Теорема о сохранении соотношений в булевых алгебрах

$\Sigma := \{ =, \leq, \neg, \vee, \wedge, \setminus, \Rightarrow, \Leftrightarrow, 0, 1 \}.$

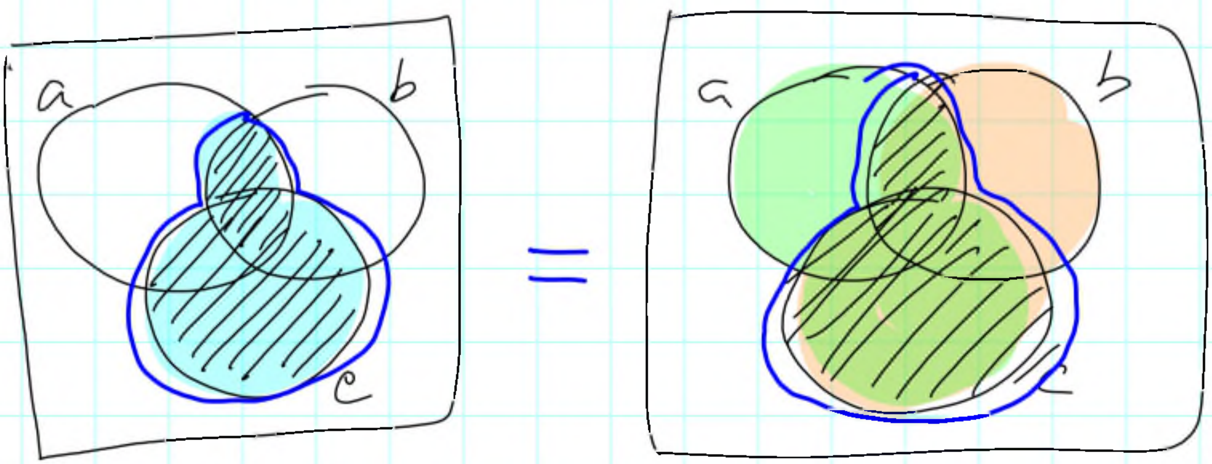
Аксиома:

$\forall a, b, c \mid (a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

Упражнение:

$\forall a, b, c \mid (a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$

Диаграммы Венна:



$(a \wedge b) \vee c$ $\qquad$ $(a \vee c) \wedge (b \vee c)$

Упражнение: Дополнение единственно:

$\forall a,b,c \mid a \wedge b = 0,\ a \vee b = 1,\ a \wedge c = 0,\ a \vee c = 1 \Rightarrow b = c$ $= \varphi$

Истинностная таблица:

a	b	c
~~0~~	~~0~~	~~0~~
1	0	0
~~0~~	~~1~~	~~0~~
~~0~~	~~0~~	~~1~~
~~1~~	~~1~~	~~0~~
~~1~~	~~0~~	~~1~~
0	1	1
~~1~~	~~1~~	~~1~~

Ответ: ДА.

$2 = \{0, 1\}$

$2 \models \varphi \Rightarrow BA \vdash \varphi$?

$2 \models \forall a \mid a = 0 \vee a = 1$ $= \varphi$

a	$a=0 \vee a=1$
0	1
1	1

Ответ: ДА

но $BA \nvdash \varphi$

[1953] Вулих Б.З.
Некоторые вопросы теории сетных полуупорядоченных множеств
Изв. АН СССР

[1961] Вулих Б.З.
Введение в теорию полуупорядоченных пространств
М.: Физ-мат-лит

[1982] Гордон Е.И.
К теоремам о сохранении соотношений в К-пространствах
СМЖ

[1987] Jech T.
First order theory of complete Stonean algebras (Boolean-valued real and complex numbers)
Canad. Math. Bull.

