«ВОРКШОП ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ,
ПОСВЯЩЕННЫЙ ЮБИЛЕЮ
Д.Ф.-М.Н., ПРОФЕССОРА А.Г. КУСРАЕВА»
1-3 марта 2023 г.

Дифференцирования алгебр Мюррея–фон Неймана

Каримберген Кудайбергенов

Институт Математики им. В.И.Романовского АН РУз

02.03.2023

Содержание

Содержание

Содержание

Содержание

В 2000 году академиком Ш.А. Аюповым была предложена программа по исследованию дифференцирований алгебр измеримых операторов, присоединённых к алгебрам фон Неймана. Вскоре научные исследования в этой области были начаты не только в Узбекистане, но и многими учеными ведущих мировых математических центров Австралии, Германии, Китая, Нидерландов, России, США и других стран. На сегодняшний день задачи, сформулированные в программе называют *проблемой Аюпова.* Проблема Аюпова сыграла очень важную роль в развитии теории алгебр неограниченных операторов. Важно отметить, что в 2014 году всемирно известный американский ученый и один из основателей современной теорий операторных алгебр Ричард Кэйдисон в совместной работе с Ж.Лиу, опубликованной в Докладах Национальной Академии Наук США (PNAS), обратил внимание на актуальность этой проблемы.

Алгебры фон Неймана были впервые рассмотрены в серии работ Мюррея и фон Неймана.[1,2,3]
Пусть H – гильбертово пространство, $B(H)$ – $*$–алгебра всех ограниченных линейных операторов на H и M – алгебра фон Неймана в $B(H)$, т.е. слабо замкнутая унитальная $*$-подалгебра в $B(H)$.
Через $P(M)$ обозначим множество всех проекторов из M. Напомним, что два проектора $e, f \in P(M)$ называются *эквивалентными*, если существует такой элемент $u \in M$, что $u^*u = e$ и $uu^* = f$. Проектор $e \in P(M)$ называется *конечным*, если соотношение $f \in P(M)$, $f \leq e$, $f \sim e$ влечет, что $e = f$.

[1] Murray F. J., von Neumann J. Ann. Math. 1936.
[2] Murray F. J., von Neumann J. Trans. Amer. Math. Soc., 1937.
[3] Murray F. J., von Neumann J. Ann. Math., 1943.

Алгебра фон Неймана M называется
– *конечной,* если $\mathbf{1}$ – конечный проектор;
– *полуконечной,* если каждый ненулевой проектор в M мажорирует ненулевой конечный подпроектор;
– *бесконечной,* если $\mathbf{1}$ не является конечным;
– *собственно бесконечной,* если каждый ненулевой центральный проектор в M является бесконечным (т.е. не конечным);
– *чисто бесконечной или типа III,* если каждый ненулевой проектор в M является бесконечным.
Проектор $e \in M$ называется абелевым, если алгебра eMe является абелевой. Так как $P(M)$ является полной решеткой, то для каждого проектора e из M найдется наименьший центральный проектор $z(e)$, содержащий e в качестве подпроектора; такой проектор называется центральным носителем e. Проектор e называется точным, если $z(e) = \mathbf{1}$.

- Алгебра фон Неймана M называется *типа I*, если она содержит точный абелев проектор.
- Алгебра фон Неймана M без абелевых проекторов называется *непрерывной*.

Произвольная алгебра фон Неймана M единственным образом расщепляется в прямую сумму алгебр фон Неймана следующих типов:

- типа $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$ (конечная типа I);
- типа I_{∞} (собственно бесконечная типа I);
- типа II_1 (конечная и непрерывная);
- типа II_{∞} (полуконечная, собственно бесконечная и непрерывная);
- типа III (чисто бесконечная).

- $S(M)$ – множество всех измеримых операторов присоединенных к M;[4]
- $LS(M)$ – множество всех локально измеримых операторов присоединенных к M;[5]
- $S(M,\tau)$ – множество всех τ-измеримых операторов присоединенных к M;[6]
- Заметим, что $M \subseteq S(M,\tau) \subseteq S(M) \subseteq LS(M)$.

