

СЕВЕРО-ОСЕТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ К. Л. ХЕТАГУРОВА
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ВНЦ РАН И РСО-А

АЛГЕБРА, АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ:

тезисы докладов
Российской научной конференции
(г. Владикавказ, 26–27 июня 2015 г.)



Владикавказ
2015

ББК 22.16+
УДК 517 + 519.372.8

Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования:
тезисы докладов Российской научной конференции (г. Владикавказ, 26–27 июня
2015 г.).—Владикавказ: СОГУ, 2015.—112 с.

Сборник содержит тезисы докладов Российской научной конференции « Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования» (г. Владикавказ, 26–27 июня 2015 г.).

© Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова, 2015
© Южный математический институт
ВНЦ РАН, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Математическая жизнь К 60-летию Владимира Амурхановича Койбаева	7
--	---

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Аль Джабри Х. Ш., Родионов В. И. О подграфах графа бинарных отношений	13
Amaglobeli M. Category of MR-Groups Over a Ring R	15
Ашабоков Б. А., Абаева З. В., Шхануков-Лафишев М. Х. Локально-одномерная разностная схема для уравнения переноса пассивных примесей в атмосфере	19
Балащенко В. В., Дубовик П. А. Левоинвариантные эрмитовы f -структуры на группах Ли	22
Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х. Левоинвариантные эрмитовы f -структуры на группах Ли	24
Березов А. В., Макаренко М. Д. Разработка энкодера для робоплатформы ScratchDuino	26
Бештоков М. Х. Об итерационном методе решения краевой задачи для вырождающегося уравнения влагопереноса с нелокальным условием	28
Биткина В. В., Махнев А. А. Об автоморфизмах графа, являющегося 3-накрытием 126-клики	31
Биткина В. В., Гутнова А. К., Махнев А. А. Монстр Камерона	34
Бичегкуев М. С. О спектре дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, определяемые начальным условием из подпространства	37
Гасиева А. М., Алиханов А. А. Разностная схема повышенного порядка аппроксимации для уравнения диффузии с дробной производной по времени и краевыми условиями третьего рода	38
Гельман Б. Д. Об одной теореме М. А. Красносельского	40
Гозоева И. Х. Разработка прототипа экспертной системы обучения произношению	42

Гутнова А. К., Махнев А. А., Цогоева Д. В. Сильно регулярные графы, в которых окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $GQ(4, t)$	44
Джанкулаева М. А. О Математическом моделировании термоупругих процессов в кабельных покрытиях	46
Джусоева Н. А. Элементарная сетевая группа, ассоциированная с нерасщепимым максимальным тором	48
Дзеранов И. В., Макаренко М. Д. Разработка автоматизированного интернет-сервиса для обучения программированию	50
Дикарева Е. В. Свойства функций Грина для системы разнопорядковых обыкновенных дифференциальных уравнений	53
Дорофеева В. И., Афанаскина И. В. Исследование процесса оседания бугра грунтовых вод в областях с одним включением	55
Дряева Р. Ю., Койбаев В. А. Формулы для аддитивных подгрупп элементарных сетей	57
Карова Ф. А., Алиханов А. А. Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения Аллера дробного порядка	60
Клепиков П. Н., Оскорбин Д. Н., Родионов Е. Д. Исследование однородных солитонов Риччи на группах Ли малой размерности с помощью систем компьютерной математики	62
Клепиков П. Н., Пастухова С. В., Родионов Е. Д., Хромова О. П. О программной составляющей в задачах исследования сигнатур операторов тензоров кривизны на метрических группах Ли	63
Кулаев Р. Ч. Некоторые вопросы качественной теории уравнений четвертого порядка на графе	64
Кусраев А. Г. Теорема Артина для функциональных колец	67
Кусраева З. А. Теорема декомпозиции	69
Лекомцев Д. Г. Влияние Формы контура питания на работу совершенной скважины в анизотропном пласте	70
Лыткина Д. В., Мазуров В. Д. О $\{2, 3\}$ -группах с различными условиями конечности	73
Мазуров В. Д. Нераспознаваемые по спектру конечные простые группы и изоспектральные им группы	75
Мамсурова В. Х. Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа. Метод Роте	77
Макаренко М. Д., Савченко В. А. Использование ПИД-регуляторов для управления мультикоптерами	80
Назаров С. Г. Конструктор. Клиент-серверного мобильного приложения. Систематизация учебных данных ВУЗов	82

Никоноров Ю. Г. Об обобщенных пространствах Уоллаха	84
Ошхунов М. М., Джанкулаева М. А., Бесланеева Л. Ю. О математическом моделировании процесса перемещения в поле тяжести материальной точки рукой робота	87
Синегубов С. В. Математическое моделирование для расчета систем массового обслуживания с повторными вызовами	90
Ситник С. М. О связи неравенств М. Г. Крейна и Е. А. Горина в теории положительно определенных функций	92
Ситник С. М. Приложения операторов преобразования Бушмана — Эрдейи	94
Скворцов П. А. Разработка устройства для обучения игре на пианино	96
Сорокина М. М. О свойствах ω -верных формаций конечных групп	98
Тимашов А. С. Конечномерные приближения квадратичных экспоненциальных интерполяций для моделирования задач фильтрации сигналов	99
Федяев Ю. С. Математическое моделирование эволюции границы раздела жидкостей в ортотропном слое пористой среды	101
Khabibullin B. N., Baiguskarov T. Yu. Holomorphic minorants	103
Хагажеева А. А., Алиханов А. А. Априорная оценка решения первой краевой задачи для уравнения диффузии с операторами дробного интегро-дифференцирования	106
Худалов М. З. Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа. Метод Рунге	108
Список сокращений	111

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К 60-ЛЕТИЮ ВЛАДИМИРА АМУРХАНОВИЧА КОЙБАЕВА

В этом году исполняется 60 лет известному российскому алгебраисту, доктору физико-математических наук, профессору Койбаеву Владимиру Амурхановичу.

