ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ — ФИЛИАЛ ВНЦ РАН
СЕВЕРО-ОСЕТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Л. ХЕТАГУРОВА
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
РЕГИОНАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР ЮФУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ:

тезисы докладов
XIV Владикавказской молодежной математической школы
(РСО-А, с. Н. Цей, 16–21 июля 2018 г.)

Владикавказ
2018

ББК 22.16+я43
УДК 517.21+

Школа проведена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-10026.

Математический анализ и математическое моделирование: тезисы докладов XIV Владикавказской молодежной математической школы (РСО-А, с. Н. Цей, 16–21 июля 2018 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2018.—52 с.

В сборник вошли тезисы докладов, представленных на XIV Владикавказской молодежной математической школе. Мероприятие состоялась в РСО-А, с. Н. Цей в период с 16 по 21 июля 2018 года в рамках IX Международного научно-образовательного математического форума.

ISBN 978-5-904695-40-8

СОДЕРЖАНИЕ

КРИТЕРИИ СЮРЪЕКТИВНОСТИ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ В ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ ФУНКЦИЙ ЗАДАННОГО РОСТА[1]

Т. М. Андреева

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Пусть G — выпуклая ограниченная область в $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех функций, голоморфных в G, а $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая по n последовательность неотрицательных выпуклых монотонно возрастающих функций на $(t_0, +\infty)$ $(t_0 \geqslant 0)$.

С каждым весом $v_n, n \in \mathbb{N}$, свяжем соответствующее банахово пространство

$$H_{v_n}(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_{v_n} := \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{e^{v_n(\ln(1/d(z)))}} < \infty \right\},$$

где $d(z)$ — функция расстояния от точки $z \in G$ до области границы G, и образуем индуктивный предел $\mathcal{V}H(G) := \operatorname{ind} H_{v_n}(G)$.

Пусть, далее, μ — аналитический функционал в $\mathbb{C}$ с носителем в K, где K — некоторое выпуклое компактное подмножество. При некоторых ограничениях на весовую последовательность, подобных использованным в работе В. В. Напалкова [1], исследуется вопрос о непрерывности и сюръективности оператора свертки

$$\mu * f(z) : f \mapsto \mu_w f(z + w),$$

действующего из $\mathcal{V}H(G + K)$ в (на) $\mathcal{V}H(G)$. С помощью подходящего описания сопряженных с $\mathcal{V}H(G + K)$ и $\mathcal{V}H(G)$ весовых пространств целых функций заданного роста ответ на этот вопрос дается в терминах преобразования Лапласа $\hat{\mu}(\zeta) := \mu_z e^{\langle z \cdot \rangle}$ функционала μ.

Основными результатами данной работы являются следующие.

1) Получен критерий непрерывности оператора свертки $\mu* : \mathcal{V}H(G + K) \to \mathcal{V}H(G)$.

2) Получен функциональный критерий сюръективности оператора свертки в терминах замкнутости образа сопряженного к $\mu*$ оператора умножения на $\hat{\mu}$.

3) Для частного случая пространств экспоненциально-степенного роста максимального и нормального типов установлен критерий сюръективности оператора свертки в терминах регулярности роста $\hat{\mu}$ (оценки снизу на $|\hat{\mu}|$ вне исключительных множеств определенного вида).

4) Для пространств максимального типа получен также критерий существования у оператора свертки ЛНПО.

Ранее подобные результаты были получены в [2, 3] для пространств функций, голоморфных в выпуклых областях и обладающих полиномиальным ростом вблизи границы области, т. е. для весов вида $v_n(z) = n \ln(1 + |z|)$.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых ученых-кандидатов наук, МК-1056.2018.1.

Литература

1. *Напалков В. В.* Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы // Изв. РАН. Сер. мат.—1987.—Т. 51.—№ 2.—С. 287–305.
2. *Abanin A. V., Ishimura R., Khoi L. H.* Convolution operators in $A^{-\infty}$ for convex domains // Ark. Mat.—2012.—Vol. 50.—№ 1.—P. 1–22.
3. *Абанин А. В., Хой Л. Х.* Линейный непрерывный правый обратный оператор для оператора свертки в пространствах голоморфных функций полиномиального роста // Изв. вузов. Математика.—2015.—№ 1.—С. 3–13.

Математический анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIV Владикавк. молодежн. мат. шк. (РСО-А, с. Н. Цей, 16–21 июля 2018 г.)

ЗАДАЧА О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Е. С. Барановский (Россия, Воронеж; ВГУ),
Е. Н. Свиридова (Россия, Воронеж; ВУНЦ ВВС)

Рассматривается система нелинейных уравнений, описывающих неизотермическое стационарное течение вязкой жидкости (с постоянной плотностью) в ограниченной локально-липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с границей Γ при условии пристенного скольжения Навье [1, § 5] и смешанных краевых условиях для температуры:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - \operatorname{div}\{\mu(\theta)\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\} + \nabla p = \boldsymbol{f} \ \text{ в } \Omega, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \ \text{ в } \Omega, \\ (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\theta - \operatorname{div}\{k(\theta)\nabla\theta\} - \mu(\theta)|\boldsymbol{D}_\rho(\boldsymbol{v})|^2 = \omega \ \text{ в } \Omega, \\ \mu(\theta)[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\mathbf{n}]_{\tan} = -\varkappa(\theta)\boldsymbol{v}_{\tan} \ \text{ на } \Gamma, \\ \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \ \text{ на } \Gamma, \\ \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = \psi \ \text{ на } \Gamma_0, \\ \theta = 0 \ \text{ на } \Gamma\setminus\Gamma_0, \end{cases} \tag{A}$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость течения, θ — температура, p — давление, $\boldsymbol{f}$ — внешние силы, ω — внутренние источники тепла, $\mu(\theta)$ — вязкость жидкости, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$ — тензор скоростей деформации, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) = (\nabla\boldsymbol{v}+(\nabla\boldsymbol{v})^T)/2$, $\boldsymbol{D}_\rho(\boldsymbol{v})$ — регуляризованный тензор скоростей деформации (индекс ρ обозначает применение оператора усреднения, см. [2, гл. I, § 1, п. 6]), $k(\theta)$ — коэффициент теплопроводности, $\varkappa(\theta)$ — коэффициент проскальзывания, $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к Γ, $k(\theta)\psi$ — поток тепла через участок границы $\Gamma_0 \subset \Gamma$.

Неизвестными в системе (A) являются $\boldsymbol{v}$, θ и p, а все остальные величины считаются заданными.

Отличительная особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что основные параметры модели (коэффициенты теплопроводности, вязкости и проскальзывания) не являются постоянными величинами, а зависят от температуры.

Введем понятие слабых решений задачи (A). Пусть

$$\boldsymbol{X}(\Omega) := \left\{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega) :\ \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,\ \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = 0\right\},$$

$$Y(\Omega) := \left\{\theta \in H^1(\Omega) :\ \theta|_{\Gamma\setminus\Gamma_0} = 0\right\}.$$

Через $\mathbf{G} : \mathbf{F}$ обозначим скалярное произведение тензоров $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$.

Определение. Будем говорить, что пара $(\boldsymbol{v}, \theta) \in \boldsymbol{X}(\Omega) \times Y(\Omega)$ — *слабое решение* задачи (A), если выполнены следующие равенства:

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega v_i\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i}\,d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \mu(\theta)\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}):\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi})\,d\boldsymbol{x} + \int_\Gamma \varkappa(\theta)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,d\sigma = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,d\boldsymbol{x},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\eta\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega} k(\theta)\nabla\theta\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega}\mu(\theta)|\boldsymbol{D}_\rho(\boldsymbol{v})|^2\eta\,d\boldsymbol{x} = \\ = \int\limits_{\Gamma_0} k(\theta)\psi\eta\,d\sigma + \int\limits_{\Omega}\omega\eta\,d\boldsymbol{x}$$

для любых $\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{X}(\Omega)$ и $\eta\in Y(\Omega)$.

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема. *Пусть* $\operatorname{meas}(\Gamma\setminus\Gamma_0)>0$. *Предположим также, что* $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $\omega\in L^2(\Omega)$, $\psi\in L^2(\Gamma_0)$, *функции* $\mu, k, \varkappa\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ *непрерывны и существуют константы* μ_0, μ_1, k_0, k_1, $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ *такие, что*

$$0<\mu_0\leqslant\mu(s)\leqslant\mu_1,\quad 0<k_0\leqslant k(s)\leqslant k_1,\quad 0<\varkappa_0\leqslant\varkappa(s)\leqslant\varkappa_1\quad\forall\, s\in\mathbb{R}.$$

Тогда задача (A) *имеет по крайней мере одно слабое решение.*

Литература

1. *Раджагопал К. Р.* О некоторых нерешенных проблемах нелинейной динамики жидкостей // Успехи мат. наук.—2003.—Т. 58, № 2.— С. 111–121.
2. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. 2-е изд.—М.: Наука, 1970.—288 с.

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Ф. Т. Богатырева

(Россия, Нальчик; ИПМА)

Рассмотрим уравнение

$$Lu(x) \equiv D_{0x}^{\{\alpha,\beta\}}u(x) - \lambda D_{0x}^{\{\gamma,\delta\}}u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

где $D_{0x}^{\{\alpha,\beta\}}$, $D_{0x}^{\{\gamma,\delta\}}$ — операторы дробного дифференцирования Джрбашяна — Нерсесяна, ассоциированные с упорядоченными парами $\{\alpha,\beta\}$ и $\{\gamma,\delta\}$ порядков $\mu = \alpha+\beta-1 > 0$, $\nu = \gamma+\delta-1 > 0$ соответственно, $\mu > \nu$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна — Нерсесяна, ассоциированный с последовательностью $\{\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ порядка $\alpha = \sum_{k=0}^{n}\gamma_k - 1 > 0$, $\gamma_k \in (0,1]$, определяется соотношением [1]

$$D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}}u(x) = D_{0x}^{\gamma_n-1}D_{0x}^{\gamma_{n-1}}\ldots D_{0x}^{\gamma_1}D_{0x}^{\gamma_0}u(x),$$

где D_{0x}^{γ} — производная (интеграл) Римана — Лиувилля [2].

Размерность ядра линейных дифференциальных операторов (целого и дробного порядка), как правило, связана с порядком старшей производной. Например, для операторов Римана — Лиувилля и Капуто порядка α, где $m-1 < \alpha \leqslant m$, соответствующая размерность равна m.

В данной работе построено общее представление решения уравнения (1) и при этом показано, что размерность ядра оператора L зависит от распределения параметров α, β, γ, δ и может быть равной нулю.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = D_{0x}^{-\varepsilon}g(x)$, $g(x) \in L[0,1]$, $\varepsilon > \sigma - \mu$. Тогда любое регулярное решение уравнения* (1) *будет иметь вид:*

1) *при* $\alpha > \gamma$

$$u(x) = \int\limits_0^x f(t)(x-t)^{\mu}E_{\mu-\nu,\mu+1}(\lambda(x-t)^{\mu-\nu})\,dt + \\ + x^{\alpha-1}E_{\mu-\nu,\alpha}(\lambda x^{\mu-\nu})\left[D_{0x}^{\alpha-1}u(x)\right]_{x=0};$$

2) *при* $\alpha = \gamma$

$$u(x) = \int\limits_0^x f(t)(x-t)^{\mu}E_{\mu-\nu,\mu+1}(\lambda(x-t)^{\mu-\nu})\,dt + \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[D_{0x}^{\alpha-1}u(x)\right]_{x=0};$$

3) *при* $\alpha < \gamma$

$$u(x) = \int\limits_0^x f(t)(x-t)^{\mu} E_{\mu-\nu,\mu+1}(\lambda(x-t)^{\mu-\nu})\,dt,$$

где $E_{\alpha,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/\Gamma(\alpha k + \mu)$ — *функция Миттаг — Леффлера* [3, с. 117].

Литература

1. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Математика.—1968.—С. 3–28.
2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
3. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.—М.: Наука, 1966.—672 с.

Математический анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIV Владикавк. молодежн. мат. шк. (РСО-А, с. Н. Цей, 16–21 июля 2018 г.)

