МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ
для абитуриентов, учащихся, учителей

В. Н. Дятлов

Этюд 3
Уравнения, неравенства, системы. Соотношения с корнями (радикалами)

Новосибирск • 2019

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ
для абитуриентов, учащихся, учителей

В. Н. Дятлов

Этюд 3
Уравнения, неравенства, системы.
Соотношения с корнями (радикалами)

Новосибирск
Издательство Института математики
2019

УДК 373.167.1:51
ББК 22.141
Д998

Дятлов В. Н.

Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 3. Уравнения, неравенства, системы. Соотношения с корнями (радикалами). Второе издание / В. Н. Дятлов — Новосибирск: Издательство Института математики, 2019. — 76 с.: ил.

ISBN 978–5–86134–224–7

Излагается подход к понятиям уравнения и неравенства. На его основе дается новое понятие соотношения, обобщающее понятия уравнения, неравенства, системы. На базе необходимых условий формируется новое понятие ограничения и предлагается концепция переходов к равносильным соотношениям. Материал иллюстрирован примерами, содержащими модули или корни. Завершает этюд параграф о системах уравнений.

Для абитуриентов, учащихся, учителей.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.141
Д998

Д $\frac{1601000000\text{–}01}{\text{Я}82(03)\text{–}19}$ Без объявл.

ISBN 978–5–86134–224–7

Dixi et animam levavi
(Сказал и облегчил тем душу)

ПРЕДИСЛОВИЕ К СЕРИИ

Представьте себе, что вы получили задачу по математике и ваша цель — ее решить. Что делать, с чего начать, как продолжить и в чем заключается результат? В серии пособий «Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей», каждое из которых посвящено какой-либо одной, но достаточно широкой теме, делается попытка показать, как можно организовать процесс решения задач, причем разного уровня сложности.

Материал этюдов скорее похож на беседу с читателем, в которой он — один из активных участников, чем на наставления в телеграфном стиле типа «делай так» или «делай, как мы». Это достигается, в частности, благодаря тому, что в процессе решения ставятся вопросы, уместные на соответствующем шаге решения, и приводятся рассуждения, направленные на поиск ответа. Для часто встречающихся ситуаций предложены схемы, состоящие из подходящих вопросов и вариантов ответов на них. Варьируя вопросы и ответы, можно анализировать задачи, близкие к базовым.

Этюды максимально независимы один от другого и от материала учебников и пособий для абитуриентов. Поэтому сообщается практически вся теоретическая информация, требуемая для решения задач на тему каждого этюда. Минимизация обращения к учебникам не означает, что этюды заменяют учебник. В них материал учебников развивается, дополняется, уточняется и, надеемся, становится более ясным. В некоторых случаях предложены подходы, не представленные в учебниках, но эффективные при решении задач.

Отдельные книжки серии названы этюдами по аналогии с музыкальными этюдами как пьесами для отработки той или иной техники, а также с этюдами в живописи как зарисовками, не претендующими на полноту и завершенность. Каждый из этюдов можно дополнять, расширять, углублять и т. д. Однако на чем-то надо было останавливаться, и то, что в каждом этюде предложено, — это результат авторской остановки.

Подавляющее большинство примеров взяты из вступительных экзаменов в Новосибирский государственный университет (в основном с экзаменационных листков, так что, возможно, не все они опубликованы в книгах [1, 2]), а также из широко распространенных пособий для абитуриентов. Наборы предлагаемых упражнений небольшие, иногда их нет совсем, и они помогают лишь почувствовать, как следует применять изложенные рекомендации. Для приобретения устойчивых навыков в решении задач надо прорешать их значительно больше (задачи можно найти в разнообразных доступных пособиях).

Несколько слов о системе нумерации. Номер параграфа состоит из двух чисел, разделенных точкой. Первое совпадает с номером этюда, второе указывает порядковый номер параграфа в этюде. В номере пункта к номеру параграфа, в котором данный пункт расположен, справа добавляется порядковый номер пункта.

Нумерация выделенных формул либо двойная, либо одинарная. Если формула имеет отношение только к тому примеру, в котором она появляется, у нее номер одинарный. Если формула имеет отношение к материалу параграфа вообще, то у нее номер двойной, в котором на первом месте стоит порядковый номер параграфа в этюде, на втором — порядковый номер формулы в параграфе. Номер этюда в номерах формул не участвует.

Если у вас появятся какие-либо конструктивные замечания или пожелания по содержанию этюдов, предлагаем сообщить их по электронной почте по адресу vndyatlov@gmail.com.

Новосибирск, Академгородок, 2008 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ СЕРИИ

Со времени выхода первой книжки [8] из серии этюдов прошло много лет. За это время отдельные стороны изложенного материала приобрели новые оттенки, какие-то подверглись существенному уточнению, осмыслению и изменению. Назрела потребность высказаться еще раз, зафиксировав накопленный за эти годы опыт. Основной мотив, побудивший к изменениям, следующий.

Наблюдения за характером изучения материала привели к пониманию необходимости несколько иной по сравнению с традиционной структуре учебных материалов. Кроме обычных теории и практики было предложено помещать между ними технологическую часть с описанием средств, использование которых позволяет эффективно выбирать путь решения задач на основе теоретического материала. Основные принципы трехчастной организации учебного материала описаны в [6]. Коротко их напомним, процитировав [6].

«Обычно учебный материал состоит из двух частей: теории, включающей в себя основные понятия и факты, и практики, состоящей из примеров и упражнений. В теории закладываются основы понятийного поля (знания), в практической части путем решения задач формируются компетенции (умения и навыки), основанные на теоретическом материале. Предполагается, что в результате обучающийся должен научиться решать задачи, формулируемые в терминах изложенного теоретического материала. Вместе с тем любой набор примеров конечен, и если поставленная задача не соотносится ни с одним из рассмотренных примеров, то встает проблема поиска путей ее решения.

Для формирования навыков решения задач предлагается традиционную структуру учебного материала дополнить промежуточной между теорией и практикой частью, включив в нее совокупность правил, руководствуясь которыми можно выяснить целесообразность применения данного фрагмента теории к решению конкретной задачи, и если таковая есть, составить путь решения.

О наборе правил, алгоритмов, методов, основанных на теоретическом материале и применяемых для решения задач, будем говорить как о *технологической составляющей* учебного материала. Таким образом, предлагается использовать трехчастную структуру учебных материалов: теория — технологии — практика.

Исходя из опыта применения такой структуры в учебном процессе, можно сказать, что для эффективности технологической части желательно, чтобы она удовлетворяла определенным требованиям.

1. Необходимы средства распознавания применимости того или иного метода к решению данной задачи. Такие средства должны состоять из достаточно легко проверяемых особенностей, позволяющих в случае их наличия в постановке задачи с высокой степенью определенности принять решение о выборе данного метода для анализа задачи.

Выбор метода является ответственным шагом. От него нередко зависит успех в решении задачи. Поэтому механизм распознавания — существенное звено в технологической составляющей.

2. Желательно представлять правила в виде набора шагов, каждый из которых должен либо состоять из вопроса, в результате ответа на который происходит выбор дальнейших действий, либо содержать исполняемые действия, т. е. такие рекомендации, которые могут быть выполнены без дополнительных разъяснений при определенной предварительной подготовке.

Умение ставить вопросы не менее важно, чем способность давать на них ответы. Чем уместнее вопрос, тем содержательнее и эффективнее на него ответ, и тем больше шансов решить поставленную задачу. Стиль работы над задачей, при котором деятельность сопровождается вопросами, придает динамику и направленность процессу решения. Для того чтобы научить ставить вопросы, надо обеспечить обучающихся обозримым набором вопросов, которые желательно задавать в соответствующих ситуациях.

Разумеется, каждый вопрос предполагает поиск ответа, и надо предложить набор возможных ответов, достаточно представительный для выбора очередного шага. Система постановки вопросов и поиска ответов на них приводит к целенаправленному разветвлению процесса решения задачи, позволяет ставить цели и идти к ним.

Разбиение решения на исполняемые шаги повышает активность учащегося, так как позволяет свести задачу к выполнению доступных ему действий.

3. Весьма желательно иметь признаки завершения решения. Даже в самых простейших ситуациях надо понимать, какова цель, какого вида может или должен быть ожидаемый результат, каковы отличительные признаки этого результата. Такие признаки позволяют быть уверенным в завершенности решения задачи.

Наличие правил, обладающих перечисленными свойствами, позволяет организовывать решение задачи как целенаправленный процесс, мотивированно намечать последовательность действий, способную привести к решению, выбирать очередной шаг, исполнять его и переходить к следующему, и действовать так либо до решения задачи, либо до осознания того, что выбранный путь к решению не приведет. Во всяком случае организация решения как серии мотивированных действий лучше, чем выполнение случайных операций. Желательно руководствоваться принципом: ни одного немотивированного действия! Каждый шаг должен быть чем-то вызван.

Технологическая составляющая при изучении предмета приводит к повышению инициативы обучаемого. Она формирует способность к поиску путей решения вместо ожидания демонстрации примеров, простым повторением которых решаются задачи, побуждает обращаться к теоретическому материалу. При такой организации материала меняется традиционная направленность процесса «от преподавателя к обучаемому» на противоположную, т. е. «от обучаемого к преподавателю». Активным участником процесса может стать обучаемый, преподаватель может оказаться в роли консультанта, партнера, готового проанализировать, прокомментировать и оценить целесообразность предлагаемых обучаемым действий.

Более того, наличие технологической составляющей в учебном материале позволяет достаточно эффективно использовать его для самостоятельного изучения предмета, в результате обучаемый привыкает к чтению учебной (а в будущем и научной) литературы, а формирование способности получения знаний из литературы является одной из главных задач всего процесса образования.»

Тематика этюдов осталась прежней, а стиль изложения и содержательная часть иногда подверглись изменениям с учетом новых подходов.

Новосибирск, Академгородок, 2019 г.

Предисловие к второму изданию этюда

Этюд посвящен одному из основных объектов математики — уравнениям и неравенствам. Эти понятия составляют основу многих разделов математики. Они неизбежно появляются при построении математических моделей, ибо таковые нередко состоят в выражении какой-то величины двумя различными способами и сопоставлении результатов, записанном чаще всего в виде равенства, иногда в виде неравенства. Вместе с тем традиционная точка зрения на уравнение как равенство между функциями не свободна от недостатков. Например, как ответить на вопрос: почему квадратное уравнение обычно решают, а уравнение прямой или плоскости — нет? Кроме того, что значит фраза «найти все его (уравнения) корни ... »? Что должно быть результатом поиска и как этот поиск организовать? В этом этюде предложен основанный на понятии множества подход к определению уравнения и неравенства, введено понятие соотношения, вбирающее в себя понятия уравнения, неравенства, системы и совокупности, и выработан механизм анализа соотношений, позволяющий системно прокладывать путь решения основных встречающихся в школьном курсе уравнений и неравенств.

Использование предложенных подходов здесь демонстрируется на классе уравнений и неравенств с корнями (радикалами). Другим типам соотношений, а именно тригонометрическим, показательным и логарифмическим, посвящены этюды [3, 7].

Завершает этюд небольшой параграф, в котором речь идет о простейших средствах решения систем уравнений с двумя или тремя переменными. Он не претендует на полноту изложения и какую-то оригинальность, и предназначен для первичного знакомства с системами.

Второе издание этюда заметно переработано ввиду уточнения базовых понятий и новой трехчастной форме организации материала. Набор примеров, демонстрирующих использование предлагаемых рекомендаций, остался прежним. После выхода первого издания этюда [8] изложенный в нем материал был уточнен и дополнен в статьях [4, 5].

Новосибирск, Академгородок, 2019 г.

§ 3.1. Общие методы анализа уравнений и неравенств

ТЕОРИЯ

В основе языка современной математики лежит понятие множества. Это первичное понятие математики, формируемое через создание единообразного представления о том, что такое множество. *Множеством* называют любой набор объектов, который можно рассматривать как единое целое. Иначе говоря, многие объекты, собранные по определеному признаку, образуют новый объект — множество, состоящее из данных объектов. Тем самым среди объектов какие-то в данном контексте считаются отдельными, неделимыми, а некоторые — множествами, состоящими из других объектов, называемых элементами множеств. Основное относящееся к понятию множества свойство — это задание множества путем указания каким-либо способом всех составляющих его элементов.

Есть несколько способов задания множеств. Если множество небольшое, то его можно задать прямым указанием его элементов, при этом множество обозначается путем записи его элементов, ограниченной слева и справа фигурными скобками. Так, множество, элементами которого являются объекты x, y, обозначается через $\{x, y\}$ (или, что, разумеется, то же, $\{y, x\}$). Однако бывают множества, включающие столь много элементов, что перечислить их не представляется возможным. Тогда используют какие-то другие способы описания множества. Самый распространенный — это указание свойства, которым должны обладать все элементы данного множества (и только они). Если A — некоторое множество, а $P(x)$ — свойство (т. е. повествовательное предложение, истинность которого зависит от выбора элемента x), то символом $\{x \in A : P(x)\}$ обозначают подмножество (т. е. часть) множества A, состоящее из всех $x \in A$, для которых $P(x)$ верно. Запись $\{x : P(x)\}$ для задания множества, где P — определяющее его свойство, читается так: множество элементов x, для которых верно свойство $P(x)$.

В конкретных ситуациях используют разнообразные способы и обозначения для задания множеств. Например, в множестве всех вещественных чисел рассматривают промежутки, т. е. множества вида

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}, \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}, \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}.$$

Часто характеризующее множество свойство записывают в виде равенства или неравенства, и это приводит к понятиям уравнения и неравенства.

Определение 1.1. *Уравнением* (*неравенством*) будем называть выражение, состоящее из двух связанных знаком равенства (неравенства) функций и предназначенное для описания множества, а именно множества всех тех объектов, для которых данное функциональное равенство (неравенство) становится верным равенством (неравенством).

Элементы множества, задаваемого данным уравнением или неравенством, будем называть его *решениями*. Тем самым описываемое уравнением или неравенством множество есть множество его решений (для уравнений нередко используют термин «корень» вместо «решение»).

Объекты, описываемые уравнением или неравенством, называют *неизвестными* или *переменными*. В школьном курсе зачастую в качестве объектов выступают вещественные числа, и тогда говорят об уравнении или неравенстве с одной (вещественной) переменной. В достаточно общем виде такое уравнение можно записать так: $f(x) = 0$, или так: $f(x) = g(x)$, где f, g — числовые функции. Описываемое уравнением или неравенством множество может в качестве элементов иметь упорядоченные пары или тройки чисел вида (x, y) или (x, y, z). В таком случае говорят об уравнении или неравенстве с двумя или тремя вещественными переменными и, например, уравнения с двумя или тремя неизвестными можно записать в виде $f(x, y) = 0$ или соответственно $f(x, y, z) = 0$. Термин «переменная (величина)» не стоит понимать буквально в том смысле, что ее надо как-то изменять. Имеется в виду тот факт, что на место вхождения переменной (неизвестной) можно подставить любое ее значение, при котором значения участвующих в уравнении или неравенстве функций могут быть вычислены, и можно судить о выполнении или невыполнении соответствующего числового выражения.

Для равенства функций иногда применяют термин «тождество». Можно считать, что различие между уравнением и тождеством в приоритетах, в том, какое описание множества дано и какое ожидается, что первично, а что вторично. Если первично задание множества в виде равенства, которому удовлетворяют все элементы описываемого множества, и либо ставится цель перейти к наиболее простому способу задания этого множества, либо констатируется возможность использования данного равенства, то это равенство называют уравнением. Если же сначала задается множество, а затем указывается равенство, которому удовлетворяют элементы данного множества, то такое равенство называют *тождеством.*

Например, можно поставить задачу «решить уравнение $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$» и сказать, что множеством его решений будет множество всех вещественных чисел. В таком контексте указанное равенство имеет статус уравнения. Если же сказать, что для всех вещественных x выполнено равенство $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, то его называют тождеством.

Для множеств есть операции пересечения и объединения. Они соответствуют союзам «и» и «или» на языке высказываний. Вместе с терминологией, отражающей операции пересечения и объединения множеств, на языке высказываний удобно определить понятие, вбирающее в себя понятия уравнения и неравенства и получаемые из них конфигурации.

Определение 1.2. Математические выражения, которые можно отнести к какому-либо из следующих ниже пунктов 1–3, будем называть *соотношениями*:

1) уравнения и неравенства являются соотношениями;

2) конечный набор соотношений, предназначенный для описания пересечения множеств, задаваемых соотношениями данного набора, является соотношением, называемым *системой данного набора соотношений*;

3) конечный набор соотношений, предназначенный для описания объединения множеств, задаваемых соотношениями данного набора, является соотношением, называемым *совокупностью данного набора соотношений.*

Таким образом, каждое соотношение задает описываемое им множество, называемое *множеством его решений.*

Определение 1.3. *Решить соотношение* означает дать в каком-то смысле наиболее простое описание множества его решений, т. е. множества всех объектов, обладающих указанным в соотношении свойством. Под наиболее простым способом будем понимать такое задание, которое не поддается естественному упрощению.

Сопоставим общепринятый подход к понятию, например, уравнения и его решения и предлагаемый здесь. Обычно понятие уравнения ограничивается констатацией наличия равенства между функциями, без указания целеполагания, и сопровождается понятием «решить уравнение». Обычно решить уравнение означает найти все его корни или доказать, что их нет. При таком разъяснении может возникнуть вопрос: что значит «найти корни», что для этого надо делать и в чем заключается результат, т. е. при каких обстоятельствах можно гарантировать, что задача решена, т. е. корни найдены, в чем состоит признак завершения процесса? Как их искать — с помощью какого-то прибора, который естественно было бы назвать «корнеискателем», или как-то иначе? При традиционном определении этот вопрос остается открытым.

