Исследование спектральных свойств дифференциальных операторов четвертого порядка

Д.М. Поляков

Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН
E-mail: DmitryPolyakow@mail.ru

Нижний Новгород-2023

Рассматривается самосопряженный дифференциальный оператор четвертого порядка $H = H(p,q)$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(0,1)$, вида

$$Hy = y^{(4)} + (py')' + qy$$

с одним из двух типов краевых условий:

$$\begin{aligned} &(a) \quad y'(0) = y'''(0) = y(1) = y''(1) = 0, \\ &(b) \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0, \end{aligned}$$

где коэффициенты p и q являются вещественными, периодическими (периода 1) и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Область определения оператора H задается следующим образом:

$$\mathrm{Dom}(H) = \{y \in L_2(0,1) : y'', y''', (y''' + py')' \in L_1(0,1), Hy \in L_2(0,1), \\ \text{краевые условия типа (a) или (b)}\}.$$

Цель: Исследовать асимптотику собственных значений оператора H и получить формулу следа в случаях (a) и (b).

Приложения:

- Уравнения четвертого порядка являются модельными уравнениями для большого класса параболических уравнений высокого порядка, возникающих, например, в статистической механике, моделях фазового поля, гидродинамике, моделях висячих мостов (см. [1], [2], [3], [4])

---

[1] Gupta C.P. Existence and uniqueness theorems for some fourth order fully quasilinear boundary value problems. Appl. Anal. 1990. V. 36. P. 157–169.

[2] Peletier L.A., Rodrigues J.A. Homoclinic orbits to a saddle-center in a fourth-order differential equation. J. Differ. Equat. 2004. V. 203. P. 185–215.

[3] Peletier L.A., Rottschäfer V. Pattern selection of solutions of the Swift-Hohenberg equation. Physica D. 2004. V. 194. P. 95–126.

[4] Tersian S., Chaparova J. Periodic and homoclinic solutions of extended, Fisher-Kolmogorov equations. C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2000. V. 331. P. 287–292.

Приложения:

- С точки зрения механики оператор H описывает колебательную систему балки, один конец которой скользит и шарнирно закреплен с другой в случае (a), и с жестко закрепленными концами в случае (b) (см. [[5]], [[6]]). При этом его собственные значения указывают на резонансные случаи, которые имеют важные приложения в оптике и акустике [[7]].

[5] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1968.

[6] Коллатц Л.М. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М.: Наука, 1968.

[7] Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.

Результаты для оператора H в случае (a) используются в теории тонких полимерных пленок. Уравнение тонкой пленки имеет следующий вид

$$\partial_t y = -\partial_x \Big(y^3 \partial_x \big(\partial_{xx} y - \Pi(y) \big) \Big),$$

где Π — потенциальная функция. Это уравнение рассматривается на интервале $[0, 1]$ с краевыми условиями

$$\partial_{xxx} y = 0, \qquad \partial_x y = 0, \qquad \text{в} \qquad x = 0, \qquad x = 1.$$

В работе [8] было доказано, что указанное уравнение сводится к спектральной задаче для оператора H.

[8] Kitavtsev G., Recke L., Wagner B. Asymptotics for the spectrum of a thin film equation in a singular limit. SIAM. J. Appl. Dyn. Syst. 2012. V. 11 (4). P. 1425–1457.

Приведем обзор результатов по спектральным свойствам дифференциальных операторов четвертого порядка.
В случае (a) для оператора H известна только работа [9], в которой исследовались изоспектральные множества этого оператора.

[9] Caudill Jr. L.F., Perry P.A., Schueller A.W. Isospectral sets for fourth-order ordinary differential operators. SIAM. J. Math. Anal. 1998. V. 29 (4). P. 935–966.

Рассмотрим случай (b).