СИСТЕМА ФУНКЦИЙ, ОРТОНОРМИРОВАННАЯ ПО СОБОЛЕВУ И ПОРОЖДЕННАЯ СИСТЕМОЙ ФУНКЦИЙ ЛАГЕРРА[1]

Р. М. Гаджимирзаев

(Россия, Махачкала; ДНЦ РАН)

Пусть $p > 1$, L^p — пространство измеримых функций f, определенных на полуоси $[0, \infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$W^r_{L^p}$ — подкласс функций f, непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз, для которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a,b] \subset [0,\infty)$, а $f^{(r)} \in L^p$. Через $\mu_n^\alpha(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ обозначим функции Лагерра, которые определяются равенством $\mu_n^\alpha(x) = \sqrt{\rho(x)}\, l_n^\alpha(x)$, где $\rho(x) = e^{-x}x^\alpha$, $l_n^\alpha(x)$ — ортонормированный полином Лагерра степени n. Хорошо известно, что система функций $\{\mu_n^\alpha(x)\}_{n=0}^\infty$ при $\alpha > -1$ ортонормирована относительно скалярного произведения $\langle \mu_m^\alpha, \mu_n^\alpha \rangle = \int_0^\infty \mu_m^\alpha(x)\mu_n^\alpha(x)\, dx$. В работе [1] было показано, что система функций $\{\mu_n^\alpha(x)\}_{n=0}^\infty$ при $\alpha \geqslant 0$ образуют базис в пространстве L^p для $\frac{4}{3} < p < 4$.

В настоящей работе рассматривается система функций $\mu_{r,n}^\alpha(x)$ $(r \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, \ldots)$, введенная в работе [2], ортонормированная при $\alpha > -1$ относительно скалярного произведения Соболева

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0) g^{(\nu)}(0) + \int\limits_0^\infty f^{(r)}(t) g^{(r)}(t)\, dt$$

и порожденная функциями Лагерра $\mu_n^\alpha(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ посредством равенств

$$\mu_{r,n}^\alpha(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots, r-1,$$

$$\mu_{r,r+n}^\alpha(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^x (x-t)^{r-1} \mu_n^\alpha(t) dt, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \geqslant 0$, $A \geqslant 0$, $\frac{4}{3} < p < 4$, $f \in W^r_{L^p}$. Тогда ряд Фурье функции f по системе $\{\mu_{r,n}^\alpha(x)\}_{n=0}^\infty$ сходится равномерно относительно $x \in [0, A]$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00477 мол_а.

Теорема 2. *Пусть $\alpha > -1$. Тогда справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

$$\mu_{r,n}^{\alpha}(x) = \frac{x}{n}\mu_{r,n-1}^{\alpha}(x), \quad 1 \leqslant n \leqslant r-1;$$

$$r\mu_{r+1,r+1}^{\alpha}(x) = (x-2r-\alpha)\mu_{r,r}^{\alpha}(x) + 2x\mu_{r-1,r-1}^{\alpha}(x), \quad r \geqslant 1;$$

$$\mu_{1,n+2}^{\alpha}(x) = \frac{2x\mu_{n}^{\alpha}(x) - \mu_{1,n+1}^{\alpha}(x) + \sqrt{n(n+\alpha)}\mu_{1,n}^{\alpha}(x)}{\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}}, \quad n \geqslant 0;$$

$$r\mu_{r+1,r+n}^{\alpha}(x) = \sqrt{n(n+\alpha)}\mu_{r,r+n}^{\alpha}(x) + (x-2n-\alpha+1)\,\mu_{r,r+n-1}^{\alpha}(x) +$$
$$+\sqrt{(n-1)(n+\alpha-1)}\mu_{r,r+n-2}^{\alpha}(x), \quad r \geqslant 1,\ n = 2,3,\ldots$$

Теорема 3. *Справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\mu_{1,1+n}^{0}(x) = \frac{xe^{-\frac{x}{2}}}{n+1}L_n^1(x) + \frac{x^2e^{-\frac{x}{2}}}{2(n+1)(n+2)}L_n^2(x) + \vartheta_n(x),$$

в которой для остаточного члена справедливы следующие оценки:

$$\left.\begin{array}{l} O\left(\dfrac{1}{n^3}\right),\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{7}{4}}}\right),\ \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant \omega. \end{array}\right\}$$

Литература

1. *Askey R., Wainger S.* Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Math.—1965.—Vol. 87.—P. 698–708.
2. *Гаджимирзаев Р. М.* Рекуррентные соотношения для полиномов, ортонормированных по Соболеву, порожденных полиномами Лагерра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2018.—Т. 18, № 1.—С. 17–24.

К ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ДИСКРЕТНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ[1]

Л. Х. Гадзова

(Россия, Нальчик; ИПМА)

В интервале $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\alpha_j \in]1,2[$, $\lambda, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\beta_1 > 0$, $\alpha_1 > \ldots > \alpha_m$, $\partial_{0x}^{\gamma} u(x)$ — производная Капуто [1, с. 11]:

$$\partial_{0x}^{\gamma} u(x) = D_{0x}^{\gamma - n} u^{(n)}(x), \quad n - 1 < \gamma \leqslant n,$$

D_{0x}^{γ} — оператор дробного интегро-дифференцирования порядка γ в смысле Римана — Лиувилля [1, с. 9] по переменной x.

В данной работе обсуждаются вопросы разрешимости основных краевых задач для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования. Доказаны теоремы существования и единственности решений, получены явные представления решений и построены функции Грина [2–4].

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Гадзова Л. Х.* Задача Дирихле и Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Диф. уравнения.—2015.—Т. 51, № 12.—С. 1580–1586.
3. *Гадзова Л. Х.* Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, вып. 3.—С. 22–30.
4. *Гадзова Л. Х.* Краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования // Диф. уравнения.—2018.—Т. 54, № 2.—С. 180–186.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462-А.

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОЙ ПЛЕНКИ ЭЛЕКТРОЛИТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ[1]

Г. С. Ганченко (Россия, Краснодар; Финансовый университет),
Н. Ю. Ганченко (Россия, Краснодар; КубГУ),
Е. В. Горбачева (Россия, Краснодар; КубГУ)

Доклад посвящен теоретическому исследованию устойчивости тонкой пленки электролита под действием переменного электрического поля. Рассматривается микронный слой электролита на твердой подложке. В общей постановке поведение электролита описывается системой уравнений Нернста — Планка — Пуассона — Стокса относительно концентраций ионов диссоциированных солей, электрического потенциала, давления и вектора скорости. Воздух предполагается диэлектрическим и описывается уравнением Лапласа относительно электрического потенциала.

Было выделено две принципиально отличные постановки: в первом случае электрическое поле было направлено вдоль свободной границы раздела фаз, а во втором — по нормали. В качестве основного решения для двух случаев принималось решение без возмущения свободной границы. В первом случае в основном решение присутствует движение электролита, вызванное электроосмотическим течением, в то время как для второго случая движение электролита отсутствует. Для исследования линейной устойчивости основного решения на него накладывались малые, периодические вдоль пленки, возмущения.

В случае касательного электрического поля было обнаружено, что в системе присутствует два типа неустойчивости: коротковолновый и длинноволновый. Длинноволновый тип неустойчивости связан с неустойчивостью поверхностного заряда, а коротковолновый — с возмущением проводимости электролита [1].

Как оказалось, случай нормального электрического поля кардинально отличается от первого случая, так как в упрощенной постановке задача может быть сведена к постановке типа жидкого диэлектрика с комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_0 - i\varkappa/\omega$, где ε_0 — диэлектрическая проницаемость электролита, $\varkappa$ — его электрическая проводимость, а ω — частота внешнего электрического поля. Для случая больших частот гидродинамическая часть задачи не реагирует на колебания с частотой больше собственной [2] и в системе остаются только монотонные слагаемые, которые вызывают дрейф электролита. В этом случае неустойчивость возникает не из уравнений электростатики, как в первом случае, а из уравнений гидродинамики. Для случая пленки бесконечной толщины может быть получена следующая простая формула для коэффициента роста

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №№ 18-58-15004-НЦНИ_а, 16-08-00643_а, 18-38-00611-мол_а, и Совета по грантам Президента Российской Федерации, МК-5302.2018.1.

возмущений:

$$\lambda = \frac{E^2}{\mu\varepsilon_g}\left(\frac{\varkappa^2}{\omega^2} + \varepsilon_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_g)\right)\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon_g^2}{|\varepsilon|^2}\frac{\varepsilon - \varepsilon_g}{\varepsilon + \varepsilon_g}\right) - \alpha\frac{\gamma}{2\mu},$$

где E — амплитуда внешнего электрического поля, μ — динамическая вязкость электролита, ε_g — диэлектрическая проницаемость воздуха, α — волновое число возмущений, γ — коэффициент поверхностного натяжения, Re обозначает действительную часть комплексного числа. Данный тип неустойчивости напоминает неустойчивость Тонкса — Френкеля для диэлектрических жидкостей [3].

Теоретические результаты данного исследования могут быть полезны для практического применения как в инженерных областях для проектирования лабораторий на чипе, так и для решения медицинских проблем доставки лекарственных препаратов.

Литература

1. *Demekhin E. A., Ganchenko G. S., Gorbacheva E. V., Amiroudine S.* Stability of two layers dielectric-electrolyte microflow subjected to an alternating external electric field // Electrophoresis.—2018. DOI: 10.1002/elps.201700472.
2. *Юдович В. И.* Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями. Ч. II. // Успехи механики.—2006.—Т. 4, № 3.—С. 75–129.
3. *Френкель Я. И.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // Журнал экспериментальной и теоретической физики.—1936.—Т. 6, № 4.—С. 347–350.

Математический анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIV Владикавк. молодежн. мат. шк. (РСО-А, с. Н. Цей, 16–21 июля 2018 г.)

ДВУМЕРНЫЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ РЯД ПО УЛЬТРАСФЕРИЧЕСКИМ ПОЛИНОМАМ ЯКОБИ

И. Г. Гусейнов

(Россия, Махачкала; ДНЦ РАН)

Определим ультрасферические полиномы Якоби $P_n^{\alpha,\alpha}(x)$, которые для упрощения записи будем обозначать через $P_n^{\alpha}(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, при помощи формулы явного вида

$$P_n^{\alpha}(x) = P_n^{\alpha,\alpha}(x) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (n+2\alpha+1)_k}{(\alpha+1)_k k!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k, \quad n \geqslant 0,$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1), k \geqslant 1$ — символ Похгаммера. При $\alpha > -1$ полиномы $P_n^{\alpha}(x)$ удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^{\alpha} P_k^{\alpha}(x) P_l^{\alpha}(x)\, dx = h_k^{\alpha} \delta_{kl},$$

где

$$h_k^{\alpha} = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\alpha+1) 2^{2\alpha+1}}{k!\Gamma(k+2\alpha+1)(2k+2\alpha+1)},$$

а δ_{kl} — символ Кронекера. Через $p_n^{\alpha}(x)$ будем обозначать нормированные полиномы Якоби, которые связаны с $P_n^{\alpha}(x)$ равенством

$$p_n^{\alpha}(x) = \{h_k^{\alpha}\}^{-\frac{1}{2}} P_n^{\alpha}(x).$$

Пусть $X = [-1,1] \times [-1,1]$, а $C(X)$ — нормированное пространство непрерывных функций $f = f(x,y)$, заданных на X, для которых норма определена обычным образом как $\|f\| = \sup\{|f(x,y)| : x, y \in [-1,1]\}$. Для функции $f \in C(X)$ при $\alpha, \beta > -1$ определим коэффициенты Фурье

$$f_{i,j}^{\alpha,\beta} = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} f(x,y) p_i^{\alpha}(x) p_j^{\beta}(y) (1-x^2)^{\alpha} (1-y^2)^{\beta}\, dx\, dy, \quad i, j \geqslant 0,$$

и ряд Фурье

$$f(x,y) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_{i,j}^{\alpha,\beta} p_i^{\alpha}(x) p_j^{\beta}(y).$$

Предельным ультрасферическим рядом по полиномам Якоби назовем ряд, полученный из ряда Фурье, определенного выше, в результате почленного предельного перехода при $\alpha, \beta \to -1$, т. е. ряд вида

$$f(x,y) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_{i,j}^{-1,-1} p_i^{-1}(x) p_j^{-1}(y),$$

где

$$f_{i,j}^{-1,-1} p_i^{-1}(x) p_j^{-1}(y) = \lim_{\alpha\to-1} \lim_{\beta\to-1} f_{i,j}^{\alpha,\beta} p_i^{\alpha}(x) p_j^{\beta}(y).$$

Пользуясь результатами, полученными в работе [1], мы покажем, что предельный ультрасферический ряд по полиномам Якоби для функции $f \in C(X)$ имеет вид

$$f(x,y) \sim Q(f)(x,y) + (1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k(f) + y b_k(f)\right] p_k^1(x) +$$

$$+ (1-y^2)\sum_{l=0}^{\infty}\left[c_l(f) + x d_l(f)\right] p_l^1(y) +$$

$$+ (1-x^2)(1-y^2)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} e_{k,l}(f) p_k^1(x) p_l^1(y).$$

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Предельные ультрасферические ряды и их аппроксимативные свойства // Мат. заметки.—2013.—Т. 94, № 2.—С. 295–309.