Согласно определению термина «решить соотношение» результатом процесса решения должно быть наиболее простое описание множества, задаваемого исходным соотношением. В чем выражается наибольшая простота можно договариваться заранее. Это может быть описание множества путем перечисления всех его элементов или указания всех промежутков, из которых это множество состоит. Иногда само уравнение, например такое как $x + y = 1$, можно считать наиболее простым способом описания множества. Тогда можно не ставить задачу его решения (обычно так и поступают, не ставя задачи найти множество решений уравнения прямой или плоскости). Для уравнения $|x - 1| + |x + 1| = 2$ в качестве наиболее простого описания задаваемого им множества служит промежуток $[-1, 1]$.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено иное, будем вести речь о решениях соотношения в множестве вещественных чисел. В частности, тот факт, что соотношение не имеет решений, будет означать, что оно не имеет вещественных решений.

Поскольку соотношение неразрывно связано с множеством его решений, важны понятия, отражающие взаимодействие множеств решений двух соотношений.

Определение 1.4. Два соотношения называют *равносильными* (или *эквивалентными*), если описываемые ими множества, т. е. множества их решений, совпадают. Это значит, что либо оба соотношения не имеют решений, либо каждое решение одного из соотношений будет решением другого и каждое решение второго соотношения будет решением первого.

Если каждое решение первого соотношения будет решением второго, т. е. если второе соотношение описывает более широкое по сравнению с первым множество, то говорят, что второе является *следствием* первого.

Покажем на примере уравнений, как символами записывают равносильность и следствие.

Пусть даны, к примеру, уравнения $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$. Их равносильность записывается так:

$$f_1(x) = 0 \longleftrightarrow f_2(x) = 0,$$

или так:

$$f_1(x) = 0 \Longleftrightarrow f_2(x) = 0.$$

Тот факт, что уравнение $f_2(x) = 0$ является следствием уравнения $f_1(x) = 0$, записывают так:

$$f_1(x) = 0 \longrightarrow f_2(x) = 0,$$

или так:

$$f_1(x) = 0 \Longrightarrow f_2(x) = 0.$$

Используя введенные понятия, можно сказать, что процесс решения соотношения желательно организовать как цепочку переходов (в результате некоторых преобразований) от одного соотношения к другому с сохранением описываемого соотношением множества, т. е. равносильных переходов. Признак завершения процесса — получение наиболее простого способа задаваемого соотношением множества. Если на каждом шаге проводимые преобразования приводили к равносильным соотношениям, можно утверждать, что множество решений полученного в результате соотношения будет множеством решений исходного.

Если на каком-то шаге осуществляется переход к следствию, то в множестве решений последнего соотношения могут оказаться значения неизвестной, не являющиеся решениями исходного соотношения, и тогда требуется проведение проверки (если это возможно) для исключения тех элементов, которые не являются решениями исходного соотношения. Если невозможно проверить, какие из решений итогового соотношения будут удовлетворять исходному (так бывает обычно при решении неравенства), то переход к следствию недопустим ни на каком из шагов преобразования и надо на каждом шаге обеспечивать равносильные преобразования. О том, как это можно сделать, речь пойдет в следующем пункте.

Далеко не всегда ставится задача решить данное соотношение. Возможно, что само соотношение уже дано в виде, не допускающем упрощения. Например, как отмечено выше, уравнение прямой на плоскости или плоскости в пространстве не решают, ибо неясно, что значить «более простое» описание задаваемых ими множеств. Такого рода уравнения, скорее, предназначены для использования в качестве характеристики элементов задаваемого соотношением множества.

Сформируем процедуру перехода от одного соотношения к другому, равносильному данному, т. е. процедуру равносильных переходов. Она будет основана на анализе ограничений (необходимых условий), сопровождающих данное соотношение.

Прежде чем дать понятие ограничения, приведем наводящие соображения. Термин «ограничение» будет употребляться для выражения необходимых условий, вытекающих из того факта, что данное значение неизвестной является решением данного соотношения.

Будем рассуждать так. Пусть рассматривается некое соотношение относительно неизвестной x, и пусть требуется проверить, будет ли какое-то значение x решением этого соотношения. При такой проверке надо совершить определенные действия. Сначала надо найти значения всех участвующих в соотношении функций, затем составить из этих значений предписанное соотношением числовое выражение и констатировать, окажется оно верным числовым выражением для данного значения x или нет. На каждом шаге этого процесса возникают свои требования к рассматриваемому значению неизвестной. Иначе говоря, появляются необходимые условия того, что x — решение соотношения (или, как иногда говорят, выводятся следствия из предположения о том, что x — решение). Такие требования (необходимые условия) могут быть связаны с разными обстоятельствами, но чаще всего они есть. Эти требования надо учитывать в процессе решения, и их учет на каждом шаге решения позволяет обеспечить равносильные переходы.

Определение 1.5. Требования к значениям неизвестной, вытекающие из предположения о том, что эти значения являются решениями соотношения, будем называть *ограничениями, сопровождающими данное соотношение.*

Будем различать ограничения по крайней мере трех типов:
- ограничения, связанные с областью определения,
- ограничения, связанные с множеством значений,
- общие ограничения, вызванные видом соотношения.

Обсудим каждый из этих типов.

Ограничения на неизвестные, состоящие из требований их принадлежности областям определения всех участвующих в соотношении функций, будем называть *ограничениями, связанными с областью определения.* Этот тип ограничений вызван учетом областей определения всех входящих в соотношение функций и широко распространен, а именно, область изменения неизвестной, выделяемую требованиями принадлежности областями определения, обычно называют *областью допустимых значений* (ОДЗ), имеется в виду неизвестной.

Кроме области определения у каждой функции есть множество значений, и его тоже нужно учитывать, но не на этапе возможности нахождения значений функций, а на этапе сравнения этих значений. Ограничения на неизвестные, состоящие из требований принадлежности соответствующих величин множествам значений участвующих в соотношении функций, будем называть *ограничениями, связанными с множеством значений.* Для этого типа ограничений никакого термина в школьном курсе математики не зарезервировано, но при желании множество, выделяемое этими ограничениями, можно назвать *областью принимаемых значений* (коротко ОПЗ).

Например, в уравнении $f(x) = \sqrt{g(x)}$ есть ограничение $g(x) \geqslant 0$, вызванное областью определения функции «корень квадратный», и ограничение $f(x) \geqslant 0$, порожденное множеством значений этой функции (если x — решение, то величина $f(x)$ должна находиться в множестве значений функции «корень квадратный»).

Наконец, будем отмечать *общие ограничения*, вызванные видом рассматриваемого соотношения. Для разных соотношений общие ограничения проявляются по-разному. Например, если рассматривается уравнение, то обе его части либо одного знака, либо равны нулю одновременно. Аналогично для неравенства вида $f(x) \geqslant \sqrt{g(x)}$ можно выставить общее ограничение на $f(x)$, состоящее в требовании $f(x) \geqslant 0$, так как, судя по виду неравенства, если x — решение, то правая часть неотрицательна, а левая должна быть не меньше правой, так что с необходимостью тоже неотрицательна.

Главный принцип, которым будем руководствоваться при совершении преобразований для перехода к равносильным соотношениям, таков.

Принцип сохранения ограничений. *Сохраняй ограничения, имевшиеся в данном соотношении.*

Нередко приходится совершать преобразования, которые нарушают ограничения в сторону их ослабления, т. е. преобразования, снимающие какие-то из имевшихся ограничений. К таким преобразованиям относятся, например, возведение в квадрат или потенцирование (избавление от логарифма). Желательно стараться не прибегать к преобразованиям, которые налагают дополнительные ограничения, например, к таким, как извлечение квадратного корня или логарифмирование. Во всяком случае, если указанного типа преобразования неизбежны, надо тщательно заботиться о сохранении ограничений и, возможно, отдельно изучать ситуации, подпадающие под ограничения.

При выполнении преобразований, снимающих какие-то ограничения, будем использовать следующий

Механизм сохранения ограничений. *Ограничения, исчезнувшие в результате преобразования, надо включать в систему с преобразованным соотношением.*

Коротко этот механизм можно сформулировать так: *исчезнувшие ограничения включай в систему с преобразованным соотношением.*

Иначе говоря, от данного соотношения будем переходить к системе, состоящей из преобразованного соотношения и исчезнувших ограничений.

Какое место может занять принцип сохранения ограничений в процессе решения соотношения? Он лежит в основе выяснения, какому соотношению, состоящему из более простых по сравнению с данным, оно может быть равносильно. Применение механизма сохранения ограничений не гарантирует переход к равносильному соотношению, это всего лишь учет необходимых условий. Однако обеспечиваемый им переход обычно приводит к равносильным соотношениям, в чем, однако, надо убеждаться для каждого конкретного случая. Несложную проверку обеспечения равносильности во всех конкретных конструкциях всегда будем оставлять читателю. Кстати, не так уж много различных видов уравнений и неравенств доводится использовать в рамках школьного курса математики, а доказывать равносильность при преобразовании того или иного вида соотношений достаточно один раз, потом ее можно использовать.

Ограничения, вызванные областью определения или множеством значений, возникают при рассмотрении конкретных функций, поэтому напомним таблицу ограничений, связанных с конкретными функциями. Обратим внимание на то, что в таблице для обозначений аргумента и значений функции используются буквы, отличные от обычных букв x и y, а именно соответственно буквы u и v. Это сделано потому, что в реальных ситуациях на местах, где в таблице стоят u и v, могут находиться выражения с участием неизвестных, обычно обозначаемых буквами x, y и т. п. В таблице относительно степени отмечены лишь ограничения, сопровождающие квадратный корень и показательную функцию, ввиду того, что для степени с разного типа показателями ограничения разнообразны для изобилия частных случаев, и с ними нетрудно разобраться в частном порядке для каждого конкретного случая.

Таблица ограничений

Функция $v = f(u)$	Ограничения, связанные с областью определения	Ограничения, связанные с множеством значений
$v = u^2$	нет ограничений	$v \geqslant 0$
$v = \sqrt{u}$	$u \geqslant 0$	$v \geqslant 0$
$v = \sin u$, $v = \cos u$	нет ограничений	$-1 \leqslant v \leqslant 1$
$v = \operatorname{tg} u$	$u \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	нет ограничений
$v = \operatorname{ctg} u$	$u \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	нет ограничений
$v = \arcsin u$	$-1 \leqslant u \leqslant 1$	$-\pi/2 \leqslant v \leqslant \pi/2$
$v = \arccos u$	$-1 \leqslant u \leqslant 1$	$0 \leqslant v \leqslant \pi$
$v = \operatorname{arctg} u$	нет ограничений	$-\pi/2 < v < \pi/2$
$v = \operatorname{arcctg} u$	нет ограничений	$0 < v < \pi$
$v = a^u$, $a > 0$	нет ограничений	$v > 0$
$v = \log_a u, a > 0, a \neq 1$	$u > 0$	нет ограничений

При выполнении преобразований, снимающих ограничения, как правило, получаются соотношения более простого вида, чем имевшиеся (пропадают корни, логарифмы и т. п.), и исчезают какие-то ограничения. Приходится, используя механизм сохранения ограничений, переходить к системам, тем самым соотношений становится больше. Кроме того, иногда приходится переходить к рассмотрению нескольких случаев, что неизбежно приводит к совокупности (также обычно более простых соотношений). При переходе от данного соотношения к более разветвленной конструкции, состоящей из соотношений, в которых какие-то из имевшихся в данном соотношении ограничения исчезли, будем говорить, что эта конструкция представляет собой *структуру данного соотношения.*

ТЕХНОЛОГИИ

Процесс решения задачи вообще и соотношения в частности эффективно (и динамично) можно организовать посредством постановки вопросов и поиска ответов на них. Вопросы желательно задавать как можно более уместные в текущей обстановке. Полезно иметь запас довольно универсальных вопросов. Некоторые из них кажутся слишком общими и потому могут показаться бесполезными, но не будем спешить с их оценкой, пока с ними не поработаем.

Одни из наиболее часто задаваемых вопросов в достаточно общем виде можно сформулировать так:

- как устроен объект?
- каковы особенности объекта?
- что это значит?

Вопрос об устройстве объекта разумен, если рассматриваются такие объекты, как уравнения, неравенства, системы, функции, ибо они нередко скомпонованы из каких-то сравнительно простых составляющих путем применения тех или иных операций, и учет устройства может подсказать путь решения.

Вопрос об особенностях часто появляется в геометрии, там по специфике данных можно эффективно выбирать путь решения, хотя и при анализе соотношений он не лишний.

Вопрос о смысле чего-то участвующего в задаче нередок, если в условии есть термины, поддающиеся разъяснению согласно их определениям.

Ответы на вопросы обычно приводят к переформулировкам задачи, появляется новая информация, и к обновленной задаче можно подойти так же, как к исходной, т. е. задать вопрос.

Есть вопросы более частные, специфические для, например, уравнений или неравенств. На такие вопросы обратим здесь большее внимание.

Один из общих вопросов применительно к уравнениям или неравенствам таков: *какого типа уравнение или неравенство*? Для ответа на такой вопрос надо иметь какую-то классификацию уравнений или неравенств, и причисление данного соотношения к определенному типу позволяет использовать средства, эффективные для начала решения соотношений соответствующего типа. Естественно выделить следующие типы уравнений или неравенств, ориентируясь на составляющие их фрагменты и на возможности рекомендаций по решению простейших соотношений каждого из типов:

— рациональные соотношения,

— соотношения с радикалами (иррациональные соотношения),

— логарифмические соотношения,

— показательные соотношения,

— тригонометрические уравнения,

— соотношения смешанного типа.

Кратко остановимся на отличительных особенностях каждого из перечисленных типов. Подробнее они рассмотрены в соответствующих разделах или этюдах.

К рациональным отнесем такие уравнения или неравенства, в которых участвуют только дроби, составленные из многочленов, т. е. рациональные функции.

Соотношения с радикалами — это такие уравнения или неравенства, в которых радикалы (корни) участвуют на внешнем уровне, т. е. на уровне, позволяющем на первом шаге решения принять во внимание связанные с радикалами ограничения. Например, к иррациональным уравнениям можно отнести уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$, $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$ и т. п.

К логарифмическим будем относить такие соотношения, в которых переменная участвует исключительно под знаком логарифма (возможно, и в основаниях логарифмов). Тем самым к логарифмическим отнесем соотношения, в которых неизвестная входит лишь посредством выражений вида $\log_{\varphi(x)} f(x)$. Для логарифмических соотношений возможен учет связанных с логарифмами ограничений в начале решения.

К показательным будем относить такие уравнения и неравенства, в которых неизвестная величина участвует в показателе степени и, возможно, в ее основании, т. е. только посредством выражений вида $\varphi(x)^{f(x)}$, где φ — положительная функция, чаще всего постоянная.

К тригонометрическим уравнениям (неравенствам) будем относить такие, в которых неизвестная участвует только в аргументах тригонометрических функций.

Соотношения, не удовлетворяющие ни одному из признаков описанных типов, будем считать смешанными. Тем самым к смешанным можно отнести уравнения или неравенства, в которых переменная есть под логарифмом и за его пределами, или если она встречается в аргументах и за пределами тригонометрических функций, и т. п.

После выяснения типа соотношения можно задать вопрос: каков его **вид**?

Вид уравнения или неравенства определяется последними действиями, совершаемыми при нахождении значений всех участвующих в соотношении выражений. А именно, каждое уравнение или неравенство представляет собой соединенные знаком сравнения выражения (функции), значения которых при тех или иных значениях неизвестной надо искать для проверки того, будут ли получаемые числовые выражения давать верное сравнение. При нахождении этих значений проводятся какие-то операции (например, взятие корня, логарифма и т. п., нахождение суммы, произведения, частного и т. п.), и среди этих операций какие-то выполняются последними. Они и определяют вид. Обозначив отдельными буквами выражения, подверженные последним операциям, и записав уравнение или неравенство с использованием этих букв и самих операций, получим лаконичное выражение, определяющее верхний уровень устройства данного уравнения или неравенства. Выяснение вида может быть полезно потому, что в лаконичном виде легче проводить анализ ограничений, намечать преобразования, следить за ограничениями, использовать механизм сохранения ограничений и выяснять структуру соотношений. При более громоздком выражении, сопровождаемом массой деталей, это делать труднее. Кроме того, видов соотношений немного, и, освоив их, легко записывать структуры конкретных соотношений. Примеры наиболее распространенных видов уравнений и неравенств и их анализ даны ниже.

Разумеется, не всегда удается отнести уравнение или неравенство к определенному типу или выяснить его вид. Тогда мы должны понимать, что имеем дело с чем-то эксклюзивным и методы анализа тоже надо подбирать специфические. Но об этом в части, относящейся к общим средствах, речи обычно идти не будет. Это предмет отдельного разговора.

Выяснив вид соотношения, отмечаем, есть ли в нем ограничения. Если их нет, то надо пытаться выразить переменную через все остальные участвующие в соотношении фрагменты и прийти к, возможно, наиболее простому способу описания, т. е. выписать множество решений. Если же ограничения есть, то надо от данного соотношения на основе механизма сохранения ограничений перейти к системе или совокупности, состоящей из таких соотношений, в которых имеющиеся ограничения хотя бы частично (а лучше совсем) исчезают, т. е. к структуре данного соотношения.

При выяснении структуры полезно организовать **словесное описание** процесса решения с использованием структурообразующих союзов «и», «или» («либо»), т. е. описать последовательность действий, которые надо совершить при переходе к равносильной данному соотношению системе или совокупности, состоящей из более простых соотношений. Это позволяет регулярным образом выписывать структуру данного соотношения в терминах систем и совокупностей, в которых участвуют более простые по сравнению с данным соотношения, т. е. переходить к иному описанию задаваемого соотношением множества.

Типичные конфигурации. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся виды соотношений.

Произведение сравнивается с нулем. Обсудим ситуацию сравнения с нулем произведения, а именно уравнение и неравенства вида

$$u \cdot v = 0, \quad u \cdot v > 0, \quad u \cdot v \geqslant 0$$

(ситуации со знаком «меньше» аналогичны или сводятся к рассматриваемым). Здесь и в дальнейшем имеется в виду, что выражения u, v содержат переменную.

