, пока только в тех школах, где практико-ориентированному обучению уделяется основное внимание, чаще всего — в специализированных профильных школах при крупных вузах страны — СУНЦ МГУ, СУНЦ НГУ и др.

На наш взгляд, практико-ориентированное обучение математике школьников должно, в первую очередь, знакомить учащихся с методом математического моделирования на уроках в ходе решения учебных задач практического характера (мотивационно-прикладных задач), и во внеурочной деятельности — в ходе участия в конкурсах и олимпиадах по математическому моделированию при решении заданий, которые мы называем ***многоэтапными мультидисциплинарными задачами — задачами на математическое моделирование реальных ситуаций, для решения которых необходимы знания по математике, информатике и одной или нескольким естественнонаучным дисциплинам.***

Школьные интеллектуальные мультидисциплинарные командно-личные соревнования IMMC уже более двадцати лет с успехом проводятся в разных странах. В Китае, к примеру, в таких конкурсах ежегодно принимает участие более 40000 школьников, а предмет «математическое моделирование» в этой стране введен в школьную общеобразовательную программу, причем уже разработаны методики обучения математическому моделированию учащихся старших классов не только в специализированной, но и в массовой школе.

В России впервые в ноябре 2018 года к.ф-м.н. доцентом СУНЦ МГУ В. Н. Дубровским был организован I Международный командно-личный турнир школьников 8–10 классов по математическому моделированию (ТММ, МаМоНТ). Основной этап конкурса 2018 года — решение реальной производственной задачи «Калибровка акселерометров», предложенной фирмой Huawei — многоэтапной мультидисциплинарной задачи, с условием задачи можно ознакомиться по ссылке: `http://internat.msu.ru/wp-content/uploads/2018/10/zadacha_KMM2018.pdf`.

Подробнее о ТММ и конкурсах, проводимых в рамках турнира: «Примат» — конкурс задач по прикладной математике, «Омар» — конкурс задач по реальной математкие, «КОЗа» — конкурс оптимизационных задач можно узнать на сайте СУНЦ МГУ, на странице турнира: `http://internat.msu.ru/educational-projects/turniry-i-konferentsii/turnir-mm1/`.

Участие в ТММ 2018, 2019 года команды из четырех учащихся ВЦНМО (младшая группа, 7–8 класс), анализ результатов турнира двух лет всех участников турнира в двух лигах (старшей — 10–11 классы и младшей — 8–9 классы), что высокий уровень сформированности умений в области математического моделирования показывают учащиеся 11 классов специализированных математических школ и центров, которые кроме получения традиционных академических знаний в области математики, информатики и естественно-научных дисциплин, получают необходимые знания на кружках по математическому моделированию, организованному в этих школах, где у учащихся формируются умения формулировать ситуацию на языке математики; умения применять математические понятия, факты, процедуры; умения интерпретировать, использовать и оценивать математические результаты, т. е. строить математические модели реальных ситуаций и процессов.

На наш взгляд, необходимо расширять практику проведения таких конкурсов по математическому моделированию во всех школах страны, но для этого необходимо повысить уровень компетенций в области математического моделирования у школьных учителей, разработать адаптированные образовательные программы по математическому моделированию для организации школьных кружков, спецкурсов и/или факультативов и серии многоэтапных мультидисциплинарных задач, что тем самым со временем приведет школы к включению в учебный процесс междисциплинарных образовательных программ STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics), которые уже реализуются много лет в Китае, США и других странах.

Лекция 2. Формирование познавательной самостоятельности школьников средствами математического моделирования

Необходимость обеспечения Правительством РФ до 2024 года глобальной конкурентоспособности страны (способности выдерживать конкуренцию в овладении новыми технологиями, способности граждан адаптироваться к изменяющимся условиям обучения, труда и жизни), включая вхождение Российской Федерации в число 10 ведущих стран мира по качеству общего образования ставит задачу модернизации системы образования, в том числе, посредством внедрения адаптивных, практико-ориентированных образовательных программ в вузах и в школах.

Практико-ориентированное (профессионально-ориентированное) обучение в вузе характеризуется усилением роли профессионально-прикладной направленности образовательных программ, в ходе изучения которых у студента формируются знания, умения и компетенции, необходимые ему в будущей профессии, а также привлечением к обучению практикующих специалистов, способных передать накопленный опыт работы организовать студентам соответствующую практику и стажировку.

Практико-ориентированное обучение в школе, как отмечает в своем исследовании д.пед.н. М. В. Егупова «состоит в развитии способности учащихся математизировать информацию об окружающем мире и получать на основе этого новую информацию, что является одной из характеристик самостоятельно мыслящего, интеллектуально развитого человека» [8].

Всемирная пандемия коронавируса 2020 года актуализировала, на наш взгляд, одну из основных современных проблем системы образования, связанную с необходимостью осуществления эффективного удаленного учебного взаимодействия преподавателя (учителя) и студента (учащегося) на фоне имеющихся проблем материально-технического характера (отсутствия доступа к сети Интернет или необходимой скорости соединения, отсутствия или низкого качества необходимых инструментов для дистанционного взаимодействия — компьютера, ноутбука, планшета, смартфона).

Одной из причин наличия данной проблемы является, на наш взгляд, низкий уровень сформированности у большей части обучающихся одного из ключевых интеллектуальных качеств развивающейся личности — ***познавательной самостоятельности***, тесно связанного с уровнем мотивации учения и умением учиться самостоятельно, используя различные источники получения знаний (педагог, Интернет-ресурсы, дистанционные курсы и др.).

Поиск эффективных методов формирования познавательной самостоятельности обучающихся (школьников и студентов) в условиях смешанного обучения (очного и дистанционного) становится актуальной темой для исследований в области наук об образовании, включая теорию и методику обучения математике. Термин «познавательная самостоятельность» учащихся в науке не новый, хорошо изученный в 20 веке многими советскими, российскими и зарубежными учеными — философами, психологами, педагогами, методистами.

В отечественной педагогике основателем теории воспитания самостоятельности учащихся является К. Д. Ушинский, который под самостоятельностью понимал качество личности, формируемое в процессе самостоятельной деятельности учащегося под руководством учителя и выраженное в самостоятельности мышления, а способом воспитания самостоятельности он считал приучение учащихся «к созерцанию, наблюдению, так как только наблюдение дает возможность самостоятельно думать, а потом выражать эти мысли в словах, самостоятельные же мысли вытекают только из самостоятельно приобретенных знаний» [9].

Методы формирования и развития самостоятельности, в том числе познавательной самостоятельности, интересовали многих российских исследователей — психологов и педагогов, включая П. Я. Гальперина, Е. Я. Голанта, В. В. Давыдова, М. А. Данилова, Б. П. Есипова, В. И. Загвязинского, И. Я. Лернера, П. И. Пидкасистого, Г. И. Саранцева, М. И. Скаткина, С. Л. Рубинштейна, А. В. Усовой, К. Д. Ушинского, В. Д. Шадрикова, Т. И. Шамовой, Д. Б. Эльконина, что отражено в их работах. Так, И. Я. Лернер считал, что «познавательная самостоятельность — это умение и стремление творчески подходить к окружающей действительности» [10]. Т. И. Шамова в работе [11] определила познавательную самостоятельность как «свойство личности, характеризующееся стремлением и умением учащихся без посторонней помощи овладевать знаниями и способами деятельности, решать познавательные задачи с целью дальнейшего преобразования и совершенствования окружающей действительности».

В результате этих и других исследований были предложены, а затем и внедрены в практику разные пути формирования познавательной самостоятельности, в частности: введение в содержание обучения методологических знаний (А. Л. Жохов, И. И. Ильясов, И. Я. Лернер, Н. А. Лошкарева, В. Я. Ляудис, Н. С. Пурышева), использование обобщенных знаний, составляющих ориентировочную основу деятельности (П. Я. Гальперин, В. А. Сластенин, Н. Ф. Талызина, Л. М. Фридман, П. М. Эрдниев); формирование приемов познавательной деятельности (В. В. Давыдов, А. М. Матюшкин, Д. Б. Эльконин); организация самостоятельной работы, решение учебных задач (Н. Я. Голант, Б. П. Есипов, М. И. Скаткин).

В ходе проведенного нами исследования по проблеме формирования и развития познавательной самостоятельности учащихся профильных классов экономической направленности средствами математического моделирования (математическое содержание которого описано в лекции 1) были определены структура, характеристики, критерии и уровни познавательной самостоятельности учащихся, предложена авторская методика обучения математике учащихся профильных классов экономической направленности на базе элективного (факультативного) курса, основанного на математическом моделировании реальных экономических и производственных процессов, описываемых линейными моделями, включая оптимизационные.

Под ***познавательной самостоятельностью обучающихся нами понимается качество личности, основанное на собственной познавательной активности, и устойчиво проявляющееся в способности обучающихся вести целенаправленную познавательную деятельность по приобретению, применению и преобразованию знаний, умений и универсальных учебных действий*** [12, 13].

Структура познавательной самостоятельности, уточненная нами в ходе проведенного анализа указанных выше исследований, содержит следующие компоненты:

мотивационно-целевой компонент, характеризующийся уровнем желания (побуждения) учащегося к самостоятельной познавательной деятельности, возникающего из-за наличия противоречия между имеющейся познавательной потребностью и возможностью удовлетворения ее собственными силами;

содержательно-операционный компонент, характеризующийся уровнем владения знаниями (содержательный компонент познавательной самостоятельности) и способами учебно-познавательной деятельности (операционный компонент познавательной самостоятельности);

рефлексивно-оценочный компонент, характеризующийся уровнем сформированности умения анализировать и оценивать самостоятельную познавательную деятельность с позиции расширения приемов познания (моделирование, поиск, отбор, переработка и трансляция знания).

Классификация уровней познавательной самостоятельности определяется нами по следующему критерию — степенью владения учебными элементами (по В. П. Беспалько, [14]) — знаниями, умениями, навыками, методами и алгоритмами (ЗУНМА), а также универсальными учебными действиями, указанными выше. В соответствии с этим мы выделили в ходе проведенного исследования три уровня сформированности познавательной самостоятельности учащихся профильных классов экономической направленности.

Уровень сформированности познавательной самостоятельности учащихся	– по степени овладения знаниями, умениями, навыками, методами алгоритмами (ЗУНМА)	– по степени овладения универсальными учебными действиями – личностными, регулятивными, познавательными, коммуникативными (УУД)
низкий (репродуктивно-воспроизводящий)	**действие на уровне воспроизведения (алгоритмическое действие)**: учащиеся выполняют его, самостоятельно воспроизводя и применяя информацию о ранее усвоенной ориентировочной основе выполнения данного действия	**действие по образцу** — учащиеся умеют выполнять данное действие самостоятельно, но лишь по образцу, подражая действиям учителя или сверстников
средний (частично-поисковый)	**действие на уровне применения (действие эвристического типа)**: эвристическая деятельность, выполненная не по готовому алгоритму или правилу, а по созданному или преобразованному в ходе самого действия	**действие самостоятельное**, основанное на устойчивом умении — учащиеся умеют достаточно свободно выполнять действия, осознавая каждый шаг
высокий (исследовательский, творческий)	**действие творческого типа**, когда учащимся создается объективно новая ориентировочная основа деятельность, новая информация	**автоматизированное действие (навык)** — учащиеся автоматизированно, свернуто и безошибочно выполняют действия

Педагогическими условиями, необходимыми для формирования познавательной самостоятельности, мы в нашем исследовании определили следующие:

• обогащенность информационно-образовательной среды учащихся на базе взаимодействия различных активных и интерактивных форм, методов и средств обучения математике;

• интеграция проблемного, наглядно-модельного и практико-ориентированного обучения математике на основе обобщенных моделей актуализации метапредметных умений и универсальных учебных действий, характеризующих уровень познавательной самостоятельности обучающихся (*личностных* — профессиональное самоопределение и действие смыслообразования; *регулятивных* — целеполагание, самооценка, саморегуляция; *познавательных* — выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий (общеучебные УУД), моделирование (знаково-символические), общий прием решения задач (логические); *коммуникативных* — планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками);

• отражение междисциплинарных связей математики, информатики и других естественно-научных дисциплин в практико-ориентированных образовательных программах и курсах по математике, содержащих комплексы мотивационно-прикладных учебных задач на математическое моделирование реальных процессов и явлений.

Предлагаемая нами **методика формирования познавательной самостоятельности учащихся профильных классов экономической направленности в ходе обучения элективному (факультативному) курсу «Математическое моделирование — школьникам. Линейные модели»**, имеет следующую структуру:

I этап. Анализ и актуализация профессионально важных личностных качеств будущего экономиста, постановка целей и задач обучения (как для учителя, так и для учащегося) в соответствии с необходимостью формирования познавательной самостоятельности у учащихся;

II этап. Актуализация математических, экономических и информационных знаний.

III этап. Постановка проблемы (построение графа согласования учебных программ математики, экономики и ИКТ; составление рабочей программы курса, подбор комплекса мотивационно-прикладных задач и типологизация их по уровням сложности).

IV этап. Организация интегративных уроков и создание вариативных форм работы учащихся (коллективно, в малых группах, индивидуально) по решению мотивационно-прикладных задач методом математического моделирования.

V этап. Презентация результатов учебной деятельности учащегося, включая создание субъективно новых мотивационно-прикладных задач учащимися и проектно-исследовательских проектов; создание педагогических условий, обеспечивающих интеграцию знаний и учебную мотивацию; планирование самостоятельной работы учащихся.

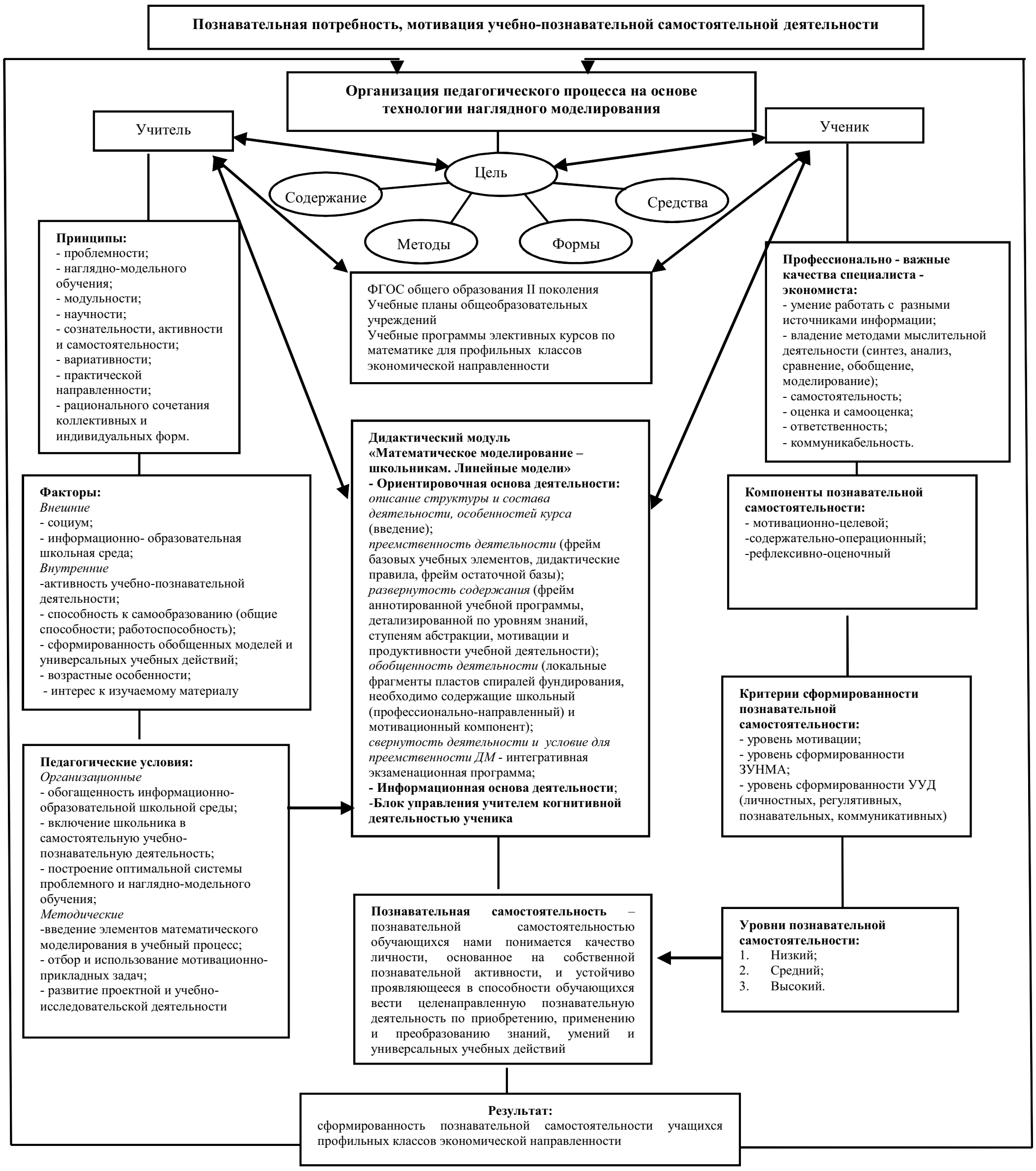
VI этап. Оценка учителем достижений учащегося, самооценка, рефлексия.

VII этап. Анализ результатов и корректировка деятельности.

С примерами реализации методики формирования познавательной самостоятельной деятельности учащихся в ходе обучения элективному (факультативному) курсу «Математическое моделирование — школьникам. Линейные модели» можно ознакомиться в книгах [2, 12].

В течение последних десяти лет Южный математический институт ВНЦ РАН совместно с Северо-Осетинским институтом повышения квалификации работников образования проводит научно-практический семинар «Наука — Школе» (соруководители семинара — к.пед.н. В. С. Абатурова, к.ф.-м.н. Т. Л. Чшиева), в ходе которого были неоднократно применены результаты описанного исследования, подготовлены методические разработки учителей по реализации данной дидактической модели, опубликованы статьи учителей в научных сборниках (к.пед.н. Т. Б. Бегиева, Л. П. Охват, Д. А. Караева).

Ниже приведена авторская дидактическая модель формирования познавательной самостоятельности средствами математического моделирования [13].



Литература

1. PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematics, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving, Revised edition.—Paris: OECD Publ., 2017.—P. 65–80.
2. PISA 2021 Mathematics Framework (First Draft).—Stockholm: OECD Publ., 2018.—46 p.
3. *Арнольд В. И.* «Жесткие» и «мягкие» математические модели.—М.: МЦНМО, 2004.—32 с.
4. *Новик И. Б.* Гносеологическая характеристика кибернетических моделей / Вопросы философии.—М., 1989.—459 с.
5. *Фридман Л. М.* Сюжетные задачи по математике. История, теория, методика: Учеб. пособие для учителей и студентов пед. вузов и колледжей.—М.: Школьная Пресса, 2002.—208 с.—(Библиотека журнала «Математика в школе», вып. 15).

6. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика: Учеб. пособие / Под ред. Е. И. Смирнова.—Ярославль: ИПК «Индиго», 2007.—454 с.
7. *Абатурова В. С.* Математическое моделирование школьникам. 1. Линейные модели: Учеб. пособие.—Владикавказ: Ин-т прикладной математики и информатики ВНЦ РАН, 2007.—112 с.
8. *Егупова М. В.* Практико-ориентированное обучение математике в школе как предмет методической подготовки учителя.—М.: МПГУ, 2014.
9. *Ушинский К. Д.* Собрание сочинений. Т. 8. Человек как предмет воспитания.—М., 1950.
10. *Лернер И. Я., Скаткин М. Н.* О методах обучения // Советская педагогика.—1965.—№ 3.—С. 34–41.
11. *Шамова Т. И., Давыденко Т. М., Шибанова Г. Н.* Управление образовательными процессами.—М.: Академия, 2002.—384 с.
12. *Абатурова В. С.* Формирование познавательной самостоятельности учащихся старших классов средствами математического моделирования // Ярослав. пед. вестн.—2013.—Т. 2, № 1.—С. 108–116.
13. *Абатурова В. С.* Математическое моделирование в обучении математике: Математическое моделирование как средство формирования познавательной самостоятельности учащихся.—Саарбрюккен: LAP LAMBERT Acad. Publ., 2012.—177 с.
14. *Беспалько В. П.* Слагаемые педагогической технологии.—М., 1989.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

О СОДЕРЖАНИИ И СТРУКТУРЕ УЧЕБНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. Н. Дятлов

(Россия, Новосибирск, НГУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Потребность подготовки специалистов, обладающих способностью к непрерывному образованию, приводит к необходимости анализа содержания и структуры учебных материалов, расстановке акцентов между их информационной и образовательной составляющими. Предлагается обратить внимание на промежуточную между теорией и практикой составляющую, так называемую технологическую, которая позволяет повысить эффективность образовательного процесса. Материал подготовлен по лекциям, прочитанным на Владикавказской молодежной математической школе в 2020 г.

Целью этого текста является привлечение внимания к некоторым вопросам образования, касающимся содержания и структуры учебных материалов.

Лекция 1. Информационная и образовательная составляющая учебного процесса

Образование включает в себя по крайней мере две составляющие: информационную и образовательную. Информационная состоит из набора сведений в рамках изучаемой предметной области, образовательная — в овладении способами их восприятия, обработки и использования. По существу, информационная составляющая предназначена для освоения языка предметной области, образовательная — для освоения общих принципов деятельности, можно сказать, для формирования разнообразного типа компетенций на основе информационной составляющей.

Между этими двумя компонентами желательно расставить приоритеты, акценты.

Обычно при изложении материала в литературе и представлении его на лекциях и занятиях преобладает информационная составляющая. Как правило, сообщается терминология и результаты, полученные на ее основе, в виде утверждений, правил и т. п. Разумеется, это необходимая часть изучения предмета. Однако уже давно получение информации не представляет собой большой проблемы — все написано в книгах, многое доступно через Интернет. Кроме того, нет уверенности, что изученная информация будет обучаемому необходима в предстоящей деятельности, разве что при освоении других учебных дисциплин. Скорее всего, потребность в конкретной предметной области в дальнейшем невелика, и тем самым изучаемый предмет с информационной точки зрения большой ценности не представляет.

Естествен вопрос: для чего данную образовательную дисциплину изучать? Он возникает у многих учащихся и студентов.

В наше время на первый план выступает необходимость подготовки специалистов, способных к непрерывному обучению в течение длительного времени, и не только в той специальности, по которой они получили первичное образование. Поэтому можно предположить, что акцент с обеспечения информацией смещается в направлении обеспечения средствами и способами ее получения, обработки и использования (в широком смысле).

Имея в виду указанную расстановку акцентов, обратим внимание на вторую составляющую учебного процесса, а именно на его образовательную часть. Напомню известное любопытное «определение»: образование это то, что у вас останется, когда вы забудете все, чему вас учили. В этой шутке есть доля шутки. Перефразируя его более серьезно, можно понять, что в образовании большую роль играет формирование навыков деятельности универсального характера, применимых не только в изучаемой области, но и в любой другой сфере деятельности. Такая расстановка приоритетов с преобладанием образовательной составляющей в смысле овладения способами обработки информации предполагает использование несколько иной по сравнению с обычной структуры учебных материалов и в какой-то мере учебного процесса.

В связи с такой расстановкой приоритетов полезно также сформировать отношение к учебным задачам, т. е. задачам из учебников и задачников. Нередко к ним относятся как к исследовательским задачам и предпринимают попытки решить их любым путем, придумывая и предлагая искусственные схемы рассуждений, пригодные только в специфических обстоятельствах. В ситуации приоритета образовательной составляющей преимущество желательно отдавать таким рассуждениям, таким конструкциям и схемам, которые обладают свойством повторяемости, могут быть применены не только в данной ситуации, но и в других случаях, похожих на рассматриваемый. При этом формируются и закрепляются алгоритмы действий, основанные на изученном теоретическом материале и поддерживаемые вытекающими из него правилами и механизмами действий. Тем самым при решении учебных задач надо ставить цель не столько решить их, сколько чему-то научиться в процессе решения.

Большую роль в формировании общекультурных компетенций играет общение преподавателей с учащимися, при котором обсуждаются различные точки зрения, передается профессиональный и жизненный опыт, культура речи, организации материала, общения с аудиторией и т. п. При личном общении обеспечивается обратная связь, в результате которой учащийся может своевременно обсудить интересующие его моменты. Это позволяет формировать навыки работы в рамках освоенного понятийного поля и в целом общих навыков деятельности.

Однако в условиях ограниченного взаимодействия обучаемого с обучающим формирование различного рода компетенций затрудняется, ибо определенное место в образовательном процессе отводится самостоятельной работе с литературой, а в ней далеко не всегда присутствуют присущие взаимодействию элементы, позволяющие с высокой степенью самостоятельности формировать путь решения различных задач. Причина этого отчасти связана с традиционной структурой учебных материалов. Обычно они и соответствующие им составляющие учебного процесса включают в себя две части: теорию и практику. Сначала излагается теоретический материал, затем — набор примеров его использования при решении каких-то задач. Можно заметить отсутствие раздела, позволяющего распознать применимость данной теории к решению возникшей задачи и средств такого применения.

Для восполнения этого пробела и повышения качества образования в [1] предложено в учебные материалы и в учебный процесс включить промежуточную между теорией и практикой часть, состоящую из набора правил, алгоритмов, методов, основанных на теоретическом материале и применяемых для решения задач. Об этой части будем говорить как о *технологической составляющей* учебного материала. Таким образом, предлагается использовать трехчастную структуру учебных материалов: теория — технологии — практика.

Как изложено в [1], особенности технологической части состоят в следующем.

Исходя из опыта применения такой структуры в учебном процессе, можно сказать, что для эффективности технологической части желательно, чтобы она удовлетворяла определенным требованиям.

(a) Необходимы средства распознавания применимости того или иного метода к решению данной задачи. Такие средства должны состоять из достаточно легко проверяемых особенностей, позволяющих в случае их наличия в постановке задачи с высокой степенью определенности принять решение о выборе данного метода для анализа задачи.

Выбор метода является ответственным шагом. От него нередко зависит успех в решении задачи. Поэтому механизм распознавания — существенное звено в технологической составляющей.

(b) Желательно представлять правила в виде набора шагов, каждый из которых должен либо состоять из вопроса, в результате ответа на который происходит выбор дальнейших действий, либо содержать исполняемые действия, т. е. такие рекомендации, которые могут быть выполнены без дополнительных разъяснений при определенной предварительной подготовке. Разбиение решения на исполняемые шаги повышает активность учащегося, так как позволяет свести задачу к выполнению доступных ему действий.

(c) Весьма желательно иметь признаки завершения решения. Даже в самых простейших ситуациях надо понимать, какова цель, какого вида может или должен быть ожидаемый результат, каковы отличительные признаки этого результата. Такие признаки позволяют быть уверенным в завершенности решения задачи.

Наличие правил, обладающих перечисленными свойствами, позволяет организовывать решение задачи как целенаправленный процесс, мотивированно намечать последовательность действий, способную привести к решению, выбирать очередной шаг, исполнять его и переходить к следующему, и действовать так либо до решения задачи, либо до осознания того, что выбранный путь к решению не приведет. Во всяком случае организация решения как серии мотивированных действий лучше, чем выполнение случайных операций. Желательно руководствоваться принципом: ни одного немотивированного действия! Каждый шаг должен быть чем-то вызван.

Распознавание применимости теоретических сведений для решения имеющейся задачи эффективно организуется посредством постановки вопросов.

Эта процедура формирует способность к анализу ситуации, ибо уместно поставленный вопрос побуждает искать на него ответ. Умение ставить вопросы не менее важно, чем способность давать на них ответы. Чем уместнее вопрос, тем содержательнее и эффективнее на него ответ, и тем больше шансов решить поставленную задачу. Стиль работы над задачей, при котором деятельность сопровождается вопросами, придает динамику и направленность процессу решения. Для того чтобы научить ставить вопросы, надо обеспечить обучающихся обозримым набором вопросов, которые желательно задавать в соответствующих ситуациях.

Разумеется, каждый вопрос предполагает поиск ответа, и надо предложить набор возможных ответов, достаточно представительный для выбора очередного шага. Система постановки вопросов и поиска ответов на них приводит к целенаправленному разветвлению процесса решения задачи, позволяет ставить цели и идти к ним.

Среди вопросов можно выделить достаточно эффективные общего плана и также эффективные более частного характера. К общим вопросам можно отнести, например, такие: «что это означает?» и «как устроен объект?». Первый вопрос ставится в ситуациях, в которых есть термины, поддающиеся раскодированию согласно их определению, второй — в ситуациях, когда требуется произвести какие-то действия с объектом, в школьной математике и в курсе математического анализа это нередко функции. Тем самым один из часто задаваемых вопросов: как устроена функция? Есть набор возможных ответов и механизм их выбора, что позволяет эффективно выбирать требуемые средства.

Технологическая составляющая при изучении предмета приводит к повышению инициативы обучаемого. Она формирует способность к поиску путей решения вместо ожидания демонстрации примеров, простым повторением которых решаются задачи, побуждает обращаться к теоретическому материалу. При такой организации материала меняется традиционная направленность процесса «от преподавателя к обучаемому» на противоположную, т. е. «от обучаемого к преподавателю». Активным участником процесса может стать обучаемый, преподаватель может оказаться в роли консультанта, партнера, готового проанализировать, прокомментировать и оценить целесообразность предлагаемых обучаемым действий.

Наличие технологической составляющей в учебном материале позволяет достаточно эффективно использовать его для самостоятельного изучения предмета, в результате обучаемый привыкает к чтению учебной (а в будущем и научной) литературы, а формирование способности получения знаний из литературы является одной из главных задач всего процесса образования.

Повышение роли учебной литературы при трехчастной форме ее организации предполагает изложение формулировок определений и утверждений в наиболее технологичном виде, без чрезмерного употребления макросов, по возможности явного указания кванторов, без использования их по умолчанию. Формулировки должны способствовать составлению алгоритмов действий, формированию технологической составляющей.

Лекция 2. О корректности и технологичности по материалам школьных учебников

Покажем на небольшом наборе примеров реализацию изложенных выше соображений.

Начнем с примеров из школьного курса математики и остановимся на процессе формирования математической грамотности у учащихся старших классов и студентов первых месяцев обучения.

Обратим внимание на существенное различие между изложением содержания курса математики в школе и в вузе. В школе больше обращают внимание на преобразовательную составляющую, т. е. на выполнение каких-то математических действий, например, при решении уравнений или неравенств, констатацию отдельных свойств функции и т. п. Весьма незначительное внимание уделяется логической составляющей, выяснению содержания, смысла действий, не акцентируется логическая составляющая утверждений в процессе их применения при решении задач. Вместе с тем при дальнейшем изучении математики на первый план выходит как раз логическая составляющая, во-первых, предполагающая точные формулировки при определении понятий и при изложении утверждений, а во-вторых, требующая исключительного внимания к корректности их использования при доказательстве новых утверждений и решении задач более технического характера.

Особое значение приобретает хорошее понимание обучаемым влияния кванторов, сопровождающих любое определение или утверждение. Приходится констатировать, что выпускник школы, как правило, вообще не понимает необходимость строгого соблюдения логики определений и утверждений, относится к математическим текстам образно, с интуитивных позиций, нередко не предполагая исключительной строгости следования всем деталям. В частности, совсем не сформировано восприятие кванторов, без чего дальнейшее обучение математике бессмысленно.

Принимая во внимание наличие указанной ситуации представляется важным на первом этапе обучения сформировать корректное отношение к кванторам, показывающим взаимосвязи между отдельными деталями в формулировках определений или утверждений. Поскольку одним из основных объектов, с которыми приходится сталкиваться в математике, это функции, эффективнее всего обучать отношению к кванторам на основе изучения свойств функций, и, во-первых, на это стоит обращать внимание в школе, а во-вторых, с этого можно начинать курс математического анализа или вообще высшей математики в вузе. Обучение восприятию кванторов имеет свои трудности. Представляется, что проблемы с отношением к кванторам возрастают по мере увеличения состава кванторной группы в определении или утверждении и в зависимости от порядка следования кванторов. Поэтому начинать можно с самых простых конфигураций, например, с характеристики, включающей один квантор существования. Удивительно, но нередко даже специалисты затрудняются назвать относящееся к функции обстоятельство, в котором используется один квантор существования. А тем не менее с этим связаны одни из основных сопровождающих функцию атрибутов: область определения и множество значений. В то время как при характеристике области определения при обычном определении функции как однозначного правила сопоставления квантор существования не очень выделяется, определение множества значений без него становится несколько размытым, а с квантором существования, сформулированное таким образом:

$$E(f) = \{y : (\exists\, x \in D(f))\ y = f(x)\},$$

приобретает конструктивный характер. При таком подходе видно, как понятие множества значений можно характеризовать и использовать.

Далее по возрастанию трудности восприятия идут кванторные приставки, содержащие один квантор общности (свойства четности и нечетности), два квантора общности (монотонность), квантор существования и затем квантор общности (периодичность, ограниченность, экстремум) и, наконец, сначала квантор общности и затем квантор существования (неограниченность). От последней конфигурации до понятия предела остается один шаг — добавление одного квантора общности, и если в процессе освоения предыдущих конфигураций было достигнуто адекватное восприятие кванторов, то понятие предела (последовательности или функции) никаких проблем не составляет.

Последовательное изучение или повторение в порядке усложнения способствует формированию элементов математической культуры и служит основой дальнейшего обучения.

Привлечение внимания к важным деталям определений и утверждений должно опираться на их точные и технологичные формулировки в том смысле, что они не должны допускать двусмысленности, должны позволять на их основе выстраивать в необходимых случаях цепочки рассуждений. Однако эти пожелания далеко не всегда соблюдаются в школьных учебниках. На нескольких примерах обсудим предлагаемые в учебниках определения, формулировки и пояснения и попробуем оценить их точность и технологичность.

Начнем с определения функции. Предпримем попытку на основе текстов из школьных учебников ответить на вопрос: «что такое функция?», т. е. дать ответ на один из двух общего вида вопросов «что значит “функция”?». Обратимся, например, к [2, с. 86]. «Если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу из множества X определенное число y, то говорят, что задана функция $y = f(x)$ с областью определения X; пишут: $y = f(x)$, $x \in X$. При этом переменную x называют независимой переменной или аргументом, а переменную y — зависимой переменной.» Можно ли по этому тексту ответить на поставленный вопрос? Не уверен. В нем нет прямого ответа на этот вопрос, разъясняется только содержание слов «задана функция», но остается неясно, что же задано.

Приведем еще одно определение понятия функции [3, с. 210]. «Переменную y называют функцией переменной x, если каждому значению x из некоторого числового множества соответствует одно определенное значение переменной y». Из этого определения можно подумать, что функция — это переменная y. Интересно, для чего в таком случае предлагать дополнительно определение функции, а не ограничиться понятием переменной? Ответ неясен. Как при таком определении можно говорить о значении функции? К этому определению вопросов, пожалуй, побольше, чем к предыдущему.

В других источниках можно наблюдать что-то среднее между «задана функция» и «функция — это переменная». Словосочетание «задана функция» проистекает, по-видимому, из текстов 60-годов, когда в учебной литературе начало формироваться представление о функции (см., например, 4, с. 127], однако с тех пор прошло немало времени, представления о математических понятиях становятся более точными и прозрачными, однако до школьного уровня это до сих пор не дошло.

Вместе с тем нетрудно дать ответ на этот вопрос. Сначала можно поговорить о том, что на школьном уровне понятие функции относится к первичным понятиям и для него вопрос «что это значит?» может быть только разъяснен с помощью других слов — синонимов, позволяющих по возможности единообразно понимать, что под этим словом скрывается. Подходя с позиций применения этого понятия в решении задач представляется уместным, например, следующее разъяснение понятия функции (см., например, [1]).

В математике значительную роль играют зависимости между величинами или объектами, отражающие зависимости между явлениями или объектами окружающего нас мира. Зависимости, рассматриваемые в математике, могут быть описаны разными способами, более того, одна и та же зависимость может быть описана разными средствами. Величины, находящиеся во взаимозависимости, могут выступать как равноправные, а может быть и так, что одна из величин считается выбираемой произвольно, а другая находится согласно определенному правилу в зависимости от выбора первой.

Среди всех зависимостей выделяют зависимости, обладающие свойством однозначности, и для них вводят отдельный термин — функция.

Определение. *Функцией*, определенной (заданной) на числовом множестве X, называют правило, согласно которому каждому элементу множества X сопоставляется какое-то одно, вполне определенное, число.

Таким образом, термин «функция» резервируется за правилами, отражающими однозначные зависимости между величинами, т. е. числами. Сформулированное определение допускает весьма краткое изложение типа «функция — это однозначное правило сопоставления (или действия)», которое может быть более полно раскрыто в изложенном выше виде.

При указанном понимании содержания термина «функция» нетрудно договориться о терминах и обозначениях. Правило, задающее функцию, часто обозначают буквами $f, g, h, \varphi, \dots$. Если f — функция, то множество X, на элементы которого распространяется действие правила (функции) f, называют *областью определения функции* f и обозначают через $D(f)$. Число, получаемое в результате действия функции f на элемент $x \in D(f)$, называют *значением функции* f *на элементе* xи обозначают символом $f(x)$. Множество, состоящее из всех чисел $f(x)$, где xберутся из области определения $D(f)$, называют *множеством значений функции* f и обозначают через $E(f)$, при этом полезно упомянуть и более технологичное представление о множестве значений (см. выше). Тот факт, что y — значение функции f на элементе x, выражают равенством $y = f(x)$.

Далее можно переходить к изложению фрагментов, относящихся к способам задания функции, разных связанных с функциями обстоятельств: свойств, графиков и т. п. Но при таком подходе нетрудно ответить на вопрос: что такое функция?

Немало интересного можно увидеть в учебных текстах на тему свойств функции. Приведем несколько наблюдений, обращаясь к [5].

Очень интересно здесь относятся к определению ограниченности снизу. А именно, в [5, с. 24] дано следующее определение ограниченности функции снизу на данном множестве. Функция f ограничена снизу, если для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant a$, где a — некоторое число. Из этого «определения» неясно, как его понимать, то ли как «существует такое a, что для любого $x \in X$ будет $f(x) \geqslant a$», то ли как «для любого $x \in X$ существует такое a, что$f(x) \geqslant a$». Ясно, что только одно из этих высказываний отражает суть свойства, и нет уверенности в том, что данное в учебнике определение формирует у учащихся 9-го класса элементы математической культуры. Если понимать изложенное в учебнике свойство во втором прочтении, то каждая функция окажется ограниченной снизу и свойство теряет содержательность.

Не менее любопытно и рассуждение, сопровождающее обоснование неограниченности в одном из примеров [5, с. 26]. Речь идет об исследовании функции $\varphi(x) = 3 - \sqrt{x^2+1}$ на ограниченность. Сначала процитируем весь текст этого обоснования. «Выражение $\sqrt{x^2+1}$ принимает наименьшее значение, равное 1, при $x = 0$, а наибольшего значения не имеет (при $x \to +\infty$ $\sqrt{x^2+1} \to +\infty$). Значит, верно неравенство $\sqrt{x^2+1} \geqslant 1$. Отсюда, пользуясь свойствами числовых неравенств, последовательно получаем $-\sqrt{x^2+1} \leqslant -1$, $3 - \sqrt{x^2+1} \leqslant 2$. Следовательно $\varphi(x) \leqslant 2$ при любом $x \in \mathbb{R}$, т. е. функция φ является неограниченной. Она ограничена сверху: ее верхней границей является число 2.»

Обсудим процитированный фрагмент.

Начнем с выражения «наибольшего значения не имеет (при $x \to +\infty$ $\sqrt{x^2+1} \to +\infty$)». Какое содержание должен вкладывать учащийся соответствующего класса в этот пассаж кроме чисто интуитивного? Скорее всего, никакого. Тем самым уже после этого фрагмента можно считать, что доказательства (корректного, опирающегося на определения и известные факты) не будет. Далее идет сообщение «значит, верно неравенство $\sqrt{x^2+1} \geqslant 1$». Что обосновывается этим фактом: ограниченность или неограниченность? Если ограниченность, то она была обоснована выше, если неограниченность, то, вообще говоря, можно указать много ограниченных сверху функций, обладающих этим свойством. Далее идут преобразования с использованием свойств неравенств и делается заключение о неограниченности функции φ, по-видимому, на том основании, что указанное выше выражение стремится к бесконечности (судя по обозначениям).

Что можно извлечь из этого рассуждения? Что авторы при разборе этого примера сделали акцент на информационную составляющую, т. е. продемонстрировали как-то, что эта функция действительно снизу не ограничена. Однако никакой ценности разбор этого примера не имеет, ибо для знакомых с материалом читателей сам факт тривиален, а для малознакомых может быть не вполне понятен.

Если опираться на обычное определение неограниченности снизу: функцию f называют *неограниченной снизу на множестве* X, если для любого C можно указать такое $x \in X$, что $f(x) \geqslant C$, то нетрудно построить корректную, имеющую образовательную ценность цепочку рассуждений, состоящую из общих рекомендаций и их применения в данном конкретном случае. При этом наличие общих рекомендаций важнее рассмотрения конкретной функции, так как именно готовность к разработке схем рассуждений и их использованию составляет образовательную составляющую всего процесса обучения — именно это может остаться у обучаемого после того, как он забудет все, что относится к ограниченности.

Приведем возможный вариант рассуждений, основанный на определении и технологии его использования (см., например, [1]).

Пусть дано (произвольное) число C. Требуется подобрать такое x, что $\varphi(x) \leqslant C$, т. е. чтобы $3-\sqrt{x^2+1} \leqslant C$. Откуда это можно получить? Из неравенства $\sqrt{x^2+1} \geqslant C+3$ (абсолютно очевидный ход). Иначе говоря, надо показать, что множество решений последнего неравенство непусто (происходит переформулировка задачи, можно сказать, ее моделирование в других терминах). Действительно, так как обе его части положительны, оно равносильно неравенству между квадратами обеих частей: $x^2+1 \geqslant C+3$. Если $C+3<0$, то в качестве требуемого x можно взять любое число. Если же $C+3 \geqslant 0$, то наличие x, обладающего этим свойством, легко вытекает из неограниченности сверху множества вещественных чисел: $x^2 \geqslant C+2$ и можно взять любое x такое, что $x \geqslant \sqrt{C+2}$. Разумеется, без неограниченности множества вещественных чисел обойтись не удастся, но это одно из основных его свойств. Тем самым при ответе на поставленный вопрос виден признак завершенности процесса (гарантия существования требуемого x) и в результате наших действий этот признак был удовлетворен.

Еще одно понятие, нередко воспринимаемое учащимися лишь образно, это монотонность. Причина такого явления кроется, скорее всего, в пояснении, которое обычно идет вслед за корректным определением. Оно, как правило, излагается так: функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции (см., например, [2, с. 97]). К сожалению, именно эта фраза нередко воспринимается в качестве определения возрастания. Однако какая-либо не обладающая свойством возрастания функция, на графике которой существуют две точки, удовлетворяющие указанному выше впечатлению (например, $\sin x$ на всем множестве вещественных чисел), может считаться при таком пояснении возрастающей, хотя обычно учащийся понимает, что возрастания здесь нет. Дело в том, что в давних учебниках эта фраза была корректна, а именно, в [4, с. 137] написано: «другими словами, функция называется возрастающей в некотором интервале, если из двух произвольных значений аргумента, взятых из этого интервала, большему соответствует большее значение функции», а в дальнейшем выражение отношения к аргументам (из двух произвольных значений) было утрачено. Конечно, опытный в математике специалист знает, что по умолчанию всегда понимается квантор общности, но вряд ли такое умолчание способствует формированию математической культуры при первичном знакомстве с понятием.

Приведенными примерами хотелось обратить внимание педагогов (будущих и настоящих) на необходимость вдумчивого отношения к информации, содержащейся в учебниках. Во всяком случае сведения, которые вы сообщаете учащемуся, должны позволять ему ставить эффективные вопросы, получать на них корректные ответы и тем самым формировать логическую культуру, полезную не только в математике.

Лекция 3. Формирование математической культуры на примере определения предела последовательности

Обратимся к каким-то примерам из курса математического анализа. В нем можно привести много фрагментов, более эффективно изучаемых, если последовательно придерживаться указанных выше принципов. Остановимся на двух моментах, относящихся к первому знакомству с важными разделами курса, от которых зависит дальнейшее его освоение.

Один из таких разделов — понятие предела последовательности. Здесь привлечение технологичности и целеполагания, основанного на понимании завершенности решения задачи, играют большую роль. Материал этого пункта следует в основном книге [1].

Обычно определение предела последовательности предваряется знакомством с точными границами, и здесь в менее привычной по сравнению с неограниченностью ситуации присутствует кванторная группа «для любого — существует». Дело, в частности, в том, что здесь появляется серия «теоретических» задач, в которых требуется что-то доказать о точных границах не для конкретных объектов, а вообще для числовых множеств: имеются в виду утверждения типа «точная граница суммы множеств равна сумме точных границ каждого из множеств, составляющих сумму». Возникает потребность гарантировать существование чего-то не на основе свойств конкретного объекта (функции, последовательности), а на основании указанных в условии данных. Появляется связка «дано — надо», в которой должна быть построена логическая цепочка от данных к требуемому. Эта, на первый взгляд тривиальная, процедура оказывается довольно трудной для восприятия и реализации. Приходится конструировать цепочки от данных к требуемому, создавать схемы рассуждений, применяемые при анализе задач определенных типов, формировать мотивы выполнения тех или иных действий.

Покажем построение цепочки от данных к результату на примере простейшей задачи, касающейся точных границ, подчеркнув при этом содержание теоретической и технологической составляющих анализа задачи.

Будем ориентироваться на следующую характеризацию точной верхней границы в соответствующих условиях.