Для произвольной сигнатуры вводится понятие синтаксически **строго генерической формулы** рекурсией по сложности формулы:

(1) всякая атомарная формула — син. строго ген.;

(2) если φ и ψ — син. строго ген., то $\varphi \wedge \psi$, $\exists x | \varphi$, $\forall x | \varphi$ — син. строго ген.

Для произвольной сигнатуры вводится понятие синтаксически **генерической формулы** рекурсией по сложности формулы:

(1) всякая син. строго ген. — син. ген.;

(2) если φ и ψ — син. ген., то $\varphi \wedge \psi$, $\exists x | \varphi$, $\forall x | \varphi$ — син. ген.;

(3) если φ — син. строго ген., то $\neg\varphi$ — син. ген.;

(4) если φ — син. строго ген., а ψ — син. ген., то $\varphi \Rightarrow \psi$ — син. ген.

(**Строго**) **генерическая формула** данной сигнатуры — это формула, логически эквивалентная синтаксически (строго) генерической формуле.

Для произвольной сигнатуры вводится понятие синтаксически хорновской формулы рекурсией по сложности формулы:

(1) если $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — атомарные формулы, то α, $\neg(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)$, $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \Rightarrow \alpha$ — син. хорн.;

(2) если φ и ψ — син. хорн., то $\varphi \wedge \psi$, $\exists x \, \varphi$, $\forall x \, \varphi$ — син. хорн.

Хорновская формула данной сигнатуры — это формула, логически эквивалентная синтаксически хорновской формуле.

Факт. Для любой сигнатуры классы генерических и хорновских формул совпадают.

Гипотеза. Пусть φ — хорновское предложение сигнатуры Σ. Тогда $2 \models \varphi \Rightarrow A \models \varphi$ для любой БА A, т.е. $\text{БА} \vdash \varphi$.

$S \neq \varnothing$, $B := \mathcal{P}(S)$.

Условимся отождествлять $\mathcal{P}(S)$ и 2^S.

Таким образом, для $b \in B$ и $s \in S$ мы имеем

$s \in b \iff b(s) = 1$.

$\Sigma := \{=, \leq, \neg, \vee, \wedge, \setminus, \Rightarrow, \Leftrightarrow, 0, 1\}$.

Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in F(\Sigma)$, где $n \geq 0$, причем все параметры φ входят в список $x_1, \ldots, x_n$; и пусть $b_1, \ldots, b_n \in B$. Положим

$$[\varphi(b_1, \ldots, b_n)] := \{s \in S : 2 \models \varphi(b_1(s), \ldots, b_n(s))\} \in B.$$

Лемма 1. Пусть $\varphi(\bar{x}), \psi(\bar{y}) \in F(\Sigma)$. Тогда

$$\forall \bar{a},\bar{b} \in B \mid \begin{aligned} [\varphi(\bar{a}) \wedge \psi(\bar{b})] &= [\varphi(\bar{a})] \wedge [\psi(\bar{b})]; \\ [\varphi(\bar{a}) \vee \psi(\bar{b})] &= [\varphi(\bar{a})] \vee [\psi(\bar{b})]; \\ [\neg \varphi(\bar{a})] &= \neg [\varphi(\bar{a})]; \\ [\varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \psi(\bar{b})] &= [\varphi(\bar{a})] \Leftrightarrow [\psi(\bar{b})]; \\ [\varphi(\bar{a}) \Rightarrow \psi(\bar{b})] &= [\varphi(\bar{a})] \Rightarrow [\psi(\bar{b})]. \end{aligned}$$

$\lhd$ Тривиально. $\rhd$

Лемма 2. Пусть $\varphi(\bar{x}), \psi(\bar{x}) \in F(\Sigma)$.
Если $2 \models (\forall \bar{x} \mid \varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow \psi(\bar{x}))$,
то $\forall \bar{b} \in B \mid [\varphi(\bar{b})] = [\psi(\bar{b})]$.