Обычно на вопрос, чему равносильно уравнение вида «произведение равно нулю», отвечают «равенству нулю хотя бы одного из множителей». В принципе, так оно и есть, если не учитывать наличие ограничений. Однако требование сохранения ограничений налагает дополнительные условия. А именно,

$$u \cdot v = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 0, \\ v \text{ имеет значение, может быть вычислено} \end{cases} \\ \begin{cases} v = 0, \\ u \text{ имеет значение, может быть вычислено.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Словами можно сказать, что равенство нулю произведения равносильно тому, то один из множителей равен нулю, а второй при этом определен (имеет значение, может быть вычислен и т. п.). Конечно, для уравнения, в котором кроме описывающих данное множество иных букв (параметров) нет, всегда можно ограничиться проверкой.

Однако при наличии кроме переменной других букв, от которых зависит множество решений, ситуация становится менее прозрачной, и тогда эффективно использование ясных схем.

Для неравенства имеем

$$u \cdot v > 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u > 0, \\ v > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} v < 0, \\ u < 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

и здесь требование выполнения соответствующих ограничений содержится внутри неравенств.

Для нестрогого неравенства ситуация более разветвленная, и если есть шанс что-то упустить, то лучше разобраться с ней согласно содержанию этого вида неравенства, а именно «больше нуля **или** равно нулю», используя изложенные выше соображения. Коллизия может возникнуть в том случае, когда один из множителей равен нулю, в таком случае знак другого несуществен, однако предполагается его определенность.

Отношение сравнивается с нулем. К уравнениям и неравенствам этого типа отнесены такие, в которых вид определяется дробью, т. е. вида

$$\frac{u}{v} = 0, \quad \frac{u}{v} > 0,$$

и т. п., где u, v — выражения, содержащие переменную. Равносильная уравнению структура такова:

$$\begin{cases} u = 0, \\ v \neq 0. \end{cases}$$

Неравенства можно решать либо сопоставляя знаки числителя и знаменателя, либо общим методом интервалов, о котором речь пойдет в следующем параграфе. Рациональные неравенства, т. е. неравенства, в которых u и v суть многочлены, лучше решать исключительно методом интервалов.

Иррациональные уравнения и неравенства. К этому типу отнесены уравнения или неравенства, в которых на внешнем уровне участвуют радикалы (знаки корня). Виды иррациональных уравнений или неравенств могут быть разными, и на анализе некоторых из них остановимся подробнее.

Один из простейших видов иррациональных уравнений таков: $u = \sqrt{v}$. В уравнении этого вида есть ограничения $u \geqslant 0$ и $v \geqslant 0$, первое из которых связано с множеством значений, а второе — с областью определения функции «квадратный корень». После перехода от данного уравнения к уравнению $u^2 = v$ (такой переход называют образно «возведение уравнения в квадрат») сохраняется ограничение $v \geqslant 0$, хотя и меняется его статус, а ограничение $u \geqslant 0$ исчезает, и согласно механизму сохранения ограничений получаем равносильный переход

$$u = \sqrt{v} \Longleftrightarrow \begin{cases} u^2 = v, \\ u \geqslant 0. \end{cases}$$

Можно составить, например, такое словесное описание процесса решения (оно полезно, потому что, повторяя его и создавая на этой основе структуру, получаем равносильное данному соотношение): при возведении в квадрат простейшего уравнения с корнем сохраняется ограничение положительности подкоренного выражения, и его можно не учитывать, но теряется ограничение положительности значения корня, и его следует включить в систему с уравнением, полученным из исходного путем возведения в квадрат.

Как отмечено выше, принцип сохранения ограничений не гарантирует перехода к равносильному соотношению. Проверим указанную выше равносильность. В дальнейшем не будем каждый раз проверять равносильности в подобных ситуациях — это делается так же, как в настоящем примере, и читатель при желании может проделать это самостоятельно. Пусть x таково, что $f(x) = \sqrt{g(x)}$ (считаем, что $u = f(x)$, $v = g(x)$). Так как при возведении в квадрат равенство сохраняется, имеем $f^2(x) = g(x)$, при этом из требований к множеству значений корня квадратного получаем, что для нашего x будет $g(x) \geqslant 0$, а неравенство $f(x) \geqslant 0$ обеспечено исходным равенством и множеством значений функции «корень квадратный». Тем самым x удовлетворяет системе $\begin{cases} (f(x))^2 = g(x), \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$ Обратно, если x — решение последней системы, то по определению квадратного корня как неотрицательного числа, квадрат которого равен данному числу, приходим к тому, что $f(x) = \sqrt{g(x)}$. Равносильность доказана.

Как оказалось, простейшее иррациональное уравнение равносильно системе из уравнения и неравенства. Такая конструкция появляется достаточно часто, поэтому естественно сформулировать следующее

Наблюдение 1. *Для того чтобы решить систему из уравнения и неравенства, надо решить уравнение и выбрать те его корни, которые удовлетворяют неравенству.* При этом решать неравенство необязательно: надо, исходя из специфики задачи, понять, что проще —

найти множество решений неравенства и посмотреть, какие корни уравнения в него входят, или же подставить корни уравнения в неравенство и проверить, какие из них удовлетворяют неравенству, а какие нет. Поэтому начинать решение системы из уравнения и неравенства лучше с решения уравнения.

К простейшим иррациональным неравенствам можно отнести неравенства вида

$$u < \sqrt{v}, \quad u > \sqrt{v}.$$

К их анализу и выяснению структуры обратимся ниже, в § 3, где речь пойдет в основном об иррациональных неравенствах.

Рассмотрим несколько примеров использования изложенных выше пожеланий. Действовать будем по такой схеме: для конкретного уравнения или неравенства выясним его вид, затем, проведя анализ ограничений и используя механизм сохранения ограничений, установим структуру, присущую получившемуся виду, после чего эту структуру наполним содержанием конкретного примера, и останется только провести все действия по нахождению решений.

Пример 1. Решим уравнение $x + \sqrt{2x^2 - 7x + 5} = 1$.

Записав уравнение в виде $\sqrt{2x^2 - 7x + 5} = 1 - x$, находим, что последним действием, выполняемым перед тем, как проверять верность равенства, является извлечение корня квадратного, стало быть, уравнение имеет вид

$$\sqrt{u} = v.$$

Согласно проведенному выше анализу рассматриваемое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x + 5 = 1 - 2x + x^2, \\ 1 - x \geqslant 0. \end{cases}$$

Как отмечено выше, для решения системы, состоящей из уравнения и неравенства, надо решить уравнение и выбрать те его корни, которые удовлетворяют неравенству. Решая квадратное уравнение, находим его корни $x = 1$ и $x = 4$. Подставив эти числа в неравенство, обнаруживаем, что $x = 1$ ему удовлетворяет, а $x = 4$ нет. Таким образом, множеством корней нашего уравнения будет $\{1\}$.

Пример 2. Решим уравнение $\sqrt{x^2 + 6x + 8} = \sqrt{x + 2}$.

Последним действием перед сравнением является извлечение корня в левой и правой частях уравнения. Стало быть, его вид таков:

$$\sqrt{u} = \sqrt{v}. \tag{1}$$

Здесь два ограничения: $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, и оба вызваны областью определения. После возведения уравнения в квадрат получаем уравнение $u = v$, в котором есть одно общее ограничение: u и v одного знака либо оба равны нулю. Видим, что оба ограничения исчезли, но появилось новое. Для сохранения ограничений к уравнению $u = v$ надо добавить требование, гарантирующее выполнение прежних ограничений. С учетом одинаковости знаков частей преобразованного уравнения можно в систему с преобразованным уравнением включить одно из имевшихся ограничений. Тем самым

$$\sqrt{u} = \sqrt{v} \Longleftrightarrow \begin{cases} u = v, \\ \left[\begin{array}{l} u \geqslant 0 \\ v \geqslant 0. \end{array}\right. \end{cases} \tag{2}$$

Совокупность в правой части (2) говорит о том, что для сохранения ограничений достаточно к уравнению $u = v$ добавить в систему одно из требований $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, второе на множестве корней уравнения $u = v$ также будет выполнено, так как там величины u и v равны. То, что за пределами множества корней уравнения $u = v$ значения u и v могут быть разных знаков, нас не должно беспокоить, ибо мы для решения уравнения (1) должны выбирать значения из множества корней преобразованного уравнения (за пределами этого множества корней уравнения (1) точно нет).

Вернемся к примеру. Согласно равносильности (2) имеем

$$\sqrt{x^2 + 6x + 8} = \sqrt{x + 2} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 8 = x + 2, \\ x + 2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

При переходе от уравнения к его структуре (3) из двух ограничений $x^2 + 6x + 8 \geqslant 0$, $x + 2 \geqslant 0$ выбрано более простое $x + 2 \geqslant 0$. Корнями уравнения $x^2 + 6x + 8 = x + 2$ будут числа $x = -2$ и $x = -3$, из которых только $x = -2$ удовлетворяет ограничению. Из него и состоит множество корней.

Пример 3. Решим уравнение $\sqrt{3x + 4} - \sqrt{x + 5} = 1$.

Последнее действие перед проверкой равенства — извлечение корня из двух выражений. Стало быть, вид уравнения можно считать таким:

$$\sqrt{u} - \sqrt{v} = 1. \tag{1}$$

Поскольку надо возводить уравнение в квадрат, а это безопасно делать в тех случаях, когда обе его части неотрицательны, перейдем от вида (1) к виду

$$\sqrt{u} = \sqrt{v} + 1. \tag{2}$$

В уравнении (2) есть два ограничения, связанные с областью определения входящих в него функций, это $u \geqslant 0$ и $v \geqslant 0$. Возведем уравнение в квадрат:

$$u = v + 2\sqrt{v} + 1. \tag{3}$$

В полученном уравнении из отмеченных выше ограничений сохранилось требование $v \geqslant 0$, так как это выражение всё еще стоит под корнем. Выражение u из-под корня ушло, но свойство его неотрицательности осталось, потому что оно после преобразования стало равным квадрату какого-то числа. Тем самым уравнения (2) и (3) равносильны. В уравнении (3) всего один корень, и эта ситуация рассмотрена выше. Следовательно, можно вернуться к примеру. После преобразований приходим к такой структуре исходного уравнения: $x - 1 = \sqrt{x+5}$. Согласно проведенному выше анализу имеем

$$x - 1 = \sqrt{x+5} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = x + 5, \\ x - 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

В последней системе корнями уравнения будут числа $x = 4$ и $x = -1$, из которых лишь $x = 4$ удовлетворяет неравенству и тем самым является корнем не только уравнения, но и всей системы, а значит, и исходного уравнения.

Отметим некоторые наблюдения. Во-первых, процесс решения алгоритмичен и нам не пришлось ни на одном шаге заниматься догадками, всё шло согласно разработанным правилам. Правда, это может показаться довольно громоздким — знатокам-то известно, что можно просто возводить в квадрат, а в конце сделать проверку, подставив найденные корни итогового уравнения в исходное. С этим трудно не согласиться: да, можно и так. Однако мы будем обычно руководствоваться представленными здесь рекомендациями из тех соображений, что они алгоритмичны, разбивают процесс решения на последовательность достаточно простых шагов и привычка к использованию ясных схем поможет при анализе более сложных соотношений, например неравенств (где проверка уже проблематична), и особенно в задачах с участием параметров. Кроме того, разбиение решения на отчетливые исполняемые шаги уменьшает риск арифметических ошибок и минимизирует работу по их исправлению — обычно ошибки относятся к каким-то блокам решения, и надо делать исправления только в этих блоках.

Во-вторых, при решении системы из уравнения и неравенства мы не стали решать неравенство, а делали выбор, что проще: подставить в неравенство найденные значения и проверить его выполнение или решить неравенство и посмотреть, входят ли найденные значения в множество решений неравенства. Здесь показалось проще подставить, но если проще решить неравенство и выбрать, то так и надо поступить.

Пример 4. Решим уравнение $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$.

Равенство говорит о том, что выражения слева и справа должны быть одного знака. Но справа стоит корень, который всегда неотрицателен, а значит, выражение в левой части также должно быть неотрицательным, и если мы сразу будем возводить уравнение в квадрат, то придется поставить ограничение в виде требования неотрицательности левой части. Однако тривиальный ход приводит к равносильному уравнению

$$\sqrt{x+3}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}, \tag{1}$$

в котором при возведении в квадрат не надо добавлять ограничений, связанных с согласованием знаков левой и правой частей. Уравнение (1) имеет вид

$$\sqrt{u}=\sqrt{v}+\sqrt{w} \tag{2}$$

Отметим ограничения, имеющиеся в уравнении (2):

$$u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0, \quad w \geqslant 0.$$

Возводя уравнение (2) в квадрат, приходим к уравнению

$$u=v+2\sqrt{v}\sqrt{w}+w, \tag{3}$$

в котором сохранены все ограничения: выражения v и w остались под корнем, а u равно квадрату некоторого числа (стоящего в правой части), так что на корнях уравнения (3) неотрицательно. Поэтому уравнения (2) и (3) равносильны.

Пришли к уравнению вида

$$d = \sqrt{y}\sqrt{z}, \tag{4}$$

в котором есть ограничения $d \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Возведем его в квадрат:

$$d^2 = yz \tag{5}$$

Исчезли все имевшиеся ограничения, но появилось новое: произведение в правой части, равное квадрату некоторого числа, неотрицательно, т. е. y и z одного знака или одно из них равно нулю. Исчезнувшее ограничение $d \geqslant 0$ придется записать в систему с преобразованным уравнением, а из неравенств $y \geqslant 0$ и $z \geqslant 0$ казалось бы можно выбрать одно. Однако нестрогость неравенства, т. е. допущение возможности равенства нулю, не позволяет ограничиться одним из неравенств. Действительно, если например $d = 0$ и $y = 0$, то равенство (5) верно независимо от знака z, и если окажется, что $z < 0$, то теряется равносильность перехода. Стало быть, либо придется включать в систему оба неравенства $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, либо соглашаться на переход к следствию и последующую проверку. В нашем примере это не страшно, но в более сложных случаях, когда проверка неэффективна, например, если в уравнении есть буквенная постоянная (параметр), то переход к структуре неизбежен.

Таким образом, после преобразований получаем, что

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2} \Longleftrightarrow 3 - 2x = \sqrt{2x-1}\sqrt{3x-2}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 7 = 0, \\ 3 - 2x \geqslant 0, \\ 2x - 1 \geqslant 0, \\ 3x - 2 \geqslant 0, \end{cases}$$

и из корней $x = 1$ и $x = -\frac{7}{2}$ уравнения оставляем только $x = 1$.

Рассмотренные примеры подсказывают, как определять вид уравнения. Нетрудно получить структуру простейших показательных и логарифмических уравнений и неравенств. На этом здесь останавливаться не будем, ибо логафмическим и показательным соотношениям посвящены отдельные разделы.

О замене переменной. Изучая соотношение, вместе с выяснением его типа и вида полезно проследить, есть ли в нем какое-то единообразие, т. е. наблюдается ли символосочетание, посредством которого переменная участвует в соотношении, и если такое обстоятельство есть, то это символосочетание можно обозначить одной буквой, т. е. перейти к новой переменной. При этом если исходная переменная участвует не только посредством символосочетания, но встречается за его пределами, то замену надо подготовить, а именно старую переменную выразить через новую и всюду обеспечить новую переменную. При выполнении замены надо явно прописать все ограничения, вносимые этой заменой. В терминах новой переменной получается новое соотношение. Его надо решить относительно этой переменной, учесть связанные с заменой ограничения и результат представить в виде структуры, т. е. в виде равенств или неравенств, собранных, возможно, в совокупности или системы. После этого на место новой переменной надо подставить то выражение, использующее старую переменную, которое было взято в качестве новой переменной, получить соотношение относительно старой переменной и, решив его, прийти к результату.

Пожелание записывать множество решений в новой переменной в виде структуры особенно важно применительно к неравенствам, ибо в них на промежуточных шагах иногда появляются технические результаты в виде равенств, и если использовать только их при возвращении к старой переменной, то легко упустить из виду какие-то важные детали и в итоге прийти к неверному результату.

Пример 5. Решить уравнение

$$2\sqrt{x^2 + x} - x = x^2 - 8.$$

Первый естественный шаг — изолировать корень в одной части уравнения, перенеся все остальное в другую, потому что мы знакомы с такого вида уравнениями:

$$2\sqrt{x^2 + x} = x + x^2 - 8.$$

В принципе, можно попробовать действовать по стандартной схеме — возводить в квадрат и т. д. Однако прогноз получаемых выражений останавливает от такого шага: появятся слишком высокие степени, чтобы с ними можно было разобраться. В этот момент и надо обратить внимание на единообразие. Нетрудно заметить, что переменная участвует в уравнении только посредством выражения $x^2 + x$, стало быть, что-то связанное с этим выражением целесообразно взять в качестве новой переменной. Можно в качестве таковой взять указанное выражение, но тогда получится иррациональное уравнение. Если же положить $t = \sqrt{x^2 + x}$, то приходим к квадратному уравнению относительно t:

$$t^2 - 2t - 8 = 0.$$

К этому уравнению можно добавить в систему требование $t \geqslant 0$, но можно это обстоятельство учесть на последней стадии решения, при возврате к старой переменной. Среди корней $t_1 = 4$, $t_2 = -2$ неотрицателен только один, значит, только с ним надо возвращаться к переменной x:

$$\sqrt{x^2 + x} = 4.$$

Возведя последнее уравнение в квадрат, получим равносильное ему квадратное уравнение $x^2 + x - 16 = 0$, корнями которого являются числа $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}$.

ПРАКТИКА.

В качестве упражнения предлагается несколько вопросов, касающихся анализа структуры некоторых видов уравнений с радикалами. Уравнения с конкретными данными не представлены, так как их можно взять из распространенных пособий, и читатель в случае потребности в упражнениях легко может их себе обеспечить.

Упражнение. Написать структуры уравнений:

1) $u + \sqrt{v} = \sqrt{w}$,
2) $\sqrt{u} = |v|$,
3) $u\sqrt{v} = 0$,
4) $\sqrt{u} \cdot \sqrt{v} = 0$.