McLaughlin [10] изучала обратную спектральную задачу для оператора H, где $p \in C^3[0,1]$, $q \in C^1[0,1]$. В частности, для собственных значений μ_n оператора H в этой работе была выписана следующая асимптотика[11]:

$$\mu_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^4 + \mathcal{O}(n^2).$$

[10] McLaughlin J.R. An inverse eigenvalue problem of order four — an infinite case. SIAM J. Math. Anal. 1978. V. 9(3). P. 395–413.

[11] см. Corollary 1 статьи выше

Такой же результат был получен З.С. Алиевым и Н.Б. Керимовым [12] (см. также работу [13]).

В работе [14] для оператора H получены оценки отклонений спектральных проекторов, а также оценки равносходимости спектральных разложений.

[12] Керимов Н.Б., Алиев З.С. О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43(7). С. 886–895.

[13] Алиев З.С., Керимов Н.Б., Мехрабов В.А. О сходимости разложений по собственным функциям одной краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях. II. Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56(3). С. 291–302.

[14] Поляков Д.М. Спектральный анализ несамосопряженного оператора четвертого порядка с негладкими коэффициентами. Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56(1). С. 138–154.

Ma, Wang, Elsanosi [15] изучали положительность и структуру спектра оператора H с $p = 0$ и $q = m^4$, где $m > 0$, а также численно вычисляли несколько первых собственных значений.

[15] Ma R., Wang H., Elsanosi M. Spectrum of a linear fourth-order differential operator and its applications. Math. Nachr. 2013. V. 286. P. 1805–1819.

Теперь приведем обзор известных результатов, касающихся дифференциального оператора четвертого порядка с другими типами краевых условий.

А.В. Баданиным и Е.Л. Коротяевым [[16]], [[17]] была получена асимптотика собственных значений и формула регуляризованного следа для самосопряженного оператора четвертого порядка с краевыми условиями типа Дирихле:

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0.$$

[16] Badanin A., Korotyaev E. Trace formula for fourth order operators on the circle. Dynamics of PDE. 2013. V. 10(4). P. 343–352.

[17] Badanin A., Korotyaev E. Trace formula for fourth order operators on unit interval. II. Dynamics of PDE. 2015. V. 12(3). P. 217–239.

Спектральные асимптотики для дифференциальных операторов высших порядков были получены в работах М.А. Наймарка [18], Э.Ф. Ахмеровой [19], А.В. Баданина и Е.Л. Коротяева [20], В.А. Михайлеца и В.В. Молибоги [21].

[18] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

[19] Ахмерова Э.Ф. Асимптотика спектра негладких возмущений дифференциальных операторов $2m$-го порядка. Матем. заметки. 2011. Т. 90(6). С. 833–844.

[20] Badanin A., Korotyaev E. Even order periodic operator on the real line. Int. Math. Res. Not. 2012. no. 5. P. 1143–1194.

[21] Mikhailets V., Molyboga V. Uniform estimates for the semi-periodic eigenvalues of the singular differential operators. Meth. Funct. Anal. Topology. 2004. V. 10(4). P. 30–57.

Напомним, что мы рассматриваем самосопряженный оператор H, действующий в $L_2(0,1)$, вида

$$Hy = y^{(4)} + (py')' + qy$$

с вещественными периодическими (периода 1) коэффициентами p, $q \in L_1(\mathbb{T})$ и одним из двух типов краевых условий:

$$\begin{aligned} &(a) \quad y'(0) = y'''(0) = y(1) = y''(1) = 0, \\ &(b) \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим невозмущенный случай $p = q = 0$.

- Случай (a).

  Тогда собственные значения оператора $H_0 y = y^{(4)}$ имеют вид:

$$\mu_n^0 = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^4, \qquad n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

  Все собственные значения являются простыми.

- Случай (b).

  В этой ситуации собственные значения μ_n^0 оператора H_0 имеют вид (см. [Corollary 1, [22]]):

$$\mu_n^0 = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^4 + \mathcal{O}(n^2), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

  В статье [Теорема 2.1, [23]] установлено, что собственные значения μ_n^0 являются простыми.