Математический анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIV Владикавк. молодежн. мат. шк. (РСО-А, с. Н. Цей, 16–21 июля 2018 г.)

МНОГОСЛОЙНЫЙ ПЕРСЕПТРОН КАК ИНСТРУМЕНТ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ СОЦИАЛЬНЫХ ЯВЛЕНИЙ

А. Ф. Джиоев

(Южная Осетия, Цхинвал; ЮОГУ им. Тибилова)

В наши дни большую популярность по всему миру набрала деятельность букмекерских контор. Организаторы данного вида деятельности нуждаются в составлении прогнозов для выставления корректных коэффициентов на исходы какого-либо события. Букмекерские конторы постоянно совершенствуют свою работу, однако все равно присутствует достаточно большой разброс значений коэффициентов на одни и те же события в разных конторах. Из этого можно сделать вывод, что используемые ими методы прогнозирования все же не являются идеальными и порой не отражают реальное положение вещей. С учетом того, что алгоритмы, использующиеся при прогнозировании тех или иных результатов в различных конторах, являются источником дохода для них, то можно сделать вывод о том, что в широком доступе они находиться не будут, так как конкуренция между букмекерами достаточно высока.

Анализ методов позволяет разработать программное обеспечение, использование которого может обеспечить финансовую выгоду для букмекерской конторы.

Целью работы является построение модели прогнозирования результатов футбольных матчей, как частного случая социальных событий, на основе данных о влияющих факторах. Рассмотрен и проанализирован ряд факторов, влияющих на результаты спортивных соревнований. Результаты апробированы на исходах игр Чемпионата России по футболу.

Предметом исследования является автоматизация процесса прогнозирования результатов матчей. Методологической и теоретической основой исследования являются труды отечественных и зарубежных авторов в области статистической теории, регрессионного анализа, прогнозирования временных рядов, технического анализа, нечетких логик и нейронных сетей.

Базой для получения информации является статистика по результату игр чемпионата России по футболу. Все данные опубликованы в свободном доступе в Интернете и в различных печатных изданиях.

Новизна данного исследования состоит в разработке модели, способной составить конкуренцию букмекерским конторам. Теоретическая значимость состоит в том, что выводы, сделанные на основе исследования, могут быть использованы при усовершенствовании и разработке новых методов прогнозирования исходов соревнований.

Не вызывает сомнения актуальность данного исследования, поскольку конкуренция среди букмекеров велика, и любая букмекерская контора будет стремиться усовершенствовать свою систему прогнозирования. Да и, к тому же, ставки, сделанные на научно обоснованных методах, приносят больше дохода и выгоды, чем сделанные «наудачу».

Литература

1. *Россиев Д. А.* Самообучающиеся нейросетевые экспертные системы в медицине: теория, методология, инструментарий, внедрение.—Красноярск: 2000.—118 с.
2. *Чернова Н. И.* Теория вероятностей: Учеб. пособие для вузов.—Новосибирск: Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики, 2009.—128 с.
3. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. 9-ое изд.—М.: Высшая школа, 2004.—404 с.
4. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. 9-ое изд.—М.: Высшая школа, 2004.
5. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. Книга первая.—М.: Финансы и статистика, 1987.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛИНОМОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Д. Б. Диденко

(Россия, Воронеж; ВГУ)

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\operatorname{End}\mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — линейный оператор с непустым резольвентным множеством $\rho(A)$ и $B_1, B_2, \ldots, B_N$ — операторы из алгебры $\operatorname{End}\mathcal{X}$, $N \in \mathbb{N}$.

Определение 1. Пусть $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ — замкнутый линейный оператор. Рассмотрим следующие условия:

1) ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \{y \in D(\mathcal{B}) : \mathcal{B}y = 0\}$ оператора $\mathcal{B}$ — нулевое подпространство из $\mathcal{Y}$ (оператор $\mathcal{B}$ инъективен);

2) размерность $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{B} = n$ ядра $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ оператора $\mathcal{B}$ положительна и конечна;

3) $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ — бесконечномерное подпространство из $\mathcal{Y}$ ($\dim\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \infty$);

4) $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ — дополняемое подпространство в $D(\mathcal{B})$ ($D(\mathcal{B})$ рассматривается как банахово пространство с нормой графика $\|x\|_{\mathcal{B}} = \|x\| + \|\mathcal{B}x\|$, $x \in D(\mathcal{B})$);

5) область значений $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ опреатора $\mathcal{B}$ замкнута ($\overline{\operatorname{Im}\mathcal{B}} = \operatorname{Im}\mathcal{B}$), что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора $\mathcal{B}$)

$$\gamma(\mathcal{B}) = \inf_{x \in D(\mathcal{B})\setminus\operatorname{Ker}\mathcal{B}} \frac{\|\mathcal{B}x\|}{\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker}\mathcal{B})} = \inf_{\substack{y=\mathcal{B}x,\\ x\notin\operatorname{Ker}\mathcal{B}}} \frac{\|y\|}{\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker}\mathcal{B})},$$

где $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker}\mathcal{B}) = \inf_{x_0 \in \operatorname{Ker}\mathcal{B}} \|x - x_0\|$;

6) $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{B}} \neq \operatorname{Im}\mathcal{B}$ ($\operatorname{Im}\mathcal{B}$ — незамкнутое подпространство);

7) $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ — замкнутое дополняемое в $\mathcal{Z}$ подпространство;

8) оператор $\mathcal{B}$ равномерно инъективен (корректен), т. е. $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \{0\}$ и $\gamma(\mathcal{B}) > 0$;

9) $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ — замкнутое дополняемое подпространство из $\mathcal{Z}$ конечной коразмерности ($\operatorname{codim}\operatorname{Im}\mathcal{B} = m < \infty$);

10) $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ — замкнутое дополняемое подпространство из $\mathcal{Z}$ бесконечной коразмерности;

11) $\operatorname{Im}\mathcal{B} = \mathcal{Z}$, т. е. $\mathcal{B}$ — сюръективный оператор;

12) $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{B}} \neq \mathcal{Z}$;

13) оператор $\mathcal{B}$ имеет левый обратный оператор $(\mathcal{B}^{-1})_l \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$, т. е. $(\mathcal{B}^{-1})_l\mathcal{B}x = x$ для любого $x \in D(\mathcal{B})$;

14) оператор $\mathcal{B}$ имеет правый обратный оператор $(\mathcal{B}^{-1})_r \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$, т. е. $\mathcal{B}(\mathcal{B}^{-1})_r = I_{\mathcal{Z}}$ — тождественный оператор в $\mathcal{Z}$ и $\operatorname{Im}(\mathcal{B}^{-1})_r = D(\mathcal{B})$;

15) оператор $\mathcal{B}$ (непрерывно) обратим, т. е. $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \{0\}$, $\operatorname{Im}\mathcal{B} = \mathcal{Z}$ (и, следовательно, по теореме Банаха $\mathcal{B}^{-1} \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$).

Если для оператора $\mathcal{B}$ выполнены все условия из совокупности S непротиворечивых условий из множества условий $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, 15\}$ ($S \subset \mathcal{I}$), то будем говорить, что оператор $\mathcal{B}$ находится в состоянии обратимости S. Множество состояний обратимости оператора $\mathcal{B}$ обозначим символом $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{B})$.

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A} = A^N + B_1 A^{N-1} + \ldots + B_N : D(A^N) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ с областью определения $D(\mathcal{A}) = D(A^N)$, $N \in \mathbb{N}$.

Наряду с оператором $\mathcal{A}$ определим оператор $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ с помощью матрицы

$$\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A & -I \\ B_N & B_{N-1} & B_{N-2} & \ldots & B_2 & A + B_1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Множества состояний обратимости операторов $\mathcal{A} : D(A^N) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ и $\mathbb{A} : D(A)^N \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ совпадают, т. е.*

$$\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{A}) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathbb{A}).$$

Литература

1. *Баскаков А. Г., Кабанцова Л. Ю, Коструб И. Д., Смагина Т. И.* Линейные дифференциальные операторы и операторные матрицы второго порядка // Диф. уравнения.—2017.—Т. 59, № 1.—С. 1–10.
2. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил.—1996.—Т. 30, вып. 3.—С. 1–11.

Математический анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIV Владикавк. молодежн. мат. шк. (РСО-А, с. Н. Цей, 16–21 июля 2018 г.)

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРАТКИХ ПИКОВ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИЙ ПРИ ИНВАЗИИ ЧУЖЕРОДНЫХ ВИДОВ БЕЗ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ[1]

В. А. Дубровская (Россия, Санкт–Петербург; СПИИРАН),
А. Ю. Переварюха (Россия, Санкт–Петербург; СПИИРАН)

Нами рассматриваются модели для сценария перехода к взрывообразной динамике численности у популяций в форме краткого пика численности, сменяющегося длительной депресией популяции вселенца. Подобные экологические явления специфичны и сопровождают процессы распространения опасных чужероных видов с выским репродуктивным потенциалом. События относятся к переходным ситуациям в существовании экосистем, потому не описываются аттракторами — устойчивыми режимами траектории. Предложим для описания вариантов поведения после вспышки вселенца новых дифференциальных уравнения с запаздыванием (3) и (4).

В [1] мы провели моделирование процесса разрушения среды (сценарий Острова Пасхи) видом в уравнении с предкритическим порогом H, резко меняющим эффективность воспроизводства. Бифуркация запускает вариант стремительного, катастрофического кризиса после разрушения переходного колебательного режима:

$$\frac{dN}{dt} = r_1 N \left(1 - \frac{N(t-\tau)}{\mathfrak{K}}\right)(H - N(t-\tau)). \tag{1}$$

В (1) невынужденной деструкции популяции при переполнении среды величина $\mathfrak{K}$ не тождественна по смыслу K — балансовому равновесию, «емкости экологической ниши» $\forall N(0) > 0$, $\lim_{t\to\infty} N(t) = K$. В Данном случае экологического равновесия у «вид/среда» нет.

Однако, в критическую ситуацию способен попасть инвазионный вид. В модели Хатчинсона можно получить сценарий: $\exists\, t_M$, $N(0) < K$, $\tau > \bar{\tau}$: $N(r\tau, t_M) > K$, $\lim_{t\to\infty} N(r\tau, t) = K$, но подобный режим модели оказывается несущественным временным переполнением экологической ниши, но не будет выглядеть угрожающей экосистеме вспышкой, относящейся к интересующей нас экстремальной динамике численности.

Один из методов моделирования подобных нестационарных и переходных режимов — формализация запаздывающей регуляции для вычислительного анализа уравнений с отклоняющимся аргументом. Направление моделирования стало развиваться экстенсивно с увеличением параметров запаздывания $N(t-\tau_1), \ldots, N(t-\tau_2), \ldots, N(t-\tau_3)$, часто избыточным.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-07-00125.