§ 3.2. Метод интервалов. Соотношения с модулем

Прежде чем развивать применение предложенной в предыдущем параграфе концепции остановимся на двух важных технических средствах, представляющих также самостоятельный интерес, — методе интервалов решения неравенств и обращении с модулями. Это широко распространенные и хорошо известные средства, многократно описанные в литературе. Тем не менее отведем им отдельное место, по крайней мере, по двум причинам. Во-первых, в дальнейшем метод интервалов будет использоваться как вспомогательное средство в том виде, который представлен ниже. Во-вторых, при обращении с модулем будут требоваться данные здесь пожелания, позволяющие при избавлении от модуля технологично формировать структуру соотношения.

2.1. Метод интервалов.

ТЕОРИЯ

При решении неравенств нередко применяется метод интервалов, основанный на сохранении знака непрерывной функции между ее нулями на каждом из промежутков области определения. Мы будем использовать исключительно этот метод при решении рациональных неравенств, т. е. неравенств, в которых участвуют лишь рациональные функции — многочлены и отношения многочленов и никаких иных средств в соотношении нет. При решении неравенств других видов будем всегда иметь в виду возможность применения этого метода, но будем развивать и методы, специфические для конкретных видов неравенств. В частности, метод интервалов удобен при решении неравенств смешанного вида, т. е. в ситуациях, когда, например, переменная участвует внутри логарифмических выражений и за пределами логарифмов, и т. п.

Говоря о непрерывности, будем опираться на образное представление об этом понятии и на свойства непрерывной функции на промежутке. Строгие определения и утверждения с доказательствами требуют для их восприятия и использования логическую культуру довольно высокого уровня, обычно в школе недостигаемого. В принципе, такой подход имеет право на существование, так как в прикладных целях математические понятия, к которым можно отнести непрерывность, используются на уровне их свойств в ситуациях, когда не требуются обоснования. Тем не менее будем придерживаться точных формулировок и корректного применения свойств непрерывных функций. Не будем их здесь приводить, ибо существенной роли формулировки не сыграют и при необходимости их можно найти в литературе.

Напомним, что к рациональным мы относим неравенства, в которых участвуют многочлены или отношения многочленов, т. е. рациональные функции.

Опишем последовательность действий, которые следует совершить для решения рационального неравенства.

1. Перенести всё в одну (левую) часть, в другой (правой) оставить 0.

2. Привести всё к одному знаменателю (если вообще знаменатели есть), свести всё в одну дробь (ни в коем случае не отбрасывая знаменатель!).

3. Найти нули числителя и нули знаменателя (т. е. такие значения неизвестной, при которых числитель или знаменатель обращается в нуль).

4. Нарисовать числовую прямую и на ней указать точками или кружками расположение найденных нулей: знаку строгого неравенства соответствует кружок, нестрогого — точка, при этом на месте нулей знаменателя всегда кружки́.

5. Изобразить палочки над каждой точкой или кружком. Этим вся прямая разобьется на промежутки.

6. Найти знак левой части на каждом из полученных промежутков, вычислив значение левой части в какой-либо точке каждого из промежутков или воспользовавшись какими-то другими соображениями, и отметить знаки на рисунке.

7. Над теми промежутками, на которых знак соответствует нашему неравенству, провести черту.

8. Если результат окончательный, записать ответ в виде множества. Если результат неокончательный, например, была произведена замена, результат получен относительно новой переменной и требуется возвращение к старой, то записать ответ в виде системы, совокупности и т. д., иначе говоря, в виде структуры.

Запишем перечень действий в кратком виде, доступном для запоминания и воспроизведения при решении конкретных неравенств.

1. Всё в одну часть.
2. Всё в одну дробь.
3. Нули числителя и знаменателя.
4. Все нули — на числовую прямую.
5. Палочки.
6. Знаки.
7. Черточки.
8. Результат.

Нередко после нанесения нулей числителя и знаменателя на числовую прямую проводят дуги над получаемыми промежутками и расставляют знаки или выделяют промежутки наклонной штриховкой. Можно пользоваться и этими средствами, однако они недостаточно наглядны, а при рассмотрении систем неравенств предложенные здесь средства обеспечения наглядности намного эффективнее.

Пример 1. Решим неравенство

$$\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^3(x-4)^4} \geqslant 0.$$

Заметим, что первые два пункта рекомендаций выполнять не надо — неравенство представляет собой сравнение дроби с нулем. Найдем нули числителя — это $x = 1$, $x = 2$. Нули знаменателя таковы: $x = 3$, $x = 4$. Нарисуем числовую прямую и отметим на ней найденные числа (рис. $1(a)$), ставя точки или кружки́ на соответствующие места. Изобразим палочки над каждой из полученных точек (рис. $1(b)$). Найдем знак левой части внутри каждого из полученных промежутков. Для этого можно вычислить значения левой части в каких-то точках соответствующих промежутков, но мы поступим иначе. Найдем знак дроби для какого-то большого числа, находящегося справа от самой правой палочки. Там дробь положительна. Ставим над этим промежутком знак «+».

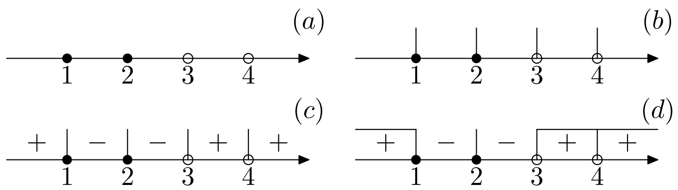


Рис. 1.

Посмотрим, каков показатель степени того множителя, который обращается в нуль в ближайшей точке. Это множитель $(x-4)^4$, степень его четна, и рассудим так: все остальные множители в нуль в этой точке не обращаются, значит, при переходе аргумента справа налево через эту точку каждый из них сохраняет свой знак, а изучаемый множитель стоит в четной степени, так что и он не сменит своего знака. Тем самым вся дробь при переходе через точку 4 сохраняет знак. Итак, над промежутком $(3,4)$ ставим тот же знак «$+$», что и справа от него. Пойдем далее.

Следующая точка, в которой один из множителей обращается в нуль, это $x = 3$, соответствующий этой точке множитель таков: $(x-3)^3$, степень его нечетна. Рассуждая, как и выше, можно утверждать, что этот множитель, а вместе с ним и вся дробь сменят знак при переходе через $x = 3$, так что над промежутком $(2,3)$ поставим знак «$-$». Продолжая процесс, констатируем, что при переходе через точку 2 знак меняться не будет, а при переходе через 1 знак изменится на противоположный. В результате получаем расстановку знаков, как на рис. $1(c)$.

У нас рассматривается неравенство «$\geqslant$», поэтому изобразим черту над теми промежутками, над которыми стоит знак «$+$» (рис. $1(d)$). Если не требуется использовать далее полученный результат, то можно записать его в виде объединения множеств, т. е. как ответ: $[-\infty,1] \cup \{2\} \cup (3,4) \cup (4,+\infty)$. Если же предполагается его использовать (например, если была замена и переменная x промежуточная), то результат следует записать в виде структуры:

$$\left[\begin{array}{l} x \leqslant 1, \\ x = 2, \\ \left\{\begin{array}{l} x > 3, \\ x < 4, \end{array}\right. \\ x > 4. \end{array}\right.$$

Пример 2. Решим неравенство

$$x - \frac{1}{x} \geqslant (x-1)(x-4).$$

Покажем, как развиваются события вслед за рекомендациями.

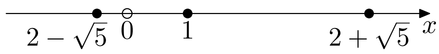
Всё в одну часть $\qquad 1 - \dfrac{1}{x} - (x-1)(x-4) \geqslant 0$

всё в одну дробь $\qquad \dfrac{x - 1 - x(x-1)(x-4)}{x} \geqslant 0 \iff$

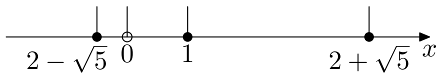
$$\frac{(x-1)(x^2-4x-1)}{x} \leqslant 0$$

нули числителя и знаменателя $\qquad x = 1,\ x = 2 \pm \sqrt{5},\ x = 0$

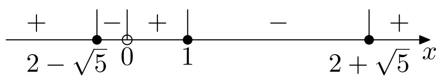
точки — на числовую ось



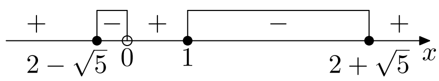
палочки



знаки



черточки



результат $\qquad [2-\sqrt{5}, 0) \cup [1, 2+\sqrt{5}]$

$$\text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 2 - \sqrt{5}, \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \leqslant 2 + \sqrt{5}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Приведем перечень действий при использовании метода интервалов в общем случае. Он не столь детален, как для рациональных неравенств, ввиду более высокой общности ситуации.

1. Найти область определения неравенства.

2. Заменить знак неравенства знаком равенства и решить полученное уравнение.

3. На числовой прямой выделить область определения неравенства и отметить корни соответствующего неравенству уравнения.

4. Нарисовать палочки над каждой из отмеченных точек, установить, на каких из полученных промежутков выполняется неравенство.

5. Выделить множества, соответствующие данному неравенству. Записать ответ.

При использовании метода интервалов бывает удобно представить неравенство в виде сравнения функции с нулем, т. е. перенести все участвующие в неравенстве функции в одну часть, оставив в другой нуль.

Неравенства с участием логарифмов, радикалов и т. п. подробно рассматриваются в других разделах или этюдах, здесь разберем два примера, в которых использование свойств соответствующих операций минимально.

Пример 3. Решим неравенство

$$\frac{x-3}{(x+1)\log_5(x^2-5x+13/2)} \geqslant 0.$$

Найдем область определения. Она характеризуется требованиями положительности подлогарифмического выражения и отличия от нуля знаменателя. Поскольку $x^2-5x+13/2>0$ для любого x, остаются требования $x+1\neq 0$ и $\log_5(x^2-5x+13/2)\neq 0$, которые выполняются при $x\neq -1$ и $x\neq \dfrac{5\pm\sqrt{3}}{2}$.

Уравнение

$$\frac{x-3}{(x+1)\log_5(x^2-5x+13/2)} = 0$$

имеет один корень $x=3$.

На числовой оси отметим точки, выделяющие область определения, и корень уравнения. Нарисуем палочки над каждой из отмеченных точек (рис. 2(a)). Определим знак левой части на каждом из полученных промежутков. Для этого можно взять по одной точке в каждом из промежутков и найти знак левой части в таких точках, а можно использовать свойства функций.

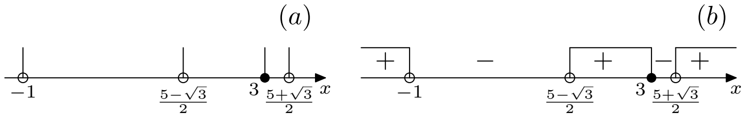


Рис. 2.

Пойдем вторым путем. Для достаточно больших значений x, а именно расположенных правее наибольшей из выделенных точек, значения левой части положительны. Перемещаясь влево и переходя через точку $\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$, но не доходя до точки 3, находим, что логарифм в знаменателе меняет знак, а остальные фрагменты выражения сохраняют знак. Стало быть, знак всей дроби меняется и между точками 3 и $\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$ она отрицательна. Рассуждая аналогично, получаем, что дробь меняет знак при переходе через каждую из точек. Отметим знаки, изобразим черту над промежутками, соответствующими знаку соотношения (рис. 2(b)), и запишем ответ: $(-\infty,-1)\cup((5-\sqrt{3})/2,3]\cup((5+\sqrt{3})/2,\infty)$.

Пример 4. Решим неравенство

$$\frac{\sqrt{(7-x)(x^2-4x+3)}}{x-1} \leqslant x-3.$$

Область определения неравенства характеризуется требованиями неотрицательности подкоренного выражения и отличия от нуля знаменателя. Заметив, что $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$, найдем, что неравенство $(7-x)(x-1)(x-3)\geqslant 0$ выполнено при $x\in(-\infty,1]\cup[3,7]$. Учитывая требование отличия от нуля знаменателя, изобразим область определения на числовой прямой (рис. 3(a)).

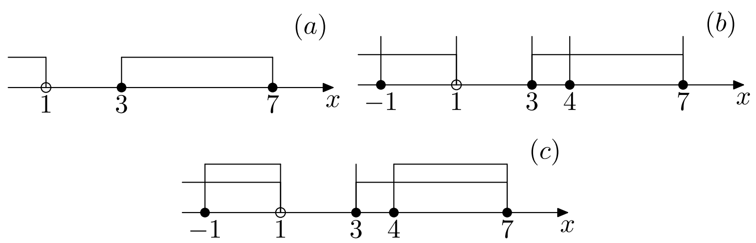


Рис. 3.

Займемся уравнением

$$\frac{\sqrt{(7-x)(x^2-4x+3)}}{x-1} = x-3. \qquad (1)$$

Не желая утруждать себя анализом ограничений и получением равносильного соотношения, перейдем к следствию этого уравнения путем возведения его в квадрат:

$$\frac{(7-x)(x-1)(x-3)}{(x-1)^2} = (x-3)^2 \Longleftrightarrow \frac{(x^2-3x-4)(x-3)}{x-1} = 0.$$

Проверкой убеждаемся в том, что корни -1, 3, 4 последнего уравнения удовлетворяют уравнению (1). Ввиду нестрогости исходного неравенства эти числа войдут в множество его решений, и в дальнейшем заботиться о них не будем.

Отметим найденные корни (рис. $3(b)$). Наличие в числителе и знаменателе дроби в левой части исходного неравенства одинаковых множителей вызывает настороженность и побуждает для выделения промежутков, на которых это неравенство верно, прибегнуть к выбору по одной точке внутри каждого из промежутков $(-\infty,-1]$, $[-1,1)$, $[3,4]$, $[4,7]$ и проверке справедливости неравенства в этих точках. Взяв $x=-2$, находим, что в этой точке неравенство не выполнено, значит, оно неверно на интервале $(-\infty,-1)$. При $x=0$ неравенство имеет место, значит, промежуток $[-1,1)$ войдет в ответ. Исследовав неравенство в точках $x=3{,}5$ и $x=5$, легко прийти к выводу о том, что неравенство выполнено на $[4,7]$. Отобразим полученную информацию на рисунке (рис. $3(c)$). Принимая во внимание, что корни уравнения суть решения неравенства, получаем ответ: $[-1,1)\cup\{3\}\cup[4,7]$.

ПРАКТИКА

Решить неравенства

(1) $\dfrac{(x+2)(3-x)}{x+9} \geqslant 0$, ответ $(-\infty,-9)\cup[-2,3]$;

(2) $\dfrac{(x+1)^3}{(x-3)(x-5)} \geqslant 0$, ответ $[-1,3)\cup(5,+\infty)$;

(3) $\dfrac{(x+8)^4(1-x)^3}{(x+5)(x-2)^2} \geqslant 0$, ответ $\{-8\}\cup(-5,1]$;

(4) $\dfrac{(x+12)(x+1)^4(x+4)^3}{(x-1)^2(x-5)^6(x-3)^4} \leqslant 0$, ответ $[-12,-4]\cup\{-1\}$;

(5) $\dfrac{x^2(2x+4)(9-3x)^2}{(-5-2x)^3} \geqslant 0$, ответ $(-5/2,-2]\cup\{0\}\cup\{3\}$;

(6) $\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{3}{x-3}$, ответ $(-9/2,-2)\cup(3,+\infty)$;

(7) $\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{x+1}{x-1} < 2$, ответ $(-\infty,-1)\cup(0,1/2)\cup(1,+\infty)$;

(8) $x - 1 > \dfrac{4x}{3 - x}$, ответ $(3, +\infty)$;

(9) $\dfrac{x + 4}{x + 1} > 2 - x$, ответ $(-1, +\infty)$;

2.2. Уравнения и неравенства с модулями.

Модуль довольно часто появляется в школьных задачах и играет заметную роль в дальнейшем, поэтому он заслуживает отдельного разговора. К нему можно относиться как к способу выражения определенных свойств, но можно использовать и как источник создания специфических задач. Мы рассмотрим работу с модулем только как с математическим средством, отсылая интересующихся основанными на этом понятии хитросплетениями к соответствующей литературе.

ТЕОРИЯ

Напомним, что модуль числа равен этому числу, если оно неотрицательно, и противоположному числу, если данное число отрицательно. Символически это выглядит так:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Выражение, находящееся под знаком модуля, в дальнейшем будем называть *подмодульным выражением.*

ТЕХНОЛОГИИ

Поскольку в определении модуля содержится разветвление, обработка модуля сводится к рассмотрению двух случаев. Составим словесное описание процесса обработки выражения с одним модулем: **либо** *подмодульное выражение неотрицательно* **и тогда** *знак модуля можно опустить*, **либо** *подмодульное выражение отрицательно* **и тогда** *на место модуля надо поставить подмодульное выражение с противоположным знаком.*

Соотношение с модулем равносильно совокупности двух систем, в каждой из которых учитывается знак подмодульного выражения. При решении соотношения в момент произнесения слова **либо** следует оформлять квадратную скобку (символ совокупности), а произнесения слов **и тогда** — фигурную скобку (символ системы). Если модуль участвует не в соотношении, а в других конструкциях, например при задании функции, надо использовать специфические для этих ситуаций средства, опираясь тем не менее на словесное описание обработки модуля.

Полезно воспринимать рекомендации словесного описания раскрытия модуля динамично, т. е. предпринимая соответствующие действия вслед за произнесением фраз. Динамичность трудно передать в статичном тексте, но тем не менее попытаемся это сделать. А именно, опишем действия, предпринимаемые в процессе формирования структуры при решении соотношения, в зависимости от фрагментов высказанного выше пожелания:

либо подмодульное выражение неотрицательно	изображаем небольшую незавершенную квадратную скобку (без нижнего уголка) как символ совокупности и записываем неотрицательность подмодульного выражения
и тогда знак модуля можно убрать,	записываем систему из неравенства, соответствующего неотрицательности подмодульного выражения, и соотношения с убранным знаком модуля
либо подмодульное выражение отрицательно	продолжаем линию квадратной скобки и дополняем запись неравенством, соответствующим отрицательности подмодульного выражения
и тогда на место модуля надо поставить подмодульное выражение с противоположным знаком	неравенство, соответствующее отрицательности подмодульного выражения, заключаем в систему с соотношением, в котором записано подмодульное выражение со знаком минус; завершаем знак совокупности.