[22] McLaughlin J.R. An inverse eigenvalue problem of order four — an infinite case. SIAM J. Math. Anal. 1978. V. 9(3). P. 395–413.

[23] Керимов Н.Б., Алиев З.С. О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43(7). С. 886–895.

Через μ_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, обозначим собственные значения оператора H. Применяя теорему Руше, легко установить, что оператор H имеет ровно $N+1$ собственных значений в случае (a) и N в случае (b) в круге $\{|\lambda| < \left(\frac{\pi}{2} + \pi\left(N + \frac{1}{2}\right)\right)^4\}$ для достаточно большого целого $N \geqslant 0$. Таким образом, собственные значения μ_n внутри этого круга можно занумеровать следующим образом:

Случай (a):

$$\operatorname{Re}\mu_0 \leqslant \operatorname{Re}\mu_1 \leqslant \operatorname{Re}\mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \operatorname{Re}\mu_N.$$

Случай (b):

$$\operatorname{Re}\mu_1 \leqslant \operatorname{Re}\mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \operatorname{Re}\mu_N.$$

Введем коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(0,1)$ следующим образом:

$$f_0 = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

$$\widehat{f}_{cn} = \int_0^1 f(x)\cos\pi(2n+1)x\,dx,$$

$$\widehat{f}_{sn} = \int_0^1 f(x)\sin\pi(2n+1)x\,dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1.

Пусть p, $q \in L_1(\mathbb{T})$. Тогда собственные значения μ_n являются вещественными и простыми. Кроме того, при $n \to +\infty$ имеет место следующая асимптотика:

- Случай (a)

$$\mu_n = \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)^4 + \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)^2 (\widehat{p}_{cn} - p_0) + \mathcal{O}(n),$$

- Случай (b)

$$\mu_n = \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)^4 - \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)^2 (p_0 + \widehat{p}_{sn} + \rho_{1,n}) + \mathcal{O}(n),$$

где

$$\rho_{1,n} = \int_0^1 e^{-\pi(n+1/2)s} \big(p(s) + p(1-s)\big) \cdot \Big(e^{-\pi(n+1/2)s} - 2\sin\pi\big(n+1/2\big) - 2\cos\pi\big(n+1/2\big)\Big)\, ds.$$

Случай (а).

Теорема 2.

Если дополнительно предположить, что p''', $q' \in L_1(\mathbb{T})$, то собственные значения μ_n при $n \to +\infty$ допускают следующую асимптотику

$$\mu_n = \big(\frac{\pi}{2} + \pi n\big)^4 + \big(\frac{\pi}{2} + \pi n\big)^2 \big(\widehat{p}_{cn} - p_0\big) + \frac{p_0^2 - \|p\|^2}{8} + q_0 + \widehat{q}_{cn} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Случай (b).

Теорема 2.

Если дополнительно предположить, что $p''', q' \in L_1(\mathbb{T})$, то собственные значения μ_n при $n \to +\infty$ допускают следующую асимптотику

$$\mu_n = \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)^4 - \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)^2 \big(p_0 + \widehat{p}_{sn}\big) + 3\Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big) p(0) + \frac{p_0^2 - \|p\|^2}{8} + q_0 - \widehat{q}_{sn} - \frac{p''(0)}{2\pi(2n+1)} - \frac{4\rho_{2,n}}{\pi(2n+1)} + \frac{2q(0)}{\pi(2n+1)} + \mathcal{O}(n^{-2}),$$

где

$$\rho_{2,n} = \int_0^1 e^{-\pi(n+1/2)s} \Bigg(\frac{1}{2}\big(p'''(s) - p'''(1-s)\big) \cdot \Big(\sin \pi(n+1/2)s + \frac{e^{-\pi(n+1/2)s}}{8}\Big) + \big(q'(1-s) - q'(s)\big)\Big(\sin \pi(n+1/2)s + \frac{e^{-\pi(n+1/2)s}}{4}\Big)\Bigg)\, ds.$$

Прежде чем переходить к следующему основному результату, мы опишем известные сведения о следах дифференциальных операторов высших порядков.

