Воркшоп по функциональному анализу,
посвященный юбилею д.ф.-м.н., профессора А.Г. Кусраева
(1 – 3 марта 2023 г., онлайн)

Обратная спектральная задача для дифференциальных операторов третьего порядка с коэффициентами-распределениями

Бондаренко Наталья Павловна

Саратовский государственный университет
Самарский университет

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 21-71-10001.

Операторы Штурма-Лиувилля с регулярными потенциалами

Наиболее полные результаты в теории обратных задач спектрального анализа получены для уравнения Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

с потенциалом $q \in L_2(0,1)$.

1. Марченко, В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Киев: Наукова Думка, 1977.
2. Левитан, Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля, Москва: Наука, 1984.
3. Юрко, В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач, М.: Физматлит, 2007.
4. Kravchenko, V.V. Direct and Inverse Sturm-Liouville Problems, Birkhäuser, Cham, 2020.

Операторы Штурма-Лиувилля с регулярными потенциалами

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,1). \tag{1}$$

Г. Борг (1946) доказал, что потенциал $q(x)$ однозначно определяется двумя спектрами краевых задач для уравнения Штурма-Лиувилля (1) с разными краевыми условиями:

$$y(0) = y(1) = 0 \quad \sim \quad \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}, \tag{2}$$

$$y'(0) = y(1) = 0 \quad \sim \quad \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}. \tag{3}$$

Операторы Штурма-Лиувилля с регулярными потенциалами

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{2}$$

$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные значения задачи (1)-(2), $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные функции, $y_n'(0) = 1$, $\alpha_n = \int\limits_0^1 y_n^2(x)\,dx$ — весовые числа.

Обратная задача

По спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *построить потенциал* $q(x)$.

Операторы Штурма-Лиувилля с регулярными потенциалами

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$
$$y(0) = y(1) = 0. \tag{2}$$

$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные значения задачи (1)-(2), $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные функции, $y_n'(0) = 1$, $\alpha_n = \int\limits_0^1 y_n^2(x)\,dx$ — весовые числа.

Обратная задача

По спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ построить потенциал $q(x)$.

В фундаментальной работе [5] предложен метод конструктивного решения обратной задачи Штурма-Лиувилля, основанный на сведении к линейному интегральному уравнению

$$K(x,t) + F(x,t) + \int_0^x K(x,s)F(s,t)\,ds = 0, \quad 0 < t < x. \tag{4}$$

$$\{\lambda_n, \alpha_n\} \to F(x,t) \to K(x,t) \to q(x).$$

5 Гельфанд, И.М.; Левитан, Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН СССР. Сер. матем. 15 (1951), № 4, 309–360.

Необходимые и достаточные условия

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{2}$$

Теорема (Гельфанд, Левитан 1951; Юрко)

Для того чтобы числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *были спектральными данными задачи* (1)-(2) *с вещественным потенциалом* $q \in L_2(0,1)$, *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$\lambda_n \in \mathbb{R}, \quad \lambda_n \neq \lambda_m \text{ если } n \neq m, \quad \alpha_n > 0, \tag{5}$$

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\varkappa_n}{n}, \quad \alpha_n = \frac{1}{2(\pi n)^2} + \frac{\varkappa_{n1}}{n^3}, \tag{6}$$

где

$$\omega = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 q(x)\,dx, \quad \{\varkappa_n\}, \{\varkappa_{n1}\} \in l_2.$$

Теория обратных задач для операторов высших порядков

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)}, \quad n > 2, \tag{7}$$

с регулярными коэффициентами на конечном интервале $(0, 1)$ и на полуоси $(0, +\infty)$ была построена В.А. Юрко. Он разработал *метод спектральных отображений*, основанный на контурном интегрировании в λ-плоскости. Данный метод конструктивен и сводит нелинейные обратные задачи к линейным уравнениям в некоторых банаховых пространствах.

6 Юрко, В.А. Восстановление дифференциальных операторов по матрице Вейля, Докл. АН СССР 313 (1990), № 6, 1368–1372.

7 Yurko, V.A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Ill-Posed Problems Series, Utrecht, VNU Science (2002).

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$
$$q \in W_2^{-1}(0,1)\colon \quad q = \sigma', \quad \sigma \in L_2(0,1).$$

Обратные задачи Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями исследовали R.O. Hryniv, Ya.V. Mykytyuk, A.M. Савчук, A.A. Шкаликов, Е.Л. Коротяев, N. Pronska, J. Eckhardt, F. Gesztesy, R. Nichols, G. Teschl, N.J. Guliyev, M.Y. Ignatiev, V.A. Yurko, M.A. Kuznetsova, ...

