ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ:

тезисы докладов
XII региональной школы-конференции
«Владикавказская молодежная математическая школа»
(РСО-А, пос. В. Фиагдон, 18–23 июля 2016 г.)

Владикавказ
2016

ББК 22.16+я43
УДК 517.21+

Математический анализ и математическое моделирование: тезисы докладов XII региональной школы-конференции «Владикавказская молодежная математическая школа» (РСО-А, пос. В. Фиагдон, 18–23 июля 2016 г.).— Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016.—26 с.

В сборник вошли тезисы докладов молодых ученых, представленных на XII региональной школе-конференции «Владикавказская молодежная математическая школа». Мероприятие состоялась в РСО-А, пос. В. Фиагдон в период с 18 по 23 июля 2016 года в рамках VII Международного научно-образовательного математического форума.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

XII Владикавказская молодежная математическая школа (ВММШ) с международным участием — одно из мероприятий VII Международного математического научно-образовательного форума.

В 2016 году соорганизаторами ВММШ выступили Владикавказский научный центр Российской академии наук, Южный математический институт и Южный федеральный университет.

Проведение ВММШ направлено на сохранение и развитие научных школ мирового уровня; продвижение талантливой молодежи и формирование нового поколения исследователей, содействие их профессиональному становлению, творческому росту, максимальному использованию научного потенциала; укрепление позиции математической науки и математического образования на Юге России.

ВММШ традиционно представлена двумя основными научными направлениями — математический анализ и математическое моделирование.

В число лекторов ВММШ вошли ведущие российские ученые, в значительной мере определяющие развитие этих направлений. Вниманию слушателей были представлены циклы лекций: «Некоторые проблемы, связанные с операторами в банаховых решетках», лектор — д. ф.-м. н., профессор А. Г. Кусраев (ВНЦ РАН, г. Владикавказ); «Методологическая компетентность молодого преподавателя вуза», лектор — к. пед. н. В. С. Абатурова (ВНЦ РАН, г. Владикавказ); «Изопериметрические неравенства и их приложения», лектор — д. ф.-м. н., профессор А. Ф. Тедеев (ЮОГУ, г. Цхинвал, РЮО); «Каким должен быть современный курс математического анализа?», лектор — к. ф.-м. н., доцент В. Н. Дятлов (НГУ, г. Новосибирск); «Математические модели социальных процессов», лектор — д. ф.-м. н., профессор Е. С. Каменецкий (ЮМИ ВНЦ РАН, г. Владикавказ). В рамках ВММШ также состоялась конференция молодых ученых, на которой выступили участники Школы.

Математический анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XII регион. шк.-конф. (РСО-А, пос. В. Фиагдон, 18–23 июля 2016 г.)

О НЕКЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН С ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

А. О. Ватульян (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ),
Р. Д. Недин (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Одно из наиболее актуальных направлений в современной механике материалов связано с разработкой и совершенствованием моделей материалов с различным характером неоднородности при наличии полей предварительных напряжений и деформаций, характеризующих их предварительное состояние (ПС). С точки зрения применения на практике, одним из наиболее перспективных типов неоднородности служит класс функционально-градиентных композитов (ФГК), в которых материальные свойства меняются некоторым образом в зависимости от координат. Градиентность свойств в таких материалах появляется из-за неоднородной структуры химического состава, микроструктуры или атомного порядка. В традиционных многослойных композитных структурах однородные упругие слои соединены друг с другом, образуя многослойную конструкцию. Однако подобные материалы обладают существенным недостатком: образование концентраторов остаточных напряжений в пограничных зонах между слоями, особенно при высоких температурах. Это приводит к расслоению, растрескиванию матрицы и другим механизмам разрушения. Одним из наиболее эффективных способов преодоления этих проблем является использование ФГК, в которых материальные свойства изменяются непрерывно. Меняющиеся градиентным образом свойства материала позволяют исключить растрескивание и рост остаточных напряжений [1]. Ключевым вопросом в проблеме мониторинга технического состояния объекта часто является вопрос выбора физического метода определения характеристик поврежденности материала, а также проведение комплекса соответствующих экспериментальных исследований. Разрушение при нагрузках ниже допускаемых зачастую связано с неучтенным предварительно напряженным состоянием [2, 3].

В настоящее время активно развиваются и уточняются различные неклассические модели стержней и пластин, в частности, на основе теорий Тимошенко, Рейсснера, Миндлина и др., позволяющих моделировать динамическое поведение стержней с учетом различных факторов, требуемых в рамках той или иной постановки задачи. В работе получены постановки задач о колебаниях предварительно напряженного стержня и пластины в рамках теории Тимошенко для общего случая неоднородности всех параметров задачи, включая материальные характеристики и объемное распределение ПС. Продемонстрировано, что вывод корректных постановок задач для тел с предварительными напряжениями и деформациями может быть осуществлен как на основе классического вариационного принципа Лагранжа, так и на основе общей слабой постановки для упругого тела [2]. Проведен анализ влияния различных типов ПС на спектр акустических характеристик (собственные частоты, амплитудно-частотные характеристики) в