С физической точки зрения след оператора — мера изменения полной энергии системы при ее возмущении в ситуации, когда сама полная энергия системы бесконечна. Это было впервые замечено при изменении свободной энергии кристалла при внедрении в него чужеродной примеси (см. [24]).

[24] Лифшиц И.М. Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой. 1952. УМН. Т. 7(1). С. 171–180.

В статье [25] был опубликован обзор результатов по следам операторов, где авторы изложили все имеющиеся подходы к решению этой задачи.

[25] Садовничий В.А., Подольский В.Е. Следы операторов. 2006. УМН. Т. 61(5). С. 89–156.

Формула следа для оператора H с $p = 0$ была получена в работе [26] (с краевыми условиями $y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0$) (см. также [27] для операторов высших порядков с гладкими коэффициентами) и в статье [28] (с периодическими краевыми условиями $y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1)$, $j = 1, 2, 3, 4$).

[26] Садовничий В.А. О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков. Матем. сб. 1967. Т. 72(2). С. 293–317.

[27] Papanicolaou V.G. Trace formulas and the behaviour of large eigenvalues. SIAM J. Math. Anal. 1995. V. 26. P. 218–237.

[28] Bayramov A., Oer Z., Öztürk Uslu S., Kizilbudak Caliskan S. On the regularized trace of a fourth order regular differential equation. Int. J. Contemp. Math. Sci. 2006. V. 1. P. 245–254.

А.И. Назаров, Д.М. Столяров, П.Б. Затицкий [29] получили общую формулу следа для дифференциального оператора произвольного порядка на отрезке, возмущенного оператором умножения на потенциал.

[29] Nazarov A.I., Stolyarov D.M., Zatitskiy P.B. Tamarkin equiconvergence theorem and trace formula revisited. J. Spect. Theory. 2014. V. 4. P. 365–389.

А.В. Баданин и Е.Л. Коротяев [30] получили формулу следа для оператора четвертого порядка с краевыми условиями типа Дирихле

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0.$$

[30] Badanin A., Korotyaev E. Trace formula for fourth order operators on unit interval. II. Dynamics of PDE. 2015. V. 12. P. 217–239.

Рассмотрим оператор $H_t = H(p_t, q_t)$ со сдвигом, где $t \in \mathbb{T}$ и $p_t = p(\cdot + t)$, $q_t = q(\cdot + t)$. Через $\mu_n(t)$ мы будем обозначать собственные значения оператора H_t. При этом $\mu_n(0)$ являются собственными значениями оператора H.

Теорема 3.

Пусть $p'''', q'' \in L_1(\mathbb{T})$. Тогда имеет место следующая формула следа:

Случай (a).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big(\mu_n(t)-\mu_n(0)\big)=0,$$

Случай (b).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\bigg(\mu_n(t)-\mu_n(0)-3(p(t)-p(0))\Big(\frac{\pi}{2}+\pi n\Big) + \frac{p''(t)-p''(0)}{2\pi(2n+1)}-\frac{2(q(t)-q(0))}{\pi(2n+1)}\bigg) = \frac{p''(t)-p''(0)}{2}+q(0)-q(t)+\frac{p^2(t)-p^2(0)}{4}.$$

Приведенные ряды сходятся абсолютно и равномерно на $\mathbb{T}$.

В пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим самосопряженный оператор четвертого порядка $H = H(0,q)$ вида

$$Hy = y^{(4)} + qy, \qquad y'(0) = y'''(0) = y'(1) = y'''(1) = 0,$$

где q — вещественный потенциал и $q \in L^1(0,1)$. Область определения оператора задается следующим образом

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(H) = \{y \in L_2(0,1) : y'', y''', y^{(4)} \in L_1(0,1), Hy \in L_2(0,1),\\ y'(0) = y'''(0) = y'(1) = y'''(1) = 0\}.\end{aligned}$$

Цель: Исследовать асимптотику собственных значений оператора H и получить формулу следа для этого оператора.