Теорема (критерий точной верхней границы). *Если A — непустое ограниченное сверху множество в $\overline{\mathbb{R}}$, то равенство $\sup A = a$ равносильно тому, что*

1) *a — верхняя граница A;*

2) *для любого $\varepsilon > 0$ число $a - \varepsilon$ не является верхней границей A, т. е.*

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists\, x \in A) \quad x > a - \varepsilon.$$

Согласно критерию точной верхней границы для доказательства того, что указанное число $a \in \mathbb{R}$ является точной верхней границей непустого множества X, надо, во-первых, проверить, что это верхняя граница, а затем рассуждать так. Поскольку условие начинается с квантора общности, находящегося в утверждении, которое надо доказать, мы не вправе распоряжаться величиной ε и должны начать рассуждения для непустого множества в $\overline{\mathbb{R}}$ словами «пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$», подчеркивая этим, что мы ориентируемся на внешнее, не зависящее от нас обстоятельство. Затем согласно критерию надо сформировать правило, согласно которому можно указать элемент x данного множества X, удовлетворяющий второму условию критерия. Гарантия существования такого элемента вытекает либо из условия, либо, если множество задано конкретно, из определяющих это множество свойств. Наличие указанного правила означает завершение обоснования.

Если в задаче говорится о конкретных объектах — множестве, последовательности, функции, то обеспечение существования требуемого элемента происходит на основе задания данного объекта. Если же требуется доказать что-то о точных границах вообще, то гарантию существования требуемого элемента надо искать на основе условия, задавая вопрос типа «что может обеспечить требуемое?» и т. п.

Приведем один пример, разобрав ситуацию с высокой степенью подробности, из чего можно увидеть (и научиться), как выстраивается последовательность рассуждений при обращении с точными границами. Конечно, пример абсолютно тривиальный, но именно на простых ситуациях можно проследить за логикой событий, перенеся ее на более трудные задачи.

Пример. Докажем, что для любого непустого ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}$ и для любого числа $\lambda \geqslant 0$ справедливо равенство

$$\sup \lambda A = \lambda \sup A$$

(здесь $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$).

$\lhd$ Если $\lambda = 0$, утверждение очевидно. Будем считать, что $\lambda > 0$.

Обозначим $a = \sup A$. Требуется доказать, что λa — точная верхняя граница множества λA. Как указано выше, для этого надо проверить, что λa — верхняя граница и что сдвиг вниз на произвольное $\varepsilon > 0$ уже не будет верхней границей. На чем основывать проверку? Разумеется, на данных в условии свойствах. Так как $a = \sup A$, число a — верхняя граница множества A, стало быть, $(\forall x \in A)$ $x \leqslant a$. Умножив неравенство на положительное число, получаем, что $(\forall\, x \in A)$ $\lambda x \leqslant \lambda a$, так что λa — верхняя граница множества λA.

Проверим второе свойство. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Надо подобрать такое $x \in A$, что $\lambda x > \lambda a - \varepsilon$. Поскольку в поиске требуемого элемента надо ориентироваться на то, что дано, естественно в требуемом неравенстве изолировать x: $x > a - \frac{\varepsilon}{\lambda}$, и обратиться к тому, что дано. Согласно условию для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $x \in A$, что $x > a - \varepsilon_1$. Поскольку здесь квантор общности применяется в ситуации, которая нам дана, мы вправе распоряжаться ε_1 и брать для него те значения, которые будут целесообразны. Условие гарантирует, что при любом нашем выборе есть соответствующий элемент в множестве A. Сопоставляя выписанные выше неравенства, нетрудно заметить, что ε_1 целесообразно выбрать так, что $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\lambda}$, и цепочка выбора требуемого элемента в множестве λA выстраивается так: берем $\varepsilon > 0$, по нему находим ε_1 так, что $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\lambda}$, по этому ε_1 найдется элемент $x \in A$ такой, что $x > a - \varepsilon_1 = a - \frac{\varepsilon}{\lambda}$, а это означает, что $\lambda x > \lambda a - \varepsilon$. Правило выбора по заданному $\varepsilon > 0$ требуемого $\lambda x \in \lambda A$ сформировано, а это и означает, что утверждение доказано. $\triangleright$

Понятие предела последовательности и вообще понятие предела — центральное понятие в курсе математического анализа, и от его освоения во многом зависит дальнейшая судьба студента. Конечно, можно давать определение предела в высокой степени общности и сразу для очень общих объектов, рассчитывая на то, что все дальнейшие ситуации с пределом (например, предел функции) суть частные случаи этого общего определения, и остается только указывать необходимые в конкретных ситуациях модификации. Однако с подходом от общего к частному трудно согласиться, если рассматривать курс математического анализ как образовательную дисциплину, а не только как область математики. Такой подход вряд ли принесет образовательную пользу, т. е. в результате трудно ожидать формирование базовых навыков при изучении математики у обычных студентов. Поэтому предлагается начинать с самого простого определения, без каких-либо украшений, сокращений, макросов, и целью должно быть не экономия времени или наших усилий, или демонстрация найденных нами «упрощений», а формирование устойчивых навыков обращения с содержащими кванторы высказываниями, в частности, на базе понятия предела, поддержанных разными интуитивными средствами, например, графиками функций.

Исходя из указанной цели, предлагается начинать разговор о пределе последовательности с естественности этого понятия.

Пусть даны последовательность x_n и число a. Договоримся о том, как математически выразить интуитивно ясное представление о том, что последовательность x_n неограниченно приближается к числу a, т. е. значения x_n при неограниченном увеличении n становятся всё ближе и ближе к a Сначала обратимся к геометрической поддержке. Так как последовательность — это функция, определенная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, для ее геометрического представления можно использовать график как множество всех упорядоченных пар (n, x_n) на координатной плоскости. Правда, в этом случае сплошной линии, как у графиков обычных функций, не получится, а будет дискретное множество, но это обстоятельство не должно нас смущать.

Изобразим координатную плоскость, на которой по оси абсцисс отметим натуральные $n = 1, 2, \ldots$ и над каждой отмеченной точкой на высоте x_n поместим в виде точки значение x_n последовательности. На оси ординат отметим точку a. (Здесь при работе со студентами полезно предложить рисунок с условным изображением все отмеченных атрибутов.)

Поскольку нас интересует неограниченное приближение x_n к a «в перспективе», при далеких номерах n, расположение последовательности при начальных номерах нас не интересует. Представим себе, что есть два участника договоренности: Вы и Я. Вы намерены убедить меня в том, что последовательность x_n неограниченно приближается к a, и если удастся это сделать, то мы вместе назовем это обстоятельство выражениями «a есть *предел* последовательности x_n» или «последовательность x_n *сходится* (или *стремится*) к a» (последние выражения не следует понимать буквально, это термины, которые означают лишь то, что за ними кроется).

Так как Вы убеждаете меня в неограниченном приближении, Я, естественно, должен проверять, насколько значения x_n отличаются от величины a, для чего приготовлю число, которым буду измерять точность приближения, или, иначе говоря, величину отклонения x_n от a. Естественно, число должно быть положительным. Я буду обозначать его греческой буквой ε. Согласно договору приближение должно быть неограниченным, т. е. надо гарантировать невозможность вставить границу между значениями x_n с далекими номерами и числом a. Это можно гарантировать, например, такой процедурой. Я буду предлагать Вам какое-то, неизвестное Вам заранее значение $\varepsilon > 0$, а от Вас буду ожидать, что Вы обеспечите отклонение x_n от a в пределах заданной точности ε для всех далеких номеров n, т. е. сумеете найти такой номер n_0, что для всех номеров $n \geqslant n_0$ отклонение x_n от a будет в пределах от $-\varepsilon$ до ε. Последнее можно выразить так: $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, или так: $|x_n - a| < \varepsilon$. Образно об этом можно сказать так: Вы обеспечите такой номер n_0, что для всех n, лежащих правее от этого номера, отмеченные на высоте x_n точки, изображающие элементы последовательности, окажутся в полосе между горизонтальными линиями, проведенными на высотах $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$. Если Вы не можете обеспечить отклонение x_n от a в пределах заданной мной точности $\varepsilon > 0$ для всех далеких номеров n, то Я не готов согласиться с тем, что x_n неограниченно приближается к a.

Сформулируем договоренность в математических терминах.

Определение.Число $a \in \mathbb{R}$ будем называть *пределом последовательности* x_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, при этом будем использовать обозначение $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.

С использованием кванторов соотношение $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ запишется так:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\, (\exists\, n_0 \in \mathbb{N})\, (\forall\, n \geqslant n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Часть обозначения вида $n \to \infty$ подчеркивает, что мы оцениваем близость x_n к a при неограниченном возрастании номеров n. Часто в этом случае говорят «при n, стремящемся к бесконечности». Заметим однако, что каждое число находится на своем месте и никуда не стремится, тем самым эту фразу не следует воспринимать буквально. Это всего лишь фрагмент термина, за которым скрывается определенное содержание. Поскольку ни при каких других обстоятельствах мы оценивать отклонение x_n от a не будем, в обозначениях часть $n \to \infty$ иногда (даже, скорее всего, всегда, если достаточно ясно, по какой переменной происходит переход к пределу) будем опускать и писать просто $a = \lim x_n$.

Тот факт, что $a = \lim x_n$, выражают также словами «последовательность x_n *сходится* (или *стремится*) к a» и записывают $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \longrightarrow a$ или, короче, $x_n \to a$.

Аналогично можно подойти к понятию бесконечных пределов, и последовательность, имеющую какой-либо из бесконечных пределов, называют *бесконечно большой.* Если последовательность имеет (конечный) предел, то ее называют *сходящейся.* Тем самым термин «сходится» применяют только в случае конечного предела, в общем случае используют термин «стремится».

После теоретической части можно перейти к части технологической, в которой изложены средства, пригодные для доказательства утверждений, связанных с пределом, и для применения этого понятия.

Обсудим, как доказывать с помощью определения тот факт, что $a = \lim x_n$, и выработаем признак конца доказательства. Поскольку конструкция предела последовательности похожа на конструкцию неограниченности или точных границ, ясно, что и обсуждение будет аналогичным рассмотрению свойства неограниченности или точных границ.

Поскольку здесь есть внешнее, от нас не зависящее требование для любого $\varepsilon > 0$, мы должны выработать правило поиска требуемого далее значения $n_0 \in \mathbb{N}$ в зависимости от какого-то нам неизвестного значения ε. Рассуждение, посвященное подбору n_0, надо начинать, например, так: пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Этим мы подчеркиваем, что готовы к выработке правила. Затем надо пойти в конец и посмотреть, что от нас ожидают. А от нас ожидают, что мы для произвольного $n \geqslant n_0$ гарантируем оценку $|x_n - a| < \varepsilon$, где n_0 предстоит указать.

Возможно, сформировать требуемое правило выбора номера n_0 удастся сразу в процессе решения неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$, если есть реальная возможность выразить из него n через ε, т. е., по-существу, решая неравенство, осознать, когда начнется выполнение требуемого неравенства. Однако такая возможность предоставляется далеко не всегда, и если сразу сформировать правило невозможно, то можно попробовать *ограничить сверху разность* $|x_n - a|$ *чем-то более простым, но все еще малым*. Иначе говоря, попробуем подобрать такую последовательность a_n, что $|x_n - a| \leqslant a_n$ и есть шанс подобрать по заданному $\varepsilon > 0$ номер n_0 для последовательности a_n так, что $a_n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$. Если ясно, как это сделать, то найденный номер n_0 подойдет и для разности $|x_n - a|$ — она ведь не больше чем a_n и тем более будет меньше чем ε. Если еще недостаточно видно, как подобрать номер для последовательности a_n, то, в свою очередь, можно попробовать ограничить ее другой последовательностью, более простой, но все еще малой. И так продолжать процесс до появления последовательности, для которой требуемый номер найти уже легко. Как только удастся выработать правило выбора требуемого номера n_0 по заданному $\varepsilon > 0$, доказательство закончится. Подчеркнем, что отличие от неограниченности или точных границ в том, что там достаточно найти один элемент, а здесь надо обеспечить выполнение неравенства для всех членов последовательности, начиная с некоторого.

Можно рассуждать несколько иначе. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Обратимся к тому, что от нас потребуется. Мы должны обеспечить выполнение неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех достаточно далеких номеров n. Поставим вопрос: *откуда можно получить выполнение такого неравенства*? Иначе говоря, *из какого соотношения это неравенство вытекает*? Если взять последовательность a_n такую, что $|x_n - a| \leqslant a_n$, и найти номер n_0 такой, что $a_n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$, то для этих же номеров n будет выполнено и требуемое неравенство. Если для последовательности a_n выбор номера затруднен, то процесс можно продолжить и вновь обратиться к вопросу: откуда можно получить выполнение такого неравенства? Ответ на него может привести к другой последовательности, и так следует продолжать процесс до тех пор, пока не найдется такая последовательность, для которой выбор номера тривиален.

Можно заметить, что в предложенной цепочке рассуждений, хотя и имеют дело с неравенством, нет задачи его решить, а есть задача обеспечения некоего свойства, с этим неравенством связанного. Сам процесс обеспечения может реализовываться как «обратный ход» в рассуждениях — ставится вопрос «откуда можно это получить?» и ищется на него ответ. Такая постановка вопроса встречается учащимся впервые и вызывает на первых порах определенные трудности, впрочем, вполне преодолимые при наличии ясно и последовательно изложенного материала с примерами.

Приведенные рассуждения относятся, скорее, к доказательству равенства $a = \lim x_n$ для конкретной последовательности x_n. Отчасти их можно применять и тогда, когда речь идет о доказательстве утверждений с участием предела. Однако если для конкретной последовательности выбор номера обеспечивается ограничением сверху какими-то также конкретными последовательностями, то в утверждениях выбор требуемого номера, как правило, обеспечивается ограничениями сверху, исходящими из предельных свойств, данных в условии.

Для нахождения пределов конкретных последовательностей большую роль играет

Принцип Архимеда. *Множество натуральных чисел не ограничено сверху в множестве вещественных.*

На принципе Архимеда основан тот факт, что $\lim \frac{1}{n} = 0$, и это равенство используется во многих ситуациях, связанных с пределами конкретных последовательностей. Принцип Архимеда используют регулярно, однако обычно это обстоятельство не указывают.

Пример. Докажем, что
$$\lim \frac{n \sin n^2}{n^4+1} = 0. \qquad (*)$$

$\lhd$ Пусть дано $\varepsilon > 0$. Пойдем в конец определения предела последовательности и посмотрим, что от нас будут ожидать. От нас потребуется обеспечить выполнение неравенства
$$\left| \frac{n \sin n^2}{n^4+1} \right| < \varepsilon$$
для всех далеких номеров. Нетрудно понять, что сразу пытаться, выражая n через ε, создать правило выбора номера, не надо. Попробуем ограничить левую часть последнего неравенства сверху чем-то более простым, но все еще малым. Заметив, что $|\sin n^2| \leqslant 1$, имеем
$$\left| \frac{n \sin n^2}{n^4+1} \right| \leqslant \frac{n}{n^4+1}.$$
Легко ли подобрать требуемый номер, исходя из новой последовательности, т. е. насколько легко выразить n через ε из неравенства
$$\frac{n}{n^4+1} < \varepsilon?$$
По-видимому, не столь легко, сколь хотелось бы. Поэтому попробуем ограничить выражение $\frac{n}{n^4+1}$ сверху чем-то более простым, но все еще малым. Уменьшив знаменатель, мы увеличим дробь, поэтому
$$\frac{n}{n^4+1} \leqslant \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}.$$

Легко ли выразить n через ε из неравенства $\frac{1}{n^3} < \varepsilon$? Легко. Можно выразить, а можно еще облегчить выражение, если заметить, что $\frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{n}$, а из неравенства $\frac{1}{n} < \varepsilon$ выразить n через ε совсем легко. Последнее неравенство равносильно тому, что $n > \frac{1}{\varepsilon}$, и в качестве требуемого номера n_0 можно взять любое натуральное число, большее чем $\frac{1}{\varepsilon}$. Например, можно взять $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где взятие целой части (символизируют квадратные скобки) «обнатураливает» дробь $\frac{1}{\varepsilon}$, при этом, возможно, немного уменьшая ее, а добавление единицы делает результат бóльшим, чем $\frac{1}{\varepsilon}$. Если $n_0 \in \mathbb{N}$ и $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, то для любого $n \geqslant n_0$ тем более $n > \frac{1}{\varepsilon}$, а тогда, пользуясь логикой предыдущих рассуждений, можно гарантировать, что для таких номеров также

$$\left|\frac{n \sin n^2}{n^4 + 1}\right| < \varepsilon.$$

Правило выбора требуемого номера n_0 по заданному ε сформировано, значит, соотношение $(*)$ доказано. $\rhd$

Лекция 4. Технология обучения нахождению первообразной

Заключительная лекция посвящена раскрытию следующей образовательной темы. Известно, что, в отличие от производной, для первообразной нет правил ее нахождения для любых элементарных функций. Поэтому задача нахождения первообразной, важность которой не подвергается сомнению, становится в известной мере творческой. В частности, весьма важен первый период в освоении нахождения первообразной, ибо необходимо для каждого случая выбирать средства, для него подходящие, и выполнять соответствующие действия, направленные на решение задачи.

Ниже излагаются некоторые рекомендации, полезные на первом этапе решения задач на нахождение первообразной. Предполагается, что студенты знакомы с основными теоретическими средствами, такими как линейность неопределенного интеграла, формулы замены переменной и интегрирования по частям.

После ознакомления с теоретической частью идет технологическая, в которой используется авторская методика обучения нахождению первообразной. Она состоит в определенной системе, основанной на вопросах, возможных на них ответах, и выполнении соответствующих простых рекомендаций. Приведем ее, процитировав фрагмент текста из расположенного на авторском сайте материала.

Если подынтегральная функция — это одна из функций, первообразная от которых находится непосредственно (в таком случае говорят о «табличном интеграле»), надо воспользоваться соответствующей формулой из таблицы первообразных.

Если подынтегральная функция не совпадает ни с одной из функций, указанных в таблице первообразных, то надо поставить вопрос «как устроена функция?». Поскольку, как отмечено, при нахождении первообразной нет единых алгоритмов, пригодных для любых функций, составленных с использованием алгебраических операций, композиции и обратной функции, естественно, придется обращать внимание на более частные детали при ответе на поставленный вопрос. Представляется полезным акцентировать внимание на деталях, способствующих обнаружению применения того или иного из имеющихся средств, а именно, линейности интеграла, замены переменной (в разных контекстах) и интегрирования по частям.

Тем самым вопрос об устройстве функции полезно дополнять вопросом: есть ли в подынтегральной функции фрагменты, присутствие которых всегда предполагает выполнение определенных действий. Назовем такие фрагменты *символосочетаниями* или *фигурами символов* и перечислим наиболее часто встречающиеся, сопровождая символосочетания описанием действий, которые надо выполнить при их обнаружении. Обычно такие действия направлены на выполнение замены или на подстановку и использование соответствующего утверждения.

1. Если в подынтегральной функции есть выражение вида $kx + l$, можно либо выполнить замену, а именно положить $kx + l = t$, подготовить замену, т. е. выразить x через t и dx через dt, и перейти к нахождению первообразной от новой функции, зависящей от t, либо предварительно подготовив фрагмент dx к выполнению такой замены, а именно сначала воспользоваться тем, что $dx = \frac{1}{k}d(kx + l)$, и только потом сделать замену.

2. Допустим, что в подынтегральном выражении есть фрагмент $x\,dx$. Тогда надо воспользоваться равенством $x\,dx = \frac{1}{2}dx^2$, и если оставшаяся часть подынтегральной функции зависит от x^2, то целесообразно выполнить замену $x^2 = t$.

3. Если встретился фрагмент $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$, можно воспользоваться равенством $\frac{dx}{2\sqrt{x}} = d\sqrt{x}$ и проанализировать целесообразность замены $\sqrt{x} = t$. В этом случае даже если подынтегральная функция зависит не только от выражения $\sqrt{x}$, замена может оказаться полезной. В таком случае ее надо подготовить в том смысле, что старую переменную выразить через новую и выразить dx через dt: $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$, перейти к интегралу от новой переменной, и в случае нахождения первообразной вернуться к старой переменной.

4. Фрагменты $\sin x\,dx$, $\cos x\,dx$ предполагают использование равенств $\sin x\,dx = -d\cos x$, $\cos x\,dx = d\sin x$ и анализ целесообразности соответствующей замены.

5. Символосочетание $\sqrt{1 - x^2}$ или $\sqrt{a^2 - x^2}$ часто связано с подстановкой $x = \sin t$ или $x = a\sin t$, где t принадлежит какому-либо из промежутков взаимной однозначности синуса, например $-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2$. В результате ее выполнения получается выражение $|\cos t|$, т. е. исчезает иррациональность.

6. Фрагмент $\sqrt{1 + x^2}$ или $\sqrt{a^2 + x^2}$ часто связан с подстановкой $x = \operatorname{sh} t$ или $x = a\operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$, и использованием формул для гиперболических функций, или подстановкой $x = a\operatorname{tg} t$, $-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2$, $a > 0$.

7. Если в подынтегральной функции есть корень, под которым находится многочлен первой степени, т. е. присутствует выражение вида $\sqrt[n]{kx + l}$, то целесообразно весь корень взять в качестве новой переменной, подготовить замену, а именно выразить x через t и dx через dt и перейти к нахождению первообразной от новой функции, зависящей от t.

8. Выражение $\frac{dx}{x^2}$ может использоваться после замечания о том, что $\frac{dx}{x^2} = -d\frac{1}{x}$ и анализа целесообразности соответствующей замены.

Что дает обращение к поиску символосочетаний? Оно позволяет более эффективно организовать поиск первообразной, целенаправленно изучая устройство подынтегральной функции с целью обнаружения того или иного фрагмента и выполняя сопутствующие рекомендации.

Можно описать и общие рекомендации по замене и подстановке, однако отошлем заинтересованных читателей, например, к [1], а здесь кратко остановимся на интегрировании по частям, ибо это техническое средство вызывает определенные трудности при начальном знакомстве с ним.

Интегрирование по частям применяется в следующей ситуации. Если подынтегральная функция представима (или представлена) в виде произведения двух дифференцируемых функций и мы находим, что дифференцирование одной из них приводит к более простой функции, то можно попробовать воспользоваться интегрированием по частям. В таком случае второй сомножитель надо представить в виде производной от соответствующей функции (т. е. найти первообразную второго сомножителя) и применить формулу интегрирования по частям. В результате после дифференцирования первой функции может получиться подынтегральная функция более простого вида. При этом чаще всего удобно пользоваться формулой вида

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

Процесс интегрирования по частям организуется так. Допустим, что в интеграле вида $\int f(x)\varphi(x)\,dx$ мы нашли, что функция $f(x)$ в результате ее дифференцирования становится проще (например, это x^n или $\operatorname{arctg} x$, или $\arcsin x$ и т. п.). Тогда ищем первообразную функции $\varphi(x)$, т. е. представляем $\varphi(x)$ в виде $\varphi(x) = g'(x)$. Далее «заносим $g(x)$ под d», т. е. делаем запись вида $g'(x)\,dx = dg(x)$. Затем выполняем операцию интегрирования по частям:

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x).$$

Наконец, в последнем интеграле делаем подготовку для дальнейшего его нахождения:

$$\int g(x)\,df(x) = \int g(x)f'(x)\,dx,$$

и переходим к нахождению последнего интеграла. Эту последовательность действий можно записать так:

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx = \int f(x)g'(x)\,dx = \int f(x)\,dg(x)$$
$$= f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x) = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

Разумеется, после такого набора рекомендаций следует набор примеров, показывающих их применение. В целом следование изложенным рекомендациям уменьшает напряжение, нередко возникающее на начальном этапе обучения нахождению первообразной, и закладывает основу для освоения техник, сопровождающих интегрирование в специальных случаях.

Заключение. Потребность обеспечения стиля организации учебной литературы и учебного процесса, при котором преимущество на стороне образовательной составляющей, позволяющей формировать компетенции разного типа и поддерживающей способность к непрерывному образованию, на первый план выдвигает технологическую составляющую, не в ущерб, а в поддержку теоретической (информационной). В первую очередь надо заботиться о формировании способности к деятельности в рамках образовательной дисциплины, подчиняя информационную составляющую этой заботе. Это может привести к существенной перестройке традиционных систем и стилей изложения материала и к потребности выработки новых концепций преподавания. Трехчастная организация учебных материалов: теория — технологии — практика, и основанная на ней структура образовательного процесса могут служить одной из основ обеспечения приоритета образовательной составляющей учебного процесса.

Литература

1. *Дятлов В. Н.* Рассуждения о преподавании математического анализа.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2018.
2. *Мордкович А. Г., Семенов П. В.* Алгебра. 9 класс, 12-е изд., стер.: Учеб. для общеобразоват. учреждений.—М.: Мнемозина, 2010.
3. *Дорофеев Г. В., Суворова С. В.,Бунимович Е. А. и др.* Алгебра. 8 класс: Учеб. для общеобразоват. организаций, 7-е изд. / под ред. Г. В. Дорофеева: Рос. акад. наук, Рос. акад. образования.—М.: Просвещение, 2013.—(Академический школьный учебник).
4. *Кочетков Е. С., Кочеткова Е. С.* Алгебра и элементарные функции: Учеб. пособие для учащихся 10 кл. ср. шк., 3-е изд.—М.: Просвещение, 1968.
5. *Макарычев Ю. Н.* Алгебра. 9 класс: Учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений, 12-е изд., стер. / под ред. Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, Н. Е. Феоктистов.—М.: Мнемозина, 2013.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРОЕКТЫ И МЕТОДИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

И. Е. Малова

(Россия, Брянск; БГУ им. И. Г. Петровского)

Лекция 1. Использование методических проектов как средства повышения качества подготовки будущего учителя

Цели лекции:

1) обосновать значимость методических проектов в подготовке учителя через историю их использования в Брянском государственном университете;

2) раскрыть организацию подготовки методических проектов и требования к ним;

3) привести примеры методических проектов студентов, дать им комментарий.

План лекции:

1. История использования методических проектов в БГУ.

2. Организация выполнения методических проектов при подготовке учителя математики или информатики в БГУ.

3. Примеры методических проектов.

4. Подведение итогов лекции.

Ход лекции

1. История использования методических проектов в БГУ.

Этап 1. Результаты дисциплины «ИКТ» на старших курсах.

Замечание. Прием работы: 1) обращение к практике как источнику новых запросов; 2) представление тематики проектов тех лет: «Учимся и учим решать геометрические задачи»; «Учимся и учим доказывать теоремы».

Способ представления проектов — компьютерная презентация.

Коллективный проект был представлен на сайте БИПКРО для учителей.

Уважаемый посетитель сайта!
Мы предлагаем проект, который помогает освоить **этапы работы** над геометрической задачей:
1) анализ условия и построение чертежа;
2) поиск способа решения задачи;
3) оформление решения задачи;
4) исследование.

Рис. 1. Слайд представления сущности методики — помочь освоить этапы работы над задачей.

Выберите себе задачу из раздела
«Планиметрические задачи» или **«Стереометрические задачи»**
и попытайтесь ее решить.
Если удалось решить задачу, то можно сверить **«ответ».**
Если при решении задачи испытываете затруднения, то рекомендуем запросить **«помощь»**. Здесь вам зададут такие вопросы, что вы сможете самостоятельно справиться со своими затруднениями.
Эти вопросы помогают:

1) Провести анализ условия задачи и выполнить чертеж к задаче;
2) Обнаружить способ решения задачи и составить план решения;
3) Проверить оформление решения;
4) Обсудить все то ценное, что можно использовать при решении других задач.

В любой момент можно вернуться «назад».
Рекомендуем на любой вопрос ответить самостоятельно (ответ желательно записать), а потом увидеть ответ на экране. Этот ответ может быть дан не только словами; это может быть выделение нужных фигур, запись на чертеже и прочее.
УДАЧИ ВАМ!!!

Рис. 2. Слайд представления способа работы с проектами.

Задача № 1

Высоты AH и BK остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M, угол AMB равен 105°. Найдите градусную меру угла ABO, если O – центр окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ **Помощь**

Другая задача

Рис. 3. Слайд представления задачи с выбором дальнейших действий: проверить ответ, запросить помощь или перейти к другой задаче.

Задача № 1

Высоты AH и BK остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M, угол AMB равен 105°. Найдите градусную меру угла ABO, если O – центр окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ: 15° **Помощь?** **Да** **Нет**

Рис. 4. Слайд выбора дальнейших действий, если, например, ответ не получился.

Меня зовут
Карпикова Татьяна Николаевна
Я студентка 5 курса
физико-математического факультета
Брянского государственного университета

Я помогу преодолеть
затруднения при решении этой задачи

2006 г.

Рис. 5. Слайд представления автора проекта по работе с выбранной задачей — студентки 2006 г.

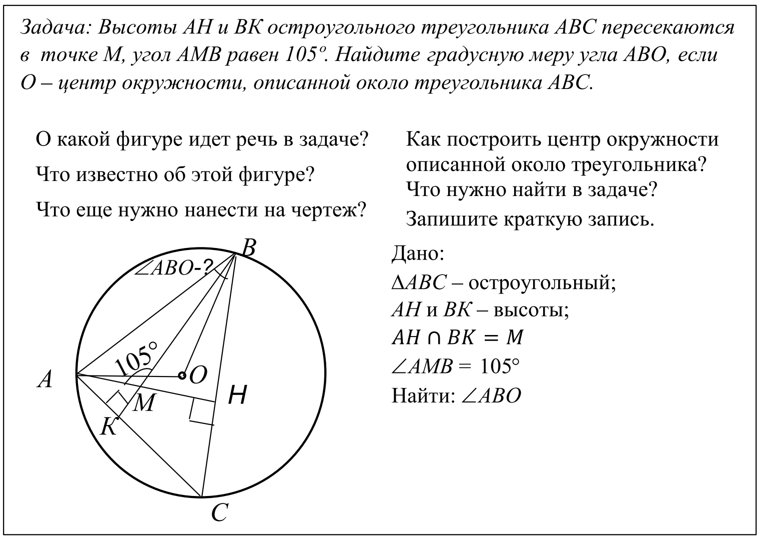


Рис. 6. Слайд этапа «Анализ условия задачи с одновременным построением чертежа».

Задача. Высоты AH и BK остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M, угол AMB равен $105°$. Найдите градусную меру угла ABO, если O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

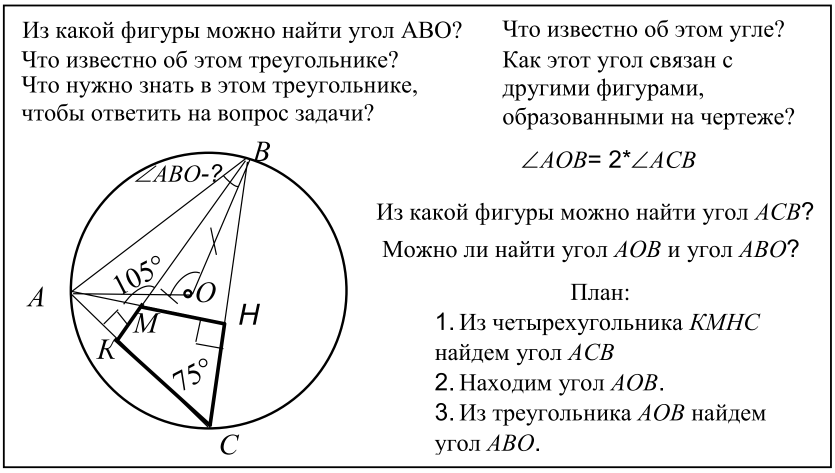


Рис. 7. Слайд этапа «Поиск способа решения».

Проект получил две оценки: в конкурсе Intel «Заявка на успех» занял II место в номинации «Лучшая методическая разработка урока математики с применением ИКТ» (2007 г.); получил Свидетельство о регистрации электронного ресурса под названием «Организация диалога с учащимися в процессе решения вычислительных планиметрических задач на основе компьютерной анимации» (2012 г.). В Свидетельстве сказано, что ресурс отвечает требованиям новизны и приоритетности.

Этап 2. Результаты дисциплины «Методика обучения математике» в каждом из семестров.

Первый этап показал пользу проектов как для студентов, так и учителей. Поэтому на втором этапе мы включили разработку студентами проектов в каждом из семестров обучения.

Бакалавры, закончившие обучение в БГУ в 2020 г., выполняли проекты на темы:

— «Учим (ся) решать текстовые задачи».

— «Учим (ся) решать планиметрические задачи».

— «Учим (ся) решать задачи повышенной сложности».

В рамках дисциплины «Методология обучения математике» они разрабатывали проект, содержащий разделы: «Учим (ся) доказывать теоремы»; «Учим (ся) организовывать смысловое чтение».

По методике обучения информатике разработаны проекты:

— «Учим (ся) решать задачи ОГЭ (ЕГЭ)».

— «Учим (ся) организовывать смысловое чтение учебника».

Этап 3. Обобщение в научных публикациях использования методических проектов.

Обобщение студентами своих результатов. Новизна публикаций заключалась в описании разработанных ими приемов (см., например, [1]).

Обобщение результатов преподавателем. Новизна публикаций заключалась в обосновании роли проектов в подготовке учителя (см., например, [2]).

Профессор М. А. Чошанов (Техасский университет, Эль Пасо, США) соотнес наши идеи с направлением обучения “learning to act in the moment”.

В статье [3] рассматриваются различные виды знаний: знание-что (knowing-that), знание-как (knowing-how), знание-почему (knowing-why), знание-о (knowing-about) и обосновывается, что сквозь все эти виды знаний должно проходить знание-к (knowing-to act in the moment). Такой вывод согласуется с деятельностным подходом к обучению, представленным в ФГОС как требование к обучению на современном этапе. Обобщение представлено в двух публикациях [4, 5], вышедших за рубежом.

Замечание. Приемы работы: 1) использование опыта общения с коллегой из США в рамках Международной конференции: в пленарном докладе М. А. Чошанова был затронут вопрос о подготовке учителей в США; хотелось узнать, согласуется ли наш подход к методическим проектам с зарубежным, потому после своего выступления на секции, которой руководил М. А. Чошанов, я задала интересующий меня вопрос; оказалось, что есть такое направление обучения “learning to act in the moment”; 2) представление опыта поиска зарубежных научных источников; 3) ссылка на собственные публикации, представленные в зарубежных изданиях.

2. Организация выполнения методических проектов при подготовке учителя в БГУ (на примере проектов по обучению учащихся решению задач). Выполнение проекта осуществляется в 3 этапа, на каждом из которых решаются свои методические задачи.

Этап 1. Выполнение задания в соответствии с требованиями к результату.

1. Определите тип решаемых задач.

2. Выделите теоретические основы решения задач данного типа и учтите активную деятельность учащихся при работе с теоретическим материалом.

3. Раскройте диалог с учащимися на четырех этапах работы с задачей: анализ условия с одновременным составлением краткой записи; поиск способа решения, завершающийся составлением плана решения; оформление решения; подведение итогов работы над задачей.

На этом этапе решаются следующие методические задачи:

1. Разработать такой вид краткой записи условия задачи, чтобы она способствовала поиску способа ее решения.

2. Мотивировать направление поиска, выбор приема или метода решения, дополнительного построения и др., обобщить предложенные приемы.

3. Эффективно использовать анимацию.

Этап 2. Исправление методических ошибок.

На этом этапе решаются методические задачи:

4. Выделить способы обеспечения самостоятельной успешности учащихся.

5. Выявить причины методических затруднений и способы их преодоления.

Этап 3. Подготовка публикаций.

На этом этапе решается задача:

6. Обобщить методические решения.

3. Примеры методических проектов.

Пример 1. Проект Владислава Борцова «Методика работы с задачей на проценты».

Представим этапы анализа условия и поиска способа решения.

Анализ условия задачи

Задача. Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. 1) Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. 2) Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

— Какого это типа задача? (На проценты.)

— О чем идет речь? (О доходах семьи и ее членах.)

— Какие ситуации были рассмотрены? Что о них известно?

— Что требуется найти? (Процент зарплаты жены.)

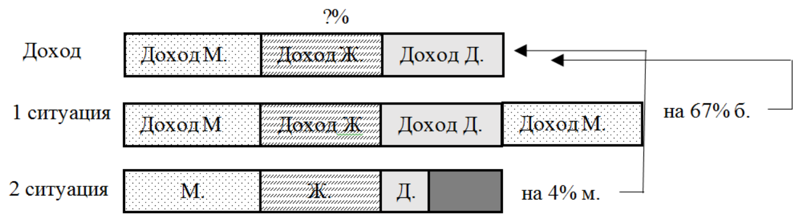


Рис. 8. Анализ условия задачи.

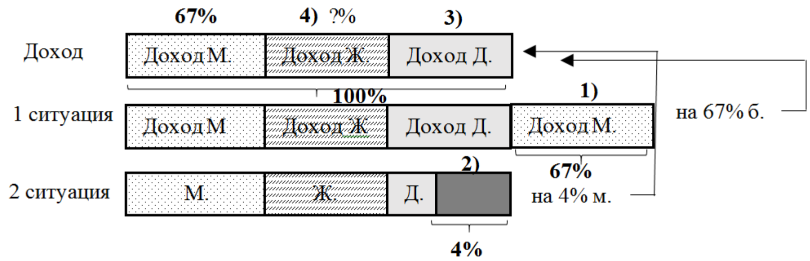


Рис. 9. Поиск способа решения.

1) С чего начинают решать задачи на проценты? (Определяют, какое число принимается за 100%.)

2) Какое число принимается за 100%? (Доход семьи составляет 100%.)

3) Что можно найти по условию, что доход семьи в первой ситуации увеличится на 67%? (Можно найти сколько процентов приходится на «добавленную» величину, т. е. на доход мужа.)

4) Что можно найти по условию, что доход семьи во второй ситуации уменьшится на 4%? (Можно найти, сколько процентов приходится на «урезанную» величину, т. е. на 2/3 дохода дочери.)

5) Помогут ли эти данные ответить на вопрос задачи? (Да. Можно найти доход дочери, а потом ответить на вопрос задачи.)

Отсюда возникает план решения. Назовите его.

1) Найти, сколько процентов составляет зарплата мужа.

2) Найти, сколько процентов составляют 2/3 дохода дочери.

3) Найти, сколько процентов составляет доход дочери.

4) Найти, сколько процентов составляет зарплата жены.

Замечание. Приемы работы: 1) деловая игра «Учитель–учащиеся» с использованием компьютерной презентации; 2) использование в проекте домашней задачи, которая могла вызвать у слушателей затруднения; 3) комментирование использованных приемов: прямые вопросы и прямые ответы или косвенные ответы (представленные в условии задачи или в краткой записи); отражение в краткой записи каждого условия задачи и ее вопроса; использование графических объектов для характеристики доходов разных членов семьи; использование вопросов, важных для решения задач на проценты, для ведения поиска методом синтеза и др.

Пример 2. Проект Васиной Ольги «Методологические основы темы «Неравенства» (часть 2)».

	Свойство 1 **Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$**	Свойство 2 **Если $a < b$ и c–любое число, то $a + c < b + c$** *Начните рассуждение с конца*	Свойство 3 **Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$** ***Попробуйте доказать аналогично св.1***
Шаг 1. Рассмотреть данные неравенства с позиции определения	**1)** $a < b \to a - b < 0$ $b < c \to b - c < 0$	**1)** $a < b \to a - b < 0$	**1)** $a < b \to a - b < 0$ $c < d \to c - d < 0$
Шаг 2. Почленно сложить получившиеся разности и сделать вывод о знаке суммы	**2)** $(a - b) + (b - c) < 0$ (сумма двух отрицательных чисел отрицательна)	**2)** $a + c - b - c < 0$ $a - b < 0$	**2)** $(a - b) + (c - d) < 0$ (сумма двух отрицательных чисел отрицательна)
Шаг 3. Преобразовать полученное неравенство	**3)** $a - c < 0$	**3)** $(a + c) - (b + c) < 0$	**3)** $(a + c) - (b + d) < 0$
Шаг 4. Сделать вывод	**4)** По определению $a < c$. **ЧТД**	**4)** По определению $a + c < b + c$. **ЧТД**	**4)** По определению $a + c < b + d$. **ЧТД**

Рис 10. Использование определения при доказательстве теорем о неравенствах.

Замечание. Приемы работы: 1) деловая игра «Учитель–учащиеся» с использованием компьютерной презентации; 2) комментирование использованных приемов: использование укрупненной дидактической единицы для доказательства свойств неравенства; использование единой схемы для двух свойств; демонстрация аналитического доказательства с опорой на схему с последующим синтетическим доказательством; сопоставление общего (свойства 1 и 3 доказываются одинаково) и особенностей (свойство 2 имеет особенность: вместо сложения двух чисел добавляется и вычитается одно и то же число) и др.

Вывод: Многолетняя экспериментальная работа показывает, что методические проекты решают три задачи:

1) мотивируют самостоятельную разработку методического продукта;

2) оказывают действенную математическую помощь учащимся, поскольку способствуют обеспечению их самостоятельной успешности, а также методическую помощь студенту (учителю) в разработке современного методического решения;

3) обогащают методику обучения математике новыми разработками.

4. Подведение итогов лекции.

Замечание. Приемы работы: 1) использование вопроса «Какие вопросы обсуждали?»; 2) «перекличка» двух аудиторий; 3) вопросы лектору.

На вопрос «Какие вопросы обсуждали?» студенты ответили: 1) вариативность выбора своего роста при использовании методических проектов; 2) этапы развития исследования по использованию методических проектов, начиная с задачи практики; 3) какие шансы нельзя упускать: внимательно относиться к замечаниям методиста, выписывать приемы в свою копилку, решаться на публикации и др.

Был применен прием, когда одна аудитория называет вопросы, а другая на них отвечает. После лекции на вопрос «Какую пользу для себя получили из сегодняшней лекции?» студенты БГУ ответили: 1) приятно было видеть свои презентации и презентации тех, кого знают; 2) интересная перекличка аудиторий; 3) новая возможность в презентациях — включать гиперссылки; 4) методы доказательства теорем о неравенствах; 5) «разложение по полочкам» геометрической задачи, которая была не решена дома; 6) полезность сопровождения каждого шага вопросом и анимацией; 7) увидели роль проектов, которые предстоит выполнить, и образцы этих проектов; 8) получили опыт лекций в таком формате; 9) согласны с советом «Всегда учитесь!»; 9) захотелось изучить тот электронный ресурс, который демонстрировали, поскольку геометрические задачи вызывают затруднения.

Высказанные советы на будущее: улучшить техническое оснащение таким образом, чтобы обе аудитории были видны, все ответы с обеих сторон были бы слышны.

Лекция 2. Приемы методической деятельности

Цели лекции:

1) раскрыть понятие методической деятельности (МД) учителя, понятие приема МД как способа реализации МД;

2) выделить источники приемов МД для обогащения опыта учителя;

3) привести примеры приемов МД учителя, дать им комментарий.

План лекции:

1. Определение методической деятельности (МД) учителя математики. Понятие приема МД.
2. Источники приемов МД учителя для обогащения его опыта.
3. Примеры приемов МД учителя.
4. Подведение итогов лекции.

Ход лекции

1. Определение методической деятельности (МД) учителя математики. Понятие приема МД.

Определение. *Методическая деятельность* учителя математики — это деятельность по организации педагогического процесса, направленная на полноценно результативное освоение учащимися математики.

Замечание 1. Обоснование этому определению дано в докторской диссертации И. Е. Маловой.

2. Прием работы: конструирование определения по существенным признакам через обоснование каждому из них.

Прием МД — это способ осуществления методической деятельности учителя.

Замечание. Прием работы: обсуждение того, какие цели имеет прием.

2. Источники приемов МД учителя для обогащения его опыта. Выделим 3 источника приемов МД учителя для обогащения его опыта, условно назовем их так: выделены другими; «подсмотрены» у других; разработаны самими.

Замечание. Приемы работы: 1) предоставление возможности самим слушателям назвать 3 вида источников; 2) использование графической схемы; 3) пояснение каждого источника примерами ситуаций из имеющегося опыта.

Ситуации для источника 1. Сегодня на лекции будут представлены приемы, которые лектор в свое время прочитал в методической литературе. Была ситуация, когда коллега-учитель подсказала прием «Художник», чтобы преодолеть ошибки учащихся в построении точек на координатной плоскости.

Ситуации для источника 2. Наблюдения за выступлениями ученых-математиков на Международных конференциях «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования», которые регулярно проводятся в Северной Осетии-Алании, позволили выделить методические приемы лекторов, что в 2019 г. было обобщено в рамках пленарного доклада «Приемы конструирования и анализа методической деятельности». Может быть, кто-то из слушателей не только заметил прием конструирования определения МД, но и взял его себе на заметку.

Ситуации для источника 3. Наверняка в опыте каждого из присутствующих была ситуации удачной помощи другому в математике. Значит, был использован какой-то прием. Студенты, выполняя методические проекты, вынуждены придумывать свои приемы, потому что ни в какой литературе не найти ответ на вопрос, как действовать в той или иной конкретной ситуации. Ряд студентов обобщают свои приемы в рамках научных публикаций.

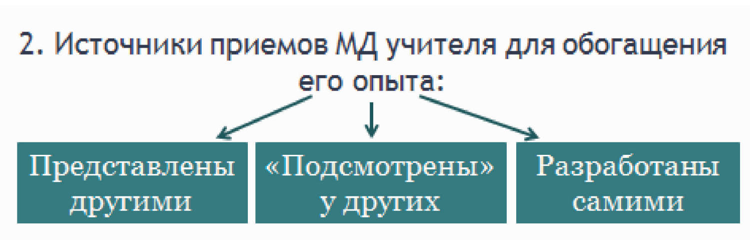


Рис. 1. Вид слайда для 2-го пункта плана лекции.

3. Примеры приемов МД учителя. Выделим 3 группы приемов МД учителя: использование кодирования информации; приемы укрупнения дидактических единиц; приемы организации работы учащихся.

Замечание. Приемы работы: 1) пояснение слов «выделим» и «групп»; 2) обращение к имеющемуся опыту; 3) использование графической схемы.