Владимир Амурханович — яркий представитель ленинградской-петербургской алгебраической школы, ученик З. И. Боровича. Все, кому довелось быть знакомым с Владимиром Амурхановичем, отмечают его незаурядные личные качества, яркий математический талант и человеческое обаяние.

Владимир Амурханович прошел насыщенный жизненный путь. Он родился 8 июня 1955 г. в городе Баку в семье военного. В 1972 г. окончил математический класс школы № 134 г. Баку (ныне академическая гимназия). С самого детства он проявлял незаурядные способности к математике. В школе был победителем и призером городской (Баку) и республиканских олимпиад. После окончания школы поступил на механико-математический факультет Азербайджанского госуниверситета, отучился год, затем семья переехала на родину в Осетию. Владимир Амурханович перевелся на физико-математический факультет СОГУ, где одаренного студента заметил известный ленинградский профессор З. И. Борович, который приезжал с лекциями во Владикавказ. Начиная с 1975 г. Койбаев учится на математико-механическом факультете ЛГУ (СПбГУ), который оканчивает в 1978 г.

Серьезно заниматься наукой он начал еще студентом. Его научным руководителем стал Зенон Иванович Борович. В 1974 г. В. А. Койбаев — победитель студенческой олимпиады по математике «Студент и научно-технический прогресс» (г. Ростов), в 1977 г. он получил премию математико-механического факультета СПбГУ за студенческую научную работу. Свою первую статью Владимир Амурханович опубликовал в журнале «Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР» в 1977 г. будучи студентом 4-го курса. Статья называлась «Примеры немономиальных линейных групп без трансвекций» и оказалась очень полезной. Дело в том, что в 1976 г. З. И. Борович опубликовал основополагающую статью, в которой было дано описание промежуточных подгрупп полной линейной группы $GL(n, k)$ над полем k , содержащих группу диагональных матриц. При этом предполагалось, что поле k содержит не менее семи элементов. Используя понятие сети, З. И. Борович показал, что всякая промежуточная подгруппа заключена между сетевой группой и ее нормализатором (т. е. имеет место стандартное описание промежуточных подгрупп). Примеры, построенные В. А. Койбаевым показали, что ограничение на число элементов поля существенно, и стандартное описание промежуточных подгрупп для полей с числом элементов менее семи уже не имеет места. Уже в своей кандидатской диссертации, введя понятие просети, В. А. Койбаеву удалось дать описание указанных промежуточных

подгрупп для полей из 3, 4 и 5-ти элементов. В 1982 г. после окончания аспирантуры математико-механического факультета ЛГУ и защиты кандидатской диссертации на тему «Расположение подгрупп в линейных группах над конечными полями» Владимир Амурханович решает вернуться в Осетию, где возглавляет кафедру алгебры и геометрии Северо-Осетинского государственного университета и продолжает активно заниматься научной работой. В 1983–1984 гг. удалось дать описание подгрупп ортогональной группы, содержащих группу диагональных матриц.

В начале 1980-х гг. выдающийся представитель ленинградской-петербургской алгебраической школы Н. А. Вавилов занялся реализацией программы описания подгрупп специальной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц и дал описание указанных промежуточных подгрупп. По аналогии с полной линейной группой, всякая промежуточная подгруппа оказалась заключенной между элементарной сетевой подгруппой и ее нормализатором. В серии работ 1982–1985 гг., продолжая большой цикл работ профессора Н. А. Вавилова, Койбаеву В. А. удалось дать описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу элементарных клеточно-диагональных матриц (доведя размеры клеток до 2), а затем было получено описание подгрупп специальной линейной группы над полями из 4 и 5 элементов, содержащих группу диагональных матриц.

В 1989–1990 гг. начинается работа по описанию подгрупп полной линейной группы степени 2 над бесконечным полем, содержащих нерасщепимый максимальный тор. Прорывной работой в этом направлении явилась статья 1990 гг., опубликованная в ДАН СССР, в которой были исследованы (а в дальнейших работах было дано описание) указанные промежуточные подгруппы.

Следующая важная ступень в научной карьере Владимира Амурхановича — докторантура на кафедре алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского государственного университета. После защиты докторской диссертации он возвращается в Северо-Осетинский государственный университет, где продолжает возглавлять кафедру алгебры и геометрии. На математическом факультете организовывается совместно с профессором А. Г. Кусраевым и доцентом В. Т. Худаловым семинар «Алгебра и анализ», которому в этом году исполняется 20 лет.

Помимо активной научной работы, В. А. Койбаев занимается педагогической и просветительской деятельностью. Владимир Амурханович старается привлекать к занятиям наукой способных студентов, организует алгебраические кружки, пропагандирует среди молодежи занятия наукой. В. А. Койбаев уделяет большое внимание школьной математике. Ежегодно он возглавляет экспертную комиссию всероссийской олимпиады республиканского этапа. Кафедра алгебры и геометрии СОГУ отвечает за проведение республиканской олимпиады по математике и информатике. В этом году она собрала более 200 участников.

Хочется отметить, что Владимир Амурханович постоянно работает над новыми научными проблемами и задачами. В 2009 г. была опубликована важная работа, в которой было показано, что любая надгруппа нерасщепимого максимального (минизотропного) тора с одномерным преобразованием в полной линейной группе содержит элементарную трансекцию на любой позиции. В этом

же году В. А. Койбаев публикует монографию «Подгруппы группы $GL(2, k)$, содержащие нерасщепимый тор». Другое направление, к которому В. А. Койбаев проявляет интерес, — это исследование элементарных сетей, где он плодотворно сотрудничает с представителями красноярской алгебраической школы. В серии работ, начиная с 2010 г. были исследованы элементарные сети, замкнутые (допустимые) сети, введено понятие производной сети в специальной линейной группе (позже Я. Н. Нужин перенес это понятие на произвольные группы Шевалле).