$\lhd$ $[\varphi(\bar{b})] = \{s \in \mathcal{S} : 2 \models \varphi(\bar{b}(s))\} =$
$= \{s \in \mathcal{S} : 2 \models \psi(\bar{b}(s))\} = [\psi(\bar{b})]$. $\rhd$

Лемма 3. Пусть $\tau(x_1, \dots, x_n)$ — терм сигн. Σ.
Тогда $\forall b_1, \dots, b_n \in B$ $[\tau(b_1, \dots, b_n) = 1] = \tau(b_1, \dots, b_n)$.

$\lhd$ Используем индукцию по сложности τ.

Случай: $\tau(x) = x$ (переменная). Тогда $\forall b \in B$
$[\tau(b) = 1] = \{s \in \mathcal{S} : 2 \models \tau(b(s)) = 1\} = \{s \in \mathcal{S} : \tau(b(s)) = 1\} =$
$= \{s \in \mathcal{S} : b(s) = 1\} = \{s \in \mathcal{S} : s \in b\} = b = \tau(b)$.

Случай $\tau(\bar{x}, \bar{y}) = \tau_1(\bar{x}) \wedge \tau_2(\bar{y})$. Тогда $\forall \bar{a}, \bar{b} \in B$
$[\tau(\bar{a}, \bar{b}) = 1] = [\tau_1(\bar{a}) \wedge \tau_2(\bar{b}) = 1]$ = (по лемме 2) =
$= [\tau_1(\bar{a}) = 1 \wedge \tau_2(\bar{b}) = 1]$ = (по лемме 1) =
$= [\tau_1(\bar{a}) = 1] \wedge [\tau_2(\bar{b}) = 1] = \tau_1(\bar{a}) \wedge \tau_2(\bar{b})$.

Для остальных операций — аналогично. $\rhd$

Принцип максимума.

Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in F(\Sigma)$, причем все параметры φ входят в список $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $A \subseteq B$ — произвольная подалгебра. Тогда

$$\forall\, b_2, \ldots, b_n \in A \mid \exists a \in A \mid$$

$$[\exists x \mid \varphi(x, b_2, \ldots, b_n)] = [\varphi(a, b_2, \ldots, b_n)]$$

a — ?

Пусть $B = \{0, 1\}$, $n = 1$.

Надо: $\exists a \in B \mid [\exists x \mid \varphi(x)] = [\varphi(a)]$

$a = 0$ или 1 ?

$[\exists x \mid \varphi(x)] = [\varphi(0)] \vee [\varphi(1)]$

Если это $= 0$, то подходит любое a.

Пусть это 1.

Если $[\varphi(1)] = 1$, то подходит $a = 1$.

Если $[\varphi(1)] = 0$, то $[\varphi(0)] = 1$ и подходит $a = 0$.

Вывод: всегда подходит $a = [\varphi(1)]$.

причем на роль такого a подходит $[\varphi(1, b_2, \ldots, b_n)]$.

Но с какой стати такое $a \in A \subseteq B$?

Нужна **Лемма.**

Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in F(\Sigma)$, причем все параметры φ входят в список $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $A \subseteq B$ — произвольная подалгебра. Тогда

$$\forall\, b_1, \ldots, b_n \in A \mid [\varphi(b_1, \ldots, b_n)] \in A.$$

Для $A \subseteq B$ обозначим через $B\langle A \rangle$ подалгебру B, порождённую мн-вом A.
(В частности, $B\langle \varnothing \rangle = \{0, 1\}$.)

Для $b_1, \ldots, b_n \in B$, где $n \geq 0$, положим
$B\langle b_1, \ldots, b_n \rangle := B\langle \{b_1, \ldots, b_n\} \rangle$.

