УДК 373.167.1:51
ББК 22.141
Д998

Дятлов В. Н., Дмитриева Ю. А.

Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 6. Показательные и логарифмические соотношения / В. Н. Дятлов, Ю. А. Дмитриева. — Новосибирск: Издательство Института математики, 2010. — 64 с.

ISBN 978–5–86134–170–7

Описаны методы анализа показательных и логарифмических уравнений и неравенств. Предложены новые подходы к решению логарифмических соотношений.

Для абитуриентов, учащихся, учителей.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.141
Д998

Д$\frac{1601000000\text{–}03}{\text{Я}82(03)\text{–}10}$ Без объявл.

ISBN 978–5–86134–170–7

Dixi et animam levavi
(Сказал и облегчил тем душу)

ПРЕДИСЛОВИЕ К СЕРИИ

Представьте себе, что вы получили задачу по математике и ваша цель — ее решить. Что делать, с чего начать, как продолжить и в чем заключается результат? В серии пособий «Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей», каждое из которых посвящено какой-либо одной, но достаточно широкой теме, делается попытка показать, как можно организовать процесс решения задач, причем разного уровня сложности.

Материал этюдов скорее похож на беседу с читателем, в которой он — один из активных участников, чем на наставления в телеграфном стиле типа «делай так» или «делай, как мы». Это достигается, в частности, благодаря тому, что в процессе решения ставятся вопросы, уместные на соответствующем шаге решения, и приводятся рассуждения, направленные на поиск ответа. Для часто встречающихся ситуаций предложены схемы, состоящие из подходящих вопросов и вариантов ответов на них. Варьируя вопросы и ответы, можно анализировать задачи, близкие к базовым.

Этюды максимально независимы один от другого и от материала учебников и пособий для абитуриентов. Поэтому сообщается практически вся теоретическая информация, требуемая для решения задач на тему каждого этюда. Минимизация обращения к учебникам не означает, что этюды заменяют учебник. В них материал учебников развивается, дополняется, уточняется и, надеемся, становится более ясным. В некоторых случаях предложены подходы, не представленные в учебниках, но эффективные при решении задач.

Отдельные книжки серии названы этюдами по аналогии с музыкальными этюдами как пьесами для отработки той или иной техники, а также с этюдами в живописи как зарисовками, не претендующими на полноту и завершенность. Каждый из этюдов можно дополнять, расширять, углублять и т. д. Однако на чем-то надо было останавливаться, и то, что в каждом этюде предложено, — это результат авторской остановки.

Подавляющее большинство примеров взяты из вступительных экзаменов в Новосибирский государственный университет (в основном с экзаменационных листков, так что, возможно, не все они опубликованы в книгах [1, 2]), а также из широко распространенных пособий для абитуриентов. Наборы предлагаемых упражнений небольшие, иногда их нет совсем, и они помогают лишь почувствовать, как следует применять изложенные рекомендации. Для приобретения устойчивых навыков в решении задач надо прорешать их значительно больше (задачи можно найти в разнообразных доступных пособиях).

Несколько слов о системе нумерации. Номер параграфа состоит из двух чисел, разделенных точкой. Первое совпадает с номером этюда, второе указывает порядковый номер параграфа в этюде. В номере пункта к номеру параграфа, в котором данный пункт расположен, справа добавляется порядковый номер пункта.

Нумерация выделенных формул либо двойная, либо одинарная. Если формула имеет отношение только к тому примеру, в котором она появляется, у нее номер одинарный. Если формула имеет отношение к материалу параграфа вообще, то у нее номер двойной, в котором на первом месте стоит порядковый номер параграфа в этюде, на втором — порядковый номер формулы в параграфе. Номер этюда в номерах формул не участвует.

Если у вас появятся какие-либо конструктивные замечания или пожелания по содержанию этюдов, предлагаем сообщить их по электронной почте по адресу vndyatlov@gmail.com.

Новосибирск, Академгородок, 2008 г.

Предисловие к этюду

Этюд посвящен обсуждению методов анализа соотношений, в которых так или иначе участвуют показательная и/или логарифмическая функции. Прежде чем приступать к делу, договоримся о терминологии. Эти договоренности отражают авторские представления и могут отличаться от мнения читателей по этому поводу.

Если в соотношении участвуют только степени с постоянным основанием, а неизвестная находится в показателе степени, такие соотношения будем относить к показательным. Иначе можно сказать, что к *показательным* относим соотношения, в которых неизвестная участвует лишь в выражениях вида $a^{f(x)}$, где a — положительное число, отличное от единицы.

Если в соотношении переменная участвует только под знаком логарифма (возможно, и в основаниях логарифмов), то такие соотношения будем называть *логарифмическими*. Тем самым к логарифмическим мы относим такие соотношения, в которых неизвестная участвует только посредством выражений вида $\log_{\varphi(x)} f(x)$.

Первая цель при решении показательного или логарифмического соотношения состоит в том, чтобы перейти от него к соотношению, такого статуса уже не имеющему, т. е. освободиться от участия степени или логарифма. После ее достижения можно будет сконцентрировать внимание на решении соотношения какого-то иного типа.

Соотношения, в которых наблюдаются другие ситуации, связанные с участием показательной или логарифмической функций, отнесем к соотношениям смешанного типа. К таковым отойдут соотношения, в которых переменная есть как в основании, так и в показателе степени, в которых переменная участвует не только под логарифмом, но и за его пределами, и т. п.

Такая договоренность вызвана тем, что показательные или логарифмические соотношения «в чистом виде» могут быть проанализированы какими-то регулярными способами, на которых мы и остановимся. Для смешанных соотношений ввиду большой степени неопределенности участия в них переменной трудно ожидать несложных регулярных ходов при их решении, поэтому мы ограничимся в самом конце этюда немногочисленными наблюдениями по их поводу.

Мы не будем напоминать определение и основные свойства степени, полагая, что читатель с ними в достаточной мере знаком. Тем не менее на свойствах логарифмов остановимся, ибо там есть нюансы, иногда существенно влияющие на процесс решения соотношений.

При разборе примеров мы использовали разные манеры оформления решений и разные способы записи множеств решений, чтобы подчеркнуть разнообразие возможностей фиксации решения. Более того, мы могли выбрать способ решения, основываясь на поучительности и общей полезности метода, возможно, в ущерб краткости и эффективности решения конкретного примера. Дело в том, что на наш взгляд решение учебных примеров основной целью ставит формирование способности к рассуждениям и более глубокое усвоение основных свойств изучаемых объектов, таких как функции, уравнения, неравенства. Вместе с тем мы иногда обсуждаем более эффективные средства.

При изучении материала данного этюда полезно знакомство с содержанием этюда 3. Мы будем опираться на материал этого этюда, иногда при необходимости напоминая детали.

Коротко о содержании этюда. В § 6.1 рассматриваются показательные уравнения и неравенства. В § 6.2 изложены некоторые тонкие моменты, касающиеся процесса решения логарифмических уравнений или неравенств, а также предложена небольшая схема анализа таких соотношений. В § 6.3 рассмотрены смешанные соотношения и системы логарифмических и показательных уравнений. Поскольку при решении смешанных соотношений на первый план начинают выступать специальные соображения, мы не стали развивать эту тему подробнее.

Практически все разобранные примеры и предложенные упражнения взяты из вступительных испытаний в НГУ и выпускных экзаменов в СУНЦ НГУ. Часть их опубликована в [1, 2].

В. Дятлов, Ю. Дмитриева
Новосибирск, Академгородок, май 2010 г.

§ 6.1. Показательные соотношения

Анализ показательных соотношений основан на свойствах степени. Мы ограничимся рассмотрением небольшого набора наиболее часто встречающихся ситуаций.

6.1.1. Простейшие показательные уравнения. Одно из самых простых показательных соотношений — это уравнение вида

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \quad a > 0,\ a \neq 1, \tag{1.1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Опираясь на свойства степени, можно утверждать, что уравнение (1.1) равносильно уравнению

$$f(x) = g(x), \tag{1.2}$$

в котором отражено равенство показателей степени.

Равносильность уравнений (1.1) и (1.2) можно сформулировать в виде, например, такого словесного описания: если основания двух степеней одинаковы и отличны от единицы, то от равенства степеней можно перейти к равенству показателей.

Встречаются уравнения с одинаковыми показателями степени при различных основаниях, т. е. уравнения вида

$$a^{f(x)} = b^{f(x)}, \quad a \neq b. \tag{1.3}$$

Из свойств степени вытекает, что уравнение (1.3) равносильно уравнению $f(x) = 0$.

Если не удается привести уравнение к виду (1.1), т. е. к сравнению степеней с одним основанием, то приходится привлекать новые средства для описания множества его корней. А именно, даже в самом простейшем случае уравнения вида

$$a^z = t, \tag{1.4}$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $t > 0$ — заданные числа и $t \neq a$, z — неизвестная величина, выразить его корень z (в зависимости, разумеется, от a и t) средствами, имевшимися к моменту рассмотрения такого уравнения, не удается. Тогда поступают так же, как при решении уравнения вида $x^n = c$, $n \in \mathbb{N}$, или тригонометрических уравнений вида $\sin x = a$ и т. п. А именно, для корня уравнения (1.4) вводят новое обозначение.

Сначала отметим, что если $a = 1$, то уравнение (1.4) имеет решение лишь при $t = 1$ и его корнями будут все действительные z. Далее будем рассматривать только случай $a > 0$, $a \neq 1$.

Как известно из свойств степени, соотношение $z_1 \neq z_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, равносильно тому, что $a^{z_1} \neq a^{z_2}$. Отсюда легко заключить, что если уравнение $a^z = t$ разрешимо, то при любом $t > 0$ его решение единственно. Разрешимость такого уравнения при любом $t > 0$ доказывается на основе строения множества действительных чисел, мы же будем считать этот факт известным.

Определение. Пусть даны положительное число a, отличное от единицы, и положительное число t. Число z, для которого выполнено равенство (1.4), называют *логарифмом числа t по основанию a* и обозначают так:

$$z = \log_a t, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ t > 0. \tag{1.5}$$

Тем самым выражение $\log_a t$ есть не что иное, как запись корня уравнения $a^z = t$.

Иначе можно сказать, что логарифм положительного числа по данному (положительному и отличному от единицы) основанию — это степень, в которую надо возвести основание, чтобы получить данное число.

Равенства (1.4) и (1.5) отражают одну и ту же взаимосвязь между числами $z \in \mathbb{R}$ и $t > 0$, записанную двумя разными способами, т. е.

$$a^z = t \Longleftrightarrow z = \log_a t, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ t > 0. \tag{1.6}$$

Подставив в (1.4) на место z его выражение из (1.5), получим равенство

$$a^{\log_a t} = t, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ \text{для любого } t > 0. \tag{1.7}$$

Равенство (1.7) называют *основным логарифмическим тождеством.*

Подставив в (1.5) на место t его выражение из (1.4), придем к равенству, которое так же, как и (1.7), можно считать одним из основных логарифмических тождеств:

$$\log_a a^z = z \quad \text{для любого } z \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Используя понятие логарифма, можно сказать, что уравнение

$$a^{f(x)} = b, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0, \tag{1.9}$$

равносильно уравнению

$$f(x) = \log_a b, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0. \tag{1.10}$$

Схематично равносильность уравнений (1.9) и (1.10) можно записать (с некоторыми, иногда нелишними, подробностями) так:

$$a^{f(x)} = b \Longleftrightarrow a^{f(x)} = a^{\log_a b} \Longleftrightarrow f(x) = \log_a b$$

при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Если $a = 1$, то уравнение $1^{f(x)} = b$ не имеет корней при $b \neq 1$, а при $b = 1$ множеством его корней будут все числа из области определения функции f.

6.1.2. Простейшие показательные неравенства. Немного сложнее дело обстоит с неравенствами. Рассмотрим одно из простейших неравенств, например неравенство вида

$$a^{f(x)} < b. \tag{1.11}$$

В неравенстве (1.11) знак «меньше» поставлен для определенности, все изложенное о нем очевидно переносится и на неравенства с другими знаками. Величина b, возможно, зависит от x.

Сначала рассмотрим случай, когда b представлено как степень с основанием a, т. е. рассмотрим неравенство

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}. \tag{1.12}$$

Исходя из свойств показательной функции, можно составить такое словесное описание процесса его решения: **либо** основание больше единицы **и** тогда можно перейти к сравнению показателей, **сохранив** знак неравенства, **либо** основание меньше единицы и больше нуля **и** тогда можно перейти к сравнению показателей, **изменив** знак неравенства на противоположный. В этом описании выделены слова, позволяющие перейти от данного неравенства к структуре, содержащей более простые соотношения. Сама структура выглядит так:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} a > 1, & (1) \\ f(x) < g(x), & (2) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{ll} a > 0, & (3) \\ a < 1, & (4) \\ f(x) > g(x). & (5) \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{1.13}$$

Структура (1.13) в полном объеме содержательна лишь в том случае, если основание a зависит от неизвестной x, т. е. по указанной в предисловии договоренности рассматривается неравенство смешанного типа. Если же a — число, то из совокупности (1.13) остается только одна система, а именно та, которая соответствует величине основания a.

Если правая часть в (1.11) не представлена в виде степени с основанием a, то при анализе неравенства (1.11) можно либо опереться на свойства монотонности логарифмической функции, либо использовать тождество (1.7) и свойства монотонности показательной функции, фактически перейдя к неравенству вида (1.12). Воспользовавшись, например, переходом к показательной функции и равносильностью (1.13), можно получить структуру неравенства (1.11):

$$a^{f(x)} < b \Longleftrightarrow a^{f(x)} < a^{\log_a b} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} a > 1, & (1) \\ f(x) < \log_a b, & (2) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{ll} a > 0, & (3) \\ a < 1, & (4) \\ f(x) > \log_a b. & (5) \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{1.14}$$

Нетрудно понять, что та же структура получится и в том случае, если от неравенства (1.11) перейти к сравнению логарифмов от левой и правой частей неравенства (1.11) (будем такую процедуру называть *логарифмированием неравенства*). При применении логарифмирования словесное описание перехода к структуре может быть таким: **либо** $a > 1$ **и** тогда (1.11) можно прологарифмировать с сохранением знака неравенства, **либо** $0 < a < 1$ **и** тогда при логарифмировании (1.11) надо изменить знак неравенства на противоположный. Схематично это выглядит так же, как и (1.14):

$$a^{f(x)} < b \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a > 1, \\ f(x) < \log_a b, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0 < a < 1, \\ f(x) > \log_a b. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

6.1.3. Общие пожелания относительно процесса решения показательных соотношений. Поскольку основной целью в решении показательного соотношения является избавление от участия показательной функции, в первую очередь надо делать шаги, которые позволили бы оценить, можно ли в результате преобразований, основанных на свойствах степени, привести соотношение к простейшему виду, т. е. к сравнению степеней с одинаковыми основаниями (или с одинаковыми показателями). Если такое удается, то надо следовать рекомендациям пп. 6.1.1, 6.1.2.

Если же привести соотношение к простейшему в результате преобразований не удается, то надо обратить внимание на поиск замены, т. е. посмотреть, входит ли переменная в соотношение, будучи вмонтированной в один и тот же агрегат в виде степени. Чаще всего замена приводит к квадратным уравнениям или неравенствам, поэтому остановимся на отличительных особенностях таких соотношений.

В первую очередь следует изучить, возможно ли привести все участвующие в уравнении или неравенстве показательные функции к одному основанию, и в случае положительного результата постараться привести уравнение или неравенство к виду

$$\alpha \cdot a^{2f(x)} + \beta \cdot a^{f(x)} + \gamma = 0 \tag{1.15}$$

или

$$\alpha \cdot a^{2f(x)} + \beta \cdot a^{f(x)} + \gamma < 0 \tag{1.16}$$

(знак неравенства взят для определенности, то же можно пожелать и при других знаках неравенства), которое после замены

$$a^{f(x)} = z \tag{1.17}$$

превращается соответственно в квадратное уравнение или неравенство вида

$$\alpha \cdot z^2 + \beta \cdot z + \gamma = 0 \tag{1.18}$$

или

$$\alpha \cdot z^2 + \beta \cdot z + \gamma < 0 \tag{1.19}$$

относительно z. После нахождения корней z уравнения (1.18) или решений неравенства (1.19) следует вернуться к переменной x, решив уравнения или неравенства простейшего вида.