В. А. Койбаевым опубликовано более 70 научных работ в ведущих изданиях. Он является членом редколлегии Владикавказского математического журнала. Неоднократно участвовал в организации и проведении международных алгебраических конференций, а также был председателем оргкомитета IX Международной школы-конференции по теории групп (Владикавказ, 9–15 июля 2012 г.).

От всей души поздравляем Владимира Амурхановича Койбаева со знаменательным юбилеем и пожелать ему и его близким крепкого здоровья, счастья и благополучия!

Мы желаем Владимиру Амурхановичу долгие и долгие годы оставаться таким же бодрым, энергичным и полным творческих планов и идей!

Тезисы докладов

О ПОДГРАФАХ ГРАФА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Х. Ш. Аль Джабри (Россия, Ижевск; УдГУ),
В. И. Родионов (Россия, Ижевск; УдГУ)

1. Смежность бинарных отношений

Пусть $B = \{0, 1\}$ — булево множество, X — произвольное множество, а $X^2 \doteq X \times X$ — прямое произведение. Всякое подмножество $R \subseteq X^2$, называемое *бинарным отношением* на множестве X , порождает характеристическую функцию $\chi_R : X^2 \rightarrow B$ такую, что $\chi_R(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in R$. Далее функцию $\chi_R(x, y)$ обозначаем $R(x, y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $X = Y \cup Z$ — дизъюнктное объединение двух подмножеств (допускается, что $Y = \emptyset$ или $Z = \emptyset$). Предположим, что отношение $R \subseteq X^2$ таково, что $R(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in Y \times Z$. Оно порождает отношение $S \subseteq X^2$ такое, что

$$\begin{aligned} S(x, y) &= 1 - R(y, x) \text{ для всех } (x, y) \in Y \times Z, \\ S(x, y) &= 0 \text{ для всех } (x, y) \in Z \times Y, \\ S(x, y) &= R(x, y) \text{ для всех } (x, y) \in Y^2 \cup Z^2. \end{aligned}$$

Отношение S называется *смежным* с отношением R .

2. Смежность частичных порядков

Через $V_0(X)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве X .

Предложение 1. Пусть σ и τ — смежные отношения. Включение $\sigma \in V_0(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\tau \in V_0(X)$.

Таким образом, множество X порождает пару $\langle V_0(X), E(X) \rangle$, где $V_0(X)$ — множество вершин, состоящее из всех частичных порядков множества X , а $E(X)$ — множество ребер, состоящее из неупорядоченных пар различных смежных частичных порядков множества X .

Если $X = \{1, \dots, n\}$, то хорошо известно, что $\text{card } V_0(X) = T_0(n)$, где $T_0(n)$ — это количество помеченных T_0 -топологий (или помеченных транзитивных графов), определенных на множестве X .

Предложение 2. Если $X = \{1, \dots, n\}$, то количество компонент связности графа $\langle V_0(X), E(X) \rangle$ равно $T_0(n-1)$.

3. Смежность рефлексивно-транзитивных отношений

Через $V(X)$ обозначим совокупность всех рефлексивно-транзитивных отношений, определенных на множестве X .

Предложение 3. Пусть σ и τ — смежные отношения. Включение $\sigma \in V(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\tau \in V(X)$.

Таким образом, множество X порождает пару $\langle V(X), E(X) \rangle$, где $V(X)$ — это множество вершин, состоящее из всех рефлексивно-транзитивных отношений множества X , а $E(X)$ — множество ребер, состоящее из неупорядоченных пар различных смежных рефлексивно-транзитивных отношений множества X .

Если $X = \{1, \dots, n\}$, то $\text{card } V(X) = \sum_{m=1}^n S(n, m) T_0(m)$, где $S(n, m)$ — числа Стирлинга 2-го рода (см., например, [1]).

Предложение 4. Если $X = \{1, \dots, n\}$, то количество компонент связности графа $\langle V(X), E(X) \rangle$ равно $\sum_{m=1}^n S(n, m) T_0(m-1)$.

4. Смежность ациклических графов

Пусть $X = \{1, \dots, n\}$, а $A(X)$ — это совокупность всех помеченных ациклических графов (ациклических отношений), определенных на X .

Предложение 5. Пусть σ и τ — смежные отношения. Включение $\sigma \in A(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\tau \in A(X)$.

Таким образом, множество X порождает граф $\langle A(X), E(X) \rangle$, где $A(X)$ — это множество вершин, состоящее из всех помеченных ациклических графов (ациклических отношений), определенных на множестве X , а $E(X)$ — множество ребер, состоящее из неупорядоченных пар различных смежных ациклических графов.

Предложение 6. Если $X = \{1, \dots, n\}$, то

$$\text{card } A(X) = \sum_{p_1 + \dots + p_k = n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1! \dots p_k!} 2^{(n^2 - p_1^2 - \dots - p_k^2)/2},$$

а количество компонент связности графа $\langle A(X), E(X) \rangle$ равно

$$\sum_{p_1 + \dots + p_k = n} \frac{(-1)^{n-k}}{k} \frac{n!}{p_1! \dots p_k!} 2^{(n^2 - p_1^2 - \dots - p_k^2)/2},$$

где суммирование в обеих суммах ведется по всем упорядоченным наборам (p_1, \dots, p_k) натуральных чисел таких, что $p_1 + \dots + p_k = n$.

Литература

1. Evans J. W., Harary F., Lynn M. S. On the computer enumeration of finite topologies // Comm. ACM.—1967.—Vol. 10.—P. 295–297.

CATEGORY OF MR-GROUPS OVER A RING R

М. Amaglobeli (Грузия, Тбилиси; ТГУ)

1. Basic Definitions and Examples

1.1. Let R denote an arbitrary associative ring with unity, and G a group. Let us enrich the group language $L_{gr} = \langle \cdot, ^{-1}, e \rangle$ as follows: $L_{gr} \cup \{f_\alpha(x) \mid \alpha \in R\}$ where $f_\alpha(x)$ is a unary operation denoted by $f_\alpha(g) = g^\alpha \forall g \in G$.