ФГК стержнях. При этом в рамках модели Тимошенко рассмотрены такие факторы ПС, как предварительные напряжения, предварительный прогиб стержня и предварительный угол поворота главной оси стержня, обусловленный изгибом. На основе полученных общей слабой и вариационной постановки задачи можно выводить уравнения движения и граничные условия для конкретного тела и способа приложения нагрузки; для этого необходимо использовать соответствующие гипотезы, описывающие напряженно-деформированное состояние тела, выделить независимые переменные и следовать общим методам вариационного исчисления. Введены интегральные функции, позволяющие моделировать материальные свойства различных ФГК в зависимости от их типа и структуры, что позволяет учитывать неоднородность материала ФГК по трем координатам [3]. С помощью метода конечных элементов получено численное решение сформулированных задач для стержня и пластины при различных граничных условиях. Решения проанализированы для различных случаев распределения ПС и неоднородности материальных свойств. При моделировании функционально-градиентной структуры материала использовались различные аналитические законы изменения упругих модулей — гладкие и кусочно-непрерывные, с использованием степенных и экспоненциальных законов. Исследован ряд задач о колебаниях преднапряженного бруса, когда в качестве ПС выбрано несколько типов начального напряженно-деформированного состояния, описываемого функциями ПН и начальных перемещений, соответствующих следующим трем задачам: 1) предварительный чистый пластический изгиб ФГК-бруса; 2) предварительный пластический изгиб ФГК-бруса под действием сосредоточенной силы; 3) предварительный пластический изгиб ФГК-бруса под действием равномерно распределенной нагрузки. Исследовано влияние уровней различных типов ПН на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) точек области.

Литература

1. *Suresh S, Mortensen A.* Fundamentals of Functionally Graded Materials.—London: IOM Communications, 1998.—349 p.
2. *Nedin R. D., Vatulyan A. O.* Inverse problem of non-homogeneous residual stress identification in thin plates // Int. J. Solids Struct.—2013.—Vol. 50.—P. 2107–2114.
3. *Dudarev V. V., Nedin R. D., Vatulyan A. O.* Nondestructive identification of inhomogeneous residual stress state in deformable bodies on the basis of the acoustic sounding method // Advanced Materials Research.—2014.–Vol. 996.—P. 409-414.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА

Р. М. Гаджимирзаев

(Россия, Махачкала; ДНЦ РАН)

Пусть $N > 0$, $\delta = \frac{1}{N}$, $q = e^{-\delta}$, $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$. Обозначим через $l_{2,\rho}(\Omega_\delta)$ пространство дискретных функций $f(x)$, заданных на Ω_δ и таких, что $\sum_{\Omega_\delta} f^2(x)\rho(x) < \infty$, где $\rho = \rho(x) = \rho(Nx; \alpha, q) = (1-q)^{\alpha+1} q^x \frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}$. Через $M_{n,N}^\alpha(x) = M_n^\alpha(Nx, q)$ обозначим полином Мейкснера порядка n, для которого разностная формула Родрига имеет вид [1]

$$M_{n,N}^\alpha(x) = \frac{q^{-n}}{n!\rho(x)} \Delta_\delta^n \Big\{\rho(x)(Nx)^{[n]}\Big\},$$

где $\Delta_\delta f(x) = f(x+\delta) - f(x)$, $x^{[n]} = x(x-1)\ldots(x-n+1)$. Известно [1], что полиномы Мейкснера $M_{n,N}^\alpha(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ образуют ортогональную в $l_{2,\rho}(\Omega_\delta)$ систему, т. е.

$$\sum_{x\in\Omega_\delta} \rho(x) M_{n,N}^\alpha(x) M_{k,N}^\alpha(x) = \delta_{nk} h_n^\alpha(q), \quad 0 < q < 1, \alpha > -1,$$

где δ_{nk} — символ Кронекера, $h_n^\alpha(q) = \binom{n+\alpha}{n} q^{-n}\Gamma(\alpha+1)$. Соответствующая ортонормированная система полиномов Мейкснера имеет вид

$$m_{n,N}^\alpha(x) = m_{n,N}^\alpha(x, q) = \big\{h_n^\alpha(q)\big\}^{-1/2} M_{n,N}^\alpha(x).$$

В работе [2] впервые были введены специальные ряды по классическим полиномам Лагерра и исследованы аппроксимативные свойства их частичных сумм. В настоящей работе мы рассмотрим некоторые специальные ряды по полиномам Мейкснера $M_{n,N}^\alpha(x)$ с $\alpha > -1$, которые являются дискретным аналогом специальных рядов по полиномам Лагерра. Специальные ряды по полиномам Мейкснера $M_{n,N}^\alpha(x)$ обладают значительно лучшими аппроксимативными свойствами, чем ряды Фурье по указанным полиномам. Например, новые специальные ряды обладают тем свойством, что частичные суммы этих рядов интерполируют исходную функцию в точках $0, \delta, 2\delta, \ldots, (r-1)\delta$. Это свойство имеет важное значение при решении ряда прикладных задач.

Пусть функция $d(x)$ определена в узлах сетки Ω_δ. Специальный ряд, о котором идет речь, был введен в работе [3] и имеет вид

$$d(x) = P_{r-1}(Nx) + (Nx)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}_{r,k}^\alpha m_{k,N}^\alpha(x), \tag{1}$$

где

$$P_{r-1}(Nx) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{\Delta^\nu d(0)}{\nu!} (Nx)^{[\nu]}.$$

Частичную сумму ряда (1) обозначим через

$$S_{n+r,N}^{\alpha}(d,x) = P_{r-1}(Nx) + (Nx)^{[r]} \sum_{k=0}^{n} \hat{d}_{r,k}^{\alpha} m_{k,N}^{\alpha}(x).$$

В связи с представлением (1) возникает задача об оценке погрешности замены функции $d(x)$ ее приближенным значением $S_{n+r,N}^{\alpha}(d,x)$. Другими словами, возникает задача об исследовании аппроксимативных свойств частичной суммы $S_{n+r,N}^{\alpha}(d,x)$ специального ряда (1).