Основная мотивировка исследований:

Формула следа для оператора H с операторным коэффициентом исследовалась в работах:

Gül E. The trace formula for a differential operator of fourth order with bounded operator coefficients and two terms. Turk. J. Math. 2004. V. 28. P. 231–254.

Gül E., Ceyhan A. A second regularized trace formula for a fourth order differential operator. Symmetry. 2021. V. 13(4). P. 629.

А.В. Бадaниным и Е.Л. Коротяевым [31] была получена асимптотика собственных значений для оператора H с периодическими краевыми условиями. Выделим также работу В.А. Михайлеца и В.В. Молибоги [32], в которой выписывалась асимптотика собственных значений для двучленного сингулярного оператора четного порядка с периодическими краевыми условиями. Кроме того, Ma, Wang, Elsanosi [33] изучали положительность и структуру спектра оператора H с краевыми условиями типа Неймана, а также численно вычисляли несколько первых собственных значений.

[31] Badanin A., Korotyaev E. Spectral asymptotics for periodic fourth-order operators. Int. Math. Res. Not. 2005. № 45. P. 2775–2814.

[32] Mikhailets V., Molyboga V. Uniform estimates for the semi-periodic eigenvalues of the singular differential operators. Meth. Funct. Anal. Topology. 2004. V. 10(4). P. 30–57.

[33] Ma R., Wang H., Elsanosi M. Spectrum of a linear fourth-order differential operator and its applications. Math. Nachr. 2013. V. 286. P. 1805–1819.

Напомним, что коэффициенты Фурье некоторой функции $f \in L_1(0,1)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} f_0 &= \int_0^1 f(x)\,dx, \\ \widehat{f}_{cn} &= \int_0^1 f(x)\cos 2\pi nx\,dx, \\ \widehat{f}_{sn} &= \int_0^1 f(x)\sin 2\pi nx\,dx, \qquad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Теорема 4.

Пусть $q \in L_1(0,1)$. Тогда собственные значения μ_n являются вещественными и простыми. Кроме того, при $n \to +\infty$ имеет место следующая асимптотика:

$$\mu_n = (\pi n)^4 + q_0 + \widehat{q}_{cn} + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

Если дополнительно предположить, что $q' \in L_1(0,1)$, то собственные значения удовлетворяют следующей асимптотике

$$\mu_n = (\pi n)^4 + q_0 + \widehat{q}_{cn} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Рассмотрим оператор $H_t = H(0, q_t)$ со сдвигом, где $t \in \mathbb{T}$ и $q_t = q(\cdot + t)$. Через $\mu_n(t)$ мы будем обозначать собственные значения оператора H_t. При этом $\mu_n(0)$ являются собственными значениями оператора H.

Теорема 5.

Пусть $q'' \in L_1(\mathbb{T})$. Тогда имеет место следующая формула следа:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(\mu_n(t) - \mu_n(0)\big) = \frac{q(t) - q(0)}{2}.$$

Приведенный ряд сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{T}$.

Статьи по теме:

- Шевченко Р.Ф. О следе дифференциального оператора. Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, №1. С. 62–65.
- Papanicolaou V.G. Trace formulas and the behaviour of large eigenvalues. SIAM J. Math. Anal. 1995. V. 26. P. 218–237.
- Nazarov A.I., Stolyarov D.M., Zatitskiy P.B. Tamarkin equiconvergence theorem and trace formula revisited. J. Spect. Theory. 2014. V. 4. P. 365–389.
- Гальковский Е.Д., Назаров А.И. Общая формула следов для дифференциального оператора на отрезке при возмущении младшего коэффициента конечным зарядом. Алгебра и анализ. 2018. Т. 30, №3. С. 30–54.
- Гальковский Е.Д., Назаров А.И. О формуле следов для обыкновенных дифференциальных операторов высокого порядка. Матем. сб. 2021. Т. 212, №5. С. 80–101.