DEFINITION 1. The set G will be called a *Lyndon R-group* if on it the operations $\cdot, ^{-1}, e, f_\alpha(x)$ are defined and the following axioms are fulfilled

- I. Group axioms;
- II.

$$\begin{aligned} g^1 &= g, & g^0 &= e, & e^\alpha &= e, \\ g^{\alpha+\beta} &= g^\alpha \cdot g^\beta, & g^{\alpha\beta} &= (g^\alpha)^\beta, \\ (h^{-1}gh)^\alpha &= h^{-1}g^\alpha h & \text{for any } \alpha, \beta \in R \text{ and } g, h \in G. \end{aligned}$$

Since Axioms I and II are identities, we can speak of a variety of R -groups, R -isomorphisms, R -homomorphisms, free R -groups. Let \mathfrak{L}_R denote the category of all Lyndon R -groups with R -homomorphisms.

DEFINITION 2. Let $G, H \in \mathfrak{L}_R$. Then a homomorphism $\varphi : G \rightarrow H$ is called an *R-homomorphism* if $(g^\alpha)^\varphi = (g^\varphi)^\alpha$ for any $g \in G, \alpha \in R$.

1.2. An R-torsion-free group.

DEFINITION 3. An element g of a group $G \in \mathfrak{L}_R$ is called *periodic* if $g^\alpha = e$ for some $0 \neq \alpha \in R$. A group G that does not contain non-unit periodic elements is called an *R-torsion-free group*.

Proposition 1. *The set $O(g) = \{\alpha \in R \mid g^\alpha = e\}$ is the right ideal in a ring R (the ordinal ideal of an element g).*

Let us consider a set of axioms (quasi-identities) for groups from the class \mathfrak{L}_R :

$$\forall e \neq g \in G \quad g^\alpha = e \longrightarrow g = e.$$

As easily seen, all R -torsion-free R -groups form a quasi-variety of R -groups.

1.3. MR-Group categories. In [1] A. Myasnikov and V. Remeslennikov introduced a new category of R -groups by adding one more axiom

$$(MR) : \quad \forall g, h \in G \quad [g, h] = 1 \longrightarrow (gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha.$$

It is obvious that all R -modules over a ring R satisfy the (MR) axiom. An example given in [1] shows that \mathfrak{M}_R is a proper subclass in \mathfrak{L}_R .

EXAMPLE. Most of natural examples of R-groups lie in the class \mathfrak{M}_R :

- 1) An arbitrary group is a \mathbb{Z} -group;
- 2) an abelian divisible group from $L_{\mathbb{Q}}$ is a \mathbb{Q} -group;
- 3) a group of the period m is a $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -group;
- 4) a module over a ring R is an abelian MR-group;
- 5) a free Lyndon R-groups [2] are MR-groups;
- 6) an arbitrary nilpotent R group over a binomial ring R, which was introduced by F. Hall in [3], is an R-group from \mathfrak{M}_R (see Subsect. 2.2);
- 7) an arbitrary pro- p -group is a \mathbb{Z}_p^∞ -group over a ring of integer p -adic numbers \mathbb{Z}_p^∞ ;
- 8) an arbitrary pro-finite group is a $\widehat{\mathbb{Z}}$ -group, where $\widehat{\mathbb{Z}}$ is the total completion \mathbb{Z} in pro-finite topology;
- 9) a complex (real) unipotent Lie group is a \mathbb{G} -group (\mathbb{R} -group).

2. Nilpotent R-Groups

2.1. Let $c > 1$ be a natural number. Denote by $\mathfrak{N}_{c,R}$ the category of nilpotent R-groups of nilpotence step c from the class \mathfrak{L}_R , i. e. of those R-groups for which the identity

$$\forall x_1, \dots, x_{c+1} \quad [x_1, \dots, x_{c+1}] = 1$$

is fulfilled.

Denote by $\mathfrak{N}_{c,R}^\circ$ the category of nilpotent groups of step c , for which the (MR) axiom holds true. The structure of R-groups without the (MR) axiom is very complicated and that is why only R-groups with the property (MR) are investigated in most papers. In what follows we will consider only R-groups with this axiom.

2.2. Hall nilpotent groups. In order to introduce this notion we have to restrict the class of considered rings.

DEFINITION 4. A ring R is called *binomial* if R is an integrity domain with \mathbb{Z} as a subring and contains, along with every element α , all binomial coefficients

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

DEFINITION 5. A nilpotent group G of nilpotence step c is called a *Hall R-group* if for any x from G and α from R, an element $x^\alpha \in G$ is defined uniquely and the following axioms are fulfilled (x, y, x_1, \dots, x_n are arbitrary elements from G ; α, β are arbitrary elements from R):

- 1) $x^1 = x, x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$;
- 2) $(y^{-1}xy)^\alpha = y^{-1}x^\alpha y$;
- 3) $x_1^\alpha x_2^\alpha \dots x_n^\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\alpha \tau_2(x)^{\binom{\alpha}{2}} \dots \tau_c(x)^{\binom{\alpha}{c}}$, where $\tau_k(x)$ is the k -th Petrescu word of x_1, x_2, \dots, x_n .

Let us describe Petrescu words in more detail. Assume that x_1, x_2, \dots, x_n is the base of a free group F . For each natural k the k -th Petrescu word $\tau_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \tau_k(x)$ is defined recurrently from the relation

$$x_1^k x_2^k \dots x_n^k = \tau_1(x)^k \tau_2(x)^{\binom{k}{2}} \dots \tau_{k-1}(x)^{\binom{k}{k-1}} \tau_k(x).$$

In particular, $\tau_1(x) = x_1x_2 \cdots x_n$; $\tau_2(x) = \prod_{i>j} [x_i, x_j] \pmod{\gamma_3(F)}$.