Если же привести все участвующие в уравнении или неравенстве функции к одному основанию не удается, то надо посмотреть, возможно ли привести их к двум основаниям, а уравнение или неравенство — к уравнению или неравенству соответственно вида

$$\alpha \cdot a^{2f(x)} + \beta \cdot a^{f(x)} b^{f(x)} + \gamma \cdot b^{2f(x)} = 0 \tag{1.20}$$

или

$$\alpha \cdot a^{2f(x)} + \beta \cdot a^{f(x)} b^{f(x)} + \gamma \cdot b^{2f(x)} < 0. \tag{1.21}$$

Показательная функция нигде не обращается в нуль, поэтому величина $b^{2f(x)}$ отлична от нуля, более того, положительна, следовательно, деление на нее уравнения (1.20) (неравенства (1.21)) приводит к равносильному уравнению

$$\alpha \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + \beta \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + \gamma = 0 \tag{1.22}$$

или неравенству

$$\alpha \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + \beta \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + \gamma < 0, \qquad (1.23)$$

имеющим вид (1.15) или (1.16) с основанием $\dfrac{a}{b}$.

Начнем разбор примеров с уравнений, по существу, легко приводящихся к простейшим.

Пример 1. Решим уравнение

$$3^{2x-3} - 9^{x-1} + 27^{\frac{2x}{3}} = 75. \qquad (1)$$

Начнем с анализа оснований. Они разные, но только по форме, по существу это степени тройки, так что сразу перейдем к одному основанию степени:

$$(1) \Longleftrightarrow 3^{2x-3} - 3^{2x-2} + 3^{2x} = 75.$$

Основание стало одно, а показатели степени разные, но нельзя сказать, что какое-то из них в два раза больше другого, так что намека на замену и переход к квадратному относительно новой переменной уравнению нет. Однако просматривается некоторое единообразие в составляющих уравнение выражениях — всюду есть 3^{2x}. Уберем числовые добавки из показателя степени:

$$\frac{1}{27} \cdot 3^{2x} - \frac{1}{9} \cdot 3^{2x} + 3^{2x} = 75.$$

Осталось привести подобные члены и получить уравнение простейшего вида:

$$3^{2x} - 3 \cdot 3^{2x} + 27 \cdot 3^{2x} = 75 \cdot 27$$
$$\Longleftrightarrow 25 \cdot 3^{2x} = 75 \cdot 27 \Longleftrightarrow 3^{2x} = 3^4 \Longleftrightarrow x = 2.$$

Пример 2. Решим уравнение

$$2^{2x+8} + 5^{2x+7} + 2^{2x+10} - 5^{2x+8} = 0. \qquad (1)$$

В уравнении участвуют степени с двумя основаниями, но отличительной особенности для перехода к квадратному уравнению — степени различаются в два раза — не наблюдается. Однако здесь два основания и по существу одинаковые показатели степени. Значит, можно творчески воспользоваться рекомендациями, относящимися к уравнению (1.20).

Выделим в каждом слагаемом числовой множитель:

$$2^8 \cdot 2^{2x} + 5^7 \cdot 5^{2x} + 2^{10} \cdot 2^{2x} - 5^8 \cdot 5^{2x} = 0.$$

Разделим на отличное от нуля выражение 2^{2x}:

$$2^8 + 5^7 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} + 2^{10} - 5^8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} = 0.$$

После несложных преобразований приходим к уравнению $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-6}$, откуда $x = -3$.

Можно было поступить иначе, а именно попытаться (здесь успешно) привести к ситуации с одинаковыми показателями степени. Сгруппируем и вынесем общие множители за скобки:

$$(1) \Longleftrightarrow 2^{2x+8}(1+4) = 5^{2x+7}(5-1)$$
$$\Longleftrightarrow 5 \cdot 2^{2x+8} = 2^2 \cdot 5^{2x+7} \Longleftrightarrow 2^{2x+6} = 5^{2x+6}.$$

Последнее возможно только в случае равенства нулю показателя степени: $2x + 6 = 0$, откуда $x = -3$.

В следующем уравнении посмотрим, как решение показательного уравнения сводится к решению квадратного.

Пример 3. Решим уравнение

$$2 \cdot 4^{|x+2|} + 3 \cdot 9^{|x+2|} = 7 \cdot 6^{|x+2|}. \tag{1}$$

В уравнении в степенях стоят три основания, однако разложение их на простые множители показывает, что в качестве оснований выступают только числа 2 и 3:

$$2 \cdot 2^{2|x+2|} + 3 \cdot 3^{2|x+2|} = 7 \cdot (2 \cdot 3)^{|x+2|}. \tag{2}$$

Здесь наблюдается отличительная особенность для перехода к квадратному уравнению — степени различаются в два раза. В показателях степени есть выражение с модулем, и надо понять, сразу модуль раскрывать или подождать. Если погодить, то до каких времен? Ответить на этот вопрос помогает

Наблюдение. *Если в соотношении есть выражение с модулем, то модуль не надо раскрывать до тех пор, пока можно продолжать* *решение без этой операции, т. е. модуль надо раскрывать только в том случае, если без этого действия дальнейшее решение невозможно.*

Уравнение (2) можно продолжать решать без раскрытия модуля, более того, подмодульное выражение всюду одно и то же, поэтому можно заменить переменную, положив $|x+2| = t$. Отметим ограничение для новой переменной: $t \geqslant 0$. Запишем уравнение (2) относительно переменной t:

$$2 \cdot 2^{2t} + 3 \cdot 3^{2t} = 7 \cdot 2^t \cdot 3^t \Longleftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} - 7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t + 2 = 0. \qquad (3)$$

Положив $\left(\frac{3}{2}\right)^t = z$, отметим ограничение для переменной z: $z \geqslant 1$, и запишем уравнение (3) относительно переменной z: $3z^2 - 7z + 2 = 0$. Корнями этого уравнения будут числа $z = 2$ и $z = 1/3$, и только $z = 2$ удовлетворяет ограничениям на z. Осталось вернуться к исходной переменной:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^t = 2 \Longleftrightarrow t = \log_{3/2} 2, \quad |x+2| = \log_{3/2} 2 \Longleftrightarrow x = -2 \pm \log_{3/2} 2.$$

Посмотрим, как срабатывает одинаковость показателей степени при различии оснований.

Пример 4. Решим уравнение $25 \cdot 4^{x(3-x)} = 16 \cdot 5^{2x}$.

В уравнении два основания степени, но нельзя сказать, что при этом есть хоть какой-то намек на вид (1.20). Значит, надо искать что-то общее в показателях. Сделаем в уравнении небольшую уборку: соберем в левой части степени, у которых основание 4, а в правой — только с основанием 5, и соберем всё в одну степень слева и в одну — справа. Получим

$$4^{-x^2+3x-2} = 5^{2(x-1)}.$$

Надо выделять в показателе левой части множитель $x-1$, иначе вряд ли получится что-то хорошее. Разлагая квадратичную функцию в показателе левой части на множители, находим, что $-x^2 + 3x - 2 = (2-x)(x-1)$. Теперь зацепимся за одинаковые показатели:

$$(1) \Longleftrightarrow (4^{2-x})^{x-1} = 25^{x-1},$$

откуда либо $x - 1 = 0$, либо $4^{2-x} = 25$. Решая последнее уравнение путем логарифмирования (или используя определение логарифма), находим его корень: $x = \log_2(4/5)$. Соберем ответ: $\{1,\ \log_2(4/5)\}$.

В следующем примере решение показательного неравенства сводится к решению неравенства с участием квадратичной функции.

Пример 5. Решим неравенство

$$4^{3x+5}2^{x^2} - 9 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{x^2}{2}+3x+4} + 4 \geqslant 0. \tag{1}$$

Перейдя к основанию 2, проделав несложные преобразования и записав выражения так, чтобы показатель степени в одном из них был в два раза больше, чем в другом, перепишем неравенство (1) в равносильном ему виде

$$4 \cdot 2^{x^2+6x+8} - 9 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{x^2}{2}+3x+4} + 4 \geqslant 0. \tag{2}$$

Положим $z = 2^{\frac{x^2}{2}+3x+4}$. В терминах переменной z неравенство (2) запишется следующим образом:

$$4z^2 - 9\sqrt{2}z + 4 \geqslant 0. \tag{3}$$

Левая часть неравенства (3) обращается в нуль при $z = 2\sqrt{2}$ и $z = \sqrt{2}/4$. Стало быть, множество решений неравенства (3) имеет следующую структуру:

$$\left[\begin{array}{l} z \geqslant 2^{3/2}, \\ z \leqslant 2^{-3/2}. \end{array}\right. \tag{4}$$

Подставив на место z в совокупность (4) выражение $2^{\frac{x^2}{2}+3x+4}$, получим равносильную (2) совокупность неравенств относительно исходной переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} 2^{\frac{x^2}{2}+3x+4} \geqslant 2^{3/2}, \\ 2^{\frac{x^2}{2}+3x+4} \leqslant 2^{-3/2}. \end{array}\right. \tag{5}$$

Поскольку основание степени в (5) больше единицы, первое из неравенств в (5) равносильно такому: $x^2+6x+5 \geqslant 0$, множеством решений которого является $(-\infty, -5] \cup [-1, +\infty)$. Второе из неравенств совокупности (5) равносильно неравенству $x^2 + 6x + 11 \leqslant 0$, не имеющему решений. В итоге получаем ответ: $(-\infty, -5] \cup [-1, +\infty)$.

Следующее неравенство можно отнести к разряду «условно показательных» — в нем показательность сказывается только на последней стадии решения при возврате от новой переменной к старой.

Пример 6. Решим неравенство

$$\frac{9 - 2 \cdot 7^{x+1}}{2 \cdot 7^{2x} - 7^{x+1} + 3} \leqslant 4.$$

Основание во всех показательных выражениях одно, более того, показатели степени различаются в два раза. Стало быть, целесообразно сделать замену. Пусть $z = 7^x$. Тогда относительно новой переменной неравенство станет таким:

$$\frac{9 - 14z}{2z^2 - 7z + 3} - 4 \leqslant 0.$$

Как всегда при решении рациональных неравенств, воспользуемся методом интервалов. Соберем всё в левой части в одну дробь:

$$\frac{-8z^2 + 14z - 3}{2z^2 - 7z + 3} \leqslant 0. \qquad (1)$$

Числитель обращается в нуль при $z = 3/2$ и $z = 1/4$, нули знаменателя суть числа 3 и $1/2$. Этими числами вся числовая прямая разбилась на пять промежутков. Находя знак дроби в левой части неравенства (1) на каждом из полученных промежутков, приходим к выводу, что структура множества его решений такова:

$$\left[\begin{array}{l} z \leqslant 1/4, \\ \left\{\begin{array}{l} z > 1/2, \\ z \leqslant 3/2, \end{array}\right. \\ z > 3. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Подставим в (2) на место z его выражение через x:

$$\left[\begin{array}{l} 7^x \leqslant 1/4, \\ \left\{\begin{array}{l} 7^x > 1/2, \\ 7^x \leqslant 3/2, \end{array}\right. \\ 7^x > 3. \end{array}\right.$$

Учитывая, что основание степени больше единицы, и используя свойства степени и логарифма, приходим к ответу:

$$(-\infty, -2\log_7 2] \cup (-\log_7 2, \log_7(3/2)] \cup (\log_7 3, +\infty).$$

Упражнения. Решить уравнения и неравенства:

1) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$, ответ: $\{-1\}$;

2) $5 \cdot 49^{|x-3|} + 2 \cdot 25^{|x-3|} = 11 \cdot 35^{|x-3|}$,
ответ: $\{3 \pm \log_{7/5} 2\}$;

3) $27 \cdot 5^{x(x-2)} = 125 \cdot 3^x$, ответ: $\{3,\ -1 + \log_5 3\}$;

4) $2^{4x+2}4^{-x^2} - 3\cdot 2^{-x^2+2x+2} + 5 \geqslant 0$,
ответ: $(-\infty, \sqrt{2}-1] \cup [\sqrt{2}+1, +\infty)$;

5) $5\cdot 9^{2x+2}3^{x^2-1} - 2^4\cdot 3^{\frac{x^2}{2}+1}9^x + 1 \leqslant 0$,
ответ: $[-\sqrt{2}-2, \sqrt{2}-2]$;

6) $\dfrac{9-5^{x+2}}{3\cdot 5^{2x} - 2\cdot 5^{x+1} + 3} \leqslant 4$,
ответ: $(-\infty, -2\log_5 2] \cup (-\log_5, 0] \cup (\log_5 3, +\infty)$;

7) $7^{x-\frac{1}{8}x^2} < 7^{1-x}(\sqrt[8]{7})^{x^2} + 6$,
ответ: $(-\infty, 4-2\sqrt{2}) \cup (4+2\sqrt{2}, +\infty)$;

§ 6.2. Логарифмические соотношения

6.2.1. Основные свойства логарифмов. Приведем основные свойства логарифмов, а некоторые из них обоснуем, опираясь на равносильность (1.6), согласно которой для доказательства того факта, что какое-то число z будет логарифмом числа t по основанию a, т. е. равенства типа $z = \log_a t$, достаточно проверить, что при возведении a в степень z мы получим t, т. е. что выполнено равенство (1.4).

Каждое свойство будем сопровождать небольшим словосочетанием. Обратим особое внимание на то, что все свойства (кроме (2.9)) представляют собой равенства, справедливые при ограничениях, определяемых их **левыми** частями (и в этом смысле «читаемые» слева направо).

Основные свойства логарифма:

$$\log_a 1 = 0, \quad a > 0,\ a \neq 1 \tag{2.1}$$

(логарифм единицы по любому основанию равен нулю);

$$\log_a a = 1, \quad a > 0,\ a \neq 1 \tag{2.2}$$

(логарифм числа a по основанию a равен единице);

$$\log_a u + \log_a v = \log_a uv, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ u > 0,\ v > 0 \tag{2.3}$$

(сумма логарифмов равна логарифму произведения; по умолчанию запись вида $\log_a uv$ понимается как $\log_a(uv)$, т. е. сначала находится произведение, а затем берется логарифм от него);

$$\log_a uv = \log_a |u| + \log_a |v|, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ uv > 0 \tag{2.4}$$

(логарифм произведения равен сумме логарифмов модулей величин);

$$\log_a u - \log_a v = \log_a \frac{u}{v}, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ u > 0,\ v > 0 \qquad (2.5)$$

(разность логарифмов равна логарифму отношения);

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a |u| - \log_a |v|, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ uv > 0 \qquad (2.6)$$

(логарифм отношения равен разности логарифмов модулей величин);

$$p \log_a u = \log_a u^p, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ u > 0,\ p \in \mathbb{R} \qquad (2.7)$$

(множитель перед логарифмом можно поставить показателем степени подлогарифмического выражения);

$$\log_a u^{2k} = 2k \log_a |u|, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ u \neq 0,\ k \in \mathbb{N} \qquad (2.8)$$

(показатель четной степени можно поставить множителем перед логарифмом модуля подлогарифмического выражения);

$$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ u > 0 \qquad (2.9)$$

(переход к новому основанию: логарифм по старому основанию равен логарифму по новому основанию данного числа, деленному на логарифм по новому основанию старого основания).

Ограничимся, например, проверкой свойств (2.3) и (2.9), остальные с пользой для себя читатель может обосновать сам.

В свойстве (2.3) говорится о том, что при соответствующих ограничениях логарифм произведения равен стоящему в левой части числу, а согласно сделанному выше замечанию для доказательства этого равенства достаточно проверить, что при возведении a в степень $\log_a u + \log_a v$ получим uv, т. е. что

$$a^{\log_a u + \log_a v} = uv.$$

По свойствам степени, используя тождество (1.7), имеем

$$a^{\log_a u + \log_a v} = a^{\log_a u} \cdot a^{\log_a v} = uv,$$

так что свойство (2.3) доказано.

Обоснуем свойство (2.9), записав его в виде

$$\log_b u = \log_b a \cdot \log_a u.$$

Для доказательства этого равенства надо показать, что

$$b^{\log_b a \cdot \log_a u} = u.$$

Используя свойства степени и тождество (1.7), имеем

$$b^{\log_b a \cdot \log_a u} = (b^{\log_b a})^{\log_a u} = a^{\log_a u} = u,$$

что и требовалось.