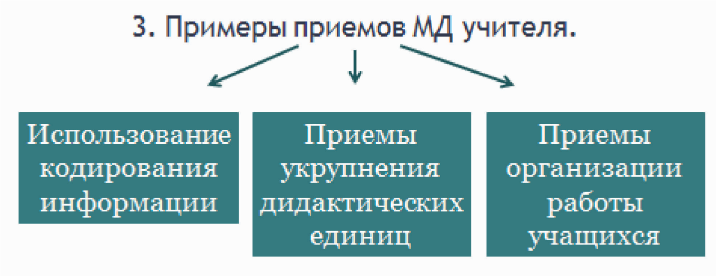


Рис. 2. Вид слайда для 3-го пункта плана лекции.

Примеры кодирования информации

1. Биссектриса — это ...
2. Каждый охотник желает знать ...
3. Кто и шутя и скоро пожелаетъ пи узнать число ужъ знает.
4. НИЗО (нули-интервалы-знаки-ответ) для решения неравенств методом интервалов.
5. Кодирование при доказательстве теоремы об описанном четырехугольнике.

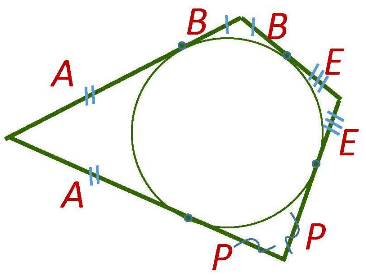


Рис. 3. Рисунок к доказательству свойства описанного четырехугольника.

Суть доказательства. Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны. Обозначим длины равных отрезков одинаковой буквой: А–А, В–В, Е–Е, Р–Р. «Прочитаем» сумму отрезков противоположных сторон четырехугольника: ВЕРА–ВЕРА. Вот мы и показали, что суммы длин противоположных сторон описанного четырехугольника, равны.

Замечание. Приемы работы: 1) использование компьютерной анимации; 2) рассказ о том, как этот прием был показан В. Ф. Шаталовым в Брянске во время курсов для учителей математики.

Известный методист Виктор Федорович Шаталов разработал эффективную систему обучения, с которой можно познакомиться в книге «Куда и как исчезли тройки» [6].

Замечание. Приемы работы: 1) использование названия книги для иллюстрации результата — в его системе все школьники учились только на 4 и 5; 2) использование образа соленого огурца для обоснования действенности системы — в каком бы ты ни был состоянии (уровне развития), попав в систему, ты обязательно станешь «соленым» (достигнешь должного уровня).

Автором методики укрупнения дидактических единиц является калмыцкий ученый Пюрва Мючкаевич Эрдниев [7].

Замечание. Приемы работы: 1) использование названия книги для иллюстрации сути методики — за меньшее время усвоить большее количество информации за счет ее укрупнения; 2) рекомендация посмотреть учебники, в которых реализована идея УДЕ; 3) использование личного впечатления от знакомства с П. М. Эрдниевым и его системой в 1982 г. в г. Элисте.

Примеры укрупненных дидактических единиц

1. Использование «двухэтажных» записей в определениях и формулировках теорем. $\frac{\text{окружность}}{\text{сфера}}$ — это множество всех точек $\frac{\text{плоскости}}{\text{пространства}}$, равноудаленных от заданной точки.

2. Использование «деформированных» упражнений.

$$(\dots + 1)(2a - \dots) = 4a^2 - \dots \quad \frac{\dots + x^6y^3}{\dots - \dots + \dots} = 4 + \dots$$

3. Решение прямых, обратных и измененных задач без разрыва во времени.

Пример комплексной задачи (из учебника алгебры 7 класса, № 99):

а) Из одного села в другое велосипедист ехал со скоростью 18 км/ч, а возвращался со скоростью 15 км/ч. На обратный путь он затратил на 20 мин больше, чем на прямой путь. Каково расстояние между селами?

	v (км/ч)	t (ч)	S (км)
Туда	18		?
Обратно	15	на 1/3 б.	

б) Из одного села в другое велосипедист ехал со скоростью 18 км/ч, а возвращался со скоростью 15 км/ч. На весь путь он затратил $3\frac{2}{3}$ ч (3 ч 40 мин). Каково расстояние между селами?

в) Составить задачу по уравнению

$$\frac{x}{12} - \frac{x}{15} = \frac{2}{3}.$$

г) Проверить следующие тождества и заменить в них число 60 буквой x; составить задачи, рассказать их условия и решить их:

$$1)\ \frac{60}{4} + \frac{60}{5} = 27; \quad 2)\ \frac{60}{4} - \frac{60}{5} = 3.$$

Замечание. Приемы работы: 1) использование таблицы для представления условия задачи; 2) обсуждение решения задачи с использованием уравнения; 3) комментирование особенностей каждой последующей задачи в представленном комплексе: задача б) затрагивает иную зависимость между величинами — вместо зависимости «на» появляется зависимость «вместе», кроме того используется обратный переход в выражении минут в часы; задача в) предполагает обратный ход — от уравнения к условию задачи и изменение числовых данных (скорости и времени); задача г) затрагивает связь числовых тождеств и уравнений (за буквой в тождестве может стоять какое-то число), изменение сюжета (кто может передвигаться со скоростью 4 км/ч или 5 км/ч); обобщение рассмотренных зависимостей («на» и «вместе»).

Пример из УМК «Математика. Психология. Интеллект» (5 класс).

(II) 367. Два поезда вышли навстречу друг другу одновременно из двух городов, расстояние между которыми 1260 км, и встретились через 7 ч после выхода. Скорость одного из них — 80 км/ч. Найдите скорость другого поезда.

Ответьте, что произойдет, если:

а) слово «одновременно» в тексте задачи отсутствует;

б) слова «через 7 ч» заменили словами «через 2 ч»; «через 9 ч»;

в) слова «одновременно» заменили словами «причем второй поезд вышел на 2 ч позже первого».

Запишите решение задачи в случае в).

Замечание. Приемы работы: 1. Представление УМК и опыта его использования в Северной Осетии. 2. Представление задачи, которую практически все решают неправильно из-за традиционности мышления. 3. Комментирование особенностей исходной задачи и каждой последующей задачи в представленном комплексе. Исходная задача традиционная, ее можно решить двумя способами. Задача а) позволяет обратить внимание на важность условия «одновременно». Задача б) предполагает изменение числовых данных, которые сохраняют ход решения, но могут повлиять на правдоподобность результата. Задача в) предполагает рассмотрение нескольких ситуаций. В условии используются слова «второй поезд», значит, этим вторым поездом может быть каждый из поездов. В исходной задаче сказано «скорость одного из них 80 км/ч», значит надо рассмотреть две ситуации, присвоив эту скорость каждому из поездов. В исходной задаче есть слова «встретились через 7 ч после выходы», это еще одна неопределенность: после выхода какого поезда? Получается 4-я ситуации. 4. Сопровождение задачи рисунками и анимацией. 5. Представление приема учителя о способе нанесения данных на чертеж при наличии условия «встретились после 7 ч после выхода ... поезда» — время в пути каждого поезда отражаем на рисунке.

Приемы организации деятельности учащихся

1. Прием использования вертикальной полоски с нумерованным списком (Смоленск, для отработки сложения целых чисел).

2. Смотр знаний (опробован при обучении математике в школе № 1 г. Клинцы Брянской области).

3. Опрос по системе В. Ф. Шаталова (проводится у нас для студентов).

4. «Встаньте те, кто знает, как решается эта задача» (прием В. Ф. Шаталова).

Замечание. Приемы работы: 1) представление приемов из собственной практики, что усиливает их технологичность; 2) комментирование каждого приема через описание последовательности действий.

Прием вертикальной полоски. Дома учащиеся заготавливают такие полоски. Учитель предъявляет серию примеров, учащиеся на этих полосках записывают ответ. Осуществляется проверка решений.

Смотр знаний. Заготавливается три вида заданий: на доказательство (рисунки на доске); практические задания одной направленности (карточки); практические задания другой направленности (карточки). Готовится общественная комиссия, для нее заготавливаются материалы (списки учащихся, решенные задания, сводные ведомости). Смотр проходит в три этапа. На первом этапе один ряд учащихся комментированием доказывает теоремы с учителем, второй ряд выполняет решение заданий первой направленности, третий ряд — второй направленности. По завершению этапа решенные задания отдаются на проверку комиссии, а для рядов меняются задания. На третьем этапе снова происходит смена заданий. Таким образом, каждый получил на смотре три оценки. Комиссия подводит итог и объявляет итоговые результаты.

Опрос по системе В. Ф. Шаталова. Все имеют список вопросов. Ответы на вопросы не раз проговаривались (на лекциях, при отчетах по лекциям после самостоятельной работы). В результате студенты осваивают большое количество вопросов. На зачете перед экраном в аудитории стоят 10 студентов и по очереди отвечают на вопросы (каждый знает, на какой вопрос ему предстоит ответить, и пока отвечают другие, может сосредоточиться). В результате каждый студент отвечает на 5–6 вопросов, что дает возможность оценить результат.

«Встаньте те, кто знает, как решается эта задача». На доске представлены условия задач. Учащиеся обдумывают, как решить первую задачу. Учитель просит встать тех, кто знает, как решается задача. Скажем, встали 2 человека. Учитель просит их рассказать решение. Если у остальных учеников есть вопросы, они могут задать. Затем все ученики отражают решение в своих тетрадях. Постепенно цепочка действий: «задача–устное решение отдельных учеников–запись всеми решения» повторяется, но только записываются решения после двух рассказанных задач. Тогда решение второй задач отстоит от первой во времени, и учащиеся уже должны не вспоминать решение, а сами рассуждать. Доводится устное решение до 10 задач.

Домашнее задание. Решите задачи:

1. Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67 %. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

2. Высоты AH и BK остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M, угол AMB равен 105°. Найдите градусную меру угла AOB, если O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

4. Подведение итогов лекции.

Замечание. Приемы работы: 1) использование вопроса «Какие вопросы обсуждали?»; 2) «перекличка» двух аудиторий; 3) вопросы лектору.

На вопрос «Какие вопросы обсуждали?» студенты ответили: 1) источники методических приемов; 2) примеры приемов; 3) примеры кодирования информации; 4) определение методической деятельности; 5) вариативность условий в задаче; 6) двойная запись в определениях; 7) деформированное упражнение; 8) использование прямых и обратных задач в одно время; 9) педагоги-новаторы (В. Ф. Шаталов и П. М. Эрдниев).

При наличии времени можно было бы обсудить каждый из названных ответов.

После лекции на вопрос «Что понравилось на сегодняшней лекции?» студенты БГУ ответили: 1) задачи на схемах; 2) последовательность в лекции; 3) подведение итогов, которое дало возможность все повторить; 4) слайды с минимумом текста, но подробным рассказом на примерах; 5) названия книг, которые захотелось прочитать; 6) общение; 7) прием «ВЕРА» и др.

Не понравилось: не было слышно второй аудитории.

Литература

1. *Лаврухина Е. С.* Основные способы и приемы доказательства формул площадей и объемов.—Елец, 2020.
2. *Малова И. Е.* Методические проекты студентов как средство повышения качества подготовки будущего учителя.—Казань, 2017.
3. *Mason J., Spence M.* Beyond mere knowledge of mathematics: the importance of knowing-to act in the moment // Forms of Mathematical Knowledge: Learning and Teaching with Understanding.—P. 135–161.—URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-94-017-1584-3.
4. *Rizvanov Z. Z., Abaturova V. S., Malova I. E., Shakirova L. R.* The methodical projects as a method for learning future teachers // Amazonia Investiga.—2018.—Vol. 7 (15).—P. 172–177.
5. *Malova I.* The enhancement of a mathematics teacher training by use of methodological projects // Current Issues in Ensuring the Quality of Mathematical Education: Monograph / Eds. N. Tarasenkova, L. Kyba.—Budapest: SCASPEE, 2019.—P. 154–168
6. *Шаталов В. Ф.* Куда и как исчезли тройки.—М.: Педагогика, 1979.—136 с.
7. *Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П.* Укрупнение дидактических единиц в обучении математике.—М.: Просвещение, 1986.—255 с.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

ИННОВАЦИОННОЕ СОДЕРЖАНИЕ И СИНЕРГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ[1]

Е. И. Смирнов
(Россия, Ярославль; ЯГПУ)

Введение

Математическое образование в России и во всем мире претерпевает в последние десятилетия существенные изменения, если не сказать кризисные явления как объективного, так и субъективного характера. Акцентирование педагогики на практико-ориентированные методы и личностные результаты образования, затронувшие нашу школу, ведут к лучшей социализации личности, большей возможности использовать математические знания в реальной жизни. Однако интеллектуальные операции мышления (понимание, конкретизация, абстрагирование, обобщение, моделирование, аналогия, ассоциации и т.п.), лежащие в основе формирования универсальных учебных действий обучаемых и функциональной грамотности школьников, по разным объективным и субъективным причинам перестали при этом эффективно развиваться в школьном образовании. Равно как и потеря ориентиров в фундаментализации математического образования, как в России, так и в мире, приводит к дефициту квалифицированных кадров в развитии и реализации современных технологий, потере гибкости, критичности и креативности мышления обучающихся, ведет к утрате способности России занимать современные ниши производительных сил. Российское математическое образование всегда было передовым в вопросах его фундаментализации — методологии и технологии П. Я. Гальперина, В. В. Давыдова, Л. Н. Занкова, В. А. Крутецкого, Н. Ф. Талызиной, В. Д. Шадрикова и др. — создали прочную основу для эффективного развития личности. Однако в последние десятилетия школьник изменился: возможности информационной среды, приоритеты личностного становления и развития, изменения социальных задач перед школой, рост личностных преференций школьников приводят к проблемам и негативным последствиям в традиционном освоении математики. Более того, цифровизация школы и вуза объявлена главным трендом российского образования и призвана дать ответы на «взрывное» появление новых компетенций, изменение рынка труда и открытости глобального информационного пространства. Тем не менее, результаты наших школьников в международных математических олимпиадах оставляю желать лучшего (за последние 10 лет Россия опускалась до 11 места в мире), международное тестирование PISA, тест оценивающий функциональную грамотность школьников в разных странах мира и умение применять знания на практике (проходит раз в три года; в тесте участвуют подростки в возрасте 15 лет), дает следующие результаты:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-29-14009.

Рис. 1. Результаты России в тестировании PISA.

Результаты 2018 г. показывают, что около пятой части выпускников основной школы не достигают порогового уровня функциональной грамотности (по каждой области — математической, естественнонаучной и читательской) и около трети учащихся по одной из областей. Россия занимает 27–35 место в мировом рейтинге. Выявлены основные затруднения в выполнении заданий мониторинга формирования функциональной (математической) грамотности школьников:

• понимание сюжетной ситуации и перевод ее на язык предметной области, нахождение способа решения;

• работа с информацией, представленной в разной форме (рисунок, текст, таблица, диаграмма);

• работа с реальными данными, величинами и единицами измерений;

• интерпретация результата с учетом предложенной ситуации;

• проявление самостоятельности, использование учебного и жизненного опыта.

Педагогический опыт, теория и практика, запросы и вызовы реальной жизни показывают, что центральную роль в определении различных уровней успешности формирования математической грамотности играют фундаментальные математические способности.

При этом в последние десятилетия усилиями ученых-математиков, философов, психологов и педагогов методологически выявлено и теоретически доказано, что следующие технологические концепты способны проявить механизмы и факторы актуализации феномена фундаментальности и повышения качества математического образования, формирования математической грамотности школьников (соответственно перечню проблемных зон, указанных выше):

• фактор-импульс наглядного моделирования (вскрытия существенных связей и достижение эффекта понимания в освоении математики) объектов и процедур — Е. И. Смирнов, В. В. Богун, В. С. Абатурова, Г. Ю. Буракова, В. А. Далингер и др.;

• множественное целеполагание выявления сущности когнитивных практико-ориентированных задач и актуализация модальностей восприятия в фундировании и исследовании практико-ориентированных заданий (Дж. Брунер, В. Веккер, В. Д. Шадриков, К. Манценгер, Е. И. Смирнов, В. С. Секованов, С. Н. Дворяткина, Р. М. Зайниев и др.);

• информатизация и цифровизация учебного процесса, актуализация приемов освоения методов экспериментальной математики в «проблемных зонах» обучения математике (С. Н. Бешенков, А. Л. Семенов, И. В. Роберт, В. В. Гришкун, А. А. Кузнецов, Е. И. Смирнов и др.);

• симбиоз математического и компьютерного моделирования в интерпретации результатов, критичность и креативность в получении побочных продуктов исследования (В. С. Секованов, М. Клякля, В. Н. Осташков, Е. К. Хеннер, М. Барнсли, Пайтгер Х. О. и др.);

• самоорганизация и саморазвитие личности на основе актуализации трех сфер проявления синергии сложного: содержательной (практико-ориентированные задачи, явления и реальные процессы — фракталы, хаос, самоорганизация), процессуальной (фундирование опыта, диалог культур и коммуникации, контексты) и личностно-адаптационной (развитие креативности и критичности обучающегося, современные достижения в науке, развитие мотивационной сферы учения) — Г. Хакен, Г. Г. Малинецкий, М. Бахтин, Э. Морен, В. Б. Буданов, В. С. Степин, Е. Н. Князева, Б. Мандельброт, С. П. Курдюмов и др.

Таким образом, эффективным направлением формирования математической грамотности школьников может стать обучение математике на основе освоения сложного знания. При этом ставится задача создания насыщенной информационно-образовательной среды обучения математике за счет изменения содержания образовательных программ в направлении освоения сложного знания и поддержки дистанционных сред и компьютерного моделирования. Это реализуется в ходе этапного исследования сложного знания и решения практико-ориентированных заданий с возможностью эффективно интерпретировать задачи из реальной жизни: т. е. для решения широкого диапазона задач в различных сферах человеческой деятельности, общения и социальных отношений. Более того, ставится задача на ближайшие годы не только достижения устойчивого порогового уровня в тестировании PISA, при достижении которого учащиеся начинают демонстрировать применение знаний и умений в простейших внеучебных ситуациях, но и достижение способности решать сложные задачи. Приоритетом становятся ситуации, когда проявляется способность школьников использовать имеющиеся знания и умения для получения новой информации, требуются самостоятельно мыслящие и способные функционировать в сложных условиях и овладевать сложными знаниями креативные обучающиеся.

Это создает прецедент расширения и углубления опыта личности на основе текущего его состояния (необходим учет индивидуальных различий школьников, т. е. практико-ориентированные задания должны быть разноуровневыми), формирования и развития мотивационной сферы учения (за счет актуализации образцов и адаптации современных, востребованных в жизни и доступных для восприятия, научных знаний и технологий), развития интеллектуальных операций и способностей с опорой на фундирующие механизмы, математическое и наглядное моделирование возможностей проявления и коррекции функциональных, операциональных и инструментальных компетенций обучающихся в освоении сложных конструктов и процедур математики. Таким образом, реализация процесса повышения качества функциональной грамотности в освоении математики в школе возможна теперь на основе актуализации синергетических принципов и подходов в контексте адаптации современных достижений в науке к школьной математике. Такие образовательные системы характеризуются способностью обеспечить в полной мере потребности каждого обучающегося в самообразовании и самоактуализации при освоении сложных знаниевых конструктов и задают ценностный императив личностного развития. Поэтому и необходим также диалог информационной, гуманитарной, математической и естественнонаучной культур в освоении математики сложного знания, который активизирует механизмы синергии и является фактором самоорганизации и связующим звеном при образовании целостных структур в обучении математике в школе.

Интеграционные процессы в математике. В современной науке и потребностях развития технологий, производств и объяснения ситуаций в социальных процессах наблюдается также усиление интегрирующей роли математики как универсального феномена вскрытия и управления закономерностями функционирования и развития. Действительно, математический аппарат и математические методы могут быть использованы при изучении качественно различных фрагментов действительности. Это возможно, прежде всего потому, что объективно существуют общность, связь, единство между различными областями реального мира, которые можно описать с помощью одних и тех же моделей, знаково-символических форм и количественных соотношений. Тот факт, что одна и та же математическая теория может быть интерпретирована на объектах качественно различной природы, говорит об общности этих объектов по внутренним механизмам генезиса и развития, в том числе в количественном отношении. Широкое, в принципе неограниченное использование математики в современном мире свидетельствует об общности и соответствующих областей природы, способствует раскрытию их единства и тем самым указывает новые пути интеграции знания.

Говоря об интегрирующей роли математики в современной науке, необходимо сделать одно принципиально важное замечание. Любой объект действительности обладает и качественными и количественными характеристиками. Качественная и количественная определенность объекта находятся в единстве в рамках конкретной меры: с изменением качества изменяется количественная определенность, а изменение количественной определенности неизбежно приводит к качественным изменениям. Одна мера сменяет другую. Определенность в смене мер фиксируется в виде закона, поэтому любой закон всегда предполагает и качественную и количественную характеристики.

Современный этап развития науки характеризуется усилением и углублением взаимодействия отдельных ее отраслей, формированием новых форм и средств исследования, в том числе математизацией и компьютеризацией познавательных процессов. Распространение понятий и принципов математики в различные сферы научного познания оказывает существенное влияние как на эффективность специальных исследований, так и на развитие самой математики. В процессе познания действительности математика играет все возрастающую роль. Сегодня нет такой области знаний, где в той или иной степени не использовались бы математические понятия и методы. Проблемы, решение которых раньше считалось невозможным, успешно решаются благодаря применению математики, тем самым расширяются возможности научного познания. Современная математика объединяет весьма различные области знания в единую систему. Этот процесс синтеза наук, осуществляемый на лоне математизации, находит свое отражение и в динамике понятийного аппарата. Так, применение математики в механике, астрономии, физике и в других областях естествознания, с одной стороны, способствовало проникновению в научный аппарат указанных областей знания таких понятий, как число, функция, производная, дифференциал, интеграл, структура, система и т.д., с другой — привело к формирования дифференциального интегрального исчисления, теории вероятности, теории множеств и целого ряда других направлений математики. Использование математики в биологических и особенно гуманитарных науках содействовало образованию необычных для классической математики понятий качество, расплывчатое множество, функция принадлежности, отображение, бинарное отношение, алгебраические операции и др. Способы и методы математического мышления наделены потенциальными синтетическими возможностями. М. Г. Чепиков пишет: «Математизация — один из самых древних путей синтеза научных знаний, поскольку она обеспечивала и обеспечивает на основе общности математических понятий общность научных принципов, законов, воззрений». Эвристическое взаимодействие качественных и количественных, содержательных и формальных методов исследования составляет объективную основу математизации научного знания. В этом процессе материалистическая диалектика выступает как методологическая основа математизации всего научного знания, его интеграции. Актуализация этих интеграционных процессов придает математической науке целостный характер и внутреннее единство идей, методов, понятий и теорем, алгоритмов и процедур.

В целом, математизация процесса познания становится определяющим фактором того, что и сама современная математика подвергается глубоким структурным изменениям. В этом плане развитие математики, образование общенаучных понятий, наметившуюся тенденцию к всестороннему отображению объектов природной и социальной действительности, следует рассматривать в контексте с единым тотальным процессом синтеза научного знания, являющимся отображением единства материального мира. Актуальность рассмотрения этих вопросов подтверждается ведущим положением математики как среди фундаментальных, так и среди прикладных наук (что находит свое яркое проявление в их интенсивной математизации); с другой стороны, — объективной сложностью усвоения математического содержания, обусловленной прежде всего многоступенчатым характером математических абстракций; в-третьих, — необходимостью формирования в ходе учебного процесса психолого-педагогической системы проектируемой профессиональной деятельности учителя.

При этом реально проявление синергетических эффектов и выявления новых побочных продуктов исследования на основе самоорганизации когнитивной деятельности. Тем самым наметились перспективы адекватного ответа на современные вызовы и противоречия в математическом образовании, отвечающие потребностям развития современного производства и технологий, информационных, естественных и гуманитарных наук, личностного развития и математико-информационной компетентности каждого обучающегося, понимания современной естественнонаучной картины мира в XXI веке на базе развертывания и реализации синергетической парадигмы в математическом образовании в школе на основе адаптации и освоения сложного знания.

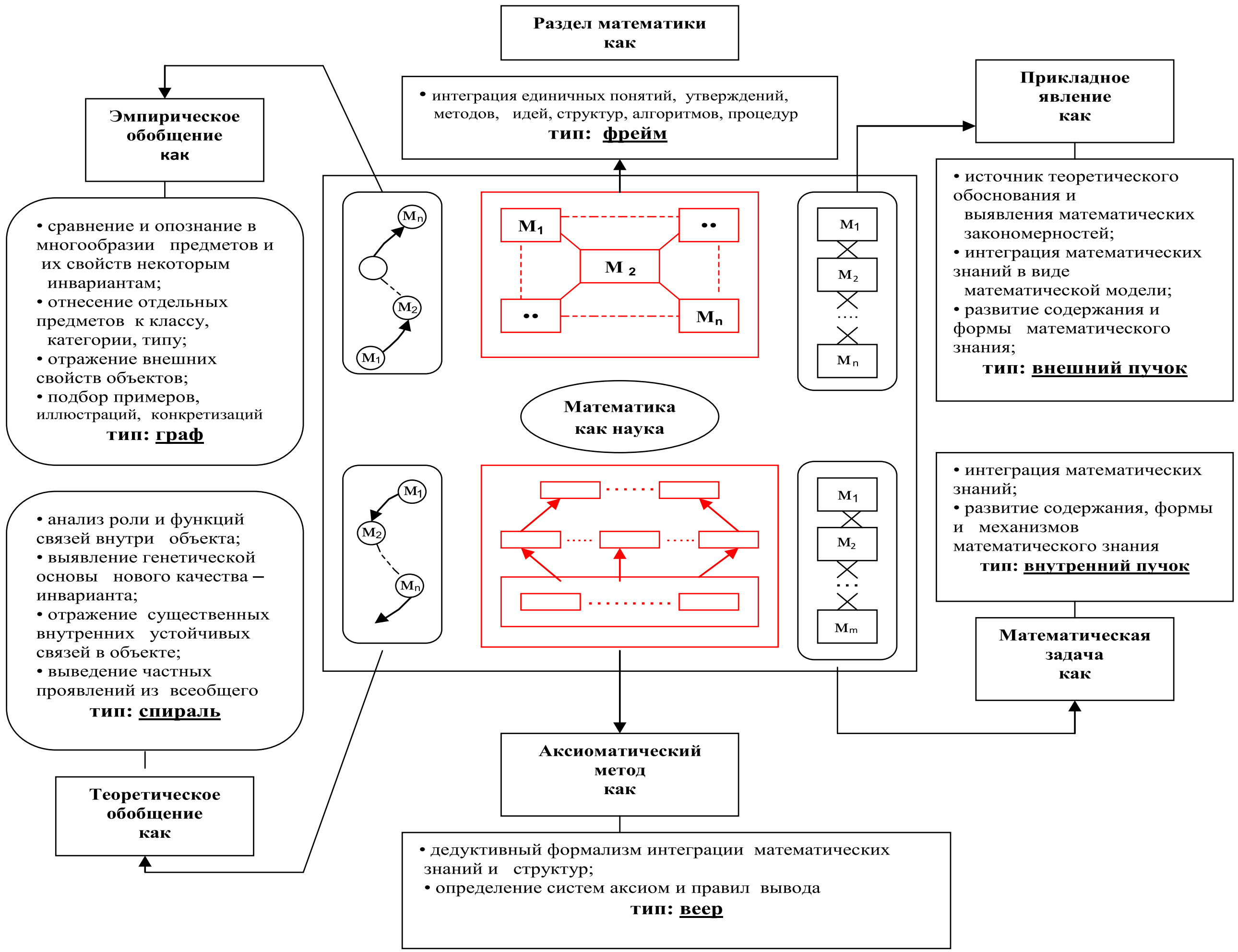


Рис. 2. Интеграционные процессы в математике как науке.

Методология, методы и технологии

Современные реалии жизни, влияние новых технологических укладов, необходимость эффективного развития креативности, критичности, нелинейного мышления у обучающихся ставит проблемы отражения в математическом образовании в школе проявлений синергии сложного знания не только на уровне исследования фрагментарных результатов адаптации современных достижений в науке, но и на уровне реализации синергетической парадигмы в освоении содержания математического образования в школе. Данная тенденция направлена на интеграцию науки и образования с эффектом развития нелинейного мышления обучающихся и повышения качества образовательных результатов, в том числе, формирование функциональной (математической) грамотности школьников. Последние десятилетия целый ряд ведущих ученых мира обращали внимание на необходимость пересмотра образовательных парадигм в направлении реализации синергетической парадигмы освоения сложного знания или парадигмы самоорганизации в образовании (Т. Кун, Г. Хакен, М. С. Каган, М. Бахтин, Э. Морен, В. Б. Буданов, В. С. Степин, Е. Н. Князева, Г. Г. Малинецкий, Б. Мандельброт, С. П. Курдюмов и др.).

Научная проблема: каковы концепция, принципы, содержание характеристик, технологии, средства, формы и педагогические условия освоения сложного знания и реализации синергетической парадигмы математического образования в школе в контексте адаптации современных достижений науки к эффективному обучению школьной математике, способствующие формированию математической грамотности, развитию нелинейного мышления, креативности и критичности личности и ее активному участию в жизнедеятельности общества?

При этом необходимо реализуется идея не только разработки, реализации и исследовании *иерархических разноуровневых комплексов PISA-подобных заданий* для школьников, но и *актуализации базовых обобщенных процедур и УУД* (универсальных учебных действий), интеграции математических знаний и компетенций. Таковыми могут быть: локализации и структурирование информации, понимание и обобщение, интеграции и интерпретации, моделирования и рефлексии, самооценки и самоконтроля знаний, которые коррелируют с уровнями и содержанием математической грамотности в контексте реализации исследовательской и игровой деятельности школьников в ходе освоения сложного знания. Эта интегративная основа способствует взаимодействию, взаимовлиянию, взаимообогащению областей знания и необходимо будет способствовать формированию функциональной (математической) грамотности школьников. Синергия математического образования при этом в контексте диалога культур и адаптации современных достижений в науке в «режиме обострения» С. П. Курдюмова, будь то инклюзивное (включенное) образование, дистанционное обучение или интегрированные курсы, позволяет создать условия для повышения качества математического образования, учебной и профессиональной мотивации обучающихся с раскрытием их индивидуальных особенностей («...разворачивая себя к культуре и истории...» Г. Гегель). Поэтому обучение математике в школе должно происходить в информационно-насыщенной образовательной среде освоения сложного уровневого знания в условиях диалога математической, информационной гуманитарной и естественнонаучной культур и интеграции дидактических усилий педагога и ученика в направлении вскрытия сущностей базовых учебных элементов (понятий, теорем, процедур, алгоритмов, идей) как феномена фундаментализации образования. Необходимо выстраивание иерархий сложного разноуровневого знания, методов и средств в когнитивной деятельности, опоры на дидактические правила и закономерности освоения математической деятельности на основе синергетического подхода (фрактальная геометрия, нечеткие множества и fuzzy-logic, теория хаоса и катастроф, устойчивость динамических систем и нелинейная динамика, теория кодирования и шифрования информации и т.п.).

Эффективным конструктом может оказаться развертывание следующих этапов проявления синергии сложного знания в математическом образовании в школе как механизм формирования математической грамотности школьников: мотивационный (самоактуализация («мне это интересно»)); ориентировочно-информационной насыщенности (самоопределение («что я могу сделать»)); процессуально-деятельностный (самоорганизация («я способен управлять процессом»)); контрольно-коррекционный (оценка эмпирической верификации результатов); обобщающе-преобразующий (саморазвитие личности («я могу сделать что-то новое»)); при этом необходимы разработки методик осуществления отбора, обоснования и разработки психодиагностических методик и оценочных процедур выявления профессиональных дефицитов педагогов и технологий выявления синергетических эффектов в обучении математике. Обучающийся уже сейчас должен знакомиться с нелинейным стилем мышления в постнеклассических науках, знать и находить ассоциации в реальной жизни таких феноменов коллективной упорядоченности как эффект Жаботинского — Белоусова, ячейки Бинара («дорога гигантов» в Ирландии), теория Гинзбурга — Ландау сверхпроводимости в системе квантов, уравнения Лотки — Вольтерра в системе «хищник–жертва», снежинка Коха и цилиндр Шварца, сценарий Ферхюльста и «эффект бабочки» странного аттрактора Лоренца и т.п.

Ведущая идея такова: ключевым аспектом феномена формирования математической грамотности школьников и проявления синергетических эффектов в обучении математике сложного знания на основе адаптации современных достижений в науке является возможность актуализации обобщенных этапов и исследования характеристик освоения сущности сложных математических знаний, явлений и процедур, создания условий для коммуникаций и диалога культур, выявления атрибутов самоорганизации содержания, процессов и взаимодействий (аттракторы, точки бифуркации, бассейны притяжения, итерационные процедуры и т.п.) в ходе освоении «проблемных зон» математики.

Проявилась необходимость разработки среды дистанционного обучения математическим дисциплинам в рамках развертывания методических инициатив разработчиков — учителей математики, а также комплексов онлайн-курсов и дистанционных сред; необходимо разработать обеспечение ИКТ средств поддержки (в том числе, математического пакета компьютерной алгебры Mathematica) в решении сложных задач в обучении математике школьников; будет разработана технология «тетрады» в исследовательской деятельности школьников [1]: особенность здесь состоит в том, что обучающимся предстоит выполнять четыре вида творческой деятельности: а) творческая математическая деятельность;

б) построение фрактальных множеств с разработкой алгоритмов и языков программирования высокого уровня; в) выполнение лабораторных работ по математике с проведением компьютерных экспериментов; г) изучение творческих биографий ученых и создание художественных композиций с помощью фракталов и ИКТ. Все полученные результаты характеризуют проявление синергии сложного знания в математическом образовании в школе на основе адаптации современных достижений в науке, в основном, в формах реализации интегративных и элективных курсов, проектной деятельности и веб-квестов, лабораторно-расчетных и ресурсных занятий, в том числе, в игровой деятельности.

Именно управление образовательными процессами на базе освоения сложного знания средствами математического и компьютерного моделирования способны дать мощный мотивационный заряд к изучению математических дисциплин; как следствие, повысится интерес к освоению математики с реальным развитием теоретического и эмпирического мышления (сравнение, аналогия, анализ, синтез и т.п.) и повысится уровень математической грамотности школьников, креативность и критичность мышления обучающихся. При этом возможность адаптации современных достижений в науке к школьной математике и компьютерного интерактивного взаимодействия с учебным предметом усиливает развивающий эффект и повышает учебную мотивацию, выявляет связи с реальной жизнью и практикой, создает феномен проявления синергетических эффектов в освоении сложного математического знания.

Гипотеза. Реализация следующих *методологических и методических идей* будет способствовать эффективному формированию математической грамотности школьников в обучении математике в контексте разработки технологий освоения сложного знания в насыщенной информационно-образовательной среде, основанных на адаптации современных достижений в науке и актуализации обобщенных конструктов, фундирующих этапное исследование практико-ориентированных заданий, в учебной и игровой деятельности на основе математического и компьютерного моделирования. Важнейшими факторами реализации при этом технологии формирования математической грамотности будут являться следующие *педагогические условия*:

— информационная насыщенность и индивидуализация мотивационного поля учения и игровой деятельности (в том числе, процессов цифровизации школы и вуза);

— множественность постановки целей и поиска этапов адаптации обобщенных конструктов сложного знания;

— поиск и исследование бифуркационных переходов в разноуровневой математической деятельности;

— выявление УУД в математической деятельности по решению и исследованию практико-ориентированных заданий в этапных процессах адаптации сложного знания;

— флуктуационное разнообразие параметризации и интеграции математических, информационных, естественнонаучных и гуманитарных знаний в построении математических результатов в форме аттракторов и бассейнов притяжения нелинейных преобразований на основе математического и компьютерного моделирования;

— диалог культур и сетевое взаимодействие на единых информационных платформах исследовательской деятельности с учетом стохастичности процессов и обобщенности результатов формирования математической грамотности;

— постановка эксперимента в математике и проявление синергетических эффектов развития личности в условиях продвижения к пониманию сущности математических объектов и процедур в ходе функционирования насыщенной информационно-образовательной среды.

1. Сложное знание как многообразие в единстве. Исследование проблемы и реализация адекватной технологии формирования математической грамотности школьников связана с освоением обучающимися сложного знания средствами математического и компьютерного моделирования в насыщенной информационно-образовательной среде на основе диалога культур. Античные философы Платон, Аристотель, Стагирит [2] устанавливали онтологическое различие между простым и сложным которое выражается в традиционных для древнегреческой мысли парах противоположностей, таких как «единое–многое», «элементарное–составное», «необходимое–случайное». Решение проблем вычислительной сложности (А. Тьюринг, С. Кук, М. Рабин и др.) показало, что именно временные характеристики играют наиболее важную роль в оценке сложности задачи (задачи Р-класса (Р-трудность) — полиномиальное время, задача коммивояжера — экспоненциальное время и т.п.). «Сложность означает много разных вещей — существует дескриптивная сложность и вычислительная сложность. Алгоритм может быть чрезвычайно сложным в смысле способа его построения и при этом работать очень быстро, так как его вычислительная сложность низка. Таким образом, мы имеем различные понятия о сложности. Мне не ясно, имеют ли в виду одно и тоже понятие инженеры-электронщики, экономисты, математики, специалисты по информатике и физики, когда употребляют термин сложность» [3]. Существуют подходы, когда сложность связывается со временем образования системы или с ее иерархической структурой, а также, с вероятностью образования системы из исходных элементов, иногда сложность может означать способность системы к генерированию семиотических информационных связей и осуществлять на их основе взаимодействие с внешней средой, позволяющее реализовать иерархическую структуру управления. Следуя И. Р. Пригожину, понятия «сложность есть возникновение бифуркационных переходов вдали от равновесия и при наличии подходящих нелинейностей, нарушение симметрии выше точки бифуркации, а также образование и поддержка корреляций макроскопического масштаба» [4]. Постнеклассическое мышление современного индивидуума, базирующееся на нелинейность окружающей реальности, ситуативности и неопределенности в принятии решения, множественного целеполагания и неоднозначности выбора настоятельно диктует необходимость и возможность освоения и принятия нового знания (математической грамотности) посредством преодоления сложного (современные достижения в науке), включающего новое знание, как императива перехода от хаоса к порядку. Таким образом, математическая грамотность школьника может выступать как аттрактор итераций поэтапного развертывания симбиоза исследования обобщенных процедур (универсальных учебных действий) и процессов адаптации сложного знания к освоению базовых учебных элементов школьной математики. Это диктует необходимость выстраивать, исследовать и рассматривать разноуровневое сложное как условие выстраивания параметров порядка и перехода к динамически устойчивым состояниям нового уровня сложности. *Именно освоение сложного знания школьниками позволяет создавать ситуации, ведущие к способности поддерживать динамическую устойчивость состояния (формирование математической грамотности) при допустимых значениях внутренних или внешних возмущений (флуктуаций) математической деятельности в процессах адаптации обобщенных конструктов в исследовании современных достижений в науке.*

Математическое образование как сложная и открытая социальная система несет в себе при этом огромный потенциал самоорганизации и позитивного проявления синергетических эффектов в разных направлениях: развитие и воспитание личности в проектной деятельности, упорядоченность содержания и структуры когнитивного опыта, коммуникации и социальное взаимодействие субъектов на основе диалога культур.

Синергия математического образования *при этом будет рассматриваться нами как симбиоз и качественное изменение нелинейных эффектов самоорганизации и саморазвития личности в ходе освоения математической деятельности в условиях управления сложными стохастическими процессами на основе согласования разных факторов и начал в трех контекстах: содержательном (семиотическом), процессуальном (имитационном) и социально-адаптационном.* Последние аспекты особенно важны в педагогических системах ввиду возможности установления дополнительных горизонтальных связей на основе диалога культур и реализации контекстного подхода А. А. Вербицкого [5]. Синергия математического образования характеризуется при этом наличием *внутренних атрибутов (механизмов)* самоорганизации и параметров порядка, которые формируют успешность функционирования образовательной системы на все новых усложняющихся уровнях, способствующей формированию математической грамотности как следствию позитивных изменений. При этом дидактические процессы приобретают новое качество: естественнонаучные знания обогащаются гуманитарным аспектом, гуманитарные знания приобретают научную основу обоснования сущности использованием естественнонаучного и математического аппарата и методов.

Важным контекстом является постановка *внешних факторов воздействия* в виде множественности целеполагания, выстраивания этапов и иерархий знаково-символической и образно-геометрической деятельности в направлении фундирования сущности математических объектов и процедур [6], поиска и анализа побочных решений с использованием информационных технологий, выявления бифуркационных переходов и бассейнов притяжения в исследуемых процессах на основе вариативности и параметризации, обеспечение когерентности информационных потоков в появлении новой продукта на основе диалога культур (в том числе, в условиях сетевого взаимодействия). *Нами* выявлены и охарактеризованы все этапы проявления синергии математического образования: подготовительный, содержательно-технологический, оценочно-коррекционный и обобщающе-преобразующий. *Актуализация процессов адаптации современ-*

ных достижений в науке и обобщенных конструктов параметризации и приемов наглядного моделирования сущности математических объектов школьной математики на основе компьютерного моделирования и интеграции межпредметных знаний и процедур являются уникальным механизмом и эффективной возможностью ***формирования функциональной*** (***математической***) ***грамотности школьников***.

Исследование и значимость примеров самоорганизации в живой и неживой природе через процессы разрушения и созидания (хаоса и порядка) показали, что *нарастание сложности в открытых и неравновесных системах* не является деструктивным механизмом, а наоборот является необходимым переходом к новому уровню развития, более сложным и упорядоченным формам организации, в том числе, в образовательных структурах. Разработка философской концепции сложности (И. Кант, Г. В. Гегель, И. Пригожин, Г. Хакен, В. В. Орлов, И. С. Утробин, Х. Альвен, Т. С. Васильева и др.) опосредована обширным экспериментальным материалом, практикой и взаимозависимостью интегративных процессов в науке, технологиях, экономике, социальных преобразованиях и образовательных парадигмах. Поливалентность, множественность, многополярность, непредсказуемость, эмерджентность и неравновесность современного мира не может не быть увязана с категориями развития сущности объектов, явлений и процессов посредством проявления закономерностей переходов на более высокие уровни сложности как составляющих конкретно-всеобщей теории развития (Ст. Бир, Н. Винер, Дж. фон Нейман и др.). Исследователи делают вывод о том, что сложность является интегрирующей характеристикой способности к самоорганизации при достижении определенных критических ее уровней, способности к эффективному развитию и саморазвитию мышления и личностных качеств обучающегося. Ученые философы, педагоги и психологи (С. П. Курдюмов, Г. Хакен, К. Майнцер, А. Н. Подъяков [7], В. С. Степин и др.) убедительно показали, что эффективное развитие личности происходит *при освоении сложного знания* (разных уровней его сложности в зависимости от личностного развития обучающихся, включая инклюзивное образование), создания ситуаций преодоления трудностей в процессе освоения знаний и единой картины мира на основе высокой степени развертывания учебной и профессиональной мотивации обучающихся в единой сети взаимодействий, самостоятельности и когерентности. В познании сложного сам процесс познания «становится коммуникацией, петлей между познанием (феноменом, объектом) и познанием этого познания» (Э. Морен).

Так как сущность обнаруживает свою реальность в совокупности внешних характеристик предмета, в своих проявлениях, то раскрывая сущность через философские категории внутреннего, общего, содержания, причины, необходимости и закона определим, прежде всего, *компонентный состав содержательных и процессуальных характеристик проявления сущности*. Содержательный модус: знаково-символические, вербальные, образно-геометрические и тактильно-кинестетические проявления; процессуальный модус: историко-генетические, конкретно-деятельностные, экспериментальные и прикладные проявления. Постижение сущности предмета обучающимся в определенном категориальном поле знаний и способов деятельности, достаточное для успешности и эффективности оперирования с ней, не обязательно совпадает по содержанию и выраженности необходимых существенных связей. Более того, возможно присоединение дополнительных связей, которые в совокупности с необходимыми связями создают целостность и иерархичность сущности в данном категориальном поле. Эта изменчивость и подвижность сущности предмета требует актуализации поэтапного продвижения к ее познанию и определяет третье измерение сущности — личностно-адаптационное в ее характеристиках, и определяет трехкомпонентную целостность сущности предмета как объекта познания в ходе когнитивной деятельности. Таким образом, нами представлена *следующая структурно-функциональная модель сущности математических учебных элементов* (рис. 3):

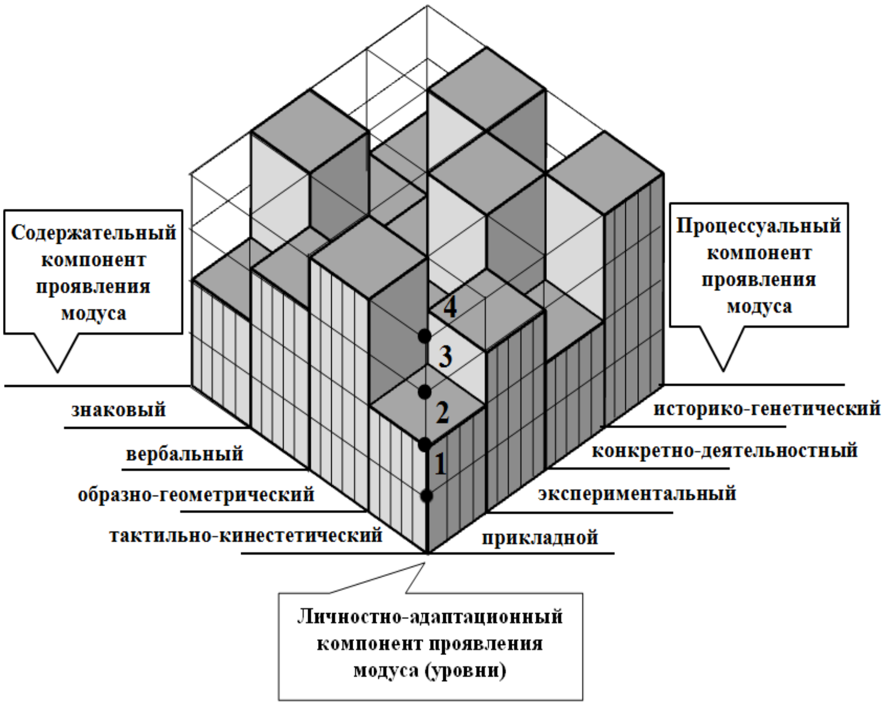


Рис. 3. Структурно-функциональная модель проявления сущности математических учебных элементов.