Метод спектральных отображений:

[8] Freiling, G.; Ignatiev, M.Y.; Yurko, V.A. An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with singular potentials on star-type graph, Proc. Symp. Pure Math. 77 (2008), 397–408.

[9] Bondarenko, N.P. Solving an inverse problem for the Sturm-Liouville operator with singular potential by Yurko's method, Tamkang J. Math. 52 (2021), no. 1, 125–154.

Операторы высших порядков с коэффициентами-распределениями

$$\ell_{2m}(y) := y^{(2m)} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k (\tau_k^{(k)}(x) y^{(m-k)})^{(m-k)}$$

$$+ \mathrm{i} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} \Big((\sigma_k^{(k)}(x) y^{(m-k-1)})^{(m-k)} + (\sigma_k^{(k)}(x) y^{(m-k)})^{(m-k-1)} \Big), \quad (8)$$

$$\tau_1, \dots, \tau_m, \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1} \in L_2(0,1).$$

Регуляризационный подход:

10 Мирзоев, К.А.; Шкаликов, А.А. Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями, Матем. заметки 99 (2016), № 5, 788–793.

11 Mirzoev, K.A., Shkalikov, A.A. Ordinary differential operators of odd order with distribution coefficients, arXiv:1912.03660 [math.CA].

Обратные задачи:

12 Bondarenko, N.P. Inverse spectral problems for arbitrary-order differential operators with distribution coefficients, Mathematics 9 (2021), no. 22, Article ID 2989.

13 Bondarenko, N.P. Linear differential operators with distribution coefficients of various singularity orders, Math. Meth. Appl. Sci. (2022), published online.

14 Bondarenko, N.P. Reconstruction of higher-order differential operators by their spectral data, Mathematics 10 (2022), no. 20, Article ID 3882.

Постановка задачи

$$\ell(y) := y''' + (\tau_1(x)y)' + \tau_1(x)y' + \tau_0(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,1), \tag{9}$$

где $\tau_1 \in L_2(0,1)$, $\tau_0 \in W_2^{-1}(0,1)$, т.е. $\tau_0 = \sigma_0'$, $\sigma_0 \in L_2(0,1)$.

Согласованная матрица:

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(\sigma_0 + \tau_1) & 0 & 1 \\ 0 & (\sigma_0 - \tau_1) & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Квазипроизводные:

$$y^{[0]} := y, \quad y^{[k]} := (y^{[k-1]})' - \sum_{j=1}^{k} f_{k,j} y^{[j-1]}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{11}$$

$$y^{[j]} = y^{(j)}, \quad j = 0, 1, \quad y^{[2]} = y'' + (\sigma_0 + \tau_1)y, \quad y^{[3]} = (y^{[2]})' - (\sigma_0 - \tau_1)y'.$$

Область определения:

$$\mathcal{D}_F := \{y \colon y^{[k]} \in AC[0,1],\ k = \overline{0,2}\}.$$

Для любого $y \in \mathcal{D}_F$, $\ell(y) = y^{[3]}$. Функция y называется *решением* уравнения (9), если $y \in \mathcal{D}_F$ и удовлетворяет (9) п.в. на $(0,1)$.

Постановка задачи

Краевые задачи для уравнения (9):

$$\mathcal{L}_1: \quad y(0)=0, \quad y(1)=y'(1)=0,$$
$$\mathcal{L}_2: \quad y(0)=y'(0)=0, \quad y(1)=0.$$

Обозначим через $C_k(x,\lambda)$, $k=1,2,3$, решения уравнения (9), удовлетворяющие начальным условиям

$$C_k^{[j-1]}(0,\lambda)=\delta_{k,j}, \quad k,j=1,2,3,$$

где $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера.

$$\Delta_{1,1}(\lambda):=-\begin{vmatrix} C_2(1,\lambda) & C_3(1,\lambda) \\ C_2'(1,\lambda) & C_3'(1,\lambda) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2,1}(\lambda):=-\begin{vmatrix} C_1(1,\lambda) & C_3(1,\lambda) \\ C_1'(1,\lambda) & C_3'(1,\lambda) \end{vmatrix},$$
$$\Delta_{3,1}(\lambda):=\begin{vmatrix} C_1(1,\lambda) & C_2(1,\lambda) \\ C_1'(1,\lambda) & C_2'(1,\lambda) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2,2}(\lambda):=C_3(1,\lambda), \quad \Delta_{3,2}(\lambda):=C_2(1,\lambda).$$

При $k=1,2$, собственные значения $\{\lambda_{n,k}\}_{n=1}^{\infty}$ задачи $\mathcal{L}_k$ совпадают с нулями соответствующей характеристической функции $\Delta_{k,k}(\lambda)$.