Рассмотрим варианты модификации модели с запаздыванием на основе функции Гомпертца из следующего уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{dN}{dt} = r\ln\left(\frac{K}{N}\right)N,\\ N(t) = K\exp\left(\ln\left(\frac{N(0)}{K}\right)e^{-rt}\right), \quad \lim_{t\to\infty} N(t) = K.\end{gathered} \tag{2}$$

Качественное отличие графика функции Гомпертца от модели Ферхюльста — положение точки $\widetilde{N}$ перегиба $F''(\tilde{N}) = 0$ на кривой решения. Включим в модель запаздывающую регуляцию и изятие κ:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t-\tau)}\right) - \kappa N(t). \tag{3}$$

Опишем прохождение минимума численности после резкого пика.

Предложим модификацию известной модели Базыкина (4). Модель применима к ситуации пороговой численности $L > 1$ в явном виде — группы особей, обязательной для недопущения вымирания вида при $N(t_k) < L : \lim_{t\to\infty} N(t) = 0$.

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\ln\left(\left(\frac{K}{N(t-\tau_2)}\right)^k\right)\sqrt[3]{(N(t-\tau_1) - L)} - \kappa N(t). \tag{4}$$

Для $N(t) \to L$ группы особей нам представляется интересным из соображений о причинах возникновения экологического эффекта Олли (когда желательно укрупнять группы особей для лучшей выживаемости потомства), именно вариант гибко настраиваемой модели, наш выбор $v(N) = \ln(K/N)$ в (4) и степени $m = 1/3$ более логичен, чем для квадратичной регуляции $f(N) = rN(1 - N/K)$.

Литература

1. *Переварюха А. Ю.* Сценарий невынужденной деструкции популяции в модификации уравнения Хатчинсона // Владикавк. мат. журн.—2017.—Т. 19, вып. 4.—С. 58–69.

UNBOUNDED CONVERGENCE AND THE RELATED OPERATORS

O. Zabeti

(Iran, Zahedan; USB)

In this talk, we survey Unbounded convergence and the corresponding possible operators in both special and general directions. We obtain some relations between them and in addition, we consider many examples to confirm that some assumptions and situations, are reasonable in each case.

Let E be a Banach lattice. For a net (x_α) in E, if there is a net (u_γ), possibly over a different index set, with $u_\gamma \downarrow 0$ and for every γ there exists α_0 such that $|x_\alpha - x| \leqslant u_\gamma$ whenever $\alpha \geqslant \alpha_0$, we say that (x_α) converges to x in order, in notation, $x_\alpha \xrightarrow{o} x$. A net (x_α) in E is said to be unbounded order convergent (uo-convergent, in brief) to $x \in E$ if for each $u \in E_+$, the net $(|x_\alpha - x| \wedge u)$ converges to zero in order. It is called unbounded norm convergent (un-convergent, for short) if $\||x_\alpha - x| \wedge u\| \to 0$. For a version of an unbounded convergent net in term of weak convergence, a net (x_α) in a Banach lattice E is said to be unbounded absolutely weakly convergent to $x \in E$ if for each positive $u \in E$, one has $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{w} 0$.

Now, we give some definitions for some classes of operators regarding these kind of convergences. Suppose E is a Banach lattice and X is a Banach space. We say that an operator $T\colon E \to X$ is uaw-Dunford–Pettis if for every norm bounded sequence (x_n) in E, $x_n \xrightarrow{uaw} 0$ implies $\|T(x_n)\| \to 0$.

An operator $T\colon X \to E$ is said to be (sequentially) uaw-compact if $T(B_X)$ is relatively (sequentially) uaw-compact where B_X denotes the closed unit ball of the Banach space X. Equivalently, for every bounded net (x_α) (respectively, every bounded sequence (x_n)) its image has a subnet (respectively, subsequence), which is uaw-convergent. We further say that the operator T is un-compact if $T(B_X)$ is relatively un-compact in E. In [1], some properties of un-compact operators are studied. Denote by $B_{UDP}(E)$, $B_{DP}(E)$, $K_{uaw}(E)$, $K_{un}(E)$ the spaces of all uaw-Dunford–Pettis, Dunfor–Pettis, uaw-compact and un-compact operators on a Banach lattice E, respectively.

In this talk, we consider some relations between these operators and characterize some spaces on which some inclusion or equality relations for these classes of operators can happen.

References

1. *Erkursun-Ozcan N., Gezer N. A., Zabeti O.* Unbounded absolute weak Dunford–Pettis and unbounded absolute weak compact operators. Preprint. arXiv:1708.03970v3.

О ДИНАМИКЕ МНОГОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПОММЬЕ

П. А. Иванов

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В докладе идет речь о циклических векторах оператора Поммье в пространствах аналитических функций многих комплексных переменных. Пусть для $N \in \mathbb{N}$ символ P_N обозначает множество $\{1, 2, \ldots, N\}$. Для $t = (t_j)_{j=1}^N$, $z = (z_j)_{j=1}^N \in \mathbb{C}^N$, $j \in P_N$ через $t_{j,z}$ обозначим точку в $\mathbb{C}^N$, полученную из t заменой j-ой координаты на z_j, т. е.

$$(t_{j,z})_k := \begin{cases} z_j, & k = j, \\ t_j, & k \neq j. \end{cases}$$

Положим $\partial_j := \frac{\partial}{\partial z_j}$, $j \in P_N$. Далее, Ω — полицилиндрическая область в $\mathbb{C}^N$: $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — области в $\mathbb{C}$.

Определение 1. Пусть функция f аналитична в Ω в $\mathbb{C}^N$. Для $j \in P_N$, $z, t \in \Omega$ положим

$$D_{j,z}(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t)-f(t_{j,z})}{t_j - z_j}, & t_j \neq z_j, \\ \partial_j f(t_{j,z}), & t_j = z_j. \end{cases}$$

Пусть $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^N, \beta = (\beta_j)_{j=1}^N \in \mathbb{N}_0^N$ будем писать $\alpha \leqslant \beta$, если $\alpha_j \leqslant \beta_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Как обычно, полагаем $z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_N^{\alpha_N}$ (считаем, что $c^0 = 1$ для любого $c \in \mathbb{C}$), $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$, $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_N!$, $z \in \mathbb{C}^N$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Операторы $D_{j,z}$ попарно перестановочны и естественно для $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $z \in \Omega$ ввести операторы D_z^α, действующие в $A(\Omega)$, следующим образом:

$$D_z^\alpha := D_{1,z}^{\alpha_1} D_{2,z}^{\alpha_2} \cdots D_{N,z}^{\alpha_N}.$$

Пусть $f_\beta(t) := t^\beta$, $t \in \mathbb{C}^N$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$. Отметим, что $D_0^\alpha(f_\beta) = f_{\beta-\alpha}$, если $\alpha \leqslant \beta$, и $D_0^\alpha(f_\beta) = 0$ в противном случае.

С операторами D_0^α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, как и в случае $N = 1$, можно связать их сдвиги T_z, $z \in \mathbb{C}^N$. Они определяются таким образом, чтобы для многочленов f выполнялось равенство

$$T_z(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} z^\alpha D_0^\alpha(f),$$

если Ω содержит 0.

Определение 2. Для $z \in \Omega$, $j \in P_N$, $f \in A(\Omega)$ положим

$$T_{j,z}(f)(t) := \begin{cases} \frac{t_j f(t) - z_j f(t_{j,z})}{t_j - z_j}, & t_j \neq z_j, \\ z_j \partial_j f(t_{j,z}) + f(t_{j,z}), & t_j = z_j, \end{cases}$$

и $T_z := T_{1,z} T_{2,z} \cdots T_{N,z}$.

Если $0 \in \Omega$, то символом $\mathrm{Cycl}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ обозначим множество всех циклических векторов системы $\mathcal{D}_0$, т. е. функций $f \in A(\Omega)$ таких, что система $\{D_0^\alpha(f) : \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полна в $A(\Omega)$.

Лемма 1. *Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащая 0. Для $f \in A(\Omega)$ следующие утверждения равносильны:*

(i) *$f \in \mathrm{Cycl}\,_\Omega(\mathcal{D}_0)$;*

(ii) *система $\{T_z(f) : z \in \Omega\}$ полна в $A(\Omega)$.*

Теорема 1. *Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие 0. Следующие условия равносильны:*

(i) *$f \in \mathrm{Cycl}\,_\Omega(\mathcal{D}_0)$;*

(ii) *$f \in A(\Omega)$ и f отлична от рациональной функции.*

Следствие 1. *Для целой в $\mathbb{C}^N$ функции f следующие утверждения равносильны:*

(i) *$f \in \mathrm{Cycl}\,_{\mathbb{C}^N}(\mathcal{D}_0)$;*

(ii) *f отлична от многочлена.*

Ранее приведенные результаты были получены в одномерном случае (см. [1]).

Литература

1. *Линчук Н. Е.* Представление коммутантов оператора Поммье и их приложения // Мат. заметки—1988.—Т. 44, № 6.—С. 794–802.

О РЕАЛИЗАЦИИ АЛГЕБР АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ВИДЕ КОММУТАНТОВ

О. А. Иванова

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть E — весовое пространство целых в $\mathbb{C}^N$ функций: $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, где

$$E_n := \left\{ f \in H(\mathbb{C}^N) \;\middle|\; \sup_{z\in\mathbb{C}^N} \frac{|f(z)|}{\exp(v_{n,k}(z))} < +\infty \;\forall\, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

При этом $v_{n,k} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции такие, что $v_{n,k+1} \leqslant v_{n,k} \leqslant v_{n+1,k}$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$. Пространство Фреше E_n непрерывно вложено в E_{n+1}, $n \in \mathbb{N}$; в E вводится топология индуктивного предела последовательности E_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно вложений E_n в E. Веса $v_{n,k}$ удовлетворяют стандартным условиям, обеспечивающим инвариантность E относительно дифференцирования, сдвигов и умножения на многочлены. Многие пространства или их сопряженные, встречающиеся в комплексном анализе, в анализе Фурье, реализуются в виде пространства E подобного вида.

Далее, E' — топологическое сопряженное к E, $\mathcal{L}(E)$ — пространство линейных непрерывных операторов в E. Для системы $\mathcal{A}$ операторов $A \in \mathcal{L}(E)$ определяется система $\mathcal{T}$ операторов сдвига T_z, $z \in \mathbb{C}^N$, для $\mathcal{A}$. В докладе идет речь о следующей конструкции, возможной для некоторых троек $(E, \mathcal{A}, \mathcal{T})$. В E' вводится операция умножения $(\varphi\otimes\psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f)))$, $\varphi, \psi \in E'$, $f \in E$. С ней E' становится ассоциативной и коммутативной алгеброй, изоморфной коммутанту системы $\mathcal{A}$ в кольце $\mathcal{L}(E)$. Приведем два примера этого.