При этом процедуры освоения обобщенной сущности и перехода в процессам индивидуализации в зонах ближайшего развития обучающихся будут более выраженными и направленными, если ориентировочная и информационная основы учебной деятельности обучаемых цементируются специально проектируемым содержанием обучения, наглядно моделируемым в форме спиралей или кластеров фундирования базовых учебных элементов. *Таким образом, фундирование опыта как инновационный механизм развития личности и постижения сущности обобщенного конструкта математического образования, формирования математической грамотности школьника в ходе освоения современных достижений в науке может разворачиваться в трех образовательных нишах: содержании школьного обучения математике, технологии реализации адаптационных процессов и развития личностных качеств обучающихся.*

Закономерности восприятия сложных математических объектов. Проблема восприятия является коренной проблемой психологической науки. Ею занимались многие видные физиологи, психологи, педагоги XIX и XX века (С. Стивенс, Н. Н. Ланге, Б. Ф. Ломов, А. А. Ухтомский, П. А. Анохин, Г. Гельмгольц, И. М. Сеченов, Б. Г. Ананьев, П. П. Блонский, И. П. Павлов, Д. Н. Узнадзе, А. Н. Леонтьев, В. П. Зинченко, А. В. Запорожец, Б. М. Теплов и др.). В данном исследовании восприятие будет рассматриваться в широком смысле «как процесс непосредственного информационного взаимодействия организма с объектом (средой), в результате которого происходит целостное отображение объекта (среды) вследствие изменения структуры и динамики определенных подсистем организма». Объективной основой образа и детерминантом перцептивных и исполнительных действий является объект, поэтому свойства объекта должны быть подвергнуты всестороннему изучению. Важнейшим из них является целостность. Вторым необходимым элементом в процессе восприятия является субъект восприятия — обучаемый. Применительно к спецификации математических объектов существенной является проблема формирования целостного образа в результате сукцессивного, часто сильно растянутого по времени восприятия сложного целостного математического объекта. Если обратиться к истории вопроса, то видим, что, изучая процессы пространственного зрительного восприятия, Г. Гельмгольц особенно выделял роль движений. Он придавал движениям более широкий смысл: движение субъекта (как и самих объектов) вызывают постоянные изменения чувственных впечатлений, получаемых от объектов. Вместе с тем повторяющийся опыт обнаруживает устойчивость связей, их признаков, благодаря чему совокупности ощущений и приобретают качество относительно инвариантных образов. Отметив наличие в восприятии элементарных моторных актов таких, как адаптационные рефлексы глаза и т.п., известный психолог Н. Н. Ланге направил свои усилия на исследование чувственных образов тех объектов, которые мы намеренно выделяем в окружающем мире, т. е. на анализ явлений так называемого волевого внимания. Для Ланге волевое внимание есть целевое, целеподчиненное восприятие. Только такое восприятие и дает нам более отчетливое, более конкретное и полное знание воспринимаемого объекта в отличие от знания только «зрачкового», сигнального. Как показывают экспериментальные данные, перцептивные действия выступают в своей развернутой внешней форме на ранних ступенях онтогенеза, где наиболее четко обнаруживается их структура и роль в формировании образов восприятия. В ходе дальнейшего развития они претерпевают ряд последовательных изменений и сокращений, пока не облекаются в форму мгновенного акта усмотрения объекта, который был описан представителями гештальтпсихологии и ошибочно принимался ими за исходный, генетически первичный. В частности, в действиях, направленных на формирование образа, выделяются операции обнаружения, выделения адекватных задачам информативных признаков, ознакомление с выделенными признаками. Психологические основы зрения. К функциональным образованиям перцептивного процесса относятся сенсорные функции различных модальностей (зрительные, слуховые, тактильные и т.д.), мнемические, психологические, рече-двигательные и т.д. К операционным механизмам перцептивных процессов относятся измерительные, соизмерительные, тонически-регуляторные и другие действия, формирующиеся в процессе практического оперирования с вещами и явлениями. Мотивационная сторона перцептивных процессов определяет их направленность, селективность и напряженность. Факторы постепенного усложнения процессов восприятия (перцептивных) объяснялись именно тем, что обобщающе-абстрагирующие функции мышления и обозначающие функции речи строят чувственный образ преимущественно из материалов прошлого опыта. Чем старше ребенок, тем больше в его перцепции апперцепции. Исследование перцептивных процессов различных видов (восприятие предмета или его изображения, пространства и времени, движущихся объектов и т.д.) всегда ориентировано на определенную модальность восприятия в зависимости от анализаторной системы (зрительной, слуховой и т.д.). В специальных случаях применяются комплексные или комбинированные объединения функциональных систем на решение общей перцептивной задачи (зрительно-слуховой, зрительно-кинестетической и т.д.). Во всех случаях как общих, так и специальных исходной моделью и принципиальной схемой перцептивного процесса является зрительный образ. *П. П. Блонский высказал предположение, что не существует никакого другого синтеза разнородных впечатлений, кроме зрительного.* Зрительный характер представлений в состоянии общей пониженной возбудимости мозга и сохранения в качестве «сторожевого пункта» не зрительной, а слуховой зоны — явление удивительное. Зрительная система является для человека доминантной не только потому, что она является самым мощным источником информации о внешнем мире, но также и тем, что она играет роль внутреннего канала связи между всеми анализаторными системами и является органом преобразователем сигналов. Такое необычное для анализаторных систем мозга свойство у человека зрительная система приобретает благодаря сочетанию четырех факторов: 1) целостного предметного характера образа, т. е. отражению структурного единства воспринимаемых вещей, относимых к определенному пространству окружающей среды; 2) предметного действия, посредством которого человек оперирует этими вещами и изменяет их, практически преобразуя их структуру и свойства; 3) сигнификации воспринимаемых вещей, благодаря чему обобщается, абстрагируется и сохраняется в качестве констант перцептивное знание; 4) пространственной организации симультанного образа. Зрительная система работает на трех уровнях: сенсорном (ощущения), перцептивном (восприятия), апперцептивном (представления). Способность зрительной системы по-разному видеть один и тот же предмет является необходимой основой для формирования константности восприятия. *Н. Н. Ланге открыл закон перцепции, согласно которому процесс восприятия строится как наглядное суждение об объекте.* Одной из основных психофизиологических характеристик человека является константность восприятия, относительная инвариантность образа объекта в изменяющихся условиях наблюдения. Константность восприятия является таким интегральным свойством, которое в равной степени трактуется как закон сохранения информации (Akishige, 1965), так и как проявление закономерной установки (Узнадзе, Натадзе, 1963). Константность восприятия является весьма тонким индикатором индивидуального развития, охватывающим все стороны перцептивных процессов (функциональную, операционную и мотивационную). Перцептивные процессы с их сложной противоречивой структурой являются не только продуктом индивидуального развития, но и одним из его факторов. Константность восприятия обусловлена практическим взаимодействием живого существа с окружающей его средой и формируется в течение длительного времени. У живого существа в период его индивидуальной жизни вырабатывается способность воспринимать стойкие, действительные свойства объектов (устойчивые связи). Функция перцептивной константности — продуцировать устойчивый, стабильный и константный мир вместо постоянно меняющихся сенсорных впечатлений. Несмотря на некоторые различия теории перцептивной константности (Дж. Гибсона, К. Огля, Е. Геринга, А. Бланка, Е. Брунсвик и др.), ученые признают влияние апперцепции на константность восприятия, правда, в различной форме и на разные ее компоненты.

В противоположность этим теориям гештальтпсихология считает константность имманентным свойством восприятия, при этом перцептивная константность определяется структурой поля восприятия. Для В. Келлера константное восприятие (величины, формы, цвета и пр.) по своей природе не отличается от любой оптической иллюзии, обусловленной целостной структурой воспринимаемого зрительного поля. Действительно, влиятельные факторы, по мнению Келлера, — это такие аспекты раздражителя, как конфигурация, близость, сходство, общее направление, симметрия и другие объективные характеристики, подобные этим. Гештальттеория имеет дело с явлениями, которые обнаруживаются в зрительном поле, являющемся, в свою очередь, динамическим распределением энергии, причем его части взаимозависимы из-за их участия в целом. Поле структурировано в зависимости от того, в какой мере внутри него существуют различия по интенсивности или по качеству. В той мере, в какой поле структурировано, оно содержит потенциальную энергию, способную производить перцептивную работу. *Как мнение Коффки о параллельных физиологических процессах, так и призыв Келера к раскрытию полевых мозговых функций основываются на принципе изоморфизма.* Буквально это означает «равенство форм», могущее приобрести точную формулировку математическими методами. Видение белого квадрата сопровождается квадрато-подобной областью возбуждения в нейронном поле мозга. Гештальтпсихология утверждает, что сознательно воспринимаемый квадрат должен соответствовать области возбуждения в форме квадрата в каком-либо месте нейронного поля, т. е. если форма из четырех точек воспринимается как «квадрат», должен иметь место некий подобный квадрату физиологический процесс. Гештальтпсихология не признает локализованных специфических путей, ассоциаций, поскольку такие физиологические явления, исходя из принципа изоморфизма, не имеют соответствующего представительства в сознании. Полемика главных представителей гештальттеории — М. Вертгеймера, В. Келлера и К. Коффки — была направлена своим орудием против ассоциоизма, бихевиоризма. В отличие от некоторых современных психологов, пренебрежительно относящихся к возможностям нейрофизиологии в интерпретации психических явлений, представители раннего гештальтизма усиленно пытались подкрепить свои позиции анализом мозговых механизмов. Примером критического отношения к гештальттеории могут служить высказывания Дж. Хохберга при рассмотрении двух главных инструментов гештальтизма: феномена фигура–фон и законов организации: а) законы гештальта не детерминированы: волевым усилием можно, например, менять соотношение фигура–фон; б) гештальттеория не дает объяснений различия между восприятием двумерных и трехмерных объектов; в) базовые закономерности восприятия выводятся в гештальтпсихологии на основе эмпирического материала, полученного при представлении плоских изображений, а затем уже переносится в сферу восприятия объемных тел. При этом вовсе не учитывается, что восприятие рисунка не относится к первичным способностям зрительной системы — для этого требуется ее обучение. Уже в 1933 г. в сводке Г. Хелсона фигурировало 114 законов гештальта. После этого гештальтпсихология решила существенно уменьшить число таких «законов». К 1942 г. Э. Боринг оставил только 14 законов, и далее, продолжая процесс редукции, свел теоретический баланс гештальта к шести наиболее общим положениям:

1) понятие формы и изоморфизма;
2) целостность восприятия и примат целого по отношению к частному;
3) принцип силового поля;
4) способность образа к трансформациям и транспозициям;
5) принцип прегнантности («хорошей формы»);
6) принцип структурности или организации.

Далее В. Метезир возвращается к исходным принципам, сформулированным Вертгеймером в 1923 г., и выделяет 7 факторов гештальта, влияющих на восприятие сложных объектов:

1) Фактор сходства и наибольшей гологенности, выражающийся в тенденции к объединению и группировке элементов, сходных по каким-либо параметрам;

2) Фактор близости, проявляющийся в том, что близко расположенные элементы легче объединяются в группы, чем отдаленные;

3) Фактор общей судьбы, подчеркивающий значимость динамических событий для организации визуальной структуры. Группировка элементов определяется не только семантическим сходством, но и общим характером изменений: однонаправленным перемещением, изменением размера, формы, яркости, цвета и т.д.;

4) Фактор объективной установки: если у наблюдателя уже сформирована некая структура элементов, то любую новую ее организацию он будет рассматривать как изменение, продолжение, реконструкцию первоначальной;

5) Фактор вхождения без остатка (целостность). Примат целостного охвата структурностью даже в ущерб другим факторам;

6) Фактор переходящих кривых («хорошего продолжения») — наименьшее изменение кривизны линий — своего рода оптимальность и простота;

7) Фактор замкнутости — замкнутые линии предпочитаются разорванными.

Различные комбинации в объединении перечисленных выше 7 факторов лежат в основе наиболее общего закона гештальта — закона прегнантности. К параметрам, которые обуславливают индивидуальные различия в процессе восприятия, обычно относят: объем восприятия — количество объектов, которое может воспринять человек в течение одной фиксации; точность — соответствие возникшего образа особенностям воспринимаемого объекта; полнота — степень такого соответствия; быстрота — время, необходимое для адекватного восприятия предметов или явлений; эмоциональная окрашенность. Именно эти свойства могут выступать в качестве показателей продуктивности восприятия.

Как отмечал С. Л. Рубинштейн, «...генерализация отношений предметного содержания выступает затем и осознается как генерализация операций, производимых над обобщенным предметным содержанием; генерализация и закрепление в индивиде этих генерализованных операций ведут к формированию у индивида соответствующих способностей». Данный подход особенно важен для математического образования, где естественным образом возникающие многоступенчатые абстракции предметного содержания создают условия для таких обобщений в ходе актуализации и исследования «проблемных зон» в обучении математике, а также другим естественнонаучным и гуманитарным дисциплинам. Примером этому могут служить известные психологические исследования математического образования, проведенные Л. В. Занковым, Н. Ф. Талызиной, В. А. Крутецким, И. С. Якиманской, В. Д. Шадриковым [8] и другими крупными отечественными психологами. Поэтому именно математическое образование как сложная и открытая социальная система несет в себе огромный потенциал актуализации в исследовательской и игровой деятельности процессов самоорганизации и позитивного проявления синергетических эффектов в разных направлениях с использованием информационных технологий: развитие и воспитание личности, упорядоченность содержания и структуры когнитивного опыта, коммуникации и социальное взаимодействие субъектов на основе диалога культур, аспекты проявления результатов исследовательской деятельность в формировании математической грамотности, эффективная система саморегуляции личностных черт обучающегося (Ф. Маслоу, Г. Олпорт, К. Роджерс, А. М. Матюшкин, М. М. Кашапов и др.). Разрешение противоречий, связанных с качеством и успешностью исследовательской деятельности школьников и формированием функциональной (математической) грамотности школьников, возможно при усилении *индивидуализации* исследовательского и игрового процессов и развитии субъектности школьников на основе распознавания процессов и результатов адаптации сложных знаний и процедур. Необходимо создание условий для раскрытия внутренних процессов и механизмов адекватности освоения познавательных процессов и внешних актов на основе идентификации личности в процессе освоения сложных знаний и процедур: *персонализация* — представленность субъекта в других людях; *обособление* — выделение индивида во взаимодействии с другими людьми; *присвоение* индивидом всесторонней человеческой сущности (З. Фрейд, М. А. Холодная, Ю. Б. Гиппенрейтор, В. С. Мухина, В. В. Сериков, И. С. Якиманская, А. В. Хуторской и др.).

Вместе с А. Н. Подъяковым отметим следующие ***особенности в решении сложных задач***, реализация которых может реально привести к росту математической грамотности и креативности школьников в освоении математики:

► в поведении и развитии комплексной динамической системы, такой как математическое образование, всегда есть доля неопределенности и непредсказуемости; она требует множества разнообразных описаний и решений, как в содержании, так и в когнитивных процессах, отличающихся друг от друга и дополняющих друг друга; не менее эффективными орудиями являются при этом понятия нестрогие и нечеткие, построенные на основе эмпирических, а не теоретических обобщений, исследование которых невозможно без использования компьютерного и математического моделирования;

► комплексная система освоения учебных элементов характеризуется изменениями не только на уровне конкретных проявлений, но и на уровне своей сущности (обобщенных конструктов), наиболее значимой для актуализации процессов понимания и наличия развивающих эффектов самоорганизации. В сложных образовательных системах эффективные правила (фундирующие модусы (Е. И. Смирнов [9]) поэтапного развертывания сущности могут быть выделены (в том числе методом обратных задач теории самоорганизации (Г. Г. Малинецкий [10])), но они будут с неизбежностью достаточно вариативны по типам самоорганизации на основе реализации наглядного моделирования (Е. И. Смирнов [11]) и принципиально зависимы от контекста;

► теоретические модели сколь угодно высокого уровня принципиально ограничены. Для эффективного исследования сложных динамических систем необходимы разнообразные поисковые пробы (экспериментальные срезы, сравнительный анализ конкретных проявлений, компьютерное моделирование, аналогии, анализ через синтез (S. L. Rubinstein [12]) и т.п.) — реальные взаимодействия с системой, а не только теоретическая деятельность с ее абстрактными моделями;

► при исследовании сложной системы необходима вариативность целеполагания — постановка разнообразных, разнотипных и разноуровневых целей (множественное целеполагание), которые могут конкурировать между собой. Одним из основных эмоциональных состояний человека при исследовании сложных систем в математическом образовании является неуверенность, сомнение, готовность принять двоякие (на основе прогноза и случайные) результаты действий, и т.д.;

► результаты деятельности человека со сложной системой содержания и методов математического образования, результаты взаимодействия с ней не могут быть предсказаны полностью, исчерпывающим образом. Возможны только вероятностно гарантированные результаты образования. Причем наряду с прямыми, прогнозируемыми результатами образования образуются разнообразные побочные, непредсказуемые продукты личностного развития и математической деятельности, как в школе, так и в вузе.

2. Системно-генетические контексты. Выделим следующие *системно-генетические контексты освоения сложного знания с проявлением синергии* и эффектом формирования математической грамотности школьников (ср. А. А. Вербицкий).

• **Процессуальные контексты.** Базовым понятием представленной концепции адаптации современных достижений в науке является принцип и технология фундирования опыта личности (Э. Гуссерль, В. Д. Шадриков [8], Е. И. Смирнов и др.). Поэтому концепция фундирования процесса становления личности выступает как эффективный механизм преодоления профессиональных кризисов становления специалиста и актуализации интегративных связей между наукой, профессиональным образованием и школой. *Адаптационные процессы* рассматриваются учеными психологами и педагогами как динамический комплекс интегрального взаимодействия внутренних результатов (системы знаний, умений, установок, компетенций, ценностей) и адекватных механизмов приспособления личности к изменениям внешней среды и результатам деятельности с развивающим эффектом (А. А. Реан [13], Ю. И. Толстых [14], С. И. Сороко [15] и др.). В соответствии с С. Н. Дворяткиной и С. А. Розановой [16] таковыми могут быть синергетические эффекты реализации адаптационных процессов: когнитивный, мотивационный, профессиональный, креативный, социально-экономический и духовно-нравственный. Процессы создания *мотивационного поля* для исследования сложных математических конструктов требуют компьютерного дизайна и наглядного моделирования современных достижений в науке (странный аттрактор Лоренца, нечеткие множества и fuzzy-logic, губка Менгера, сценарий Ферхюльста и т.п.). *Выстраивание иерархий* в развертывании сущности обобщенного конструкта «проблемной зоны» на основе *параметризации и абстрагирования*, поиска *точек бифуркации и бассейнов притяжения* средствами построения итерационных процессов на основе информационно-технологической поддержки создают механизмы адаптации сложного знания к школьной и вузовской математике. При этом Е. И. Смирновым [17] были выявлены и характеризованы *четыре этапа проявления синергии* математического образования на основе актуализации диалога математической, информационной, естественнонаучной и гуманитарной культур: подготовительный, содержательно-технологический, контрольно-коррекционный и обобщающе-преобразующий. На рис. 4 представлен граф согласования этапов проявления сущности обобщенного конструкта современного научного знания в освоении математики и этапов проявления синергии математического образования.

Рис. 4. Согласование этапов проявления сущности учебного элемента и синергии математического образования.

Тип моделирования обобщенного конструкта современного научного знания на основе выявленной сущности может быть феноменологическим и генетическим. Следуя теории В. В. Давыдова и Д. Б. Эльконина, можно отметить, что *феноменологический* тип соответствует атрибутам и свойствам формирования эмпирического мышления, когда происходит обозначение чувственно данных свойств объектов и их связей, абстрагирование этих свойств, объединение их в классы и обобщение на основе формального тождества их отдельных свойств и их внешних изменений во взаимодействии. *Генетический* тип моделирования соответствует атрибутам и свойствам формирования теоретического мышления, когда осуществляется установление неявных скрытых существенных связей объектов, процессов и явлений роли и функций отношения компонентов внутри системы, условия их происхождения и преобразования. После анализа выявления сущности и самого идеального объекта происходит восхождение к истинному чувственно-конкретному целому. Поэтому технология проявления синергии в процессах адаптации современных достижений в науке в школьной математике может быть ориентирована соответственно на феноменологический или генетический тип выявления сущности обобщенного конструкта научного знания.

Фундирующие процедуры перехода от наличного состояния сущности и ее актуального представления к обобщенному потенциальному развитию сущности в форме идеального объекта (процесса или явления, состояния личностных качеств) являются многоэтапными, полифункциональными, направленными и интегративными по актуализации внутри и межпредметных связей. При этом процедуры перехода в зонах ближайшего развития будут более выраженными и направленными, если ориентировочная и информационная основы учебной деятельности обучаемых цементируются специально проектируемым содержанием обучения, наглядно моделируемым в форме спиралей или кластеров фундирования базовых учебных элементов. Выделим ряд технологических этапов развертывания фундирующих процедур *в процессах адаптации современного научного знания* к школьной математике с проявлением синергетических эффектов и отражения *феноменологического типа моделирования сущности* обобщенного конструкта:

— **мотивационный (М)** (*самоактуализация* («*мне это интересно*») — проявляется в выраженности ценностных и личностно-адаптационных характеристик познавательной деятельности обучаемых по освоению *эталонов и образцов феноменологии* наглядного моделирования обобщенного конструкта и результатов диагностических процедур на: значимость и ценностные ориентиры, выбор способов деятельности по раскрытию *отдельного качества* проявления обобщенной сущности (содержательного или процессуального компонента); поиск и анализ выявления этапов научного познания, методов исследования и механизмов осуществления внутрипредметных и межпредметных связей на основе профессионально-ориентированного и исследовательского подходов; настрой личности на самоопределение и самоорганизацию, освоение принципов и стилей научного мышления: индукции, дедукции, инсайта, аналогии, инверсии и антиципации;

— **ориентировочно-информационной насыщенности (О)** (*самоопределение* («*что я могу сделать*») в реализации эмпирических проб и проектировании наглядных моделей фундирующих процедур представления частных проявлений сущности обобщенного конструкта на основе *познавательной самостоятельности* и актуализации действий, компетенций и характеристик личностных качеств. Реализация процесса выявления существенных связей и преемственности эмпирических обобщений, *осознание функциональности уровня математического содержания проявления сущности обобщенного конструкта и коррекции состояния его параметров и условий*, адекватности и эффективности соотнесения направленности «цель–результат», базовости и интегративности проектируемых конструктов как ориентировочной и информационной основы целенаправленной и вариативной учебной деятельности;

— **процессуально-деятельностный (П)** (самоорганизация («я способен управлять процессом») — проявляется в проектировании и организации *технологии* освоения обучаемыми исследовательских процедур освоения инновационных проявлений сущности обобщенного конструкта в ходе развертывания ее фундирующих этапов и на основе актуализации приемов творческой познавательной самодеятельности и диалога математической, информационной, естественнонаучной и гуманитарной культур. При этом разрабатываются и реализуются формы, методы и средства освоения обобщенного конструкта, адекватные своим локальным, модульным и глобальным проявлениям развертывания фундирующих процедур;

— **контрольно-коррекционный (К)** (*оценка эмпирической верификации результатов*) — проявляется в проектировании функций и этапов мониторинга и диагностических процедур измерения состояния и расширения опыта, развития психических функций, синергетических эффектов и характеристик личностных качеств обучаемых; определение и оптимизация технологических процедур и предметного содержания образования, уровня освоения сущности и этапов развертывания спиралей и кластеров фундирования; определение целостного комплекса спиралей и кластеров фундирования опыта личности в ходе освоения сущности обобщенного конструкта как необходимого компонента дидактического поля и основы вариативности процессов адаптации современных достижений в науке;

— **обобщающе-преобразующий (ОП)** (*саморазвитие личности* («*я могу сделать что-то новое*») — характеризуется: содержанием и характеристиками переноса инноваций в массовую практику освоения школьной математики; интеграцией индивидуального и социального в проектировании инновационных обобщающих конструктов; информационным обменом, социализацией и верификацией инновационной деятельности; характеристиками, параметрами и показателями становления и выраженности индивидуальных образовательных траекторий школьников.

• **Содержательный контекст проявления синергии в математической деятельности** как раз и является тем сензитивным механизмом, который позволит актуализировать *факторы успешности* решения творческих задач на основе исследовательской активности и самоорганизации обучающихся. Поэтому основным средством проявления синергии математического образования и механизмом формирования исследовательского поведения школьников в процессе обучения математике мы считаем разработку и внедрение в учебный *процесс исследовательских практико-ориентированных сложных задач в «проблемных зонах» в форме комплекса многоэтапных математико-информационных заданий* (М. Клякля, В. С. Секованов, Е. И. Смирнов [18] и др.). Исследовательская деятельность обучающихся реализуется в специально организованной среде (например, ресурсных занятий) на фоне роста мотивов самоактуализации и самоорганизации, выявления приоритета ценностных ориентаций в математической деятельности. Немаловажным фактором содержательного контекста проявления синергии математического образования является продуктивная *деятельность по исследованию новых математических свойств и характеристик обобщенных конструктов самоорганизации*: фрактальных объектов, математических моделей неустойчивости решений нелинейных динамических систем, средств кодирования и шифрования, клеточных автоматов, нечетких множеств и fuzzy logic, компьютерного моделирования многогранных поверхностей цилиндра Шварца, стохастических структур на странных аттракторах и т.п. (В. С. Секованов, С. Н. Дворяткина, Е. И. Смирнов, А. Д. Уваров и др.).

• **Личностно-адаптационный и социальный контекст проявления синергии математического образования.** Взаимодействие человека с миром и людьми активизирует его внутренние потенциалы, что выступает основой его самопознания, саморегуляции и самоактуализации, обеспечивая тем самым его личностное саморазвитие. В связи с этим, особое внимание нами уделено рассмотрению проблем организации группового взаимодействия обучающихся, являющегося важнейшим источником их самоактуализации и развития, стимулом для творческой активности и дальнейшего личностного роста. Фундирующие процедуры перехода от наличного состояния сущности к обобщенному потенциальному ее развитию в форме идеального объекта (процесса или явления, состояния личностных качеств) являются многоэтапными, полифункциональными, направленными и интегративными по актуализации внутри и межпредметных связей. *Личностно-адаптационный компонент* связан с выраженностью характеристик и качеств личностного развития и адаптации обучающегося в процессе освоения современного научного знания в направлении самоактуализации («мне это интересно»), самоопределения («что я могу сделать»), самоорганизации («я способен управлять процессом»), саморазвития («я могу сделать что-то новое»).

Вычислительное мышление. Исследование процессов проявления синергии сложного знания в обучении математике оказывается непосредственно и естественно связанным с эффектом формирования не только функциональной (математической) грамотности, но и категории вычислительного мышления. Дело в том, *что основой решения и исследования практико-ориентированных задач является математическое моделирование*, т. е. замещение реальных, материализованных и идеальных объектов и процедур знаково-символическими, геометрическими, реляционными, процедурными, фреймовыми, фрактальными моделями как обобщенными конструктами, вложенными в структурно-логическое поле математических знаков и символов, подчиняющихся мириадам законов и закономерностей, имеющих статус абсолютных истин. Однако реализация логического вывода не всегда приводит к точному результату (это и теорема К. Геделя о неполноте, множественность силлогизмов, что иногда становится нереальным, необходимость вычислительных процедур и многое другое), так что, особенно при исследовании сложного знания необходимо требуются информационные технологии и вычислительные процедуры, хотя бы для получения приближенного решения. Другими словами, нужно так называемое *вычислительное мышление*, когда следуя Ж. Винг «...мыслительные процессы, участвующие в постановке проблем и их решения таким образом, чтобы решения были представлены в форме, которая может быть эффективно реализована с помощью средств обработки информации». Е. К. Хеннер приводит ряд примеров определений вычислительного мышления (ВМ), которое непосредственно возникает при оперировании со сложным знанием и оказывает влияние на формирование математической грамотности. Ниже некоторые из этих суждений:

• ВМ тесно связано с процессуальным мышлением, определение которого сформулировал Сеймур Пейперт еще в 1981 г. Процессуальное мышление включает в себя разработку, представление, тестирование и отладку процедур, представляющих собой набор пошаговых инструкций, каждая из которых может быть формально интерпретирована и исполнена специальным исполнителем, таким как компьютер или автоматическое оборудование;

• ВМ связано с изучением механизмов интеллекта, сопровождаемым практическими приложениями, выражаемыми в усилении человеческого интеллекта путем использования инструментов, помогающих автоматизировать решение сложных задач;

• ВМ — способ формулирования точных методов эффективного решения задач, включая тщательный анализ задач и процедур решения.

Структурно-функциональная модель формирования и диагностики качества математического образования и математической грамотности

Практически речь идет о выявлении обобщенных конструктов и процедур в информационных процессах, сопровождающих исследование сложного знания: *таким образом, нас интересуют обобщенные конструкты и процедуры решения и исследования сложного знания на основе математического и компьютерного моделирования* (*в том числе, игровой деятельности*) *с актуализацией математической грамотности школьников в ходе практико-ориентированных процедур решения PISA-подобных заданий.* Именно их актуализация, как указывает С. Л. Рубинштейн, и есть основа для формирования способностей, в том числе, математической грамотности.

Структурно-функциональная модель

формирования и диагностики математической грамотности

Генезис и характеристика функциональных систем освоения учебной (игровой) деятельности (ценностной, мотивационной, познавательной, метакогнитивной, эмоциональной, волевой, психомоторной)

УУД и ключевые компетенции	ООУД и характеристика метапредметных образовательных результатов (цель-задание)
Познавательные: - локализация и структурирование информации **(1);** - понимание сюжетной ситуации **(2);** - интеграция и интерпретация результатов **(3);** **Регулятивные:** **(П)** - моделирование реальных объектов и процедур **(4);** - рефлексия и использование жизненного опыта **(5);** - самоорганизация, самооценка и самоконтроль **(6)**	**(1)** извлекать, конкретизировать, сравнивать, структурировать данные, выделять основные логические связи, осуществлять реализацию плана; **(2)** обобщать, классифицировать и упорядочивать, осознавать приемы и следствия, выделять закономерности; (П) **(3)** выявлять общее и особенное, сравнивать и объединять, осуществлять взаимопереходы знаковых систем, представлять содержание в сжатом и развернутом виде; **(4)** выделять блоки информации и строить модели (концептуальные, предметные, математические, информационные), переводить контент в знаки, символы, иллюстрации, таблицы, фреймы, алгоритмы и процедуры; **(5)** анализировать соответствие данных условиям, составлять план действий, определять проблемные зоны и делать прогноз результата, находить новые связи и закономерности; **(6)** сопоставлять результат с целью. Определять зависимость условий и результата. Принятие решения и осуществление осознанного выбора

Цель-результат
Дидактическое поле
+ (О)
Опорная таблица кодировки

Математические ЗУНМА и компетенции (содержание МГ): Пороговый контент (60%); Новый контент (30%)4 Сложный новый контент (10%)

Цель-образ

Актуализация (М) 7 содержательных линий школьной математики ***(PISA-подход: измерение и отношение, пространство и форма, количество и неопределенность)***

Фактор-импульс (М)

Синергия исследования и адаптации сложных знаний и процедур

Средства и механизмы адаптации сложного знания

Web-технологии и информационные среды
+
Этапы адаптации
+ (п)
Генерация практико-ориентированной базы МГ по сферам реальной жизни (комплекс типовых PISA-подобных заданий (сценариев) 3 уровней (порогового, нового и сложного нового)

I Социум
II Производство
III Инфраструктура
IV Наука
V Природа

Результаты формирования МГ

Анализ результатов и измерители компетентностных дефицитов (К)

1) Отбор по 2 PISA-подобных заданий по каждой из 5 групп сфер реальной жизни (10); 2) Тест в закрытой форме – 3 вопроса по 4 вариации ответов (30 вопросов); 3) Анализ (ОП) результатов математико-статистическими методами; 4) Полное отражение УУД и линий математики в вопросах к заданиям

Центральным системообразующим компонентом педагогической технологии формирование математической грамотности является ее ***цель***. Можно выделить три аспекта цели: во-первых, как традиционно это «идеальный или мысленно представляемый ее **результат**»; во-вторых, как уровень требований, направленных на характеристику содержания функциональной (математической) грамотности: параметры и уровни содержания математической грамотности; широта опыта личности (**через освоение сложного знания**), этапы проявления в математической грамотности в структуре обогащенного опыта, эмоционально-волевой и мотивационной сферы, креативности и творческой активности личности и т.п.; в-третьих, как целостный и динамический процесс развертывания **иерархии целей и уровня достижений и отражения математической грамотности** в учебной (игровой) деятельности, принятых личностью.

В процессе освоения феномена и концепта математической грамотности формирование цели начинается с передачи школьнику нормативной цели–результата формируемого опыта личности, включающего содержание концепта во всем многообразии проявления сущности. Задача обучающего *на первом этапе* формирования представлений о концепте математической грамотности состоит в том, чтобы сформировать у обучаемых представление о нормативном результате деятельности (НРД).

Анализ различных видов деятельности позволяет выделить два вида цели–результата по В. Д. Шадрикову:

цель–образ — непосредственно направляющая и регулирующая учебную (игровую) деятельность на всем ее протяжении (например, последовательность, этапы адаптации сложного знания, требования, структура, сценарий, средства и формы);

цель–задание — регулирующая учебную (игровую) деятельность через конечный результат, который выступает в форме содержания и сущностных связей концепта математической грамотности: УУД и их характеристика, знания, умения, навыки, математические методы, идеи, алгоритмы, процедуры.

Формирование у обучающихся представлений о том, что должно быть получено в результате учебной деятельности, составляет только первый этап формирования цели–результата. На втором и третьем этапах формируется представление о качественных и количественных параметрах деятельности. Так, диагностируемой ориентировочной основой учебной деятельности по формированию функциональной (математической) грамотности может выступать процедура поэтапной адаптации сложного знания к содержанию школьной математической деятельности, которая представляет собой проектирование в свернутом виде содержания и структуры теоретических и практико-ориентированных конструктов, развертывающихся в иерархиях исследовательской деятельности школьников. При этом необходимо отражение и освоение УУД и актуализация процессов и когнитивных схем интеграции знаний и процедур, адекватное диагностируемому целеполаганию приобретения, применения и преобразования сущностных характеристик математической грамотности через призму решения и исследования практико-ориентированных заданий.

Качественные параметры освоения математической грамотности школьниками задаются компонентным составом, способами выполнения исследовательской деятельности и проектированием теоретического и эмпирического знания, практического и прикладного компонентов, эвристической и алгоритмико-вычислительной деятельности в насыщенной информационно-образовательной среде. Представление о количественных параметрах формируется с опорой на психофизические особенности школьников, акценты индивидуализации и дифференциации исследовательской деятельности, требования Государственного образовательного стандарта общего образования и его региональных особенностей, логику проектирования и развертывания содержания интеграции математических, естественнонаучных, информационных и гуманитарных знаний и процедур, критерии контрольно-оценочной деятельности обучающего.

Учебные цели реализуются через мотивированную учебную деятельность в определенных объективных и субъективных условиях активности личности в решении дидактических задач. В свете деятельностного подхода (Л. С. Выготский, С. Л. Рубинштейн, П. Я. Гальперин, Н. Ф. Талызина, А. Н. Леонтьев и др.) в структуре деятельности выделяются следующие компоненты: потребности, мотивы, цели, условия, результаты, объект, на который она направлена. *Деятельность понимается как реальный процесс взаимодействия человека, являющегося субъектом этой деятельности, с окружающим миром, взятым в его целостности, процесс решения жизненно важных задач и складывается из совокупности действий и операций.* Действие (как единица психологического анализа деятельности) — составляющий элемент деятельности, состоит из операций, с помощью которых выполняется действие, и всегда направлено на достижение цели. П. Я. Гальперин выделил в любом действии три компонента: ориентировочный, исполнительный и контрольно-корректировочный. Н. Ф. Талызина отмечает: «Ориентировочная основа — это та система условий, на которую реально опирается человек при выполнении действий. Ее можно раскрыть как процесс использования ориентировочной основы действий». Но, рассматривая деятельность процесса учения как сложную систему действий и операций, необходимо формировать ориентировочную основу учебной деятельности, адекватно соотнесенную с целью–результатом учения. При этом важнейшей, с психологической точки зрения, является ориентировочная часть деятельности, предназначенная выполнять сигнальную функцию, ориентировать индивидуума на процесс решения, в том числе практико-ориентированных задач, развертывающихся в своих иерархиях и отражающих базовые цели формирования математической грамотности.

Содержание математического образования в нашей парадигме, отражающее процессы формирования функциональной (математической) грамотности школьников, определяется как совокупность интегрированных практико-ориентированных знаний, умений, навыков, математических методов и процедур, взглядов и убеждений по освоению и адаптации сложного знания, а также определенный уровень развития познавательных сил и практической подготовки школьников, достигнутой в ходе исследовательской (игровой) деятельности.

К педагогическим **особенностям проектирования** содержания математического образования школьников на основе адаптации сложного знания и интеграционных процессов отнесем:

— *личностно-ориентированный подход* к определению сущности сложного знания посредством его структуризации, интеграции и визуализации знаний и процедур, актуализации УУД и их характеристик в решении и исследовании PISA-подобных практико-ориентированных заданий. Это должно способствовать раскрытию и всестороннему развитию личности, формирующей основы для самореализации и активности школьника, создания ситуаций продуктивного учебного взаимодействия в малых группах на основе технологической гибкости и вариативности принятия исследовательских решений;

— *преемственность содержательных линий* школьного математического образования (а также типологии PISA-ориентированного подхода) и вариативности способов актуализации УУД и решения PISA-подобных практико-ориентированных задач в ходе адаптации сложного знания на основе взаимопереходов знаковых систем (вербальной, наглядно-действенной, наглядно-образной (геометрической), логической (знаково-символической));

— целостность, иерархичность и профессионально-педагогическая направленность развертывания математического содержания профессиональной подготовки учителя в единстве теоретического, практического, прикладного, эвристического, мотивационного и алгоритмико-вычислительного компонентов;

— профессионально-направленный процесс создания условий (психологических, педагогических, организационно-методических) для актуализации базовых учебных элементов школьной и вузовской математики с последующим теоретическим обобщением структурных единиц, раскрывающих их сущность, целостность и трансдисциплинарные связи в контексте интеллектуального и личностного развития студентов;

— наглядное моделирование дидактических и когнитивных процессов на основе адекватного восприятия, активизации мотивационной и эмоционально-волевой сферы, мнемических процессов, а также разнообразия форм представления математических объектов (логических, реляционных, семантических, продукционных, фреймовых, гипертекстовых);

— создание условий (педагогических, психологических, организационно-методических) для творческой активности студента, создающей основы профессионального мастерства и моделирующей приемы и методы деятельности учителя математики.

Целенаправленный процесс перехода социального опыта, накопленного предшествующими поколениями в рамках данного учебного предмета (объекта, явления или процесса), в опыт индивидуальный при условии активности субъекта обучения сопровождается необходимыми атрибутами когнитивного процесса: восприятие, понимание, представление, узнавание, локализация, целостность и др.

В основной образовательной программе вуза должны быть формализованы и материализованы в виде конкретных учебных дисциплин, учебных элементов и форм и видов учебной деятельности не только дидактические (когнитивные процессы и средства, формирующие основополагание, приобретение, применение и преобразование опыта личности), а также адаптационные процессы, характеризующие профессиональные пробы принятия студентом профессии учителя, и личностные процессы, направленные на проявление особенностей и развития мотиваций и эмоций, рефлексии и саморегуляции самооценки и выбора, интеллекта и креативности личности. Это с необходимостью приводит к задачам исследования и учета взаимовлияния механизмов интеграции школьных математических. вузовских математических знаний и видов деятельности, особенностей освоения и использования математических конструктов личностью в направлении будущей профессиональной активности и формирования способностей к успешному решению профессиональных задач.

Таким образом, инновационная технология обучения математике на основе исследования интеграционных механизмов формирования профессиональной компетентности представляет собой проектирование и организацию реального учебного процесса, соединяющее в себе теоретический или объектно-сущностный (приобретение опыта), процессуально-деятельностный (применение и преобразование опыта), личностно-адаптационный (развитие личностных характеристик, интеллекта) компоненты.

3. Интеграция математических, естественнонаучных, информационных и гуманитарных знаний и процедур в процессе освоения сложного знания

Объективные факторы интеграционных процессов в математическом образовании. В настоящее время целый ряд объективных факторов определяют значимость, тенденции и актуальность исследования интегративных процессов в математическом образовании:

1) важнейшей чертой современных образовательных процессов в России является объективный рост взаимодействия учебных предметов, видов образовательной деятельности, интеграционных процессов на разных уровнях познавательной активности и творчества обучаемых. Такая закономерность особенно актуальна для исследования проблем математического образования как универсального концепта становления мировоззрения и естественнонаучной картины мира, развития мышления и личностных качеств школьника. Это, прежде всего, — следствие стремительного развития наук, повышения их объема, уровня и степени дифференциации, повышения степени обобщенности и абстрагирования научных знаний, ведущее к универсализации идей, методов, процессов, формализационных структур различных наук и методов их преподавания. В то же время достигнутый уровень представленности научных знаний в учебных предметах и степень фундаментализации содержания образования свидетельствуют об их разобщенности, неоправданных повторах содержания в различных учебных предметах, отсутствия целостности отражения научных знаний в содержании школьного математического образования (тем более, если учитывать требования профессиональной направленности предметной подготовки будущего учителя).

Тезис 1. *От высокого уровня развития науки к адекватному уровню ее представленности в образовательных процессах через интеграцию учебных предметов и видов учебной деятельности.*

2) с другой стороны, устойчивые интегративные тенденции в социально-экономических отношениях в обществе и производстве, стирание граней в мировом образовательном пространстве, проблемы саморазвития, самореализации

и самоактуализации личности в современном обществе диктуют дидактические требования к математическому образованию школьника в большей систематичности и целостности, системности математических знаний на основе их интеграции, развитии целостности представлений о современной научной картине мира, направленности образовательных программ на интеллектуальное развитие личности.

Тезис 2. *От объективного единства и целостности мира, научного представления о нем, взаимосвязи и целостности процессов развития и социализации личности к актуализации интегративных процессов в содержании и технологиях математического образования.*

3) в то же время развитие систем профильного обучения в средней школе, многофункциональность профессиональной подготовки учителя, требования целостности структуры предметных знаний как основы профессиональной компетентности будущего учителя ориентируют разработчиков образовательных программ профессиональной подготовки учителя на интеграцию и преемственность блоков профессионально-значимых знаний как фундаментальной так и методической направленности, согласованности содержания образования, форм и методов обучения на общность приемов и видов математической деятельности школьников с целью придания им особенной дидактической определенности.

Тезис 3. *От объективных требований к проектированию учебного процесса в школе, от требований к уровню компетентности педагога к инновационным формам, методам, средствам, технологиям и содержанию математического образования на основе интеграции знаний, процедур и компетенций.*

4) разрешение проблем целостности математического и естественнонаучного образования в средней школе, оптимизации и интенсификации на основе повышения эффективности функционирования всех компонентов математического образования в условиях его цифровизации требуют проектирования и конструирования универсальных механизмов (методов) интеграции математических, информационных, естественнонаучных и гуманитарных знаний и процедур, приемов и видов познавательной и творческой деятельности, основанных на установлении преемственных связей между блоками знаний, актуализации основополагающих концепций (в том числе синергетических), идей и структурообразующих линий генезиса базовых учебных элементов, универсальных закономерностей развития, генезиса и целостности представления обобщенных научных знаний в школьном математическом образовании.

Тезис 4. *От обобщенности и целостности современных достижений в науке, их прикладной и практико-ориентированной значимости к возможностям адаптации обобщенных конструктов математического знания к школьной математике и формированию математической грамотности школьников.*

Концепция личностно-ориентированной интеграции школьных математических знаний и деятельности как основы освоения сложного знания и формирования математической грамотности школьников предполагает развертывание ***в процессе профессиональной переподготовки следующих компонентов и требований:***

1. Целостное исследование *требований ФГОС ООО* на предмет дифференциации и интеграции базовых учебных элементов математического образования

и конструирования структурно-логических схем актуализации их взаимосвязей. Выявление теоретических основ содержания и структурно-интегрированных связей дидактического поля учебных элементов оснащения математической грамотности.

2. *Готовность личности* учителя математики к осуществлению интеграции профессиональных компетенций (математических, естественнонаучных, информационных, гуманитарных) в ходе исследования сложного знания определяется:

• актуализацией *личностного смысла учебной* (*игровой*) *деятельности* по объективации и структуризации объединения различных блоков математических знаний и процедур;

• наличием достаточного уровня математической (предметной) психолого-педагогической *компетентности* и широты освоения математической (игровой) деятельности в знаниевом поле образовательного стандарта;

• умением *моделировать*, выдвигать гипотезы, выявлять проблемные места в алгоритме решения, унифицировать и оптимизировать данные (символы, знаки, параметры), осуществлять взаимопереходы знаковых систем в ходе исследования практико-ориентированных заданий как промежуточных в исследовании синергии сложного знания и современных достижений в науке;

• знанием *уровней и видов интеграции* знаний в учебной (игровой) деятельности, умением осуществлять и реализовывать конкретные механизмы и методы интеграции знаний (проектирование, системогенез, фундирование, наглядное моделирование и др.) в ходе исследования современных достижений в науке;

• владение приемами актуализации различных *видов универсальных учебных действий*, ориентированных на формирование математической грамотности школьников, в контексте характеристики генезиса и функциональных систем освоения учебной (игровой) деятельности (ценностной, мотивационной, познавательной, метакогнитивной, эмоциональной, волевой, психомоторной) в ходе освоения сложного знания.