Эти действия носят универсальный характер и полезны во многих ситуациях при избавлении от модуля.

Покажем превращение описания в структуру на примере уравнения с модулем. В дальнейшем при разборе примеров с участием модуля будем ограничиваться статичным текстом.

Пример 5. Решим уравнение $x^2 - 6x + |x-4| + 8 = 0$.

Сформируем структуру уравнения согласно описанной выше процедуре:

либо	$\left[\vphantom{\int} \right.$
подмодульное выражение неотрицательно	$\left[x - 4 \geqslant 0 \right.$
и тогда	$\left[\left\{ \begin{array}{l} x - 4 \geqslant 0, \\ \end{array} \right. \right.$
знак модуля можно убрать,	$\left[\begin{cases} x - 4 \geqslant 0, \\ x^2 - 6x + x - 4 + 8 = 0 \end{cases} \right.$
либо	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 4 \geqslant 0, \\ x^2 - 6x + x - 4 + 8 = 0 \end{cases} \\ \end{array} \right.$
подмодульное выражение отрицательно	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 4 \geqslant 0, \\ x^2 - 6x + x - 4 + 8 = 0 \end{cases} \\ x - 4 < 0 \end{array} \right.$
и тогда	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 4 \geqslant 0, \\ x^2 - 6x + x - 4 + 8 = 0 \end{cases} \\ \left\{ \begin{array}{l} x - 4 < 0, \\ \end{array} \right. \end{array} \right.$
на место модуля надо поставить подмодульное выражение со знаком минус	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 4 \geqslant 0, & (1) \\ x^2 - 6x + x - 4 + 8 = 0 & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} x - 4 < 0, & (3) \\ x^2 - 6x - x + 4 + 8 = 0. & (4) \end{cases} \end{array} \right.$

Согласно записанной схеме надо решить уравнение (2) и выбрать корни, удовлетворяющие неравенству (1), получив тем самым множество решений системы (1)–(2), затем решить уравнение (4) и выбрать корни, удовлетворяющие неравенству (3), решив тем самым систему (3)–(4). Завершается решение объединением множеств решений систем (1)–(2) и (3)–(4).

Решая уравнение (2), находим, что его корнями являются числа $x = 1$, $x = 4$, но только $x = 4$ удовлетворяет неравенству (1), т. е. будет решением системы (1)–(2). Корнями уравнения (4) служат числа $x = 3$, $x = 4$, из которых только $x = 3$ удовлетворяет неравенству (3) и тем самым является решением системы (3)–(4). Объединяя множества решений систем (1)–(2) и (3)–(4), получаем множество корней нашего уравнения: $\{3, 4\}$.

Пример 6. Решим неравенство $|x^2 - 5x + 4| > x - 3$.

Вновь сначала обратимся к словесному описанию: либо $x^2 - 5x + 4 \geqslant 0$ и тогда $x^2 - 5x + 4 > x - 3$, либо $x^2 - 5x + 4 < 0$ и тогда $-(x^2 - 5x + 4) > x - 3$. Структура исходного неравенства такова:

$$|x^2 - 5x + 4| > x - 3 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geqslant 0, & (1) \\ x^2 - 5x + 4 > x - 3 & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0, & (3) \\ -x^2 + 5x - 4 > x - 3. & (4) \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим систему (1)–(2). Для этого

(a) решим каждое из неравенств (1), (2) методом интервалов,

(b) изобразим множества их решений на **одной** числовой прямой,

(c) выберем те x, над которым нависнет столько черточек, сколько неравенств в нашей системе, т. е. в нашем случае две черты.

Затем аналогично решим неравенства (3), (4), изобразим множество решений системы (3)–(4) на другой числовой прямой, после чего станет видно, какое множество будет объединением множеств решений систем (1)–(2) и (3)–(4), т. е. множеством решений совокупности.

Перейдем к реализации намеченного плана. Левая часть в (1) обращается в нуль при $x = 1$ и $x = 4$. Изобразим числовую прямую, отметим точками положение найденных корней, изобразим над ними палочки, найдем знаки левой части, поставим их над соответствующими промежутками и нарисуем черту над теми точками, где левая часть неотрицательна (рис. 4(a)).

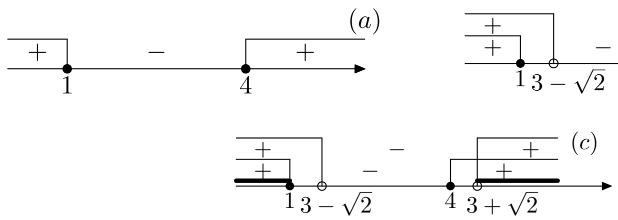


Рис. 4.

Решим неравенство (2):

$$x^2 - 5x + 4 > x - 3 \Longleftrightarrow x^2 - 6x + 7 > 0. \qquad (5)$$

Найдем нули левой части последнего неравенства в (5): $x = 3 - \sqrt{2}$, $x = 3 + \sqrt{2}$. На той же прямой, на которой изображено множество решений неравенства (1), отметим кружками положение найденных нулей, изобразим над ними палочки, найдем знаки левой части, поставим их над соответствующими промежутками и нарисуем черту над теми точками, где левая часть положительна (рис. 4(b)). Мы изобразили на одной числовой прямой множества решений обоих неравенств системы. Оба эти неравенства одновременно выполняются в тех точках, над которыми расположены две черты. Выделим это множество, например, жирной чертой (рис. 4(c)) (или штриховкой). Решение системы (1)–(2) закончено (поскольку этот результат промежуточный, нам не требуется записывать его в виде ответа или структуры).

Займемся системой (3)–(4), опустив подробности, ибо процесс решения (3)–(4) аналогичен процессу решения системы (1)–(2). Решим неравенство (4). Имеем

$$-x^2 + 5x - 4 > x - 3 \Longleftrightarrow x^2 - 4x + 1 < 0.$$

Нули левой части таковы: $x = 2-\sqrt{3}$, $x = 2+\sqrt{3}$. Изобразим на одной числовой прямой множества решений неравенств (3) и (4) и выделим ту часть оси, над которой нависают две черты (рис. 5).

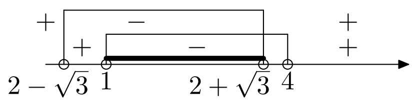


Рис. 5.

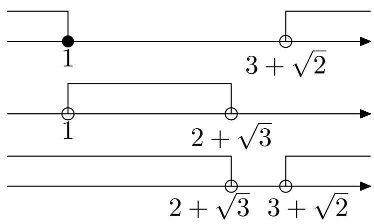


Рис. 6.

Теперь объединим множества, выделенные на рис. 4(c) и 5. Сделаем это следующим образом. Разместим изображения множеств решений систем (1)–(2) и (3)–(4) одно под другим с таким расчетом, чтобы одинаковые точки на рисунках оказались на одной вертикальной прямой (рис. 6). Затем будем мысленно «просвечивать» эти рисунки сверху вертикальным лучом и смотреть, какие точки «задержат» луч. Графически получим результат, изображенный на рис. 6 на нижней прямой. Его можно записать в виде ответа: $(-\infty, 2+\sqrt{3}) \cup (3+\sqrt{2}, +\infty)$.

Обратим внимание на то, что точка 1, разделяющая множества на верхнем и среднем фрагментах на рис. 6, в ответе не участвует:

мы как бы перемещаемся слева направо по верхней прямой, находясь в множестве решений, доходим до точки 1, она в множество решений первой системы включена, поэтому попадает в множество решений совокупности. Затем переходим на прямую, где изображено множество решений второй системы, и продолжаем процесс сбора итогового решения, двигаясь от единицы вправо, сама точка 1 в множество решений совокупности уже вошла, поэтому границей какого-либо промежутка из множества решений не служит.

Напомним структуры простейших уравнений и неравенств с модулем, опустив простые обоснования. Их использование повышает эффективность решения соотношений с модулем.

1. Уравнение $|z| = a$ при $a < 0$ корней не имеет, а при $a \geqslant 0$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} z = a \\ z = -a, \end{array}\right.$ т. е. либо $z = a$, либо $z = -a$.

2. Неравенство $|z| < a$ равносильно системе $\left\{\begin{array}{l} z < a, \\ z > -a. \end{array}\right.$ Если $a > 0$, то множество решений образует промежуток $(-a, a)$, а если $a \leqslant 0$, то неравенство и система решений не имеют.

3. Неравенство $|z| > a$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} z > a \\ z < -a. \end{array}\right.$ Если $a \geqslant 0$, то множеством решений является объединение двух промежутков $(-\infty, -a)$ и (a, ∞), если $a < 0$, то множество решений неравенства и совокупности совпадает с множеством всех вещественных чисел.

Пользуясь изложенными рекомендациями применительно к уравнению и неравенству из примеров 5 и 6, приведенным к простейшему виду, можно составить соответственно такие их структуры:

$$\left\{\begin{array}{l} -x^2 + 6x - 8 \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x - 4 = -x^2 + 6x - 8 \\ x - 4 = x^2 - 6x + 8, \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 4 > x - 3 \\ x^2 - 5x + 4 < 3 - x. \end{array}\right.$$

Читатель может проверить, что результаты получаются такие же, какие были получены выше.

Естественно может возникнуть вопрос: если уравнение и неравенство из примеров 1 и 2 можно было решить проще, зачем они были решены более сложным путем? Исключительно для того, чтобы на этих простейших ситуациях продемонстрировать универсальную, основанную на определении модуля систему перехода от соотношения с модулем к соотношению без такового.

Коротко обсудим способы обработки уравнений или неравенств с несколькими модулями. Их можно легко свести к решению соотношений с одним модулем. Однако это можно делать эффективнее, поэтому обратимся к другим соображениям, основанным, как и выше, на определении модуля.

Сначала для каждого из подмодульных выражений найдем точки, в которых они обращаются в нуль. Отметив эти точки на числовой оси, заметим, что вся ось разобьется на промежутки, внутри каждого из которых каждое из подмодульных выражений сохраняет свой знак. Тем самым можно составить совокупность, в которую войдет столько систем, сколько промежутков разбиения у нас оказалось. Затем поступим, как со всякой совокупностью, — решим каждую из систем и объединим их решения в одно множество.

Продемонстрируем изложенные выше соображения на простейшем примере уравнения с двумя модулями.

Пример 7. Решим уравнение $|t+2| = 4 - |t-2|$.

Подмодульное выражение в левой части обращается в нуль в точке -2, в правой — в точке 2. Вся числовая ось этими точками разбивается на три промежутка, внутри каждого из которых каждое из подмодульных выражений сохраняет знак. Найдя знаки подмодульных выражений внутри этих промежутков, изобразим это схематически на рис. 7.

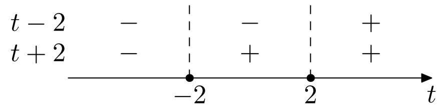


Рис. 7.

Раскрывая каждый из модулей согласно отмеченным знакам, придем к тому, что исходное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t < -2, & (1) \\ -t-2 = 4+t-2 & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} t \geqslant -2, & (3) \\ t \leqslant 2, & (4) \\ t+2 = 4+t-2 & (5) \end{cases} \\ \begin{cases} t > 2, & (6) \\ t+2 = 4-t+2. & (7) \end{cases} \end{array}\right.$$

Корнем уравнения (2) будет число $t = -2$, однако оно не удовлетворяет неравенству (1), так что система (1)–(2) решений не имеет. Уравнение (5) выполняется при всех действительных t, поэтому решения системы (3)–(5) заполняют множество $[-2, 2]$, описываемое ограничениями (3), (4). Наконец, система (6)–(7), как и система (1)–(2), решений не имеет. В итоге получаем, что множеством решений всей системы, а значит, и уравнения, будет множество $[-2, 2]$.

При создании совокупности граничные точки $t = -2$, $t = 2$ промежутков мы отнесли к промежутку $[-2, 2]$, участвующему в системе (3)–(5). Их можно было присоединить к промежуткам $(-\infty, -2)$ или соответственно $(2, +\infty)$. В таком случае $t = -2$ было бы корнем системы (1)–(2), а $t = 2$ — системы (6)–(7), и в процессе объединения эти значения все равно вошли бы в множество корней совокупности. Как определить, к какому промежутку присоединить граничные точки? Никак. Неважно, где мы их учтем, важно, чтобы они где-то были учтены.

В завершение отметим, что в качестве примеров специально были рассмотрены простые уравнения и неравенства, чтобы технические детали не заслоняли суть рассматриваемых конструкций.

ПРАКТИКА

Решить уравнения и неравенства

(1) $|x + 5| = 2x$, ответ $\{5\}$;

(2) $2|x + 1| > x + 4$, ответ $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$;

(3) $3|x - 1| \leqslant x + 3$, ответ $[0, 3]$;

(4) $|x^2 - 3x + 6| = 2x$, ответ $\{2,\ 3\}$;

(5) $x^2 - |3x - 2| - 12 = 0$, ответ $\left\{5,\ \frac{-3-\sqrt{65}}{2}\right\}$;

(6) $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$, ответ $(2, 5)$;

(7) $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geqslant 0$, ответ $(-\infty, -2/3] \cup [1/2, +\infty)$;

(8) $|6 - x| = |x - 9|$, ответ $\{15/2\}$;

(9) $|x - 4| - |2 - x| = -2$, ответ $[4, +\infty)$;

(10) $|x| + |x - 7| + 2|x - 4| = 2$, ответ $\varnothing$;

(11) $||2x - 1| - 5| + x = |6 - x|$, ответ $[1/2, 3]$;

(12) $|x^2 - 3x - 3| > |x^2 + 7x - 13|$, ответ $(-\infty, -4) \cup (1, 2)$;

(13) $|x - 1 - x^2| \leqslant |x^2 - 3x + 4|$, ответ $(-\infty, 3/2]$;

(14) $|x^2 - 3x + 2| > |x^2 - 2x - 2|$, ответ $(-\infty, 0) \cup (1, 5/4)$.

§ 3.3. Неравенства с радикалами

Неравенства с радикалами — одни из наиболее эффективных задач, развивающих навыки использования предложенных средств. Кроме того, они довольно часто встречаются либо в виде отдельных задач, либо как фрагменты других задач.

Будут рассмотрены только такие примеры, анализ которых носит достаточно общий характер и которые тем самым полезны в плане формирования математической культуры. Примеры, основанные на уникальных свойствах, решение которых требует знания специальных средств, останутся за пределами наших интересов.

ТЕОРИЯ

К теоретической части можно отнести определение квадратного корня и связанные с ним свойства и ограничения. Этот материал изложен, например, в учебниках, пособиях и в этюде, посвященном функциям, поэтому здесь его повторять не будем, а сразу перейдем к технологиям.

ТЕХНОЛОГИИ

Обсудим подробно простейшие иррациональные неравенства. К таковым можно отнести неравенства вида

$$u < \sqrt{v}$$

и

$$u > \sqrt{v}.$$

Начнем с анализа первого из них. Как отмечено в § 3.1, анализ соотношений вообще и неравенств с корнями в частности удобно проводить путем постановки вопросов и формирования ответов на них. Составим для анализа простейших неравенств с радикалами список возможных вопросов и ответов на них. Он не претендует на полноту или завершенность, может быть взят читателем за основу и модифицирован с учетом опыта и потребностей.

Начнем с постановки цели: надо возводить неравенство в квадрат.

— Когда можно возводить неравенство в квадрат?

— Когда обе его части неотрицательны.

— А у нас?

— Правая неотрицательна, а левая неизвестного знака.

— Что делать в такой ситуации?

— Рассматривать два случая — когда левая часть неотрицательна и когда она отрицательна:

либо левая часть неотрицательна, т. е. $a \geqslant 0$, **и тогда** неравенство можно возвести в квадрат, позаботившись о сохранении ограничений,

либо левая часть отрицательна, т. е. $a < 0$, **и тогда в квадрат возводить нельзя!**

— Что делать во втором случае, когда в квадрат возводить нельзя?

— Делать выводы о множестве решений на основе сравнения знаков частей, помня о том, что любое отрицательное число меньше любого неотрицательного и нет отрицательных чисел, больших хоть какого-то неотрицательного.

Подобные диалоги из вопросов и ответов полезны также при анализе других ситуаций.

Вернемся к неравенству $u < \sqrt{v}$. Правая часть неотрицательна, и если левая тоже неотрицательна, то можно возвести неравенство в квадрат: $u^2 < v$, замечая при этом, что левая часть как квадрат какого-то выражения неотрицательна, правая согласно знаку неравенства больше левой, а значит, на множестве решений последнего неравенства она также неотрицательна, поэтому имевшееся ограничение $v \geqslant 0$ выполнено автоматически. Если же левая часть отрицательна, то в квадрат возводить нельзя, и мы рассуждаем так: в неравенстве говорится о том, что отрицательное число в левой части меньше неотрицательного из правой, когда это будет? Всегда при условии выполнения ограничений, т. е. при условии $v \geqslant 0$. Подводя итог изложенному, можно констатировать, что

$$u < \sqrt{v} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u \geqslant 0, \\ u^2 < v \end{cases} \\ \begin{cases} u < 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Эту структуру можно сопроводить, например, следующим словесным описанием: **либо** левая часть u неотрицательна **и тогда** можно возвести неравенство в квадрат: $u^2 < v$, заметив, что присутствовавшее в исходном неравенстве ограничение $v \geqslant 0$ вытекает из неравенства $u^2 < v$, **либо** $u < 0$ **и тогда** исходное неравенство выполнено, лишь бы было выполнено неравенство $v \geqslant 0$.