Множество $LS(M)$, снабженное операциями сильной суммой, сильным произведением и инволюцией становится унитальной $*$-алгеброй. Известно, что M, $S(M,\tau)$ и $S(M)$ являются $*$-подалгебрами в $LS(M)$. В случае, когда M является конечной алгеброй, алгебра $S(M) = LS(M)$ называется алгеброй *Мюррея–фон Неймана*, ассоциированной с M.
Отметим, что алгебры измеримых операторов являются некоммутативными обобщениями классических алгебр измеримых функций. В частности, если M – коммутативная алгебра фон Неймана, то

$$M \cong L_\infty(\Omega) \text{ и } S(M) \cong S(\Omega).^4$$

[4] Segal I. E. Ann. Math., 1953.
[5] Sankaran S. J. London Math. Soc., 1959.
[6] Nelson E. J. Funct. Anal., 1974.

Пусть τ – точный нормальный конечный след на M. Базу окрестностей нуля в топологии сходимости по мере образуют множества вида:[7]

$$N(\varepsilon, \delta) = \{x \in S(M) : \exists\, p \in P(M), \tau(\mathbf{1} - p) < \delta, x \in M, \ ||xp|| \le \varepsilon\},$$

где ε, δ – положительные числа. Снабженная топологией сходимости по мере, алгебра $S(M) = S(M, \tau)$ становится полной топологической $*$-алгеброй. Соответствующим образом вводится топология сходимости локально по мере на алгебре $LS(M)$, которая также является полной топологической $*$-алгеброй.[8]
Подробно об алгебрах измеримых и локально измеримых операторов можно ознакомиться в монографии М. А. Муратова и В. И. Чилина.[9]

[7] Stinespring W. F. Trans. Amer. Math. Soc., 1959.
[8] Yeadon F. J. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1973.
[9] Муратов М. А., Чилин В. И. Алгебры измеримых и локально измеримых операторов. 2007.

Пусть $\mathcal{A}$ – некоторая алгебра. Линейный оператор $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется дифференцированием, если он удовлетворяет правилу Лейбница, т.е.

$$D(xy) = D(x)y + xD(y)$$

для всех $x, y \in \mathcal{A}$.
Каждый элемент $a \in \mathcal{A}$ порождает дифференцирование $\mathrm{ad}(a)$ на $\mathcal{A}$, определяемое равенством

$$\mathrm{ad}(a)(x) = [a, x] = ax - xa,\ x \in \mathcal{A}.$$

Такие дифференцирования называются *внутренними*.
Важным примером дифференцирования является классический дифференциальный оператор:

$$x(t) \in C^{(1)}[0, 1] \to \frac{dx}{dt} \in C[0, 1].$$

Теперь мы можем сформулировать проблему Аюпова, которая была опубликована в 2000 году в Докладах Академии Наук Республики Узбекистан.[10]

Проблема Аюпова:

1. *Всякое ли дифференцирование на алгебре измеримых операторов, присоединенных к коммутативной алгебре фон Неймана, тождественно равно нулю?*
2. *Всякое ли дифференцирование на алгебре измеримых операторов непрерывно в топологии сходимости по мере или другой топологии?*
3. *Всякое ли дифференцирование на алгебре измеримых операторов является внутренним?*

Самым основным, конечно, является третий вопрос, предыдущие, как нетрудно заметить, являются его частными случаями.

[10] Аюпов Ш. А. Докл. АН РУз. 2000.

Если измеримое пространство (Ω, Σ, μ) сепарабельно и без атомов, то алгебра $S(\Omega)$ изоморфна алгебра $S(0,1)$ – всех (классов эквивалентности) измеримых функций на $(0,1)$. Поэтому первая часть задачи естественным образом связано с различными расширениями классического понятия производной функции. Такие расширения возникли в начале прошлого века и они связаны с развитием теории функций действительной переменной. Здесь мы приводим основные три расширения производной.