3. Процесс интеграции знаний и процедур в учебной (игровой) деятельности в ходе освоения сложного знания основывается на следующих принципах: личностно-ориентированного обучения, деятельностного подхода, наглядного моделирования, фундирования опыта личности, самоорганизации деятельности, вариативности технологических решений, оптимизации алгоритмов и процедур интеграции знаний, целостности интегрированных конструктов обобщенного знания.

4. Развитие процессов самоактуализации и креативности личности учителя математики в направлении значимости и целостности процессов адаптации сложного знания и современных достижений в науке к школьной математике на основе математического и компьютерного моделирования, самостоятельности в выборе стратегии действий и принятии решения, выбора путей и средств решения учебных и профессиональных задач освоения сложного знания; реализации рефлексивной деятельности в выявлении этапов и процессов формирования основ математической грамотности школьников.

5. Разработка личностно-ориентированной, дидактической модели интеграции математических, естественнонаучных, информационных и гуманитарных знаний и процедур в процессе освоения сложного знания и современных дости-

жений в науке как фактора формирования математической грамотности школьников предполагает наличие следующих компонентов:

• определение и качественный анализ целей, исходных данных, содержания, условий и связей как факторов и средств интеграции знаний и процедур, актуализации УУД и метапредметной деятельности как компонентов образовательного процесса, мотивации и множественного целеполагания, проблемности и значимости исследования сложного знания, построения семантической модель и ее адекватности процессам решения и исследования сложного знания и процедур;

• проектирование технологических действий в процессах интеграции знаний и процедур: анализ и выбор вариантов технологических процедур освоения современных достижений в науке; выявление «проблемных зон» в освоении математики и формировании математической грамотности, потребности в интеграции знаний; отбор и логико-структурный анализ информационных банков средств интеграции знаний и процедур; конструирование и визуализация структуры связей математического и компьютерного моделирования и построения интегративной модели реализации технологических процедур, прогнозировании будущего результата; формирование адекватной когнитивной схемы формирования математической грамотности школьников;

• определение сущности, состава и структуры творческой активности школьников в процессе освоения сложного знания и современных достижений в науке в контексте интеграции математических знаний и процедур как механизма формирования математической грамотности школьников; презентация результатов и коррекция образовательных процедур.

6. Определение содержания и инновационной иерархической структуры процессов генерации и реализации практико-ориентированной базы математической грамотности по сферам реальной жизни (комплекс типовых PISA-подобных заданий (сценариев) 3 уровней (порогового, нового и сложного нового) дидактических модулей учебных предметов (математический анализ, стохастика и др.) на основе технологии интеграции знаний и процедур в ходе исследования сложного знания. Системообразующая роль интегрированных конструктов УУД как механизма формирования математической грамотности школьников.

7. Разработка требований, критериев, параметров и показателей оценки учебно-методических материалов нового поколения для обеспечения процессов формирования математической грамотности школьников на основе интеграции знаний и процедур в ходе освоения сложного знания и современных достижений в науке на основе математического и компьютерного моделирования. Разработка экспертных таблиц и оценочных показателей требований к учебно-методическим материалам нового поколения.

8. Выявление психологических закономерностей и профессиональных дефицитов педагогов в процессах освоения сложного знания и современных достижений в науке, в том числе, на основе исследования и диагностики процессов интеграции математических, естественнонаучных, информационных и гуманитарных знаний. Разработка пакета психолого-диагностического метода выявления психологической системы педагогической деятельности на основе реализации интегративных связей в освоении сложного знания и современных достижений в науке.

Технология проявления синергии в исследовании «проблемных зон» математического образования

Отметим, что ориентиром для проектирования технологии адаптации сложного знания в процессе обучения математике будет для нас исследования и инструментарий технологических карт В. М. Монахова [19], которые «…представляются тремя инструментальными составляющими: первая — диагностика (то, что будет диагностироваться); вторая — дозирование (то, что обеспечивает вероятностную гарантированность предстоящей когнитивной деятельности на базе успешной диагностики); третья составляющая — это система коррекционной профилактики…».

Нам представляется следующая коррекция последовательности введения инструментальных составляющих технологической карты развертывания этапов адаптации сложного знания:

✓ диагностика синергетических эффектов и наличного состояния личностных смыслов и предпочтений в способах освоения математического содержания;

✓ определение критериев отбора, объема, структуры и содержания «проблемных зон» в освоении математического знания, обладающих потенциалом сложности и возможностями проявления синергии в обучении математике;

✓ исследование образцов научных проблем (на эталонном и ситуативном уровнях) с проявлением синергии сложного знания средствами математики на основе реализации ИКТ-средств поддержки математического образования;

✓ актуализация атрибутов и параметров проявления синергии научной проблемы («проблемной зоны» математического образования) с детализацией, анализом, особенностями и этапами;

✓ актуализация, обобщение и оценка математических, информационных, гуманитарных и естественнонаучных знаний и методов в процессуальном периоде исследования «проблемной зоны» в контексте интеграции, этапности и вариативности проявлений.

Технология выявления и исследования «зон современных достижений в науке» (проблемных зон), адаптации их применительно к обучению математике позволяет проектировать и реализовывать этапы адаптации современных достижений в науке к наличному состоянию опыта математической деятельности школьников, позволяет интегрировать знания из различных областей наук в контексте освоения сложного знания. Выделим ряд **технологических этапов развертывания фундирующих процедур** *в процессах адаптации сложного знания* к школьной и вузовской математике с проявлением синергетических эффектов и отражения *феноменологического типа моделирования сущности* обобщенного конструкта:

1. **Освоение эталонов и образцов феноменологии наглядного моделирования обобщенного конструкта и результатов диагностических процедур** конкретных проявлений сущности обобщенного конструкта;

2. **Создание мотивационное поля в освоении обобщенного конструкта:** наглядное моделирование (*уроки-лекции, видео-клипы, проектная деятельность, презентации, деловые игры*) мотивационно-прикладных ситуаций различного толкования эталонов и образцов проявления синергии;

3. **Задачи** для актуализации развертывания *индивидуальных образовательных траекторий для малых групп студентов* (определение состава и направленности малых групп, распределение ролей, выбор и актуализация практико-ориентированной исследовательской деятельности по этапам фундирования и адаптации обобщенного конструкта;

4. **Множественное целеполагание** процессов исследования обобщенного конструкта «проблемной зоны»;

5. **Готовность к дискуссиям и множественности решений** проблемы; выявление критериев отбора, постановки и поиска решения исследовательских практико-ориентированных задач на основе диагностической информации, систематизированных в форме фундирующих комплексов;

6. **Создание творческой среды** в процессе освоения сущности обобщенного конструкта (стимулирование ситуации успеха; работа в малых группах и диалог культур; толерантность к неопределенности и развитие дивергентного мышления; выявление и популяризация образцов творческого поведения и его результатов); сбор и разнообразие форм и методов представления информации; освоение статистических пакетов и офисных редакторов, систем компьютерной алгебры и Web- поддержки;

7. Умения адаптироваться и развиваться в социальных коммуникациях на основе диалога математической, информационной, естественнонаучной и гуманитарной культур. **Эффективный диалог математической, информационной, естественнонаучной и гуманитарной культур** на основе компьютерного и математического моделирования компонентов и этапов адаптации обобщенного конструкта «зоны современных достижений в науке» в вузовской математике;

8. **Актуализация атрибутов синергии (бифуркации, аттракторы, флуктуации, бассейны притяжения)** в процессе исследования обобщенного конструкта, фундирования; выявление закономерностей, аналогий, ассоциаций, динамики исследуемых процессов, явлений и фактов; прогноз и «побочные продукты» исследования.

Синергетический эффект исследования многогранных поверхностей цилиндра Шварца

Пример 1. Математическое образование как сложная и открытая социальная система несет в себе огромный потенциал самоорганизации и позитивного проявления синергетических эффектов в разных направлениях: развитие и воспитание личности, упорядоченность содержания и структуры когнитивного опыта, коммуникации и социальное взаимодействие субъектов на основе диалога культур. При этом необходимо проектировать приемы и способы отражения и исследования технологических параметров обобщенного конструкта на фоне функционирования системы адаптации и получения новых результатов: в нашем случае обобщенный конструкт научного знания — понятие площади поверхности косвенно актуализируется через компьютерное и математическое моделирование (Б. Мандельброт [20]) процессов *исследования «площади» боковой поверхности цилиндра Шварца* [21].

Множественное целеполагание процессов *актуализации понятия площади поверхности приемами исследования «площади» цилиндра Шварца* (*содержательный аспект*): патологические свойства «площади» боковой поверхности цилиндра хорошо изучены в так называемом «регулярном» случае [22, 23]. Это происходит тогда, когда его высота H разбивается на m равных частей (соответственно слоев цилиндра), а окружность, лежащая в основании делится на n равных частей с последующим сдвигом φ на каждом слое на $\frac{\pi}{n}$. При такой триангуляции боковой поверхности цилиндра, формула для вычисления ее «площади», посредством получившихся многогранников при $m, n \to \infty$ имеет вид:

$$S_q = 2\pi R\sqrt{R^2\frac{\pi^4}{4}q^2 + H^2}, \quad \text{где } q = \lim_{m,n\to\infty}\frac{m}{n^2}. \tag{1}$$

Таким образом, «площадь» боковой поверхности S_q регулярного цилиндра Шварца высоты H и радиуса R (если данный предел существует — конечный или бесконечный) полностью определяется пределом (1). При этом ввиду независимого характера стремления $m, n \to \infty$ результат предельного процесса становится слабо прогнозируемым, многозначным, с отсутствием закономерностей в хаотическом развертывании фрактальных структур многогранников. Б. Мандельброт [24] показал, что при $m = n^k$ площадь многогранной поверхности растет как n^k $(k \neq 2)$. Возникают иерархии вопросов, связанных с исследованием многогранных поверхностей цилиндра Шварца и решаемых средствами компьютерного и математического моделирования исследовательской деятельности в малых группах школьников в дистанционной среде или в форме исследования многоэтапных математико-информационных заданий. Подобные исследования, проведенные студентами на ресурсных или лабораторно-расчетных занятиях, при выполнении многоэтапных математико-информационных заданий, в ходе проектной деятельности или сетевого взаимодействия развивают интеллектуальные операции мышления, повышают учебную мотивацию и качество освоения математических действий [25, 26].

Рассмотрим окружность с центром в точке A и радиусом $g_1 = 1$. В окружность вписан правильный шестиугольник и проведен радиус AT так, что AT пересекает сторону шестиугольника в точке U. Предположим, что точка T движется по окружности. При этом поставим в соответствие центральному углу $c_1 = \alpha$ длину отрезка UT, получим функцию $f(\alpha)$. Введенная функция является ограниченной и периодической, а именно $0 \leqslant |f(\alpha)| \leqslant 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ и период $T = \frac{\pi}{6}$. Функцию $f(\alpha)$ можно определить явным образом:

$$f(\alpha) = 1 - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\left(120^\circ - \left(\alpha - \left[\frac{\alpha}{60^\circ}\right]\cdot 60^\circ\right)\right)}. \tag{2}$$

Несложно определить функцию $f_n(\alpha)$, подобную функции из формулы (2) в случае, когда в окружность вписан произвольный правильный n-угольник. Действительно, обозначим через $\varphi = \frac{360^\circ}{n}$ центральный угол вписанного n-угольника, тогда $f_n(\alpha)$ примет вид:

$$f(\alpha) = 1 - \frac{\sin\left(90^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(90^\circ + \frac{\varphi}{2} - \left(\alpha - \left[\frac{\alpha}{\varphi}\right]\cdot\varphi\right)\right)}. \tag{3}$$

Определим следующую функцию $g(\alpha)$ как функциональный ряд:

$$g(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{k\square n}(\alpha). \tag{4}$$

где функции $f_{k\square n}(\alpha)$ определяются формулой (3). Легко видеть, что график функции $g(\alpha)$ имеет фрактальную структуру, наподобие графика функции Ван Дер Вардена. Теперь рассмотрим слой цилиндра Шварца, пересеченный плоскостью ортогональной его оси. Возникает естественная задача. *Пусть задан цилиндр Шварца высоты $H = 1$ и радиуса $R = 1$. При этом его верхнее основание разбивается на n равных частей, а высота на m равных частей. Проведем сечение, перпендикулярное оси цилиндра через произвольную точку x на ней. Если n стремится к бесконечности,* а *m фиксировано, то какой вид будет иметь функция $g(a)$, определенная в формуле* (4)?

Если предположить, что в формуле (4) переменные α и ε независимы, то на ряд, определяемый этой формулой, можно смотреть как на функцию двух переменных $s(\alpha, x)$. Графиком этой функции будет поверхность («Кубок Шварца»). На следующем рисунке изображена часть поверхности $z = s(\alpha, x)$, при этом $0 \leqslant \alpha \leqslant 360°$ и $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{30}$. Полагаем, что высота одного слоя цилиндра Шварца равна $\frac{1}{30}$ (для наглядности поверхность изображена в цилиндрической системе координат). На последнем рисунке линии уровня, изображенные желтым цветом, соответствуют графикам функции $g(\alpha)$ в полярной системе координат при $k = 0$, $k = \frac{1}{3}$, $k = \frac{2}{3}$, $k = 1$.

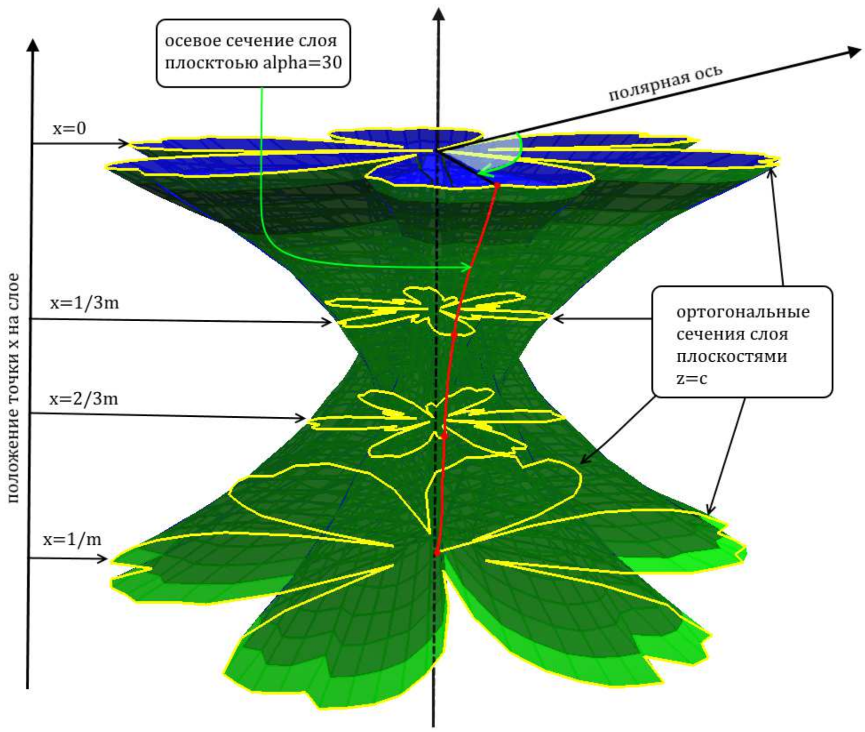


Рис. 5. «Кубок Шварца» как фрактальная поверхность.

Аналогично могут быть исследованы другие «зоны современных достижений в науке»: элементы фрактальной геометрии, клеточные автоматы, кодирование и шифрование информации, теория хаоса и катастроф. Как показывает рассмотренный пример лонгитюдное исследование «зон современных достижений в науке» предъявляет повышенные требования к их отбору и количеству, в то же время развивающий эффект от освоения школьниками сложного знания в контексте современных достижений в науке и диалога математической, информационной, естественнонаучной и гуманитарной культур трудно переоценить.

Результаты. Таким образом, выявлены и характеризованы содержание, компьютерный дизайн и технология адаптации сложного знания в ходе исследования обобщенных конструктов выявления сущности одной из «проблемных зон» школьной или вузовской математики (например, площади поверхности в детализации нелинейной динамики роста площадей многогранных комплексов при измельчении триангуляций боковой поверхности цилиндра или «сапога» Шварца средствами компьютерного и математического моделирования). Выявлены и характеризованы этапы адаптационных процессов, технология исследования сложного знания, точки бифуркации, бассейны притяжения, вычислительные процедуры и флуктуации параметров состояния, компьютерный дизайн и побочные результаты исследования. Выстроены иерархии форм и средств исследовательской деятельности школьников: ресурсные и лабораторно-расчетные занятия, комплексы многоэтапных математико-информационных заданий, проектные методы и сетевое взаимодействие.

Литература

1. *Секованов В. С.* Элементы теории дискретных динамических систем.—СПб: Изд-во Лань, 2016.—180 с.
2. *Милославов А. С.* Что такое сложность? // Научно-технический вестник СПб ГУИТМО. Вып. 36. Экономическое и гуманитарное образование в техническом вузе / Гл. ред. В. Н. Васильев СПб.: СПбГУ ИТМО.—2007.—С. 27-34.
3. *Карп Р.* Комбинаторика, сложность, случайность // Лекции лауреатов премии Тьюринга.—М.: Мир, 1993.—С. 498–521, С. 533–534.
4. Синергетике — 30 лет. интервью с профессором Г. Хакеном // Вопросы философии.—2000.—№ 3.—54 с.
5. *Вербицкий А. А.* Активное обучение в высшей школе: контекстный подход.—М.: Высшая школа, 1991.—207 с.
6. *Смирнов Е. И.* Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога: монография.—Ярославль: Изд-во Канцлер, 2012.—654 с.
7. *Подъяков А. Н.* Психология обучения в условиях новизны, сложности, неопределенности. Психологические исследования.—М.: Высшая школа экономики, 2015.—С. 6–10.
8. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы / Под ред. В. Д. Шадрикова.—М.: Гардарики, 2002.—383 с.
9. *Смирнов Е. И.* Технология наглядно-модельного обучения математике. Монография.—Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1997.—323 с.
10. *Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подласов А. В.* Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды.—М.: УРСС, 2006.
11. *Осташков В. Н., Смирнов Е. И.* Синергия образования в исследовании аттракторов и бассейнов притяжения нелинейных отображений // Ярославский педагогический вестник. Серия психолого-педагогических наук.—Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2016.—№ 6.—С. 146–157.

12. *Рубинштейн С. Л.* О мышлении и путях его исследования.—М.: АН СССР, 1958.
13. *Реан А. А.* Психология адаптации личности.—СПб: Прайм-Еврознак, 2008.—479 с.
14. *Толстых Ю. И.* Современные подходы к категории «адаптационный потенциал» // Изв. ТулГУ. Гуманит. наука.—2011, № 1.—С. 493–496.
15. *Сороко С. И.* Индивидуальные стратегии адаптации человека в экстремальных условиях // Философия человека.—2012.—Т. 38, № 6.—С. 78–86.
16. *Розанова С. А.* Эффекты синергии математического, естественнонаучного и гуманитарного образования: структура, основные характеристики // Математика, физика и информатика и их приложения в науке и образовании: сборник тезисов докладов международной школы-конференции молодых ученых.—Москва: МИРЭА, 2016.—С. 243–245.
17. *Смирнов Е. И.* Активность и развитие интеллектуальных операций у школьников во взаимодействии физики и математики: Вестник развития науки и образования.—М.: Изд. Дом «Наука образования», 2013.—№ 3.—С. 25–50.
18. *Смирнов, Е. И.* Сложность задач и синергия математического образования / Е. И. Смирнов, С. Ф. Бурухин // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт и инновации: материалы междунар. научно-практ. конф., посвященной 125-летию П. А. Ларичева.—Вологда, 2017.—С. 11–17.
19. *Монахов В. М., Тихомиров С. А.* Системный подход к методическому раскрытию прогностического потенциала образовательных стандартов // Ярославский педагогический вестник. Серия психолого-педагогических наук.—2016.—№ 6.—С. 117–126.
20. *Мандельброт Б. Б.* Фрактальная геометрия природы: Пер. с англ.—М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002.—656 с.
21. *Schwartz H. A.* Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe: Gesammelte Mathematische Abhandlungen.—Berlin, Heidelberg: Springer, 1890.—№ 1.—P. 309–311.
22. *Смирнов Е. И., Уваров А. Д., Смирнов Н. Е.* Компьютерный дизайн нелинейного роста «площадей» нерегулярного цилиндра Шварца // Евразийское научное обозрение.—М., 2017.—Т. 30, № 8.—С. 35–55.
23. *Смирнов Е. И., Богун В. В., Уваров А. Д.* Синергия математического образования: Введение в анализ.—Ярославль: Изд-во Канцлер, 2016.—216 с.
24. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов.—М.: Физматлит, 2001.—Т. 1.—616 с.
25. *Богун В. В.* Обработка форм в рамках динамических Интернет-сайтов: учебное пособие.—Ярославль: РИО ЯГПУ, 2018.—156 с.
26. *Дворяткина С. Н., Смирнов, Е. И.* Оценка синергетических эффектов интеграции знаний и деятельности на основе компьютерного моделирования // Современные информационные технологии и ИТ-образование.—М.: МГУ, 2016.—С. 35–42.

Тезисы докладов

ОПИСАНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАННОГО РОСТА В ОБЛАСТЯХ КАРАТЕОДОРИ[1]

А. В. Абанин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Т. С. Андреева (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех функций, голоморфных в G. С каждой непрерывной функцией $v(z) : G \to \mathbb{R}$ (весом) свяжем банахово пространство

$$H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : \, \|f\|_v := \sup_{z\in G} \frac{|f(z)|}{e^{v(z)}} < \infty \right\}.$$

По убывающей (возрастающей) последовательности весов $V = (v_n)$ образуем проективный (индуктивный) предел $HV(G) := \operatorname{proj} H_{v_n}(G)$ $\big($соответственно, $\mathscr{V}H(G) := \operatorname{ind} H_{v_n}(G)\big)$. В связи с рядом задач представляет интерес исследование вопроса об описании сопряженных с $HV(G)$ и $\mathscr{V}H(G)$, удобном для использования в приложениях. В докладе будут представлены новые, более общие по сравнению с предыдущими, результаты в указанном направлении для случая, когда не требуется выпуклость G и используется преобразование Коши функционалов. Ранее сформулированная задача изучалась для конкретных весовых последовательностей проективного [1] и индуктивного [2, 3] типов пространств.

Основное ограничение на проективную весовую последовательность, используемое в работе, состоит в предположении, что имеется такая положительная функция $\rho(z) < \operatorname{dist}(z, \partial G)$, что для любого $n \in N$ существует $C_n > 0$, при котором

$$\sup_{|\zeta-z|\leqslant d(z)} v_{n+1}(\zeta) + \ln\frac{1}{\rho(z)} \leqslant C_n + \inf_{|\zeta-z|\leqslant d(z)} v_n(\zeta), \quad \forall\, z \in G.$$

Для индуктивной последовательности нужно лишь поменять v_{n+1} и v_n местами. От G требуется, чтобы она была областью Каратеодори.

При этих ограничениях преобразование Коши устанавливает топологический изоморфизм между $HV(G)$ $\big($или $\mathscr{V}H(G)\big)$ и некоторым пространством голоморфных вне $\overline{G}$ функций, исчезающих в бесконечности и продолжимых в $\overline{G}$ как бесконечно дифференцируемые в вещественном смысле функции g с определенной оценкой $\partial g/\partial\bar{z}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-01404.

Литература

1. *Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С.* Квазианалитические классы Карлемана на ограниченных областях // Алгебра и анализ.—2008.—Т. 20, № 2.—С. 178–217.
2. *Варзиев В. А., Мелихов С. Н.* Сопряженном к пространству аналитических функций полиномиального роста вблизи границы // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, № 4.—С. 17–22.
3. *Abanin A. V., Le Hai Khoi.* Cauchy transformation and mutual dualities between $A^{-\infty}(\Omega)$ and $A^{\infty}(C\Omega)$ for Carathéodory domains // Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin.—2016.—Vol. 23.—P. 87–102.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

МНОГОЧЛЕНЫ ФАБЕРА И КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Е. С. Алексеева (Россия, Нижний Новгород; НМО),
А. Э. Рассадин (Россия, Нижний Новгород; НИУ «ВШЭ»)

Многочлены Фабера $\Phi_n(z)$, определенные на компактной односвязной области $\mathbb{D}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, являются весьма интересным объектом теории функций [1].

Будем считать область $\mathbb{D}$ не произвольной, а ограниченной замкнутой фазовой траекторией следующей гамильтоновой системы:

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} + U(x), \tag{1}$$

тогда всякая аналитическая в области $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ разлагается в ряд по многочленам Фабера этой области:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \Phi_n(z), \quad z = x + i\,y \in \mathbb{D}. \tag{2}$$

В статье [2] представлена процедура эффективизации теоремы Римана, которая позволяет выписать явно эти многочлены для любой области $\mathbb{D}$ в терминах ее гармонических моментов Ричардсона, однако для применения на практике эта процедура оказывается слишком громоздкой.

Тем не менее, в случае, когда потенциал $U(x)$ системы (1) слабо отличается от потенциала гармонического осциллятора с единичной циклической частотой, для многочленов Фабера, входящих в ряд (2), можно получить простые асимптотические формулы в рамках теории приближенных конформных отображений внешности областей, близких к единичному кругу, на внешность единичного круга, развитой в монографии [3].

В частности, для таких областей справедлива следующая:

Лемма. *Пусть $\mathbb{D}$ — звездная область с границей, задаваемой в полярных координатах уравнением $r(\theta) = 1 + \varepsilon\,\delta(\theta)$, причем $0 < \varepsilon \ll 1$, тогда для многочленов Фабера этой области верны асимптотические разложения:*

$$\Phi_n(z,\varepsilon) = z^n + \varepsilon\,\Phi_n^{(1)}(z) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\Phi_n^{(1)}(z) = n\,z^n \int_0^{2\pi} \delta(\theta)\,\frac{\exp(i\,\theta) + z}{\exp(i\,\theta) - z}\,\frac{d\theta}{2\,\pi}.$$

Применяя эту лемму к результатам доклада [4], легко доказать, что имеет место:

Теорема. *Асимптотические разложения многочленов Фабера для области, ограниченной фазовой траекторией системы* (1) *с потенциалом* $U(x) = x^2/2 + \varepsilon\, x^4/4$, $0 < \varepsilon \ll 1$, *проходящей через точку* $x = a$ $(a > 0)$ *и* $y = 0$, *имеют вид:*

$$\Phi_n(z,\varepsilon) = \left(\frac{z}{a}\right)^n + \frac{\varepsilon\, a^2}{32}\, n \left(\frac{z}{a}\right)^n \left[5 - 4\left(\frac{z}{a}\right)^2 - \left(\frac{z}{a}\right)^4\right] + O(\varepsilon^2).$$

Полученные результаты могут быть полезны для выявления скрытых связей между комплексной и симплектической структурой, которые можно ввести на вещественной двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$. Указания на необходимость поиска таких связей имеются еще в основополагающей для квантовой электродинамики статье [5].

В заключение авторы благодарят д. ф.-м. н. Н. Н. Шамарова за ссылку на работу [5].

Литература

1. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера.—М.: Наука, 1984.—52 с.
2. *Натанзон С. М.* Формальный ряд для τ-функции, реализующей теорему Римана об областях комплексной плоскости // Успехи мат. наук.—2001.—Т. 56, № 4 (340).—С. 155–156.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.—М.: Наука, 1987.—350 с.
4. *Alekseeva E. S.* Approximate conformal mapping for domain shaped by phase trajectory of the Duffing equation on unit disk // School-Conference “Mathematical Spring — 2020. Invitation to Dynamical Systems” (Russia, Nizhny Novgorod, Higher School of Economics, February 17–21, 2020). Book of abstracts.—P. 4–5.
5. *Dirac P. A. M.* The quantum theory of the emission and absorption of radiation // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character.—1927.—Vol. 114.—P. 243–265.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ[1]

С. Н. Асхабов

(Россия, Грозный; ЧГПУ, ЧГУ)

Объектом исследования в данной работе является уравнение

$$u^{\alpha}(x) = a(x)\int\limits_0^x k(x-t)u'(t)\,dt + f(x), \quad x>0,\ \alpha>1, \tag{1}$$

где заданные функции $k(x)$, $a(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям:

$$k\in C^1[0,\infty),\ k'(x) \text{ не убывает на } [0,\infty),\ k(0)=0 \text{ и } k'(0)>0, \tag{2}$$

$$a\in C^1[0,\infty),\ a(x) \text{ не убывает на } [0,\infty) \text{ и } a(x)>0 \text{ при } x>0, \tag{3}$$

$$f\in C^1[0,\infty),\ f(x) \text{ не убывает на } [0,\infty) \text{ и } f(0)=0. \tag{4}$$

Решения уравнения (1) разыскиваются в классе:

$$Q_0^1 = \left\{u(x):\ u\in C^1(0,\infty),\ u(0)=0 \text{ и } u(x)>0 \text{ при } x>0\right\}.$$

Наряду с уравнением (1) рассматривается уравнение

$$u^{\alpha}(x) = a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt + f(x), \quad x>0,\ \alpha>1, \tag{5}$$

в конусе $Q_0=\{u(x):\ u\in C[0,\infty),\ u(0)=0 \text{ и } u(x)>0 \text{ при } x>0\}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2)–(4). *Если $u\in Q_0^1$ является решением уравнения* (1)*, то $u\in Q_0$ и является решением уравнения* (5)*. Обратно, если уравнение* (5) *имеет решение $u\in Q_0$, то $u\in Q_0^1$ и является решением уравнения* (1).

Предполагая дополнительно $g(0)=0$, где $g(x)=f(x)/a(x)$, доказывается, что если $u\in Q_0$ является решением интегрального уравнения (5), то $u(x)$ удовлетворяет неравенствам:

$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}k'(0)\right)^{1/(\alpha-1)} a^{1/\alpha}(x)\left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{1/(\alpha-1)} \leqslant u(x) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} a^{1/\alpha}(x)\left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)k'(t)\,dt + g^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-41-200001, и публикуется в рамках выполнения государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611, по проекту «Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи».

Используя эти априорные оценки и теорему 1, методом весовых метрик доказывается, что уравнение (1) имеет единственное решение как в конусе Q_0^1, так и в некотором полном метрическом пространстве P_b и (основной результат) может быть найдено в P_b методом последовательных приближений со сходимостью по метрике этого пространства. В частном, существенно более простом для исследования случае $a(x) = 1$, эти результаты подробно изложены в [1].

Следует отметить, что в связи с различными приложениями в гидроаэродинамике, популяционной генетике и других, уравнение (5) изучалось в работах [2–5].

Литература

1. *Асхабов С. Н.* Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференц. уравнения.—2020.— Т. 56, № 6.—С. 786–795.
2. *Okrasinski W.* On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain nonlinear convolution equation // Annal. Polon. Math.—1979.—Vol. 36, № 1.—P. 61–72.
3. *Асхабов С. Н., Бетилгириев М. А.* Нелинейные нтегральные уравнения типа свертки с почти возрастающими ядрами в конусах // Дифференц. уравнения.—1991.—Т. 27, № 2.—С. 321–330.
4. *Askhabov S. N., Betilgiriev M. A.* A-priori estimates for the solutions of a class of nonlinear convolution equations // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen.—1991.—Vol. 10, № 2.—P. 201–204.
5. *Karapetiants N. K., Kilbas A. A., Saigo M., Samko S. G.* Upper and lower bounds for solutions of nonlinear Volterra convolution integral equations with power nonlinearity // J. of Integr. Equat. and Appl.—2001.—Vol. 12, № 4.—P. 421–448.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАМЯТИ В ВЯЗКОУПРГИХ СРЕДАХ

З. А. Ахматов
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

При математическом моделировании волновых процессов в различных областях естествознания встречаются системы «с памятью», поведение которых не определяется целиком состоянием в настоящий момент, а зависит от всей предыстории процесса и поэтому описывается интегро-дифференциальным уравнением, содержащим соответствующий интеграл по временной переменной. Одномерная обратная задача об определении ядра (функции памяти) $k(t)$, $t \in [0, T]$, интегро-дифференциального уравнения была рассмотрена в [1]. Результаты этого исследования — теорема глобальной однозначной разрешимости и оценка устойчивости решения обратной задачи. Целью данной работы является численная реализация замкнутой системы нелинейных интегральных уравнений, полученных в результате аналитического решения обратной задачи для уравнения вязкоупругости [1]. Полученную систему интегральных уравнений можно записать в виде операторного уравнения

$$\varphi = A\varphi, \tag{1}$$

где $\varphi = [\varphi_1(y,t), \varphi_2(y,t), \varphi_3(t), \varphi_4(t), \varphi_5(t), \varphi_6(t)]$. Компоненты φ_i $(i = 1,2,3,4,5,6)$ представляют собой функции, связанные с решениями прямой и обратной задач, в частности, искомое ядро входит в

$$\varphi_4(t) = k(t)\exp(r(0)t/2), \quad r(t) = -k(t) - \int_0^t k(t-\tau)r(\tau)\,d\tau.$$

Нелинейный оператор A определен на множестве функций $\varphi \in C[D_T]$, $D_T = ((y,t) :\ 0 \leqslant y \leqslant t \leqslant T - y)$.

Система (1) служит основой для численной реализации алгоритма определения значений функции памяти (или релаксационной функции). Численная реализация системы нелинейных интегральных уравнений, к которой сводится задача определения ядра уравнения вязкоупругости, основывается на методике численного решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода, предложенной в монографии [2, гл. 5]. В области D_T вводится равномерная сетка с шагом $h = T/(2N)$, N — количество точек разбиения отрезка $[0, T/2]$. Интегралы вычисляются с помощью квадратурных формул прямоугольников, а сами интегральные уравнения после введения равномерной сетки превращаются в рекуррентные формулы.

Алгоритм реализован с помощью пакета прикладных программ Си++.

Результаты численного решения позволили в явном виде получить график релаксационной функции. Более того, выявлены зависимости поведения искомой функции от различных входных данных, которыми являются параметры Ламэ, плотность среды, а также дополнительная информация о решении прямой задачи — функция отклика смещения на заданной импульсное воздействие $g(t)$ (функция $\varphi_1(y,t)$ при $y=0$).

Для проверки работы алгоритма задавалась функция $k(t)$ и насчитывались значения информации $g(t)$ по квадратурным формулам применительно к системе (1). В насчитанные значения вводилась случайная аддитивная ошибка:

$$\tilde{g}(t_i) = g(t_i) + (\theta_i - 1/2) \cdot 2\varepsilon\bar{g}/100, \quad i = 1, 2, \ldots, 2N,$$

где $\bar{g}$ — среднее значение функции $g(t)$ на отрезке $[0,T]$; ε — уровень погрешности в процентах; θ_i — случайно распределенная на отрезке $[0,1]$ величина.

На основании численных экспериментов можно сделать вывод о том, что алгоритм устойчиво работает при определении значений $k(t)$ с уровнем случайной ошибки, вносимой в информацию, до $\varepsilon = 10\%$.

Литература

1. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. матем.—2013.—Т. 16, № 2.—С. 72–82.
2. *Яхно В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости.—Новосибирск: Наука, 1990.—304 с.

КРАЙНИЕ ТОЧКИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ ОДНОРОДНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

А. В. Багаева (Россия, Владикавказ; СОГУ),
М. М. Кокашвили (Россия, Владикавказ; СОГУ),
З. А. Кусраева (Россия, Ростов-на-Дону, РНОМЦ ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

В работе [1] предложен подход к изучения экстремальной структуры выпуклых множеств линейных операторов на основе теории векторных решеток. Цель настоящей работы — показать, что этот подход можно распространить в духе [2] на однородные полиномы, действующих в векторных решетках, используя линеаризацию посредством тензорного произведения Фремлина.

Всюду ниже E — архимедова векторная решетка. Используются обозначения и терминология из [3]. В частности, $\mathscr{P}^r({}^nE, F)$ обозначает пространство всех n-однородных регулярных полиномов из E в F, а $\mathscr{P}^+({}^nE, F)$ — положительный конус в нем; при этом $\mathscr{P}^r({}^1E, F)$ — пространство линейных регулярных операторов, обозначаемое через $\mathscr{L}^r(E, F)$. Символом $\bigotimes_{n,s} E$ обозначается n-кратное алгебраическое симметричное тензорное произведение векторной решетки E.

Определение 1. Однородный полином $P : E \to F$ степени n называют *решеточным n-полиморфизмом*, если ассоциированный с ним полилинейный оператор $\check{P} : E^n \to F$ является решеточным n-морфизмом.

Это равносильно тому, что P ортогонально аддитивен ($|x| \wedge |y| = 0$ влечет $P(x+y) = P(x)+P(y)$) и $P(x) \wedge P(y) = 0$, если $x \wedge y = 0$. Еще одно равносильное условие гласит, что P сохраняет точные границы конечных множеств. Подробнее о строении решеточных полиморфизмов см. в [4].

Теорема 1. *Для векторной решетки E существует единственная с точностью до решеточного изоморфизма векторная решетка $\bar{E}$ такая, что:*

(1) существует решеточный n-полиморфизм $\theta_n : E \to \bar{E}$, индуцирующий вложение $\bigotimes_{n,s} E$ в $\bar{E}$;

(2) для любой архимедовой векторной решетки F и любого n-однородного решеточного полиморфизма $P : E \to F$ существует единственный решеточный гомоморфизм $\bar{P} : \bar{E} \to F$, обеспечивающий факторизацию $P = \bar{P} \circ \theta_n$.

Определение 2. Векторную решетку $\bar{E}$ из теоремы 1 обозначают символом $\bar{\bigotimes}_{n,s} E$, а пару $\big(\bar{\bigotimes}_{n,s} E, \theta\big)$ называют *n-кратным фремлиновским симметричным тензорным произведением E*.

Теорема 2. *Если E — порядково полная векторная решетка, то $\mathscr{P}^r({}^nE, F)$ также порядково полная векторная решетка и отображение $T \mapsto T \circ \theta_n$ служит решеточным изоморфизмом из $\mathscr{L}^r\big(\bar{\bigotimes}_{n,s} E, F\big)$ на $\mathscr{P}^r({}^nE, F)$.*

Определение 3. Рассмотрим множество $\mathscr{U}$ содержащееся в $\mathscr{P}^r({}^nE, F)$. Говорят, что *$\mathscr{U}$ слабо (порядково) ограничено*, если множество $\{U(x) : U \in \mathscr{U}\}$

порядково ограничено в F для всех $x \in E$; *поточечно o-замкнуто*, если для любой сети (T_i) в $\mathscr{U}$ и любого полинома $P \in \mathscr{P}^r({}^nE, F)$ из o-сходимости сети $(P_i x)$ к Tx для всех $x \in E$ следует $T \in \mathscr{U}$; *операторно выпукло* (или, точнее, $\mathrm{Orth}(F)$-*выпукло*), если $\alpha\mathscr{U} + \beta\mathscr{U} \subset \mathscr{U}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathrm{Orth}(F)_+$ таких, что $\alpha + \beta = I_F$. (Здесь $\mathrm{Orth}(F)$ — множество всех ортоморфизмов в F).

Определение 4. *Сублинейным оператором* называют отображение $\varphi : E \to F$, если $\varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$ и $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ для всех $x, y \in E$ и $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}$. Сублинейный оператор $\varphi : E \to F$ называют *решеточным субморфизмом*, если $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$ для всех $x, y \in E$. Совокупность всех линейных операторов из E в F, мажорируемых оператором φ, принято называть *опорным множеством* φ и обозначать символом $\partial\varphi$:

$$\partial\varphi := \{T \in L(, F) : \ (\forall x \in E)\, Tx \leqslant \varphi(x)\}.$$

Следующий результат является основным. Используются обозначения: $\mathscr{U} \circ \theta_n := \{S \circ \theta_n : \ S \in \mathscr{U}\}$; $\mathrm{ext}(\mathscr{U})$ — совокупность всех крайних точек множества $\mathscr{U}$; $l^\infty(\mathscr{U}, F)$ — векторная решетка всех порядково ограниченных отображений из $\mathscr{U}$ в F; $\varepsilon_{\mathscr{U}} : l^\infty(\mathscr{U}, F) \to F$ — сублинейный оператор, действующий по правилу $f \mapsto \sup_{v \in \mathscr{U}} f(v)$. Легко видеть, что $\varepsilon_{\mathscr{U}}$ — решеточный субморфизм.

Теорема 3. *Пусть E и F — векторные решетки, причем F порядково полна. Для слабо порядково ограниченного множества полиномов $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}^+({}^nE, F)$ равносильны следующие утверждения:*

(1) *существует возрастающий решеточный субморфизм $\varphi : \bar{\bigotimes}_{n,s} E \to F$ такой, что $\mathscr{U} = (\partial\varphi) \circ \theta_n$;*

(2) *$\mathscr{U}$ операторно выпукло, поточечно o-замкнуто и если $A + B \in \mathscr{U}$ для некоторых $A, B \in \mathscr{P}^+({}^nE, F)$, то существуют $\alpha, \beta \in Orth^+(F)$ такие, что $\alpha + \beta = I_F$, $A \in \alpha\mathscr{U}$ и $B \in \beta\mathscr{U}$;*

(3) *$\mathscr{U}$ операторно выпукло, поточечно o-замкнуто и крайние точки $\mathscr{U}$ являются решеточными n-полиморфизмами;*

(4) *$\mathscr{U}$ допускает факторизацию $\mathscr{U} = \partial(\varepsilon_{\mathrm{ext}(\mathscr{U})}) \circ T \circ \theta_n$, где T — решеточный гомоморфизм из $\bar{\bigotimes}_{n,s} E$ в $l^\infty(\mathrm{ext}(\mathscr{U}), F)$.*

Литература

1. *Кутателадзе С. С.* Теорема Крейна — Мильмана и ее обращение // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 1.—С. 130–138.
2. *Кусраев А. Г.* Экстремальное строение выпуклых множеств полилинейных операторов // Сиб. мат. журн.—2020.—Т. 61, № 5.—С. 1042–1059.
3. *Bu Q., Buskes G.* Polynomials on Banach lattices and positive tensor products // J. Math. Anal. Appl.—2012.—Vol. 388.—P. 845–862.
4. *Кусраева З. А.* Характеризация и мультипликативное представление однородных полиномов, сохраняющих дизъюнктность // Сиб. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 1.—С. 51–62.

EXTREMAL STRUCTURE OF CONES OF POSITIVE MULTILINEAR OPERATORS

A. V. Bagaeva (Ruusia, Vladikavkaz; NOSU),
M. M. Kokashvili (Ruusia, Vladikavkaz; NOSU),
Z. A. Kusraeve (Ruusia, Rostov-on-Don, RMC SFEDU; Vladikavkaz, SMI VSC RAS)

An element $x \in E_+$ of a Banach lattice E is called an *atom* if the order interval $[0,x] = \{y \in E : \ 0 \leqslant y \leqslant x\}$ contains only multiples of x or, what is the same, the order ideal in E generated by x is one-dimensional. Denote by $\mathscr{E}(E_+)$ the set of all atoms of E_+. Recall that if $f \in E'_+$ is an atom if and only if f is a lattice homomorphism, see [1, Theorem II.4.4]. Let $\mathscr{L}(E,F)$ stand for the space of bounded linear operators from E into F with the cone of positive operators $\mathscr{L}(E,F)_+$, and also use $\mathscr{H}(E,F)$ to denote the collection of lattice homomorphisms from E into F.

In [2], Wickstead raised the question of when $\mathscr{L}(E,F)_+$ is the closed convex hull of the set of lattice homomorphisms for the strong operator topology. For the following result see [2, Theorem 5.1].

Theorem 1. *The following conditions on a Banach lattice E are equivalent:*

(1) *E'_+ is a weak* closed convex hull of $\mathscr{E}(E'_+)$.*

(2) *$\mathscr{L}(E,F)_+$ is a strongly closed convex hull of $\mathscr{H}(E,F)$ for all Banach lattices F.*

In this note, we announce a similar results in the multilinear setting.

Definition 1. Say that an n-linear operator $T : E_1 \times \dots \times E_n \to F$ is *positive* and write $T \geqslant 0$ if $T(x_1,\dots,x_n) \geqslant 0$ for all $0 \leqslant x_1 \in E_1,\dots,0 \leqslant x_n \in E_n$; T is said to be *lattice multimorphism* or *lattice n-morphism* $|T(x_1,\dots,x_n)| = T(|x_1|,\dots,|x_n|)$ for all $x_1 \in E_1,\dots,x_n \in E_n$. The cone of positive n-linear operators (resp. lattice n-morphisms) from $E_1 \times \ldots \times E_n$ to F is denoted by $\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)_+$ (resp. $\mathscr{H}(E_1,\dots,E_n;F)$).

A remarkable tool for studying positive multilinear operators is the *Fremlin tensor product* $E_1 \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} E_n$ of Archimedean vector lattices $E_1,\dots,E_n$, see [3]. If $E_1,\dots E_n$ are Banach lattices, then we can define the *positive-projective norm* $\|\cdot\|_{|\pi|}$ on $E_1 \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} E_n$ by means of

$$\|u\|_{|\pi|} = \inf\left\{ \sum_{i\leqslant m}\prod_{k\leqslant n} \|x_{i,k}\| : \ 0 \leqslant x_{i,k} \in E_k, \ |u| \leqslant \sum_{i\leqslant m} x_{i,1}\otimes\dots\otimes x_{i,n} \right\}.$$

Definition 2. *Positive-projective tensor product* $E_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} E_n$ is a Banach space defined as the completion of $E_1 \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} E_n$ with respect to the norm $\|\cdot\|_{|\pi|}$.

Now, one can prove the following *linearization* result: For any Banach lattice F there is a one-to-one norm and order preserving correspondence between continuous positive n-linear operators $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ and continuous positive linear operators $T^{\otimes} : E_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} E_n \to F$ with $T^{\otimes} \circ \otimes = T$, see [3, 4].