6.2.2. О равносильных переходах в соотношениях. Процесс решения соотношения состоит в серии последовательных преобразований, цепочке переходов (в результате некоторых преобразований) от одного соотношения к другому, приводящей к соотношению, множество решений (корней) которого легко находится (см. этюд 3). Естественно, такие переходы должны сохранять описываемое соотношением множество , т. е. быть равносильными переходами. Если хоть на одном шаге равносильность нарушалась, то гарантировать, что в итоге найдено множество решений данного (а не последнего) соотношения, невозможно. Особенно важно соблюдать равносильность при решении неравенств. Для уравнения переход к следствию всего лишь вызовет необходимость проверки полученных в итоге результатов, которая обычно нетрудно выполняется, для неравенства проверка чаще всего невозможна.

Таким образом, решение соотношения — это процесс, **направленный в одну сторону**, от данного соотношения к другому, и т. д., пока не появится наиболее простое описание задаваемого соотношением множества. Переход от одного соотношения к другому состоит в том, что данное соотношение преобразуется с применением какого-то свойства, равенства, формулы и т. п. Отметим основные типы преобразований и обсудим, что может произойти при их применении.

1. Преобразования, затрагивающие только внутреннюю конструкцию соотношения. К таким преобразованиям можно отнести раскрытие скобок, вынесение общего множителя за скобки, перенос выражения из одной части в другую. Эти преобразования никак не влияют на ограничения, имевшиеся в данном соотношении, и в этом смысле они «безопасны», их можно проводить без дополнительного логического анализа получаемого результата.

2. Преобразования, связанные с внешними факторами, такими как применение к обеим частям равенства или неравенства какой-либо функции, например, возведение обеих частей равенства в квадрат или извлечение корня из обеих частей, взятие логарифмов от обеих частей равенства или избавление от логарифмов и т. д. Такие преобразования требуют тщательного анализа при их применении, ибо они могут снять какие-то ограничения или, напротив, добавить ограничения,

что может повлиять на множество решений преобразуемого соотношения.

3. Преобразования, состоящие в замене какого-то фрагмента данного соотношения другим фрагментом на основании некоторой формулы или свойства. В этом случае надо применять формулы, справедливые при имеющихся в данном соотношении ограничениях. После проведения такого рода преобразований могут нарушаться ограничения, и в таком случае приходится обеспечивать их сохранение, например, добавлять в систему к получаемому соотношению какие-то требования (см. этюд 3).

Особенности применения свойств логарифма связаны с третьим типом преобразований. Например, если в соотношении участвует логарифм произведения, т. е. выражение вида

$$\log_a f(x)g(x), \tag{2.10}$$

а по каким-то причинам желательно перейти к сумме логарифмов, то надлежит воспользоваться формулой (2.4), так как именно эта формула применима при ограничениях, сопровождающих данный фрагмент, стало быть, в результате ее применения мы не сузим множество рассматриваемых значений неизвестной и сможем получить соотношение, равносильное данному. Проследим подробнее, что происходит при применении формулы (2.4) (а не родственной ей формулы (2.3)).

Обращаясь к ограничениям, которые связаны с логарифмом произведения, находим, что они заключаются в требовании положительности подлогарифмического выражения, т. е. в требовании положительности произведения:

$$f(x)g(x) > 0. \tag{2.11}$$

Допустим, что по ходу решения нам потребовалось представить логарифм произведения в виде суммы логарифмов сомножителей и мы намерены воспользоваться формулой (2.3). Тогда в преобразованном уравнении вместо выражения $\log_a f(x)g(x)$ будет участвовать выражение $\log_a f(x) + \log_a g(x)$, в котором требования уже другие, а именно, здесь требуется одновременное выполнение неравенств

$$f(x) > 0, \quad g(x) > 0,$$

т. е. требование выполнения системы неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Как видим, ограничения изменились, причем не в сторону ослабления, а в сторону усиления: неравенству (2.11) удовлетворяют такие значения $f(x)$ и $g(x)$, которые имеют один знак, в частности, оба отрицательные, а система (2.12) требует положительности этих значений. Вполне возможно, что при использовании такого преобразования множество решений сузится (если корни исходного уравнения лежат там, где система (2.12) не выполнена).

Что делать для обеспечения равносильного перехода? Следует провести преобразование так, чтобы сохранились все имевшиеся ограничения. Для этого можно поступить, например, следующим образом. Сначала снять почти все ограничения, а затем обеспечить выполнение ограничений, имевшихся в исходном соотношении, например, путем включения в систему с преобразованным соотношением соответствующих требований. Ослабление ограничений происходит за счет постановки модуля у подлогарифмических выражений (в таком случае появляются ограничения $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, более слабые, чем ограничения (2.11)), т. е. в рассматриваемом случае следует использовать не свойство (2.3), а свойство (2.4). В результате преобразования получится соотношение с участием выражения

$$\log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|,$$

при этом добавится требование выполнения имевшихся в исходном соотношении ограничений (2.11).

Аналогичные рассуждения проводятся и в том случае, если в соотношении есть логарифм частного и выполняется переход к разности логарифмов.

Подведем итог: *если в рассматриваемом соотношении есть логарифм произведения* (*частного*) *и мы хотим перейти от него к сумме* (*разности*) *логарифмов, то надо воспользоваться формулами* (2.4), *позаботившись об ограничениях.*

При обратном переходе, конечно же, будет использована формула (2.3). А именно, если в уравнении была сумма логарифмов $\log_a f(x) + \log_a g(x)$, а почему-то надо перейти к логарифму произведения, то надлежит применить формулу (2.3). Обращаясь к ограничениям, которые связаны с суммой логарифмов, находим, что они состоят в требованиях, сопровождающих свойство (2.3). Когда на место суммы логарифмов мы поставим логарифм произведения, вместо имевшихся ограничений появятся ограничения (2.11), более слабые. Следовательно, этот переход менее опасен, чем предыдущий, он не может привести к потере корней, но их контроль на финальной стадии решения обязателен.

Проанализируем, какие ограничения необходимо добавить после перехода от выражения $\log_a f(x)+\log_a g(x)$ к выражению $\log_a f(x)g(x)$. В преобразованном соотношении появляется требование положительности произведения, т. е. ограничение (2.11), а значит, если x — корень соотношения, то $f(x)$ и $g(x)$ должны иметь один знак. Поэтому для гарантии одновременной положительности $f(x)$ и $g(x)$ на таком x достаточно проверить (с учетом положительности произведения) положительность одного из выражений $f(x)$ или $g(x)$, второе будет положительным с учетом нового ограничения $f(x)g(x) > 0$. Это рассуждение приводит к тому, что при переходе от суммы логарифмов к логарифму произведения можно добавить к полученному соотношению лишь одно из двух ограничений $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, другое для x, являющегося корнем преобразованного соотношения, будет выполнено. Конечно, можно проверять положительность обоих значений $f(x)$ и $g(x)$, однако достаточность проверки лишь одного из неравенств $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ может упростить завершение решения, если одно из выражений громоздко и проверка его положительности затруднена.

Переходы, аналогичные рассмотренным здесь, встречаются и в других ситуациях. Не обращаясь к подробностям, представим некоторые из таких переходов в виде таблицы, в левой колонке которой будут выражения, имеющиеся в данном соотношении, а в правой — преобразованные выражения плюс те требования, которые надо учесть для обеспечения равносильности. Знак системы в таблице применяется в смысле указателя перечня ограничений, добавляемых к преобразованному соотношению. Подчеркнем, что переход от данного соотношения к преобразованному соответствует переходу от левой колонки таблицы к правой.

Особое внимание предлагаем обратить на переход от выражения $\log_a b^2$ к $2\log_a |b|$, некорректное выполнение которого нередко приводит к ошибкам.

Также обратим внимание на различие между свойством и переходом. Говоря о свойстве, мы заранее договариваемся, при каких условиях относительно участвующих в нем величин оно формулируется. Поэтому свойство — это равенство при определенных условиях, каковыми являются, в частности, (2.1)–(2.9). В отличие от свойства переход мыслится как основанная на определенном свойстве замена

Таблица переходов

Дано в соотношении	Получаем в результате преобразования
$\log_a bc$	$\begin{cases} \log_a \lvert b\rvert + \log_a \lvert c\rvert, \\ bc > 0 \end{cases}$
$\log_a \dfrac{b}{c}$	$\begin{cases} \log_a \lvert b\rvert - \log_a \lvert c\rvert, \\ bc > 0 \end{cases}$
$\log_a b^2$	$2\log_a \lvert b\rvert$
$\log_a b + \log_a c$	$\begin{cases} \log_a bc, \\ \left[\begin{array}{l} b > 0 \\ c > 0 \end{array}\right. \end{cases}$
$\log_a b - \log_a c$	$\begin{cases} \log_a \frac{b}{c}, \\ \left[\begin{array}{l} b > 0 \\ c > 0 \end{array}\right. \end{cases}$
$2\log_a b$	$\begin{cases} \log_a b^2, \\ b > 0 \end{cases}$

некоего выражения в данном соотношении другим выражением, т. е. переход основан на равенстве, но таковым не является. Естественно, что при замене могут нарушаться некоторые имевшиеся в соотношении ограничения, и при переходе надо внимательно следить за их сохранением.

6.2.3. Простейшие логарифмические соотношения. Уравнение или неравенство, содержащее логарифмы, желательно привести к уравнению или неравенству простейшего вида, а именно

$$\log_a b = \log_a c \tag{2.13}$$

или

$$\log_a b < \log_a c \tag{2.14}$$

(знак неравенства взят для определенности, аналогичное изложенному ниже можно сообщить и при других знаках). Здесь на местах букв a, b, c могут стоять выражения, содержащие переменные.

При решении простейшего логарифмического уравнения или неравенства надо перейти от сравнения логарифмов к сравнению подлогарифмических выражений, внимательно проследив за сохранением имевшихся в исходном уравнении ограничений.

Приведем структуры простейших логарифмических уравнения и неравенства, т. е. напишем равносильные им соотношения, не использующие логарифмов. Для уравнения имеем

$$\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), & (1) \\ f(x) > 0 \text{ или } g(x) > 0, & (2) \\ \varphi(x) > 0, & (3) \\ \varphi(x) \neq 1, & (4) \end{cases} \tag{2.15}$$

для неравенства —

$$\log_{\varphi(x)} f(x) < \log_{\varphi(x)} g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) > 1, & (1) \\ f(x) < g(x), & (2) \\ f(x) > 0 & (3) \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) > 0, & (4) \\ \varphi(x) < 1, & (5) \\ f(x) > g(x), & (6) \\ g(x) > 0. & (7) \end{cases} \end{array} \right. \tag{2.16}$$

Приведем словесное описание анализа неравенства: **либо** основание логарифма больше единицы **и** тогда, переходя от сравнения логарифмов к сравнению подлогарифмических выражений, следует сохранить знак неравенства, позаботившись об ограничениях, **либо** основание между нулем и единицей **и** тогда при переходе от сравнения логарифмов к сравнению подлогарифмических выражений надо сменить знак неравенства на противоположный, снова позаботившись об ограничениях.

6.2.4. Пути решения логарифмических соотношений. Прежде чем перейти к рассмотрению примеров, надо научиться распознавать, какие действия целесообразно выполнять для решения логарифмического соотношения. Предпримем попытку сформировать механизм выбора пути решения.

Процесс решения логарифмического уравнения или неравенства будем осуществлять путем постановки вопросов из следующего ниже небольшого перечня, ответов на них и выполнения рекомендаций. Дав ответ на поставленный вопрос, следует перейти к соответствующему пункту и выполнить данные в нем рекомендации. Ключевую роль в выборе пути решения играет вопрос п. 3.

1. Одно ли основание во всех логарифмах? Да — перейти к п. 3, нет — к п. 2.

2. Привести все логарифмы к одному основанию. Лучше приводить к простому постоянному основанию. Перейти к п. 3.

3. Встречается ли в уравнении или неравенстве логарифм в степени, под корнем, в знаменателе дроби или произведение логарифмов? Да — перейти к п. 4, нет — к п. 5.

Задав вопрос п. 3, надо проанализировать, есть ли в уравнении или неравенстве хотя бы одно из указанных в вопросе обстоятельств, т. е. присутствует ли логарифм в степени (выражение вида $\log_a^n b$, $n \in \mathbb{N}$), или логарифм под корнем, или логарифм в знаменателе дроби, или произведение логарифмов, и если хотя бы одна из отмеченных ситуаций есть, то надо перейти к выполнению рекомендаций п. 4, если же нет ни одного из отмеченных обстоятельств, то перейти к п. 5. Этот вопрос играет роль переключателя при решении соотношения, позволяющего выбрать действия, наиболее адекватные для продолжения решения.

4. Пользуясь свойствами и переходя от логарифма произведения к сумме логарифмов, от логарифма дроби — к разности логарифмов, убирая показатели степени в подлогарифмических выражениях и ставя их коэффициентами перед логарифмами, стараемся раздробить входящие в уравнение или неравенство логарифмы на возможно мелкие составляющие с тем, чтобы увидеть (и сделать) **замену** и перейти к уравнению или неравенству без логарифма. Решив его относительно новой переменной, вернуться к прежней переменной.

Стремление к возможно более простым фрагментам в рекомендации п. 4 не является догмой, это, скорее, руководство к действию, главная цель всех преобразований при использовании рекомендаций п. 4 — поиск замены.

5. Пользуясь свойствами и переходя от суммы логарифмов к логарифму произведения, от разности логарифмов — к логарифму дроби, убирая коэффициенты перед логарифмами в показатели степени подлогарифмических выражений, заменяя константы логарифмами, стараемся собрать всё в один логарифм и прийти к соотношению простейшего вида.

Изложенного выше достаточно для того, чтобы научиться решать многие логарифмические уравнения и неравенства, совершая переходы до тех пор, пока не получится соотношение простейшего вида.

Пример 1. Решим уравнение

$$\log_2(x-1) - 2 = \log_2(3x-7) - \log_2(x+1).$$

Обратимся к перечню. Основание одно, переходим к вопросу 3 и обнаруживаем, что логарифмы в степени, под корнем, в знаменателе дроби или произведение логарифмов в уравнении не встречаются. Значит, будем собирать все выражения под один логарифм в левой части и один логарифм в правой, в результате чего придем к простейшему логарифмическому уравнению. Можно было бы в правой части перейти к логарифму дроби, но лучше путем переноса члена со знаком минус в другую часть перейти к логарифму произведения:

$$\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=\log_2(3x-7)+\log_2 4$$
$$\Longrightarrow \log_2(x^2-1)=\log_2 4(3x-7).$$

Нетрудно найти корни последнего уравнения: $x=3$, $x=9$. Проверка показывает, что они удовлетворяют исходному уравнению.

Можно было записать структуру последнего уравнения. Оно равносильно такой системе:

$$\begin{cases} x^2-1=4(3x-7), \\ 3x-7>0 \end{cases}$$

Из это системы видно, какому требованию должны удовлетворять корни входящего в систему уравнения.

Пример 2. Решим уравнение

$$\log_2(2x^2+x-3)+\log_{1/2}(3x+1)=0. \qquad (1)$$

Приведем логарифмы к одному основанию, а именно к основанию 2:

$$\log_2(2x^2+x-3)-\log_2(3x+1)=0.$$

Перенеся второй логарифм в правую часть уравнения, получим простейшее логарифмическое уравнение:

$$\log_2(2x^2+x-3)=\log_2(3x+1)\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x-3=3x+1, \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2+x-3>0 \\ 3x+1>0. \end{array}\right. \end{cases}$$

Заметим, что нет необходимости использовать оба возникших неравенства, достаточно выбрать более простое из них. Тогда

$$(1)\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x^2-2x-4=0, \\ 3x+1>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2, \end{array}\right. \\ x>-1/3 \end{cases} \Longleftrightarrow x=2.$$

Пример 3. Решим уравнение

$$\log_{4x} 4 + \log_{8x} 8 = \log_x 16.$$

Обратившись к перечню, приходим к выводу о необходимости перехода к одному основанию. Можно перейти к основанию x, однако мы предпочтем воспользоваться пожеланиями п. 3 и перейдем к простому постоянному основанию 2 (в качестве основания можно выбрать и 4, но тогда в процессе преобразований появятся дроби, чего нам не хотелось):

$$\frac{\log_2 4}{\log_2 4x} + \frac{\log_2 8}{\log_2 8x} = \frac{\log_2 16}{\log_2 x}.$$

Находим, что логарифм участвует в знаменателе дроби, значит, будем упрощать ситуацию, переходя от логарифма произведения к сумме логарифмов и избавляясь от показателей степени в подлогарифмических выражениях. В результате придем к уравнению

$$\frac{2}{2+\log_2 x} + \frac{3}{3+\log_2 x} - \frac{4}{\log_2 x} = 0.$$

В последнем уравнении переменная участвует только посредством выражения $\log_2 x$, которое и обозначим новой буквой, пусть $\log_2 x = z$. Получилось уравнение относительно z:

$$\frac{2}{2+z} + \frac{3}{3+z} - \frac{4}{z} = 0.$$

Нетрудно найти, что его корнями будут $z = 4 \pm 2\sqrt{10}$. Возвращаясь к исходной неизвестной, получаем корни данного уравнения: $x = 2^{4\pm 2\sqrt{10}}$.