Говорят, что функция $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ имеет в точке $s \in (0,1)$ среднюю производную Бореля, если существует предел

$$f^{\{1\}}(s) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{0}^{h} \frac{f(s+t) - f(s)}{t} dt.$$

Пусть $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ – измеримая функция. Напомним, что число ℓ называется асимптотическим пределом f в точке t, если множество

$$\{s \in (0,1) : |f(s) - \ell| < \varepsilon\}$$

имеет плотность 1 в точке t для произвольного $\varepsilon > 0$. Это записывается как: $\ell = ap - \lim\limits_{s \to t} f(t)$. Если асимптотический предел

$$f'_{ap}(t) := \mathrm{ap} - \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

существует и конечен, то он называется асимптотической производной функции f в точке t, и функция f называется асимптотически дифференцируемой в точке t.

Измеримая функция $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой в смысле Рисса, если существует измеримая функция $f^{[1]} : (0,1) \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\lim_{h\to 0} m\left(E\left(\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h} - f^{[1]}(t)\right| \geq \varepsilon\right)\right) = 0$$

для всех $\varepsilon > 0$, где m – мера Лебега на $(0,1)$.

Пусть $f \in S(0,1)$. Для $t \in \mathbb{R}$ положим

$$(\alpha_t(f))(s) = f\left(\{s+t\}\right), \; s \in [0,1),$$

где $\{p\}$ – дробная часть числа p. Заметим, что $G = \{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ – подгруппа группы $\mathrm{Aut}(S(0,1))$ всех автоморфизмов алгебры $S(0,1)$. Рассмотрим

$$D(f) = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha_h(f) - f}{h}, \; f \in S(0,1). \tag{1}$$

В зависимости от типа сходимости в (1), мы получим различные классы дифференцируемых функций. В частности, поточечная сходимость, сходимость в среднем, асимптотическая сходимиость и сходимость по мере дают классы всюду, в среднем в смысле Бореля, асимптотически и в смысле Рисса дифференцируемых функций на $(0,1)$, соответственно. При этом каждый класс функций строго содержится в следующем классе, и класс дифференцируемых в смысле Рисса функции является собственным подмножеством пространства измеримых функции на $(0,1)$.

В 1924 г. А.Я.Хинчин в своей обзорной работе, посвященной различным расширениям понятия производной привел следующее заключение: *Вопрос об отыскании такого способа дифференцирования, в силу которого оказалась бы имеющей производную каждая непрерывная функция, остается открытым. Повидимому, оставаясь в области действительного переменного, весьма затруднительно угадать структурные основания такого метода, если он предметно возможен.*[11]
Другими словами, А.Я.Хинчин говорит о возможности определения нетривиальных дифференцирований $D : C[0,1] \to S(0,1)$.

[11] Хинчин А. Я. Матем. сб., 1924.

На конференции, состоявшейся в 1953 году, И.Капланси спросил И.Зингера, о дифференцированиях на алгебре $C(X)$ всех непрерывных комплексно-значных функций на компактном хаусдорфовом пространстве X, снабженной поточечными алгебраическими операциями и равномерной нормой. Через день И.Зингер представил И.Капланскому короткое и красивое доказательство того, что такие дифференцирования являются 0-отображением (то есть должны отображать всю алгебру $C(X)$ в 0).[12] В частности, если дифференцирование на $C[0,1]$ переводит ее в себя, то оно тождественно равно нулю.

Важно отметить, что огромный интерес к дифференцированиям операторных алгебр возник после этого результата И.Зингера и статьи И.Капланского, опубликованной в том же 1953 году, где в частности, было показано, что каждое дифференцирование алгебры фон Неймана типа I является внутренним.[13]

[12] Kadison R. V. Surv. Differ. Geom., VII, Int. Press, Somerville 2000.