Example. Recall that any vector lattice F has a *universal completion* F^u, so that F can be identified with an order dense vector sublattice of F^u. Moreover, for any weak order unit $\mathbf{1} \in F^u$ there exists a unique multiplication $(x, y) \mapsto x * y$ in F^u such that $(F^u, \odot)$ is an f-algebra and $\mathbf{1}$ is a ring unit.

An example of the disjointness preserving multilinear operator can be constructed as follows. Let $F_1, \ldots, F_n$ be vector sublattices of F^u. Given a finite collection of positive linear operators $T_k : E_k \to F_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, one can construct a disjointness preserving multilinear operator T from $E_1 \times \cdots \times E_n$ to F^u by putting

$$T(x_1, \ldots, x_n) = T(x_1) * \cdots * T(x_n) \quad (x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n).$$

In this event, we denote $T = T_1 \circledast \cdots \circledast T_n$. A factorization result (Theorem 6) in [5] asserts that each lattice n-morphism from the Cartesian product of vector lattice into an arbitrary vector lattice has a similar structure.

Putting together these facts about factorization and linearization together with Theorem 1, we arrive at the following result. We denote $F_1 * \ldots * F_n = \{f_1 * \cdots * f_n : f_k \in F_k \ (k = 1, \ldots, n)\}$ and $\mathscr{U}_1 \circledast \cdots \circledast \mathscr{U}_n = \{T_1 \circledast \cdots \circledast T_n : \ T_k \in \mathscr{U}_k\}$, where $\mathscr{U}_k \subset \mathscr{L}(E_k, F_k)$.

Theorem 2. *For a finite collection of Banach lattices $E_1, \ldots, E_n$, the following conditions are equivalent:*

(1) *$(E_k')_+$ is the weak* closed convex hull of $\mathscr{E}((E_k')_+)$ for all $k = 1, \ldots, n$.*

(2) *For each Banach lattice F, the cone $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)_+$ is the strongly closed convex hull of the union of sets of the form $\mathscr{H}(E_1, F_1) \circledast \ldots \circledast \mathscr{H}(E_n; F_n)$ with $F_1, \ldots, F_n$ Banach sublattices of F^u satisfying $F_1 * \ldots * F_n \subset F$.*

Remark. It may happen that the assertion (2) in Theorem 2 holds for a Banach lattice F, whilst $\mathscr{E}((E_k')_+)$ is trivial for some $k \leqslant n$, see [2, Example 5.2].

References

1. *Schaefer H. H.* Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.
2. *Wickstead A. W.* Extremal structure of cones of operators // Quart. J. Math. Oxford. Ser. 2.—1981.—Vol. 32, № 126.—P. 239–253.
3. *Fremlin D. H.* Tensor products of Banach lattices // Math. Ann.—1974.—Vol. 211.—P. 87–106.
4. *Schep A. R.* Factorization of positive multilinear maps // Illinois J. Math.—1984.—Vol. 28 (4).—P. 579–591.
5. *Kusraev A. G., Kusraeva, Z. A.* Factorization of order bounded disjointness preserving multilinear operators // Modern Methods in Operator Theory and Harmonic Analysis: OTHA 2018, Rostov-on-Don, Russia, April 22–27.—2019.—P. 217–236.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

ОПТИМАЛЬНОЕ СТАРТОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВУМЕРНЫМ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИМ ТЕЧЕНИЕМ

Е. С. Барановский
(Россия, Воронеж; ВГУ)

Рассматривается задача оптимального стартового управления для системы уравнений Буссинеска, описывающей неизотермическое течение вязкой жидкости в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} - \nu \Delta \boldsymbol{v} + \nabla p = \boldsymbol{f}(x, y, t, \theta) \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, t_M), \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, t_M), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} - k \Delta \theta = h \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, t_M), \tag{3}$$

$$2\nu [\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\mathbf{n}]_\tau = -\alpha \boldsymbol{v}_\tau, \quad \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad k \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = -\beta \theta \quad \text{в} \quad \partial\Omega \times (0, t_M), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{v}(x, y, 0) = \boldsymbol{u}(x, y), \quad \theta(x, y, 0) = \zeta(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{5}$$

$$(\boldsymbol{u}, \zeta) \in \mathscr{U}_1 \times \mathscr{U}_2, \tag{6}$$

$$\sum_{i=0}^{M} \mu_i \left(\lambda_i \big\| \boldsymbol{v}(\cdot, t_i) - \widehat{\boldsymbol{v}}_i(\cdot) \big\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + (1 - \lambda_i) \big\| \theta(\cdot, t_i) - \widehat{\theta}_i(\cdot) \big\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \to \min, \tag{7}$$

где x, y — пространственные координаты; t — время; $t_0, t_1, \ldots, t_M$ — заданные моменты времени, причем $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M$; $\partial\Omega$ обозначает границу области Ω; $\boldsymbol{v}$ — скорость движения жидкости; $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$ — тензор скоростей деформации, θ — температура; p — давление; $\boldsymbol{f}$ — поле внешних сил; h — интенсивность тепловых источников; $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$; ν — коэффициент вязкости; β — коэффициент теплоотдачи на $\partial\Omega$; α — коэффициент скольжения; k — коэффициент теплопроводности, $\boldsymbol{u}$ и ζ — распределение скоростей и температуры в начальный момент времени (управляющие функции); $\widehat{\boldsymbol{v}}_i$ и $\widehat{\theta}_i$ — заданные функции; $\mathscr{U}_1 \times \mathscr{U}_1$ — множество допустимых управлений; $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_M$ и $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_M$ — числовые параметры, причем $0 < \lambda_i < 1$, $0 \leqslant \mu_i \leqslant 1$ для каждого $i \in \{0, 1, \ldots, M\}$ и $\sum_{i=0}^{M} \mu_i = 1$.

Введем обозначения:

$$\mathscr{W}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{C}^\infty(\overline{\Omega}) : \ \nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0 \text{ в } \Omega, \ \boldsymbol{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega \right\},$$

$$\boldsymbol{L}^2_{\sigma,\tau}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \text{замыкание множества } \mathscr{W}(\Omega) \text{ в } \boldsymbol{L}^2(\Omega),$$

$$\boldsymbol{H}^1_{\sigma,\tau}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \text{замыкание множества } \mathscr{W}(\Omega) \text{ в } \boldsymbol{H}^1(\Omega).$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

(i) $\partial\Omega \in \mathscr{C}^{0,1}$, $\widehat{\boldsymbol{v}}_i \in \boldsymbol{L}^2_{\sigma,\tau}(\Omega)$, $\widehat{\theta}_i \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(0, t_M; L^2(\Omega))$;

(ii) векторная функция $\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot,\varrho)\colon \Omega \times (0, t_M) \to \mathbb{R}^2$ принадлежит пространству Лебега $\boldsymbol{L}^2(\Omega \times (0, t_M))$ при любом $\varrho \in \mathbb{R}$;

(iii) векторная функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}, t, \cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ непрерывна при п.в. $(\boldsymbol{r}, t) \in \Omega \times (0, t_M)$;

(iv) $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}, t, \varrho_1) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}, t, \varrho_2)| \leqslant K|\varrho_1 - \varrho_2|$ для любых $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$ и п.в. $(\boldsymbol{r}, t) \in \Omega \times (0, t_M)$ с некоторой постоянной $K \geqslant 0$;

(v) множество допустимых управлений $\mathscr{U}_1$ секвенциально слабо замкнуто и ограничено в пространстве $\boldsymbol{H}^1_{\sigma,\tau}(\Omega)$;

(vi) множество допустимых управлений $\mathscr{U}_2$ секвенциально слабо замкнуто и ограничено в пространстве $H^1(\Omega)$.

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема. *При выполнении* (i)–(vi) *в модели* (1)–(7) *существует по крайней мере одно оптимальное управление. Если при этом $\mu_0 > 0$, $K = 0$ и множество $\mathscr{U}_1$ состоит из единственного элемента, а множество $\mathscr{U}_2$ выпукло, то оптимальное управление единственно.*

Замечание. Точная управляемость уравнений Буссинеска изучается в [1]. Задачи оптимизации для моделей стационарных неизотермических течений вязкой жидкости рассматриваются в [2–4].

Литература

1. *Фурсиков А. В., Эмануилов Ю. С.* Точная управляемость уравнений Навье — Стокса и Буссинеска // Успехи мат. наук.—1999.—Т. 54, № 3.—С. 93–146.
2. *Алексеев Г. В.* Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции // Сиб. мат. журн.—1998.—Т. 39, № 5.—С. 982–998.
3. *Mallea-Zepeda E., Lenes E., Valero E.* Boundary control problem for heat convection equations with slip boundary condition // Mathematical Problems in Engineering.—2018.—Vol. 2018.—Article ID 7959761.
4. *Baranovskii E. S., Domnich A. A., Artemov M. A.* Optimal boundary control of non-isothermal viscous fluid flow // Fluids.—2019.—Vol. 4, № 3.—Article ID 133.

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ПОЛИНОМОВ, ПОРОЖДЕННОЙ СИСТЕМОЙ ПОЛИНОМОВ ЛАГЕРРА[1]

Р. М. Гаджимирзаев
(Россия, Махачкала; ДФИЦ РАН)

Пусть $\alpha > -1$, $\rho(x) = e^{-x}x^{\alpha}$ — весовая функция, $1 \leqslant p < \infty$, L^p_ρ — пространство измеримых функций f, определенных на полуоси $[0, \infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{L^p_\rho} = \left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^p \rho(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$W^r_{L^p_\rho}$ — пространство функций f, непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз, для которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a, b] \subset [0, \infty)$, а $f^{(r)} \in L^p_\rho$. В пространстве $W^r_{L^2_\rho}$ определим скалярное произведение типа Соболева

$$\langle f, g \rangle_S = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0) g^{(\nu)}(0) + \int\limits_0^\infty f^{(r)}(x) g^{(r)}(x) \rho(x)\, dx, \tag{1}$$

которое превращает $W^r_{L^2_\rho}$ в гильбертово пространство.

В работе [1] для заданного $r \in \mathbb{N}$ была введена система полиномов

$$l^\alpha_{r,r+n}(x) = \frac{1}{(r-1)!\sqrt{h^\alpha_n}} \int\limits_0^x (x-t)^{r-1} L^\alpha_n(t)\, dt, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$l^\alpha_{r,n}(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots, r-1,$$

ортонормированная при $\alpha > -1$ относительно скалярного произведения (1) и порожденная системой полиномов Лагерра $\{L^\alpha_n(x)\}_{n=0}^\infty$. В работах [2–3] были исследованы свойства этой системы, такие как полнота и ортонормированность в $W^r_{L^2_\rho}$, явное представление, рекуррентные соотношения, представление через полиномы Лагерра. Кроме того, в работе [3] было показано, что ряд Фурье функции $f \in W^r_{L^2_\rho}$ по системе $\{l^\alpha_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ имеет следующий вид:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^\infty c^\alpha_{r,k}(f) l^\alpha_{r,k}(x), \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00477 мол_а.

где

$$c^{\alpha}_{r,k}(f) = \frac{1}{\sqrt{h^{\alpha}_{k-r}}} \int\limits_0^{\infty} f^{(r)}(t) L^{\alpha}_{k-r}(t)\rho(t)\, dt, \quad k = r, r+1, \ldots$$

В той же работе была доказана следующая

Теорема A. *Пусть $-1 < \alpha < 1$, $f \in W^r_{L^2_\rho}$, $0 \leqslant A < \infty$. Тогда для произвольного $x \in [0,\infty)$ имеет место равенство*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} c^{\alpha}_{r,k}(f) l^{\alpha}_{r,k}(x),$$

в котором ряд Фурье функции f по полиномам $l^{\alpha}_{r,k}(x)$ сходится равномерно относительно $x \in [0, A]$.

Отметим, что ряд Фурье по системе $\{l^{\alpha}_{r,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ можно определить для любой функции $f \in W^r_{L^p_\rho}$, $p \geqslant 1$. В связи с этим возникает вопрос о том, справедливо ли утверждение теоремы **A** для случая $p \neq 2$. Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть $-1 < \alpha < 1$, $1 \leqslant p < \infty$, $\rho(x) = e^{-x}x^{\alpha}$. Тогда, если $f \in W^r_{L^p_\rho}$, то при $p \geqslant 2$ ряд (2) сходится равномерно к f на любом отрезке $[0, A]$. Если же $1 \leqslant p < 2$, то существует функция $f \in W^r_{L^p_\rho}$, ряд Фурье которой расходится в точке $x = \pi^2$.*

Литература

1. *Шарапудинов И. И., Гаджиева З. Д., Гаджимирзаев Р. М.* Системы функций, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева с дискретными массами, порожденных классическими ортогональными системами // Дагестан. электрон. мат. изв.—2016.—Вып. 6.—С. 31–60.
2. *Шарапудинов И. И., Магомед-Касумов М. Г.* О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порождённым многочленами Лагерра // Дифференц. уравнения.—2018.—Т. 54, № 1.—С. 51–68.
3. *Гаджимирзаев Р. М.* Рекуррентные соотношения для полиномов, ортонормированных по Соболеву, порожденных полиномами Лагерра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2018.—Т. 18, № 1.—С. 17–24.

ФУНКЦИЯ ГРИНА ВНУТРЕННЕКРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

Л. Х. Гадзова

(Россия, Нальчик; ИПМА КБНЦ РАН)

В интервале $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \, \partial_{0x}^{\alpha_j} \, u(x) + \lambda u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\alpha_j \in]1,2[$, $\lambda, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\beta_1 > 0$, $\alpha_1 > \ldots > \alpha_m$, $\partial_{0x}^{\gamma} u(x)$ — оператор Герасимова — Капуто [1, с. 11]:

$$\partial_{0x}^{\gamma} u(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int\limits_0^x u^{(n)}(t)(x-t)^{n-\gamma-1}\, dt, \qquad n-1 < \gamma \leqslant n.$$

В данной работе исследуется задача: найти регулярное решение уравнения (1) в интервале $]0,1[$, удовлетворяющее условиям

$$u(0) = u_0, \quad u(1) - \sum_{k=1}^{n} a_k u(x_k) = u_1, \quad x_k \in (0,1),$$

где a_k, u_0, u_1 — заданные постоянные.

Доказана теорема существования и единственности решения и построена функция Грина исследуемой задачи.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

В. И. Гишларкаев (Россия, Грозный; ЧГУ),
А. А. Товсултанов (Россия, Грозный; ЧГУ)

Стандартная схема применения преобразования Фурье позволяет выписать решения задачи Коши в случае уравнений $\partial_t^k u(t,x) + \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha \partial_x^\alpha u(t,x) = f(t,x)$. В [1] для уравнений вида

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{|\alpha|\leqslant m} \varepsilon_\alpha a_\alpha(t) \partial_x^\alpha u(t,x) = 0, \tag{1}$$

где множители ε_α совпадают или с 1 или с одной из пространственных переменных, приводится интегральное представление решений, получаемое некоторой модификацией этой стандартной схемы.

Выведем аналогичные формулы для задач вида

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(t,x) \partial_x^\alpha u(t,x) = f(t,x), \quad u|_{t=0} = u_0(x) \in S(\mathbb{R}^n),$$

где $S(\mathbb{R}^n)$ — пространство Шварца быстро убывающих функций. Введем пространство коэффициентов

$$C_F^A(\mathbb{R}^n) := \Big\{ \Phi\Big|_{\mathbb{R}^n} \,\Big|\, \Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \text{ — целая функция} : (\operatorname{Im} \Phi(x) = 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n) \wedge \\ \wedge \Big(\exists\, c = c(\Phi),\, r \in \mathbb{R} : \ |\Phi(z)| < c e^{r|\operatorname{Im} z|} \ \forall\, z \in \mathbb{C}^n\Big) \Big\}.$$

Теорема 1. *Пусть $u_0 \in S(\mathbb{R}^n)$, $a_\alpha(t) \in C(0,T)$, $b_\alpha(x) \in C_F^A(\mathbb{R}^n)$. Тогда задача*

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(t) b_\alpha(x) \partial_x^\alpha u(t,x) = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

имеет единственное в $S(\mathbb{R}^n)$ решение и это решение представляется в виде

$$u(t,\xi) = F_{\xi\to x}\Bigg(\sum_{|\alpha|=2} e^{\int_0^t a_\alpha(\tau) d\tau A_\alpha} \breve{u}_0(\xi) \Bigg), \tag{3}$$

[1]Работа второго автора публикуется в рамках выполнения государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611 и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-41-200001.

где $(A_\alpha g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n_\zeta} \breve{b}_\alpha(\xi - \zeta)\zeta^\alpha g(\zeta)\, d\zeta$ *— оператор на* $L_2(\mathbb{R}^n)$*, символ «перевернутая крышка» означает взятие обратного преобразования Фурье, а* $F_{\xi\to x}$ *— прямое преобразование Фурье в смысле* [1].

Схема доказательства. Применив обратное преобразование Фурье к задаче (2), получим

$$\partial_t \breve{u}(t,\xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(t)(A_\alpha \breve{u})(t,\xi), \quad \breve{u}(t,\xi)|_{t=0} = \breve{u}_0(\xi) \in S(\mathbb{R}^n). \tag{4}$$

Доказывается, что $A_\alpha\left(S(\mathbb{R}^n)\right) \subset S(\mathbb{R}^n)$, $A_\alpha : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ линеен и непрерывен. Далее, пользуясь теорией дифференциальных уравнений, решаем задачу (4), откуда, применив преобразование Фурье, получим (3).

Теорема 2. *Пусть* $u_0 \in S(\mathbb{R}^n)$, $a_\alpha(t) \in C(0,T)$, $b_\alpha(x) \in C^A_F(\mathbb{R}^n)$, $f(t,x) \in C\left([0,T]; S(\mathbb{R}^n)\right)$*. Тогда задача*

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{k=0}^{m} \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(t) b_\alpha(x) \partial_x^\alpha u(t,x) = f(t,x), \quad u|_{t=0} = u_0(x),$$

имеет единственное в $S(\mathbb{R}^n)$ *решение, и это решение представляется в виде*

$$u(t,\xi) = F_{\xi\to x}\left(\sum_{k=0}^{m} \sum_{|\alpha|=2k} \left(e^{\int_0^t a_\alpha(\tau)d\tau A_\alpha} \breve{u}_0(\xi) + \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A_\alpha} \breve{f}(\tau,\xi)\, d\tau \right) \right).$$

Заметим, что уравнения типа (1) возникают во многих прикладных вопросах (см., например, [2]).

Литература

1. *Гишларкаев В. И.* Об одном способе представления решений задачи Коши для линейных уравнений в частных производных // Мат. сб.—2018.—Т. 209, № 2.—С. 82–101.
2. *Полянин А. Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики.—М.: Физматлит, 2001.—576 с.

ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЫНКА ПРОИЗВОДНЫХ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ

Д. А. Головин
(Россия, Елец; ЕГУ им. Бунина)

В современном мире наблюдается повышение роли фондового рынка в системе финансовых рынков, так как в ценных бумагах заключена большая часть финансовых активов развитых стран мира. Фондовые рынки являются одним из главных механизмов привлечения денежных ресурсов на цели инвестиций, модернизации, стимулировании роста производства.

До начала эпохи информационных технологий торговля акциями производилась в основном на интуитивной основе. Поскольку уровни инвестирования и оборотов торговли росли, трейдеры искали инструменты и методы, которые увеличили бы их прибыль при минимизации рисков. С целью предсказать направление рынка и извлечь из него выгоду использовали следующие методы: элементы описательной статистики, технический анализ, фундаментальный анализ, линейную регрессию и т.д. Ни один из данных методов не оказался точным инструментом прогнозирования, поэтому многие аналитики высказывают сомнение о полезности данных инструментов. Однако данные методы представляют собой базовый стандарт, который нейронные сети должны превосходить по производительности. Кроме того, многие из этих методов используются для предварительной обработки входных необработанных данных, а их результаты передаются в нейронные сети в качестве входных параметров [1].

Способность нейронных сетей обнаруживать нелинейные отношения во входных данных делает их идеальными для моделирования нелинейных динамических систем, таких как фондовый рынок. Она эффективно старается «понять» текущее рыночное состояние, сравнить его с ранее встречавшимися ситуациями и с наибольшей вероятностью воспроизвести реакцию рынка [2].

Одной из глобальных частей рынка, включающего в себя как фондовый, так и внебиржевой, является торговля деривативами. Для прогнозирования рынка производных финансовых инструментов лучше всего использовать многослойные персептроны. Построение сетей с обратными связями в данном случае нецелесообразно из-за краткосрочной памяти таких систем и сложности их обучения.

Для начала необходимо определить базовые характеристики данных и сформировать базу данных. На начальном этапе предсказание динамики цены сводится к аппроксимации функций многих переменных по заданному набору примеров с помощью процедуры погружения ряда в многомерное пространство.

Обучение нейронной сети прогнозированию основано на стандартном подходе. Все примеры делятся на три выборки: обучающую, валидационную и тестовую. Обучающая выборка служит для подстройки синаптических коэффициентов обучаемых нейронных сетей с целью минимизации ошибки на выходе сети. Валидационная выборка применяется для определения лучшей из нескольких обученных сетей, а также для выбора момента останова обучения. Тестовая выборка нужна для контроля качества прогнозирования.

Чтобы обучить нейронную сеть, необходимо также определить ошибку предсказаний, так как входных и выходных данных недостаточно. Для прогнозирования рыночных категорий среднеквадратичная ошибка является малоэффективной, ведь при прогнозировании финансовых показателей главной является одно направленность прогноза и истинного значения. Поэтому ошибка нейронной сети представляется в виде функции от синаптических коэффициентов и минимизируется одним из градиентных методов [3]:

$$E = -\ln[1 + y \cdot d],$$

где y — выход нейронной сети, d — желаемое значение выхода.

Значение ошибки E — усредненное по всем примерам, используется для подстройки синаптических коэффициентов.

После обучения нейронная сеть способна предсказать будущее значение рыночной цены на основе предыдущих значений и других факторов, которые могут повлиять на ее изменение.

В настоящее время существует огромное множество средств создания нейронных сетей с использованием систем компьютерной математики. Например, Matlab, а именно встроенный пакет Neural Networks Tool, Scilab и др.

Помимо систем компьютерной математики, в последнее время огромную популярность, среди специалистов в области искусственного интеллекта и прогнозирования, завоевал язык программирования Python, а именно его библиотеки: Tensor Flow, Keras, Theano, Scikit-learn, Pandas, NumPy и др.

Подводя итог, можно отметить, что использование нейронных сетей в прогнозировании рынка производных финансовых инструментов — перспективное направление развития систем искусственного интеллекта.

Литература

1. *Dash M., Liu H.* Feature selection methods for classifications, Intelligent Data Analysis // Internation Journal.—1997.—№ 1.—P. 131–156.
2. *Ларин М. Г.* Прогнозирование состояния банкротства предприятия с использованием нейронных сетей // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук.—2010.—№ 10.—С. 372–374.
3. *Каширина Е. А., Курганов А. Н.* Нейронные сети как инструмент прогнозирования динамики рыночных цен // Science Time.—2015.—№ 12.—P. 24.

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДУ И ЕЕ РЕШЕНИЯ СО СВОЙСТВАМИ КОЛЕБЛЕМОСТИ[1]

А. Л. Джабраилов

(Россия, Грозный; ЧГУ)

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вида

$$y_i' = \Phi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) y_i + f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{1}$$

где функции Φ_i и f_i определены и непрерывны по совокупности аргументов в области D: $\{|y_i| \leqslant d_i,\ i = 1, \ldots, n,\ x \in I\}$, $I = \bigcup_{v=0}^{m} (a_v, a_{v+1})$, $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_m < a_{m+1} = b$, $d_i > 0$ данные числа, и удовлетворяют условиям:

$$|f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leqslant \psi_i(x), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

$$-\psi_{2i}(x) \leqslant \Phi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \operatorname{sign}(x - c_v) \leqslant -\psi_{1i}(x), \quad v = 0, \ldots, m. \tag{3}$$

Здесь функции $\psi_i(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, а функции $\psi_{2i}(x)$, $\psi_{1i}(x)$ — на отрезках $[a_v + \delta_v, c_v]$, $[c_v, a_{v+1} - \delta_v]$, $a_v < c_v < a_{v+1}$, $\delta_v > 0$, при этом предполагается, что $\psi_{2i}(x) > 0$, $\psi_{1i}(x) > 0$ и

$$\int\limits_{a_v}^{a_v+\delta_v} \psi_{ki}(t)\, dt = \int\limits_{a_{v+1}-\delta_i}^{a_{v+1}} \psi_{ki}(t)\, dt = +\infty, \quad k = 1, 2. \tag{4}$$

Речь идет о решениях системы (1), удовлетворяющих сингулярным функциональным условиям

$$\int\limits_{a_v}^{a_v+1} a_{iv}(t) y_i(t)\, dt = l_{iv}, \quad l_{iv} = \text{const}, \tag{5}$$

при заданных непрерывных положительных функциях $a_{iv}(x)$ на (a_v, a_{v+1}), имеющих сингулярности на концах этих интервалов такого же характера, что и функции $\psi_{1i}(x)$, $\psi_{2i}(x)$ (см. (4) и [1, 2]).

Если допустить выполнение дополнительных условий

$$a_{iv} = \int\limits_{a_v}^{a_v+1} a_{iv}(s) e^{-\int\limits_{s}^{c_v} \psi_{2i}(\tau) \operatorname{sign}(\tau - s)\, d\tau} ds \neq 0,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-41-200001, и публикуется в рамках выполнения государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611, по проекту «Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи».

$$a_{iv}^{-1}\beta_{iv}+\gamma_{iv}\leqslant d_i,\quad \beta_{iv}=|l_{iv}|+\int\limits_{a_v}^{a_v+1}a_{iv}(s)\phi_{iv}(s)\,ds,$$

$$\gamma_{iv}=\max\left\{\int\limits_{a_v}^{c_v}\psi_i(t)\,dt,\ \int\limits_{c_v}^{a_v+1}\psi_i(t)\,dt\right\},$$

$$\phi_{iv}(x)=\int\limits_{c_v}^{x}\exp\left(-\int\limits_{t}^{x}\psi_{1i}(s)\operatorname{sign}(s-t)\,ds\right)\psi_i(t)\operatorname{sign}(t-c_v)\,dt,$$

то задача (1), (2) имеет по крайней мере одно решение, которое удовлетворяет еще и условиям колеблемости

$$y_i(a_v)=0,\quad i=1,\ldots,n,\ v=0,\ldots,m.$$

Это решение непрерывно на $[a,b]$ и непрерывно дифференцируемо при $x\in I$.

Литература

1. *Исраилов С. В., Юшаев С. С.* Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.—Нальчик: Издательский центр «Эльфа», 2004.—445 с.
2. *Исраилов С. В.* Точки сингулярностей в ОДУ порождают переопределенные граничные условия // Современные проблемы прикладной математики и мат. моделирования. Материалы III-й Междунар. науч. конференции. Ч. 1.—Воронеж: Науч. кн., 2009.—С. 90–92.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ДИСКРЕТНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ОЦЕНКЕ СЕЙСМИЧЕСКОЙ ОПАСНОСТИ[1]

Б. А. Дзебоев
(Россия, Москва; ГЦ РАН)

В работах [1, 2] был разработан принципиально новый метод FCAZ (Formalized Clustering And Zoning) распознавания мест возможного возникновения сильных землетрясений. FCAZ является частью оригинального подхода к анализу дискретных данных ДМА (Дискретный Математический Анализ), созданного научной школой академика РАН А. Д. Гвишиани. Он позволяет эффективно проводить распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений на базе кластерного анализа каталога сейсмических событий. Ядром FCAZ является алгоритм топологической фильтрации DPS (Discrete Perfect Sets), входящий в блок «ДМА-кластеризация». Алгоритм выделяет кластеры как собственные подмножества во множестве объектов. Это отличает DPS от классических алгоритмов кластеризации. Он нацелен на выделение в конечном множестве евклидова пространства плотных областей заданного уровня плотности. В настоящей работе FCAZ-распознавание изучается с точки зрения теоретического системного анализа (в англоязычной литературе ASA — Advanced Systems Analysis). Процесс и результат FCAZ-определения потенциальных зон высокой сейсмической опасности представляет собой сложную систему [3]. Состояние системы зависит как от пространственных координат объектов распознавания, так и от времени. Результаты FCAZ-распознавания следуют из алгоритмического анализа определенных в настоящий момент времени объектов распознавания, представляющих собой многочисленные эпицентрыслабых землетрясений. В работах [1–3] показано, что для картины сегодняшнего дня FCAZ выполнил достоверное распознавание искомых высокосейсмичных зон в целом ряде горных стран. Приведены обоснования такой достоверности для некоторого периода времени. Этот период характеризуется тем, что на его протяжении множество объектов распознавания кардинальным образом не меняется. Будем обозначать через Δt промежуток времени, в который с множеством объектов не произошло кардинальных изменений. Естественно предположить, что полученный в момент времени t_1 FCAZ-результат будет иметь место вплоть до момента $t_2 = t_1 + \Delta t$. Начиная с t_2, множество объектов претерпит кардинальные изменения. Следовательно, в момент t_2 необходимо выполнить новое FCAZ-распознавание с учетом вновь поступивших исходных данных. Рассматривая это рассуждение как первый шаг математической индукции, можно теоретически определить $T = t_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где t_n — суть моменты, когда должны повторяться FCAZ-распознавания. Таким образом, FCAZ есть аналитический подход

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-35-70054.

к распознаванию потенциальных высокосейсмичных зон как к изменяющейся с течением времени сложной системе, стабильной при этом на достаточно протяженных локальных промежутках. Такой подход базируется на динамических изменениях основных параметров системы. Последнее обосновывает отнесение алгоритмической последовательности $T(n) \times \mathrm{FCAZ}$ к методам системного анализа.

Литература

1. *Гвишиани А. Д., Дзебоев Б. А., Агаян С. М.* О новом подходе к распознаванию мест возможного возникновения сильных землетрясений на Кавказе // Физика Земли.—2013.—№ 6.—С. 3–19.
2. *Гвишиани А. Д., Дзебоев Б. А., Агаян С. М.* Интеллектуальная система распознавания FCAZm в определении мест возможного возникновения сильных землетрясений горного пояса Анд и Кавказа // Физика Земли.—2016.—№ 4.—С. 3–23.
3. *Zgurovsky M. Z., Pankratova N. D.* System Analysis: Theory and Applications (Data and Knowledge in a Changing World).—Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.—447 p.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОПЕРАТОРА ТИПА ПОТЕНЦИАЛА РИССА С СУММИРУЕМОЙ ПЛОТНОСТЬЮ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЁЛЬДЕРОВОСТИ НА КВАЗИМЕТРИЧЕСКОЙ ГИПЕРСФЕРЕ[1]

Ю. Е. Дроботов

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,0) = 1\}$, где $d : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \to [0,\infty)$ — квазирасстояние, регулярное порядка $\theta \in (0,1]$, т. е.

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leqslant Ad^{\theta}(x,y)\{d(x,z) + d(y,z)\}^{1-\theta}, \quad A > 0.$$

Рассматривается оператор типа потенциала Рисса $I^{\alpha(\cdot)}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ переменного порядка $\alpha(x)$, определяемый как

$$\Big(I^{\alpha(\cdot)}_{\mathbb{S}^{n-1}} f\Big)(x) := \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{|x-\sigma|^{n-1-\alpha(x)}}, \quad x \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Будем полагать, что $\operatorname{Re}\alpha(x)$ может вырождаться на некотором подмножестве $\mathbb{S}^{n-1}$ и положим, что

$$\big|\big\{x \in \mathbb{S}^{n-1} :\ \operatorname{Re}\alpha(x) = 0\big\}\big| = 0.$$

Исследуются условия ограниченности потенциала $I^{\alpha(\cdot)}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ при отображении функции $f \in L^p(\mathbb{S}^{n-1})$ в пространство переменной гёльдеровости $H^{\lambda(\cdot)}(\mathbb{S}^{n-1})$, определяемое в терминах локального модуля непрерывности

$$M_d(f,x,t) = \sup_{y \in \mathbb{S}^{n-1} :\, d(x,y) \leqslant t} |f(x) - f(y)|, \quad x \in \mathbb{S}^{n-1},$$

следующим условием роста:

$$\forall\, x \in \mathbb{S}^{n-1},\ 0 < t < 1 \qquad M_d(f,x,t) \leqslant Ct^{\lambda(x)}, \qquad 0 < C < \infty.$$

Отправные результаты для настоящего исследования содержатся в работе [1], где поставленная задача была решена для постоянного α в случае метрических пространств, а также [2, 3], в которых действие потенциала $I^{\alpha(\cdot)}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ рассматривалось между пространствами, соответственно, обобщенной переменной и переменной гёльдеровости, во втором случае — на квазиметрическом пространстве.

Автор благодарит своего научного руководителя Б. Г. Вакулова за постановку задачи и помощь в проведении исследования.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-51-46003, и Научного и технологического исследовательского совета Турции.

Литература

1. *Вакулов Б. Г.* Теоремы типа Харди — Литтлвуда — Соболева об операторах типа потенциала в $L_p(S_{n-1}, \rho)$ // Деп. в ВИНИТИ.—1986.—Т. 86, № 5435.
2. *Samko N., Vakulov B. G.* Spherical fractional and hypersingular integrals of varialbe order in generalized Hölder spaces with variable characteristic // Math. Nachr.—2011.—Vol. 284, № 2–3.—P. 355–369.
3. *Вакулов Б. Г., Самко Н. Г., Самко С. Г.* Операторы типа потенциала и гиперсингулярные интегралы в пространствах Гёльдера переменного порядка на однородных пространствах // Изв. вузов. Сев.–Кавк. регион. Спецвыпуск.—2009.—С. 40–45.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОПЕРАТОРОВ, ОГРАНИЧЕННЫХ НА КОНУСАХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К НЕКОТОРЫМ ВОПРОСАМ ТЕОРИИ БАЗИСОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

А. К. Дронов

(Россия, Ростов-на-Дону; РГЭУ (РИНХ))

Обобщается классическая задача интерполяции линейных операторов, ограниченных на парах банаховых пространств, на случай линейных операторов, ограниченных на парах конусов. Вводится понятие интерполяционного свойства тройки конусов и равномерного интерполяционного свойства семейства троек конусов по отношению к тройке банаховых пространств. Получен результат о равномерном интерполяционном свойстве семейства конусов в пространствах весовых числовых последовательностей.

Теорема. *Пусть* $E_i = c_0(a_i)$, $F = c_0(b_i)(i = 0,1)$, $E = c_0(a), F = c_0(b)$, *причем* $E_1 \subset E \subset E_0$, $F_1 \subset F \subset F_0$ *и банахова тройка* (E_0, E_1, E) *обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* (F_0, F_1, F). *Пусть* $\mathscr{A}$ — *множество конусов в* ω^+ *такое, что для каждого конуса* $Q \in \mathscr{A}$ *выполняются условия:*

1) Q — *нижняя полурешетка в* ω;
2) $Q \cap E_1^+$ — *тотальный конус в пространстве* E_1;
3) $Q \cap E_1^{++} \neq \{\emptyset\}$.

Тогда семейство троек конусов

$$\mathscr{M} = \left\{ \left(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+\right) : \ Q \in \mathscr{A} \right\}$$

обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

Данный результат позволяет исследовать вопрос о существовании базиса в дополняемых подпространствах пространств Драгилева.

Литература

1. *Каплицкий В. М., Дронов А. К.* Применение интерполяционных свойств операторов, ограниченных на конусах, к некоторым вопросам теории базисов в пространствах Фреше // Мат. форум.—2014.—Т. 7.—С. 88–103.
2. *Cerda J., Coll H.* Function cones and interpolation // Math. Nachr.—2005.—Vol. 278.—P. 227–239.

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОУПРУГОГО ВОЛНОВОДА ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ[1]

В. В. Дударев (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
М. А. Летунов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Используя модель предварительного напряженного электроупругого тела [1, 2] сформулирована задача для пьезоупругого волновода. Однородное поле преднапряжений является двухосным и характеризуется двумя компонентами. Верхняя и нижняя границы волновода свободны от нагрузок, электродированы и закорочены. Используя преобразование Фурье по продольной координате рассмотрение задачи сведено к решению системы шести дифференциальных уравнений первого порядка по толщинной координате. В качестве метода решения этой системы выбран метод пристрелки. С помощью составленной численной схемы построены дисперсионные кривые. Проведен анализ влияния вида и уровня предварительного напряженного состояния на значения толщинных резонансов и характер изменения дисперсионного множества. Также представлены результаты вычислительных экспериментов по построению отдельных дисперсионных кривых, демонстрирующих учет только продольных или поперечных преднапряжений. На основе выявленных особенностей сформулирована обратная коэффициентная задача по определению двух малых параметров, характеризующих предварительное напряженное состояние, по данным о точках на дисперсионных кривых. Для приближенного построения первых двух дисперсионных кривых использован метод Галеркина. Проведен анализ точности полученных результатов при различных значениях параметров. Выявлено, что с помощью этого метода можно аппроксимировать вторую ветвь дисперсионного множества точнее, чем первую. Построены собственные формы колебаний для первых двух дисперсионных кривых. В рамках асимптотического подхода получена формула для вычисления углового коэффициента прямой, аппроксимирующей вторую дисперсионную кривую в окрестности начала координат. Представлены графики второй дисперсионной кривой, построенные с помощью различных методов.

Литература

1. *Kuang Z.-B.* Theory of Electroelasticity.—Heidelberg–New York: Springer, 1976.—431 p.
2. *Nedin R. D., Dudarev V. V., Vatulyan A. O.* Vibrations of inhomogeneous piezoelectric bodies in conditions of residual stress–strain state // Applied Mathematical Modelling.—2018.—Vol. 63.—P. 219–242.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00354.

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ И ОТСУТСТВИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ[1]

В. В. Дударев (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
Р. М. Мнухин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
М. Е. Головатенко (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

На основе модели неоднородного изотропного упругого тела [1] рассмотрены прямые задачи об установившихся колебаниях полого цилиндра и прямоугольной области. Внутренняя часть цилиндра свободна от нагрузок, на внешней боковой поверхности задано переменное по продольной координате давление, на торцах реализованы условия скользящей заделки. Колебания описываются системой двух дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами [2]. В рамках первого подхода решение строится с помощью метода разделения переменных и сводится к численному решению набора систем дифференциальных уравнений первого порядка по радиальной координате. Каждая из систем исследуется с помощью метода пристрелки. Также задача для цилиндра решена с помощью МКЭ, реализованного в пакете FlexPDE. Проведено сравнение полученных решений для компонент вектора смещения и тензора напряжений. Дана оценка влияния переменных свойств на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ).

Задача для неоднородной прямоугольной области исследовалась численно с помощью МКЭ. Снова используя модель предварительно напряженного упругого тела, проведен анализ влияния уровня и структуры преднапряжений на АЧХ и значения собственных частот колебаний. При этом была реализована процедура трансляции данных для учета характеристик предварительного состояния. Получены графики компонент поля смещения и напряжений. Используя возможности пакета FlexPDE, проведены расчеты АЧХ для различных законов изменения переменных упругих свойств и видов преднапряжений. Выявлено, что переменные свойства оказывают существенно большее влияние на основные акустические характеристики, чем преднапряжения.

Литература

1. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел.—М.: Изд-во МГУ, 1976.—368 с.
2. *Dudarev V. V., Mnukhin R. M., Nedin R. D., Vatulyan A. O.* Effect of material inhomogeneity on characteristics of a functionally graded hollow cylinder // Applied Mathematics and Computation.—2020.—Vol. 382.—P. 125333.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-31-90009.

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ОПЕРАТОРА ОБРАТНОГО СДВИГА В ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

О. А. Иванова

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть $H(\mathbb{C})$ — пространство всех целых в $\mathbb{C}$ функций с топологией компактной сходимости. Функция $g_0 \in H(\mathbb{C})$ такая, что $g_0(0) = 1$, задает оператор обобщенного обратного сдвига (одномерное возмущение оператора обратного сдвига) $D_{0,g_0}(f)(t) := \frac{f(t)-g_0(t)f(0)}{t}$, линейный и непрерывный в $H(\mathbb{C})$. В докладе идет речь о собственных замкнутых инвариантных подпространствах D_{0,g_0} в $H(\mathbb{C})$. Если множество $Z(g_0)$ нулей g_0 непусто, то n_λ обозначает кратность нуля $\lambda \in Z(g_0)$. Кратным многообразием в $\mathbb{C}$ называется конечная или бесконечная последовательность W пар (μ, m_μ), где $Z(W) := \{\mu\}$ — дискретное подмножество $\mathbb{C}$ и $m_\mu \in \mathbb{N}$. Для непустого кратного многообразия $W = \{(\mu, m_\mu)\}$ в $\mathbb{C}$ введем множество $S(W) := \{f \in H(\mathbb{C}) : \ f^{(j)}(\mu) = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant m_\mu - 1 \ \text{для любого} \ \mu\}$. Для кратных многообразий $W = \{(\mu, m_\mu)\}$ и $V = \{(\lambda, n_\lambda)\}$ в $\mathbb{C}$ будем писать $W \prec V$, если $Z(W) \subset Z(V)$ и $m_\mu \leqslant n_\mu$ для любого $\mu \in Z(W)$. Ниже символ $\mathscr{D}(g_0)$ обозначает множество всех многочленов p таких, что $p(0) = 1$ и функция g_0/p голоморфна в $\mathbb{C}$. Пусть $\mathbb{C}[z]_n$ — пространство многочленов степени не выше n $(n \geqslant 0)$ над полем $\mathbb{C}$.

Отметим следующие свойства семейства $\mathrm{Lat} D_{0,g_0}$ всех замкнутых D_{0,g_0}-инвариантных подпространств $H(\mathbb{C})$. Если функция g_0 не имеет нулей, то D_{0,g_0} является одноклеточным, т. е. $\mathrm{Lat}\, D_{0,g_0}$ линейно упорядоченное по вложению. Если же g_0 имеет нули, то D_{0,g_0} одноклеточным не является. В этом случае $\mathrm{Lat}\, D_{0,g_0}$ распадается на два множества, одно из которых содержит только бесконечномерные подпространства, а другое — только конечномерные.

Теорема. *Предположим, что g_0 имеет нули в $\mathbb{C}$.*

(i) *Для любого непустого кратного многообразия $W \prec W(g_0)$ в $\mathbb{C}$ множество $S(W)$ является собственным замкнутым D_{0,g_0}-инвариантным подпространством $H(\mathbb{C})$.*

(ii) *Для любых многочлена $p \in \mathscr{D}(g_0)$, целого $n \geqslant 0$ такого, что $n \geqslant \deg(p) - 1$, множество $\frac{g_0}{p}\mathbb{C}[z]_n$ является собственным замкнутым D_{0,g_0}-инвариантным подпространством $H(\mathbb{C})$.*

(iii) *Для любого собственного замкнутого D_{0,g_0}-инвариантного подпространства S пространства $H(\mathbb{C})$ либо существует непустое кратное многообразие $W \prec W(g_0)$, для которого $S = S(W)$, либо найдутся многочлен $p \in \mathscr{D}(g_0)$, целое $n \geqslant 0$ такое, что $n \geqslant \deg(p) - 1$, для которых $S = \frac{g_0}{p}\mathbb{C}[z]_n$.*

Приведенные результаты содержатся в [1].

Литература

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н., Мелихов Ю. Н.* Инвариантные подпространства оператора обобщенного обратного сдвига и рациональные функции.—URL: http://arxiv.org/pdf/2005.01596.pdf.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОПЕРАТОРОМ СТОКСА В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

М. Р. Ишмеев

(Россия, Москва; Тинькофф)

Пусть Ω — ограниченная область в R^3 со сколь угодно гладкой границей $\partial\Omega$, $m \in N$, $\omega \gg 1$. В бесконечном цилиндре $Q = \Omega \times R$ рассмотрим задачу о $\frac{2\pi}{\omega}$-периодических по времени t решениях системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla p = \Delta u + B_0(x)u + \frac{1}{\omega}C(x)u + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}(M_k(x)u + d_k(x))e^{ik\omega t} + d_0(x), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $t \in R$, $u = u(x,t)$ — неизвестная вещественная трехмерная функция, $p = p(x,t)$ — неизвестная вещественная скалярная функция, $B_0(x)$, $C(x)$, $M_k(x)$ и $d_0(x)$, $d_k(x)$ — известные бесконечно гладкие матрицы-функции и вектор-функции соответственно, причем $B_0(x)$, $C(x)$ и $d_0(x)$ — вещественные, а $M_k(x)$, $d_k(x)$ комплексно сопряжены с $M_{-k}(x)$, $d_{-k}(x)$.

Символом Π обозначим известный ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на $S_2(\Omega)$ (см. [1, 2]). Введем в $S_2(\Omega)$ оператор $A = \Pi\Delta + \Pi B_0(x)$ с областью определения $D(A) = \big\{u \in S_2(\Omega) \cap W_2^2(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = 0\big\}$ и выражение

$$B = \Pi C(x) + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\frac{\Pi M_k(x)\Pi M_{-k}(x)}{ik}.$$

Предположим, что $\lambda = 0$ — n-кратное ($n \in N$) собственное значение оператора A, которому отвечает набор из s, $1 \leqslant s \leqslant n$, линейно независимых собственных вектор-функций: $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_s(x)$. Будем предполагать, что ни одна собственная вектор-функция $a(x)$ оператора A, отвечающая нулевому собственному значению, не имеет присоединенных вектор-функций относительно пары A, B [3], т. е. задача

$$Av(x) = -Ba(x),$$
$$v(x)|_{\partial\Omega} = 0,$$

не имеет классических решений.