Пример 4. Решим уравнение

$$\log_3 x + \log_x(1/2) = \log_6 x.$$

Основания всех логарифмов разные, стало быть, надо перейти к одному основанию. Прислушавшись к рекомендациям п. 3, перейдем к возможно более простому основанию, а именно к основанию 3, потому что это число уже встречалось в уравнении в качестве основания:

$$\log_3 x + \frac{\log_3(1/2)}{\log_3 x} = \frac{\log_3 x}{\log_3 6}. \tag{1}$$

Теперь переменная x входит в уравнение только в составе выражения $\log_3 x$, что подсказывает нам замену: $\log_3 x = t$. В новой переменной уравнение (1) примет вид

$$t + \frac{\log_3(1/2)}{t} = \frac{t}{\log_3 6}. \tag{2}$$

Уравнение рациональное относительно t, алгоритм его решения понятен. Но прежде чем приступить к решению, упростим константы:

$$(2) \iff t + \frac{-\log_3 2}{t} = \frac{t}{\log_3 3 + \log_3 2}$$
$$\iff t - \frac{\log_3 2}{t} = \frac{t}{\log_3 2 + 1}. \tag{3}$$

Обозначим для краткости $\log_3 2$ одной буквой, например a. Тогда

$$(3) \iff t - \frac{a}{t} = \frac{t}{a+1} \iff \frac{(a+1)(t^2-a)-t^2}{(a+1)t} = 0$$
$$\iff \frac{at^2 - a(a+1)}{(a+1)t} = 0. \tag{4}$$

Решим уравнение (4) и вернемся к исходным переменной и константе. Поскольку $a = \log_3 2 \neq 0$ и $a + 1 = \log_3 6 \neq 0$, имеем

$$(4) \iff \frac{t^2-(a+1)}{t} = 0 \iff t^2 = a+1 \iff t = \pm\sqrt{a+1}$$
$$\iff \log_3 x = \pm\sqrt{\log_3 6} \iff x = 3^{\pm\sqrt{\log_3 6}}.$$

Пример 5. Решим уравнение

$$2\log_{x+3}(2x^2+10x+12) + \frac{1}{2}\log_{2x+4}(x^2+6x+9) = 5.$$

Основания у логарифмов разные и оба зависят от переменной x. Перейдем к одному основанию. Поскольку в уравнении нет подсказки для выбора основания, возьмем основание 10 для упрощения записи:

$$2\frac{\lg(2x^2+10x+12)}{\lg(x+3)} + \frac{\frac{1}{2}\lg(x^2+6x+9)}{\lg(2x+4)} = 5. \tag{1}$$

В полученном уравнении логарифмы оказались в знаменателе, значит, надо пользоваться формулами перехода от логарифмов произведения к сумме логарифмов и т. п., чтобы подыскать подходящую замену. Но пока под логарифмами не наблюдается никаких произведений, только полиномы первой и второй степеней. Попробуем разложить квадратные трехчлены на множители. Нетрудно получить, что $x^2+6x+9=(x+3)^2$ и $2x^2+10x+12=2(x^2+5x+6)=2(x+2)(x+3)$. Тогда

$$(1) \Longleftrightarrow 2\frac{\lg 2(x+2)(x+3)}{\lg(x+3)}+\frac{\frac{1}{2}\lg(x+3)^2}{\lg 2(x+2)}=5$$

$$\Longleftrightarrow 2\frac{\lg 2(x+2)+\lg(x+3)}{\lg(x+3)}+\frac{\lg(x+3)}{\lg 2(x+2)}=5.$$

В числителе мы не поставили модули у подлогарифмических выражений, хотя пользовались формулами (2.4) и (2.8). Дело в том, что эти выражения встречаются также в других местах (в знаменателях), и оттуда приходит требование их положительности. Упростим последнее уравнение:

$$2\frac{\lg 2(x+2)}{\lg(x+3)}+2+\frac{\lg(x+3)}{\lg 2(x+2)}=5. \qquad (2)$$

Теперь понятно, какую замену удобно сделать. Обозначим

$$\frac{\lg 2(x+2)}{\lg(x+3)}=t.$$

Тогда

$$(2) \Longleftrightarrow 2t+1/t-3=0 \Longleftrightarrow 2t^2-3t+1=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=1/2. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=1/2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\lg 2(x+2)}{\lg(x+3)}=1 \\[2ex] \dfrac{\lg 2(x+2)}{\lg(x+3)}=1/2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg 2(x+2)=\lg(x+3) \\ 2\lg 2(x+2)=\lg(x+3) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+4=x+3, \\ x+3>0 \end{cases} \\ \begin{cases} (2x+4)^2=x+3, \\ 2x+4>0 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1, \\ x>-3 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x^2+15x+13=0, \\ x>-2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-15+\sqrt{17}}{8}, \\[2ex] x=\dfrac{-15-\sqrt{17}}{8}, \end{array}\right. \\ x>-2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Убедимся в том, что $x = \dfrac{-15-\sqrt{17}}{8} < -2$. Действительно,

$$\frac{-15-\sqrt{17}}{8} < -2 \iff -15-\sqrt{17} < -16 \iff 16-15 < \sqrt{17} \iff 1 < \sqrt{17}.$$

Получили верное неравенство, значит, и исходное верно. Легко убедиться в том, что $x = \dfrac{-15+\sqrt{17}}{8} > -2$. Тем самым приходим к ответу: $x = -1$ или $x = \dfrac{-15+\sqrt{17}}{8}$.

Пример 6. Решим уравнение

$$\log_{x+2} \log_2 \log_{x+1}(11x^2 + 12x) = 0. \qquad (1)$$

В левой части уравнения слишком много логарифмов подряд написано, так что ситуация, похоже, нестандартная, и сначала попробуем в ней разобраться. Чтобы наметить план действий в незнакомой обстановке, зададим применительно к уравнению вопрос: «как устроено уравнение?», или, иначе, «какого вида уравнение?», или, максимально коротко, «вид?» (см. этюд 3).

Для нахождения вида уравнения смотрим, какое действие выполняется последним перед тем, как при каком-то значении x проверять справедливость равенства. Это действие мы выделяем отдельно, а для всего остального используем простейшие лаконичные обозначения. В нашем случае последним действием является нахождение логарифма по основанию $x + 2$, стало быть, уравнение (1) имеет вид

$$\log_{x+2} b = 0, \qquad (2)$$

где ясно, что обозначено буквой b. После обнаружения вида приступаем к переходу от вида уравнения к его структуре, т. е. к описанию множества корней без использования определяющей вид операции. Для нашего уравнения имеем

$$\log_{x+2} b = 0 \iff \begin{cases} b = 1, & (3) \\ x + 2 > 0, & (4) \\ x + 2 \neq 1. & (5) \end{cases}$$

Теперь раскроем содержание величины b в соотношении (3):

$$\log_2 \log_{x+1}(11x^2 + 12x) = 1, \qquad (6)$$

и снова спросим: «вид?». На этот раз вид таков: $\log_2 c = 1$, что равносильно уравнению $c = 2$. Раскрывая содержание c, получаем, что

$$(6) \iff \log_{x+1}(11x^2 + 12x) = 2.$$

Это уже уравнение простейшего вида. Оно равносильно системе

$$\begin{cases} 11x^2 + 12x = (x+1)^2, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1. \end{cases} \qquad (7)$$

Заметив, что ограничения в системе (7) более жесткие, чем появлявшиеся ранее, приходим к выводу, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 10x^2 + 10x - 1 = 0, \\ x > -1, \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5 + \sqrt{35}}{10} \\ x = \dfrac{-5 - \sqrt{35}}{10}, \end{array} \right. \\ x > -1, \\ x \neq 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Так как $\sqrt{35} > 5$, значение $x = \dfrac{-5 + \sqrt{35}}{10} > 0$ — корень исходного уравнения. Легко убедиться в том, что $\dfrac{-5 - \sqrt{35}}{10} < -1$, стало быть, $x = \dfrac{-5 + \sqrt{35}}{10}$ — единственный корень исходного уравнения.

Приведем несколько примеров, где надо использовать формулы типа (2.4), (2.6), (2.8) с постановкой модуля. В последнем из этой серии примеров обсудим ситуацию, в которой, несмотря на рекомендации, модуль можно не ставить.

Пример 7. Решим уравнение

$$(1 + \log_5 2 - \log_{x+4} 10) \log_{x^2} 100 = (1 + \log_5 2) \log_{x+4} 10. \qquad (1)$$

Основания логарифмов в уравнении (1) разные, стало быть, надо перейти к одному основанию. В уравнении часто встречается число 10, поэтому возьмем его в качестве нового основания. Заметим, что $1 + \log_5 2 = \log_5 5 + \log_5 2 = \log_5 10$. Преобразуем (1):

$$(\log_5 10 - \log_{x+4} 10) \log_{x^2} 100 = \log_5 10 \cdot \log_{x+4} 10$$

$$\iff \left(\frac{1}{\lg 5} - \frac{1}{\lg(x+4)} \right) \frac{2}{\lg x^2} = \frac{1}{\lg 5} \frac{1}{\lg(x+4)}. \qquad (2)$$

В последнем уравнении присутствует под логарифмом выражение x^2, и если $\lg x^2$ заменить выражением $2\lg x$, то сужается множество допустимых значений неизвестной и может произойти потеря корней. Посмотрим на другие выражения в уравнении — если среди них окажется такое, которое обеспечило бы положительность переменной x, то модуль можно не ставить. Однако у нас такого нет, поэтому поступим так, как договаривались ранее, т. е. от $\lg x^2$ перейдем к $2\lg|x|$, тем самым сохранив ограничения. Перепишем (2) так:

$$\frac{\lg(x+4)-\lg 5}{\lg 5\cdot\lg(x+4)\cdot\lg|x|}-\frac{1}{\lg 5}\frac{1}{\lg(x+4)}=0$$
$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}\lg(x+4)-\lg 5-\lg|x|=0, & (3)\\ \lg(x+4)\cdot\lg|x|\neq 0. & (4)\end{array}\right.$$

Займемся уравнением (3). Запишем его в виде $\lg(x+4)=\lg 5|x|$ и заметим, что оно равносильно уравнению $x+4=5|x|$. Последнее уравнение при $x\geqslant 0$ становится таким: $x+4=5x$, и его корень $x=1$ не удовлетворяет ограничению (4). Если $x<0$, то получаем $x+4=-5x$, и корень $x=-2/3$ этого уравнения удовлетворяет всем требованиям. Он и составляет ответ.

Представьте себе, что мы пошли бы ошибочным путем, не поставив знак модуля в соответствующем месте. Тогда, как нетрудно заметить, пришли бы к неверному выводу, что корней нет.

Пример 8. Решим уравнение

$$\log_2 3\cdot\log_{x+5}4-\log_4(x-5)^2\cdot\log_{x+5}2=1. \qquad (1)$$

Перейдем во всех логарифмах к одному основанию, а именно к основанию 2, при этом обращая внимание на преобразование выражения $\log_4(x-5)^2$:

$$(1)\Longleftrightarrow\frac{2\log_2 3}{\log_2(x+5)}-\frac{\log_2|x-5|}{\log_2(x+5)}=1\Longleftrightarrow\frac{\log_2 9-\log_2|x-5|}{\log_2(x+5)}=1$$
$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}\log_2 9-\log_2|x-5|=\log_2(x+5), & (2)\\ \log_2(x+5)\neq 0. & (3)\end{array}\right.$$

Решим уравнение (2). Имеем

$$(2)\Longleftrightarrow\log_2 9=\log_2|x-5|+\log_2(x+5)$$
$$\Longleftrightarrow\log_2 9=\log_2|x-5|(x+5)\Longleftrightarrow|x-5|(x+5)=9.$$

Интересно, что последний переход, в результате которого исчезли логарифмы, приводит к равносильному уравнению без дополнительных ограничений. Теперь

$$|x-5|(x+5)=9 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 5, \\ x^2-25=9 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<5, \\ 25-x^2=9. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Корнем первой системы будет $x=\sqrt{34}$, второй системе удовлетворяют числа $x=\pm 4$, из которых только $x=4$ удовлетворяет ограничению (3). Таким образом, корнями уравнения (1) будут $x=\sqrt{34}$ и $x=4$.

Пример 9. Решим уравнение

$$\log_3(1-x^2)^2=5+\sqrt{14\log_{\sqrt{3}}(1-x)+7\log_{\sqrt{3}}\frac{(1+x)^2}{3}-5}. \qquad (1)$$

Наметим план действий. Будем переходить к одному основанию, а именно основанию 3, и затем совершать действия, нацеленные на поиск замены, т. е. выделим фрагмент, который будем считать единым блоком, и обозначим его новой буквой. Предварительно проведем анализ входящих в уравнение фрагментов. Видим, что в одном из подлогарифмических выражений есть квадрат некоей величины, а именно $(1+x)^2$. Поскольку мы планируем избавляться от показателей степени в подлогарифмических выражениях, отнесемся к связанному с этим действием переходу внимательнее. Нам предстоит перейти от выражения $\log_{\sqrt{3}}(1+x)^2$ к выражению $2\log_{\sqrt{3}}|1+x|=4\log_3|1+x|$, и прежде чем оставлять внутри логарифма выражение с модулем, посмотрим, есть ли в других фрагментах уравнения выражения, требование положительности которых влекло бы положительность $1+x$. Однако такого не наблюдается, и модуль оказывается неизбежным.

Реализуя намеченный план и опуская элементарные выкладки, приходим к равносильному (1) уравнению

$$2\log_3|1-x^2|-5=\sqrt{28(\log_3(1-x)|1+x|)-19}. \qquad (2)$$

В этом уравнении сохранилось требование $1-x>0$, пришедшее из уравнения (1), и с его учетом имеем

$$|1-x^2|=|(1-x)(1+x)|=(1-x)|1+x|.$$

Мы пришли к тому, что неизвестная участвует в уравнении только посредством выражения $(1-x)|1+x|$, находящегося под логарифмом, стало быть, можно сделать замену. Положим

$$\log_3(1-x)|1+x| = z.$$

Относительно неизвестной z получили уравнение

$$2z - 5 = \sqrt{28z-19}, \tag{3}$$

которое равносильно системе

$$\begin{cases} 2z - 5 \geqslant 0, \\ 4z^2 - 20z + 25 = 28z - 19. \end{cases} \tag{4}$$

Нетрудно обнаружить, что корнями уравнения в системе (4) будут $z = 1$ и $z = 11$, однако $z = 1$ не удовлетворяет неравенству системы (4), а значит, не будет решением уравнения (3).

Пришло время возвращаться к исходной неизвестной:

$$\log_3(1-x)|1+x| = 11 \Longleftrightarrow (1-x)|1+x| = 3^{11}$$
$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1+x > 0, \\ 1-x^2 = 3^{11} \end{cases} \\ \begin{cases} 1+x < 0, \\ x^2 - 1 = 3^{11} \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow x = -\sqrt{1+3^{11}}.$$

Пример 10. Решим уравнение

$$1 + \log_3(x+1)(x+2) = \sqrt{6 - \log_9(x+1)^4 + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x+2)}. \tag{1}$$

В этом примере мы убедимся в том, что формулы, обеспечивающие равносильные переходы, желательно использовать вдумчиво, просматривая все детали соотношения.