Структуру второго неравенства, а именно

$$v > \sqrt{v},$$

можно обеспечить, например, с использованием написанного выше диалога, а можно с учетом специфики неравенства. Воспользуемся для единообразия диалогом.

Надо возводить неравенство в квадрат. Когда можно возводить неравенство в квадрат? Когда обе его части неотрицательны. А у нас? Правая неотрицательна, а левая неизвестного знака. Надо рассматривать два случая: либо левая часть неотрицательна и тогда можно возвести в квадрат, либо она отрицательна, и тогда в квадрат возводить нельзя, и надо принимать решения, сопоставляя знаки левой и правой частей: отрицательное больше неотрицательного, когда? Никогда. Так что при отрицательной левой части неравенство решений не имеет и остается только первый случай:

$$u > \sqrt{v} \Longleftrightarrow \begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0, \\ u^2 > v. \end{cases}$$

Пример 1. Решим неравенство $2x - 6 \leqslant \sqrt{x^2 - 3x + 6}$.

Согласно словесному описанию либо левая часть неотрицательна: $2x - 6 \geqslant 0$, и тогда неравенство можно возвести в квадрат: $(2x-6)^2 \leqslant x^2 - 3x + 6$, заметив, что ограничение $x^2 - 3x + 6 \geqslant 0$ обеспечено, либо левая часть отрицательна и тогда, не возводя в квадрат, заключаем, что неравенство выполнено всегда, когда выполнены имеющиеся ограничения. Тем самым

$$2x - 6 \leqslant \sqrt{x^2 - 3x + 6} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 6 \geqslant 0, & (1) \\ 4x^2 - 24x + 36 \leqslant x^2 - 3x + 6 & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 6 < 0, & (3) \\ x^2 - 3x + 6 \geqslant 0. & (4) \end{cases} \end{array} \right.$$

Неравенство (2) преобразуется к виду $x^2 - 7x + 10 \leqslant 0$, и нетрудно получить, что множеством решений системы (1)–(2) является промежуток $[3, 5]$ (рис. $1(a)$).

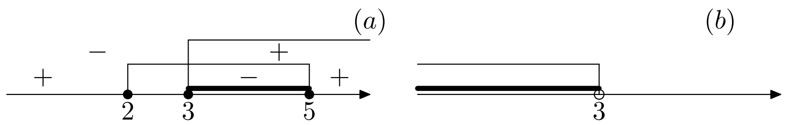


Рис. 1.

Обратившись к системе (3)–(4), заметим, что левая часть неравенства (4) в нуль не обращается, а значит, она всюду имеет один и тот же знак, поэтому неравенство либо выполнено всегда, либо не выполнено никогда, это зависит от знака неравенства и знака левой части. В нашем случае левая часть всюду положительна, а в множество решений неравенства войдут те значения x, при которых левая часть неотрицательна, так что (4) выполнено всюду. В итоге множеством решений системы (3)–(4) будет промежуток $(-\infty, 3)$ (рис. $1(b)$).

Объединяя множества решений систем (1)–(2) и (3)–(4), приходим к ответу: $(-\infty, 5]$.

Пример 2. Решим неравенство $2x-8 \geqslant \sqrt{x^2-5x+40}$.

Согласно словесному описанию либо левая часть неотрицательна: $2x-8 \geqslant 0$, и тогда неравенство можно возвести в квадрат: $(2x-8)^2 \geqslant x^2-5x+40$, позаботившись об ограничениях: $x^2-5x+40 \geqslant 0$, либо левая часть отрицательна и тогда неравенство не выполнено никогда, ибо нет отрицательных чисел, не меньших, чем какое-либо неотрицательное. Стало быть,

$$2x-8 \geqslant \sqrt{x^2-5x+40} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-4 \geqslant 0, & (1) \\ 4x^2-32x+64 \geqslant x^2-5x+40, & (2) \\ x^2-5x+40 \geqslant 0. & (3) \end{cases}$$

Неравенство (3) выполнено при всех x. Неравенство (2) легко преобразуется к такому: $x^2-9x+8 \geqslant 0$, левая часть которого обращается в нуль при $x=1$, $x=8$. Множество решений системы (1)–(3) заполняет промежуток $[8, +\infty)$ (рис. 2).

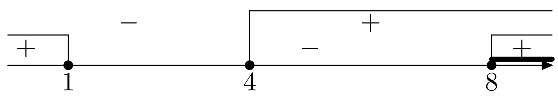


Рис. 2.

Используя методы анализа соотношений с модулем (см. § 3.2) и неравенств с корнем, решим комбинированное неравенство — с модулем и корнем, оформив решение в более кратком стиле, чем при разборе предыдущих примеров.

Пример 3. Решим неравенство $|6\sqrt{4-2x}-8| \geqslant 5-2x$.

Воспользуемся способом избавления от модуля, относящимся к неравенству вида $|z| \geqslant a$ (см. § 3.2):

$$|6\sqrt{4-2x}-8| \geqslant 5-2x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 6\sqrt{4-2x}-8 \geqslant 5-2x & (1) \\ 6\sqrt{4-2x}-8 \leqslant 2x-5. & (2) \end{array}\right.$$

Для неравенства (1) имеем

$$(1) \iff 6\sqrt{4-2x} \geqslant 13-2x$$
$$\iff \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 13-2x \geqslant 0, & (3) \\ 36(4-2x) \geqslant 169-52x+4x^2 & (4) \end{cases} \\ \begin{cases} 13-2x < 0, & (5) \\ 4-2x \geqslant 0. & (6) \end{cases} \end{array}\right.$$

Найдем множество решений последней совокупности:

$$(3) \iff x \leqslant 13/2,$$
$$(4) \iff 4x^2+20x+25 \leqslant 0 \iff (2x+5)^2 \leqslant 0 \iff x=-5/2,$$
$$(5) \iff x > 13/2, \quad (6) \iff x \leqslant 2,$$
$$(3) \cap (4) = \{-5/2\}, \quad (5) \cap (6) = \varnothing.$$

В итоге множеством решений неравенства (1) будет $\{-\frac{5}{2}\}$.

Решим неравенство (2). Имеем

$$(2) \iff 6\sqrt{4-2x} \leqslant 3+2x \iff \begin{cases} 3+2x \geqslant 0, \\ 4x^2+84x-135 \geqslant 0, \\ 4-2x \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x \geqslant -3/2, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -45/2 \\ x \geqslant 3/2, \end{array}\right. \\ x \leqslant 2. \end{cases}$$

Таким образом, множество решений неравенства (2) таково: $[3/2, 2]$.

Объединяя множества решений неравенств (1) и (2), получим ответ: $\{-5/2\} \cup [3/2, 2]$.

Решить этот пример можно было путем раскрытия модуля согласно общим рекомендациям, и читатель может это проделать самостоятельно, убедившись в том, что при таком способе объем работы по решению неравенства несколько больше, чем предложенный здесь. Тем не менее надо уметь использовать и самые общие средства.

При решении примера 3 мы активно использовали связанную с равносильностью символику и вместе с тем сообщали о том, какой фрагмент решения выполняется в данный момент. Фразы, вставленные в решение, помогают не запутаться в изобилии логических ходов.

Присутствие в соотношении модуля всегда порождает вопрос: в какой момент раскрывать модуль? В рассмотренном примере этот момент очевиден — сразу. Интересно, всегда надо в первую очередь избавляться от модуля или нет? Ответ на этот вопрос дает следующее

Наблюдение 1 (выбор момента избавления от модуля). *Если при решении соотношения с модулем можно проводить какие-то действия без раскрытия модуля, то их надо выполнить. Избавляться от модуля надо в тот момент, когда дальнейшие действия без этого невозможны.*

Покажем, как работает наблюдение 1.

Пример 4. Решим неравенство

$$\sqrt{|x+1|} \geqslant 1-2x.$$

Можно ли начать (или продолжить) решение неравенства, не трогая модуль? Ответ ясен: можно. Сначала избавимся от иррациональности. Данное неравенство является неравенством простейшего вида. Если его правая часть неотрицательна, то неравенство можно возвести в квадрат, если отрицательна, то можно констатировать, что в таком случае неравенство выполнено, так как подкоренное выражение всегда неотрицательно. Стало быть,

$$\sqrt{|x+1|} \geqslant 1-2x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{l} 1-2x \geqslant 0, \\ |1+x| \geqslant (1-2x)^2 \end{array}\right. & \begin{array}{r} (1) \\ (2) \end{array} \\ 1-2x < 0. & \quad (3) \end{array}\right.$$

Можно ли продолжать решение второго неравенства в системе без раскрытия модуля? Нет. Значит, настал момент избавления от модуля:

$$|1+x| \geqslant (1-2x)^2 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+x \geqslant (1-2x)^2 \\ 1+x \leqslant -(1-2x)^2, \end{array}\right.$$

и нетрудно установить, что множеством решений этой совокупности является промежуток $\left[0, \frac{5}{4}\right]$. Тем самым множество решений системы (1)– (2) — это отрезок $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Наконец, объединяя этот промежуток с множеством решений неравенства (3), приходим к ответу: $[0, \infty)$.

Заметим, что и здесь было использовано наблюдение, связанное с решением одного из простейших неравенств с модулем (см. § 3.2) вместо раскрытия модуля по определению.

Пример 5. Решим неравенство $\dfrac{1}{x} - 1 \leqslant \sqrt{13 - \dfrac{6}{x}}$.

При решении этого неравенства можно пойти стандартным путем, однако решим его, дважды используя полезную процедуру замены переменной (см. § 3.1), чтобы в простейших ситуациях продемонстрировать технику ее применения.

Заметим, что неизвестная x участвует в неравенстве только в выражении $\dfrac{1}{x}$, стало быть, можно сделать замену, полагая $\dfrac{1}{x} = y$. Относительно новой переменной неравенство станет таким:

$$y - 1 \leqslant \sqrt{13 - 6y}. \tag{1}$$

Решить неравенство (1) можно так, как это делали ранее. Однако на этом простом примере покажем, как работает полезное

Наблюдение 2. *Если в соотношении есть корень, под которым расположен многочлен первой степени или отношение многочленов первой степени, то можно попробовать сделать замену, взяв весь корень в качестве новой неизвестной.*

При выполнении замены надо учитывать следующее

Наблюдение 3 (см. § 3.1). *Замену надо готовить. А именно, если переменная входит в соотношение не только посредством некоторого выражения, но и отдельно от него, то надо выразить старую переменную через новую и использовать это выражение в соотношении. При этом надо проследить за ограничениями, сопровождающими новую переменную.*

Положим $z = \sqrt{13 - 6y}$ и подготовим замену, т. е. укажем ограничения на новую переменную z и выразим старую переменную через новую (последнее необходимо, так как здесь y входит в неравенство не только посредством блока $\sqrt{13 - 6y}$, но и отдельно):

$$z \geqslant 0, \quad y = \frac{13 - z^2}{6}.$$

Перейдем в неравенстве (1) к z:

$$\begin{cases} \dfrac{13 - z^2}{6} - 1 \leqslant z, \\ z \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z^2 + 6z - 7 \geqslant 0, & (2) \\ z \geqslant 0. & (3) \end{cases}$$

Левая часть неравенства (2) обращается в нуль при $z = -7$, $z = 1$. Множество его решений описывается совокупностью $\left[\begin{array}{l} z \leqslant -7 \\ z \geqslant 1, \end{array}\right.$ стало быть, множество решений системы (2)–(3) таково: $z \geqslant 1$. Подставим сюда выражение z через y и решим получаемое неравенство:

$$\sqrt{13-6y} \geqslant 1 \Longleftrightarrow 13-6y \geqslant 1 \Longleftrightarrow y \leqslant 2.$$

Вернемся к неизвестной x:

$$\frac{1}{x} \leqslant 2 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} - 2 \leqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{1-2x}{x} \leqslant 0.$$

Нули числителя и нули знаменателя левой части $x = 0$, $x = 1/2$, и неравенство выполнено на множестве $(-\infty, 0) \cup [1/2, +\infty)$.

При выполнении замены переменной в соотношении, особенно в неравенстве, надо иметь в виду следующее

Наблюдение 4 (см. § 3.1). *Если в соотношении проведена замена переменной, то надо до конца решить полученное соотношение относительно новой переменной и записать* **структуру** *множества решений, в которую подставить выражение новой неизвестной через старую и решить получаемое в терминах старой неизвестной соотношение.*

Рассмотрим несколько примеров решения неравенств с несколькими корнями, не останавливаясь на анализе общих схем — его можно провести на базе описанного выше набора вопросов. К тому же рассуждения, сопровождающие разбор примеров, носят достаточно общий характер.

Пример 6. Решим неравенство

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} < 4.$$

Надо возводить неравенство в квадрат. Обе его части положительны, стало быть, возведение в квадрат возможно при условии заботы об ограничениях. После возведения в квадрат и приведения подобных членов получаем неравенство

$$2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3} < 18-3x, \tag{1}$$

в котором сохранились все имевшиеся в первоначальном неравенстве ограничения, так что переход оказался равносильным. Снова надо возводить неравенство в квадрат. На этот раз заметим, что (1) представляет собой простейшее неравенство с корнями, процедура его анализа известна, так что после упрощений получаем

$$(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 88x + 336 > 0, \\ 18 - 3x \geqslant 0, \\ 2x + 1 \geqslant 0, \\ x - 3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Несложное решение последней системы приводит к ответу: $[3,4)$.

Заметим, что мы не стали в неравенстве (1) переходить от произведения корней к корню из произведения, так как такой переход требует внимательного отношения к ограничениям. (см., например, [7]).

Пример 7. Решим неравенство

$$\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+2}<3.$$

Можно ли возводить неравенство в квадрат? Сразу нельзя, так как неизвестен знак его левой части. Избавимся от этой неопределенности, записав неравенство в виде

$$\sqrt{3x+7}<\sqrt{x+2}+3. \tag{1}$$

Возведя в квадрат неравенство (1), проведя упрощения и позаботясь об ограничениях, можно получить, что

$$(1) \iff \begin{cases} x-2<3\sqrt{x+2}, & (2)\\ 3x+7\geqslant 0. & (3)\end{cases}$$

Имевшееся в (1) ограничение $x+2\geqslant 0$ сохранилось, поскольку это выражение пока находится под корнем. Неравенство (2) простейшего вида, его анализ показывает, что

$$(2) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2\geqslant 0,\\ x^2-13x-14<0\end{cases}\\ \begin{cases} x-2<0,\\ x+2\geqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Несложное решение последней совокупности дает ответ: $[-2,14)$.

Пример 8. Решим неравенство $\sqrt{10-2x}+\sqrt{3-x}\leqslant\sqrt{1+x}$.

Ограничения по области определения таковы:

$$10-2x\geqslant 0,\quad 3-x\geqslant 0,\quad 1+x\geqslant 0.$$

Обе части неравенства неотрицательны, следовательно, его можно возвести в квадрат:

$$10-2x+2\sqrt{10-2x}\sqrt{3-x}+3-x\leqslant 1+x, \tag{1}$$

заметив, что выражения $10-2x$ и $3-x$ остались под корнем, поэтому связанные с ними ограничения сохранились. Выражение $1+x$ из-под корня ушло, однако на множестве решений неравенства (1) его положительность обеспечена, так что дополнительно писать его в систему с (1) необязательно. Получилось, что (1) равносильно исходному неравенству. Преобразовав (1), приходим к равносильному ему неравенству

$$\sqrt{10-2x}\sqrt{3-x} \leqslant 2x-6. \tag{2}$$

Как и в примере 6, легко заключить, что (2) равносильно системе

$$\begin{cases} (10-2x)(3-x) \leqslant 4(x-3)^2, \\ 10-2x \geqslant 0, \\ 3-x \geqslant 0, \\ x-3 \geqslant 0, \end{cases}$$

в которой второе и третье неравенства вызваны областью определения, а последнее — общими ограничениями. Посмотрев на систему, можно заметить, что два последних неравенства одновременно выполнены только при $x=3$, а в таком случае решать первые два нет необходимости — достаточно проверить, будет ли $x=3$ им удовлетворять. Подставив, убеждаемся, что удовлетворяет, так что множество решений всей системы, а значит, и исходного неравенства таково: $\{3\}$.

Получение одноточечного множества в качестве множестве решений служит намеком на то, что это неравенство можно проанализировать, сравнивая функции, одна из которых не больше другой на их общей области определения, а графики пересекаются в одной точке. Действительно, убывающая функция из левой части неравенства не меньше возрастающей из правой части, и они совпадают в точке 3, являющейся правым концом их общей области определения.

Следующий пример развивает пример 5 из § 3.2.

Пример 9. Решим неравенство $x^2-\sqrt{x^2-2x} < 2x+12$.

Начнем с переноса корня в одну часть, а всего остального — в другую:

$$x^2-2x-12 < \sqrt{x^2-2x}. \tag{1}$$

Как и при решении примера 5 в § 3.2, непосредственное возведение в квадрат бесперспективно, и опыт подсказывает, что надо сделать замену. Положим $y=\sqrt{x^2-2x}$ и отметим связанное с заменой ограничение: $y \geqslant 0$. Выражать старую неизвестную через новую нет необходимости — отдельно она в неравенстве не участвует.

Относительно y неравенство (1) приведет к системе

$$\begin{cases} y^2-y-12<0, \\ y \geqslant 0, \end{cases} \tag{2}$$

множество решений которой описывается системой $\begin{cases} y < 4, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

Ориентируясь на наблюдение 4, мы записали множество решений системы (2) относительно новой неизвестной в виде структуры для того, чтобы было видно, куда подставить выражение y через x для получения соответствующей структуры относительно x. Теперь вернемся к неизвестной x:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2x} < 4, \\ \sqrt{x^2-2x} \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-2x < 16, \\ x^2-2x \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 1+\sqrt{17}, \\ x > 1-\sqrt{17}, \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ x \leqslant 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

Запишем ответ как объединение промежутков: $(1-\sqrt{17}, 0] \cup [2, 1+\sqrt{17})$.