Задачей (А) назовем задачу Дирихле такого вида:

$$\begin{cases}(\Delta + B_0)u(x) + \nabla p(x) = G(x),\\ \qquad \operatorname{div} u(x) = 0,\\ (u(x), a_i(x)) = 0, i = 1, \ldots, s,\\ \qquad u(x)|_{\partial\Omega} = 0,\end{cases}$$

где $G \in C^\infty(\bar\Omega)$, $(G, b_i) = 0$, $b_i(x)$, $i = 1, \ldots, s$, — линейно независимые собственные векторы, отвечающие нулевому собственному значению A^*.

Задачей (B) назовем задачу Неймана такого вида:

$$\begin{cases} \Delta q(x) = G(x), \\ \frac{\partial q(x)}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

где $G \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\int_\Omega G(x)\,dx = 0$.

Задача (C) — задача об l-периодических по времени решениях:

$$\begin{cases} \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} = G(x)e^{il\tau}, \\ \langle y(\tau) \rangle = 0, \end{cases}$$

где l — целое число.

Задачи (D), (E) и (F) — следующие задачи на луче $\rho > 0$:

$$\begin{cases} ikz(\rho) = \frac{\partial^2 z(\rho)}{\partial \rho^2} + g(\rho), \\ z(\rho)|_{\rho=0} = c, \\ z(\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

где k — ненулевое целое число, $g(\rho) = g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0 \in \mathbb{R}^3$, s — неотрицательное целое число, $\Re\gamma > 0$, c — вещественное число;

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(\rho)}{\partial \rho^2} = g(\rho), \\ v(\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

где $g(\rho) = g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0 \in \mathbb{R}^3$, s — неотрицательное целое число, $\Re\gamma > 0$;

$$\begin{cases} \frac{\partial s(\rho)}{\partial \rho} = g(\rho), \\ s(\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

где $g(\rho) = g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0 \in \mathbb{R}^3$, s — неотрицательное целое число, $\Re\gamma > 0$. Очевидно, задачи (A)–(F) однозначно разрешимы, в случае задач (A) и (B), если единственность p и q понимать с точностью до постоянного слагаемого.

Для задачи (1)–(3) были установлены существование и единственность $\frac{2\pi}{\omega}$-периодического решения при достаточно больших ω, это решение является вещественным и бесконечно дифференцируемым, а также построена и обоснована его полная асимптотика. Ее построение сводится к решению конечного числа однозначно разрешимых задач вида (A)–(F).

Литература

1. *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости.— Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1984.
2. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.—М.: Наука, 1970.
3. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.—1960.—Т. 15, № 3.—С. 3–80.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ ПО ИНФОРМАЦИИ О ТЬЮРИНГОВЫХ СТРУКТУРАХ

А. В. Казарников (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
Х. Хаарио (Финляндия, Лаппеенранта; ЛТУ-университет)

Системы реакции-диффузии представляют собой важный класс математических моделей, способных описывать процессы структурообразования [1]. Впервые данные уравнения были предложены А. Тьюрингом [2] для объяснения процесса гаструляции, происходящего в самом начале биологического морфогенеза. В данной модели формирование пространственных неоднородностей на поверхности эмбриона объясняется как результат нелинейного взаимодействия двух диффундирующих веществ (морфогенов), концентрации которых формируют устойчивые пространственные структуры (структуры Тьюринга), определяющие дальнейшие морфологические изменения. Данная теория была успешно применена для объяснения формирования новых конечностей пресноводного полипа *Hydra Linnaeus* [3], а после успешного воспроизведения тьюринговых структур в эксперименте [4] была распространена и на другие биологические объекты [5].

Как правило, начальные концентрации морфогенов неизвестны и задаются малыми случайными возмущениями некоторого неустойчивого пространственно-однородного решения задачи, соответствующего состоянию однородной смеси. Это затрудняет сопоставление модели и эксперимента, так как делает невозможным применение стандартных подходов, таких как метод наименьших квадратов. Рассматривается обратная задача об идентификации параметров систем реакции-диффузии по информации о стационарных (тьюринговых) структурах, без учета данных о начальных условиях или переходных процессах.

В работе рассматриваются три системы реакции-диффузии: модель Фитцхью — Нагумо, система Гирера — Майнхардта и пространственно-распределенная модель брюсселятора. Система Фитцхью — Нагумо представляет собой бесконечномерный аналог двухкомпонентной редукции модели Ходжкина — Хаксли распространения нервного импульса в гигантском аксоне кальмара и имеет вид

$$v_t = \nu_1 \Delta v + \varepsilon(w - \alpha v), \quad w_t = \nu_2 \Delta w - v + \mu w - w^3, \quad x \in \Omega = (0,1)^2, \tag{1}$$

где $v = v(x,t)$ — потенциал мембраны, $w = w(x,t)$ — переменная восстановления, $\mu \in \mathbb{R}$, $\alpha \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ — параметры реакции, $\nu_1, \nu_2 > 0$ — коэффициенты диффузии. Система Гирера — Майнхардта была предложена как модель формирования конечностей пресноводного полипа гидры. Она имеет вид

$$v_t = \nu_1 \Delta v - \mu_v v + \frac{v^2}{w}, \quad w_t = \nu_2 \Delta w - \mu_w w + v^2, \quad x \in \Omega = (0,1)^2, \tag{2}$$

где $v(x,t)$ и $w(x,t)$ — активаторная и ингибиторная переменные, $\mu_v, \mu_w > 0$ — коэффициенты убывания концентраций, $\nu_1, \nu_2 > 0$ — коэффициенты диффузии. Пространственно-распределенная модель брюсселятора задается уравнениями

$$v_t = \nu_1 \Delta v + A - (B+1)v + v^2 w, \quad w_t = \nu_2 \Delta w + Bv - v^2 w, \quad x \in \Omega = (0,1)^2, \tag{3}$$

где $v(x,t)$ и $w(x,t)$ — переменные концентрации промежуточных компонентов, $A, B > 0$ — постоянные концентрации компонентов реакции. Для всех рассматриваемых систем предполагается, что на границе области Ω заданы однородные краевые условия Неймана.

Обозначим через $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$ вектор управляющих параметров, полагая $(p_1, p_2) = (\mu, \varepsilon)$ для модели Фитцхью — Нагумо (1), $(p_1, p_2) = (\mu_v, \mu_w)$ для системы Гирера — Майнхардта (2) и $(p_1, p_2) = (A, B)$ для пространственно-распределенной модели брюсселятора (3). Предполагается, что $\boldsymbol{p}$ принадлежит области неустойчивости Тьюринга на плоскости параметров (p_1, p_2). Остальные параметры реакции и коэффициенты диффузии считаются фиксированными.

В работе [6] был предложен статистический алгоритм идентификации параметров систем реакции-диффузии по информации о тьюринговых структурах при условии, что в наличии имеется N структур, где $N \geqslant 50$. В настоящей работе данный подход распространяется на случай $1 \leqslant N < 50$. Применяя методы, аналогичные [7, 8], определена стохастическая функция невязки для рассматриваемых значений N. Используя адаптивный алгоритм Метрополиса — Гастингса, построены апостериорные распределения параметров для различных N, что позволило оценить зависимость погрешности метода от количества входных данных. При помощи стохастических методов оптимизации проведены численные эксперименты по идентификации параметров для рассматриваемых уравнений.

Литература

1. *Murray J. D.* Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications.—Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.—310 p.
2. *Turing A. M.* The Chemical basis of morphogenesis // Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. B.—1952.—Vol. 237, № 641.—P. 37–72.
3. *Gierer A., Meinhardt H.* A theory of biological pattern formation // Kybernetik.—1972.—Vol. 12, № 1.—P. 30–39.
4. *Castets V., Dulos E., De Kepper P.* Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern // Phys. Rev. Lett.—1990.—Vol. 64, № 24.—P. 2953–2956.
5. *Kondo S., Miura T.* Reaction-diffusion model as a framework for understanding biological pattern formation // Science.—2010.—Vol. 329, № 5999.—P. 1616–1620.
6. *Kazarnikov A., Haario H.* Statistical approach for parameter identification by Turing patterns // J. Theor. Biol.—2020.—Vol. 501.—P. 110319.
7. *Price L. F., Drovandi C. C., Lee A., Nott D. J.* Bayesian synthetic likelihood // J. Comput. Graph. Statist.—2018.—Vol. 27, № 1.—P. 1–11.
8. *Wood S. N.* Statistical inference for noisy nonlinear ecological dynamic systems // Nature.—2010.—Vol. 466, № 7310.—P. 1102–1104.

ЗАДАЧА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ[1]

Л. Л. Карашева

(Россия, Нальчик; ИПМА КБНЦ РАН)

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(x,t) + (-1)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ — дробная производная порядка α [1, с. 9], $0 < \alpha \leqslant 2$.

Уравнение (1) при $n = 1$ совпадает с диффузионно-волновым уравнением, которое широко исследовано (см. [2] и библиографию там). В частности, в полубесконечной области в работе [3] исследована краевая задача для однородного уравнения (1) при $n = 1$ с дробной производной Римана — Лиувилля. В работе [4] для уравнения диффузии дробного порядка с постоянными коэффициентами при младших членах решена задача в полуполосе. В работе [5] для уравнения (1) построено фундаментальное решение и решена задача Коши.

В данной работе для уравнения (1) решена задача в неограниченной области, доказана теорема единственности в классе функций быстрого роста.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка.—М.: Наука, 2005.—199 с.
3. *Геккиева С. Х.* Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной в полубесконечной области // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН.—2002.—№ 1 (8).—С. 6–8.
4. *Мамчуев М. О.* Краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка с постоянными коэффициентами // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук.—2005.—Т. 7, № 2.—С. 37–44.
5. *Карашева Л. Л.* Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временной переменной // Сиб. электрон. мат. изв.—2018.—Т. 15.—С. 696–706.

[1]Работа публикуется в рамках выполнения государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611, по проекту «Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи».

ОПЕРАТОРЫ ВОЛЬТЕРРА И ГЕЛЬФОНДА — ЛЕОНТЬЕВА НА ВЕСОВЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. О. Коваленко
(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Всюду далее $H(\mathbb{C})$ — пространство всех функций, аналитических в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Операторы обобщенного дифференцирования и обобщенного интегрирования рассматриваются на весовых пространствах

$$H_v(\mathbb{C}) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ \|f\|_v = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\},$$

$$H_v^0(\mathbb{C}) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ \lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{v(z)} = 0 \right\},$$

где v — радиальный вес в $\mathbb{C}$, т. е. $v(z) = v(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. При этом функция $v(r)$ непрерывна и возрастает на $(0, +\infty)$.

Возьмем целую функцию $e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^n$ порядка $\rho \in (0, \infty)$ и типа $\sigma \in (0, \infty)$, для которой $e_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и существует предел

$$\lim_{n\to 0} n^{1/\rho} |e_n|^{1/n} = (\sigma e \rho)^{1/\rho}.$$

Тогда операторы обобщенного дифференцирования и обобщенного интегрирования имеют следующий вид:

$$(D_e f)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{e_{n-1}}{e_n} z^{n-1}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$(J_e f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{e_{n+1}}{e_n} z^{n+1}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in H(\mathbb{C})$.

Динамические свойства операторов обычного дифференцирования и интегрирования изучались ранее в работах [1, 2]. В них были получены результаты об их гиперцикличности, хаотичности, эргодичности в среднем, наличии периодических элементов и т.д. Представляет интерес распространение этих результатов на более общие операторы типа Гельфонда — Леонтьева, поскольку последние содержат в качестве частных случаев операторы, используемые в приложениях (например, оператор Данкла, см. [2]) Следующий результат установлен в статье [1].

Предложение 1. *Оператор J не является гиперциклическим на $H_v^0(\mathbb{C})$ и не имеет периодических точек на $H_v(\mathbb{C})$, отличных от нуля. Здесь J — оператор обычного дифференцирования, т. е. $Jf(z) = \int_0^z f(\zeta)\, d\zeta$, $z \in \mathbb{C}$.*

В данной работе устанавливаются аналогичные результаты для более общего случая.

Предложение 2. *Оператор* $J_e : H_v(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ *не является гиперцикличеcким на* $H_v^0(\mathbb{C})$.

Для доказательства отсутствия ненулевых элементов у оператора J_e требуется лемма, имеющая самостоятельный интерес.

Лемма. *Решением уравнения* $D_e^n f = f$ *являются линейные комбинации элементов вида* $e(\lambda_k z) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \lambda^n z^n$, *где* λ_k — *корни уравнения* $\lambda^n = 1$, $k = 0, \ldots, n-1$.

С помощью леммы и использования факта о том, что D_e является правым обратным к оператору J_e, доказывается, что если периодический элемент и существует в $H_v(\mathbb{C})$, то он обязательно нулевой.

Литература

1. *Beltran M. J., Bonet J., Fernandez C.* Classical operators on Banach weighted spaces of entire functions // Proc. Amer. Math. Soc.—2013.—Vol. 141, № 12.—P. 4293–4303.
2. *Dunkl C. F.* Differential-difference operators associated with reflection groups // Trans. Amer. Math. Soc.—1989.—Vol. 311, №1.—P. 167–183.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Э. В. Кораблина

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть $T > 0$, $\Pi = \{(x,t) : \ x \in R, t \in [0,T]\}$ — полоса, $\Omega = \{(x,t,\tau) : (x,t) \in \Pi, \ \tau \in [0;\infty)\}$ — бесконечный прямоугольный параллелепипед. На множестве Π рассматривается задача Коши с большим параметром ω вида [1]

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,\omega t); \\ u|_{t=0} = 0; \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $f(x,t,\tau)$ — вещественная функция, определенная, непрерывная, дважды непрерывно дифференцируемая по переменной x и по (t,τ) на множестве Ω, а также 2π-периодическая по τ. Пусть $u_\omega(x,t)$ — решение задачи (1). Его k-членную асимптотику рассматриваем в виде:

$$u_\omega^k \sim u_0(x,t) + \frac{1}{\omega}\, u_1(x,t) + \frac{1}{\omega^2}\left(u_2(x,t) + v_2(x,t,\omega t)\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{\omega^k}\left(u_k(x,t) + v_k(x,t,\omega t)\right),$$

где функции $u_k(x,t)$, $v_k(x,t,\tau)$ определены и непрерывны в Π и Ω соответственно, а также дважды непрерывно дифференцируемы по x и по (t,τ) [2]. Кроме того, функции $v_k(x,t,\tau)$ — 2π-периодические по τ с нулевым средним.

Теорема 1. *Для каждого $M > 0$ найдется $\omega_0 = \omega_0(M) > 0$ такое, что при $\omega > \omega_0$*

$$\left\|u_\omega - u_\omega^2\right\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-3}), \quad \omega \to \infty.$$

Литература

1. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными / Пер. с англ.—Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003.
2. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 2.—М.: Высшая школа, 1981.—584 с.
3. *Петровский И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений.—М.: Наука, 1965.

О НЕПРЕРЫВНОСТИ КЛАССИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Ю. В. Кораблина

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Рассматривается задача о непрерывности классических операторов в весовых банаховых пространствах голоморфных функций $H_v(G)$. Указанное пространство вводится следующим образом:

$$H_v(G) = \left\{ f \in H(G),\ \|f\|_v = \sup_{z\in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\}.$$

Здесь G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех функций, аналитических в G, с топологией равномерной сходимости на компактах из G, v — вес.

Всюду далее X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, непрерывно вложенное в $H(G)$, X^* — сопряженное с X пространство линейных непрерывных функционалов на X с сопряженной нормой $\|\cdot\|^*$, а δ_z — дельта-функция Дирака для фиксированной точки $z \in G$, т. е. $\delta_z : f \mapsto f(z)$, $f \in H(G)$.

В работе сформулирована теорема, которая является обобщением абстрактного критерия [1, теорема 2.1] на случай произвольной области G вместо единичного круга $\mathbb{D}$ и любого, не обязательно радиального, веса v.

Теорема 1. *Пусть v — произвольный вес на G. Линейный оператор $T : X \to H_v(G)$ корректно определен и ограничен тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$$\text{а) } \delta_z(T) \in X^* \ \ \textit{при всех} \ \ z \in G;$$

$$\text{б) } \sup_{z\in G} \frac{\|\delta_z(T)\|^*}{v(z)} < \infty.$$

На основании этой теоремы получены критерии непрерывности операторов весовой композиции и Вольтерра на весовом банаховом пространстве $H_v(\mathbb{C})$, которые обобщают результаты, полученные в статье Н. Зорбоска [1]. Далее установлены критерии корректной определенности и ограниченности оператора Вольтерра на весовых пространствах Бергмана, Харди и классическом пространстве Фока. Наконец, получены формулы для вычисления нормы оператора Вольтерра в пространствах Бергмана и Харди.

Литература

1. *Zorboska N.* Intrinsic operators from holomorphic function spaces to growth spaces // Integr. Equ. Oper. Theory.—2017.—Vol. 87, № 4.—P. 581–600.
2. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Differentiation and integration operators on weighted spaces of holomorphic functions // Math. Nachr.—2017.—Vol. 290, № 8–9.—P. 1144–1162.

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛОСКОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ[1]

Р. Ч. Кулаев (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН, СОГУ),
М. А. Плиев (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
А. А. Уртаева (Россия, Владикавказ; СОГУ)

Изучается однородное дифференциальное уравнение

$$Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

заданное на геометрическом графе Γ. При этом, под дифференциальным уравнением (1) на графе мы подразумеваем, следуя [1, 2], набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа и набор условий согласования во внутренних вершинах.

В данной работе мы рассматриваем уравнение, описывающее малые поперечные деформации плоской стержневой системы с условиями шарнирного сочленения стержней в узловых точках. Такая модель порождается совокупностью дифференциальных уравнений на ребрах графа

$$(p_i(x)u_i'')'' - r_i(x)u = 0, \quad x \in \gamma_i \subset \overset{\circ}{\Gamma}, \tag{2}$$

с коэффициентами, определяемыми функциями $p(x) \in C^2[\Gamma]$, $\inf_{x\in\overset{\circ}{\Gamma}} p(x) > 0$, $r(x) \in C[\Gamma]$, $r(x) > 0$ на Γ, дополняемой в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$ равенствами

$$u_i(a) = u_k(a), \quad u_i''(a) = 0, \quad \sum_{i\in I(a)} (p_i(a)u_i(a)'')' = 0, \quad a \in J(\Gamma).$$

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), равное нулю на $\partial\Gamma$ и имеющее внутри графа S-зону Γ_0, $\Gamma_0 \subset\subset \Gamma$. Тогда любое знакопостоянное на Γ_0 решение $v(x)$ уравнения (1), равное нулю на $\partial\Gamma$, коллинеарно $u(x)$ на Γ_0.*

Теорема 2. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), равное нулю на $\partial\Gamma$ и имеющее внутри графа S-зону Γ_0, $\Gamma_0 \subset\subset \Gamma$. Тогда любое решение $v(x)$ уравнения (1), равное нулю на $\partial\Gamma$ и неколлинеарное $u(x)$ на Γ_0, меняет знак в Γ_0.*

Теорема 2 является аналогом теоремы о перемежаемости нулей для уравнения четвертого порядка на отрезке [2, теорема 3.1]: нули любых двух линейно независимых решений уравнения (2) на отрезке $[a, b]$, равных нулю на концах отрезка, перемежаются в (a, b).

[1]Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-51-12064.

Литература

1. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2007.—272 с.
2. *Swanson C. A.* Comparison theorems and oscillation theory of linear differential equations.—N. Y.–London: Academic Press, 1968.—237 p.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

СУММЫ ПОРЯДКОВО ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ, СОХРАНЯЮЩИХ ДИЗЪЮНКТНОСТЬ[1]

З. А. Кусраева
(Россия, Ростов-на-Дону, РНОМЦ ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

В настоящем исследовании получены необходимые и достаточные условия, при которых для натуральных чисел n и N сумма N порядково ограниченных сохраняющих дизъюнктность операторов является n-дизъюнктным оператором. Показано, что разложение порядково ограниченного n-дизъюнктного оператора в сумму сохраняющих дизъюнктность операторов единственно с точностью до «булевой перестановки» слагаемых.

Используются стандартные обозначения и терминология из теории векторных решеток и положительных операторов, принятые в книге Алипрантиса и Бёркиншо [1]. Все векторные решетки предполагаются вещественными и архимедовыми. Всюду в тексте «оператор» означает линейный оператор.

Говорят, что элементы $x, y \in E$ *дизъюнктны* и пишут $x \perp y$, если $|x| \wedge |y| = 0$. *Дизъюнктное дополнение* $A^{\perp}$ непустого множества $A \subset E$ определяется формулой $A^{\perp} := \{x \in E : x \perp a$ для всех $a \in A\}$, а для *двойного дизъюнктного дополнения* используется обозначение $A^{\perp\perp} := (A^{\perp})^{\perp}$. Если $E = A^{\perp} \oplus A^{\perp\perp}$, то соответствующий оператор проектирования в E называют *порядковым проектором.* Символом $\mathbb{P}(E)$ обозначается булева алгебра всех порядковых проекторов в векторной решетке E. *Разбиением единицы* в $\mathbb{P}(E)$ называют попарно дизъюнктное семейство порядковых проекторов, сумма которых равна тождественному оператору I_E чисел.

Определение 1. Оператор $T : E \to F$ называют *сохраняющим дизъюнктность* или говорят, что T *сохраняет дизъюнктность*, если образы относительно T любых двух дизъюнктных элементов из E дизъюнктны в F, т. е. $|x| \wedge |y| = 0$ влечет $|T(x)| \wedge |T(y)| = 0$ для любых $x, y \in E$.

Определение 2. Линейный оператор $T : E \to F$ называют *n-дизъюнктным*, если для любого набора из $n+1$ попарно дизъюнктного элемента $x_0, \dots, x_n \in E$, точная нижняя граница множества $\{|Tx_1|, \dots, |Tx_n|\}$ равна нулю:

$$(\forall\, x_0, x_1, \dots, x_n \in E)\ x_k \perp x_l\ (k \neq l) \implies |Tx_0| \wedge \dots \wedge |Tx_n| = 0.$$

Определение 3. Линейный оператор $T : E \to F$ назовем *чисто n-дизъюнктным*, если n — это наименьшее натуральное число, для которого πT является n-дизъюкнтным для любого ненулевого порядкового проектора $\pi \in \mathbb{P}\big(T(E)^{\perp\perp}\big)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00205.

Сформулируем первый основной результат, характеризующий конечные наборы порядково ограниченных сохраняющих дизъюнктность операторов $S_1, \dots, S_N$, имеющих n-дизъюнктные суммы $|S_1| + \dots + |S_N|$.

Теорема 1. *Пусть E и F — векторные решетки, причем F порядково полна, а $n, N \in \mathbb{N}$ таковы, что $n \leqslant N$. Для набора $S_1, \dots, S_N$ порядково ограниченных линейных операторов из E в F, сохраняющих дизъюнктность, оператор $|S_1| + \dots + |S_N|$ чисто n-дизъюнктен в том и только в том случае, когда существует $\mathbb{P}(F)$-перестановка $T_1, \dots, T_N$ набора $S_1, \dots, S_N$ такая, что $T_1, \dots, T_n$ попарно дизъюнктны и если $n < N$, то каждый из операторов $T_{n+1}, \dots, T_N$ допускает представление в виде $T_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{j,k} T_k$ для некоторого набора попарно дизъюнктных ортоморфизмов $0 \leqslant \alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,n} \in \mathscr{Z}(F)$ $(j := n+1, \dots, N)$.*

Определение 4. Конечную последовательность пар $(k_1, \pi_1), \dots, (k_l, \pi_l)$ называют *декомпозиционным рядом* в $\mathbb{P}(F)$, если $1 \leqslant k_1 < \dots < k_l$ — натуральные числа и $\{\pi_1, \dots, \pi_l\}$ — разбиение единицы в $\mathbb{P}(F)$, состоящее из ненулевых порядковых проекторов. Скажем, что n-дизъюнктный оператор T *обладает декомпозиционным рядом* $(k_1, \pi_1), \dots, (k_l, \pi_l)$ в $\mathbb{P}(F)$, если, сверх сказанного выше, $k_l \leqslant n$ и существуют порядково ограниченные сохраняющие дизъюнктность операторы $T_1, \dots, T_{k_l}$ из E в F такие, что $T = T_1 + \dots + T_{k_l}$ и $\pi_i T_1, \dots, \pi_i T_{k_i}$ попарно чисто дизъюнктны для всех $i = 1, \dots, l$.

Второй основной результат отвечает на вопрос об единственности разложения порядково ограниченного n-дизъюнктного оператора в терминах попарно чисто дизъюнктных операторов, сохраняющих дизъюнктность.

Теорема 2. *Любой порядково ограниченный n-дизъюнктный оператор T из векторной решетки E в порядково полную векторную решетку F имеет единственнный декомпозиционный ряд $(k_1, \pi_1), \dots, (k_l, \pi_l)$ в $\mathbb{P}\big(T(E)^{\perp\perp}\big)$.*

Замечание 1. Задача о характеризации операторов между векторными или банаховыми решетками, которые можно представить в виде конечной суммы решеточных гомоморфимов, была впервые сформулирована независимо в работах Каротерса и Фельдмана [2] и Гюсманса и де Пахте [3, замечание 2.3].

Замечание 2. Задача о нахождении необходимых и достаточных условий, при которых конечная сумма порядково ограниченных сохраняющих дизъюнктность операторов является n-дизъюнктной изучалась в книге Кусраева и Кутателадзе [4, гл. 3, § 8], используя булевозначный подход. Теорема 1 является уточнением теоремы 3.8.7 из [4]. Однако, доказательство теоремы 1 в настоящем исследовании использует стандартный инструментарий и не зависит от булевозначного анализа.

Литература

1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—London etc.: Acad. Press Inc., 1985.
2. *Carothers D. C., Feldman W. A.* Sums of homomorphisms on Banach lattices // J. Operator Theory.— 1990.— № 24.— P. 337–349
3. *Huijsmans C. B., de Pagter B.* Disjointness preserving and diffuse operators // Comp. Math.— 1991.—№ 79.—P. 351–374
4. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics Vladikavkaz: Vladikavkaz Scientific Center Press, 2014.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

ПОЧТИ ВЫПУКЛЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

А. А. Литвинов
(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Выпуклые числовые последовательности, помимо самостоятельного интереса для исследования, играют существенную роль в проблеме описания (не) квазианалитических классов бесконечно дифференцируемых функций в подходе Данжуа — Карлемана, теории ультрадифференцируемых функций и ультрараспределений Румье — Коматсу, теории роста целых функций. В последние 10–15 лет с их помощью был полностью исследован ряд задач, касающихся свойств классических операторов интегрирования и дифференцирования в весовых банаховых пространствах голоморфных функций (см. [1–5]). Однако некоторые из этих свойств не удается охарактеризовать в рамках выпуклых последовательностей. В связи с этим представляет интерес вопрос о нетривиальном расширении класса выпуклых последовательностей. Нетривиальность понимается в том смысле, что с помощью новых весовых последовательностей можно определить пространства, которые невозможно задать выпуклыми последовательностями. В работе представлен такой класс, элементы которого названы почти выпуклыми последовательностями.

Определение 1. Последовательность $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ называется *выпуклой*, если

$$x_n \leqslant \frac{x_{n-1}+x_{n+1}}{2} \quad (\forall\, n \geqslant 0).$$

Определение 2. Пусть последовательность $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ возрастает, $x_n \to +\infty$. Последовательность $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ называется *почти выпуклой*, если

$$(\forall\, p > 1)\ (\exists\, N): \quad x_n \leqslant p\frac{x_{n-1}+x_{n+1}}{2} \quad (\forall\, n > N).$$

Определение 3. Пусть последовательность $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ возрастает, $x_n \to +\infty$. Последовательность $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ называется *сильно почти выпуклой*, если

$$(\exists\, C > 0): \quad 2x_n \leqslant x_{n-1}+x_{n+1}+C \quad (\forall n \geqslant 0).$$

Установлены простейшие свойства (сильно) почти выпуклых последовательностей, связанные с арифметическими операциями над ними.

Предложение 1. *Последовательность $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ почти выпукла тогда и только тогда, когда*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}+x_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Рассмотрены следующие задачи:

1. Для всякой ли (сильно) почти выпуклой последовательности $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ существует такая выпуклая последовательность $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, что при некотором $C > 0$

$$|x_n - y_n| \leqslant C \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}_0)?$$

2. Пусть $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ — почти выпуклая последовательность. Требуется выяснить, существует ли такая выпуклая последовательность $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ и $C > 1$, что

$$\frac{1}{C} y_n \leqslant x_n \leqslant C y_n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}_0).$$

Доказана невозможность аппроксимации (сильно) почти выпуклых последовательностей выпуклыми. Таким образом, ответ на обе поставленные задачи отрицателен. Это означает, что класс почти выпуклых последовательностей может быть в будущем использован для решения некоторых задач весовых пространств, для которых класс выпуклых последовательностей недостаточен.

Литература

1. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье.—М.: Мир, 1986.—464 с.
2. *Абанин А. В., Кораблина Ю. В.* К вопросу об аппроксимации выпуклых функций // Изв. вузов. Сев.–Кавк. регион. Физ.-мат. науки.—2018.—№ 3.—С. 4–9.
3. *Abakumov E., Doubtsov E.* Moduli of holomorphic functions and logarithmically convex radial weights // Bull. London Math. Soc.—2015.—Vol. 47, № 3.—P. 519–532.
4. *Azagra D.* Global and fine approximation of convex functions // Proc. London Math. Soc.—2013.—Vol. 107, № 3.—P. 799–824.
5. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Differentiation and integration operations on weighted Banach spaces of holomorphic functions // Math. Nachr.—2017.—Vol. 290, № 8–9.—P. 1144–1162.

GENERALIZED MATHEMATICAL MODEL FOR POPULATION DYNAMICS AND AGE STRUCTURE

F. M. Losanova (Russia, Nalchik; IAMA KBSC RAS),
R. O. Kenetova (Russia, Nalchik; IAMA KBSC RAS)

In the domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t\}$ consider a mathematical model that describes the dynamics of the population size of a species

$$\partial_{0x}^{\alpha} u(x,t) + \lambda \partial_{0t}^{\beta} u(x,t) + c(x)u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

with $\alpha = 1$ and $\beta = 1$ it is a generalization for the McKendrick von Foerster equation [1]. Here $u = u(x,t)$ is interpreted as the population density of the age $x \in (0,l)$ at time $t > 0$, $\partial_{0x}^{\alpha} u(x,t)$ — change in the number of individuals of age x at fixed t, $\partial_{0t}^{\beta} u(x,t)$ — change in the number of individuals at different times for a fixed x, $\partial_{0x}^{\alpha}, \partial_{0t}^{\beta}$ is the regularized (Caputo) derivative [2], $0 < \alpha < \beta < 1$, $f(x,t)$, $c(x)$ are the given functions, while the function $c(x)$ is the function of mortality, and $f(x,t)$ describes various demographic processes, $\lambda = \mathrm{const}$ — coefficient change status. For equation (1) the solution of the Cauchy problem was found in [1].

By a *regular solution* of equation (1) in the domain Ω we mean the function $u = u(x,t)$ from the class $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$; $u_x(x,t), \partial_{0x}^{\alpha} u(x,t), \partial_{0t}^{\beta} u(x,t) \in C(\Omega)$ satisfying equation (1) in the domain Ω.

Problem. Find a regular solution $u(x,t)$ to equation (1) in the domain Ω satisfying conditions

$$u(0,t) + \int_0^l M(\xi)\, u(\xi,t)\, d\xi = \varphi(t), \quad 0 < t, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3}$$

Condition (2) is called the fertility equation [1], where $u(0,t)$ is the is the density of newborn individuals in the population, l is the age limit, $M(\xi)$ is the fertility function, and $\varphi(t)$ is some control function for possible human intervention on population dynamics.

The initial condition (3) is necessary to study the dynamics of the age structure of the population.

In article the existence of a unique regular solution to the problem (1)–(3) is proved.

References

1. *Nakhushev A. M.* Equation of Mathematical Biology.—Moscow: Vysshaja shkola, 1995
2. *Nakhushev A. M.* Fractional Calculus and its Application.—Moscow: Fizmatlit, 2003.—272 p.

СТРУКТУРНЫЕ КОМПОНЕНТЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО МИРОВОЗЗРЕНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ[1]

К. Г. Лыкова

(Россия, Елец; ЕГУ им. И. А. Бунина)

Вопрос формирования стохастического мировоззрения старшеклассников на сегодняшний день в условиях происходящих изменений, неопределенности и нестабильности приобретает характер объективной необходимости, приводит к росту восприимчивости мировых тенденций в образовании, повышению интереса к знаниям, науке и инновационным технологиям. Стохастическое мировоззрение учащегося — есть закономерный результат познавательной деятельности, не исключающий множество случайностей в ходе анализа условий и наиболее рационального истолкования тенденций их функционирования или отклонения. Овладение старшеклассниками универсальными методами и способами познания мира для ориентации в нем и адаптации к нему на основе знаний стохастики в ситуациях неопределенности положительно влияет на формирование стохастического мировоззрения. Центральной основой формирования стохастического мировоззрения выступает выделение трех его структурных компонентов: мотивационно-ценностные отношения, интуитивно-образное восприятие и рационально-логическое принятие.

Мировоззрение каждого человека неповторимо, в его основу заложен уникальный индивидуальный опыт и специфические знания о природе. На основе мировоззренческих положений осуществляется оценка явлений действительности. Взаимосвязь чувственных и интеллектуальных представлений человека о мире и самом себе, проявляется в качестве важнейшего аспекта структуры мировоззрения. Мировоззренческому познанию свойственна специфическая незавершенность и динамичность, побуждение к внутренним обновлениям и совершенствованиям [1].

Большинство ученых (В. П. Иванов, Б. Т. Лихачев, Н. А. Менчинская, Э. И. Моносзон и др.) о содержательном наполнении мировоззрения придерживаются мнения, что в мировоззрении взаимопереплетены чувственная и интеллектуальная стороны личности. В мировоззрении упорядочивается взаимосвязь чувственной и рациональной сфер сознания с образованием новой качественной целостности.

В качестве структурных компонентов стохастического мировоззрения были выявлены: мотивационно-ценностные отношения, интуитивно-образное восприятие и рационально-логическое принятие.

Мотивационно-ценностные отношения в составе стохастического мировоззрения старшеклассников. Отношения старшеклассников к элементам стохастики формируются не только под воздействием внешних обстоятельств, но

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-313-9019.

и в зависимости от индивидуальных интересов, склонностей, в том числе собственной системы ценностей. Исследуя отношения в качестве действительно существующей связи между учащимся и закономерностями окружающего мира, определим характер этих отношений как ценностно-смысловой. Мотивационные состояния в познавательной деятельности являются своего рода «строительным материалом личности».

Интуитивно-образное восприятие в составе стохастического мировоззрения старшеклассников. Человеческое мышление интуитивно и в большей степени представлено вероятностным характером. Познавая окружающий мир, человек воспринимает его в зрительных образах, по средствам мироощущения и эмоционально-чувственного опыта, без установления логических взаимосвязей возникающих образов. Адекватность создаваемых образов по отношению к реальному миру определяется интуитивно. Такие выдающиеся математики, как Л. Д. Кудрявцев, А. Пуанкаре, А. Я. Хинчин и др. отмечали необходимость задействования интуитивной составляющей и образных компонентов в познавательном процессе для раскрытия математических понятий. При таком восприятии выявляются новые подходы к решению проблемных ситуаций, а взаимосвязи и закономерности исследуются с различных точек зрения.

Рационально-логическое принятие в составе стохастического мировоззрения старшеклассников. Изучение учащимися 10–11 классов элементов стохастики позволяет совершенствовать основные мыслительные действия и операции: анализ, синтез, сравнение, абстракцию, обобщение, систематизацию, конкретизацию и др. В связи с чем развитие мышления школьников является закономерным результатов познавательной деятельности, осуществляется более качественное усвоение стохастических знаний, что приводит к комплексному и опосредованному пониманию устройства мира. Результат принятия решений является производным ситуации неопределенности, в рамках которой он осуществляется. Американский психолог К. Халл отмечает: «Принятие решения представляет собой систему процедур, направленных на извлечение причинно-следственной связи, сбор информации из различных источников, использование знаний для анализа ситуации и построения представления о ней» [2]. Рационально-логическое принятие направлено на выбор наиболее оптимального решения из множества альтернатив для конкретной проблемы.

Таким образом, представленные компоненты позволяют судить о качестве, направленности стохастического мировоззрения у старшеклассников, о преобладающих отдельных его особенностях и чертах. А сам процесс формирования мировоззрения в исследовании возможностей математического образования в рамках стохастики для развития научных представлений об универсальной природе многих случайных явлений и процессов действительности является весьма перспективным.

Литература

1. *Шуртаков К. П.* Мировоззрение и методы его формирования: Концептуально-философский анализ.—Казань, 1989.—212 с.
2. *Халл К. Л.* Принципы поведения.—1943.

СОБОЛЕВСКИЕ СИСТЕМЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ С ДВУМЯ ДИСКРЕТНЫМИ ТОЧКАМИ[1]

М. Г. Магомед-Касумов
(Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН; Махачкала, ДФИЦ РАН)

Пусть в пространстве $W^1_{L^2} = W^1_{L^2[a,b]}$, состоящем из абсолютно непрерывных функций, производные которых принадлежат $L^2 = L^2[a,b]$, задано скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle_S = f(a)g(a) + f(b)g(b) + \int\limits_a^b f'(t)g'(t)\,dt. \tag{1}$$

Системы функций, ортогональные относительно скалярных произведений вида (1), но с одной дискретной точкой, детально исследовались в работах И. И. Шарапудинова (см., например, [1, 2]). В данной работе мы перенесем некоторые из результатов, полученных в упомянутых работах, на случай скалярного произведения (1).

Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — система функций, заданная в пространстве L^2. На основе этой системы определим новую систему функций $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}\}_{k=0}^{\infty}$ с помощью формул:

$$\varphi_{1,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{2}$$

$$\varphi_{1,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}J_0^2}}\left(-\frac{1}{2}J_0 + \int\limits_a^x \varphi_0(t)\,dt\right), \quad J_0 = \int\limits_a^b \varphi_0(t)\,dt, \tag{3}$$

$$\varphi_{1,k}(x) = \int\limits_a^x \varphi_{k-1}(t)\,dt, \quad k \geqslant 2. \tag{4}$$

Теорема 1. *Если система функций Φ ортонормирована в L^2 и для нее выполнены условия*

$$\int\limits_a^b \varphi_0(t)\,dt \neq 0, \quad \int\limits_a^b \varphi_k(t)\,dt = 0, \quad k \geqslant 1, \tag{5}$$

то система функций Φ_1, порожденная формулами (2)–(4), *будет ортонормирована относительно скалярного произведения* (1).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00477 мол_а.

Утверждение. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ *— полная ортонормированная в* L^2 *система функций. Тогда условия* (5) *выполнены в том и только в том случае, если* $\varphi_0 = \mathrm{const}$ *почти всюду.*

Отсюда вытекает, что если $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система в L^2, то в силу нормированности $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$. Следовательно, для таких систем формулу (3) можно записать в следующем виде:

$$\varphi_{1,1}(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{b-a}\sqrt{\frac{b-a}{2}+1}}. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_k\}$ *— ортонормированная в* L^2 *система функций, причем* $\varphi_0 = \mathrm{const} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$. *Пусть* $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}\}$ *— система, порожденная формулами* (2)–(4). *Если* Φ *полна в* L^2, *то* Φ_1 *будет полна в* $W^1_{L^2}$.

Рассмотрим ряд Фурье функции $f \in W^1_{L^2[a,b]}$ по системе Φ_1, порожденной полной ортонормированной системой Φ посредством формул (2)–(4):

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_{1,k}(f)\varphi_{1,k}(x), \quad c_{1,k}(f) = \langle f, \varphi_{1,k}\rangle_S.$$

Нетрудно показать, что

$$c_{1,0}(f) = \frac{f(a)+f(b)}{\sqrt{2}},$$

$$c_{1,1}(f) = (f(b)-f(a))\left(\frac{b-a}{2}+1\right)\frac{1}{\sqrt{b-a}\sqrt{\frac{b-a}{2}+1}},$$

$$c_{1,k}(f) = \int\limits_a^b f'(t)\varphi_{k-1}(t)\,dt = \langle f', \varphi_{k-1}\rangle = c_{k-1}(f'), \quad k \geqslant 2. \tag{7}$$

Отсюда, используя (2) и (6), можно получить следующее представление ряда Фурье:

$$f(x) \sim \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x - a - \frac{b-a}{2}\right) + \sum_{k=2}^{\infty} c_{1,k}(f)\varphi_{1,k}(x).$$

Частичные суммы ряда Фурье будем обозначать символом $S_{1,n}$:

$$S_{1,n}(f,x) = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x - a - \frac{b-a}{2}\right) + \sum_{k=2}^{n} c_{1,k}(f)\varphi_{1,k}(x).$$

Отметим некоторые свойства частичных сумм.

1. Совпадение на концах с приближаемой функцией:

$$S_{1,n}(f,a) = f(a), \quad S_{1,n}(f,b) = f(b), \quad n \geqslant 2.$$

2. Дифференциальное свойство:

$$S'_{1,n}(f,x) = S_{n-1}(f',x).$$

Теорема 3. *Если Φ_1 — полная ортонормированная система в $W^1_{L^2}$, то для любой функции $f \in W^1_{L^2}$ ряд Фурье этой функции по системе Φ_1 равномерно сходится к самой функции.*

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Ортогональные по Соболеву системы функций и некоторые их приложения // Успехи мат. наук.—2019.—Т. 74, № 4.—С. 87–164.
2. *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. математика.—2018.—Т. 82, № 1.—С. 225–258.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ[1]

М. Г. Мажгихова

(Россия, Нальчик; ИПМА КБНЦ РАН)

Рассмотрим уравнение

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

где $1 < \alpha \leqslant 2$, λ, μ — произвольные постоянные, τ — фиксированное положительное число, $H(t)$ — функция Хевисайда, D_{0t}^{α} — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана — Лиувилля [1]:

$$D_{st}^{\nu}g(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sign}(t-s)}{\Gamma(-\nu)} \int\limits_s^t \frac{g(\xi)\,d\xi}{|t-\xi|^{\nu+1}}, & \nu < 0; \\ g(t), & \nu = 0; \\ \operatorname{sign}^n(t-s)\frac{d^n}{dt^n} D_{st}^{\nu-n}g(t), & n-1 < \nu \leqslant n,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Задача. Найти регулярное решение $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = c_1, \quad \lim_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) - a\lim_{t\to t_k}\sum_{k=1}^{n} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = c_2, \tag{2}$$

где c_1, c_2 — заданные постоянные.

Рассмотрим функцию

$$W_\nu(t) = W_\nu(t,\tau;\lambda,\mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m (t-m\tau)_+^{\alpha m+\nu-1} E_{\alpha,\alpha m+\nu}^{m+1}\left(\lambda(t-m\tau)_+^{\alpha}\right), \quad \nu \in \mathbb{R},$$

где

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}$$

— обобщенная функция Миттаг-Леффлера [2], $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, $(\rho)_k = \frac{\Gamma(\rho+k)}{\Gamma(\rho)}$ — символ Похгаммера,

$$(t-m\tau)_+ = \begin{cases} t-m\tau, & t-m\tau > 0; \\ 0, & t-m\tau \leqslant 0. \end{cases}$$

[1]Работа публикуется в рамках выполнения государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611, по проекту «Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи».

В работе показано, что функция

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi) - \frac{W_\alpha(t)}{\triangle}\left[W_2(1-\xi) - a\sum_{k=1}^{n} H(t_k-\xi)W_2(t_k-\xi)\right],$$

где

$$\triangle = W_2(1) - a\sum_{k=1}^{n} W_2(t_k) \neq 0, \tag{3}$$

является функцией Грина исследуемой задачи.

Доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть* $f(t) \in L(0,1) \cap C(0,1)$ *и выполнено условие* (3). *Тогда*

1) *решение задачи* (1), (2) *существует и имеет вид*

$$u(t) = -c_1 G(t,\xi)\big|_{\xi=0} + c_2 G_\xi(t,\xi)\big|_{\xi=1} + \int\limits_0^1 f(\xi)G(t,\xi)\,d\xi; \tag{4}$$

2) *решение задачи* (1), (2) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (3).

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Prabhakar T. R.* A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J.—1971.—Vol. 19.—P. 7–15.

РАЗРАБОТКА СРЕДСТВ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ, ПРОИСХОДЯЩИХ В ИЗМЕЛЬЧИТЕЛЬНОМ ОБОРУДОВАНИИ[1]

Д. Г. Минасян (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
А. С. Елоева (Россия, Владикавказ; ВНЦ РАН)

Были исследованы процессы происходящие в измельчительном оборудовании на примере центробежной мельницы вертикального типа. Проведено моделирование процессов с помощью двух различных математических моделей — континуальной модели, представляющей сыпучую среду как неньютоновскую жидкость, в которой коэффициент вязкости зависит от давления, а так же, с использованием метода динамики частиц. Была выбрана наиболее эффективная модель и разработано программное обеспечение для компьютерного моделирования процессов, происходящих в измельчительном оборудовании.

Представляется интересным проведение сравнения данных двух моделей и определение сферы применения и особенности использования для разных моделей.

С этой целью было проведено моделирование движения сыпучей среды в центробежной мельнице вертикального типа с использованием двух моделей.

Цилиндрический корпус центробежной мельницы неподвижен и на его поверхности, на всей поверхности ротора задавались условия отсутствия относительной скорости движения измельчаемого материала. Для гидродинамической модели принималось, что верхняя (свободная) поверхность столба измельчаемого материала в корпусе центробежной мельницы является горизонтальной, что является справедливым при больших высотах засыпки и на ней ставилось условие отсутствия трения.

Для привязки результатов счета к конкретному, легко проверяемому в лабораторных условиях, случаю был просчитан вариант работы центробежной мельницы с диаметром ротора $R = 0,15\,$м при частоте вращения ротора $310\,$мин$^{-1}$, высоте столба материала в корпусе — 0,27 м, установке в полости ротора трех радиальных ребер и размещении в рабочем пространстве коаксиального кольца.