Обратившись к вопросам перечня из разд. 1, находим, что у нас разные основания, но все они связаны с числом 3, поэтому перейдем к основанию 3:

$$1 + \log_3(x+1)(x+2) = \sqrt{6 - \frac{1}{2}\log_3(x+1)^4 - 2\log_3(x+2)}.$$

Отвечая на вопрос 3 перечня, находим, что в уравнении присутствует логарифм под корнем, и перейдем к рекомендациям п. 4. У нас есть выражение $\log_3(x+1)^4$, и поскольку в рекомендациях есть пожелание убрать показатель степени в подлогарифмическом выражении, сделаем это корректно, т. е. перейдем к выражению $4\log_3|x+1|$. Посмотрим на другие выражения в уравнении и задумаемся, вытекает ли из них какая-то информация о знаке $x+1$. В уравнении есть вызванные областью определения логарифма требования $x+2>0$ и $(x+1)(x+2)>0$, и при выполнении этих требований гарантируется, что $x+1>0$, стало быть, знак модуля в планируемом преобразовании можно опустить без опасения потери корней. Далее, согласно пожеланию п. 4 перечня надлежит перейти от логарифма произведения к сумме логарифмов, и если это делать без обращения к другим деталям уравнения, то надо воспользоваться формулой $\log_3(x+1)(x+2)=\log_3|x+1|+\log_3|x+2|$. Однако выше уже отмечено, что в уравнении есть требования $x+2>0$ и $x+1>0$, так что и здесь знак модуля писать не будем. В итоге после запланированных преобразований придем к уравнению

$$1+\log_3(x+1)+\log_3(x+2)=\sqrt{6-2\log_3(x+1)-2\log_3(x+2)},$$

равносильному уравнению (1). Полагая в нем

$$\log_3(x+1)+\log_3(x+2)=z,$$

приходим к уравнению без логарифмов: $1+z=\sqrt{6-2z}$. Оно равносильно системе

$$\begin{cases} (1+z)^2=6-2z, \\ 1+z\geqslant 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решая уравнение в системе (2), находим, что его корнями будут $z=1$ и $z=-5$. Ясно, что неравенству системы удовлетворяет только $z=1$.

Вернемся к исходной неизвестной:

$$\log_3(x+1)+\log_3(x+2)=1 \iff \begin{cases} \log_3(x+1)(x+2)=1, \\ x+2>0. \end{cases} \qquad (3)$$

Избавляясь в уравнении системы (3) от логарифма, получаем, что его корнями будут числа $\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$, из которых только $\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$ удовлетворяет неравенству системы (3), оно и составит ответ.

Теперь рассмотрим несколько примеров решения логарифмических неравенств.

Пример 11. Решим неравенство

$$\log^2_{\frac{1}{3}} x-4(\log_{\frac{1}{3}} x)(\log_{\frac{1}{3}} 3x)\leqslant 1. \qquad (1)$$

Все логарифмы имеют одно основание. В неравенстве присутствует логарифм во второй степени, значит, пользуясь рекомендациями п. 4, будем «дробить» логарифмы в левой части неравенства. А именно, перейдем от логарифма произведения к сумме логарифмов:

$$\log^2_{\frac{1}{3}} x - 4(\log_{\frac{1}{3}} x)(\log_{\frac{1}{3}} 3 + \log_{\frac{1}{3}} x) \leqslant 1. \qquad (2)$$

В полученное неравенство переменная x входит только в составе выражения $\log_{\frac{1}{3}} x$, что подсказывает нам, какую надо сделать замену: очевидно, $t = \log_{\frac{1}{3}} x$. Тогда неравенство (2) станет квадратным относительно новой переменной:

$$t^2 - 4t(t-1) \leqslant 1. \qquad (3)$$

На новую переменную t ограничений нет, и вспомним (см. этюд 3), что при замене надо получить структуру множества решений соотношения относительно новой переменной, в которую на место новой переменной надлежит подставить ее выражение через старую для возврата к исходной переменной. Имеем

$$(3) \Longleftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow (t-1)(t-1/3) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leqslant 1/3 \\ t \geqslant 1. \end{array}\right.$$

Вернемся к переменной x, помня об убывании функции $\log_{\frac{1}{3}} x$:

$$\left[\begin{array}{l} t \leqslant 1/3 \\ t \geqslant 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{3}} x \leqslant 1/3 \\ \log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{3}} x \leqslant (1/3)\log_{\frac{1}{3}}(1/3) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}^{\frac{1}{3}} \\ \log_{\frac{1}{3}} x \geqslant \log_{\frac{1}{3}}(1/3) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant (1/3)^{\frac{1}{3}} \\ 0 < x \leqslant 1/3. \end{array}\right.$$

Объединим два промежутка в общий ответ: $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, +\infty\right)$.

Пример 12. Решим неравенство

$$\frac{\log_2 2x}{\log_3 2x} \geqslant \log_x 5. \qquad (1)$$

У всех логарифмов разные основания. Перейдем к одному основанию, например, к основанию 2:

$$(1) \Longleftrightarrow \frac{\log_2 2x}{\frac{\log_2 2x}{\log_2 3}} \geqslant \frac{\log_2 5}{\log_2 x}. \qquad (2)$$

Может возникнуть идея сократить дробь в левой части на выражение $\log_2 2x$, однако есть серьезное пожелание **никогда безоговорочно не сокращать дробь на выражение с переменной**, так как это может повлечь изменение ограничений. Имевшееся в уравнении требование $\log_3 2x \neq 0$ вносит ограничения $x > 0$ и $2x \neq 1$. После сокращения на $\log_2 2x$ ограничение $x > 0$ останется, ибо в уравнении остается выражение $\log_2 x$, а ограничение $2x \neq 1$ исчезнет, и его надо будет учесть при формировании ответа.

После сокращения дроби в левой части неравенства (2) получим

$$(2) \Longleftrightarrow \begin{cases} \log_2 3 \geqslant \dfrac{\log_2 5}{\log_2 x}, \\ 2x \neq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3 \log_2 x} \leqslant 1, \\ 2x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\log_3 5}{\log_2 x} \leqslant 1, & (3) \\ 2x \neq 1. & (4) \end{cases}$$

Поскольку переменная x входит в неравенство (3) только в составе $\log_2 x$, сделаем замену $z = \log_2 x$. Чтобы не повторять каждый раз длинную запись $\log_3 5$, обозначим это выражение одной буквой, пусть $a = \log_3 5$, и учтем, что $a > 0$ (это нам вскоре понадобится). Получившееся неравенство решим по известному алгоритму (см. этюд 3):

$$\frac{a}{z} \leqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{a-z}{z} \leqslant 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} z < 0 \\ z \geqslant a. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} z < 0 \\ z \geqslant a \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x < 0 \\ \log_2 x \geqslant a \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ x \geqslant 2^a \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ x \geqslant 2^{\log_3 5}. \end{array}\right.$$

Осталось учесть требование неравенства (4) и получить ответ: $(0, 1/2) \cup (1/2, 1) \cup [2^{\log_3 5}, +\infty)$.

Убедимся в том, что решение логарифмического неравенства с переменным основанием простейшего вида не представляет содержательных трудностей.

Пример 13. Решим неравенство

$$\log_{x-2}(9x - 16 - x^2) > 2.$$

Сначала представим неравенство в виде сравнения логарифмов:

$$\log_{x-2}(9x - 16 - x^2) > \log_{x-2}(x-2)^2. \qquad (1)$$

Вспомним относящееся к неравенству такого вида словесное описание и по мере произнесения ключевых слов «и», «или» будем оформлять либо систему, либо совокупность соответствующих неравенств: либо основание больше единицы и тогда логарифмы можно убрать, сохранив неравенство и позаботившись о сохранении ограничений, либо основание между нулем и единицей и тогда при удалении логарифмов надо поменять знак неравенства на противоположный, позаботившись о сохранении ограничений. В результате придем к следующей структуре:

$$\left[\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{ll} x-2>1, & (1) \\ 9x-16-x^2>(x-2)^2 & (2) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{ll} x-2>0, & (3) \\ x-2<1, & (4) \\ 9x-16-x^2<(x-2)^2, & (5) \\ 9x-16-x^2>0. & (6) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Неравенство (2) равносильно такому: $2x^2-13x+20<0$. Левая часть этого неравенства обращается в нуль при $x=5/2$ и $x=4$, стало быть, множеством его решений будет интервал $(5/2,4)$. Пересекая его с промежутком $(3,+\infty)$, на котором выполнено неравенство (1), получаем, что множеством решений первой системы служит интервал $(3,4)$.

Во второй системе осталось решить только неравенство (6). Его левая часть обращается в нуль в точках $x=(9\pm\sqrt{17})/2$, и это неравенство выполнено на интервале $((9-\sqrt{17})/2,(9+\sqrt{17})/2)$. Взяв пересечение всех множеств решений второй системы и использовав при этом легко проверяемую систему неравенств $2<(9-\sqrt{17})/2<5/2$, получим, что ее множеством решений будет интервал $((9-\sqrt{17})/2,5/2)$.

Осталось объединить множества решений первой и второй систем и записать ответ: $((9-\sqrt{17})/2,5/2)\cup(3,4)$.

Как мы убедились, никаких содержательных трудностей при решении логарифмического неравенства с переменным основанием не встретилось. Однако если при анализе неравенства оказалось, что для его решения придется решать несколько неравенств с переменным основанием, да еще комбинировать множества их решений в соответствии с тем, какую структуру они образуют, то это может представлять серьезные технические проблемы. Но выходы есть и в этом случае. Один из них — использование метода интервалов для решения не только рациональных неравенств, но и для неравенств с участием других функций (см. этюд 3). Подробнее об этом будет рассказано при рассмотрении примеров 6 и 7 в § 6.3.

Второй состоит в замене логарифмического неравенства равносильным ему рациональным. Рассмотрим этот метод подробнее, для краткости используя простые обозначения. А именно проведем анализ неравенства вида $\log_b c > \log_b d$:

$$\log_b c > \log_b d \Longleftrightarrow \begin{cases} \log_b \dfrac{c}{d} > 0, \\ \left[\begin{array}{l} c > 0 \\ d > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \log_b \dfrac{c}{d} > \log_b 1, \\ \left[\begin{array}{l} c > 0 \\ d > 0. \end{array}\right. \end{cases} \tag{2.17}$$

где любое из выражений b, c, d может содержать переменную и совокупность в (2.17) указывает на то, что достаточно проверять положительность одного из выражений c или d. Как отмечено в п. 6.2.3, если основание больше единицы, то логарифмы можно убрать, позаботившись об ограничениях, а если основание между нулем и единицей, то при удалении логарифмов надо изменить знак неравенства на противоположный и вновь позаботиться об ограничениях. Иначе говоря, при $b-1>0$ должно быть $\dfrac{c}{d}-1>0$, а при $b-1<0$ соответственно $\dfrac{c}{d}-1<0$ (и это всё при соблюдении требований $b, c, d > 0$). Получается, что выражения $b-1$ и $\dfrac{c}{d}-1$ должны быть одного знака, а это можно записать как требование положительности их произведения:

$$(b-1)\left(\frac{c}{d}-1\right) > 0 \Longleftrightarrow \frac{(b-1)(c-d)}{d} > 0.$$

Таким образом, логарифмическое неравенство (2.17) сводится к системе из рационального неравенства и неравенств, характеризующих имевшиеся в исходном неравенстве ограничения. Описанный способ перехода к равносильному рациональному неравенству называют *методом рационализации.*

Изложенные соображения обеспечивают более быстрое получение результата при решении логарифмических неравенств с переменным основанием. Однако не настолько часто возникает такая потребность, чтобы мы стали ожидать от читателя запоминания соответствующей конструкции. Мы предпочтем обращаться к использованию структуры (2.16) как основанной на самых элементарных свойствах логарифмов, но в случае необходимости быстрого решения логарифмического неравенства с переменным основанием ими воспользуемся.

Пример 14. Решим неравенство

$$\log_{x+4}(2-x) \cdot \log_{1-x}(x+3) \leqslant 0.$$

Основания разные, однако нет никаких предпочтений в выборе единого основания. В таком случае можно было бы перейти к какому-то нейтральному постоянному основанию, например к основанию 10, однако после выполнения такого действия появится произведение отношений логарифмов или, если угодно, отношение произведений. Иначе говоря, неравенство примет либо вид $a \cdot b \leqslant 0$, либо аналогичный этому вид $a/b \leqslant 0$. Неясно, будет ли неравенство после такого преобразования проще, чем исходное. Дело в том, что и исходное имеет вид «произведение сравнивается с нулем». Попробуем воздержаться от перехода к другому основанию и подвергнем анализу данное нам неравенство.

Сначала выскажем небольшое предостережение, касающееся неравенства вида $a \leqslant 0$. Знак $\leqslant$ означает «меньше или равно», и нередко это отношение рассматривают как единое, не разделяя его на составляющие. Однако если такой знак стоит в неравенстве, где в одной части нуль, а в другой произведение, то лучше рассмотреть случай «меньше» и случай «равно» по-отдельности. Дело в том, что, как известно, произведение (строго) меньше нуля в том и только в том случае, если сомножители разных знаков. Вместе с тем произведение равно нулю в тех случаях, когда один из множителей равен нулю, а знак другого несуществен(!), от другого множителя требуется лишь, чтобы он был определен. Эта деталь может привести к неточностям (небольшим ошибкам) в ответе. Когда нет опасности ошибиться, мы будет анализировать нестрогое неравенство с произведением так же, как строгое, не проводя дополнительного анализа, но не потому, что таковой не нужен, а потому, что он настолько прост, что читатель может провести его самостоятельно.

Вернемся к нашему неравенству. Решим сначала уравнение

$$\log_{x+4}(2-x) \cdot \log_{1-x}(x+3) = 0.$$

Как недавно отмечено, произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, а другой определен. В нашем случае первый логарифм равен нулю при $2 - x = 1$, т. е. при $x = 1$, однако при этом значении x второй сомножитель не определен, так что $x = 1$ корнем уравнения не будет. Второй логарифм равен нулю при $x = -2$, и при этом значении первый логарифм определен, стало быть, $x = -2$ надо учесть в будущем ответе.

Займемся строгим неравенством

$$\log_{x+4}(2-x) \cdot \log_{1-x}(x+3) < 0. \tag{1}$$

Оно равносильно такой структуре:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_{x+4}(2-x)>0,\\ \log_{1-x}(x+3)<0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_{x+4}(2-x)<0,\\ \log_{1-x}(x+3)>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Получили совокупность двух систем, в каждой из которых по два неравенства с переменными основаниями. В принципе, они решаемы, однако можно себе представить, какой объем вычислений и согласований надо при этом сделать. Мы воздержимся от технической реализации намеченного плана, ибо неравенство (1) (и не только его) можно решить другим путем, о котором речь пойдет при разборе примеров 6, 7 в § 6.3, а именно общим методом интервалов. Для желающих дорешать исходное неравенство до конца сообщим ответ: $(-3,-2]\cup(0,1)$.

Рассмотрим пример неравенства, в котором сочетаются логарифмы и радикалы и в котором неизбежна замена.

Пример 15. Решим неравенство

$$\sqrt{\log_2 4x\cdot\log_2 8x}>\sqrt{3}\log_2 2x. \tag{1}$$

Все логарифмы в неравенстве (1) имеют одно основание. В левой части есть произведение логарифмов, да к тому же и под корнем, значит, будем дробить логарифмы на мелкие составляющие, переходя от логарифма произведения к сумме логарифмов:

$$\sqrt{(\log_2 4+\log_2 x)\cdot(\log_2 8+\log_2 x)}>\sqrt{3}(\log_2 2+\log_2 x).$$

Сделав очевидную замену $z=\log_2 x$, получим иррациональное неравенство относительно новой переменной:

$$\sqrt{(2+z)(3+z)}>\sqrt{3}(1+z),$$

решение которого проведем по известной схеме (см. этюд 3):

$$\sqrt{(z+2)(z+3)}>\sqrt{3}(z+1)\iff\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z+1\geqslant 0,\\ (z+2)(z+3)>3(z+1)^2\end{cases}\\ \begin{cases}z+1<0,\\ (z+2)(z+3)\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\iff\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z\geqslant -1,\\ z^2+5z+6>3z^2+6z+3\end{cases}\\ \begin{cases}z<-1,\\ (z+2)(z+3)\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z\geqslant -1,\\ 2z^2+z-3<0\end{cases}\\ \begin{cases}z<-1,\\ \left[\begin{array}{l}z\leqslant -3,\\ z\geqslant -2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} z \geqslant -1, \\ (z-1)(z+3/2) < 0 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} z \leqslant -3 \\ -2 \leqslant z < -1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} z \geqslant -1, \\ -3/2 < z < 1 \end{cases} \\ z \leqslant -3 \\ -2 \leqslant z < -1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leqslant z < 1 \\ z \leqslant -3 \\ -2 \leqslant z < -1. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной, объединив множества решений первого и третьего неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} z \leqslant -3 \\ -2 \leqslant z < 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \leqslant -3 \\ -2 \leqslant \log_2 x < 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 1/8 \\ 1/4 \leqslant x < 2. \end{array}\right.$$

Окончательно получаем ответ: $x \in \left(-\infty, \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, 2\right)$.