Пусть $\mathcal{A}$ — система $\{\partial_j : 1 \leqslant j \leqslant N\}$ операторов частного дифференцирования, а $T_z(f)(t) := f(t+z)$, $t, z \in \mathbb{C}^N$, — обычные сдвиги. В этом случае

$$(\varphi \otimes \psi)(f) = \varphi_z(\psi_t(f(t+z))), \quad \varphi, \psi \in E',\; f \in E,$$

и $\varphi \otimes \psi$ — обычная свертка. Такое умножение $\otimes$ в E' можно ввести для пространств E, задаваемых весами $v_{n,k}$, удовлетворяющими дополнительному условию слабой полуаддитивности:

$$\forall\, n\; \exists\, m\; \forall\, s\; \exists\, k\; \exists\, C > 0 :\; v_{n,k}(t+z) \leqslant v_{m,s}(t) + v_{m,s}(z) + C, \quad t, z \in \mathbb{C}^N.$$

В этом случае справедлива

Теорема 1 [1]. *Пусть функции $(v_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ удовлетворяют условию слабой полуаддитивности. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(i) *$(E', \otimes)$ — унитальная ассоциативная и коммутативная алгебра.*

(ii) *Отображение $\varphi \mapsto B_\varphi$, $B_\varphi(f)(z) := \varphi_t(f(t+z))$, $z \in \mathbb{C}^N$, $f \in E$, $\varphi \in E'$, является изоморфизмом $(E', \otimes)$ на коммутант системы $\{\partial_j : 1 \leqslant j \leqslant N\}$ в кольце $\mathcal{L}(E)$.*

Пусть теперь $N = 1$ и $\mathcal{A}$ — система, состоящая из одного оператора Поммье D_{0,g_0}, определяемого так. Зафиксируем функцию $g_0 \in E$ такую, что $g_0(0) = 1$ (предполагая, что она существует), и положим

$$D_{0,g_0}(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t)-g_0(t)f(0)}{t}, & t \neq 0, \\ f'(0) - g_0'(0)f(0), & t = 0. \end{cases}$$

Как и выше, предполагаем, что $v_{n,k}$ удовлетворяют стандартным техническим условиям. Операторы сдвига T_z, $z \in \mathbb{C}$, для D_{0,g_0} задаются по правилу:

$$T_z(f)(t) := \begin{cases} \frac{tf(t)g_0(z)-zf(z)g_0(t)}{t-z}, & t \neq z, \\ zg_0(z)f'(z) - zf(z)g_0'(z) + f(z)g_0(z), & t = z. \end{cases}$$

Положим для $(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f)))$, $\varphi, \psi \in E'$, $f \in E$. Имеет место

Теорема 2 [2]**.** (i) $(E', \otimes)$ — *унитальная ассоциативная и коммутативная алгебра.*

(ii) *Отображение* $\kappa : \varphi \mapsto B_\varphi$, $B_\varphi(f)(z) := \varphi(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}$, $f \in E$, $\varphi \in E'$, *является изоморфизмом* $(E', \otimes)$ *на коммутант* D_{0,g_0} *в кольце* $\mathcal{L}(E)$.

Литература

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н., Мелихов Ю. Н.* О коммутанте операторов дифференцирования и сдвига в весовых пространствах целых функций // Уфим. мат. журн.—2017.—Т. 9, № 3.—С. 38–49.
2. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2016.—Т. 28, № 2.—С. 114–137.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ[1]

Л. Л. Карашева

(Россия, Нальчик; ИПМА)

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u(x,t) + (-1)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ — дробная производная порядка α, $0 < \alpha \leqslant 2$ [1, с. 9].

Уравнение (1) при $n = 1$ совпадает с диффузионно-волновым уравнением, которое широко исследовано (см. [2] и библиографию там). В частности, в работе [3] исследована краевая задача в полубесконечной области для уравнения (1) при $n = 1$. В работе [4] для уравнения (1) построено фундаментальное решение и решена задача Коши.

В данной работе для уравнения (1) решены задачи в неограниченных областях, доказаны теоремы единственности в классе функций быстрого роста.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка.—М.: Наука, 2005.—199 с.
3. *Геккиева С. Х.* Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной в полубесконечной области // Изв. Кабардино-Балкарского научн. центра РАН.—2002.—№ 1 (8).—С. 6–8.
4. *Карашева Л. Л.* Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временной переменной // Сиб. электрон. мат. изв.—2018.—Т. 15.—С. 696–706.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462.

Математический анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIV Владикавк. молодежн. мат. шк. (РСО-А, с. Н. Цей, 16–21 июля 2018 г.)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЙНШТЕЙНОВО-ПОДОБНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ[1]

П. Н. Клепиков (Россия, Барнаул; АлтГУ),
Е. Д. Родионов (Россия, Барнаул; АлтГУ)

Многообразия Эйнштейна являются важным классом (псевдо)римановых многообразий, которые широко используются в геометрии и физике. Известно, что каждое многообразие Эйнштейна имеет параллельный тензор Риччи (т. е. $\nabla_X r = 0$). В последнее время активно изучаются различные обобщения многообразий Эйнштейна, одними из которых являются эйнштейново-подобные (псевдо)римановы многообразия в смысле А. Грея [1].

Определение 1. (Псевдо)риманово многообразие имеет циклично параллельный тензор Риччи (принадлежит *к классу* $\mathcal{A}$), если

$$(\nabla_X r)(Y,Z) + (\nabla_Y r)(Z,X) + (\nabla_Z r)(X,Y) = 0$$

для любых векторных полей X, Y и Z. Данное условие эквивалентно тому, что тензор Риччи является тензором Киллинга

$$(\nabla_X r)(X,X) = 0$$

для любого векторного поля X.

Определение 2. (Псевдо)риманово многообразие имеет тензор Риччи, который является тензором Кодацци (принадлежит *к классу* $\mathcal{B}$), если

$$(\nabla_X r)(Y,Z) = (\nabla_Y r)(X,Z)$$

для любых векторных полей X, Y и Z.

Многообразия, принадлежащие классам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, называются эйнштейново-подобными (псевдо)римановыми многообразиями по А. Грею [1].

В данной работе, с использованием систем компьютерной математики, изучаются локально однородные (псевдо)римановы многообразия с инвариантной эйнштейново-подобной метрикой, что продолжает предыдущие исследования авторов [2, 3].

Литература

1. *Gray A.* Einstein-like manifolds which are not Einstein // Geom. Dedicata.—1978.—Vol. 7.—P. 259–280.
2. *Клепиков П. Н.* Левоинвариантные псевдормановы метрики на четырехмерных группах Ли с нулевым тензором Схоутена — Вейля // Изв. высш. учеб. заведений. Математика.—2017.—№ 8.—С. 92–97.
3. *Khromova O. P., Klepikov P. N., Rodionov E. D.* Left-invariant pseudo-Riemannian metrics on four-dimensional Lie groups with zero Schouten-Weyl tensor // arXiv.org.—2017.—arXiv:1611.00916.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00033 мол_а.

ПРИМЕНЕНИЕ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ 4-МЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ[1]

С. В. Клепикова (Россия, Барнаул; АлтГУ),
О. П. Хромова (Россия, Барнаул; АлтГУ)

Исследование различных свойств инвариантных тензорных полей помогает пониманию топлогического и геометрического строений однородных (псевдо)римановых пространств. Часто приходится накладывать ограничения на класс рассматриваемых многообразий и/или их размерность, поскольку решение данной задачи в общем случае является довольно сложным. При достаточно малой размерности становится возможным применить системы символьных вычислений.

Данная работа является продолжением изучения авторами применения универсальных математических пакетов в исследовании однородных (псевдо)римановых пространств [1–4]. При этом разработаны математические и компьютерные модели для вычисления компонент различных тензоров кривизны (например, тензоров Римана, Риччи, Вейля, Схоутена — Вейля и пр.) однородных (псевдо)римановых пространств, причем произведена реализация в среде пакета Maple. С помощью данного алгоритма можно как получить классификацию многообразий, удовлетворяющих некоторым ограничениям на тензор кривизны (например, с изотропными тензорами Римана, Риччи или Вейля), так и определить собственные значения различных операторов кривизны: кривизны Риччи, одномерной или секционной кривизны.

Литература

1. *Гладунова О. П.* Применение математических пакетов к вычислению инвариантных тензорных полей на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Вестн. БГПУ. Естесв. и точные науки.—2006.—№ 6.—С. 111–115.
2. *Гладунова О. П., Оскорбин Д. Н.* Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Изв. АГУ.—2013.—№ 1 (1).—С. 19–23.
3. *Клепикова С. В., Родионов Е. Д., Хромова О. П.* Об операторах кривизны метрических групп Ли // Изв. АГУ.—2016.—№ 1 (89).—С. 129–137.
4. *Хромова О. П.* Применение пакетов символьных вычислений к исследованию оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях // Изв. АГУ.—2017.—№ 1 (93).—С. 140–143.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00033 мол_а.

Математический анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIV Владикавк. молодежн. мат. шк. (РСО-А, с. Н. Цей, 16–21 июля 2018 г.)

ИССЛЕДОВАНИЕ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ КОНКУРИРУЮЩИХ ВИДОВ НА НЕОДНОРОДНОМ АРЕАЛЕ

М. Г. Кругликов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
В. Г. Цибулин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В математической экологии активно изучаются модели, описывающие выживание конкурирующих популяций, инвазии новых видов на заселенные территории. Анализ систем с однородной диффузией показал, что среди двух популяций выживает более медленная, т. е. популяция с меньшей дисперсией (отношение коэффициента диффузии к параметру роста). Исследование моделей конкурирующих популяций на неоднородных ареалах, как правило, требует проведения прямых расчетов многопараметрических задач. Применение теории косимметрии [1] для анализа сценариев сосуществования родственных видов на одномерных и двумерных ареалах [2, 3] показало свою эффективность. При исследовании влияния неоднородных по ареалу параметров роста на сценарии выживания конкурирующих видов в вычислительном эксперименте были найдены условия на параметры, при которых реализуются сценарии сосуществования видов.

В данной работе с применением аппарата селективной функции исследуются условия сосуществования двух близкородственных популяций с учетом неоднородности ареала и параметров роста.

$$\dot{u} = \left[k_1 u' - u\varphi_1'\right]' + \eta_1 u f_0, \quad f_0 = 1 - \frac{u+v}{P}, \tag{1}$$

$$\dot{v} = \left[k_2 v' - v\varphi_2'\right]' + \eta_2 v f_0. \tag{2}$$

Здесь $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ — плотности популяций. Коэффициенты диффузии k_i $(i = 1, 2)$, роста η_i являются положительными функциями пространственной переменной x. Функция f_0 описывает уменьшение прироста популяций при приближении плотностей к предельным значениям ресурс $P = P(x)$. Считается, что параметры направленной миграции φ_i зависят от плотностей популяций и ресурса. Задача рассматривается на кольцевом интервале $x \in [0, a]$ при условиях согласования плотности и потоков при $x = 0, a$.

Развивается полуобратный метод для анализа стратегий, позволяющих за счет управления функциями роста обеспечить выживание обеим популяциям. Вначале находятся условия на параметры, при которых у системы имеется косимметрия. Далее явным образом задается отвечающее этому случаю семейство стационарных решений (мультистабильность) и для различных функций роста, разрушающих косимметрию, анализируются нули селективной функции. Прямой расчет применялся для определения стационарных распределений при найденных значениях параметров.

Литература

1. *Юдович В. И.* О бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию // Докл. РАН.—1991.—Т. 398, № 1.—С. 57–61.
2. *Будянский А. В., Кругликов М. Г., Цибулин В. Г.* Численное исследование сосуществования популяций в одной экологической нише // Вестн. ДГТУ.—2014.—Т. 14, № 2.—С. 28–35.
3. *Кругликов М. Г., Цибулин В. Г.* Анализ модели сосуществования популяций, конкурирующих на пространственно-неоднородном ареале // Эколог. вестн. науч. центров Черноморского эконом. сотрудничества.—2015.—№ 2.—С. 56–64.

WHEN ARE ALL ALGEBRAIC BAND PRESERVING OPERATORS ORDER BOUNDED?[1]

Z. A. Kusraeva
(Russia, Rostov-on-Don, SFEDU; Vladikavkaz, SMI VSC RAS)

Here we give a description of algebraic orthomorphisms on a vector lattice.

Let $\mathbb{P}[x]$ be a ring of polynomials in variable x over a field $\mathbb{P}$. An operator T on a vector space X over a field $\mathbb{P}$ is said to be *algebraic* if there exists a nonzero $\varphi \in \mathbb{P}[x]$, a polynomial with coefficients in $\mathbb{P}$, for which $\varphi(T) = 0$. A linear operator T on a vector lattice X is said to be *diagonal* if $T = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_m P_m$ for some collections of reals $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ and projection operators $P_1, \ldots, P_m$ on X with $P_i \circ P_j = 0$ $(i \neq j)$. In the equality above, we may and will assume that $P_1 + \ldots + P_n = I_X$ and that $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ are pairwise different. An algebraic operator T is diagonal if and only if the minimal polynomial of T have the form $\varphi_T(x) = (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_m)$ with pairwise different $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

We call an operator T on X a *strongly diagonal* operator if there exist pairwise disjoint band projections $P_1, \ldots, P_m$ and real numbers $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ such that $T = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_m P_m$. In particular, every strongly diagonal operator on X is an orthomorphism. It is easily seen that the set of all strongly diagonal operators on X is an f-subalgebra of $\mathrm{Orth}(X)$.