Свойства собственных значений

Собственные значения имеют асимптотику

$$\lambda_{n,k} = (-1)^{k+1}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(n + \frac{1}{6} - \frac{\theta}{2\pi^2 n} + \frac{\varkappa_{n,k}}{n}\right)\right)^3, \tag{12}$$

где $\theta = \int\limits_0^1 \tau_1(x)\,dx$, $\{\varkappa_{n,k}\} \in l_2$.

Будем предполагать, что функции $\Delta_{k,k}(\lambda)$, $k = 1, 2$, имеют только простые нули. При этом возможно $\lambda_{n,1} = \lambda_{l,2}$ при некоторых индексах $n, l \geqslant 1$. В таких случаях без ограничения общности будем считать, что $n = l$ и обозначим

$$K := \{n \in \mathbb{N} \colon \lambda_{n,1} = \lambda_{n,2}\}.$$

Матрица Вейля-Юрко

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ M_{2,1} & 1 & 0 \\ M_{3,1} & M_{3,2} & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{j,k}(\lambda) = -\frac{\Delta_{j,k}(\lambda)}{\Delta_{k,k}(\lambda)}, \quad 1 \leqslant k < j \leqslant 3.$$

Рассмотрим ряд Лорана

$$M(\lambda) = \frac{M_{\langle -1 \rangle}(\lambda_{n,k})}{\lambda - \lambda_{n,k}} + M_{\langle 0 \rangle}(\lambda_{n,k}) + M_{\langle 1 \rangle}(\lambda_{n,k})(\lambda - \lambda_{n,k}) + \dots,$$

и введем *весовые матрицы*

$$\mathcal{N}(\lambda_{n,k}) := -(M_{\langle 0 \rangle}(\lambda_{n,k}))^{-1} M_{\langle -1 \rangle}(\lambda_{n,k}). \tag{13}$$

Обратная задача

По спектральным данным $\{\lambda_{n,k}, \mathcal{N}(\lambda_{n,k})\}_{n \in \mathbb{N},\, k=1,2}$ *построить коэффициенты* $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1)$.

Теорема 1 (Bondarenko, Mathematics, 2022)

Если $\lambda_{n,k} = \tilde{\lambda}_{n,k}$ *и* $\mathcal{N}(\lambda_{n,k}) = \tilde{\mathcal{N}}(\lambda_{n,k})$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2$, *то* $\tau_0 = \tilde{\tau}_0$ *в* $W_2^{-1}(0,1)$ *и* $\tau_1 = \tilde{\tau}_1$ *в* $L_2(0,1)$.

Весовые числа

$$n \notin K: \quad \mathcal{N}(\lambda_{n,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta_{n,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}(\lambda_{n,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{n,2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$n \in K: \quad \mathcal{N}(\lambda_n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta_{n,1} & 0 & 0 \\ \gamma_n & \beta_{n,2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_n := \lambda_{n,1} = \lambda_{n,2},$$

где

$$\beta_{n,k} := \frac{\Delta_{k+1,k}(\lambda_{n,k})}{\dot{\Delta}_{k,k}(\lambda_{n,k})}, \quad \gamma_n := \begin{cases} \frac{\Delta_{3,1}(\lambda_n)}{\dot{\Delta}_{1,1}(\lambda_n)}, & \text{если } \beta_{n,1} = 0, \\ \frac{C_1(1,\lambda_n)}{\dot{\Delta}_{2,2}(\lambda_n)}, & \text{если } \beta_{n,2} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

и $\dot{\Delta}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$.

Можно показать, что

$$\beta_{n,1}\beta_{n,2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \in K, \qquad \gamma_n \neq 0,\ n \in K.$$

Спектральные данные:

$$\mathfrak{S} := \left(\{\lambda_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\, k=1,2}, \{\beta_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\, k=1,2}, \{\gamma_n\}_{n\in K}\right).$$

Основное уравнение обратной задачи

Обратная задача

По спектральным данным $\mathfrak{S}$ *построить коэффициенты* $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1)$.

Рассмотрим банахово пространство m ограниченных бесконечных последовательностей $a = [a_n]_{n=1}^{\infty}$ с нормой $\|a\|_m = \sup_{n \geqslant 1} |a_n|$. Обратная задача сводится к основному уравнению

$$(I - \tilde{R}(x))\psi(x) = \tilde{\psi}(x), \qquad (15)$$

которое рассматривается при каждом фиксированном $x \in [0, 1]$. Здесь $\psi(x)$, $\tilde{\psi}(x) \in m$, $\tilde{R}(x)\colon m \to m$ — компактный линейный оператор, I — единичный оператор в m. При этом $\tilde{\psi}(x)$ и $\tilde{R}(x)$ строятся по спектральным данным $\mathfrak{S}$, а элементы $\psi(x)$ связан с неизвестными коэффициентами $\mathcal{T}$.