Рассматривается дифференциальный оператор четвертого порядка $S = S(q)$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(0,1)$, вида

$$Sy = y^{(4)} + qy$$

со следующими краевыми условиями:

$$y(0) = y''(0) = y''(1) = y'''(1) + \lambda y(1) = 0,$$

где λ — спектральный параметр и q — вещественный потенциал, причем $q \in L_1(0,1)$. Область определения оператора S задается следующим образом:

$$\mathrm{Dom}\,(S) = \{y \in L_2(0,1) : y'', y''', y^{(4)} \in L_1(0,1), y^{(4)} + qy \in L_2(0,1),$$
$$y(0) = y''(0) = y''(1) = y'''(1) + \lambda y(1) = 0\}.$$

Цель: Исследовать асимптотику собственных значений оператора S и получить формулу следа.

Напомним, что с физической точки зрения уравнение четвертого порядка описывает изгибные колебания пластин, оболочек или стержней. Рассматриваемые в настоящей статье краевые условия соответствуют тому, что левый конец стержня закреплен шарнирно, а на правом конце сосредоточена инерционная масса (см. [[34]]).

[34] Roseau M. Vibrations in mechanical systems. Analytical methods and applications. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

Спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных операторов со спектральным параметром в граничных условиях были рассмотрены в работе [35]. Для этих операторов были установлены наиболее общие результаты о базисности собственных и присоединенных функций.

[35] Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений со спектральным параметром в граничных условиях. Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.

Спектральные свойства дифференциального оператора четвертого порядка общего вида с различными типами граничных условий изучались в работах

Möller M., Pivovarchik V. Spectral properties of a fourth order differential equation. J. Anal. Appl. 2006. V. 25. P. 341–366.

Möller M., Zinsou B. Self-adjoint fourth order differential operators with eigenvalue parameter dependent boundary conditions. Quaest. Math. 2011. V. 34(3). P. 393–406.

Möller M., Zinsou B. Spectral asymptotics of self-adjoint fourth order differential operators with eigenvalue parameter dependent boundary conditions. Complex Anal. Oper. Theory. 2012. V. 6. P. 799–818.

Möller M., Zinsou B. Asymptotics of the eigenvalues of self-adjoint fourth order differential operators with separated eigenvalue parameter dependent boundary conditions. Rocky Mount. J. Math. 2017. V. 47(6). P. 2013–2042.

Базисные свойства собственных и присоединенных функций были исследованы в работах

Керимов Н.Б., Алиев З.С. Базисные свойства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. Матем. сб. 2006. Т. 197. № 10. С. 65–86.

Керимов Н.Б., Алиев З.С. О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 7. С. 886–895.

Алиев З.С. Базисные свойства в пространстве L_p систем корневых функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 764–775.

Aliyev Z.S., Mamedova G.T. Some properties of eigenfunctions for the equation of vibrating beam with a spectral parameter in the boundary conditions. J. Differ. Equat. 2020. V. 269. P. 1383–1400.

Алиев З.С., Керимов Н.Б., Мехрабов В.А. О сходимости разложений по собственным функциям одной краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях. I. Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 2. С. 147–161.

Алиев З.С., Керимов Н.Б., Мехрабов В.А. О сходимости разложений по собственным функциям одной краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях. II. Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 3. С. 291–302.

Через μ_n, $n \in \mathbb{N}$, обозначим собственные значения оператора S. В статье [36] рассматривается краевая задача для оператора S с неограниченным операторным коэффициентом. Для него была получена следующая асимптотика

$$\mu_n = (\pi n)^4 + \mathcal{O}(n^2), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

[36] Aslanova N.M., Bayramoglu M., Aslanov Kh.M. Some spectral properties of fourth order differential operator equation. Oper. Matr. 2018. V. 12, №1. P. 287–299.