Сопроводим решение этого примера небольшим комментарием. При решении системы (2) сначала решаем неравенство $y^2-y-12 < 0$, для чего находим нули левой части $y=-3$, $y=4$. Посмотрев на неравенство $y \geqslant 0$, можно заметить, что $y=-3$ ему не удовлетворяет и на этом основании попробовать вовсе не принимать во внимание $y=-3$. Но тогда для дальнейшего решения придется затратить определенные усилия, чтобы из оставшейся информации скомпоновать множество решений, что не всегда и не у всех получается. Мы не стали убирать из рассмотрения значение $y=-3$, руководствуясь тем соображением, что, решая систему неравенств, следует решить каждое из составляющих ее неравенств по отдельности и только затем найти множество решений системы как пересечение найденных множеств.

При решении системы (2) может появиться мысль для первого неравенства выписать нули левой части, т. е. найти $y=-3$, $y=4$, и, не продолжая решать неравенство, попытаться вернуться к неизвестной x, т. е. подставить выражение $\sqrt{x^2-2x}$ на место y в эти равенства. При таком подходе могут возникнуть трудности в поиске множества решений неравенства, в частности, непонятно, что делать с возникающим равенством $\sqrt{x^2-2x}=-3$. Тем самым учет наблюдения 4 помогает избежать ошибок.

Пример 10. Решим неравенство

$$\frac{7}{\sqrt{x+1}+3} + \frac{2}{x-8} \geqslant 1.$$

В неравенстве участвует корень, под которым стоит многочлен первой степени. Воспользуемся наблюдением 2, согласно которому в таком случае стоит попробовать сделать замену, взяв весь корень в качестве новой неизвестной. Положим $\sqrt{x+1} = y$, тогда $x = y^2 - 1$ и $y \geqslant 0$. Переходя к новой неизвестной, получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{7}{y+3} + \dfrac{2}{y^2-9} - 1 \geqslant 0, & (1) \\ y \geqslant 0. & (2) \end{cases}$$

Решим неравенство (1). После приведения к общему знаменателю имеем

$$\frac{7(y-3)+2-y^2+9}{y^2-9} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{y^2-7y+10}{y^2-9} \leqslant 0.$$

Нули числителя $y = 2$, $y = 5$, нули знаменателя $y = -3$, $y = 3$. При подготовке структуры множества решений в новой переменной полезна графическая поддержка, поэтому изобразим эти значения на числовой прямой и проделаем все шаги процедуры решения рациональных неравенств методом интервалов. Результат представлен на рис. 3(a).

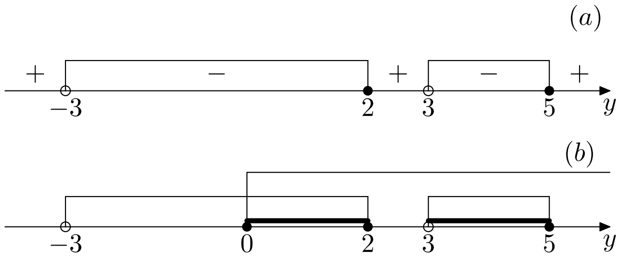


Рис. 3.

Добавив к этой информации ограничения (2), связанные с заменой, получим картину, изображенную на рис. 3(b), из которой видна структура множества решений системы (1)–(2):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geqslant 0, \\ y \leqslant 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y > 3, \\ y \leqslant 5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Подставив в нее на место y выражение $\sqrt{x+1}$, получим соотношение

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+1} \geqslant 0, \\ \sqrt{x+1} \leqslant 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+1} > 3, \\ \sqrt{x+1} \leqslant 5 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x \leqslant 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 8, \\ x \leqslant 24. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $[-1, 3] \cup (8, 24]$.

Решим это неравенство без замены. Попытка привести дроби в левой части к общему знаменателю приводит к громоздким выражениям, поэтому так поступать не будем. Обратив внимание на корень в знаменателе дроби, избавимся от иррациональности в знаменателе, домножив числитель и знаменатель на «сопряженное выражение», т. е. на $\sqrt{x+1}-3$ (легко заметить, что это не нарушает множества решений):

$$\frac{7(\sqrt{x+1}-3)}{(\sqrt{x+1}+3)(\sqrt{x+1}-3)}+\frac{2}{x-8}\geqslant 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{7(\sqrt{x+1}-3)}{x-8}+\frac{2}{x-8}-1\geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{7\sqrt{x+1}-x-11}{x-8}\geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>8, \\ 7\sqrt{x+1}\geqslant x+11 \end{cases} \\ \begin{cases} x<8, \\ 7\sqrt{x+1}\leqslant x+11. \end{cases} \end{array}\right.$$

Множество решений этого соотношения совпадает с найденным выше множеством (выкладки оставим читателю).

Пример 11. Решим неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2-x^2}}\leqslant \sqrt{x+1}+\sqrt{2-x^2}. \qquad (1)$$

Можно перенести всё в левую часть, привести к общему знаменателю, получив в числителе выражение без радикалов, а затем разобраться с ситуацией сравнения дроби с нулем. Трудолюбивый читатель может этот путь проделать. Мы же вспомним, что нельзя безоговорочно умножать или делить неравенство на выражение, знак которого не гарантирован (и может меняться), однако если такое выражение положительно, то на него неравенство можно умножить или разделить. Мы привыкли умножать, но знаменатель дроби в левой части неизвестного знака, а вот выражение в правой части положительно, и если на него разделим, то получим равносильное данному неравенство, учтя после преобразований имевшиеся в неравенстве ограничения. Проделав намеченное действие, придем к равносильной данному неравенству системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+x-1}-1\leqslant 0, \\ x+1\geqslant 0, \\ 2-x^2\geqslant 0. \end{cases}$$

Преобразуем первое из неравенств системы:

$$\frac{1}{x^2+x-1}-1 \leqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x^2+x-1} \geqslant 0.$$

Нули числителя $x = -2$, $x = 1$, нули знаменателя $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Несложные преобразования приводят к ответу: $[-1, (\sqrt{5}-1)/2) \cup [1, \sqrt{2}]$.

Решить это неравенство можно и не прибегая к редко встречающимся средствам, а используя более стандартные, например, избавление от иррациональности в знаменателе. А именно, умножив числитель и знаменатель дроби в левой части на сопряженное к знаменателю выражение, избавимся от иррациональности в знаменателе:

$$(1) \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x^2}}{x+1-2+x^2} \leqslant \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x^2}}{x+1-2+x^2}$$
$$\Longleftrightarrow (\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x^2})\left(\frac{1}{x^2+x-1}-1\right) \leqslant 0.$$

Поскольку левый множитель неотрицателен, можно перейти к равносильной последнему неравенству системе, учитывающей ограничения:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+x-1} \geqslant 0, \\ 2-x^2 \geqslant 0, \\ x+1 \geqslant 0, \end{cases}$$

совпадающей с полученной выше.

Пример 12. Решим неравенство

$$\sqrt{x^2+x-2}+6 > 2\sqrt{x+2}+3\sqrt{x-1}.$$

Надо возводить неравенство в квадрат. Обе его части неотрицательны, значит, можно возвести в квадрат, позаботившись об ограничениях. Получим равносильное данному неравенство

$$x^2+x-2+12\sqrt{x^2+x-2}+36 > 4(x+2)+12\sqrt{x+2}\sqrt{x-1}+9(x-1). \quad (1)$$

Заметим, что $(x+2)(x-1) = x^2+x-2$, поэтому при условиях $x+2 \geqslant 0$ и $x-1 \geqslant 0$ можно все слагаемые с радикалами сократить. При этом ограничения $x+2 \geqslant 0$, $x-1 \geqslant 0$ исчезнут, и их надо включить в систему с полученным неравенством. С учетом простейших преобразований неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 12x + 35 > 0, \\ x + 2 \geqslant 0, \\ x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 7 \\ x < 5, \end{array}\right. \\ x \geqslant 1. \end{cases}$$

Эту структуру запишем в виде множества и получим ответ: $[1, 5) \cup (7, +\infty)$.

Решим это неравенство иным путем. С целью упростить и сделать более эффективными преобразования введем обозначения $\sqrt{x+2} = a$, $\sqrt{x-1} = b$. Перенеся все слагаемые из правой части неравенства в левую, получим в новых обозначениях неравенство

$$ab + 6 - 2a - 3b > 0.$$

Разложим выражение, стоящее в левой части неравенства, на множители путем группировки:

$$(a - 3)(b - 2) > 0.$$

Следовательно, наше неравенство можно записать так:

$$(\sqrt{x+2} - 3)(\sqrt{x-1} - 2) > 0.$$

Его структура такова:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+2} > 3, \\ \sqrt{x-1} > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+2} < 3, \\ \sqrt{x-1} < 2 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x > 7 \\ \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x < 5. \end{cases} \end{array}\right.$$

В итоге получили тот же результат, что и выше.

ПРАКТИКА

Упражнение. Решить неравенства

(1) $\sqrt{x^2 - x - 2} \leqslant x - 1$, ответ $[2, 3]$;

(2) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} < 3$, ответ $[1, 3/2)$;

(3) $\sqrt{-x^2 - 8x - 12} > x + 4$, ответ $[-6, -4 + \sqrt{2})$;

(4) $\sqrt{8 + 2x - x^2} > 6 - 3x$, ответ $(1, 4]$;

(5) $\sqrt{5x - 2x^2 + 3} \leqslant 3 - x$, ответ $[1/2, 2/3] \cup \{3\}$;

(6) $\sqrt{3x^2+5x-2} \leqslant 2+x$, ответ $\{-2\} \cup [1/3, 3/2]$;

(7) $\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x+1} < 3$, ответ $[4/5, 1)$;

(8) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} - 4 < 0$, ответ $[3, 4)$;

(9) $\sqrt{x^2-6x+8} - \sqrt{x^2-7x+10} < 1$,
ответ $(-\infty, 2] \cup \left(\frac{11+2\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$;

(10) $\sqrt{x^2-2x} - \sqrt{x^2-x-2} < 1$, ответ $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{28}}{3}\right) \cup [2, +\infty)$;

(11) $\sqrt{3x+\sqrt{9-x^2}} < \sqrt{3x+3}$, ответ $[-3/\sqrt{10}, 0) \cup (0, 3]$;

(12) $\sqrt{5x+\sqrt{4-x^2}} < \sqrt{5x+2}$, ответ $[-\sqrt{2/13}, 0) \cup (0, 2]$;

(13) $\sqrt{4x-4} + \sqrt{x+1} \leqslant \sqrt{3-x}$, ответ $\{1\}$;

(14) $\sqrt{5-3x} + \sqrt{1-x} \leqslant \sqrt{x+1}$, ответ $\{1\}$;

(15) $x^2 - 2\sqrt{x^2-x} \leqslant x+15$, ответ $\left(\frac{1-\sqrt{101}}{2}, 0\right] \cup \left[1, \frac{1+\sqrt{101}}{2}\right)$;

(16) $2\sqrt{x^2+x} - x > x^2 - 8$, ответ $\left(-\frac{1+\sqrt{65}}{2}, -1\right] \cup \left[\frac{\sqrt{65}-1}{2}\right)$;

(17) $\dfrac{2}{x} + 3 \leqslant \sqrt{41 - \dfrac{16}{x}}$, ответ $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$;

(18) $1 - \dfrac{2}{x} \leqslant \sqrt{25 - \dfrac{24}{x}}$, ответ $(-\infty, -1/6] \cup [24/25, +\infty)$;

(19) $\sqrt{3x^2-18x+15} + 8 \geqslant 2x$, ответ $(-\infty, 1] \cup \{7\}$;

(20) $4\sqrt{x^2+5x-50} + 10 \geqslant 5x$, ответ $(-\infty, -10] \cup \{10\}$;

(21) $\dfrac{\sqrt{(7-x)(x^2-4x+3)}}{x-1} \leqslant x-3$, ответ $[-1, 1) \cup \{3\} \cup [-2, 1]$;

(22) $\dfrac{\sqrt{(1-x)(x^2+8x+15)}}{x+5} \leqslant x+3$, ответ $[-7, -5) \cup \{3\} \cup [-2, 1]$;

(23) $\dfrac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x-1}-1} \leqslant 5$, ответ $[1, 25/16] \cup (2, +\infty)$;

(24) $\dfrac{7\sqrt{x}-9}{\sqrt{x-2}-1} \leqslant 9$, ответ $[2, 3) \cup [81/16, +\infty)$;

(25) $|6\sqrt{2x-6} - 8| \geqslant 2x-5$, ответ $[3, 7/2] \cup \{15/2\}$;

(26) $|16\sqrt{x-4} - 25| \geqslant 2x-1$, ответ $[4, 5] \cup \{20\}$.

§ 3.4. Системы уравнений

Занимаясь решением уравнений, мы в качестве их структуры получали системы или совокупности, состоящие из уравнений и неравенств, но ни разу не встретилась система, состоящая только из уравнений. В самом деле, структура уравнения появлялась как соединение преобразованного уравнения и тех ограничений (всегда в виде неравенств), которые исчезали в результате преобразований. Однако можно отдельно ставить задачу решения системы из двух или более соотношений.

Обращаясь к графической интерпретации, можно сказать, что уравнение с двумя переменными описывает множество, при подходящих условиях (обычно выполненных для всех рассматриваемых в пределах школьного курса математики) изображаемое на координатной плоскости в виде некоторой непрерывной линии. Ясно, что возникают трудности с тем, что может быть в качестве наиболее простого описания этого множества. Однако если уравнений два, в каждом из которых две переменных, то образно их можно интерпретировать как две линии, и тогда их пересечением, т. е. множеством решений соответствующей системы уравнений, может оказаться более простое множество, например, конечное. Тем самым естественно ставить задачи решения систем уравнений, в которых число переменных совпадает с числом уравнений. Если этого нет, то решение системы связано с чем-то исключительным, и о таких стстемах здесь речи не пойдет.

ТЕОРИЯ

Рассмотрим преобразования систем, сохраняющие множества их решений, т. е. обеспечивающие переход к равносильным соотношениям. Для простоты будем вести речь только о системе двух уравнений с двумя неизвестными — для случая более чем двух уравнений и неизвестных все рассуждения можно дословно повторить, изменив только количество уравнений и неизвестных. Тем самым основным объектом внимания будет система

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Общие средства перехода к равносильной системе немногочисленны. Отметим, во-первых, что простейшие преобразования любого из уравнений системы, такие как перенос из одной части в другую, вынесение общего множителя за скобки, раскрытие скобок и т. п., не влияют на множество решений, так что приводят к равносильным системам.

Далее, чтобы перейти к равносильной системе, можно выполнить одно из следующих действий:

(a) умножить какие-то из уравнений системы на отличные от нуля числа (коэффициенты), просуммировать результаты и на место одного из затронутых уравнений поставить полученную сумму с коэффициентами;

(b) в одном из уравнений выразить одну неизвестную через остальные и подставить полученное выражение во все оставшиеся уравнения, оставив, разумеется, в системе и данное уравнение;

(c) заменить какое-либо уравнение равносильным ему соотношением (уравнением, системой или совокупностью).

Запишем указанные действия на математическом языке и проведем обоснования равносильностей.

(a) Система (4.1) равносильна системе

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ \alpha f(x,y) + \beta g(x,y) = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

где α, β — отличные от нуля вещественные числа.

Убедимся в равносильности (4.1) $\iff$ (4.2). Пусть (x,y) — решение системы (4.1). Тогда $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ — верные числовые равенства, а следовательно, $\alpha f(x,y) + \beta g(x,y) = 0$ для такой пары (x,y) при любых α, β, так что из (4.1) следует (4.2). Обратно, пусть (x,y) — решение системы (4.2). Тогда $f(x,y) = 0$ — верное числовое равенство и из второго уравнения системы (4.2) имеем $g(x,y) = -\dfrac{\alpha}{\beta} f(x,y) = 0$, так что (x,y) — решение системы (4.1).

(b) Предположим, что в первом уравнении системы (4.1) переменную y можно выразить через x. Это значит, что есть такая функция $y = \varphi(x)$, что равенство $f(x,y) = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $y = \varphi(x)$. Подставив выражение y через x во второе уравнение, получим систему

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ g(x, \varphi(x)) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Покажем, что (4.3) $\iff$ (4.1). Действительно, пусть (x,y) — решение системы (4.1). Поскольку пара (x,y) обращает в верное числовое равенство первое уравнение, верно и равносильное ему равенство $y = \varphi(x)$, а так как для этой пары верно равенство $g(x, y) = 0$, имеем

$$g(x, \varphi(x)) = g(x, y) = 0.$$

Тем самым из (4.1) следует (4.3).

Обратно, пусть (x, y) обращает в верное числовое равенство оба уравнения системы (4.3). Так как по предположению равенство $y = \varphi(x)$ равносильно равенству $f(x, y) = 0$, первое уравнение системы выполнено. Обратимся ко второму. Ввиду того, что $y = \varphi(x)$, получим

$$g(x, y) = g(x, \varphi(x)) = 0,$$

поэтому и второе уравнение системы (4.1) — верное числовое равенство.

(c) Это утверждение достаточно понятно: множество решений системы представляет собой пересечение множеств пар (x, y), удовлетворяющих всем уравнениям. Замена каких-то уравнений равносильными им соотношениями не меняет множеств корней этих уравнений, а значит, и не изменит пересечения.

Отдельно отметим такое важное

Наблюдение. *Если в системе* (4.1), *например, функция* $g(x, y)$ *оказалась представленной в виде произведения, т. е.*

$$g(x, y) = g_1(x, y) \cdot g_2(x, y),$$

то уравнение $g(x, y) = 0$ *равносильно совокупности*

$$\left[\begin{array}{l} g_1(x, y) = 0 \\ g_2(x, y) = 0, \end{array}\right.$$

разумеется, с учетом ограничений. Такая равносильность позволяет (при условии сохранения ограничений) заменить систему вида (4.1) *равносильной ей системой*

$$\left\{\begin{array}{l} f(x, y) = 0, \\ \left[\begin{array}{l} g_1(x, y) = 0 \\ g_2(x, y) = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x, y) = 0, \\ g_1(x, y) = 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x, y) = 0, \\ g_2(x, y) = 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Тем самым для получения всех решений исходной системы можно решить две системы в последней совокупности и затем объединить множества их решений.