Theorem. *Let X be a universally complete vector lattice. The following assertions are equivalent:*

(1) *The Boolean algebra $\mathbb{P}(X)$ is σ-distributive.*

(2) *Every algebraic band preserving operator in X is order bounded.*

(3) *Every algebraic band preserving operator in X is strongly diagonal.*

(4) *Every band preserving diagonal operator in X is strongly diagonal.*

(4) *Every projection operator in X is a band projection.*

References

1. *Kusraeva Z. A.* Algebraic band preserving operators // Vladikavkaz Math. J.—2013.—Vol. 15, № 3.—P. 54–57.

[1]The study was supported by Russian Foundation for Basic Research, project № 18-31-00205.

Математический анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIV Владикавк. молодежн. мат. шк. (РСО-А, с. Н. Цей, 16–21 июля 2018 г.)

СИСТЕМА ФУНКЦИЙ, ОРТОГОНАЛЬНАЯ В СМЫСЛЕ СОБОЛЕВА И ПОРОЖДЕННАЯ СИСТЕМОЙ УОЛША

М. Г. Магомед-Касумов

(Россия, Владикавказ, ЮМИ; Махачкала, ДНЦ РАН)

Определим систему функций $\mathfrak{W}_r$, $r \geqslant 1$, порожденную системой функций Уолша $\mathfrak{W} = \{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0,1]$:

$$w_{r,k}(x) = \frac{x^k}{k!}, \quad 0 \leqslant k \leqslant r-1, \tag{1}$$

$$w_{r,k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} w_{k-r}(t)\,dt, \quad k \geqslant r. \tag{2}$$

Пусть L^p — пространство функций, суммируемых на отрезке $[0,1]$. Через $W^r_{L^p}$, $r \geqslant 1$, обозначим пространство Соболева, состоящее из непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз функций $f = f(x)$, заданных на отрезке $[0,1]$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in L^p$. Заметим, что $\mathfrak{W}_r \subset W^r_{L^1}$ при любом r. В пространстве $W^r_{L^2}$ определим скалярное произведение соболевского типа

$$\langle f, g\rangle = \sum_{s=0}^{r-1} f^{(s)}(0) g^{(s)}(0) + \int\limits_0^1 f^{(r)}(t) g^{(r)}(t)\,dt, \tag{3}$$

которое превращает $W^r_{L^2}$ в гильбертово пространство. Нетрудно показать, что ряд Фурье функции $f \in W^r_{L^2}$ по системе $\mathfrak{W}_r$ имеет следующий вид:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} c_{r,k}(f) w_{r,k}(x),$$

где $c_{r,k} = \int_0^1 f^{(r)}(t) w_{k-r}(t)\,dt$.

Общая теория систем функций, ортогональных относительно соболевского скалярного произведения вида (3) и порожденных классическими ортогональными системами, разработана в работах Шарапудинова И. И. (см., например, [1]). В статьях [1–4] рассмотрены конкретные соболевские системы Φ_r, $r \geqslant 1$, порожденные различными классическими ортогональными системами: системой Хаара, системой полиномов Чебышева, Лежандра, Якоби, Лагерра. Для функций из систем Φ_r получены явные представления, исследованы их асимптотические свойства и изучены аппроксимативные свойства частичных сумм рядов Фурье по указанным системам. Аналогичные результаты получены и для систем, порожденных классическими дискретными ортогональными системами, такими как система полиномов Чебышева дискретной переменной [5], система полиномов Мейкснера [6, 7]. Нерассмотренной оставалась ортогональная по Соболеву система функций $\mathfrak{W}_r$, порожденная системой Уолша. Данная работа призвана частично восполнить этот пробел.

Основная цель работы заключается в исследовании вопроса о равномерной сходимости рядов Фурье по системе $\mathfrak{W}_r$ для функций $f \in W^r_{L^p}$, $p \geqslant 1$. Прежде всего, отметим, что применяя теорему 2.1, доказанную в общем случае в [1], к системе $\mathfrak{W}_r$, можно получить утверждение:

Утверждение 1. *Система функций $\mathfrak{W}_r$ полна в $W^r_{L^2}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения* (3).

В той же работе исследованы вопросы равномерной сходимости рядов Фурье по системам, ортогональным относительно скалярных произведений вида (3), для функций из пространств Соболева. Из теоремы 2.2 работы [1] вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2. *Ряд Фурье по системе $\mathfrak{W}_r$ функции $f \in W^r_{L^2}$ равномерно на $[0,1]$ сходится к f.*

Используя базисность системы Уолша в пространствах L^p, $p > 1$, данное утверждение можно усилить, распространив его на более широкий класс функций — $W^r_{L^p}$, $p > 1$.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in W^r_{L^p}$, $p > 1$, ряд Фурье этой функции по системе $\mathfrak{W}_r$ равномерно на $[0,1]$ сходится к f.*

Отметим, что ряд Фурье по системе $\mathfrak{W}_r$ можно определить для любой функции $f \in W^r_{L^1}$. В связи с этим возникает естественный вопрос о том, справедливо ли утверждение доказанной теоремы для случая $p = 1$. Ответ на этот вопрос является основным результатом настоящей работы.

Теорема 2. *Для любой функции $f \in W^r_{L^1}$, $r \geqslant 1$, ряд Фурье этой функции по системе $\mathfrak{W}_r$ равномерно на $[0,1]$ сходится к f.*

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. мат.—2018.—Т. 82, № 1.—С. 225–258.
2. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства рядов Фурье по многочленам, ортогональным по Соболеву с весом Якоби и дискретными массами // Мат. заметки.—2017.—Т. 101, № 4.—С. 611–629.
3. *Шарапудинов И. И.* Специальные ряды по полиномам Лагерра и их аппроксимативные свойства // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 2.—С. 440–467.
4. *Шарапудинов И. И., Магомед-Касумов М. Г., Магомедов С. Р.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышева первого рода // Дагестан. электрон. мат. изв.—2015.—№ 4.—С. 1–14.
5. *Шарапудинов И. И., Шарапудинов Т. И.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Чебышева, ортогональными на сетке // Изв. вузов. Математика.—2017.—№ 8.—С. 67–79.
6. *Шарапудинов И. И., Гаджиева З. Д.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2016.—Т. 16, № 3.—С. 310–321.
7. *Гаджимирзаев Р. М.* Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2016.—Т. 16, № 4.—С. 388–395.

Математический анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIV Владикавк. молодежн. мат. шк. (РСО-А, с. Н. Цей, 16–21 июля 2018 г.)

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ[1]

М. Г. Мажгихова

(Россия, Нальчик; ИПМА)

Рассматривается уравнение

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

где $1 < \alpha \leqslant 2$, λ, μ — произвольные постоянные, τ — положительное число, D_{0t}^{α} — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана — Лиувилля [1]

$$D_{st}^{\nu}g(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sign}(t-s)}{\Gamma(-\nu)} \int\limits_{s}^{t} \frac{g(\xi)\,d\xi}{|t-\xi|^{\nu+1}}, & \nu < 0; \\ g(t), & \nu = 0; \\ \operatorname{sign}^{n}(t-s)\frac{d^n}{dt^n} D_{st}^{\nu-n}g(t), & n-1 < \nu \leqslant n,\ n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$H(t)$ — функция Хевисайда.

В работе получено решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} a\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(t) + b\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = 0, \\ c\lim_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-1}u(t) + d\lim_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

причем $a^2 + b^2 \neq 0$ и $c^2 + d^2 \neq 0$.

Решение задачи (1)–(2) имеет вид

$$u(t) = \int\limits_0^1 f(\xi)G(t,\xi)\,d\xi,$$

где

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_{\alpha}(t-\xi) + (cW_1(1-\xi) + dW_2(1-\xi))\frac{bW_{\alpha}(t) - aW_{\alpha-1}(t)}{\triangle},$$

$$\triangle = ac(\lambda W_{\alpha}(1) + \mu W_{\alpha}(1-\tau)) + (ad-bc)W_1(1) - bdW_2(1) \neq 0,$$

$$W_{\nu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m (t-m\tau)_{+}^{\alpha m+\nu-1} E_{\alpha,\alpha m+\nu}^{m+1}(\lambda(t-m\tau)_{+}^{\alpha}), \quad \nu \in \mathbb{R},$$

[1]Работа проведена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462-а.

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!}$$

— обобщенная функция Миттаг–Леффлера [2], $(\rho)_k = \frac{\Gamma(\rho+k)}{\Gamma(\rho)}$ — символ Похгаммера.

Доказана следующая

Теорема. *Задача* (1), (2) *имеет лишь конечное число вещественных собственных значений.*

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Prabhakar T. R.* A singular integral equation with a generalized Mittag–Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J.—1971.—Vol. 19.—P. 7–15.

ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОДУ С ПОМОЩЬЮ ОРТОГОНАЛЬНЫХ В СМЫСЛЕ СОБОЛЕВА СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

М. С. Султанахмедов

(Россия, Махачкала; ДНЦ РАН)

Обозначим через $\varphi_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ функции, образующие полную ортонормированную систему в пространстве $L^2_\rho[a, b]$, где $\rho = \rho(x)$ — весовая функция. Шарапудиновым И. И. было показано (см., например, [1, 2]), что на основе системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ может быть построена система $\{\varphi_{1,n}(x)\}_{n=0}^\infty$, состоящая из функций, ортогональных в смысле скалярного произведения типа Соболева следующего вида:

$$\langle f, g\rangle = f(a)g(a) + \int\limits_{-1}^{1} f'(x)g'(x)\rho(x)\,dx, \tag{1}$$

причем эта система будет полной, а ряд Фурье по ней будет сходиться равномерно на всем отрезке $[a, b]$ при некоторых условиях на вес $\rho(x)$.

Ряды и суммы Фурье по системе $\varphi_{1,n}(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ являются удобным и весьма эффективным инструментом приближенного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В частности, в [3] для задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения вида

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(0) = y^0, \tag{2}$$

сконструирован итерационный процесс и найдены условия на правую часть и саму систему $\{\varphi_{1,n}(x)\}_{n=0}^\infty$, при которых этот процесс сходится.

В работе [4] в качестве системы $\{\varphi_{1,n}(x)\}_{n=0}^\infty$ рассмотрена система полиномов, ортогональных в смысле Соболева и порожденных системой полиномов Чебышева первого рода. Авторами был найден конкретный вид итерационного процесса для этого случая и разработан алгоритм для приближенного решения задачи (2).

При этом в качестве промежуточной возникает задача многократного вычисления выражений вида

$$S_N(x) = S_N(p, x) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k T_{1,k+1}(x), \tag{3}$$

где $p = \{p_k\}_{k=0}^{N-1}$ — произвольные действительные числа.

В настоящей работе для решения этой задачи на сетке осуществлен ряд преобразований выражения $S_N(x)$, которые в итоге позволяют свести рассматриваемую задачу к применению быстрого дискретного преобразования Фурье. Разработаны соответствующий алгоритм и реализующая его компьютерная программа. Проведены численные эксперименты, которые показывают, что алгоритм, основанный на быстром преобразовании, значительно выигрывает в смысле скорости вычислений по сравнению с методом непосредственного вычисления суммы $S_N(x)$, пользуясь явным видом полиномов $T_{1,n}(x)$.

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. мат.—2018.—Т. 82, № 1.—С. 225–258.
2. *Шарапудинов И. И., Магомед-Касумов М. Г., Магомедов С. Р.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышева первого рода // Дагестан. электрон. мат. изв.—2015.—№ 4.—С. 1–14.
3. *Шарапудинов И. И.* О приближении решения задачи Коши для нелинейных систем ОДУ посредством рядов Фурье по функциям, ортогональным по Соболеву // Дагестан. электрон. мат. изв.—2017.—№ 7.—С. 66–76.
4. *Султанахмедов М. С., Шарапудинов Т. И.* Приближенное решение задачи Коши для систем ОДУ с помощью ортогональной в смысле Соболева системы, порожденной полиномами Чебышева первого рода // Дагестан. электрон. мат. изв.—2017.—№ 8.—С. 100–109.

Математический анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIV Владикавк. молодежн. мат. шк. (РСО-А, с. Н. Цей, 16–21 июля 2018 г.)