В настоящей работе получена оценка сверху для функции Лебега частичных сумм специального ряда по полиномам Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x)$.

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам // Дагест. электр. мат. изв.—2015.—Вып. 3.—С. 1–254.
2. *Шарапудинов И. И.* Некоторые специальные ряды по общим полиномам Лагерра и ряды Фурье по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву // Дагест. электр. мат. изв.—2015.—Вып. 4.—С. 32–74.
3. *Гаджимирзаев Р. М.* Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Матер. 18-й междунар. Сарат. зимней шк. «Современные проблемы теории функций и их приложения».—Саратов, 2016.—С. 102–105.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОЗЛЕ НЕИДЕАЛЬНОЙ БИПОЛЯРНОЙ МЕМБРАНЫ[1]

Н. Ю. Ганченко (Россия, Краснодар; КубГУ),
И. В. Моршнева (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Рассматривается поведение электролита около биполярной ионоселективной мембраны в микромасштабах под действием внешнего электрического поля, нормального к поверхности мембраны. Биполярная мембрана представляет собой комбинацию катион-обменной и анион-обменной мембран. Важнейшей особенностью биполярных мембран является высокая скорость диссоциации молекул воды, $H_2O \rightleftarrows H^+ + OH^-$, на стыке разноименно заряженных мембран при прохождении через них электрического тока. Ток образующихся катионов водорода и анионов гидроксила вносит вклад в общий ток, проходящий через систему [1].

Актуальность исследования эффектов, возникающих внутри и около биполярных мембран диктуется возможностью их широкого применения в промышленности: например, в составе мембранного пакета в электродиализном аппарате для получения кислот и щелочей из растворов соли [2]. Однако, несмотря на практическую важность, процессы, происходящие в окрестности биполярных мембран, до сих пор недостаточно изучены, нет даже окончательно принятой математической модели для их описания (см., например, [3, 4]).

В данной работе для исследования описанных выше явлений рассмотрена трехслойная система электролит-мембрана-электролит, позволяющая наиболее полно изучить происходящие явления. В основу математической модели положена система нелинейных уравнений Нернста — Планка — Пуассона — Стокса, успешно применяемая для моделирования смежных задач [5], в которую также включены уравнения транспорта ионов диссоциированной воды с источниковыми слагаемыми, соответствующие процессам диссоциации и рекомбинации, непрерывно происходящими в растворе под действием электрического поля [6]. Численно обнаружено, что наибольшая диссоциация воды происходит на стыке двух мембран. Поток ионов воды не только увеличивает суммарный электрический ток через систему, но и приводит к эффекту экзальтации. Включение в модель эффекта Вина позволяет объяснить появление в системе режима сверхпредельных токов, который наблюдается в экспериментах.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 14-08-00789-а, № 16-48-230107-р_а.

Литература

1. *Заболоцкий В. И., Гнусин Н. П., Шельдешов Н. В.* Вольтамперные характеристики переходной области биполярной мембраны МБ-1 // Электрохимия.—1984.—Т. 20, № 10.—С. 1340–1345.
2. *Пивоваров Н. Я., Гребень В. П., Коварский Н. Я.* Обратный электродиализ с использованием биполярных мембран как источник электрической энергии // Электрохимия.—1994.—Т. 30, № 6.—С. 785–789.
3. *Simons R., Khanarian G.* Water dissociation in bipolar membranes: experiments and theory // J. Membr. Biol.—1978.—Vol. 38.—P. 11–30.
4. *Conroy D. T., Craster R. V., Matar O. K., Cheng L.-J., and Chang H.-C.* Nonequilibrium hysteresis and Wien effect water dissociation at a bipolar membrane // Phys. Rev. E.—2012.—Vol. 86.—Paper number 056104.
5. *Demekhin E. A., Amiroudine S., Ganchenko G. S., Khasmatulina N. Yu.* Thermoelectroconvection near charge-selective surfaces // Phys. Rev. E.—2015.—Vol. 91.—Paper number 063006.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДЛИННЫХ ПУЛЬСОВЫХ ВОЛН В АОРТЕ

В. А. Гетман
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Известно, что самые первые измерения давления и скорости крови были проведены С. Хейзлом в 17–18 веках. В 18–19 веках над вопросами циркуляции крови работали такие крупные ученые, как Эйлер, Д. Бернулли, Пуазейль и Т. Юнг. В частности, одной из важных областей исследования была природа свойств и функций упругих артерий. В докладе аорта моделируется цилиндрическим сосудом, ограниченным тонкой упругой оболочкой. Течение жидкости описывается системой уравнений Навье — Стокса, а для стенок сосуда используются динамические уравнения тонкой упругой изотропной оболочки. В цилиндре распространяются длинные продольные волны, стационарный поток, а также длинные и короткие спиральные волны. Показано, что в ядре потока (вне зоны пограничного слоя) продольная компонента скорости длинных волн постоянна по сечению. Этот факт наблюдается в эксперименте. В приближении идеальной жидкости определена фазовая скорость волн. Получены две волны — волна давления и квазипродольная волна. Проведен численный расчет длинных продольных пульсовых волн, при условии, что на входе в сосуд задано давление жидкости как функция времени.