Теорема 1.
Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in F(\Sigma)$, где $n \geq 0$, причём все параметры φ входят в список $x_1, \ldots, x_n$.
Тогда

(1) $\forall\, b_1, \ldots, b_n \in B \mid [\varphi(b_1, \ldots, b_n)] \in B\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$;

(2) $\forall\, b_2, \ldots, b_n \in B \mid \exists\, a \in B\langle b_2, \ldots, b_n \rangle \mid$
$[\exists x \mid \varphi(x, b_2, \ldots, b_n)] = [\varphi(a, b_2, \ldots, b_n)]$;
на роль такого a подходит $[\varphi(1, b_2, \ldots, b_n)]$.

$\triangleleft$ Сначала для каждой φ покажем, что (1) $\Rightarrow$ (2).

Для сокращения обозначим $\bar{c} := b_2, \ldots, b_n$.

Итак, пусть $\bar{c} \in B$. Положим $a := [\varphi(1, \bar{c})]$.

Согласно (1) $a \in B\langle 1, \bar{c}\rangle = B\langle \bar{c}\rangle$.

Покажем, что $[\varphi(a, \bar{c})] = [\exists x \mid \varphi(x, \bar{c})]$.

$\subseteq$:

$$s \in [\varphi(a, \bar{c})] \Rightarrow 2 \models \varphi(a(s), \bar{c}(s)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists t \in 2 \mid 2 \models \varphi(t, \bar{c}(s)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \models (\exists x \mid \varphi(x, \bar{c}(s))) \Rightarrow s \in [\exists x \mid \varphi(x, \bar{c})].$$

$\supseteq$:

$$s \in [\exists x \mid \varphi(x, \bar{c})] \Rightarrow 2 \models (\exists x \mid \varphi(x, \bar{c}(s))) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists t \in 2 \mid 2 \models \varphi(t, \bar{c}(s)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \models \varphi(1, \bar{c}(s)) \vee 2 \models \varphi(0, \bar{c}(s))$$

(a) $2 \models \varphi(1, \bar{c}(s)) \Rightarrow s \in [\varphi(1, \bar{c})] = a \Rightarrow a(s) = 1$

$\hookrightarrow 2 \models \varphi(a(s), \bar{c}(s)) \Rightarrow s \in [\varphi(a, \bar{c})]$

(б) $2 \not\models \varphi(1, \bar{c}(s)) \Rightarrow s \notin [\varphi(1, \bar{c})] = a \Rightarrow a(s) = 0$

$\hookrightarrow 2 \models \varphi(0, \bar{c}(s)) \Rightarrow 2 \models \varphi(a(s), \bar{c}(s))$

$\Rightarrow s \in [\varphi(a, \bar{c})]$.

Теперь докажем (1) индукцией по сложности φ.

База индукции: φ — атомарная формула.

Тогда φ имеет вид $\sigma(\overline{x})=\tau(\overline{y})$ или $\sigma(\overline{x})\leq\tau(\overline{y})$,
где σ и τ — термы,
$\overline{x}=x_1,\ldots,x_m$, $\overline{y}=y_1,\ldots,y_n$ — их параметры.
Пусть $\overline{a}=a_1,\ldots,a_m$, $\overline{b}=b_1,\ldots,b_n\in B$.
Надо: $[\varphi(\overline{a},\overline{b})]\in B\langle\overline{a},\overline{b}\rangle$.

$$[\sigma(\overline{a})=\tau(\overline{b})] = \{s\in \mathcal{S} : 2\models\sigma(\overline{a}(s))=\tau(\overline{b}(s))\} =$$
$$=\{s\in \mathcal{S} : 2\models(\sigma(\overline{a}(s))\Leftrightarrow\tau(\overline{b}(s)))=1\} =$$
$$=[(\sigma(\overline{a})\Leftrightarrow\tau(\overline{b}))=1] \underset{\text{Лемма 3}}{=} (\sigma(\overline{a})\Leftrightarrow\tau(\overline{b}))\in B\langle\overline{a},\overline{b}\rangle.$$