[13] Kaplansky I. Amer. J. Math., 1953.

В ходе своих рассуждений Капланский доказывает, что каждое дифференцирование равномерно непрерывно и предполагает, что эта автоматическая непрерывность верна для произвольных C^*-алгебр. Эта гипотеза была доказана через несколько лет С.Сакаи.[14]
В 1966 г. Р.В.Кэйдисон[15] и С.Сакаи[16] доказали, что каждое дифференцирование C^*-алгебры, действующее в гильбертовом пространстве H, продолжается до дифференцирования на замыкании в сильной операторной топологии этой алгебры. Более того, было показано, что всякое дифференцирование на алгебре фон Неймана является внутренним.
Дальнейшее развитие теории дифференцирований на операторных алгебрах и их приложений в квантовой теории подробно описаны в монографиях О.Брателли и Д.Робинсона,[17] и С.Сакаи.[18]

[14] Sakai S. Tohoku Math. J., 1960.
[15] Kadison R. V. Ann. of Math., 1966.
[16] Sakai S. Ann. of Math., 1966.
[17] Bratteli O., Robinson D. Operator algebras and quantum statistical mechanics. 1987.
[18] Sakai S. Operator algebras in dynamical systems. 1991.

Первые результаты в случае коммутативных алгебр фон Неймана были получены независимо в работах А.Ф.Бера, В.И.Чилина, Ф.А.Сукочева[19,20] и А.Г.Кусраева.[21,22] А именно, было показано, что алгебра $S(M)$ допускает нетривиальные дифференцирования в том и только в том случае, если решетка проекторов $P(M)$ – неатомична. В частности, было доказано, что алгебра $S(0,1)$ всех измеримых комплексных функций на интервале $(0,1)$ допускает нетривиальные дифференцирования.

Теорема 1. *Пусть* (Ω, Σ, μ) *– измеримое пространство с мерой, обладающее свойством прямой суммы. Тогда следующие условия равносильны:*

(a) *Алгебра* $S(\Omega)$ *допускает ненулевые дифференцирования.*

(b) *Измеримое пространство* (Ω, Σ, μ) *неатомично.*

[19] Бер А. Ф., Сукочев Ф. А., Чилин В. И. Матем. заметки. 2004.
[20] Бер А. Ф., Чилин В. И., Сукочев Ф. А. Extracta Math., 2006.
[21] Кусраев А. Г. Владикавказ матем. журн., 2005.
[22] Кусраев А. Г. Сиб. матем. журн., 2006.

Заметим, что классический дифференциальный оператор $\partial : C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$ может быть продолжен на всю алгебру $S(0,1)$, т.е. существует дифференцирование $\widetilde{\partial} : S(0,1) \to S(0,1)$ такое, что $\widetilde{\partial}|_{C^{(1)}[0,1]} = \partial$. Таким образом, решение проблемы Аюпова в коммутативном случае дает ответ на вопрос А.Я.Хинчина, в той форме, что существует "абстрактное расширение" классической производной до класса измеримых функций.
Для решения проблемы Аюпова в коммутативном случае были разработаны новые методы исследования дифференцирований для более общего класса алгебр, а именно, для регулярных в смысле фон Неймана коммутативных алгебр. В работе А.Ф.Бера, В.И.Чилина, Ф.А.Сукочева[23] было введено новое понятие слабо трансцендентного элемента коммутативной регулярной алгебры. В работах А.Г.Кусраева[24] и А.Е.Гутмана, А.Г.Кусраева, С.С.Кутателадзе[25] были применены методы булевозначного анализа и введено новое понятие локально алгебраически независимой системы.

[23] Бер А. Ф., Чилин В. И., Сукочев Ф. А. Extracta Math., 2006.
[24] Кусраев А. Г. Сиб. матем. журн., 2006.
[25] Гутман А. Е., Кусраев А. Г. Кутателадзе С. С. Сиб. электрон. матем. изв., 2008.