Литература

1. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов.—М.: Мир, 1983.
2. *Богаченко С. Е., Устинов Ю. А.* Модель движения крови в артериальном сосуде во время систолы и анализ напряженного состояния стенки с учетом винтовой анизотропии // Рос. журн. биомех.—2009.—Т. 13, № 1.—С. 29–41.

О КОММУТАНТАХ И ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ОПЕРАТОРА ОБОБЩЕННОГО СДВИГА ВЛЕВО В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

О. А. Иванова

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В докладе пойдет речь о коммутантах и инвариантных подпространствах оператора Поммье, определяемого следующим образом:

$$D_{0,g_0}(f)(t) := \begin{cases} \dfrac{f(t) - g_0(t)f(z)}{t}, & t \neq 0, \\ f'(0) - g_0'(0)f(0), & t = 0. \end{cases}$$

Здесь функции f и g_0, $g_0(0) = 1$, принадлежат некоторому весовому (LF)-пространству E целых функций. Если $g_0 \equiv 1$ и $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ — аналитическая функция в окрестности 0, то $D_{0,g_0}(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n$, т. е. $D_{0,g_0}(f)$ — обычный оператор сдвига влево или классический оператор Поммье.

Получено полное описание линейных непрерывных операторов $B : E \to E$, перестановочных с оператором D_{0,g_0}. Подробно рассмотрен случай, когда E является реализацией с помощью преобразования Лапласа сильного сопряженного к пространству ростков функций, аналитических на выпуклом локально замкнутом множестве $Q \subseteq \mathbb{C}$. В этой ситуации дается также полное описание циклических векторов оператора D_{0,g_0} в E.

В качестве следствия охарактеризованы собственные замкнутые D_{0,g_0}-инвариантные подпространства такого пространства E в случае, когда g_0 не имеет нулей.

Приведенные результаты получены совместно с С. Н. Мелиховым.

АСИМПТОТИКА ВТОРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ В СИСТЕМЕ РЭЛЕЯ С ДИФФУЗИЕЙ В СЛУЧАЕ МОНОТОННОЙ И КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

А. В. Казарников

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Рассматривается система Рэлея с диффузией

$$\begin{cases} v_t = \nu_1 \Delta v + w, \\ w_t = \nu_2 \Delta w - v + w - w^3, \end{cases}$$

где $v = v(x,t)$, $w = w(x,t)$, $x \in D$, $t > 0$, $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\mu \in \mathbb{R}$ — управляющий параметр, $\nu_1, \nu_2 > 0$ — коэффициенты диффузии при однородных краевых условиях различных типов: Дирихле, Неймана и смешанных краевых условиях. Данная система является частным случаем системы Фитцхью — Нагумо, которая является классической моделью возбудимой среды.

Целью данной работы является построение асимптотики решений системы Рэлея с диффузией, ответвляющихся от нулевого решения при изменении управляющего параметра μ, когда коэффициенты диффузии фиксированы и различны $\nu_1 \neq \nu_2$. Случай равных коэффициентов диффузии $\nu_1 = \nu_2$ рассмотрен в [1, 2].

Получены условия, при которых в системе имеет место монотонная и колебательная потеря устойчивости, найдены критические значения параметра μ. Для нахождения вторичных стационарных или периодических по времени решений применяется метод Ляпунова — Шмидта в форме, развитой в работах В. И. Юдовича [3].

Построена абстрактная схема применительно к данной системе для различных типов краевых условий в произвольной ограниченной области. Найдены в общем виде первые члены асимптотики для вторичных периодических по времени и стационарных решений, выведены формулы для k-го члена разложения. Установлено, что в системе происходит мягкая потеря устойчивости.

В одномерном случае получены утверждения о качественном поведении решений системы в зависимости от типа краевых условий. Приведены явные выражения первых членов асимптотики.

Приведены результаты численного исследования разрушения вторичных режимов при $\mu \gg \mu_{cr}$. Эксперименты проводились для случаев одной и двух пространственных переменных. Для вычислений применялись пакеты Maple и MATLAB, а также собственный программный комплекс на языке C++. При проведении вычислений применялась технология NVIDIA CUDA v. 7.0, что позволило существенно ускорить процесс расчета, для численного интегрирования системы использовалась библиотека Odeint. Система была исследована различными типами численных методов: методами сеток, прямых, а также методом Галеркина. Результаты всех экспериментов полностью согласуются друг с другом.

Литература

1. *Казарников А. В., Ревина С. В.* Возникновение автоколебаний в системе Рэлея с диффузией // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование.—2016.—Т. 9, № 2.—С. 16–28.
2. *Kazarnikov A. V., Revina S. V., Haario H.* Numerical and asymptotical analysis of Rayleigh reaction-diffusion system // Numerical Algebra with Applications. Proc. of Fourth China–Russia Conf.—Rostov-on-Don: SFU, 2015.—P. 114–119.
3. *Юдович В. И.* Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // Прикл. мат. и мех.—1972.—Т. 36, № 2.—С. 450–459.

МОНОТОННАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМЕ ШНАКЕНБЕРГА

С. А. Лысенко

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В работе исследуется система Шнакенберга, которая играет важную роль в моделировании биохимических процессов и первоначально была предложена для описания процессов химической кинетики,

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + a - u + u^2 v, \\ v_t &= d v_{xx} + b - u^2 v, \end{aligned} \tag{1}$$

когда $x \in [0, \pi]$. Предполагается, что на концах отрезка выполняются условия Неймана:

$$u_x(0,t) = 0; \quad v_x(0,t) = 0; \qquad u_x(\pi,t) = 0; \quad v_x(\pi,t) = 0 \tag{2}$$

Параметр $d > 0$ — коэффициент диффузии, a и b — параметры реакции, удовлетворяющие следующим условиям: $a + b > 0$, $b > 0$.

Известно, что существует пространственно-однородное решение данной системы (u_0, v_0), где $u_0 > 0$, $v_0 > 0$.

Определение 1. Стационарное состояние (u_0, v_0) называется *неустойчивым по Тьюрингу*, если оно устойчиво по отношению к пространственно-однородным возмущениям (в отсутствие диффузии) и неустойчиво по отношению к некоторым пространственно-неоднородным возмущениям (при наличии диффузии).

Определение 2. *Критическим значением* параметра d называется такое значение, при котором спектр задачи устойчивости лежит в замкнутой левой полуплоскости, причем пересечение с мнимой осью непусто. Если при этом появляется пара комплексно сопряженных собственных значений, то такая потеря устойчивости называется колебательной; если ведущее собственное значение обращается в ноль, то такая потеря устойчивости называется монотонной.

В работе выполнена визуализация области неустойчивости Тьюринга, найдены достаточные условия неустойчивости Тьюринга и проведены численные эксперименты для нахождения критических волновых чисел. При исследовании значения a и b считаются фиксированными, а параметр d изменяется. Известно, что, если при критическом значении параметра d имеет место неустойчивость Тьюринга, то потеря устойчивости в этом случае — монотонная. При этом от исходного положения равновесия ответвляются вторичные стационарные режимы.

Получены первые члены разложения по малому параметру надкритичности ε вторичных стационарных решений системы для любых параметров a и b, а также выведена формула в общем виде при ε^n. Из условия разрешимости для третьей степени разложения решения по степеням малого параметра надкритичности ε получена формула для вычисления коэффициента, знак которого влияет на характер потери устойчивости (мягкая или жесткая).

При помощи компьютерных экспериментов найдены те значения параметров a и b, при которых происходит мягкая потеря устойчивости, и те, при которых происходит жесткая потеря устойчивости. Для обоих случаев построены графики вторичных стационарных решений. Представлены результаты применения общих формул для значений параметров, принадлежащих области неустойчивости Тьюринга, которые были найдены в компьютерных экспериментах. Для отыскания вторичных стационарных решений применяется метод Ляпунова — Шмидта в форме, развитой В. И. Юдовичем.

Литература

1. *Schnakenberg J.* Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications.—Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag—1993.—P. 71–98.
2. *Murray J. D.* Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications.—Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag, 1993.—P. 71–98.
3. *Turing A. M.* The chemical basis of morphogenesis // Phil. Trans. R. Soc. Lond. B.—1952.—Vol. 237.—P. 37–72.
4. *Guo Y.*, *Hwang H. J.* Pattern formation (II): the Turing instability // Proc. Amer. Math. Soc.—2007.—P. 2855–2866.
5. *Ward M. J.*, *Wei J.* The existence and stability of assimmetric spike patterns for the Schnakenberg model // Stud. Appl. Math.—2002.—P. 229–264.
6. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости // Прикл. мат. и мех.—1971.—Т. 35.—С. 638–655.

Математический анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XII регион. шк.-конф. (РСО-А, пос. В. Фиагдон, 18–23 июля 2016 г.)

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДУ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ ФУРЬЕ — СОБОЛЕВА — ЛАГЕРРА[1]

М. Г. Магомед-Касумов (Россия, Владикавказ; ЮМИ),
И. И. Шарапудинов(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

В данной работе предложен метод численного решения задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения (ЛОДУ), основанный на применении смешанных рядов [1, 2] по полиномам Лагерра $L_k^\alpha(x)$. Рассмотрим его применение на важном частном случае, когда $\alpha = 0$ и коэффициенты ЛОДУ являются постоянными. В этом случае решение задачи Коши удается свести к решению системы уравнений ленточного вида (8).

Пусть требуется решить задачу Коши для ЛОДУ

$$y^{(r)}(x) + a_{r-1}y^{(r-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = h(x) \tag{1}$$

с начальными условиями $y^{(k)}(0) = y_k$, $k = 0, 1, \ldots, r-1$. Предположим, что решение $y(x)$ данной задачи принадлежит пространству Соболева $W^r_{L^2_\rho}$, $\rho = \rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, состоящему из непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a,b] \subset [0,\infty)$, а $f^{(r)} \in L^p_\rho$. Пользуясь формулой Тейлора, запишем $(0 \leqslant \nu \leqslant r-1)$

$$y^{(\nu)}(x) = \sum_{k=0}^{r-\nu-1} y^{(k+\nu)}(0)\frac{x^k}{k!} + \frac{1}{(r-\nu-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-\nu-1}y^{(r)}(t)\,dt. \tag{2}$$

С учетом (2) уравнение (1) принимает следующий вид:

$$y^{(r)}(x) + \int_0^x Q(x-t)y^{(r)}(t)\,dt = p(x), \tag{3}$$

где, обозначая $L_k(x) = L_k^0(x)$,

$$Q(u) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{a_\nu u^{r-\nu-1}}{(r-\nu-1)!} = \sum_{\nu=0}^{r-1} Q_\nu L_\nu(u), \tag{4}$$

$$p(x) = h(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} a_\nu \sum_{k=0}^{r-\nu-1} y^{(k+\nu)}(0)\frac{x^k}{k!} = \sum_{s=0}^{\infty} p_s L_s(x). \tag{5}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00486.