Аналогично:

$$[\sigma(\overline{a})\leq\tau(\overline{b})] = \{s\in \mathcal{S} : 2\models\sigma(\overline{a}(s))\leq\tau(\overline{b}(s))\} =$$
$$=\{s\in \mathcal{S} : 2\models(\sigma(\overline{a}(s))\Rightarrow\tau(\overline{b}(s)))=1\} =$$
$$=[(\sigma(\overline{a})\Rightarrow\tau(\overline{b}))=1] \underset{\text{Лемма 3}}{=} (\sigma(\overline{a})\Rightarrow\tau(\overline{b}))\in B\langle\overline{a},\overline{b}\rangle.$$

Шаг индукции:
Пусть $\varphi \in F(\Sigma)$ и пусть для всех формул строго меньшей сложности выполняется (1). Покажем, что (1) выполняется для φ.

Случай $\varphi(\bar{x}) = \varphi_1(\bar{x}) \wedge \varphi_2(\bar{x})$.
Пусть $\bar{b} \in B$. Покажем, что $[\varphi(\bar{b})] \in B\langle \bar{b} \rangle$.
По лемме 1 мы имеем
$$[\varphi(\bar{b})] = [\varphi_1(\bar{b}) \wedge \varphi_2(\bar{b})] = [\varphi_1(\bar{b})] \wedge [\varphi_2(\bar{b})].$$
По предположению индукции
$$[\varphi_1(\bar{b})], [\varphi_2(\bar{b})] \in B\langle \bar{b} \rangle.$$
Следовательно, $[\varphi(\bar{b})] \in B\langle \bar{b} \rangle$.

Случаи $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi = \neg\varphi_1$, $\varphi = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ и т.п. рассматриваются аналогично.

Случай $\varphi(\bar{y}) = (\exists x \mid \psi(x, \bar{y}))$.
Пусть $\bar{b} \in B$. Покажем, что $[\varphi(\bar{b})] \in B\langle \bar{b} \rangle$.
По предположению индукции для ψ выполнено (1).
Кроме того, мы знаем, что (1) $\Rightarrow$ (2).
Следовательно, имеется такой $a \in B\langle \bar{b} \rangle$, что
$$[\varphi(\bar{b})] = [\exists x \mid \psi(x, \bar{b})] = [\psi(a, \bar{b})].$$
Осталось заметить, что согласно (1) для ψ мы имеем
$$[\psi(a, \bar{b})] \in B\langle a, \bar{b} \rangle = B\langle \bar{b} \rangle \quad (\text{т.к. } a \in B\langle \bar{b} \rangle).$$

Случай $\varphi(\bar{y}) = (\forall x \mid \psi(x, \bar{y}))$.
Пусть $\bar{b} \in B$. Покажем, что $[\varphi(\bar{b})] \in B\langle \bar{b} \rangle$.
Поскольку $2 \models \forall \bar{y}\, ((\forall x \mid \psi(x, \bar{y})) \Leftrightarrow \neg(\exists x \mid \neg\psi(x, \bar{y})))$, по лемме 2 мы имеем
$$[\varphi(\bar{b})] = [\neg(\exists x \mid \neg\psi(x, \bar{b}))].$$
По предположению индукции для ψ выполнено (1).
Очевидно, тогда (1) выполнено для $\neg\psi$.
Кроме того, мы знаем, что (1) $\Rightarrow$ (2).
Следовательно, имеется такой $a \in B\langle \bar{b} \rangle$, что
$[\neg\psi(a, \bar{b})] = [\exists x \mid \neg\psi(x, \bar{b})]$, а значит,
$[\exists x \mid \neg\psi(x, \bar{b})] \in B\langle a, \bar{b} \rangle = B\langle \bar{b} \rangle$.
Следовательно, с учетом леммы 1 мы имеем:
$$[\varphi(\bar{b})] = [\neg(\exists x \mid \neg\psi(x, \bar{b}))] = \neg[\exists x \mid \neg\psi(x, \bar{b})] \in B\langle \bar{b} \rangle. \quad \triangleright$$

Теорема 2 (аналог теоремы Чеха).