ТЕХНОЛОГИИ

Одним из распространенных способов решения систем является замена переменных. Допустим, что в системе удалось выделить какие-то повторяющиеся выражения, составленные из переменных. Тогда если каждое из них обозначить одной новой буквой (разумеется, разные выражения разными буквами), иначе говоря, сделать замену переменных, то наша система превращается в другую систему относительно новых неизвестных. Если удается ее решить, то после этого для нахождения корней исходной системы предстоит решить одну или несколько систем, связывающих новые неизвестные со старыми.

К примеру, если в системе (4.1) удалось сгруппировать переменные так, что они входят в систему только посредством некоторых выражений $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, т. е. система имеет вид

$$\begin{cases} F(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0, \\ G(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

где F, G — некоторые функции, то, положив $\varphi(x, y) = u$, $\psi(x, y) = v$, приходим к системе

$$\begin{cases} F(u, v) = 0, \\ G(u, v) = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

и если (u, v) — какое-либо решение системы (4.5), то, решив систему

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = u, \\ \psi(x, y) = v, \end{cases} \tag{4.6}$$

получим решение системы (4.1), а рассмотрев системы вида (4.6) со всеми решениями системы (4.5) — множество всех решений исходной системы.

Иногда при компоновке переменных в какие-то выражения не удается все вхождения неизвестных учесть в таких выражениях и они остаются отдельно, за пределами подготовленных выражений. В таком случае замену можно проводить, только если удается выразить старые неизвестные через новые из формул, осуществляющих замену, чтобы получить новую систему относительно новых неизвестных.

Ввиду разнообразия систем с двумя или тремя переменными практически невозможно сформировать эффективные технологии их решения. При решении систем важны наблюдательность, способность к комбинированию и свободное владение техникой преобразований. Нередко полезна замена переменных. В связи с этим ограничимся несколькими примерами, в каждом из которых постараемся провести обсуждение и сообщить что-нибудь поучительное для решения систем.

Пример 1. Решим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ 3x + y - z = 3, \\ -5z - y + 2z = 0. \end{cases} \tag{1}$$

При решении систем важна наблюдательность. Так, в системе (1) можно заметить, что в первом уравнении участвует z, во втором $-z$, а в третьем $2z$, поэтому если ко второму уравнению прибавить первое, то z в такой сумме исчезнет, и это же произойдет, если из третьего уравнения вычесть удвоенное первое. Проделаем это:

$$(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ 4x - y = 4, \\ -7x + 3y = -2. \end{cases}$$

Теперь избавимся, например, от y в третьем уравнении. Для этого к третьему уравнению прибавим второе, умноженное на 3. Получим

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ 4x - y = 4, \\ 5x = 10. \end{cases}$$

Последовательно выразим x из последнего уравнения, подставим во второе, найдем y, после чего результат подставим в первое и найдем z. В итоге получим ответ: $\{(2, 4, 7)\}$.

Пример 2. Решим систему

$$\begin{cases} x^2 - 5y^2 + 4xy = 0, \\ x^2 - 8y^2 - 7xy = 52. \end{cases}$$

В этой системе левые части обоих уравнений представляют собой однородные многочлены степени 2, т. е. они составлены исключительно из одночленов второй степени. Кроме того, первое уравнение однородное в том смысле, что его правая часть равна 0. В этом случае в первом уравнении можно вынести за скобки либо x^2, либо y^2 и разобраться с равным нулю произведением. Прежде чем это делать, изучим, изменяет предположение $x = 0$ множество решений или нет. Если $x = 0$, то из первого уравнения следует, что тогда и

$y = 0$, но пара $(0, 0)$ не удовлетворяет второму уравнению. Поэтому предположение $x \neq 0$ и деление на x^2 не изменит множества решений.

После деления вместо первого уравнения получим такое:

$$1 - 5\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4\frac{y}{x} = 0,$$

а это квадратное уравнение относительно неизвестной $t = \dfrac{y}{x}$:

$$5t^2 - 4t - 1 = 0.$$

Его корнями будут числа $t_1 = 1$, $t_2 = -1/5$. Вся система превратилась в совокупность двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x, \\ x^2 - 8y^2 - 7xy = 52 \end{cases} \\ \begin{cases} -5y = x, \\ x^2 - 8y^2 - 7xy = 52. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение этих систем не представляет проблем — надо в каждой системе информацию из первого уравнения подставить во второе, получить квадратное уравнение и завершить решение. Проделаем это. Во втором уравнении первой системы подставим на место y букву x, в результате получим

$$x^2 - 8x^2 - 7x^2 = 52 \Longleftrightarrow -14x^2 = 52,$$

что невозможно. Проделаем аналогичное действие со второй системой:

$$25y^2 - 8y^2 + 35y^2 = 52 \Longleftrightarrow 52y^2 = 52 \Longleftrightarrow y = \pm 1.$$

Этим значениям y соответствуют значения $x = \mp 5$. Пришли к ответу: $\{(-5, 1), (5, -1)\}$.

Пример 3. Если левые части уравнений суть однородные многочлены второй степени, а правые отличны от нуля, то комбинированием можно добиться того, что одно из получаемых в результате уравнений будет справа иметь 0.

Проведем начальные преобразования в системе

$$\begin{cases} 4x^2 + 2xy = 3, \\ y^2 + 2xy = -2. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 2, второе на 3, сложим их и результат поставим вместо первого уравнения, сохранив второе:

$$\begin{cases} 8x^2 + 3y^2 + 10xy = 0, \\ y^2 + 2xy = -2. \end{cases}$$

Получили ситуацию, разобранную в примере 2, завершить решение предлагаем читателю.

Пример 4. Решим систему

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21, \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

Мысль о том, чтобы выразить какую-то неизвестную из одного уравнения и подставить во второе, надо прогнать как непродуктивную. Вместо этого присмотримся к уравнениям на предмет чего-то особенного. Переменные входят в них симметрично, т. е. если пара чисел (a, b) — решение системы, то и пара (b, a) тоже ее решение. Пробовать составить сумму уравнений с какими-то коэффициентами малоперспективно — в уравнениях слишком разные степени неизвестных. Кстати, симметрия может навести на мысль попробовать так преобразовать уравнения, чтобы в них неизвестные участвовали посредством каких-то блоков и никак иначе не входили. Во втором уравнении такие выражения просматриваются — это $x^2 + y^2$ и xy, в которые переменные входят симметрично. Надо в первом уравнении выделить полный квадрат суммы чисел x^2 и y^2, для чего в левой его части надо прибавить и вычесть выражение x^2y^2. Тогда первое уравнение станет таким: $(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = 21$. Видим, что теперь и в нем неизвестные участвуют только посредством выражений $x^2 + y^2$, xy и никак иначе. Это говорит о целесообразности замены. Положим

$$u = x^2 + y^2, \quad v = xy, \tag{1}$$

заметив, что эта замена сопровождается ограничением $u \geqslant 0$. В общем случае не будем выяснять условия на u и v, при которых систему (1) можно разрешить относительно x и y, если известны u, v. Когда удастся решить систему в новых неизвестных, по каждому ее решению организуем возврат к старым неизвестным x, y.

В переменных u, v система будет выглядеть так:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 21, \\ u + v = 3. \end{cases}$$

Разложим разность в первом уравнении по формуле разности квадратов и на место суммы поставим ее значение из второго уравнения, в результате придем к следующей равносильной системе:

$$\begin{cases} u - v = 7, \\ u + v = 3, \end{cases}$$

решением которой будет пара $u = 5$, $v = -2$.

Теперь надо вернуться к неизвестным x, y, т. е. решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -2. \end{cases}$$

Выразив y через x из второго уравнения и подставив это выражение в первое, получим биквадратное уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, из которого получим $x^2 = 4$ или $x^2 = 1$, откуда собирается множество решений нашей системы: $\{(2, -1), (-2, 1), (1, -2), (-1, 2)\}$.

Пример 5. Решим систему

$$\begin{cases} -2xy + 2yz + xz &= -10y, \\ -4xy + 3yz &= 6y, \\ 23xy - 16yz - 3xz &= -y. \end{cases}$$

Вряд ли здесь надо выражать какие-то неизвестные через оставшиеся и подставлять в другие уравнения. Поэтому будем присматриваться и искать особенности именно этой системы. Во-первых, участие одинаковых произведений xy, yz, xz может быть намеком на то, чтобы поумножать уравнения на какие-то числа и поскладывать для упрощения. Однако можно еще заметить, что во втором уравнении неизвестная y входит множителем во все одночлены. Мысль о том, что на y можно бы сократить, надо сразу прогнать и вспомнить, что в этом случае надо делать — переносить всё в одну часть, выносить общий множитель за скобки и разбираться с равным нулю произведением:

$$-4xy + 3yz = 6y \Longleftrightarrow y(4x - 3z + 6) = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ 4x - 3z + 6 = 0. \end{array}\right.$$

Рассмотрим отдельно два случая соответственно уравнениям совокупности. Если $y = 0$, то из первого и третьего уравнений исходной системы получаем $xz = 0$, а такое возможно, когда либо $x = 0$, z любое, либо $z = 0$, x любое. Таким образом, получаем два бесконечных множества корней:

$$\{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}, \quad \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Пусть теперь $4x - 3z + 6 = 0$. Можно попробовать выразить либо x через z, либо z через x с целью подстановки в первое и третье уравнения. Однако вспомним, что системы в первую очередь предполагают наблюдательность. Избавившись в первом или третьем уравнении от произведения xz, придем к уравнению, в которое y также входит отдельным множителем, а в другом останутся x и z. Для удаления xz умножим первое уравнение на 3 и результат прибавим к третьему. Получим

$$17xy - 10yz = -31y \Longleftrightarrow y(17x - 10z + 31) = 0.$$

Случай $y = 0$ уже рассмотрен, осталось рассмотреть случай

$$17x - 10z = -31.$$

Решив систему

$$\begin{cases} -4x + 3z = 6, \\ 17x - 10z = -31, \end{cases}$$

находим $x = -3$, $z = -2$. Для нахождения y подставим эти значения в первое уравнение:

$$6y - 4y + 6 = -10y \Longleftrightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

Итак, к полученному выше добавим в ответ одноэлементное множество $\{(-3, -1/2, -2)\}$.

Пример 6. Решим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ xz + yz = 35, \\ (x - z)(y - z) = 2, \end{cases}$$

в которой наблюдательности требуется немного больше, чем в предыдущих.

Обратим внимание на то, что решения системы симметричны по x и y, т. е. если тройка (a, b, c) — решение системы, то и тройка (b, a, c) тоже ее решение. Значит, можно попробовать выделить блок вида $x + y$ (об этом подсказывает второе уравнение) и хотя бы частично сделать замену для упрощения. Прибавив к обеим частям первого уравнения выражение $2xy$, запишем его так: $(x + y)^2 = z^2 + 2xy$. Во втором уравнении вынесем за скобки общий множитель z, и оно станет таким: $(x + y)z = 35$. В третьем раскроем скобки и приведем подобные члены, в результате будет $xy - (x + y)z + z^2 = 2$. Просматривается замена

$$x + y = u, \quad xy = v, \quad z = z. \tag{1}$$

В новых неизвестных система запишется так:

$$\begin{cases} u^2 = z^2 + 2v, \\ uz = 35, \\ v - uz + z^2 = 2. \end{cases}$$

Подставив на место uz в третьем уравнении его значение из второго, получим на месте третьего такое уравнение: $v + z^2 = 37$. Если выразить v через z и подставить в первое уравнение, то получим в новом уравнении только неизвестные u и z, как и во втором, и останется продолжить уже решение системы из двух уравнений с двумя неизвестными. Проделаем: выразив из третьего $v = 37 - z^2$ и подставив в первое, получим

$$u^2 - 74 + 2z^2 = z^2 \Longleftrightarrow u^2 + z^2 - 74 = 0.$$

Подставив сюда выражение $u = \dfrac{35}{z}$ из второго уравнения, получим биквадратное уравнение $z^4 - 74z^2 + 35^2 = 0$. Его решениями будут

$$z_1 = 5, \quad z_2 = -5, \quad z_3 = 7, \quad z_4 = -7.$$

Соответственно этим значениям z получим

$$u_1 = 7, \quad u_2 = -7, \quad u_3 = 5, \quad u_4 = -5$$

и

$$v_1 = 12, \quad v_2 = 12, \quad v_3 = -12, \quad v_4 = -12.$$

Пора возвращаться, т. е. выражать x, y через найденные значения u, v, а именно решать систему

$$\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v. \end{cases}$$

Поскольку значений (u, v) четыре пары, возможно, проще выразить x, y через u, v в общем виде, узнать, при каких условиях на u и v это возможно, а потом подставить конкретные значения в общие формулы. Выражая из первого уравнения последней системы $y = u - x$ и подставляя эту информацию во второе, получим уравнение

$$x(u - x) = v \Longleftrightarrow x^2 - ux + v = 0,$$

которое имеет решение, когда

$$D = u^2 - 4v \geqslant 0, \tag{2}$$

и решения будут выражаться формулой

$$x = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4v}}{2}.$$

Ясно, что последние два набора условию (2) не удовлетворяют, а из первых двух получаем четыре набора корней исходной системы: $\{(\pm 3, \pm 4, \pm 5), (\pm 4, \pm 3, \pm 5)\}$.

ПРАКТИКА

Упражнение. Решить системы уравнений

(1) $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 21, \\ \sqrt{x^3 y} + \sqrt{xy^3} = 90, \end{cases}$ ответ $\{(12, 3), (3, 12)\}$;

(2) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x^2 y + xy^2 = 30, \end{cases}$ ответ $\{(3, 2), (2, 3), (5, 1), (1, 5)\}$;

(3) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 26 \\ x^2 y - xy^2 = 6, \end{cases}$ ответ $\{(3, 1), (-1, -3)\}$;

(4) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 16, \\ x + y = 2, \end{cases}$ ответ $\{(0, 2), (2, 0)\}$;

(5) $\begin{cases} xy + 2xz - 3yz = xyz, \\ 2xy - 6xz + 6yz = xyz, \\ -xy + 2xz + 9yz = 3xyz, \end{cases}$

ответ $\{(3, 2, 1)\} \cup \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} \cup$
$\cup \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$;

(6) $\begin{cases} xy + 5yz - 6xz = -2z, \\ 2xy + 9yz - 9xz = -12z, \\ yz - 2xz = 6z, \end{cases}$

ответ $\{(-2, 2, 1/6)\} \cup \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$;

(7) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \end{cases}$ ответ $\{(4, 4)\}$;

(8) $\begin{cases} x + y - \sqrt{\dfrac{x + y}{x - y}} = \dfrac{12}{x - y}, \\ xy = 15, \end{cases}$

ответ $\{(5, 3), \big(-\sqrt{\frac{3\sqrt{109}+9}{2}}, -\sqrt{\frac{3\sqrt{109}-9}{2}}\big)\}$;

(9) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x - y}{x + y}} + \sqrt{\dfrac{x + y}{x - y}} = \dfrac{10}{3}, \\ xy - 2x - 2y - 2 = 0, \end{cases}$ ответ $\{(5, 4), (-1/2, -2/5)\}$;

(10) $\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2, \\ x^2+y^2-4x=0, \end{cases}$ ответ $\{(0,0)\}$;

(11) $\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4, \\ x^2+y^2-6x+5=0, \end{cases}$ ответ $\{(5,0)\}$;

(12) $\begin{cases} \dfrac{2x}{y}+\dfrac{3y}{x}-6=\dfrac{3}{xy}, \\ \dfrac{6y}{x}+\dfrac{4x}{y}+1=\dfrac{45}{xy}, \end{cases}$

ответ $\{(3,1),(-3,-1),(\sqrt{6}/2),\sqrt{6}),(-\sqrt{6}/2),-\sqrt{6})\}$;

(13) $\begin{cases} x+y+z=4, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ xy+xz-yz=7, \end{cases}$ ответ $\{(2,3,-1),(2,-1,4)\}$;

(14) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8, \\ x+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{xy}=2, \end{cases}$ ответ $\{(25,9),(49/4,81/4)\}$.

Литература

1. *Багаев Г. Н., Вертгейм Б. А., Войтишек В. В., Цецохо В. А.* Письменные экзамены по математике. Новосибирск: НГУ, 1970.

2. *Белоносов В. С., Фокин М. В.* Задачи вступительных экзаменов по математике. — Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2005. — 606 с. (Книга доступна по ссылке www.mmf.nsu.ru/pupil/book).

3. *Дятлов В. Н.* Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 5. Тригонометрические уравнения. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. — 80 с.

4. *Дятлов В. Н.* Технологии решения задач: Лекция 2. Общие методы анализа уравнений и неравенств. Уравнения с радикалами // Математика: Методический журнал для учителей математики. 2012. № 6. С. 46–52.

5. *Дятлов В. Н.* Технологии решения задач: Лекция 3. Метод интервалов решения неравенств. Соотношения с модулями // Математика: Методический журнал для учителей математики. 2012. № 7. С. 43–49.

6. *Дятлов В. Н.* Рассуждения о преподавании математического анализа. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2018. — 154 с.

7. *Дятлов В. Н., Дмитриева Ю. А.* Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 6. Показательные и логарифмические соотношения. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. — 64 с.

8. *Дятлов В. Н., Дятлов Г. В., Дмитриева Ю. А.* Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 3. Уравнения, неравенства, системы. Соотношения с корнями (радикалами). — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2008. — 64 с.

Оглавление

Дятлов Владимир Николаевич

Математические этюды
для абитуриентов, учащихся, учителей

Этюд 3. Уравнения, неравенства, системы.
Соотношения с корнями (радикалами)

Подписано в печать 28.02.2019. Формат $60 \times 84\ {}^{1}/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4,8. Уч.-изд. л. 4,8. Тираж 150 экз. Заказ № 27.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.