Подставляя вместо функций $Q(x-t)$, $p(x)$ и $y^{(r)}(t)$ их ряды Фурье по ортонормированным полиномам Лагерра $l_k^0(u) = L_k^0(u) = L_k(u)$, из (3) имеем ($y_{r,k}$ — коэффициенты Фурье — Лагерра функции $y^{(r)}$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_{r,k} L_k(x) + \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} y_{r,k} Q_\nu \int_0^x L_\nu(x-t) L_k(t)\,dt = \sum_{s=0}^{\infty} p_s L_s(x). \tag{6}$$

Далее, используя известное сверточное свойство

$$\int_0^x L_\nu(x-t) L_k(t)\,dt = L_{k+\nu}(x) - L_{k+\nu+1}(x), \tag{7}$$

перепишем (6) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_{r,k} L_k(x) + \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} y_{r,k} Q_\nu (L_{k+\nu}(x) - L_{k+\nu+1}(x)) = \sum_{s=0}^{\infty} p_s L_s(x).$$

С помощью перестановок знаков суммирования, замены переменных суммирования и приведения подобных полученное равенство можно привести к следующему виду:

$$(Q_0+1) y_{r,0} L_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(Q_0+1) y_{r,k} + \sum_{\nu=0}^{k-1} (Q_{k-\nu} - Q_{k-\nu-1}) y_{r,\nu} \right] L_k(x) =$$
$$= \sum_{s=0}^{\infty} p_s L_s(x) \qquad Q_k = 0, \quad k \geqslant r.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих полиномах $L_k(x)$, получаем ленточную систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &(Q_0+1) y_{r,0} = p_0, \\ &(Q_0+1) y_{r,k} + \sum_{l=0}^{k-1} (Q_{k-l} - Q_{k-l-1}) y_{r,l} = p_k, \quad k = 1, \dots, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

относительно неизвестных $y_{r,k}$, решая которую для $0 \leqslant k \leqslant n$, получим приближенное решение задачи (1) в виде частичной суммы $y_n(x)$ смешанного ряда, одно из представлений которой имеет следующий вид:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{r-1} y^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + x^r \sum_{k=r}^{r+n} y_{r,k} \frac{L_{k-r}^r(x)}{k^{[r]}},$$

где $k^{[r]} = k(k-1)\dots(k-r+1)$.

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье — Лежандра // Мат. сб.—2000.—Т. 191, № 5.—С. 143–160.
2. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Мат. сб.—2003.—Т. 194, № 3.—С. 115–148.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО КОМПЛЕКСНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

О. В. Новикова

(Россия, Ставрополь; СКФУ)

Для исследуемого в диссертации [2] комплексного уравнения

$$\bar{p}_t - ip_{xx} + 2ip\big(p^2 + \bar{p}^{\,2}\big) = 0 \tag{1}$$

доказано наличие законов сохранения.

Теорема. *Нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных* (1) *обладает счетным числом законов сохранения:*

$$J_1(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(\bar{p}^{\,2} + p^2\big)\,dx, \qquad J_2(x,t) = 2i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p\bar{p}_x\,dx,$$

$$J_3(x,t) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\big(\bar{p}^{\,2} + p^2\big)^2 + \bar{p}_x^2 - pp_{xx}\Big)\,dx,$$

$$J_{n+2}(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Bigg(2i\bar{p}\Bigg(2R_{n_x} + R_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} R_k R_{n-k} - \sum_{k=0}^{n+1} R_k R_{n+1-k}\Bigg)\Bigg)\,dx,$$

где $R_0 = 0$, $R_1 = \bar{p}^2 + p^2 - i\bar{p}_x + p_x$, $R_2 = 2p(i\bar{p}_x - p_x) + i\bar{p}_{xx} - p_{xx}$,

$$R_3 = -\frac{1}{i}\big[2\bar{p}_x\big(2\bar{p}^{\,2} - p_x\big) - 2p\bar{p}_{xx} - \bar{p}_{xxx}\big] -$$
$$-\big(\bar{p}^{\,2} + p^2\big)\big(\bar{p}^{\,2} + p^2 + 2p_x\big) + 2p(p_{xx} - 2\bar{p}\bar{p}_x) + p_x^2 - \bar{p}_x^{\,2} + p_{xxx},$$

остальные функции определяются по рекуррентной формуле:

$$R_{n+2} = 2i\Bigg[\bar{p}\Bigg(R_{n_x} + R_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} R_k R_{n-k}\Bigg) - \bar{p}_x R_n\Bigg] -$$

$$-R_{(n+1)_x} - \sum_{k=0}^{n+1} R_k R_{n+1-k}.$$

$\lhd$ Для получения уравнения (1) в работе [1] использовался частный случай самосопряженного оператора Дирака второго рода. Построим законы сохранния, используя уравнение изоспектральной деформации $M\varphi = \lambda\varphi$. Оператор M известен [2], поэтому данное уравнение запишем в виде

$$(\lambda - \bar{p})\varphi_{1_{xx}} + \bar{p}_x\varphi_{1_x} - \big((\lambda - \overline{p})\big(p_x + +\bar{p}^{\,2} + p^2 - \lambda^2\big) + \bar{p}_x p\big)\varphi_1 = 0. \tag{2}$$