Пусть $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$ — список переменных и пусть $\varphi(\bar{x}) \in F(\Sigma)$, причем все параметры φ входят в $\bar{x}$. Пусть $A \subseteq B$ — произвольная подалгебра.

(1) Если φ — строго генерическая формула, то
$\forall \bar{b} \in A \mid [\varphi(\bar{b})] = 1 \iff A \models \varphi(\bar{b})$.

(2) Если φ — генерическая формула или, что то же самое, хорновская формула, то
$\forall \bar{b} \in A \mid [\varphi(\bar{b})] = 1 \Rightarrow A \models \varphi(\bar{b})$.

$\lhd$ (1) Благодаря лемме 2 формулу φ можно считать синтаксически строго генерической. Используем индукцию по сложности φ.

База индукции: φ — атомарная формула.
Тогда φ имеет вид $\sigma(\bar{x}) = \tau(\bar{y})$ или $\sigma(\bar{x}) \leq \tau(\bar{y})$,
где σ и τ — термы,
$\bar{x} = x_1, \ldots, x_m$, $\bar{y} = y_1, \ldots, y_n$ — их параметры.
Пусть $\bar{a} = a_1, \ldots, a_m$, $\bar{b} = b_1, \ldots, b_n \in A$.
Надо: $[\varphi(\bar{a}, \bar{b})] = 1 \iff A \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$.
Мы уже видели в док-ве теоремы 1, что
$[\sigma(\bar{a}) = \tau(\bar{b})] = (\sigma(\bar{a}) \Leftrightarrow \tau(\bar{b}))$. Таким образом,

$$[\sigma(\bar{a}) = \tau(\bar{b})] = 1 \iff (\sigma(\bar{a}) \Leftrightarrow \tau(\bar{b})) = 1 \iff$$
$$\iff \sigma(\bar{a}) = \tau(\bar{b}) \iff A \models (\sigma(\bar{a}) = \tau(\bar{b})).$$

Аналогично:

$$[\sigma(\bar{a}) \leq \tau(\bar{b})] = 1 \iff (\sigma(\bar{a}) \Rightarrow \tau(\bar{b})) = 1 \iff$$
$$\iff \sigma(\bar{a}) \leq \tau(\bar{b}) \iff A \models (\sigma(\bar{a}) \leq \tau(\bar{b})).$$

Шаг индукции:
Пусть $\varphi \in F(\Sigma)$ и пусть для всех формул строго меньшей сложности выполняется (1). Покажем, что (1) выполняется для φ.

Случай $\varphi(\bar{x}) = \varphi_1(\bar{x}) \wedge \varphi_2(\bar{x})$.
Пусть $\bar{b} \in A$. Покажем, что $[\varphi(\bar{b})]=1 \Leftrightarrow A \models \varphi(\bar{b})$.
По предположению индукции мы имеем
$[\varphi_i(\bar{b})]=1 \Leftrightarrow A \models \varphi_i(\bar{b})$, $i=1,2$. Следовательно, с учетом леммы 1 мы имеем:

$$[\varphi(\bar{b})]=1 \Leftrightarrow [\varphi_1(\bar{b}) \wedge \varphi_2(\bar{b})]=1 \Leftrightarrow [\varphi_1(\bar{b})] \wedge [\varphi_2(\bar{b})]=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [\varphi_1(\bar{b})]=1 \wedge [\varphi_2(\bar{b})]=1 \Leftrightarrow A \models \varphi_1(\bar{b}) \wedge A \models \varphi_2(\bar{b}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A \models \varphi_1(\bar{b}) \wedge \varphi_2(\bar{b}) \Leftrightarrow A \models \varphi(\bar{b}).$$