В следующем примере переменная сосредоточена в основании логарифмов.

Пример 16. Решим неравенство

$$\log_{x-2}(4+2\sqrt{3}) \geqslant \log_{\frac{x-1}{3}}(\sqrt{3}+1). \tag{1}$$

Основания у логарифмов разные, так что надо привести к одному. К какому? Обратим внимание на аргументы логарифмов. Они тоже разные, но между ними есть связь. А именно, если возведем в квадрат выражение $\sqrt{3}+1$, то получим $4+2\sqrt{3}$. Значит, неравенство (1) можно переписать в виде

$$\log_{x-2}(\sqrt{3}+1)^2 \geqslant \log_{\frac{x-1}{3}}(\sqrt{3}+1).$$

Вынесем показатель степени аргумента логарифма в левой части неравенства как множитель 2 перед этим логарифмом:

$$2\log_{x-2}(\sqrt{3}+1) \geqslant \log_{\frac{x-1}{3}}(\sqrt{3}+1).$$

В обеих частях получили логарифмы с разными основаниями, но с одинаковым аргументом. Попробуем сделать этот аргумент $\sqrt{3}+1$ новым основанием логарифмов:

$$\frac{2}{\log_{\sqrt{3}+1}(x-2)} \geqslant \frac{1}{\log_{\sqrt{3}+1}\frac{x-1}{3}}, \tag{2}$$

и становится ясно, что от выбора основания ничего не зависит, тем самым все равно, к какому основанию было переходить. Для удобства будем считать, что мы сразу перешли к какому-то простому большему единицы основанию, например, к основанию 10, чтобы проще было записывать логарифмы. Продолжим решение:

$$(2) \iff \frac{2}{\lg(x-2)} - \frac{1}{\lg\frac{x-1}{3}} \geqslant 0 \iff \frac{2\lg\frac{x-1}{3} - \lg(x-2)}{\lg(x-2)\cdot\lg\frac{x-1}{3}} \geqslant 0$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\lg\dfrac{x-1}{3} - \lg(x-2) \geqslant 0, & (3)\\ \lg(x-2)\cdot\lg\dfrac{x-1}{3} > 0 & (4) \end{cases}\\ \begin{cases} 2\lg\dfrac{x-1}{3} - \lg(x-2) \leqslant 0, & (5)\\ \lg(x-2)\cdot\lg\dfrac{x-1}{3} < 0. & (6) \end{cases} \end{array}\right.$$

Осталось решить неравенства (3)–(6) и сконструировать множество, соответствующее структуре, в которой собраны эти неравенства. Имеем

$$(3) \iff \begin{cases} \lg\left(\dfrac{x-1}{3}\right)^2 \geqslant \lg(x-2),\\ x-1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{9} \geqslant x-2,\\ x-2>0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x^2-11x+19 \geqslant 0,\\ x>2 \end{cases} \iff x \in (2, (11-3\sqrt{5})/2] \cup [(11+3\sqrt{5})/2, +\infty),$$

$$(4) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2>1,\\ \dfrac{x-1}{3}>1 \end{cases}\\ \begin{cases} 0<x-2<1,\\ 0<x-1<4 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x>4\\ 2<x<3. \end{array}\right.$$

Следовательно, множеством решений первой системы будет множество $(2, (11-3\sqrt{5})/2] \cup [(11+3\sqrt{5})/2, +\infty)$ (здесь мы учли, что $2 < (11-3\sqrt{5})/2 < 3$: действительно, $2 < (11-3\sqrt{5})/2 < 3 \iff 4 < 11-3\sqrt{5} < 6 \iff 5 < 3\sqrt{5} < 7 \iff 25 < 45 < 49$).

После решения первой системы со второй дело обстоит проще, ибо выполнение неравенств (5) и (6) тесно связано с теми частями области определения $(2, +\infty)$ всей системы, где не выполнены неравенства (3) и (4), так что

$$(5) \iff x \in [(11-3\sqrt{5})/2, (11+3\sqrt{5})/2], \quad (6) \iff x \in (3, 4).$$

Так как $(11-3\sqrt{5})/2 < 3$, а $(11+3\sqrt{5})/2 > 4$, множеством решений второй системы будет промежуток $(3,4)$. Осталось объединить множества решений систем и получить ответ: $(2,(11-3\sqrt{5})/2] \cup (3,4) \cup [(11+3\sqrt{5})/2,+\infty)$.

Посмотрим сочетание логарифма с тригонометрическими выражениями.

Пример 17. Решим уравнение

$$\log_{\cos^2 x}(3\sin 4x\cdot\cos^2 x) = \log_{\cos x}\sqrt{\sin 4x\cdot\sin^2 x}. \qquad (1)$$

Ясно, что это простейшее логарифмическое уравнение, только основания у логарифмов разные. Будем переходить к одному основанию, по-видимому, к $\cos x$. При вынесении показателя степени у основания логарифма в левой части уравнения надо воспользоваться формулой (2.4) и поставить в основании модуль, однако мы находим, что косинус является основанием логарифма в правой части, поэтому есть внешнее требование его положительности и модуль ставить не будем. Имеем

$$(1) \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\log_{\cos x}(3\sin 4x\cdot\cos^2 x) = \log_{\cos x}\sqrt{\sin 4x\cdot\sin^2 x}. \qquad (2)$$

Теперь начнем избавляться от логарифмов. Можно было поместить множитель $1/2$ в левой части на место показателя степени подлогарифмического выражения и перейти к уравнению с участием корней, однако можно сначала умножить левую и правую части на 2, после чего перенести множитель 2 в правой части в показатель степени подлогарифмического выражения, в результате чего корень исчезнет. Кстати, при этой процедуре набор ограничений не меняется. Проделаем намеченное:

$$(2) \Longleftrightarrow \log_{\cos x}(3\sin 4x\cdot\cos^2 x) = \log_{\cos x}(\sin 4x\cdot\sin^2 x). \qquad (3)$$

Пришла пора избавиться от логарифмов. Ясно, что удаление логарифмов снимет все имевшиеся в уравнении ограничения и нам надо будет позаботиться о их сохранении, причем желательно наиболее экономным способом — ведь проверять придется корни тригонометрических уравнений. Ограничения $\cos x > 0$, $\cos x \neq 1$, идущие от основания, неизбежны. Из требований положительности обоих подлогарифмических выражений оставим одно, второе благодаря равенству гарантируется. Поскольку сложность этих выражений одинакова и с этой точки зрения никакому из них предпочтения отдать нельзя, потребуем, например, выполнения неравенства $\sin 4x\cdot\sin^2 x > 0$.

Ясно, что из множителей в левой части этого неравенства квадрат синуса всегда неотрицателен, так что от него идет только требование $\sin x \neq 0$, и остается потребовать выполнения неравенства $\sin 4x > 0$, которое, кстати, обеспечивает неравенства $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 1$. Итак,

$$(3) \Longleftrightarrow \begin{cases} 3\sin 4x \cdot \cos^2 x = \sin 4x \cdot \sin^2 x, \\ \cos x > 0, \ \sin 4x > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Решим уравнение в системе (4):

$$3\sin 4x \cdot \cos^2 x = \sin 4x \cdot \sin^2 x \Longleftrightarrow \sin 4x(3\cos^2 x - \sin^2 x) = 0. \tag{5}$$

В уравнении (5) множитель $\sin 4x$ должен быть положительным ввиду одного из неравенств системы (4), стало быть, в нуль может обращаться только второй множитель:

$$3\cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Longleftrightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2}.$$

Значение $\cos x = -\frac{1}{2}$ не удовлетворяет системе (4), остается $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Проверим, для каких из найденных чисел выполняется неравенство $\sin 4x > 0$. Поскольку для чисел из полученных двух групп значения $\sin 4x$ будут соответственно таковы:

$$\sin(4\pi/3 + 8\pi n) = \sin(4\pi/3) = -\sqrt{3}/2 < 0,$$

$$\sin(-4\pi/3 + 8\pi n) = -\sin(4\pi/3) = \sqrt{3}/2 > 0,$$

в ответе останутся только числа вида $x = -\pi/3 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Упражнения. Решить уравнения:

1) $\log_4 4x + \log_{2x} 2 = \frac{7}{3}$, ответ: $\{4,\ 2^{-1/3}\}$;

2) $\log_x 10 + 2\log_{10x} 10 + 3\log_{100x} 10 = 0$, ответ: $\{10^{\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}}\}$;

3) $\log_x 2 \cdot \log_{x^2} 3 = 1$,
ответ: $\{2^{\pm\sqrt{\frac{1}{2}\log_2 3}}\} = \{3^{\pm\sqrt{\frac{1}{2}\log_3 2}}\}$;

4) $\log_5(5x - 15) + \log_{25}(x+3)^2 = \log_5(2x^2 - 4x - 10) + 1$,
ответ: $\{2 + \sqrt{5}\}$;

5) $\log_{x-4}(x-2)\cdot\log_7(x-4)^2+\log_7(8-x)^2=2$,
ответ: $\{5+\sqrt{2},9\}$;

6) $\log_{\sqrt{x}}(3-x)\cdot\log_2 x+\log_2(x-6)^2=4$, ответ: $\{2\}$;

7) $\log_4^2(2x-3)+\log_{(x+5)}^2 4=\log_4^2(x+5)+\log_{(2x-3)}^2 4$,
ответ: $\left\{8,\ \frac{-7+\sqrt{177}}{4}\right\}$;

8) $\log_{\frac{1}{2}}(4\log_3 x)=\sqrt{\log_2\left(\log_x^2 3\right)-1}$, ответ: $\{3^{2^{-5}}\}$;

9) $\log_x(x^2+1)=\sqrt{\log_{\sqrt{x}} x^2(1+x^2)+4}$, ответ: $\left\{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right\}$;

10) $\log_{\sqrt{2}}(3x^2-1)+2=\sqrt{1+\log_{\sqrt{x}} x^3+\dfrac{6}{\log_{3x^2-1} 2\sqrt{2}}}$,
ответ: $\left\{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{3}},\ \sqrt{\frac{4+\sqrt{2}}{12}}\right\}$;

11) $(\log_{6x+5} 2+\log_{6x+5} 5)\log_4 10=\left(1/2+\log_4 5-\log_{6x+5} 10\right)\log_{x^2} 100$,
ответ: $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$;

12) $((1/2)\log_2 10-\log_{x+3} 10)\log_{x^2} 100=(1/2+\log_4 5)\log_{x+3} 10$,
ответ: $\left\{-\frac{3}{5}\right\}$;

13) $(\log_{9x+1} 2+\log_{9x+1} 5)(\log_8 5+1/3)=(\log_8 10-\log_{9x+1} 10)\log_{x^2} 100$,
ответ: $\left\{-\frac{1}{17}\right\}$;

14) $\dfrac{\log_x 2-2}{\log_x 4}<1$, ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)\cup(1,+\infty)$;

15) $\dfrac{\log_{0.5}(x/4)}{\log_5(x/4)}\leqslant\log_x 10$, ответ: $(0,10^{-\log_5 2}]\cup(1,4)\cup(4,+\infty)$;

16) $\log_3^2 x\leqslant 3-2\log_3 x$, ответ: $\left[\frac{1}{27},3\right]$;

17) $\log_{x^2}(3-x)\geqslant 0$, ответ: $(-\infty,-1)\cup(1,2]$;

18) $\log_{(x+1)^2}(x+3)>1$, ответ: $(0,1)$;

19) $\log_x\dfrac{2x-1}{x-1}>1$, ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\left(1,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$;

20) $\log_{x+2}\dfrac{2x+1}{6(x+1)}\leqslant 0$, ответ: $\left[-\frac{5}{4},-1\right)\cup(-\frac{1}{2},+\infty)$;

21) $\log_{x^2+x+1}(2x^2-x/2)<1$, ответ: $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{4}\cup 2\right)$;

22) $\log_x(5/2-x)\leqslant\log_{(5/2-x)} x$, ответ: $\left[\frac{1}{2},1\right)\cup\left[\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)\cup\left[2,\frac{5}{2}\right)$;

23) $\sqrt{\log_3 3x \cdot \log_3 27x} > \frac{\sqrt{3}}{2}\log_3 9x$, ответ: $\left(0, \frac{1}{27}\right] \cup (1, +\infty)$;

24) $\log_{x-3}(9 - 4\sqrt{5}) \leqslant \log_{\frac{x-1}{5}}(\sqrt{5} - 2)$,
ответ: $\left(3, \frac{27-\sqrt{425}}{2}\right] \cup (4, 6) \cup \left[\frac{27+\sqrt{425}}{2}, +\infty\right)$;

25) $(\log_x 2)\log_2 3 \geqslant (\log_{\sqrt{x}} 2)\log_{2x^3} 3$, ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 1\right) \cup [\sqrt[3]{2}, +\infty)$;

26) $$\left(\frac{16}{49}\right)^{\log_{(x+2)}|x+1|} \leqslant (1.75)^{-\log_{(x+2)}(6x+10)},$$
ответ: $[2 - \sqrt{13}, -1) \cup (2 + \sqrt{13}, +\infty)$;

27) $(0.05)^{-\log_{(x-0.25)} x} \geqslant (2\sqrt{5})^{\log_{(x-0.25)}(4x-1)}$,
ответ: $\left[2 - \sqrt{3}, \frac{5}{4}\right) \cup [2 + \sqrt{3}, +\infty)$;

28) $\log_{\sin^2 x}(8\sin^3 x \cdot \cos x) = \log_{\sin x}\sqrt{3\sin 2x}$,
ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

§ 6.3. Смешанные уравнения и неравенства. Системы уравнений

6.3.1. Согласно договоренности, изложенной в предисловии, мы относим к показательным такие соотношения, в которых участвуют только степени с постоянным основанием, а неизвестная находится в показателе степени, и к логарифмическим — в которых переменная участвует только под знаком логарифма (возможно, и в основании логарифмов).

К соотношениям смешанного типа отнесены, в частности, такие, в которых переменная есть в основании степени и ее показателе, переменная участвует в соотношении помимо вхождения ее в показательное или логарифмическое выражение, и т. п.

Обсудим несколько типов смешанных соотношений.

Сначала остановимся на рассмотрении уравнений или неравенств, в которые входят выражения вида $f(x)^{g(x)}$. Будем для определенности вести речь об уравнениях. В указанной ситуации избавиться от показательного выражения можно двумя способами.

(α) Прологарифмировать уравнение по некоторому основанию, т. е. перейти к сравнению логарифмов обеих его частей. Тогда после логарифмирования по основанию a вместо степени вида $f(x)^{g(x)}$ получаем выражение $g(x)\log_a f(x)$. Этот шаг результативен, если в уравнении нет суммы с участием степеней с переменным основанием.

(β) Переместить неизвестную из основания степени в показатель, пользуясь основным логарифмическим тождеством, т. е. воспользоваться равенством

$$f(x)^{g(x)} = a^{g(x)\log_a f(x)}, \tag{3.1}$$

где a — некоторое положительное отличное от единицы число (его выбирают, исходя из особенностей уравнения, а если таковых нет, то берут либо десятичные, либо натуральные логарифмы). К рекомендации этого пункта следует обратиться, если в уравнении есть сумма показательных выражений и в такой ситуации логарифмирование не помогает избавиться от показательных проблем.

Пример 1. Решим уравнение

$$x^{\lg^3 x - 3\lg x} = 0.01. \tag{1}$$

Переменная x входит как в показатель, так и в основание степени, значит, необходимо предпринять некие меры по избавлению от эффекта показательности. Заметив, что в уравнении нет суммы или разности показательных выражений, прислушаемся к рекомендациям п. (α), а именно перейдем к сравнению логарифмов от левой и правой частей уравнения. Выбор основания нетруден. В левой части в показателе степени встречается логарифм по основанию 10, а в правой части стоит степень числа 10, значит, прологарифмируем уравнение по основанию 10:

$$(1) \Longleftrightarrow \lg x^{\lg^3 x - 3\lg x} = \lg 10^{-2}.$$

Далее, пользуясь свойствами логарифма, избавимся от степеней и перейдем к произведениям:

$$(\lg^3 x - 3\lg x)\lg x = -2.$$

Поскольку x присутствует в полученном уравнении только в составе $\lg x$, замена $z = \lg x$ приведет нас к биквадратному уравнению

$$z^4 - 3z^2 + 2 = 0.$$

Решив его, получим $z^2 = 2$ или $z^2 = 1$, значит, $\lg x = \pm\sqrt{2}$ или $\lg x = \pm 1$. Отсюда $x = 10^{\pm\sqrt{2}}$ или $x = 10^{\pm 1}$.