Рассмотрим невозмущенный случай $q = 0$. В этой ситуации собственные значения μ_n^0 оператора $S_0 y = y^{(4)}$ имеют вид (см. [§ 2, [37]], [Теорема 3.1, [38]]):

$$\mu_n^0 = (\pi n)^4 + \mathcal{O}(n^2), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что все собственные значения μ_n^0, $n \in \mathbb{N}$, являются вещественными и простыми[39].

[37] Aslanova N.M., Bayramoglu M., Aslanov Kh.M. Some spectral properties of fourth order differential operator equation. Oper. Matr. 2018. V. 12, №1. P. 287–299.

[38] Керимов Н.Б., Алиев З.С. О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, №7. С. 886–895.

[39] Лемма 2.2 в статье выше

Применяя теорему Руше, легко установить, что оператор S имеет ровно N собственных значений в круге $\{|\lambda| < \pi^4 \big(N + 1/2\big)^4\}$ для достаточно большого целого $N \geqslant 0$. Таким образом, собственные значения μ_n внутри этого круга можно занумеровать следующим образом:

$$\operatorname{Re}\mu_1 \leqslant \operatorname{Re}\mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \operatorname{Re}\mu_N.$$

Введем коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(0,1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} f_0 &= \int_0^1 f(x)\,dx, \\ \widehat{f}_{cn} &= \int_0^1 f(x)\cos 2\pi nx\,dx, \\ \widehat{f}_{sn} &= \int_0^1 f(x)\sin 2\pi nx\,dx, \qquad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Теорема 6.

Пусть $q \in L_1(0,1)$. Тогда собственные значения μ_n при $n \to +\infty$ оператора S допускают следующую асимптотику

$$\mu_n = (\pi n)^4 + 2(\pi n)^2 - \pi n + \frac{5}{6} + q_0 - \widehat{q}_{cn} + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

Если дополнительно предположить, что $q' \in L_1(0,1)$, то

$$\mu_n = (\pi n)^4 + 2(\pi n)^2 - \pi n + \frac{5}{6} + q_0 - \widehat{q}_{cn} + \mathcal{O}(n^{-2}),$$

при $n \to +\infty$.

В теореме 6 получен более точный результат, чем в статье [Theorem 1, [40]]. В упомянутой работе установлена только асимптотика

$$\mu_n = (\pi n)^4 + \mathcal{O}(n^2), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

[40] Aslanova N.M., Bayramoglu M., Aslanov Kh.M. Some spectral properties of fourth order differential operator equation. Oper. Matr. 2018. V. 12, №1. P. 287–299.

Предположим, что потенциал q является периодическим. Рассмотрим оператор со сдвигом $S_t = S(q_t)$, где $q_t = q(\cdot + t)$, $t \in \mathbb{T}$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Через $\mu_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, мы обозначим собственные значения оператора S_t.

Теорема 7.

Пусть $q'' \in L_1(\mathbb{T})$. Тогда имеет место следующая формула следа:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(\mu_n(t) - \mu_n(0)\big) = \frac{q(0) - q(t)}{2}.$$

При этом данный ряд сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{T}$.

Большое спасибо за внимание!

Работы по теме доклада:

Polyakov D.M. Spectral asymptotics and a trace formula for a fourth-order differential operator corresponding to thin film equation. Monatshefte für Mathematik.
DOI: 10.1007/s00605-022-01808-9

Поляков Д.М. О спектральных свойствах самосопряженного оператора четвертого порядка. Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 2. С. 164–169.

Polyakov D.M. Sharp eigenvalue asymptotics of fourth-order differential operators. Asymptotic Analysis. 2022. V. 130. P. 477–503.

Поляков Д.М. Спектральные свойства двучленного оператора четвертого порядка со спектральным параметром в граничном условии. Сиб. матем. журн. 2023. Т. 64. № 3. С. 611–634.