Случай $\varphi(\bar{y}) = (\exists x \mid \psi(x,\bar{y}))$.
Пусть $\bar{b} \in A$. Покажем, что $[\varphi(\bar{b})]=1 \Leftrightarrow A \models \varphi(\bar{b})$.
По предположению индукции мы имеем
$$\forall a \in A \mid [\psi(a,\bar{b})]=1 \Leftrightarrow A \models \psi(a,\bar{b}). \qquad (*)$$
По теореме 1 существует такой $a \in B\langle \bar{b} \rangle$, что $[\exists x \mid \psi(x,\bar{b})] = [\psi(a,\bar{b})]$. Кроме того, из $\bar{b} \in A$ следует $a \in B\langle \bar{b} \rangle \subseteq A$. Следовательно,
$$[\varphi(\bar{b})]=1 \Leftrightarrow [\exists x \mid \psi(x,\bar{b})]=1 \Leftrightarrow [\psi(a,\bar{b})]=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A \models \psi(a,\bar{b}) \underset{\uparrow}{\Rightarrow} A \models (\exists x \mid \psi(x,\bar{b})) \Leftrightarrow A \models \varphi(\bar{b}).$$
Обратная импликация:
Пусть $A \models (\exists x \mid \psi(x,\bar{b}))$. Надо: $[\exists x \mid \psi(x,\bar{b})]=1$.
Для некоторого $c \in A$ выполняется $A \models \psi(c,\bar{b})$.
Согласно $(*)$ мы имеем $[\psi(c,\bar{b})]=1$. Значит,
$$\forall s \in S \mid 2 \models \psi(c(s),\bar{b}(s)) \Rightarrow \forall s \in S \mid \exists t \in 2 \mid 2 \models \psi(t,\bar{b}(s)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall s \in S \mid 2 \models (\exists x \mid \psi(x,\bar{b}(s))) \Rightarrow [\exists x \mid \psi(x,\bar{b})]=1.$$

Случай $\varphi(\bar{y}) = (\forall x \mid \psi(x, \bar{y}))$.

Пусть $\bar{b} \in A$. Покажем, что $[\varphi(\bar{b})] = 1 \Leftrightarrow A \vDash \varphi(\bar{b})$.

По предположению индукции мы имеем

$$\forall a \in A \mid [\psi(a, \bar{b})] = 1 \Leftrightarrow A \vDash \psi(a, \bar{b}). \quad (**)$$

Имеем:

$$[\varphi(\bar{b})] = 1 \Leftrightarrow [\forall x \mid \psi(x, \bar{b})] = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall s \in \mathfrak{S} \mid 2 \vDash (\forall t \mid \psi(t, \bar{b}(s))) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall s \in \mathfrak{S} \mid \forall t \in 2 \mid 2 \vDash \psi(t, \bar{b}(s)) \Rightarrow \qquad (\square)$$

$$\Rightarrow \forall a \in A \mid \forall s \in \mathfrak{S} \mid 2 \vDash \psi(a(s), \bar{b}(s)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall a \in A \mid [\psi(a, \bar{b})] = 1 \overset{[\text{по } (**)]}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \forall a \in A \mid A \vDash \psi(a, \bar{b}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \vDash (\forall x \mid \psi(x, \bar{b})) \Leftrightarrow A \vDash \varphi(\bar{b}).$$

Обратная импликация в $(\square)$:

$$\forall a \in A \mid \forall s \in \mathfrak{S} \mid 2 \vDash \psi(a(s), \bar{b}(s)) \overset{[a := 0, 1]}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \forall s \in \mathfrak{S} \mid 2 \vDash \psi(0, \bar{b}(s)) \wedge \forall s \in \mathfrak{S} \mid 2 \vDash \psi(1, \bar{b}(s)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall s \in \mathfrak{S} \mid 2 \vDash \psi(0, \bar{b}(s)) \wedge 2 \vDash \psi(1, \bar{b}(s)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall s \in \mathfrak{S} \mid \forall t \in 2 \mid 2 \vDash \psi(t, \bar{b}(s)).$$

(2) Благодаря лемме 2 формулу φ можно считать синтаксически генерической. Используем индукцию по сложности φ.