Важно отметить, что А.Г.Кусраев подошел к исследованиям дифференцирований на коммутативных регулярных алгебрах с точки зрения векторных решеток, поскольку в этом случае дифференцирования являются нерасширяющими носители элементов отображениями. Такие отображения являются важным классом более общих отображений, так называемых сохраняющие полосы отображения векторных решеток. Подход А.Г.Кусраева был связан со следующей проблемой из теории векторных решеток. В 1977 году Энтони Викстед поставил вопрос *об определения условий для того, чтобы все линейные операторы, сохраняющие полосу на векторных решетках, были автоматически непрерывны в порядковой топологии.*[26]

[26] Wickstead A. W. Compositio Math., 1977.

Следующим важным шагом в решении проблемы Аюпова было установление того, что всякое непрерывное в топологии сходимости локально по мере дифференцирование является внутренним. В частности, было показано, что дифференцирования автоматически непрерывны в случае собственно бесконечных алгебр фон Неймана.[27,28,29,30,31,32,33,34,35]

Теорема 2. *Пусть M – алгебра фон Неймана. Тогда*

(a) *всякое непрерывное в топологии сходимости локально по мере дифференцирование на $LS(M)$ (соответственно на $S(M)$) является внутренним;*

(b) *если M – собственно бесконечная алгебра фон Неймана, то всякое дифференцирование на $LS(M)$ (соответственно на $S(M)$) является внутренним.*

---

[27] Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K. Sib. Adv. Math. 2008.
[28] Гутман А. Е., Кусраев А. Г. Кутателадзе С. С. Сиб. электрон. матем. изв., 2008.
[29] Albeverio S., Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K. J. Funct. Anal. 2009.
[30] Ber A. F., De Pagter B., Sukochev F. A. J. Oper. Theory. 2011.
[31] Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K. J. Oper. Theory., 2012.
[32] Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K. Integr. Equ. Oper. Theory, 2013.
[33] Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K. J. Math. Anal. Appl., 2013.
[34] Ber A. F., Chilin V. I., Sukochev F. A. Integr. Equ. Oper. Theory, 2013.
[35] Ber A. F., Chilin V. I., Sukochev F. A. Proc. London Math. Soc., 2014.

Таким образом, к 2015 году проблема Аюпова была полностью решена для случая алгебр измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана типа I, типа II_∞ и типа III. Оставался открытым только случай алгебр фон Неймана типа II_1. В докладе известного американского специалиста по операторным алгебрам Ричарда Кэйдисона и его соавтора Ж.Лиу в 2014 году этот случай также был сформулирован как открытая проблема. А именно, как отметили Кэйдисон и Лиу, для алгебр типа II_1 *"the complete cohomological result would say that each derivation of S(M) is inner. The authors strongly feel that this is true; but it is still open".*[36,37]

[36] Kadison R. V., Liu Z. PNAS, 2014.
[37] Kadison R. V., Liu Z. Math. Scand., 2014.

Наконец, в 2019 году, т.е. почти через 20 лет, проблема Аюпова была окончательно решена в работе А. Ф. Бера, Ф. А. Сукочева и автора.[38,39]

Теорема 3. *Пусть M – произвольная алгебра фон Неймана. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *всякое дифференцирование на $LS(M)$ (соответственно на $S(M)$) является внутренним;*

(b) *прямое слагаемое типа I_{fin} алгебры M является атомической алгеброй фон Неймана.*

Подробно об истории решения Проблемы Аюпова.[40]

[38] Бер А. Ф., Кудайбергенов К. К., Сукочев Ф. А. Успехи матем. наук, 2019.
[39] Ber A. F., Kudaybergenov K. K., Sukochev F. A. J. Reine Angew. Math. (Crelles Journal) 2022.
[40] Кудайбергенов К. К., Бюллетень Института Математики, 2022.

БОЛЬШОЕ СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!