A systematic study of MR-groups was initiated in [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Results obtained in these papers have turned out to be very useful in solving well-known problems of Tarski.

Denote the category of Hall R-groups by $\mathfrak{HN}_{c,R}$. We are going to show that the structure of groups from $\mathfrak{N}_{c,R}$ much differs from the structure of groups from $\mathfrak{HN}_{c,R}$. To this end, following [11] we recall the structure of a free R-group in the variety $\mathfrak{HN}_{2,R}$. Our consideration is confined to two binomial rings $R = \mathbb{Q}[t]$, $R = \mathbb{Q}(t)$, where \mathbb{Q} is the field of rational numbers.

Denote by G_0 a free 2-step nilpotent R-group in the category $\mathfrak{HN}_{2,R}$ with generators x, y . It is well known that the Maltsev base of this group consists of three elements $x, y, [y, x]$. The general form of an element $g \in G_0$ is

$$g = x^\gamma y^\delta [y, x]^\varepsilon, \quad \gamma, \delta, \varepsilon \in R.$$

In particular, in this group the commutant G'_0 is a free R-module of rank 1 with generator $[y, x]$.

If now G is a free R-group in the variety $\mathfrak{N}_{2,R}^0$, then in [3] it is shown that G' is a free R-module of infinite rank and the base of this module is found.

3. Free Products of MR-Groups

DEFINITION 6. A R-group $F_R(X)$ with a set of R-generators X is called a free R-group with base X if for each R-group G an arbitrary mapping $\varphi_0 : X \rightarrow G$ continues to an v -homomorphism $\varphi : F_R(X) \rightarrow G$. A set X is called a *set of free R-generators* $F_R(X)$. The power $|X|$ is called the *rank of the group* $F_R(X)$.

Teopema 1. For any X and R , a free R-group $F_R(X)$ exists in the class \mathfrak{M}_R and it is unique to within an R-isomorphism.

DEFINITION 7. Let $G_i, i \in I$, be R-groups. An R-group $*G_i$ is called a *free product* in the category \mathfrak{M}_R if R-homomorphisms $\varphi_i : G_i \rightarrow *G_i$ are such that for any R-homomorphisms $\psi_i : G_i \rightarrow H$, where H is an arbitrary R-group, there exists an R-homomorphism $\psi : *G_i \rightarrow H$ that makes the following diagrams commutative:

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{\varphi_i} & *G_i \\ \psi_i \downarrow & \swarrow \psi & \uparrow \\ & & H \end{array} \quad (i \in I)$$

and the group $*G_i$ is R-generated by the set $\{\varphi_i(g_i) \mid g_i \in G_i, i \in I\}$.

From the category argument it follows that the group $*G_i$ is defined uniquely to within an R-isomorphism.

Teopema 2. Let R be a ring containing \mathbb{Z} as a subring, $G_i, i \in I$ be some set of R-groups. Then $*G_i \cong (*G_i)^R$.

Литература

1. A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov Degree groups. I. Foundations of the theory and tensor completions // Sibirsk. Mat. Zh.—1994.—Vol. 35, № 5.—P. 1106–1118; Engl. transl.: Siberian Math. J.—1994.—Vol. 35, № 5.—P. 986–996.
2. R. C. Lyndon Groups with parametric exponents // Trans. Amer. Math. Soc.—1960.—Vol. 96.—P. 518–533.
3. Ph. Hall The Edmonton notes on nilpotent groups // Queen Mary College, London, 1957.
4. A. G. Myasnikov and V. N. Remeslennikov Exponential groups. II. Extensions of centralizers and tensor completion of CSA-groups // Internat. J. Algebra Comput.—1996.—Vol. 6, № 6.—P. 687–711.
5. G. Baumslag, A. Myasnikov, and V. Remeslennikov Discriminating completions of hyperbolic groups // Dedicated to John Stallings on the occasion of his 65th birthday. Geom. Dedicata.—2002.—Vol. 92.—P. 115–143.
6. M. G. Amaglobeli and T. Z. Bokelavadze Power groups. Groups which are accurate at tensor completion // Vestn. Omsk. Univ.—2009.—№ 2.—P. 35–46.
7. M. Amaglobeli and T. Bokelavadze Abelian and nilpotent varieties of power groups // Georgian Math. J.—2011.—Vol. 18, № 3.—P. 425–439.
8. M. G. Amaglobeli Power groups. Translated from // Sovrem. Mat. Prilozh.—2011.—Vol. 75; J. Math. Sci. (N. Y.).—2012.—Vol. 186, № 6.—P. 811–865.
9. M. Amaglobeli Tensor completion in the category of R-groups over a ring R // J. Math. Sci. (N. Y.).—2013.—Vol. 193, № 3.—P. 353–358; transl. from: Sovrem. Mat. Prilozh.—2012.—Vol. 80.
10. M. G. Amaglobeli and V. N. Remeslennikov Extension of a centralizer in nilpotent groups // Sibirsk. Mat. Zh.—2013.—Vol. 54, № 1.—P. 8–19.
11. M. G. Amaglobeli and V. N. Remeslennikov Free nilpotents R-groups of class 2 // Doklady Mathematics.—2012.—Vol. 85, № 2.—P. 236–239.

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ПАССИВНЫХ ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ

Б. А. Ашабоков (Россия, Нальчик; ВГИ),
З. В. Абаева (Россия, Нальчик; КБГУ),
М. Х. Шхануков-Лафишев (Россия, Нальчик; КБГУ)

Введение

Атмосферные процессы относятся к сложным физическим процессам, особенностями которых являются нестационарность, нелинейность, трехмерность, а также разномасштабность протекающих в них «элементарных» процессов. Этими особенностями и обусловлены трудности, возникающие на пути их исследования. Как показывает анализ состояния исследований этих процессов, в частности, исследований конвективных облаков [1], дальнейший прогресс данного научного направления требует решения качественно новых задач с широким использованием математического моделирования. Вместе с тем, разработка математических моделей и исследование атмосферных процессов на их основе встречает серьезные трудности, к которым относится и построение эффективных численных методов (см. [2, 3]). Работа посвящена построению локально-одномерной схемы для многомерного уравнения диффузии с конвенцией [4].