Равенство зависит от спетрального параметра λ, поэтому будем искать решение в виде

$$\varphi_1 = e^{i\lambda x + \Phi(x,t,\lambda)}, \tag{3}$$

где $\Phi(x,t)$ — неизвестная функция, удовлетворяющая уравнению (2). Подставляя значение функции (3) и производных в равенство (2), сокращая на φ_1, распишем полученное нелинейное соотношение по степеням параметра λ:

$$\begin{gathered}\lambda^2 2i\Phi_x + \lambda\big(\Phi_x^2 + \Phi_{xx} - 2i\bar{p}\Phi_x - p_x - \bar{p}^{\,2} - p^2 + i\bar{p}_x\big) - \\ - \bar{p}\Phi_x^2 - \bar{p}\Phi_{xx} + \bar{p}_x\Phi_x - \bar{p}_x p + \bar{p}p_x + \bar{p}^{\,3} + \bar{p}p^2 = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Представим Φ_x в виде ряда по степеням λ:

$$\Phi_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n(x,t)}{(2i\lambda)^n}. \tag{5}$$

После подстановки выражения (5) в уравнение (4), оно распадется на систему, из которой находим функции $R_n(x,t)$. Проинтегрировав полученные значения, найдем законы сохранения. ▷

Литература

1. *Редькина Т. В.* Нелинейные уравнения, интегрируемые методами солитонной математики.—Германия: Lambert Acad. Publ, 2013.—61 с.
2. *Новикова О. В.* Исследование нелинейного комплексного дифференциального уравнения в частных производных, обладающего парой Лакса: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук.—Воронеж, 2015.—146 с.

СРЕДНИЕ ВАЛЛЕ – ПУССЕНА ЧАСТИЧНЫХ СУММ ПРЕДЕЛЬНЫХ РЯДОВ ПО ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОНОРМИРОВАННЫМ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

М. С. Султанахмедов

(Россия, Махачкала; ДНЦ РАН)

Рассмотрим равномерную сетку $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ и для $-1 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ весовую функцию $\mu^{\alpha,\beta}(x,N) = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}$. Через $\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ обозначим систему полиномов Чебышева, ортонормированных на Ω_N с весом $\mu_N^{\alpha,\beta}(x)$:

$$\sum_{x=0}^{N-1} \tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\tau_{m,N}^{\alpha,\beta}(x)\mu_N^{\alpha,\beta}(x) = \delta_{nm}.$$

Пусть на Ω_N задана дискретная функция $f : \Omega_N \to \mathbb{R}$. Для нее ряд Фурье – Чебышева и его частичная сумма принимают вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k^{\alpha,\beta} \tau_{k,N}^{\alpha,\beta}(x), \quad f_k^{\alpha,\beta} = \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\tau_{k,N}^{\alpha,\beta}(j)\mu_N^{\alpha,\beta}(x), \tag{1}$$

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{\alpha,\beta}\tau_{k,N}^{\alpha,\beta}(x), \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1. \tag{2}$$

Предельным рядом по многочленам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке, называется ряд, получаемый в результате почленного предельного перехода при $\alpha, \beta \to -1$: $f(x) \sim \sum_{k=0}^{N-1} f_k^{-1,-1}\tau_{k,N}^{-1,-1}(x)$, $x \in \Omega_N$. Сложность заключается в том, что сумма $\sum_{j=0}^{N-1} f(j)\tau_{k,N}^{-1,-1}(j)\mu_N^{-1}(j)$ обращается в бесконечность в точках $j = 0$, $j = N-1$, вследствие того, что $\mu_N^{-1,-1}(0) = \mu_N^{-1,-1}(N-1) = \infty$. Введем обозначения для прямой, совпадающей с исходной функцией $f(x)$ в точках $x = 0$ и $x = N-1$:

$$a_f(x) = \frac{f(N-1)+f(0)}{2} + \frac{f(N-1)-f(0)}{2}\left(\frac{2x}{N-1} - 1\right),$$

а также разности между функцией $f(x)$ и этой прямой: $g(x) = f(x) - a_f(x)$.

Тогда для всякой дискретной функции $f : \{0, 1, \dots, N-1\} \to \mathbb{R}$ предельный ряд принимает вид

$$f(x) = S_{N-1,N}^{-1}(f,x) = a_f(x) + \frac{8x(N-1-x)}{N(N-1)} \sum_{k=0}^{N-3} \hat{g}_k \tau_{k,N-2}^{1,1}(x-1),$$

где

$$S_{n,N}^{-1}(f,x) = a_f(x) + \frac{8x(N-1-x)}{N(N-1)} \sum_{k=0}^{n-2} \hat{g}_k \tau_{k,N-2}^{1,1}(x-1),$$

$$\hat{g}_k = \hat{g}_k(N) = \frac{1}{N-2}\sum_{j=1}^{N-2} g(j)\tau_{k,N-2}^{1,1}(j-1).$$

В данной работе рассматриваются линейные средние частичных сумм предельного ряда

$$\mathcal{V}_{m,n,N}^{-1}(f,x) = \frac{S_{m,N}^{-1}(f,x) + S_{m+1,N}^{-1}(f,x) + \ldots + S_{m+n,N}^{-1}(f,x)}{n+1}.$$