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В КВАЗИБАНАХОВЫХ РЕШЕТКАХ

Б. Б. Тасоев

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Всюду ниже E — квазибанахова решетка, $\mathcal{R}$ — δ-кольцо (= кольцо, замкнутое относительно счетных пересечений) подмножеств произвольного непустого множества Ω. Обозначим символом $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}$ совокупность подмножеств $A \subset \Omega$ таких, что $A \cap B \in \mathcal{R}$ для всех $B \in \mathcal{R}$. Тогда семейство $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}$ является σ-алгеброй.

Определение 1. Отображение $\mu : \mathcal{R} \to E_+$ называется *мерой*, если $\mu(\varnothing) = 0$ и для любой последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathcal{R}$ такой, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ сходится по квазинорме к $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$.

Тройку $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$ назовем *пространством с векторной мерой*.

Определение 2. *Интегралом* от $\mathcal{R}$-ступенчатой функции $f := \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ $(A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R})$ называется вектор $\int f\, d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$. Положительную $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}$-измеримую функцию $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называют *интегрируемой*, если существует последовательность $\mathcal{R}$-ступенчатых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что $0 \leqslant f_n(\omega) \uparrow f(\omega)$ для μ-п.в. $\omega \in \Omega$ и в E существует $\lim_n \int f_n\, d\mu \in E_+$. При этом полагают $I_\mu(f) := \int f\, d\mu := \lim_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu$.

Произвольную $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}$-измеримую функцию f называют *интегрируемой* и полагают $I_\mu(f) := I_\mu(f^+) - I_\mu(f^-)$, если интегрируемы f^+ и f^-. Символами $L^0(\Omega, \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}, \mu)$ и $L^1(\Omega, \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}, \mu)$ будем обозначать соответственно пространства классов эквивалентности μ-п.в. конечных $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}$-измеримых и μ-интегрируемых функций на Ω (ср. [2]).

Зафиксируем σ-алгебру Σ подмножеств Ω, содержащую δ-кольцо $\mathcal{R}$, и меру $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$. Векторная мера $\lambda : \mathcal{R} \to E_+$ называется *абсолютно непрерывной относительно* μ и пишут $\lambda \ll \mu$, если из равенства $\mu(A) = 0$ следует $\lambda(A) = 0$ для произвольного $A \in \mathcal{R}$. В этом случае $\Sigma \subset \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}$ и корректно определен оператор $\iota : L^0(\Omega, \Sigma, \mu) \to L^0(\Omega, \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}, \lambda)$, который всякому классу эквивалентности Σ-измеримых функций $\tilde{f} \in L^0(\mu)$, представителем которого является функция f, ставит в соответствие класс эквивалентности $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}$-измеримых функций, содержащий эту же функцию f.

Пусть $X(\mu)$ — идеальное квазибанахово пространство в $L^0(\mu)$.

Определение 3. Линейный оператор $T : X(\mu) \to E$ называется *$o\tau$-непрерывным*, если $T(f_n)$ сходится по квазинорме к элементу $T(f) \in E$ для любой последовательности $(f_n) \subset X(\mu)$ и функции $f \in X(\mu)$ таких, что $0 \leqslant f_n \uparrow f$ μ-п.в.

Зафиксируем положительный $o\tau$-непрерывный оператор $T : X(\mu) \to E$. На δ-кольце $\Sigma_{X(\mu)} := \{A \in \Sigma : \chi_A \in X(\mu)\}$ определим векторную меру $m_T : \Sigma_{X(\mu)} \to E_+$, действующую по формуле $m_T(A) := T(\chi_A)$ для всех $A \in \Sigma_{X(\mu)}$. Ясно, что $\Sigma \subset \Sigma_{X(\mu)}^{\mathrm{loc}}$.

Теорема 1. *Пусть* $X(\mu)$ *— идеальное квазибанахово пространство в* $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$*,* E *— квазибанахова решетка и* $T : X(\mu) \to E$ *— положительный* $o\tau$*-непрерывный оператор. Тогда существует* δ*-кольцо* $\Sigma_{X(\mu)} \subset \Sigma$ *и векторная мера* $m_T : \Sigma_{X(\mu)} \to E_+$ *такие, что* $m_T \ll \mu$ *и* $T = I_{m_T} \circ \iota$*, где* $I_{m_T} : L^1(\Omega, \Sigma^{loc}_{X(\mu)}, m_T) \to E$ *— оператор интегрирования.*

Говорят, что $X(\mu)$ обладает *σ-свойством*, если существует последовательность $(\Omega_n) \subset \Sigma$ такая, что $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$ и $\chi_{\Omega_n} \in X(\mu)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Теорема 2. *При условиях теоремы* 1 *предположим дополнительно, что* $X(\mu)$ *обладает* σ*-свойством. Тогда представление* $T = I_{m_T} \circ \iota$ *оптимально в следующем смысле: если* $Z(\xi)$ *— идеальное квазибанахово пространство и* $S : Z(\xi) \to E$ *— положительный* $o\tau$*-непрерывный оператор такие, что* $\xi \ll \mu$ *и* $T = S \circ \iota$*, то оператор* $\iota : Z(\xi) \to L^1(\Omega, \Sigma^{loc}_{X(\mu)}, m_T)$ *корректно определен и имеет место представление* $S = I_{m_T} \circ \iota$*.*

Замечание. Теоремы 1 и 2 распространяют конструкцию оптимального продолжения положительных операторов со значениями в банаховом пространстве, предложенной в работе [2], на случай, когда E — квазибанахова решетка.

Литература

1. *Kusraev A. G., Tasoev B. B.* Kantorovich–Wright integration and representation of vector lattices // J. Math. Anal. Appl.—2018.—Vol. 462.—P. 712–729.
2. *Calabuig J. M., Delgado O., Sánchez Pérez E. A.* Factorizing operators on Banach function spaces through spaces of multiplication operators // J. Math. Anal. Appl.—2010.—Vol. 364.—P. 88–103.

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА В СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ С ВРАЩАЮЩИМСЯ ВЫХОДОМ ПОТОКА

А. С. Черныш

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Рассматривается стационарное течение жидкости в сферическом слое $D = \{1 \leqslant |\mathbf{x}| \leqslant 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$, описываемое уравнениями Навье — Стокса:

$$(\mathbf{V}, \nabla)\mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{R}\Delta\mathbf{V}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}|_{r=r_1} = \gamma_1, \tag{3}$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}|_{r=r_2} = \gamma_2, \tag{4}$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{V}|_{S_-} = 0, \tag{5}$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{V}|_{S_+} = \mathbf{n} \times \mathbf{V}^+. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{V}$ — векторное поле, характеризующее течение, p — давление, ρ — плотность жидкости, R — радиальное число Рейнольдса, а S_- и S_+ — соответственно вход и выход потока.

Поле $\mathbf{V}^+$ обозначает тангенциальную скорость на границе ∂D области D, а ненулевые скалярные функции γ_1 и γ_2 — нормальную скорость. Предполагается также, что расход жидкости через ∂D постоянен, что влечет следующее соотношение между компонентами нормальной скорости:

$$\int\limits_{r=r_1} \gamma_1 \, ds = \int\limits_{r=r_2} \gamma_2 \, ds.$$

Заметим, что как только заданы функции γ_1 и γ_2, можно определить вход и выход потока. Так, если $\gamma_1 < 0$ и $\gamma_2 > 0$, то $S_- = \{r = r_1\}$ — вход потока, а $S_+ = \{r = r_2\}$ — выход, и наоборот если $\gamma_1 > 0$, и $\gamma_2 < 0$.

Предполагается, что жидкость втекает в область и вытекает из нее с постоянной скоростью. С помощью метода Вишика — Люстерника (см. [5–6]), следуя [1], строится асимптотика решения указанной задачи при $R \to 0$ в виде

$$\mathbf{V} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{R^k}\mathbf{V}_k.$$

Согласно методу Вишика — Люстерника решение ищется в виде суммы внешнего и внутреннего разложений. При этом внешнее разложение описывает решение вблизи выхода потока, вращающейся с постоянной скоростью, а внутреннее — во всей остальной области. Таким образом, $\mathbf{V}_k$ представляется в виде

$$\mathbf{V}_k(r, s, \theta, \varphi) = \mathbf{V}_k^i(r, \theta, \varphi) + \mathbf{V}_k^b(s, \theta, \varphi), \tag{7}$$

где $s = R(r_2 - r)$, когда $S_+ = \{r = r_2\}$, и $s = R(r - r_1)$, если $S_+ = \{r = r_1\}$. Функции с индексом b соответствуют внешнему решению, а i — внутреннему.

Заметим, что в рассматриваемой задаче удается разделить переменные и прийти к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. Так что нормальную компоненту поля $\mathbf{V}_k$ можно представить конечной суммой многочленов Лежандра, а тангенциальную — их производными.

После того как найден основной поток, система Навье — Стокса линеаризуется на нем и способом, указанным в [2–4], строится асимптотика собственных чисел и собственных функций, которые ищутся в виде рядов по отрицательным степеням R:

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k}{R^k}, \quad \mathbf{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R^k}\mathbf{v}_k, \quad p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R^k} p_k. \tag{8}$$

Давление и поле скорости также представляются в виде внутреннего и внешнего разложений:

$$\mathbf{v}_k(r, s, \theta, \varphi) = \mathbf{v}_k^i(r, \theta, \varphi) + \mathbf{v}_k^b(s, \theta, \varphi), \tag{9}$$

$$p_k(r, s, \theta, \varphi) = p_k^i(r, \theta, \varphi) + p_k^b(s, \theta, \varphi). \tag{10}$$

Каждое приближение ищется в виде рядов по векторным сферическим гармоникам (см. [7–8]).

Собственные значения определяются из условия разрешимости задачи для радиальной компоненты внутреннего разложения решения. При этом теорема Пойа (см. [9]) позволяет установить, что все собственные значения расположены строго в левой полуплоскости.

В итоге построен итерационный процесс, который определяет асимптотику собственных значений и собственных функций для произвольного приближения стационарного течения рассматриваемой задачи. При этом оказывается, что предельные при $R \to \infty$ значения собственных чисел не зависят от скорости вращения выхода потока.

Литература

1. *Ilin K.* Viscous boundary layers in flows through a domain with permeable boundary // Eur. J. of Mech. B/Fluids.—2008.—Vol. 27, № 5.—P. 514–538.
2. *Ilin K., Morgulis A.* Inviscid instability of an incompressible flow between rotating porous cylinders to three-dimensional perturbations // Eur. J. of Mech. B/Fluids.—2017.—Vol. 61, № 1.—P. 46–60.
3. *Ilin K., Morgulis A.* Instability of an inviscid flow between porous cylinders with radial flow // J. Fluid Mech.—2013.—Vol. 730.—P. 364–378.
4. *Ilin K., Morgulis A.* Instability of a two-dimensional viscous flow in an annulus with permeable walls to two-dimensional perturbations // Physics of Fluids.—2015.—Vol. 27, № 4.—P. 044107. DOI: 10.1063/1.4919095.
5. *Вишик М. И., Люстерник Л. М.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук.—1957.—Т. 12, №5.—С. 3–122.
6. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Мир, 1968.—448 с.

7. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960.—942 с.
8. *Hill E. L.* The theory of Vector Spherical Harmonics // Am. J. Phys.—1954.—Vol. 22.—P. 211–214.
9. *Седлецкий А. М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации.—М.: Физматлит, 2005.—504 с.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ОДУ С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫХ КЛАССИЧЕСКИМИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ПОЛИНОМАМИ ЛАГЕРРА

Т. И. Шарапудинов

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Рассматривается задача о представлении решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (вообще говоря, нелинейных) в виде ряда Фурье по полиномам $l_{r,k}(x;b)$ $(k=0,1,\ldots)$, ортонормированным по Соболеву относительно скалярного произведения

$$\langle f,g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int\limits_0^\infty f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)e^{-bt}dt \quad \text{с} \quad b>0,$$

порожденным модифицированными полиномами Лагерра $l_k(x;b)=\sqrt{b}L_k(bx)$ посредством равенств

$$l_{r,k}(x;b)=\frac{x^k}{k!} \quad (k=0,1,\ldots,r-1),$$

$$l_{r,r+k}(x;b)=\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}l_k(t;b)\,dt \quad (k=0,1,\ldots).$$

В бесконечномерном гильбертовом пространстве l_2^m m-мерных последовательностей $C=(c_0,c_1,\ldots)$, для которых определена норма $\|C\|=\left(\sum_{j=0}^\infty\sum_{l=1}^m(c_j^l)^2\right)^{\frac12}$, сконструирован сжимающий нелинейный оператор $A: l_2^m\to l_2^m$, неподвижная точка $\widehat{C}=(\hat{c}_0,\hat{c}_1,\ldots)$ которого совпадает с последовательностью искомых неизвестных коэффициентов разложения решения рассматриваемой задачи Коши в ряд Фурье по системе $l_{1,k}(x;b)$ $(k=0,1,\ldots)$. Сконструирован также соотвествующий конечномерный аналог $A_N:\mathbb{R}_m^N\to\mathbb{R}_m^N$ оператора A, который действует в конечномерном пространстве $\mathbb{R}_m^N$ матриц C размерности $m\times N$, в котором определена норма

$$\|C\|_N^m=\left(\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{l=1}^m(c_j^l)^2\right)^{\frac12}.$$

Неподвижная точка $\overline{C}=(\bar{c}_0,\bar{c}_1,\ldots,\bar{c}_{N-1})$ оператора A_N представляет собой оценку (приближенное значение) искомой точки $\widehat{C}_N=(\hat{c}_0,\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_{N-1})$.

В настоящей работе был построен численный метод для нахождения неподвижной точки оператора A_N. Также была разработана компьютерная программа, осуществляющая приближенное решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений указанным выше методом.

Литература

1. *Шарапудинов И. И., Шарапудинов Т. И.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многогчленами Чебышева, ортогональными на сетке // Изв. вузов. Мат.—2017.—Т. 52, № 2.—С. 67–79.
2. *Шарапудинов И. И.* Специальные ряды по полиномам Лагерра и их аппроксимативные свойства // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 2.—С. 440–467.
3. *Шарапудинов И. И., Магомед-Касумов М.-Р. Г.* О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра // Диф. уравнения.—2018.—Т. 54, № 1.—С. 51–68.
4. *Шарапудинов И. И.* Некоторые специальные ряды по общим полиномам Лагерра и ряды Фурье по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву // Дагестан. электрон. мат. изв.—2015.—Т. 4.—С. 74–117.
5. *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. мат.—2018.—Т. 82, № 1.—С. 225–258.

Математический анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIV Владикавк. молодежн. мат. шк. (РСО-А, с. Н. Цей, 16–21 июля 2018 г.)

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ ЯКОБИ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Т. Н. Шах-Эмиров

(Россия, Махачкала; ДНЦ РАН)

Пусть $p = p(x)$ — неотрицательная измеримая функция, заданная на $E = [-1, 1]$, $\mu = \mu(\alpha, \beta, x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ $(\alpha, \beta > -1)$ — весовая функция. Через $L_{\mu}^{p(x)}(E)$ обозначим пространство измеримых функций $f = f(x)$, заданных на E, для которых конечен интеграл Лебега $\int_E |f(x)|^{p(x)}\mu(x)\,dx$. Известно [1], что если функция $p = p(x)$ существенно ограничена на E, то $L_{\mu}^{p(x)}(E)$ является линейным топологическим пространством, в котором при дополнительном условии $1 \leqslant \underline{p}(E) \leqslant p(x) \leqslant \overline{p}(E) < \infty$ ($\overline{p}(E) = \operatorname{ess\,sup}_{x\in E} p(x)$, $\underline{p}(E) = \operatorname{ess\,inf}_{x\in E} p(x)$) можно ввести норму

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf\left\{\alpha > 0 :\ \int\limits_E \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} \mu(x)\,dx \leqslant 1\right\},$$

которая превращает $L_m^{p(x)}(E)$ в банахово пространство.

В случае $\alpha, \beta > -\frac{1}{2}$ было показано [2], что ортонормированная система полиномов Якоби $p_n^{\alpha,\beta}(x) = (h_n^{\alpha,\beta})^{-\frac{1}{2}} P_n^{\alpha,\beta}(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ является базисом в $L_{\mu}^{p(x)}(E)$, если $4\frac{\alpha+1}{2\alpha+3} < p(1) < 4\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$, $4\frac{\beta+1}{2\beta+3} < p(-1) < 4\frac{\beta+1}{2\beta+1}$. Целью настоящей работы является усиление указанного результата на случай $\alpha, \beta > -1$.

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(x)}([0,1])$ // Мат. заметки.—1979.—Т. 26, № 4.—С. 613–632.
2. *Шарапудинов И. И., Шах-Эмиров Т. Н.* Сходимость рядов Фурье по полиномам Якоби в весовом пространстве Лебега с переменным показателем // Дагестан. электрон. мат. изв.—2017.—№ 8.—С. 27–47.

Математический анализ и математическое моделирование:
тез. докл. XIV Владикавк. молодежн. мат. шк. (РСО-А, с. Н. Цей, 16–21 июля 2018 г.)

ДИЛАТАЦИЯ ВПОЛНЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ A-МОДУЛЯХ

Я. В. Эльсаев

(Россия, Владикавказ; ВНЦ РАН)

Вполне положительные отображения, действующие в операторных алгебрах, являются в настоящее время полезным инструментом исследования в квантовой механике и теории квантовых вычислений. Пусть A и B — $C^{\star}$-алгебры. Вполне положительное отображение $\varphi : A \to B$ — это линейное отображение такое, что $[\varphi(a_{ij})]_{i,j=1}^{n}$ — положительный элемент в $C^{\star}$-алгебре $M_n(B)$ всех $n \times n$ квадратных матриц с элементами из B для всех положительных матриц $[(a_{ij})]_{i,j=1}^{n}$ в $M_n(A)$, $n \in \mathbb{N}$. Стайнспринг в работе [3] показал, что вполне положительное отображение $\varphi : A \to L(H)$ из алгебры A в алгебру $L(H)$ линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H можно представить в форме $\varphi(\cdot) = S^{\star}\pi(\cdot)S$, где π — это представление алгебры A в гильбертовом пространстве K, S — линейный ограниченный оператор из H в K. В дальнейшем результат Стайнспринга обобщался на случай гильбертовых модулей над $C^{\star}$-алгебрами и более общих топологических алгебр [1, 4]. Необходимые сведения о гильбертовых C^{*}-модулях можно найти в [2].

Алгебра с инволюцией A называется *инволютивной LMC-алгеброй*, если A — это локально выпуклое топологическое векторное пространство, где топология задается семейством полунорм $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, удовлетворяющих следующим условиям:

a) $p_\lambda(xy) \leqslant p_\lambda(x)p_\lambda(y)$ для любых $x, y \in A$ и любого $\lambda \in \Lambda$;

b) $p_\lambda(x) = p_\lambda(x^{\star})$ для любых $x \in A$, $\lambda \in \Lambda$.

Если инволютивная LMC-алгебра полна, то она называется *локальной $C^{\star}$-алгеброй*, если справедливо равенство

c) $p_\lambda(xx^{\star}) = p_\lambda(x)^2$ для любых $x, y \in A$, $\lambda \in \Lambda$.

Если в локальной $C^{\star}$-алгебре существует единица, то алгебра называется *унитальной*. Пусть G — локально компактная группа и E — полный гильбертов A-модуль. *Непрерывным действием* G на E называется унитарный гомоморфизм групп $t \mapsto \eta_t$, из G в $\mathrm{Aut}(E)$ — группу всех изоморфизмов гильбертова A-модуля, такой, что отображение $t \mapsto \eta_t(x)$ из G в E непрерывно для любого $x \in E$. Тройка (G, η, E) называется *динамической системой* на гильбертовом A-модуле E. Пусть $t \mapsto u_t$ и $t \mapsto u'_t$ — унитарные представления G на гильбертовых пространствах H и K. Вполне положительное отображение $\Phi : E \to L(H, K)$ называется *(u', u)-ковариантным* относительно (G, η, E), если для любых $x \in E$, $t \in G$ выполняется равенство

$$\Phi(\eta_t(x)) = u'_t\Phi(x)u^{\star}_t.$$

Пусть (G, η, E) — динамическая система на гильбертовом A-модуле E. *Ковариантным* представлением динамической системы (G, η, E) называется пятерка

(π_E, w, v, H, K), где H и K — гильбертовы пространства, $\pi_E : E \to L(H,K)$ — представление гильбертова A-модуля E, $v : G \to U(H)$ и $w : G \to U(K)$ — унитарные $\star$-представления G в H и K соответственно, такие, что

$$\pi_E(\eta_t(x)) = w_t \pi_E(x) v_t^\star$$

для любых $t \in G$ и $x \in E$.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть A — унитальная локальная $C^\star$-алгебра, E — гильбертов A-модуль, H и K — гильбертовы пространства, $\varphi : A \to L(H)$ — непрерывное, вполне положительное отображение, $\Phi : E \to L(H,K)$ — φ-вполне положительное, (u', u)-ковариантное, относительно (G, η, E), отображение. Тогда существуют гильбертовы пространства H^Φ, K^Φ, ковариантное представление $(\pi^\Phi, w^\Phi, v^\Phi, H^\Phi, K^\Phi)$ динамической системы (G, η, E), изометрия $S^\Phi : H \to H^\Phi$ и частичная коизометрия $W^\Phi : K \to K^\Phi$ такие, что*

1) $\Phi(x) = W^{\Phi\star}\pi^\Phi(x) S^\Phi$ *для любого* $x \in E$;

2) $v_t^\Phi S^\Phi = S^\Phi u_t$ *для любого* $t \in G$;

3) $w_t^\Phi W^\Phi = W^\Phi u_t'$ *для любого* $t \in G$;

4) $[\{\pi^\Phi(E) S^\Phi(H)\}] = K^\Phi$;

5) $[\{\pi^\varphi(A) S^\Phi(H)\}] = H_\Phi$, *где* $\pi^\varphi : L(H_\Phi) \to L(H_\Phi)$ — *непрерывный $\star$-гомоморфизм, ассоциированный с* π^Φ.

Литература

1. *Малиев И. Н., Плиев М. А.* О представлении типа Стайнспринга для операторов в гильбертовых модулях над локальными $C^\star$-алгебрами // Изв. Вузов. Математика.—2012.—№ 12.—С. 51–58.
2. *Мануйлов В. М., Троицкий Е. В.* $C^\star$-гильбертовы модули.—М.: Факториал, 2001.—224 с.
3. *Stinspring F.* Positive functions on $C^\star$-algebras // Proc. Amer. Math. Soc.—1955.—№ 2.—P. 211–216.
4. *Moslehian M. S., Kusraev A. and Pliev M.* Matrix KSGNS construction and a Radon–Nikodym type theorem // Indagationes Math.—2017.—№ 5.—P. 938–952.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

SFEDU — Southern Federal University
SMI VSC RAS — Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Centre of Russian Academy of Sciences
USB — University of Sistan and Baluchestan
АлтГУ — Алтайский государственный университет
ВГУ — Воронежский государственный университет
ВНЦ РАН — Владикавказский научный центр Российской академии наук
ВУНЦ ВВС — Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»
ДНЦ РАН — Дагестанский научный центр Российской академии наук
ИПМА — Институт прикладной математики и автоматизации — филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального научногоцентра «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»
КубГУ — Кубанский государственный университет
СОГУ — Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова
СПИИРАН — Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук
Финансовый университет — Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
ЮОГУ им. Тибилова — Юго-Осетинский государственный университет имени А. А. Тибилова
ЮМИ — Южный математический институт — филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального научного центра «Владикавказский научный центр Российской академии наук»
ЮФУ — Южный федеральный университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ:

тезисы докладов
XIV Владикавказской молодежной математической школы
(РСО-А, с. Н. Цей, 16–21 июля 2018 г.)

Компьютерная верстка: И. С. Гаприндашвили
Зав. редакцией: В. В. Кибизова

ЮМИ ВНЦ РАН
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

ISBN 978-5-904695-40-8
9 785904 695408