Локально-одномерная схема

В цилиндре $Q_{t_0} = G \times [0, t_0]$, основанием которого является p -мерный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p), 0 < x_\alpha < l_\alpha\}$, рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \quad (1)$$

$$u|_\Gamma = \mu(x, t), \quad t \geq 0, \quad \bar{G} = G + \Gamma, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G},$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha},$$

где $u(x, m, t)$ — функция распределения по массам капель частиц, $k_\alpha(x, t)$ — коэффициент турбулентной диффузии, $r_\alpha(x, t)$ — компоненты вектора скорости воздушных потоков.

Уравнение (1) или

$$\Re u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f(x, t) = 0$$

перепишем в виде

$$\sum_{\alpha=1}^p \Re_\alpha u = 0, \quad \Re_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f.$$

На отрезке $[0, t_0]$ введем сетку

$$\varpi'_\tau = \left\{ 0, t_{j+\frac{\alpha}{p}} = \left(j + \frac{\alpha}{p} \right) \tau, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1; \alpha = 1, 2, \dots, p \right\},$$

содержащую наряду с узлами $t_j = j\tau$ фиктивные узлы $t_{j+\frac{\alpha}{p}}, \alpha = 1, 2, \dots, p - 1$; ω'_τ — множество узлов сетки ϖ'_τ для которых $t > 0$.

По аналогии с [4] уравнению (1) поставим в соответствие цепочку «одномерных» уравнений:

$$\frac{1}{p} \frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} = L\vartheta_{(\alpha)} + f_\alpha \quad \text{при} \quad t_{j+\frac{\alpha-1}{p}} < t \leq t_{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p \quad (2)$$

с условиями

$$\vartheta_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}(x, t_j) = \vartheta_{(p)}(x, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1;$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{(\alpha)}\left(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right) &= \vartheta_{(\alpha-1)}\left(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right), \quad \vartheta_{(\alpha)} = \mu(x, t) \\ &\text{при} \quad x \in \Gamma_\alpha, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p; \end{aligned}$$

Γ_α — множество граничных точек по направлению x_α . Аппроксимируем каждое уравнение (2) номера α двухслойной неявной схемой на полуинтервале $(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}]$, тогда получим цепочку p одномерных разностных уравнений:

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad (3)$$

$$y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \mu^{j+\frac{\alpha}{p}} \quad \text{при} \quad x \in \gamma_{h,\alpha}, \quad j = 0, 1, \dots, j_0; \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (4)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (5)$$

$$\Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \chi_\alpha (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}) + b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1)} y_{x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}},$$

$$\chi_\alpha = (1 + R_\alpha)^{-1}, \quad R_\alpha = \frac{0.5h_\alpha |r_\alpha|}{k} \text{-разностное число Рейнольдса,}$$

$$r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-, \quad a^{(+1)} = a_{i+1}, \quad a_i = k_{i-1/2}(\bar{t}), \quad \bar{t} = t_{j+1/2},$$

$$x \in \varpi_h = \{ x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2, \dots, i_p h_p) \in \bar{G}, \quad i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha, \quad h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha \}.$$

С помощью принципа максимума [7] для решения задачи (3)–(5) получена априорная оценка

$$\|y^j\|_C \leq \|u_0\|_C + \max_{0 < t' \leq j\tau} \|\mu(x, t)\|_{C_\gamma} + \sum_{j=0}^{j-1} \tau \sum_{\alpha=1}^p \left\| \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_C. \quad (6)$$

Откуда, с учетом суммарной аппроксимации, следует сходимость схемы в равномерной метрике со скоростью $O(h^2 + \tau)$, $h = \max_{1 \leq \alpha \leq p} h_\alpha$.

Литература

1. Ашабоков Б. А. и др. Физика градовых облаков и активных воздействий на них: состояние и направления развития.—Нальчик: Изд-во «Печатный двор».—2013.—216 с.
2. Берлянд М. Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы.—Л.: Гидрометеоиздат, 1975.—448 с.
3. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.—М.: Наука, 1982.—320 с.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656 с.

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ ЭРМИТОВЫ f -СТРУКТУРЫ
НА ГРУППАХ ЛИ

В. В. Балащенко (Беларусь, Минск; БелГУ),
П. А. Дубовик (Беларусь, Минск; БелГУ)

Метрическая f -структура в смысле К. Яно ($f^3 + f = 0$) на римановых многообразиях (M, g) порождает пару взаимно дополнительных распределений $\text{Im } f$ и $\text{Ker } f$ на M . Ряд важнейших классов метрических f -структур может быть определен посредством композиционного тензора T вида [1]

$$T(X, Y) = \frac{1}{4}f(\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y),$$

где ∇ — связность Леви-Чивита метрики g , X и Y — гладкие векторные поля на M . Например, условие $T(X, Y) = 0$ является определяющим для эрмитовых f -структур [1, 2]. В частности, для $f = J$ ($J^2 = -1$) получаем классические эрмитовы структуры [3].

Пусть теперь G — связная группа Ли, g — левоинвариантная риманова метрика на G , $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ и $\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}]$ — первый и второй идеалы производного ряда алгебры Ли \mathfrak{g} . Рассмотрим на G метрические левоинвариантные f -структуры. Доказаны следующие утверждения:

Теорема 1. Если левоинвариантная метрическая f -структура на группе Ли (G, g) удовлетворяет условию $\mathfrak{g}^{(1)} \subset \text{Ker } f$, то f является эрмитовой f -структурой.