Исходя из результатов моделирования можно сделать вывод, что для более точного моделирования процессов происходящих при быстром движении сыпучего материала в измельчительном оборудовании предпочтительнее использовать модель использующую метод дискретного элемента. Гидродинамическую модель целесообразно использовать для проведения большого количества поисковых рассветов или как модель предикатов, которая позволит быстро задать начальные значения скорости для частиц в модели использующей метод дискретного элемента.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00476.

Так же были разработаны средства компьютерного моделирования на бузе пакета LIGGGHTS, которые позволяют значительно упростить и ускорить процесс моделирования за счет применения GUI. В проекте использована библиотека VTK широко применяемая для научной графики. Программный комплекс разработан на языке Java и может быть использован на компьютерах под управлением ОС Windows, Linux, MacOS.

Литература

1. *Cundall P. A., Strack O. D. L.* A discrete numerical model for granular assemblies // Geotechnique.—1979.—Vol. 29 (1).—P. 47–65.
2. *Хетагуров В. Н., Каменецкий Е. С., Лапинагов А. М., Наниева Б. М.* Экспериментальное исследование характера движения измельчаемого материала в корпусе центробежной мельницы вертикального типа // Горный информационно-аналитический бюллетень.—М.: МГГУ, 2004.—№ 3.—С. 309–312.
3. *Zamankhan P., Soleymania A., Polashenski W. Jr., Zamankhan P.* Flow dynamics of grains in spinning bucket at high frequencies // Chemical Engineering Science.—2004.—Vol. 59 (1).—P. 235–246.
4. *Remy B., Khinast J., Glasser B.* Discrete element simulation of free flowing grains in a four-bladed mixer // AIChE Journal.—2009.—Vol. 55, № 8.—P. 2035–2048.
5. *Cleary P.* Modelling comminution devices using DEM // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.—2001.—Vol. 25, № 1.—P. 83–105.

МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ОБВАЛЬНЫХ ГОРНЫХ ПОРОД[1]

Н. С. Орлова
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Существует два основных подхода к моделированию движения обвальных горных пород. Первый подход — дискретный, при котором движение обвальной массы рассматривается как движение совокупности обломков (частиц), взаимодействующих друг с другом и с поверхностью склона. Второй подход — континуальный, при котором обвальная масса представляется в виде континуума. Характеристики континуума трактуются как местные средние значения параметров обломков.

Каждый из подходов имеет свои преимущества и недостатки. Дискретный подход физически более естественный для имитации падающих пород, но реализация моделей, основанных на таком подходе, требует достаточно мощных вычислительных ресурсов (в отличие от континуального подхода). Модели на основе континуального подхода позволяют получить расчеты быстрее, чем модели на основе дискретного подхода (что является существенным при моделировании реальных обвалов), но при этом невозможно проследить траектории движения отдельно взятых обломков.

Следует также отметить, что некоторые модели на основе континуального подхода учитывают частичное ожижение обломков, которое может возникать в процессе их движения вдоль склона. Таким образом, модели, основанные на дискретном и континуальном подходах имеют свои области применения. Более подробное исследование моделей представлено в работах [1–6].

Литература

1. *Кусраев А. Г., Минасян Д. Г., Орлова Н. С., Пантилеев Д. Г., Хубежты Ш. С.* Верификация модели обвалов, использующей метод дискретного элемента // Геология и геофизика Юга России.—2016.—№ 4.—С. 83–93.
2. *Орлова Н. С., Волик М. В.* Математическое моделирование движения обвалов с использованием континуального подхода // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2016.—№ 3.—С. 20–24.
3. *Орлова Н. С., Волик М. В.* Исследование влияния граничных условий на результаты моделирования движения обвалов // Процессы в геосредах.—2017.—№ 4.—С. 693–699.
4. *Орлова Н. С., Каменецкий Е. С.* Верификация модели горных обвалов на основе континуального подхода // Устойчивое развитие горных территорий.—2018.—№ 1.—С. 7–13.
5. *Орлова Н. С.* Исследование влияния коэффициента восстановления на результаты моделирования обвалов // Процессы в геосредах.—2018.—№ 3.—С. 1037–1041.
6. *Orlova N. S., Volik M. V.* Study of falling rocks using discrete element method // Processes in GeoMedia. Springer Geology.—2020.—Vol. 1.—P. 75–82.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-35-00147.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЫЛИ ПО СКЛОНАМ ГОРНОГО УЩЕЛЬЯ ОТ ХВОСТОХРАНИЛИЩА, РАСПОЛОЖЕННОГО В АЛАГИРСКОМ УЩЕЛЬЕ

О. С. Панаэтова (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
В. Ю. Тимченко (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
А. А. Радионов (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

В горных районах Северного Кавказа ведется активная промышленная и хозяйственная деятельность, добываются энергия и минеральные ресурсы, эксплуатируются транспортные артерии, проводится санаторно-курортное лечение. В ходе освоения горных территорий возникают разного рода источники загрязнения, в виде отвалов породы, выбросов аэрозолей, пыли и вредных веществ. Определение текущего и долговременного влияния вредных факторов, состояния климатических зон и прогнозирование изменений является актуальной научной задачей.

Для трехмерного моделирования вычислительные модели загрязнения вблизи Унальского и Фиагдонского хвостохранилищ строились на основании геоданных дистанционного зондирования Земли космической программы Space Shuttle, которые находятся в настоящее время в открытом доступе. Проведено определение района исследований, получение геоданных с информационного сервиса в виде графического файла, декодирование и преобразование данных о высотах в формат стереолитографии с использованием программного обеспечения heightmap2stl, Meshmixer. Построение сетки и присоединение к вычислительной модели выполнено с использованием инструментов blockMesh и snappyHexMesh из комплекса программных средств OpenFOAM.

Для оценки вредного воздействия пыли хвостохранилища на экологию, необходимо знать распределение ЗВ на склонах алагирского ущелья по всей его протяженности. Создание модели, точно учитывающей большое разнообразие атмосферных условий (направление и сила ветра, температура, влажность, облачный покров) в горной атмосфере задача весьма трудоемкая. В упрощенную модель включались региональные топографические особенности и характерные розы ветров, полученные из данных спутниковых группировок NASA ИСЗ GOES, METEOSAT, EOS Terra/Aqua -AVHRR/MODIS. Представление о приблизительном значении концентрации ЗВ в каждой точке склонов ущелья можно получить после нормировки на наблюдаемые в полевых условиях значения ЗВ.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ТОПОГРАФИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С УЧЕТОМ ЗАТУХАНИЯ[1]

Л. И. Паринова

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Результаты исследования особенностей распространения акустических волн, возникающих в протяженных клиновидных структурах, актуальны для усовершенствования работы фильтров и линий задержки. Изучение изменения скорости акустической волны в зависимости от угла раствора клина имеет практическое применение для разработки новых методов неразрушающего контроля, а также для дефектоскопии и сейсмологии. Отметим, что в реальных топографических структурах имеет место затухание, которое в настоящем сообщении моделируется в рамках модели линейной вязкоупругости и концепции комплексных модулей для стандартного вязкоупругого тела.

В представленном исследовании изучаются особенности распространения волновых процессов с учетом затухания. Рассматривается ограниченный по высоте вязкоупругий клин с треугольным поперечным сечением и жестко защемленный по основанию. Вычислительные эксперименты проводятся в предположении, что топографический пластинчатый волновод имеет малый угол раскрыва. Для определения особенностей затухания поверхностных акустических волн вводятся комплексные модули.

При исследовании структуры волновых полей принимается во внимание, что колебания протяженных структур разделяются на симметричные и антисимметричные, но для симметричного случая отсутствуют изучаемые типы движений. Поэтому учитывается антисимметричность и после перехода от трехмерной модели к плоскому случаю путем отыскания плоских волн вводятся гипотезы четности-нечетности по одной из координат.

Волновые процессы, возникающие в вязкоупругом ортотропном топографическом волноводе, изучаются в рамках модели пластины переменной жесткости. Введены гипотезы о структуре полей, аналогичные гипотезам Кирхгофа в теории пластин. С использованием вариационного принципа Гамильтона-Остроградского формируется упрощенный функционал, стационарное значение которого находится при помощи приближенного метода Ритца. Введены координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям на защемленной грани волновода. Изучена сходимость приближенных решений в зависимости от числа координатных функций.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-31-90079.

Построена система линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами, равенство нулю определителя которой дает комплексное дисперсионное множество. Разработаны вычислительные комплексы, при помощи которых определяются фазовые скорости и коэффициенты затухания для ряда материалов, представлены результаты вычислительных экспериментов.

Автор благодарит научного руководителя А. О. Ватульяна за внимание к работе.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА[1]

Д. М. Поляков

(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Пусть $L_2[0,\omega] = L_2([0,\omega],\mathbb{C})$. Настоящий доклад посвящен описанию асимптотики собственных значений дифференциального оператора третьего порядка $L_\theta : D(L_\theta) \subset L_2[0,\omega] \to L_2[0,\omega]$, $\theta \in [0,1]$, который определяется следующим дифференциальным выражением:

$$l(y) = iy^{(3)}(t) - ia(t)y'(t) - b(t)y(t),$$

где коэффициенты a, b являются комплекснозначными и принадлежат $L_2[0,\omega]$. Область определения $D(L_\theta) = \{y : y \in W_2^3([0,\omega],\mathbb{C})\}$ задается квазипериодическими краевыми условиями

$$y^{(j)}(0) = e^{i\pi\theta} y^{(j)}(\omega), \quad \theta \in [0,1],\ j = 0,1,2.$$

Отметим, что при $\theta = 0$ краевые условия будут периодическими, а при $\theta = 1$ — антипериодическими.

Интерес к изучению данного оператора связан с тем, что он возникает в различных задачах механики и физики. В частности, при исследовании моделей потока тонкой пленки вязкой жидкости или моделей колебания эластичной балки [1]. Кроме того, операторы третьего порядка возникают в методе обратной задачи интегрирования нелинейного эволюционного уравнения Буссинеска [2]. Спектральный анализ вещественного самосопряженного оператора третьего порядка с негладкими коэффициентами был ранее проведен в [3].

Для исследования оператора L_θ применяется новая техника, которая развивает идеи из [4] и [5]. Эта техника позволяет уточнить, а в ряде случаев усилить, известную ранее асимптотику собственных значений [6].

Теорема 1. *Дифференциальный оператор L_θ, $\theta \in [0,1]$, является оператором с дискретным спектром. Более того, найдется такое достаточно большое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что спектр оператора L_θ представим в виде*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \cup \left\{ \widetilde{\lambda}_{n,\theta}, |n| \geqslant m+1 \right\}, \tag{1}$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом точек не превосходящим $2m+1$. Собственные значения $\widetilde{\lambda}_{n,\theta}$ являются простыми и допускают следующую асимптотику:

$$\widetilde{\lambda}_{n,\theta} = \frac{\pi^3(2n+\theta)^3}{\omega^3} + \frac{\pi(2n+\theta)}{\omega^2}\int\limits_0^\omega a(t)\,dt - \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega b(t)\,dt -$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00205.

$$
-\frac{1}{8\pi}\Bigg(\int\limits_0^{\omega} a(t)(a*h_n)(t)\,dt - h_n^0\Bigg) - \frac{1}{2i\pi\sqrt{3}}\Bigg(\int\limits_0^{\omega} a(t)(a*\widetilde{h}_n)(t)\,dt - \widetilde{h}_n^0\Bigg) +
$$

$$
+\frac{\omega}{6\pi^2(2n+\theta)}\Bigg(\frac{12}{\sqrt{3}}\int\limits_0^{\omega} a(t)(b*g_n)(t)\,dt + \int\limits_0^{\omega} a(t)(b*f_n)(t)\,dt +
$$

$$
+\int\limits_0^{\omega}(a*f_n)(t)b(t)\,dt - g_n^0 - 2f_n^0\Bigg) + \mathscr{O}(n^{-2}), \quad |n| \geqslant m+1,
$$

где

$$
\begin{aligned}
&f_n(t) = -i\pi\Big(\frac{2t}{\omega} + e^{-\pi v t/\omega} - e^{\pi v (t/\omega - 1)}\Big),\\
&g_n(t) = \frac{\pi}{2}\Big(e^{\pi v i(i-\sqrt{3})t/(2\omega)} + e^{\pi v i(i+\sqrt{3})(-t/(2\omega)+1/2)}\Big),\\
&h_n(t) = -\frac{i4\pi t}{3\omega}\Big(2 - (1 - i\sqrt{3})e^{i2\pi\alpha t/\omega} - (i\sqrt{3}+1)e^{-i2\pi\beta t/\omega}\Big),\\
&\widetilde{h}_n(t) = \frac{i2\pi t}{\omega}\Big(e^{-i2\pi\beta t/\omega} - e^{i2\pi\alpha t/\omega}\Big),\\
&\alpha = \frac{i\sqrt{3}-3}{4}(2n+\theta), \quad \beta = \frac{i\sqrt{3}+3}{4}(2n+\theta), \quad v = \sqrt{3}(2n+\theta),
\end{aligned}
$$

и f_n^0, g_n^0, h_n^0, $\widetilde{h}_n^0$ *— средние значения функций* $a*(b*f_n)$, $a*(b*g_n)$, $a*(a*h_n)$, $a*(a*\widetilde{h}_n)$, *соответственно:*

$$
f_n^0 = \int\limits_0^{\omega}(a*(b*f_n))(t)\,dt, \quad g_n^0 = \int\limits_0^{\omega}(a*(b*g_n))(t)\,dt,
$$

$$
h_n^0 = \int\limits_0^{\omega}(a*(a*h_n))(t)\,dt, \quad \widetilde{h}_n^0 = \int\limits_0^{\omega}(a*(a*\widetilde{h}_n))(t)\,dt.
$$

Литература

1. *Bernis F., Peletier L. A.* Two problems from draining flows involving third-order ordinary differential equations // SIAM J. Math. Anal.—1996.—Vol. 27, № 2.—P. 515–527.
2. *McKean H.* Boussinesq's equation on the circle // Comm. Pure Appl. Math.—1981.—Vol. 34, № 2.—P. 599–691.
3. *Баданин А. В., Коротяев Е. Л.* Оператор третьего порядка с периодическими коэффициентами на вещественной оси // Алгебра и анализ.—2013.—Т. 25, № 5.—С. 1–31.
4. *Баскаков А. Г., Поляков Д. М.* Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом // Мат. сб.—2017.—Т. 208, № 1.—С. 3–47.
5. *Поляков Д. М.* Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями // Алгебра и анализ.—2015.—Т. 27, № 5.—С. 117–152.
6. *Veliev O. A.* On the nonself-adjoint ordinary differential operators with periodic boundary conditions // Israel J. Math.—2010.—Vol. 176.—P. 195–207.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

О НУЛЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ И. И. ПРИВАЛОВА[1]

Е. Г. Родикова

(Россия, Брянск; БГУ им. И. Г. Петровского)

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, D — единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ — множество всех функций, аналитических в D, Z_f — множество всех нулей нетривиальной функции $f \in H(D)$, $n(r) = \operatorname{card}\{z_k : \ |z_k| < r < 1\}$.

При всех $0 < q < +\infty$ определим класс Привалова Π_q (см. [1]):

$$\Pi_q = \left\{ f \in H(D) : \ \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| \right)^q d\theta < +\infty \right\}.$$

Отметим, что классы Π_q впервые были рассмотрены И. И. Приваловым в [1]. При $q = 1$ класс Привалова совпадает с хорошо известным в научной литературе классом функций ограниченного вида или классом Р. Неванлинны N (см. [2]).

Задача характеризации корневых множеств функций различных классов аналитических функций неоднократно поднималась в работах специалистов в области комплексного анализа. В частности, в работах автора [3, 4]. Данная работа посвящена исследованию нулевых множеств класса И. И. Привалова в круге. При $1 \leqslant q < +\infty$ справедливо включение $\Pi_q \subseteq N$, где N — класс функций ограниченного вида, и из свойств произведения Бляшке

$$B(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \, \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}$$

следует, что корневые множества характеризуются хорошо известным условием Бляшке

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|) < +\infty. \tag{1}$$

Однако при $0 < q < 1$ условие Бляшке уже не является необходимым, более того, нулевые множества классов Π_q, $0 < q < 1$, существенно зависят от значения параметра q, как впервые было установлено в работе Ф. А. Шамояна и его соавторов [5]. В дальнейшем, в работах [6] и [7] этот результат был уточнен.

В частности, в недавней работе [7] Ф. А. Шамояном был получен следующий интересный результат.

Теорема Ш. *Пусть* $\{z_k\} \subset D$, $0 < q < 1$. *Если* $\{z_k\} = Z_f$ *для некоторой* $f \in \Pi_q$, *то*

$$n(r) \leqslant \frac{1}{(1-r)^{1/q}}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00180.

Обратно, если точки последовательности $\{z_k\} \subset D$ расположены в конечном числе углов Штольца и

$$\int_0^1 n^q(r)\,dr < +\infty, \tag{2}$$

то можно построить функцию $g \in \Pi_q$ такую, что $Z_g = \{z_k\}$.

Напомним определение:

Определение. *Углом Штольца* $\Gamma_\delta(\theta)$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$ называется угол раствора $\pi\delta$, $0 < \delta < 1$, биссектриса которого совпадает с отрезком $re^{i\theta}$, $0 \leqslant r < 1$.

Нам удалось уточнить необходимое условие теоремы Ш следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $\{z_k\} \subset D$, $0 < q < 1$. Если $\{z_k\} = Z_f$ для некоторой $f \in \Pi_q$, то*

$$\int_0^1 n^q(r)\,dr < +\infty.$$

Таким образом, в теореме 1 установлено, что достаточное условие на нули, расположенные в углах Штольца, найденное Ф. А. Шамояном, является также и необходимым. Отметим, что при доказательстве теоремы 1 использовалась

Теорема М [8]**.** *Если $f \in \Pi_q$, $0 < q < 1$, то*

$$\ln^+ M(r,f) = o\big((1-r)^{-1/q}\big), \quad r \to 1-0, \tag{3}$$

где $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Объединяя воедино результаты теорем Ш и 1, получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\{z_k\}$ — произвольная последовательность точек, содержащаяся в конечном числе углов Штольца в единичном круге, $0 < q < 1$. Для того чтобы $\{z_k\} = Z_f$ для некоторой нетривиальной $f \in \Pi_q$, необходимо и достаточно чтобы $\int_0^1 n^q(r)\,dr < +\infty$.*

Однако уйти при доказательстве достаточности от требования принадлежности корней углам Штольца пока не удалось. Таким образом, проблема полной характеризации корневых множеств функций из класса И. И. Привалова в круге пока остается открытой.

Литература

1. *Привалов И. И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций.—М.: Изд-во МГУ, 1941.—206 с.
2. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции / Пер. с нем.; М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев (ред. и доп.); В. И. Волковыский (пер.).—М.–Л.: ГИТТЛ, 1941.—388 с.
3. *Родикова Е. Г.* Факторизационное представление и описание корневых множеств одного класса аналитических в круге функций // Сиб. электрон. мат. изв.—2014.—С. 52–63.—URL: http://semr.math.nsc.ru

4. *Шамоян Ф. А., Родикова Е. Г.* О характеризации корневых множеств одного весового класса аналитических в круге функций // Владикавк. мат. журн.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2014.—Т. 16, № 3.—С. 64–75.
5. *Шамоян Ф. А., Беднаж В. А., Приходько О. В.* О нулевых множествах некоторых весовых классов аналитических в круге функций // Вестн. Брянского гос. ун-та. Естественные и точные науки.—2008.—№ 4.—С. 85–92.
6. *Родикова Е. Г.* О свойствах нулей функций из классов И. И. Привалова в круге // Учен. зап. Брянского гос. ун-та.—2019.—№ 4.—С. 19–22.
7. *Шамоян Ф. А.* О некоторых свойствах нулевых множеств класса И. И. Привалова в круге // Зап. науч. семинара ПОМИ.—2019.—Т. 480.—С. 199–205.
8. *Rodikova E. G.* Coefficient multipliers for the Privalov class in a disk // J. of Siberian Federal University. Mathematics & Physics.—2014.—Vol. 11, № 6.—P. 723–732.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПО СОБОЛЕВУ ПОЛИНОМОВ, ПОРОЖДЕННЫХ КЛАССИЧЕСКИМИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ПОЛИНОМАМИ ДИСКРЕТНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

М. С. Султанахмедов
(Россия, Махачкала; ДФИЦ РАН)

Хорошо известно, что рекуррентные соотношения являются одним из ключевых свойств классических ортогональных полиномов. Они используются в исследовании различных свойств систем ортогональных полиномов, а также для вычисления значений полиномов в произвольно заданной точке.

В работе [1] автором были установлены рекуррентные соотношения для полиномов, порожденных классическими ортогональными полиномами и ортогональных в смысле скалярного произведения типа Соболева вида

$$\langle f, g\rangle_{sob} = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\omega(t)\,dt,$$

где $\omega(t)$ — весовая функция.

В настоящей работе рассматривается дискретный аналог указанных полиномов, а именно полиномы, порожденные классическими ортогональными полиномами дискретной переменной и ортогональных в смысле скалярного произведения типа Соболева вида

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \triangle^\nu f(0)\triangle^\nu g(0) + \sum_{t\in\Omega} \triangle^r f(t)\triangle^r g(t)\omega(t), \tag{1}$$

где $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ — дискретная сетка, а $\triangle f(t) = f(t+1) - f(t)$ — оператор конечной разности, для которого $\triangle^{k+1} f(t) = \triangle(\triangle^k f(t))$.

Обозначим через $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ систему полиномов, ортонормированных в пространстве $l_{p,\omega}(\Omega)$ функций $f(x)$, заданных на Ω, для которых

$$\sum_{t\in\Omega} |f(t)|^p\,\omega(t)\,dx < \infty.$$

Другими словами, справедливо равенство

$$(\psi_n, \psi_m) = \langle \psi_n, \psi_m\rangle_{l_{2,\omega}(\Omega)} = \sum_{t\in\Omega} \psi_n(t)\,\psi_m(t)\omega(t)\,dt = \delta_{n,m},$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера.

Рассмотрим новую систему полиномов $\{\psi_{r,n}(x)\}$, заданных следующими равенствами:

$$\psi_{r,n}(x) = \frac{x^{[n]}}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots, r-1, \tag{2}$$

$$\psi_{r,n}(x) = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{(r-1)!} \sum\limits_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} \, \psi_{n-r}(t), & x \geqslant r \\ 0, & x < r \end{matrix} \right\}, \quad n \geqslant r, \tag{3}$$

где $a^{[k]} = a(a-1)\cdots(a-k+1)$, $a^{[0]} = 1$.

При этом мы условимся считать, что $\psi_{0,n}(x) = \psi_n(x)$.

В работе [2] показано, что система $\{\psi_{r,n}(x)\}$ является ортогональной в смысле скалярного произведения (1) и полной в пространстве $W^r_{l_\omega} \subset l_\omega$, состоящем из дискретных функций, для которых скалярное произведение (1) имеет смысл.

Положим теперь $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ одной из систем классических ортогональных полиномов дискретной переменной. Тогда справедлива следующая трехчленная рекуррентная формула:

$$\psi_n(x) = (A_n x + B_n)\psi_{n-1}(x) + C_n \psi_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Нами доказано следующее утверждение, устанавливающее рекуррентные соотношения для полиномов, ортогональных по Соболеву и порожденных классическими ортогональными полиномами дискретной переменной.

Теорема 1. *При $r \geqslant 1$ для системы полиномов $\{\psi_{r,n}\}_{n=0}^{\infty}$, ортогональных в смысле* (1) *и порожденных системой ортогональных полиномов $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$, имеют место следующие рекуррентные формулы*

$$\psi_{r,0}(x) = 1, \quad \psi_{r,n}(x) = \frac{x-n+1}{n} \, \psi_{r,n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots, r-1;$$

$$\psi_{0,0}(x) = \psi_0, \quad \psi_{r+1,r+1}(x) = \frac{2x-r}{r} \, \psi_{r,r}(x) - \binom{x+1}{r+1} \psi_0 =$$

$$= \left[\frac{x-r}{r} - \frac{p_1^{\psi}}{r k_1^{\psi}} \right] \psi_{r,r}(x) + \frac{\psi_0}{r k_1^{\psi}} \psi_{r,r+1}(x), \quad r = 1, 2, \ldots,$$

$$A_n r \psi_{r+1,r+n}(x) = \left[A_n(x-r) + B_n \right] \psi_{r,r+n-1}(x) + \\ + C_n \psi_{r,r+n-2}(x) - \psi_{r,r+n}(x), \quad n \geqslant 2,$$

где k_1^{ψ} и p_1^{ψ} — коэффициенты полинома первой степени $\psi_1(t) = k_1^{\psi} t + p_1^{\psi}$, а *$A_n$, B_n и C_n имеют тот же смысл, что и в* (4).

Замечание 1. Рекуррентные соотношения для полиномов $\psi_{1,n+1}(x)$, $n \geqslant 1$, для каждой конкретной системы необходимо устанавливать, отдельно используя специальные свойства исходной ортогональной системы $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Литература

1. *Sultanakhmedov M. S.* Recurrence Relations for Sobolev Orthogonal Polynomials // Probl. Anal. Issues Anal.—2020.—Vol. 9 (27), № 2.—P. 97–118.
2. *Шарапудинов И. И., Гусейнов И. Г.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные полиномами Шарлье // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика—2018.—Т. 18, № 2.—С. 196–205.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

СЖИМАЮЩИЕ ПРОЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ[1]

Б. Б. Тасоев

(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

В докладе приводится описание структуры положительных сжимающих проекторов в пространствах Лебега $L_{p(\cdot)}$ с σ-конечной мерой и с существенно ограниченным переменным показателем $p(\cdot)$. Данное описание обобщает аналогичные результаты, полученные в работах [1–3].

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой. Символом $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ будем обозначать множество классов эквивалентности измеримых почти всюду конечных функций. Всюду далее функция $p(\cdot) \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ такая, что $\mathbf{1}_\Omega \leqslant p(\cdot)$ почти всюду на Ω. Обозначим символом $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ множество всех функций $f \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$, для которых $\int_\Omega |f(t)|^{p(t)}\, d\mu(t) < \infty$. В пространстве $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ введем норму $\|\cdot\|$ по формуле

$$\|f\| := \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_\Omega \left|\frac{f(t)}{\lambda}\right|^{p(t)} d\mu(t) \leqslant 1\right\} \quad (f \in L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)).$$

Тогда $(L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu), \|\cdot\|)$ является банаховой решеткой. Кроме того, $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ — идеальное подпространство в $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Алгебраические и решеточные операции в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ осуществляются поточечно почти всюду.

Пусть $0 < e \in L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ и Σ_0 — некоторое σ-подкольцо в Σ с единицей $\Omega_0 = \operatorname{supp} e$. Так как $1 \leqslant p(\cdot) \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, то в силу [4, Proposition 2.12] $e^{p(\cdot)} \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Введем конечную меру $e^{p(\cdot)}\mu$ по формуле $e^{p(\cdot)}\mu(A) := \int_A e^{p(\cdot)}\, d\mu$ для всех $A \in \Sigma$. Ясно, что произвольная функция h принадлежит $L_1(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ тогда и только тогда, когда $\int_\Omega |h| e^{p(\cdot)}\, d\mu < \infty$. Возьмем произвольную функцию $h \in L_1(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ и положим по определению $\lambda(A) := \int_A h e^{p(\cdot)}\, d\mu$ для всех $A \in \Sigma_0$. Тогда $\lambda : \Sigma_0 \to \mathbb{R}$ конечная мера и по теореме Радона — Никодима существует единственная функция $\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0) \in L_1(\Omega_0, \Sigma_0, e^{p(\cdot)}\mu)$ такая, что

$$\int\limits_A h e^{p(\cdot)}\, d\mu = \int\limits_A \mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0) e^{p(\cdot)}\, d\mu \tag{1}$$

для всех $A \in \Sigma_0$. Продолжим функцию $\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0)$ на Ω, полагая $\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0)(t) = 0$ для всех $t \in \Omega \setminus \Omega_0$, и обозначим это продолжение снова через $\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0)$. Тогда в силу определения 3.1 $\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0)$ — единственный элемент из $L_1(\Omega, \Sigma_0, e^{p(\cdot)}\mu)$, удовлетворяющий соотношению (1).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-91339 ННИО_а.

Определение 1. Отображение $\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(\cdot|\Sigma_0) : h \mapsto \mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0)$ из $L_1(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ в $L_1(\Omega, \Sigma_0, e^{p(\cdot)}\mu)$, определяемое соотношением (1), называется *оператором условного ожидания* для меры $e^{p(\cdot)}\mu$ относительно σ-кольца Σ_0 с единицей Ω_0.

Определение 2. Оператор $T : X \to Y$ между нормированными пространствами X, Y называется *сжимающим*, если его норма меньше единицы.

Символом $\mathscr{R}(T) := \{T(f) : f \in X\}$ будем обозначать образ оператора $T : X \to Y$, действующего в нормированных пространствах X и Y.

Теорема. *Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой, E — замкнутый по норме порядковый идеал в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$, $P : E \to E$ — положительный сжимающий проектор. Тогда существуют $0 < e \in \mathscr{R}(P)$, σ-подкольцо Σ_0 в Σ с единицей $\Omega_0 := \operatorname{supp} e$ и единственная положительная функция $w \in L_0(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ такие, что $\operatorname{supp} \mathscr{R}(P) = \Omega_0$, $\operatorname{supp} w \subset \operatorname{supp} \Omega_0$ и справедливо представление $P(f) = e\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(e^{-1}wf|\Sigma_0)$ для всех $f \in \{e\}^{\perp\perp} \subset E$.*

Следствие. *Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой, E — замкнутый по норме порядковый идеал в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$, $P : E \to E$ — положительный сжимающий проектор. Тогда существуют замкнутые идеальные подпространства E_1, E_2 в E и положительные сжимающие операторы $P_{11} : E_1 \to E_1$ и $P_{12} : E_2 \to E_1$ такие, что $E = E_1 \oplus E_2$, $P_{11}P_{12} = P_{12}$, $P_{11}^2 = P_{11}$ и оператор P имеет матричное представление*

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Более того, существуют $0 < e \in \mathscr{R}(P)$, σ-подкольцо Σ_0 в Σ с единицей $\Omega_0 = \operatorname{supp} e$ и единственная положительная функция $w \in L_0(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ такие, что $\operatorname{supp} \mathscr{R}(P) = \Omega_0$, $\operatorname{supp} w = \Omega_0$, и имеет место представление $P_{11}(f) = e\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(e^{-1}wf|\Sigma_0)$ для всех $f \in E_1$.

Литература

1. *Ando T.* Contractive projections in L_p spaces // Pacific J. Math.—1966.—Vol. 17.—P. 391–405.
2. *Douglas R. G.* Contractive projections on an L_1 space // Pacific J. Math.—1965.—Vol. 15, № 2.—P. 443–462.
3. *Dodds P. G., Huijsmans C. B., de Pagter B.* Characterizations of conditional expectation-type operators // Pacific J. Math.—1990.—Vol. 141, № 1.—P. 55–77.
4. *Cruz-Uribe D. V., Fiorenza A.* Variable Lebesgue Spaces.—Basel: Springer, 2013.—315 p.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

НЕЛОКАЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РИККАТИ И ПОКАЗАТЕЛЬ ХЕРСТА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ 23 И 24 ЦИКЛОВ СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ НА СТАДИИ ПОДЪЕМА[1]

Д. А. Твердый
(Россия, Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН;
Петропавловск-Камчатский, КамГУ)

В настоящей работе предложено исследование динамики солнечной активности 23 и 24 цикла на стадии подъема [1], по данным [2], с помощью модельного уравнения Риккати с производной дробного порядка и непостоянными коэффициентами [3, 4]. Подобные исследования уже проводились, например, в работе [5]. Однако в этой работе модельное уравнение Риккати с производной дробного порядка было с постоянными коэффициентами, а также была исследована динамика солнечной активности в период 1998–2010 гг. и установлена ее связь с селевыми потоками в Кабардино-Балкарской Республике.

В настоящей работе исследование проводится с помощью нелокальной математической модели Риккати. Эта нелокальная математическая модель была впервые рассмотрена в работе [4]. Она представляет собой задачу Коши для уравнения Риккати с производной дробного переменного порядка:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\tau) + a(t)u^2(t) + b(t)u(t) + c(t) = 0, u(0) = u_0, \tag{1}$$

где $u(t) \in C^2[0,T]$ — функция решения; $\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{u}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)}} \, d\tau$ — дробная производная переменного порядка $0 < \alpha(t) < 1$ типа Герасимова — Капуто; $\dot{u}(t) = \frac{du}{dt}$ — производная первого порядка; $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция; $t \in [0,T]$ — время; T — время моделирования; u_0 — заданная константа;

Решение этой математической модели дается численно с помощью метода Ньютона. Полученное решение сопоставляется со сглаженными, с помощью кубического сплайна, экспериментальными данными солнечной активности 23 и 24 циклов. Далее с помощью метода наименьшего квадрата выбирается оптимальное значение порядка дробной производной, при котором коэффициент детерминации достигает максимального значения.

По результатам данного решения и исходным данным о исследуемом процессе, с помощью программы Fractan, вычисляется показатель Херста [6]. Так как объема исходных данных не достаточно для расчета показателя, то с помощью сглаживания кубическим сплайном получим нужное количество: весь 23 и 24 цикл — 3000 точек; этап подъема — порядка 1400; а моделирование этапа подъема проводилось соответственно на 1400 точек.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №19-31-50027 мол_нр, по теме «Математическое моделирование некоторых физических процессов с помощью эредитарного уравнения Риккати»

Литература

1. *Твердый Д. А.* Нелокальная задача коши для уравнения риккати с производной дробного порядка как математическая модель динамики солнечной активности // Изв. кабардино-балкарского науч. центра ран.—2020.—№ 1 (93).—С. 57–62.
2. Данные SILSO. Королевская обсерватория Бельгии (ROB), Брюссель, 2013.—URL: http://www.sidc.be/silso/datafiles.
3. *Твердый Д. А.* Задача Коши для уравнения Риккати с непостоянными коэффициентами и учетом переменной степенной памяти // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.—2018.—№ 3 (23).—С. 148–157.
4. *Твердый Д. А.* Математическое моделирование некоторых логистических законов с помощью эредитарной динамической системы Риккати // Материалы XI Всероссийской науч. конф. с междунар. участием: в 2х томах.—Самара: Самарский гос. техн. ун-т, 2019.—Т. 1.—С. 348–352.
5. *Бураев А. В.* Некоторые аспекты математического моделирования региональных проявлений солнечной активности и их связи с экстремальными геофизическими процессами // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук.—Нальчик: Адыгская (Черкесская) междунар. акад. наук, 2010.—С. 88–90.
6. *Калуш Ю. А., Логинов В. М.* Показатель Херста и его скрытые свойства // Сиб. журн. индустриальной математики.—Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2002.—№ 5 (4).—С. 29–37.

МЕТОДИКА ВЫЯВЛЕНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ДЕФИЦИТОВ В НАПРАВЛЕНИИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ[1]

А. В. Хижняк
(Россия, Елец; ЕГУ им. Бунина)

Устойчивая тенденция к компьютеризации и информатизации образования в рамках Цифровой трансформации образования, закрепление положений о необходимости перехода к формирования единого образовательного пространства, индивидуализацию образования, обеспечения права граждан на непрерывное образование, публичность и информационную открытость образования в рамках Федерального закона «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 г. № 273-ФЗ, массовый переход на дистанционное обучения в рамках соблюдения санитарно-эпидемиологических норм во время пандемии COVID-19 тесно сопряжены с трансформацией всей системы образования в России, а также математического образования в частности. Затрагивая вопросы цифровизация обучения, уместно разобрать вопросы интеграции инновационных достижений IT-индустрии в образование и последующие за этим этапы актуализации практикуемых методических способов и приемов обучения.

В связи с протекающими глобальными мировыми политическими и экономическими изменениями, неизменно затрагивающими социально-эмоциальную сферу человеческих взаимоотношений, представляется необходимым оценить компетентность действующих педагогических работников в области математики и точных дисциплин в плане их готовности к интеллектуализации предметного образования как формы ответа на сформировавшиеся условия существования и развития личности. Для выявления профессиональных дефицитов в направлении использования технологий искусственного интеллекта в математическом образовании интересно использовать кейс-тестирование, направленное на выявление уровня сформированности ключевых компетенций, таких как «Способность формировать насыщенную информационно-образовательную среду средствами компьютерного моделирования с учетом требований цифровой экономики» и «Готовность к включению в современную информационно-образовательную среду и к использованию автоматизированных интеллектуальных обучающих систем для освоения предметного материала».

Кейс-тест, как форма оценивания, представляет собой набор входных значений, предусловий выполнения, ожидаемых результатов тестирования и постусловий выполнения, разработанный для проверки соответствия определенному

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-29-14009.

требованию, в нашем случае, способности и готовности к формированию и интеграции в учебный процесс современных интеллектуальных EdTech. В отличии от традиционных тестов или опросников, кейс-тесты позволяют определить профессиональные и психологические характеристики респондента в динамике его личностного развития, а также оценить его навыки и умения «в деле», а не просто получить теоретический срез в текущий момент времени.

Для предложенных компетенций кейс-тестирование позволит определить насколько преподаватель математики знает структурные компоненты насыщенной информационно-образовательной среды и их иерархию; этапы, содержание и формы компьютерного моделирования при решении учебно-методических задач выбранной предметной области; особенности и характеристики автоматизированных интеллектуальных обучающих систем, технологий и сред, возможности организации образовательного процесса с их применением; умеет адаптировать современные технические достижения и приоритетные сквозные технологии (BigData и DLT, VR, AR и MR, искусственные интеллект, элементы робототехники, сенсорики и др.) к организации и эксплуатации насыщенной информационно-образовательной среды; выбирать и применять цифровые инструменты и сервисы для решения конкретных образовательных задач; владеет способами анализа и критической оценки различных теорий, концепций, подходов к формированию насыщенной информационно-образовательной среды; доступными цифровыми учебно-методическими материалами, инструментами и сетевыми сервисами.

Из приведенных выше положений видно, что кейс-тестирование является современной интересной методической формой выявления профессиональных дефицитов в направлении использования технологий искусственного интеллекта в математическом образовании, и может быть с успехом внедрено в оценочную деятельность российской системы послевузовского образования.

Литература

1. *Holmes W., Bialik M., Fadel C.* Artificial Intelligence in Education: Promises and Implications for Teaching and Learning.—Boston: Center for Curriculum Redesing, 2020.—228 p.
2. *Семенов А. Л., Уваров А. Ю.* Обновление технологического образования и информатизация школы // Вестн. Московск. гос. пед. ун-та. Сер.: информатика и информатизация образования.—М.: МПГУ, 2017.—№ 4 (42).—С. 17–31.
3. Трудности и перспективы цифровой трансформации образования / ред. А. Ю. Уваров, И. Д. Фрумин.—М.: Издательский дом Высшей школы экономики, 2019.—344 с.

Современные проблемы математики и математического образования: XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СИСТЕМ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПО СОБОЛЕВУ[1]

Т. Н. Шах-Эмиров (Россия, Махачкала; ДФИЦ РАН)**,**
М. Г. Магомед-Касумов (Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН; Махачкала, ДФИЦ РАН)

Пусть $L^2[a,b]$ пространство функций, для которых

$$\int_a^b f^2(x)\,dx < \infty.$$

Через $W^r_{L^2[a,b]}$, $r \in \mathbb{N}$, обозначим пространство Соболева, состоящее из абсолютно непрерывных функций f, у которых производные $f', \ldots, f^{(r-1)}$ также абсолютно непрерывны, а $f^{(r)} \in L^2[a,b]$. В $W^r_{L^2[a,b]}$ можно ввести скалярное произведение типа Соболева

$$\langle f, g\rangle_S = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a) g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(x) g^{(r)}(x)\,dx. \tag{1}$$

В работах [1–3] был разработан один из методов построения систем функций, ортогональных относительно (1) из систем, ортогональных относительно обычного скалярного произведения в $L^2[a,b]$

$$\langle f, g\rangle_{L^2[a,b]} = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx,$$

и было показано, что если исходная система полна в $L^2[a,b]$, то порожденная ею система ортогональных по Соболеву функций будет также полна в $W^r_{L^2[a,b]}$. В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с общим видом ортогональных относительно (1) систем, соответствующих порождающих систем и их полноты в случае, когда $r = 1$. В частности оказалось, что системы $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}\}_{k=0}^{\infty}$, ортогональные относительно скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle_S = f(a)g(a) + \int_a^b f'(t) g'(t)\,dt, \tag{2}$$

не могут быть полными, если $\varphi_{1,k}(a) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. А именно, имеет место следующая

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00477 мол_а.

Теорема 1. *Пусть Φ_1 — ортонормированная относительно* (2) *система функций. Если $\varphi_{1,k}(a) = 0$ для всех $k \geqslant 0$, то система Φ_1 не будет полной.*

Рассмотрен случай, когда ровно n функций отличны от нуля в точке a. Отметим отдельно в связи с работами [1–3] случай, когда ровно одна функция отлична от нуля в точке a. В этом случае справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть Φ_1 — полная ОНС. Для того чтобы ровно одна из функций системы Φ_1 была отлична от нуля в точке a, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была константой, равной ± 1:*

$$\Big(\varphi_{1,k_0}(a) \neq 0 \wedge \varphi_{1,k}(a) = 0,\ k \neq k_0\Big) \Leftrightarrow \varphi_{1,k_0}(t) \equiv \mathrm{const} = \pm 1.$$

Теорема 3. *Пусть Φ_1 — полная в $W^1_{L^2}$ ортонормированная система с ровно одной функцией, отличной от нуля в точке a. Можно считать, что такой функцией является $\varphi_{1,0}$. Тогда система $\Phi = \{\varphi'_{1,k},\ k > 0\}$ будет полной и ортонормированной в $L^2[a,b]$.*

Как уже было отмечено, в работах [1–3] было показано, что если порождающая полна в $L^2[a,b]$, то порожденная ею система полна в $W^r_{L^2[a,b]}$. В то же время теорема 3 утверждает, что для $r = 1$ верно и обратное, то есть из полноты порожденной системы в $W^1_{L^2[a,b]}$ вытекает полнота исходной системы в $L^2[a,b]$.

Литература

1. *Шарапудинов И. И., Магомед-Касумов М. Г., Магомедов С. Р.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышева первого рода // Дагестан. электрон. мат. изв.—2015.—№ 4.—С. 1–14.
2. *Шарапудинов И. И., Шарапудинов Т. И.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Чебышева, ортогональными на сетке // Изв. вузов. Математика.—2017.—№ 8.—С. 67–79.
3. *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. математика.—2018.—Т. 82, № 1.—С. 225–258.

КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОДА С ОТСЛОЕНИЕМ В КОЛЬЦЕВОЙ ОБЛАСТИ[1]

В. О. Юров

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

С целью развития методик идентификации скрытых дефектов проводится исследование распространения волн в цилиндрическом волноводе с кольцевым поперечным сечением. При решении задачи учитывается неоднородность материала вдоль радиальной координаты и наличие кольцевого отслоения. Вся граница волновода считается свободной от напряжений и лишь осесимметричная область внешней границы занята периодической во времени нагрузкой; отслоение также имеет осесимметричную форму, что позволяет разыскивать решение в виде функции независящей от окружной координаты. Для решения возникающей задачи в частных производных применяется интегральное преобразование Фурье вдоль продольной координаты.

В пространстве преобразования Фурье сформулирована каноническая система дифференциальных уравнений первого порядка и решены четыре вспомогательные задачи Коши. На основе метода пристрелки построено решение задачи в пространстве трансформант. Решение содержит две неизвестные функции раскрытия. Для их отыскания сформулирована система двух граничных интегральных уравнений с гиперсингулярными ядрами. Для решения системы применяется метод граничных элементов [1] или асимптотический метод, основанный на разложении по малому параметру, характеризующему ширину отслоения. Расходящиеся интегралы понимаются в смысле конечного значения по Адамару. Проведены вычислительные эксперименты по сравнению двух методов.

Автор благодарит А. О. Ватульяна за внимание к работе.

Литература

1. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике.—М.: Наука, 1985.—253 с.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-31-90017.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

EIU — Eastern Illinois University
IAMA KBSC RAS — Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
IM SB RAS — Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
NOSU — North Ossetian State University named after K. L. Khetagurov
RMC SFEDU — Regional Mathematical Center of Southern Federal University
SMI VSC RAS — Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences
БГУ им. И. Г. Петровского — Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
ВГУ — Воронежский государственный университет
ГЦ РАН — Геофизический центр Российской академии наук
ДФИЦ РАН — Дагестанский федеральный исследовательский центр Российской академии наук
ЕГУ им. Бунина — Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина
ИГиЛ СО РАН — Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук
ИПМА КБНЦ РАН — Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
КамГУ — Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга
ЛТУ-университет — Лаппеенрантский технологический университет
НГУ — Новосибирский государственный университет
НИУ «ВШЭ» — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
НМО — Нижегородское математическое общество
РГЭУ (РИНХ) — Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)
РНОМЦ ЮФУ — Региональный научно-образовательный математический центр Южного федерального университета
СОГУ — Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова
Тинькофф — Акционерное общество «Тинькофф Банк»
ЧГПУ — Чеченский государственный педагогический университет
ЧГУ — Чеченский государственный университет
ЮМИ ВНЦ РАН — Южный математический институт — филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального научного центра «Владикавказский научный центр Российской академии наук»
ЮФУ — Южный федеральный университет
ЯГПУ — Ярославский государственный педагогический университет имени К. Д. Ушинского

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

XV Владикавказская молодежная математическая школа
(г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.)

Компьютерная верстка:
И. С. Гаприндашвили
Зав. редакцией: В. В. Бозрова

ЮМИ ВНЦ РАН
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

ISBN 978-5-904695-43-9

9 785904 695439