Пример 2. Решим уравнение

$$(x^2 - 6x + 6)^{\log_2^2 x + \log_2 x - 2} = 1. \tag{1}$$

Переменная x присутствует и в основании, и в показателе степени выражения в левой части, вместе с тем ни в одной части уравнения нет суммы показательных выражений. Значит, можно прологарифмировать. Поскольку в показателе степени есть логарифмы по основанию 2, прологарифмируем уравнение (1) по этому основанию (положительность обеих частей очевидна), хотя в том случае, когда справа стоит единица, выбор основания несуществен:

$$\log_2(x^2 - 6x + 6)^{\log_2^2 x + \log_2 x - 2} = \log_2 1.$$

Воспользовавшись свойством (2.7) логарифма, получим уравнение

$$(\log_2^2 x + \log_2 x - 2)\log_2(x^2 - 6x + 6) = 0. \tag{2}$$

Вспомним, что произведение двух функций равно нулю, когда одна из них равна нулю, а другая определена. Значит, уравнение (2) равносильно следующей совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2(x^2 - 6x + 6) = 0, \\ \log_2^2 x + \log_2 x - 2 \text{ определено} \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2^2 x + \log_2 x - 2 = 0, \\ \log_2(x^2 - 6x + 6) \text{ определено} \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 6x + 6 = 1, \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2^2 x + \log_2 x - 2 = 0, \\ x^2 - 6x + 6 > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 6 = 1, \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5, \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5. \end{array}\right.$$

Решим уравнение второй системы. Сделав очевидную замену $t = \log_2 x$, получим квадратное уравнение $t^2 + t - 2 = 0$, корнями которого являются $t = 1$ и $t = -2$. Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -2 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1/4. \end{array}\right.$$

Для нахождения корней второй системы осталось проверить, удовлетворяют ли только что полученные корни уравнения неравенству этой системы. Проверка показывает, что $x = 2$ не удовлетворяет неравенству, а $x = 1/4$ удовлетворяет. Значит, единственным корнем второй системы является $x = 1/4$.

Итак, множество корней уравнения (1) таково: $\{1/4, 1, 5\}$.

Можно было разобраться с уравнением и без логарифмирования, а только обращаясь к свойствам степени и отвечая на вопрос: когда степень может быть равна единице?

Пример 3. Решим неравенство

$$(x^2+x+1)^{x^2-2x-2} > \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Представим правую часть неравенства в виде степени с тем же основанием, что и у степени в левой части:

$$(x^2+x+1)^{x^2-2x-2} > (x^2+x+1)^{-1}.$$

Теперь основания степеней в левой и правой частях неравенства одинаковы. Можно прологарифмировать неравенство по какому-либо основанию, но мы на этот раз рассмотрим неравенство как простейшее показательное с переменным основанием (см. (1.13)). Надлежит рассмотреть два случая, а именно когда основание больше единицы и меньше единицы. Случай равенства основания единице рассматривать не надо ввиду строгости исходного неравенства (будь неравенство нестрогим, надо было бы рассмотреть и случай, когда основание равно единице). Перепишем схему анализа простейшего показательного неравенства применительно к нашему и проделаем цепочку преобразований, приводящих к результату:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x^2+x+1>1, \\ x^2-2x-2>-1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0<x^2+x+1<1, \\ x^2-2x-2<-1 \end{array}\right. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x^2+x>0, \\ x^2-2x-1>0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x^2+x<0, \\ x^2-2x-1<0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x(x+1)>0, \\ (x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})>0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x(x+1)<0, \\ (x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})<0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>1+\sqrt{2} \\ x<1-\sqrt{2}, \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -1<x<0, \\ 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2}<x<0. \end{array}\right.$$

Получаем ответ: $(-\infty,-1)\cup(1-\sqrt{2},0)\cup(1+\sqrt{2},+\infty)$.

Пример 4. Решим уравнение
$$5\cdot x^{\lg 2}=2\cdot 4^{\lg x}-3.$$

В уравнении переменная участвует под логарифмом и за его пределами. Более того, она есть в основании и в показателе степени. Заметим, что здесь в правой части стоит разность, поэтому попытка прологарифмировать уравнение к успеху наверняка не приведет. Поэтому будем всё помещать в показатель степени, используя основное логарифмическое тождество, вот только основание надо подобрать. В уравнении уже есть логарифм по основанию 10, и это повод для попытки использовать для «подъема» выражений в показатель степени именно основание 10. Используя формулу (3.1) с $a=10$, преобразуем наше уравнение так:
$$5\cdot 10^{\lg 2\cdot\lg x}=2\cdot 10^{2\lg x\cdot\lg 2}-3,$$
и если положить $z=10^{\lg 2\cdot\lg x}$, то относительно переменной z получим уравнение $2z^2-5z-3=0$. Его корнями будут числа $z=3$ и $z=-1/2$, однако на z есть связанное с заменой ограничение $z>0$, стало быть, для возврата к x надо использовать только корень $z=3$. Имеем
$$10^{\lg 2\cdot\lg x}=3\Longleftrightarrow\lg 2\cdot\lg x=\lg 3\Longleftrightarrow\lg x=\log_2 3\Longleftrightarrow x=10^{\log_2 3}.$$
Итак, ответ: $\{10^{\log_2 3}\}$.

Пример 5. Решим неравенство
$$(5x^2+x+1)^{x^2+2x-3}\geqslant(4x^2+2x+3)^{x^2+2x-3}.$$

В этом неравенстве одинаковые показатели степени. Как отмечалось выше, разумно перейти от этого неравенства к неравенству, в котором сравниваются логарифмы от левой и правой частей по какому-то (большему единицы) основанию:
$$\begin{aligned}
&\lg(5x^2+x+1)^{x^2+2x-3}\geqslant\lg(4x^2+2x+3)^{x^2+2x-3}\\
\Longleftrightarrow&(x^2+2x-3)\lg(5x^2+x+1)\geqslant(x^2+2x-3)\lg(4x^2+2x+3)\\
\Longleftrightarrow&(x^2+2x-3)(\lg(5x^2+x+1)-\lg(4x^2+2x+3))\geqslant 0\\
\Longleftrightarrow&\left[\begin{array}{l}
x^2+2x-3=0,\\
\lg(5x^2+x+1)-\lg(4x^2+2x+3)=0,\\
\begin{cases}x^2+2x-3>0,\\ \lg(5x^2+x+1)-\lg(4x^2+2x+3)>0,\end{cases}\\
\begin{cases}x^2+2x-3<0,\\ \lg(5x^2+x+1)-\lg(4x^2+2x+3)<0.\end{cases}
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Не останавливаясь подробно на несложном решении стандартного вида соотношений последней системы, сообщим, что множеством ее решений будет множество $(-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$.

Можно привести несколько вариантов по поводу решения неравенств вида $a^b \geqslant c^b$. Например, заметив, что $c > 0$, а значит, и $c^b > 0$, можно без ущерба для множества решений разделить обе части неравенства на c^b, перейти к равносильному неравенству $\left(\dfrac{a}{c}\right)^b \geqslant \left(\dfrac{a}{c}\right)^0$, структура которого легко просматривается, ибо получилось неравенство, в котором сравниваются степени с одним основанием:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a}{c} > 1, \\ b \geqslant 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a}{c} < 1, \\ b \leqslant 0 \end{array}\right. \\ \dfrac{a}{c} = 1. \end{array}\right.$$

Кстати, эту же структуру, а стало быть, и множество решений, имеет неравенство $\left(\dfrac{a}{c} - 1\right) \cdot b \geqslant 0$, которое нетрудно решить изложенным при решении следующего примера методом интервалов (с аккуратным контролем случая «$= 0$»).

6.3.2. При анализе уравнений или неравенств смешанного типа, где неизвестная участвует не только под логарифмами или в показателях степеней, но и за их пределами, можно использовать несколько указанных ниже соображений.

1. При анализе соотношения указанного выше вида в первую очередь полезно задать вопрос о его виде. Если удается привести его к уравнению или неравенству, в котором в одной из частей находится произведение, а в другой нуль, то можно применить соображения, пригодные для такого типа соотношений.

2. Полезно проанализировать **все** участвующие в соотношении элементы на предмет вносимых ими ограничений, и если ограничения приводят к обозримому множеству чисел, то провести проверку и выяснить, какие из них будут корнями.

3. Если ограничения выполнены на малообозримых множествах (типа промежутков) и тем самым применить соображения п. 2 не удастся, то можно изучить левую и правую части уравнения или неравенства на предмет множеств значений; не исключено, что эти множества представляют собой промежутки, пересечение которых состоит из одной точки, и тогда это путь к нахождению корней.

4. Исследовать уравнение с точки зрения свойств функций из левой и правой частей уравнения. Бывает, что у них разного характера монотонность, абсцисса точки пересечения графиков находится путем подбора, а монотонность гарантирует отсутствие других корней.

Ввиду того, что смешанные соотношения — явление довольное редкое, мы решили не сопровождать изложенные соображения примерами в надежде на то, что в случае необходимости читатель сможет развить пожелания указанных выше пунктов применительно к возникшим задачам. Мы приведем лишь несколько примеров, не опирающихся на отмеченные соображения, однако, на наш взгляд, в чем-то поучительных.

Пример 6. Решим неравенство

$$\frac{x+2}{x\cdot\log_2(x^2+x+3/4)} \geqslant 0. \tag{1}$$

В данном неравенстве неизвестная есть под логарифмом и за его пределами, так что начинать решение будем с вопроса: «вид?». Ясно, что если при выполнении последней операции при вычислении левой части логарифм считать отдельно, то вид будет такой: $\dfrac{a}{b}$, где $a = (x+2)/x$, $b = \log_2(x^2+x+3/4)$. Используя известную структуру соотношения такого вида, можем написать

$$(1) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x+2}{x} \geqslant 0, \\ \log_2(x^2+x+3/4) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x+2}{x} \leqslant 0, \\ \log_2(x^2+x+3/4) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Нетрудно найти, что в первой системе множеством решений первого неравенства будет множество $(-\infty,-2]\cup(0,+\infty)$, множеством решений второго — $(-\infty,(-1-\sqrt{2})/2)\cup((-1+\sqrt{2})/2,+\infty)$, и их пересечение, т. е. множество решений первой системы — это множество $(-\infty,-2]\cup((-1+\sqrt{2})/2,+\infty)$.

С решением второй системы после решения первой дело, как обычно, обстоит проще. Используя полученную при решении первой системы информацию, приходим к выводу, что множеством решений второй системы будет

$$[-2, 0) \cap ((-1 - \sqrt{2})/2, (-1 + \sqrt{2})/2) = ((-1 - \sqrt{2})/2, 0).$$

В итоге получаем ответ: $(-\infty, -2] \cup ((-1-\sqrt{2})/2, 0) \cup ((-1+\sqrt{2})/2, +\infty)$.

К решению этого неравенства можно было подойти иначе, а именно воспользоваться методом интервалов применительно к любым непрерывным функциям на их области определения, а не только к рациональным функциям. Напомним (см. этюд 3), что этот метод основан на следующем факте: непрерывная функция на каждом промежутке ее области определения может сменить знак, только пройдя через нуль. А это означает, что на каждом промежутке из области определения между нулями функция сохраняет знак и достаточно как-либо найти, какой знак имеет функция на каждом из полученных промежутков. Раньше мы редко применяли этот метод по двум причинам. Во-первых, первоочередной целью при решении учебных задач считаем развитие логики и глубокое усвоение базовых свойств функций, в этом этюде показательных и логарифмических, в то время как метод интервалов, впрочем как и метод рационализации, носит скорее технический характер и связан больше с навыками преобразовательной деятельности. Во-вторых, недостаточная тщательность при его исполнении в конкретных случаях легко может привести к неверным результатам — надо внимательно следить за областью определения, не лениться при нахождении знака функции на каждом из промежутков (не полагать без достаточных на то оснований, что знак будет меняться от промежутка к промежутку) и т. п. Но поскольку в этом параграфе речь идет о соотношениях смешанного типа, мы решили немного внимания этому методу уделить. Впрочем, с точки зрения успешности на экзамене лучше одинаково хорошо владеть всеми этими методами.

Начнем с нахождения области определения функции

$$f(x) = \frac{x+2}{x \cdot \log_2(x^2 + x + 3/4)}.$$

Это дробь, а значит, она определена для тех значений аргумента, для которых определены числитель и знаменатель и при этом знаменатель отличен от нуля (о нахождении области определения см., например, этюд 2). Стоящие в числителе и в знаменателе функции определены всюду (заметим, что $x^2 + x + 3/4 > 0$ для любого x). Знаменатель обращается в нуль в точках 0, $(-1 - \sqrt{2})/2$, $(-1 + \sqrt{2})/2$. Значит, дробь определена всюду, за исключением этих точек. Числитель обращается в нуль при $x = -2$. Таким образом, мы получаем следующий набор промежутков: $(-\infty, -2]$, $[-2, (-1-\sqrt{2})/2)$, $((-1-\sqrt{2})/2, 0)$, $(0, (-1+\sqrt{2})/2)$, $((-1+\sqrt{2})/2, +\infty)$, и нам предстоит выяснить знак функции на каждом из них. Можно взять по точке в каждом из промежутков и выяснить знак функции в ней, в других точках рассматриваемого промежутка знак будет тот же (как правило, так лучше и поступать). Но мы пойдем немного другим путем. В одном из промежутков, а именно самом правом, найдем знак, подставив на место x какую-либо точку из этого промежутка, например $x = 2$. Нетрудно обнаружить, что дробь при этом значении x положительна. Мысленно пойдем справа налево и подумаем, что произойдет в плане изменения или сохранения знака, когда мы перейдем через точку $(-1+\sqrt{2})/2$. Ясно, что в этой точке в нуль обращается только логарифм (и эта точка становится выколотой из области определения), причем при переходе через эту точку логарифм меняет знак (например, ввиду строгой монотонности функции $\log_2(x^2+x+3/4)$ вблизи точки $(-1+\sqrt{2})/2$). Все остальные участники составляющего функцию f выражения в нуль в этой точке не обращаются, стало быть, свои знаки сохраняют. Получается, что знак меняется только у одного из сомножителей, а тогда он сменится и у всей дроби. Рассуждая аналогично, можно прийти к выводу о том, что знак будет меняться при переходе через каждую из рассматриваемых точек. Остается только, посмотрев на условие, обратить внимание на то, какие промежутки следует взять в ответ, и мы приходим к найденному ранее результату.

Кстати, если, воспользовавшись свойствами логарифмической функции, заметить, что неравенство $\log_a t > 0$ при $a > 1$ равносильно неравенству $t > 1$ или, иначе, $t - 1 > 0$, то замена множителя $\log_2(x^2+x+3/4)$ в знаменателе множителем $x^2+x-1/4$ не влияет на множество решений, поэтому исходное неравенство равносильно такому:

$$\frac{x+2}{x \cdot (x^2+x-1/4)} \geqslant 0,$$

которое легко решается методом интервалов.

Применение метода интервалов вместо исследования устройства неравенства бывает предпочтительнее, если анализ неравенства связан с сильно разветвленной структурой (см. также пример 14 в § 6.2).

Пример 7. Решим неравенство

$$\frac{\log_{2x}(3x-1)\cdot\log_{3x}(2x-1)}{2^x-4} \geqslant 0.$$

Сначала отметим, что левая часть обращается в нуль при $x = 2/3$, $x = 1$. Мы учтем это при подготовке ответа, а сейчас будем решать строгое неравенство

$$\frac{\log_{2x}(3x-1)\cdot\log_{3x}(2x-1)}{2^x-4} > 0. \tag{1}$$

Найдем область определения неравенства (1). Она характеризуется одновременным выполнением требований

$$3x-1>0, \quad 2x-1>0, \quad x>0, \quad x\neq\frac{1}{2}, \quad x\neq\frac{1}{3}, \quad x\neq 2,$$

что происходит при $x \in (1/2, 2)\cup(2, +\infty)$. Найденными выше нулями функции вся область определения неравенства разбивается на промежутки $(1/2, 2/3)$, $(2/3, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$, на каждом из которых левая часть неравенства (1) сохраняет свой знак. Остается определить, каков этот знак на каждом из указанных промежутков, присоединить найденные ранее нули и получить ответ.