База индукции: φ — син. строго генерическая. Тогда (2) для φ следует из (1) для φ.

Шаг индукции: Пусть $\varphi \in F(\Sigma)$ и пусть для всех формул строго меньшей сложности выполняется (2). Покажем, что (2) выполняется для φ.

Случаи $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi = \exists x \psi$ и $\varphi = \forall x \psi$ рассматриваются в точности как при док-ве (1), только короче — с односторонней импликацией "$\Rightarrow$".

Случай $\varphi(\bar{x}) = \neg\psi(\bar{x})$, где ψ — син. строго ген. Пусть $\bar{b} \in A$ и $[\varphi(\bar{b})] = 1$. Надо: $A \models \varphi(\bar{b})$. С учетом леммы 1 имеем:

$[\psi(\bar{b})] = \neg\neg[\psi(\bar{b})] = \neg[\neg\psi(\bar{b})] = \neg[\varphi(\bar{b})] = \neg 1 = 0$.

След-но, $[\psi(\bar{b})] \neq 1$, а значит, по (1) $A \not\models \psi(\bar{b})$, т.е. $A \models \neg\psi(\bar{b})$, т.е. $A \models \varphi(\bar{b})$.

Случай $\varphi(\bar{x}) = (\varphi_1(\bar{x}) \Rightarrow \varphi_2(\bar{x}))$, где φ_1 — син. строго ген., φ_2 — син. ген. Тогда для φ_1 верно (1), а по предположению индукции для φ_2 верно (2).

Пусть $\bar{b} \in A$ и $[\varphi(\bar{b})] = 1$. Надо: $A \models \varphi(\bar{b})$.

Имеем $[\varphi_1(\bar{b}) \Rightarrow \varphi_2(\bar{b})] = 1$.

Надо: $A \models (\varphi_1(\bar{b}) \Rightarrow \varphi_2(\bar{b}))$, т.е. $A \models \varphi_1(\bar{b}) \Rightarrow A \models \varphi_2(\bar{b})$.

От противного: допустим, $A \models \varphi_1(\bar{b})$ и $A \not\models \varphi_2(\bar{b})$.

По (1) для φ_1 мы имеем $[\varphi_1(\bar{b})] = 1$,

а по (2) для φ_2 мы имеем $[\varphi_2(\bar{b})] \neq 1$.

Следовательно, с учетом леммы 1 мы имеем

$[\varphi_1(\bar{b}) \Rightarrow \varphi_2(\bar{b})] = ([\varphi_1(\bar{b})] \Rightarrow [\varphi_2(\bar{b})]) = \neg[\varphi_1(\bar{b})] \vee [\varphi_2(\bar{b})] =$
$= \neg 1 \vee [\varphi_2(\bar{b})] = 0 \vee [\varphi_2(\bar{b})] = [\varphi_2(\bar{b})] \neq 1$, противор. $\triangleright$

Теорема 3.

Пусть φ — хорновское предложение сигнатуры Σ.
Тогда $2 \models \varphi \Rightarrow A \models \varphi$ для любой БА A,

т.е. $BA \vdash \varphi$.

$\lhd$ Благодаря теореме Стоуна можно считать, что A — подалгебра $B = \mathcal{P}(S)$ для некот. $S \neq \varnothing$.
Пусть $2 \models \varphi$. Тогда $[\varphi] = \{s \in S : 2 \models \varphi\} = 1$.
По теореме 2 мы имеем $A \models \varphi$. $\rhd$

Таким образом,
если хорновское предложение истинно в БА 2,
то оно доказуемо в теории БА.

Это означает, что
для любого хорновского предложения
верификация истинностной таблицей
или диаграммой Венна
служит строгим доказательством этого
предложения в теории булевых алгебр.