Необходимые и достаточные условия

Будем говорить, что $\mathcal{T} \in W$, если $\tau_0 \in W_2^{-1}(0,1)$, $\tau_1 \in L_2(0,1)$ и нули функций $\Delta_{k,k}(\lambda)$ $k = 1, 2$, простые.

Теорема 2

Для того, что числа $\mathfrak{S} = \left(\{\lambda_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\, k=1,2}, \{\beta_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},\, k=1,2}, \{\gamma_n\}_{n\in K}\right)$ *были спектральным данными некоторой задачи с коэффициентами* $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1) \in W$, *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. *Справедливы асимптотические формулы* $n \geqslant 1$, $k = 1, 2$*:*

$$\lambda_{n,k} = (-1)^{k+1} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(n + \frac{1}{6} - \frac{\theta}{2\pi^2 n} + \frac{\varkappa_{n,k}}{n} \right) \right)^3, \tag{12}$$

$$\beta_{n,k} = 3\lambda_{n,k} \left(1 + \frac{\varkappa^0_{n,k}}{n} \right), \qquad \{\varkappa_{n,k}\}, \{\varkappa^0_{n,k}\} \in l_2. \tag{16}$$

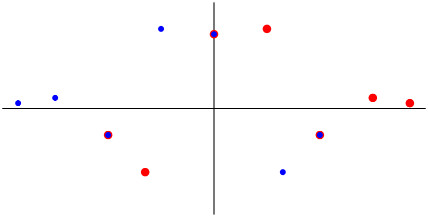
2. $\lambda_{n,k} \neq \lambda_{n_0,k_0}$ *при* $n \neq n_0$*;* $\beta_{n,1}\beta_{n,2} = 0 \Leftrightarrow n \in K$*;* $\gamma_n \neq 0$ *при* $n \in K$.
3. *При каждом фиксированном* $x \in [0,1]$ *оператор* $(I - \tilde{R}(x)) \colon m \to m$ *из основного уравнения* (15) *имеет ограниченный обратный.*

Самосопряженный случай

$$y''' + (\tau_1(x)y)' + \tau_1(x)y' + \tau_0(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,1), \tag{9}$$

$$\mathcal{L}_1: \quad y(0) = 0, \quad y(1) = y'(1) = 0,$$
$$\mathcal{L}_2: \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Предположим, что $\mathrm{i}\tau_0(x)$, $\tau_1(x) \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda_{n,1} = -\overline{\lambda_{n,2}}$, $\beta_{n,1} = -\overline{\beta_{n,2}}$.



Достаточно одного спектра $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lambda_n := \lambda_{n,1}$, $\beta_n := \beta_{n,1}$.

$$K^+ := \{n \in \mathbb{N} \colon \exists p = p(n) \in \mathbb{N} \ \text{т.ч.}\ \lambda_n = -\overline{\lambda_p}\},$$
$$\gamma_n = \overline{\gamma_{p(n)}},\ n \in K^+, \qquad \gamma_n > 0,\ n = p(n).$$

Достаточные условия

Будем говорить, что $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1) \in W^+$, если $\tau_1 \in L_2(0,1)$, $\tau_0 \in W_2^{-1}(0,1)$, и функции $i\tau_0(x)$ и $\tau_1(x)$ вещественные.

Теорема 3

Пусть $\mathfrak{S}^+ = \left(\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus K^+}, \{\gamma_n\}_{n \in K^+}\right)$ *— некоторые числа, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. *Числа* $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *и* $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus K^+}$ *удовлетворяют асимптотическим соотношениям*

$$\lambda_n = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(n + \frac{1}{6} - \frac{\theta}{2\pi^2 n} + \frac{\varkappa_n}{n}\right)\right)^3,$$

$$\beta_n = 3\lambda_n\left(1 + \frac{\varkappa_n^0}{n}\right), \qquad \{\varkappa_n\}, \{\varkappa_n^0\} \in l_2.$$

2. $\lambda_n \ne \lambda_{n_0}$ *при* $n \ne n_0$; $\beta_n \ne 0$ *при* $n \in \mathbb{N} \setminus K^+$.
3. $Re\,\lambda_n \geqslant 0$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\gamma_n > 0$ *при* $n \in K^+$.

Тогда существует единственная пара коэффициентов $\mathcal{T} = (\tau_0, \tau_1) \in W^+$ *со спектральными данными* $\mathfrak{S}^+$.

Спасибо за внимание!