Для определения знака поступим так же, как в предыдущем примере. Подставим в левую часть неравенства на место x какое-либо большое число, находящееся правее двух. Тогда ясно, что все логарифмы в числителе и выражение в знаменателе положительны, стало быть, вся дробь также положительна. Мысленно перемещаясь справа налево и проходя через точку 2, можем заметить, что знаменатель справа от 2 положителен, слева отрицателен, а остальные фрагменты дроби неподалеку от 2 сохраняют имеющийся у них знак. Значит, вся дробь меняет знак при переходе через точку 2 и будет отрицательной на $(1, 2)$. Рассуждая аналогично и замечая, что при переходе через точку 1 меняет знак только выражение $\log_{3x}(2x-1)$, находим, что на $(2/3, 1)$ дробь положительна. Рассуждая далее, можно прийти к выводу, что на $(1/2, 2/3)$ дробь отрицательна. В итоге с учетом того, в каких точках наблюдается равенство, приходим к такому ответу: $[2/3, 1]\cup(2, +\infty)$.

В решении следующего примера мы намеренно сделаем один некорректный, но правдоподобный ход, приводящий к неожиданной ситуации.

Пример 8. Решим уравнение
$$x = (1 - \log_2(5 \cdot 2^{\sqrt{x}+1} - 7) + \sqrt{x})^2. \tag{1}$$

Уравнение смешанного типа: переменная есть в разных местах. В таком случае полезно сразу отметить область определения: ее составляют все неотрицательные числа. Спросим: каков вид уравнения? Можно лаконично записать уравнение так: $a = b^2$, причем в b заключено довольно большое выражение и его оттуда надо как-то вытаскивать. Видимо, придется корень извлекать. Обратившись к уравнению (1) и извлекая корень из обеих частей, запишем его в виде
$$\sqrt{x} = 1 - \log_2(5 \cdot 2^{\sqrt{x}+1} - 7) + \sqrt{x}. \tag{2}$$
Перейдя к равносильному (2) уравнению
$$\log_2(5 \cdot 2^{\sqrt{x}+1} - 7) = 1$$
и решая его, приходим к уравнению $2^{\sqrt{x}+1} = 9/5$, в котором с учетом того, что $\sqrt{x} \geqslant 0$, левая часть не меньше двух, в то время как правая очевидно меньше двух. Выходит, что это уравнение корней-то не имеет. Это что же получается: и исходное уравнений корней не имеет? В принципе, такое возможно, однако не хочется в это верить. Вернемся к началу решения и тщательнее проведем анализ хода рассуждений. На каком-то шаге от уравнения вида $a = b^2$ мы перешли к уравнению $\sqrt{a} = b$ путем приравнивания корней из левой и правой частей. Однако в правой части переход был некорректным — там должен стоять модуль! Таким образом, мы упустили из виду второй случай, который надо рассмотреть, извлекая корень, а именно надо еще рассмотреть уравнение
$$-\sqrt{x} = 1 - \log_2(5 \cdot 2^{\sqrt{x}+1} - 7) + \sqrt{x}. \tag{3}$$
Опираясь на определение логарифма, можно сказать, что уравнение (3) равносильно уравнению
$$2^{1+2\sqrt{x}} = 5 \cdot 2^{\sqrt{x}+1} - 7,$$
которое в терминах переменной $z = 2^{\sqrt{x}}$, $z \geqslant 1$, приводится к виду $2z^2 - 10z + 7 = 0$. Корни последнего уравнения суть $z = \dfrac{5 \pm \sqrt{11}}{2}$, из них только $z = \dfrac{5 + \sqrt{11}}{2}$ удовлетворяет ограничению $z \geqslant 1$, оно и приведет к ответу: $x = \log_2^2 \dfrac{5 + \sqrt{11}}{2}$.

В следующем примере мы встретимся с неравенством, по виду логарифмическим, однако в силу некоторой его особенности переходящим в разряд скорее смешанных соотношений.

Пример 9. Решим неравенство

$$\sqrt{2}\log_2\left(\log_x\frac{1}{2}\right)\leqslant\log_{\sqrt{x}}(\log_{1/2}x).$$

Особенность неравенства в том, что в нем наблюдаются вложенные друг в друга логарифмы и при этом переменная есть как под логарифмами, так и в основаниях.

Будем анализировать поочередно: сначала обратимся к внутренним логарифмам, а затем, посмотрев на результат, — к внешним. Ясно, что во внутренних логарифмах надо перейти к одному основанию, а именно к основанию $1/2$:

$$\sqrt{2}\log_2\left(\frac{1}{\log_{1/2}x}\right)\leqslant\log_{\sqrt{x}}(\log_{1/2}x). \tag{1}$$

Сделаем в неравенстве (1) замену переменной, полагая $\log_{1/2}x=z$. Поскольку старая переменная участвует не только посредством выражения $\log_{1/2}x$, надо выразить старую переменную x через новую z, чтобы всюду старая переменная исчезла. Имеем $x=(1/2)^z=2^{-z}$. Теперь можно переписать (1), используя только переменную z:

$$\sqrt{2}\log_2\frac{1}{z}\leqslant\log_{2^{-z/2}}z. \tag{2}$$

Вложенность логарифмов побеждена. Перейдем к одному основанию, а именно к основанию 2, заодно проделав простейшие преобразования:

$$-\sqrt{2}\log_2 z\leqslant-\frac{2}{z}\log_2 z\iff\frac{\sqrt{2}-z}{z}\log_2 z\leqslant 0. \tag{3}$$

Получилось действительно неравенство смешанного вида, имеющее вид $a\cdot b\leqslant 0$. Не очень желая задумываться над тонкостями решения нестрогого неравенства, заметим, что равенство выполнено при $z=1$ и $z=\sqrt{2}$, это мы учтем при переходе к старой переменной, а сейчас займемся решением строгого неравенства:

$$\frac{\sqrt{2}-z}{z}\log_2 z<0\iff\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}-z}{z}<0,\\ \log_2 z>0\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}-z}{z}>0,\\ \log_2 z<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Нетрудно найти, что множеством решений первой системы будет промежуток $(\sqrt{2}, +\infty)$, а множеством решений второй — промежуток $(0, 1)$. Стало быть, с учетом рассмотренного ранее случая равенства, получаем структуру множества решений неравенства (3):

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} z > 0, \\ z \leqslant 1 \end{array}\right. \\ z \geqslant \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Подставим в нее на место z выражение этой переменной через x:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \log_{1/2} x > 0, \\ \log_{1/2} x \leqslant 1 \end{array}\right. \\ \log_{1/2} x \geqslant \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Нетрудно найти, что множеством решений последней системы, а вместе с ней и исходного неравенства будет $(0, 2^{-\sqrt{2}}] \cup [1/2, 1)$.

6.3.3. Системы уравнений. Анализ показательных и/или логарифмических уравнений, участвующих в системах, ничем не отличается от анализа отдельно решаемых уравнений таких типов. Обычно они приводятся к уравнениям без участия показательных или логарифмических функций, а эти функции служат источником ограничений, особенно этим отличается логарифмическая функция. Поэтому надо внимательно отнестись к сохранению ограничений.

Приведем лишь два примера решения систем, не затрагивая совсем тривиальные случаи (в надежде на то, что читатель, дочитавший до этого места и решивший хотя бы предложенный выше минимальный набор упражнений, без труда справится с простейшими системами).

Пример 10. Решим систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \log_x(x+y) \cdot (\log_{x+y} 20 - 1) = 1 + \log_x(x+y) \cdot \log_{x+y} y, \\ 4(1 + \log_x y) \log_{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \log_{\sqrt{x}} \left(\dfrac{5}{4}xy + 2\sqrt{xy}\right). \end{array}\right. \tag{1}$$

Начнем с первого вопроса: одно ли основание? Нет, основания разные. Будем выбирать, к какому основанию перейти. Поскольку в уравнениях системы наиболее простое основание это x, пожалуй, стоит перейти именно к этому основанию, несмотря на то, что оно непостоянно. Кстати, в целях избавления от логарифмов в разных уравнениях системы можно переходить к разным основаниям. Преобразуем первое уравнение системы (1):

$$\log_x(x+y)\cdot\left(\frac{\log_x 20-\log_x(x+y)}{\log_x(x+y)}\right)=1+\log_x(x+y)\cdot\frac{\log_x y}{\log_x(x+y)}.$$

Видно, что можно в левой и правой частях сократить дроби на выражение $\log_x(x+y)$, однако при этом непременно надо проследить, как изменятся ограничения, и исчезнувшие добавить в систему с преобразованным уравнением. Удаление из уравнения выражения $\log_x(x+y)$ уберет лишь ограничение $\log_x(x+y)\neq 0$, а остальные требования относительно $x+y$ и требования относительно x сохранятся, ибо эти выражения остаются в уравнении внутри логарифмов. Теперь обратим внимание на то, что вид уравнения побуждает всё собрать в отдельные логарифмы (см. вопрос 3 перечня из п. 6.2.4) и получить простейшее логарифмическое уравнение:

$$\log_x\frac{20}{x+y}=\log_x xy. \tag{2}$$

Избавление от логарифмов в уравнении (2) приведет к потере ограничений. Добавляя к получаемому уравнению в систему минимальный набор ограничений, призванный сохранить имевшиеся в (2) ограничения, с учетом требования $\log_x(x+y)\neq 0$ получим, что

$$(2)\iff\begin{cases}20=xy(x+y),\\ x>0,\ y>0,\ x+y\neq 1.\end{cases}$$

Займемся вторым уравнением системы. Его анализ не зависит от анализа первого уравнения, хотя, судя по виду уравнения (2), надо присматривать за тем, не получатся ли в результате преобразований выражения xy и $x+y$. Перейдем и во втором уравнении к основанию x, проделаем минимальные преобразования и избавимся от логарифмов:

$$4\log_x xy\cdot\frac{\log_x(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\log_x xy}=2\log_x\left(\frac{5}{4}xy+2\sqrt{xy}\right)$$

$$\iff\begin{cases}2\log_x(\sqrt{x}+\sqrt{y})=\log_x\left(\dfrac{5}{4}xy+2\sqrt{xy}\right),\\ xy\neq 1\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x+y=\dfrac{5}{4}xy,\\ x>0,\ x\neq 1,\ xy>0,\ xy\neq 1.\end{cases}$$

Итак, система (1) преобразована к равносильной ей системе

$$\begin{cases} 20 = xy(x+y), \\ x+y = \dfrac{5}{4}xy, \\ x > 0,\ y > 0,\ x \neq 1,\ x+y \neq 1,\ xy \neq 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Выделив в (3) систему уравнений и положив в них $xy = z$, $x+y = t$, получим такую систему:

$$\begin{cases} tz = 20, \\ t = \dfrac{5}{4}z, \end{cases}$$

корнями которой будут $z = \pm 4$, $t = \pm 5$. Возвращаясь к исходным переменным, заметим, что на z есть ограничение $z > 0$, стало быть, $z = -4$ далее рассматривать не надо. Если $z = 4$, $t = 5$, возврат к переменным x, y дает значения $x = 4$, $y = 1$, а также $x = 1$, $y = 4$. Из этих двух пар вторая не удовлетворяет ограничению $x \neq 1$, так что получаем ответ: $x = 4$, $y = 1$.

Пример 11. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{2\lg x} = 7^{\lg y}, \\ 7^{\lg 7} \cdot y^{2\lg 3} = 3^{4\lg 3} \cdot x^{\lg 7}. \end{cases} \qquad (1)$$

Неизвестные величины в первом уравнении участвуют под логарифмами, находящимися в показателях степеней, а во втором — в основаниях степеней. Чтобы убрать неизвестные из показателей, надо первое уравнение прологарифмировать, тогда показатели перейдут вниз и станут множителями при логарифмах. Далее, если прологарифмировать второе уравнение по тому же основанию, то неизвестные окажутся под логарифмами. Так как в первом уравнении неизвестные стоят внутри десятичных логарифмов, второе уравнение надо прологарифмировать по основанию 10. Займемся реализацией намеченного плана:

$$(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lg(3^{2\lg x}) = \lg(7^{\lg y}), \\ \lg(7^{\lg 7} \cdot y^{2\lg 3}) = \lg(3^{4\lg 3} \cdot x^{\lg 7}) \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2\lg x \cdot \lg 3 = \lg y \cdot \lg 7, \\ \lg^2 7 + 2\lg 3 \cdot \lg y = 4\lg^2 3 + \lg 7 \cdot \lg x. \end{cases}$$

Не желая возиться со сравнительно большими выражениями, прибегнем к более кратким символам. Обозначим $\lg x = u$, $\lg y = v$, $\lg 3 = a$,

$\lg 7 = b$. Такое действие не только удовлетворяет наше желание поменьше писать, но, как правило, приводит к легче просматриваемыми соотношениям. Действительно, в новых обозначениях система становится проще:

$$\begin{cases} 2au = bv, \\ b^2 + 2av = 4a^2 + bu. \end{cases}$$

Решить последнюю систему большого труда не составит. Выразим, например, v из первого уравнения и подставим это выражение во второе:

$$b^2 + \frac{4a^2u}{b} = bu + 4a^2.$$

Перенеся все слагаемые в одну часть, приведя к общему знаменателю и вынеся общий множитель за скобки, получим такое уравнение:

$$(4a^2 - b^2)(u - b) = 0,$$

откуда $u = b$, ибо первый множитель явно не нуль. Тогда $v = 2a$ и, возвращаясь к исходным неизвестным, приходим к ответу: $x = 7$, $y = 9$.

Упражнения. Решить уравнения, неравенства и системы уравнений:

1) $\left(\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{3x}{2} + 3\right)^{x^2-x-7} > \dfrac{4}{x^2 - 6x + 12}$,
ответ: $(-\infty, -2) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$;

2) $2 \cdot x^{\lg 9} = 3^{1+\lg x} + 2$, ответ: $\{10^{\log_3 2}\}$;

3) $(3x^2 + 2x + 3)^{x^2+x-6} \leqslant (2x^2 - x + 1)^{x^2+x-6}$,
ответ: $[-3, -2] \cup [-1, 2]$;

4) $\dfrac{x-1}{(x+1) \cdot \log_3(x^2 + x + 1/2)} \geqslant 0$,
ответ: $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(-1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \cup [1, +\infty)$;

5) $2\sqrt{x} + 1 = \log_2(5 \cdot 2^{\sqrt{x}+1} - 7)$, ответ: $\left\{\log_2^2(5 + \sqrt{11})\right\}$;

6) $\begin{cases} x^{\log_y 9} = 2, \\ y^{\log_2 x} = 3\sqrt{y}, \end{cases}$ ответ: $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\right),\ (2, 9)\right\}$;

7) $\begin{cases} 1 + \log_y x + \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{y}}(x + y) = \log_y 10 + \log_y 10 \cdot \log_{10} 18, \\ 1 = \log_{y-x}(29 - 2x - xy), \end{cases}$

ответ: $\{(10-\sqrt{91}, 10+\sqrt{91})\}$;

8) $\begin{cases} \log_{\sqrt{x}}(11-y) = 2 + 2\log_x(1+y), \\ \log_{10} y + \log_{10} y \cdot \log_y(x+y) = \log_{10} 3 - \log_{10} x + 1, \end{cases}$
ответ: $\{(3,2),\ (2,3)\}$;

9) $\begin{cases} 2^{2\lg x} = 1 : 5^{\lg y}, \\ 5^{\lg 5} \cdot y^{\lg 4} = 4^{\lg 4} : x^{\lg 5}, \end{cases}$ ответ: $\left\{\left(\frac{1}{5}, 4\right)\right\}$.

Литература

1. *Багаев Г. Н., Вертгейм Б. А., Войтишек В. В., Цецохо В. А.* Письменные экзамены по математике. Новосибирск: НГУ, 1970.

2. *Белоносов В. С., Фокин М. В.* Задачи вступительных экзаменов по математике. Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2005.

Оглавление

Математические этюды
для абитуриентов, учащихся, учителей

Дятлов Владимир Николаевич

Дмитриева Юлия Александровна

Этюд № 6. Показательные и логарифмические соотношения

Подписано в печать 7.06.2010. Формат $60 \times 84\ {}^{1}/_{16}$. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 3,7. Уч.-изд. л. 3,7. Тираж 200 экз. Заказ № 81.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.