Теорема 2. Пусть левоинвариантная метрическая f -структура на группе Ли (G, g) удовлетворяет двум условиям: $\text{Im } f \subset \mathfrak{g}^{(1)}$ и $\mathfrak{g}^{(2)} \subset \text{Ker } f$. Тогда f является эрмитовой f -структурой.

Предъявлена серия примеров разрешимых и нильпотентных (в частности, филиформных) групп Ли, реализующих утверждения теорем 1 и 2. Укажем соответствующие алгебры Ли для рассмотренных примеров:

1) 5-мерная разрешимая алгебра Ли \mathfrak{g}_{14} с определяющими коммутаторными соотношениями:

$$[e_2, e_3] = [e_1, e_5] = e_1, [e_2, e_5] = e_2, [e_3, e_5] = e_4.$$

2) 5-мерная нильпотентная алгебра Ли \mathfrak{g} (из классификации В. В. Морозова [4]):

$$[e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = [e_2, e_3] = e_5.$$

3) $2k$ -мерная филиформная алгебра Ли серии L_n ($n = 2k - 1$) с определяющими соотношениями $[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, \dots, n$ (см., например, [5]).

4) Алгебра Ли \mathfrak{h}_n матричной $(2n + 1)$ -мерной группы Гейзенберга $H_n(\mathbb{R})$. Например, если левоинвариантная f -структура удовлетворяет условию $Z(\mathfrak{h}_n) \subset \text{Ker } f$, то f является эрмитовой f -структурой.

5) 6-мерная разрешимая алгебра Ли \mathfrak{g} (из классификации Г. М. Мубаракзянова [6]):

$$[e_2, e_4] = [e_3, e_5] = e_1, [e_2, e_6] = e_4, [e_3, e_6] = e_5, [e_4, e_6] = e_2, [e_5, e_6] = -e_3.$$

Отметим, что ранее рассмотренные случаи изложены в работах [2, 7, 8].

Литература

1. Кириченко В. Ф. Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1983.—Т. 47, № 6.—С. 1208–1223.
2. Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. Однородные пространства: теория и приложения.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
3. Gray A., Hervella L. M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura ed Appl.—1980.—Vol. 123, № 4.—P. 35–58.
4. Морозов В. В. Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка // Изв. вузов. Математика.—1958.—№ 4.—С. 161–171.
5. Khakimdjanov Yu., Goze M., Medina A. Symplectic or contact structures on Lie groups // Diff. Geometry and its Applications.—2004.—Vol. 21.—P. 41–54.
6. Мубаракзянов Г. М. Классификация разрешимых алгебр Ли шестого порядка с одним нильпотентным базисным элементом // Изв. вузов. Математика.—1963.—№ 4.—С. 105–116.
7. Balashchenko V. V. Invariant structures on the 6-dimensional generalized Heisenberg group // Kragujevac J. of Mathematics.—2011.—Vol. 35, № 2.—P. 209–222.
8. Балащенко В. В., Дубовик П. А. Левоинвариантные f -структуры на 5-мерной группе Гейзенберга $H(2, 1)$ // Вестник Белорусского гос. университета. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика.—2013.—№ 3.—С. 112–117.

ИЗМЕНЕНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ОБЩЕСТВА
ПОД ВЛИЯНИЕМ ИНФОРМАЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Е. К. Басаева (Россия, Владикавказ; СОГУ),
Е. С. Каменецкий (Россия, Владикавказ; ЮМИ),
З. Х. Хосаева (Россия, Владикавказ; ВНЦ)

Изменение состояния общества можно рассматривать как взаимодействие процессов с разным характерным временем. Медленные процессы с характерным временем порядка года определяются адаптацией общества к меняющимся условиям жизни: изменению экономической ситуации, массовой миграции, росту социального неравенства. Быстрые процессы с характерным временем порядка одного или нескольких дней в значительной мере связаны с потоком информации, воздействующим на общество.

Для анализа изменения состояния общества будем по аналогии с моделью протестных акций [1] предполагать, что при отсутствии протестов его можно рассматривать состоящим из спокойной и возбужденной групп. Долю возбужденной группы во всем населении можно в первом приближении считать уровнем напряженности. Изменение долей каждой группы в обществе можно описать системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= -pVN_1 - \alpha N_1 N_2 + \gamma N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} &= pVN_1 + \alpha N_1 N_2 - \gamma N_2,\end{aligned}$$

где N_1 и N_2 — доли спокойной и возбужденной групп населения соответственно. Первые слагаемые в правых частях уравнений описывают возбуждение или успокоение членов общества под влиянием не персонифицированных информационных потоков, вторые слагаемые — переход спокойных членов общества в возбужденное состояние под действием контактов с возбужденными (непосредственных или через социальные сети и/или мобильную связь), третьи слагаемые — постепенное успокоение возбужденных людей. Отметим, что здесь V — интенсивность потока информации (положительное значение V соответствует возбуждающей информации), а p — восприимчивость к информации.

Полагаем, что общее число людей в обществе за рассматриваемый промежуток времени не меняется, т. е. $N_1 + N_2 = 1$. Это позволяет получить уравнение для изменения доли возбужденных людей т. е. напряженности:

$$\frac{dN_2}{dt} = pV + (\alpha - pV - \gamma)N_2 - \alpha N_2^2.$$

Это уравнение легко интегрируется. Поскольку при воздействии возбуждающей информации $pV > 0$, то интеграл будет иметь вид:

$$N_2 = \frac{A - \alpha + pV + \gamma + (A + \alpha - pV - \gamma)e^{A(t+c)}}{2\alpha(e^{A(t+c)} - 1)},$$

где $A = \sqrt{(\alpha - pV - \gamma)^2 + 4\alpha pV}$. Здесь c — произвольная постоянная, определяемая по начальному значению напряженности N_{20} .