Эти новые операторы могут быть записаны с помощью следующего выражения:

$$\mathcal{V}_{m,n,N}^{-1}(f,x) = a_f(x) +$$
$$+\frac{8x(N-1-x)}{N(N-1)}\left[\sum_{k=0}^{m-2}\hat{g}_k\tau_{k,N-2}^{1,1}(x-1) + \sum_{k=m-1}^{m+n-2}\frac{m+n-k+1}{n+1}\hat{g}_k\tau_{k,N-2}^{1,1}(x-1)\right],$$

откуда

$$\mathcal{V}_{m,n,N}^{-1}(f,x) = S_{m+n,N}^{-1}(f,x) - \frac{8x(N-1-x)}{N(N-1)}\sum_{k=m-1}^{m+n-2}\frac{k-m}{n+1}\hat{g}_k\tau_{k,N-2}^{1,1}(x-1).$$

Нетрудно показать, что операторы $\mathcal{V}_{m,n,N}^{-1}(f,x)$ обладают свойством совпадения с исходной функцией в концевых узлах сетки

$$\mathcal{V}_{m,n,N}^{-1}(f,0) = f(0), \quad \mathcal{V}_{m,n,N}^{-1}(f,N-1) = f(N-1),$$

а также свойством проективности над пространством H_m алгебраических полиномов степени не выше m: $\mathcal{V}_{m,n,N}^{-1}(P_m,x) \equiv P_m(x)$.

Ставится задача исследования аппроксимативных свойств операторов $\mathcal{V}_{m,n,N}^{-1}(f,x)$, которая в свою очередь сводится к задаче исследования поведения нормы оператора в пространстве $C[0,N-1]$: $\|\mathcal{V}_{m,n}^{-1}\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1}\|\mathcal{V}_{m,n}^{-1}(f,x)\|$.

АСИМПТОТИКА СПЕКТРОВ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ДВУМЯ СФЕРАМИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА РАДИАЛЬНОГО ПОТОКА

А. С. Черныш

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В докладе исследуется спектр получения радиального потока, являющегося стационарным течением уравнения Навье — Стокса в сферическом слое между двумя концентрическими сферами. При этом предполагается, что граница области открыта, т. е. жидкость втекает в область и вытекает из нее. На границе задана полная скорость жидкости. При этих условиях существует стационарное решение, сонаправленное с радиальным ортом. Исходная задача линеаризуется на этом решении, после чего переходом к переменным возмущений строится спектральная задача. Решение этой задачи ищется в проекциях на пространство векторных сферических гармоник. Из условия разрешимости полученной задачи определяется спектр исследуемого равновесия. Последнее представимо объединением двух множеств, одно из которых состоит из собственных значений обыкновенного дифференциального оператора, целиком лежащих в левой полуплоскости. Элементы второго множества определяются из краевой задачи для амплитуды радиального компоненты поля скорости. Асимптотическое приближение к решению этой задачи ищется при больших числах Рейнольдса с помощью метода Вишика — Люстерника.

Литература

1. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений.—М.: Мир, 1984.—535 с.
2. *Prandtl L.* Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Proc. Third Inter. Math. Kongr., Heidelberg.—P. 484–491.
3. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости.—М.: Мир, 1967.—310 с.
4. *Вишик М. И., Люстерник Л. М.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук.—1957.—Т. 12, № 5.—С. 3–122.
5. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Мир, 1968.—448 с.
6. *Ильин К. И., Моргулис А. Б.* О спектрах открытых течений идеальной жидкости в кольцевых областях // Исслед. по мат. анализу, диф. уравнениям, мат. моделированию и их прилож.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 408–419.
7. *Ilin K., Morgulis A.* Instability of an inviscid flow between porous cylinders with radial flow // J. Fluid Mech.—2013.—Vol. 730.—P. 364—378.
8. *Ilin K., Morgulis A.* Instability of a two-dimensional viscous flow in an annulus with permeable walls to two-dimensional perturbations // Physics of Fluids.—2015.—27 (4):044107.—DOI: 10.1063/1.4919095.
9. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1981.—512 с.
10. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960.—942 с.
11. *Hill E. L.* The theory of vector spherical harmonics // Amer. J. Phys.—1954 .—Vol. 22.—P. 211–214.

СРЕДНИЕ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА

Т. Н. Шах-Эмиров

(Россия, Махачкала; ДНЦ РАН)

Пусть f — суммируемая на $[0, 2\pi]$ 2π-периодическая функция. Определим ряд Фурье для f:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{1}$$

где $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$, $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kxdx$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kxdx$. Через $S_n(f,x)$ обозначим частичную сумму ряда (1)

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Средние Валле-Пуссена определим следующим образом:

$$V_{n,m}(f,x) = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{m-1} S_{n+l}(f,x).$$

Введем теперь в рассмотрение средние Валле-Пуссена второго порядка:

$$V_n^2(f,x) = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} V_{n+l,n}(f,x).$$

В настоящей работе исследуются аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена второго порядка.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ДНЦ РАН — Дагестанский научный центр Российской академии наук
КубГУ — Кубанский государственный университет
СКФУ — Северо-Кавказский федеральный университет
ЮМИ — Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук
ЮФУ — Южный федеральный университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ:

тезисы докладов
XII региональной школы-конференции
«Владикавказская молодежная математическая школа»
(РСО-А, пос. В. Фиагдон, 18 по 23 июля 2016 г.)

Компьютерная верстка: М. У. Вазагаева
Зав. редакцией: В. В. Кибизова

ЮМИ ВНЦ РАН
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.