Асимптотическое значение напряженности равно:

$$N_{2\infty} = \frac{(A + \alpha - pV - \gamma)}{2\alpha}.$$

При отсутствии целенаправленного информационного воздействия (т. е. $pV = 0$) получаем фоновое значение напряженности, которое определяется медленными процессами, связанными с изменением условий существования общества:

$$N_{2ф} = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha}.$$

Коэффициент α , характеризующий интенсивность контактов между членами общества и степень их доверия друг к другу, скорее всего, мало меняется за достаточно большие промежутки времени. Тогда медленные процессы изменения напряженности будут определяться параметром γ .

Отметим, что уравнение, описывающее изменение напряженности, которое получается при отсутствии информационного воздействия ($pV = 0$), хорошо известно в математической экологии и носит название уравнения Ферхюльста. Решение этого уравнения можно представить в удобном для анализа виде:

$$\frac{N_2}{N_{20}} = \frac{N_{2ф}/N_{20}}{1 - (1 - N_{2ф}/N_{20}) \exp\{-(\alpha - \gamma)t\}}.$$

Отметим, что полученное выражение удовлетворительно описывает данные о связи протестной активности и промежутков времени между протестными акциями в Республике Дагестан в начале 2000-х гг. [2] при $\alpha - \gamma \approx 0,2-0,3$. Предположив, что фоновая напряженность в этой республике была достаточно высокой $N_{2ф} \approx 0,4$, можно оценить значения параметров $\alpha \approx 0,5-0,75$; $\gamma \approx 0,3-0,45$.

Литература

1. Хосаева З. Х., Каменецкий Е. С., Басаева Е. К. Изменение социальной напряженности в результате протестных акций // Клиодинамика: комплексный системный анализ и математическое моделирование глобальной, региональной и страновой динамики. Матер. VII междун. науч. конф.— М.: ВШЭ, 2014. С. 112–116.
2. Petrova M. A. Econometric analysis of ethnopoltical conflict.— URL: www.mmsed.narod.ru/articles/artPetrovaM.ps (дата обращения 7.12.2013).

РАЗРАБОТКА ЭНКОДЕРА
ДЛЯ РОБОПЛАТФОРМЫ ScratchDuino

А. В. Березов (Россия, Владикавказ; СОГУ),
М. Д. Макаренко (Россия, Владикавказ, СОГУ; ЮМИ)

Команды факультета математики и информационных технологий СОГУ участвовала в конкурсе свободной робототехники международной олимпиады «IT-планета 2015» с разработкой модификации робоплатформы ScratchDuino, разработанной сотрудниками ЗАО «Тырнет». Проект по созданию свободной электроники ScratchDuino, поддержанный Фондом содействия, предназначен для обучения программированию и робототехники школьников. Основой платформы является микроконтроллер Arduino и уникальная конструкция крепления датчиков на основе неодимовых магнитов. Платформа обладает целой серией датчиков: касания, освещенности, линии и дальномера на основе ИР-датчика. Однако в качестве двигателей используются обычные DC моторы без энкодера, значит рассчитать пройденный путь или пройти точно указанную дистанцию становится несколько затруднительным. Программирование прохождения заданного отрезка пути на основе временных интервалов сильно зависит от большого числа внешних параметров, таких как заряд и тип аккумулятора, температура двигателей, наклон дорожки, качество поверхности и многое другое. Поэтому перед командой стала задача создания датчика перемещения или энкодера для платформы.

Энкодер — это устройство, преобразующее линейное или угловое перемещение в последовательность сигналов, позволяющих определить величину перемещения. В одометрии энкодеры делят на поворотные и линейные. Поворотные преобразуют угол поворота некоторого вала в электрический сигнал, чаще всего используются в сервоприводах. По возвращаемому значению делятся на абсолютные, возвращает свое абсолютное положение, и инкрементные, выдающие импульсы, означающие изменение его положения. По принципу действия существуют большое количество типов энкодеров: с щеточными контактами, резисторные (потенциометры), оптические (отражательные или щелевые), магнитные (на датчиках Холла), индуктивные и емкостные. Стандартно в робототехнических системах используются оптические щелевые энкодеры, которые встраиваются либо сразу в двигатель, либо в устройство колеса, как, например, энкодер фирмы Pololu, использующий специальную конструкцию обода колеса.

Для решения поставленной задачи было предложено использование датчика оптической мыши, на основе микросхем ADNS2610/ADNS2620. Энкодеры, реализованные в оптических манипуляторах мышь, являются линейными относительными оптическими. С помощью светодиода и фокусирующей его свет линзы, под мышью подсвечивается участок поверхности. Отраженный от этой поверхности свет, собирается другой линзой и попадает на приемный сенсор микросхемы, состоящий из системы IAS (Image Acquisition System, системы получения изображений) и DSP (Digital signal processor, процессор обработки снимков).

На основании анализа DSP процессом последовательных снимков с частотой с от 1500 до 2300 снимков/с, представляющих собой квадратную матрицу 16×16 пикселей разной яркости в 64-битной палитре, вычисляются показатели перемещения вдоль осей X и Y . Для анализа используются алгоритмы визуальной одометрии, которые выделяют в изображении ключевые точки, сравнивают изменение их положения на разных кадрах, чаще всего используя метод кросс-корреляции. Рассматриваемый DSP процессор ограничивает максимальную рабочую скорость перемещения актуатора до 12 дюймов в секунду, а по ускорению до $2,5 \text{ м/с}^2$. Данный чип имеет всего 8 ножек, легко подключается к микроконтроллеру Arduino и позволяет считать как значения перемещения, так и саму картинку. Для управления необходимы два цифровых вывода: SDIO — standart data input/output, SCLK — standart clock. Первый используется для считывания информации, в том числе об изменении координат X (по адресу 0×02) и Y (по адресу 0×03), второй для синхронизации порядка считывания. Так как данный чип использует 2 цифровых вывода, он был подключен к ScratchDuino с помощью 2 фишек — гнезд для крепления датчиков робоплатформы. Была реализована функция на Arduino IDE для работы с энкодером, получающая адрес регистра чипа 0×02 (X) или 0×03 (Y), и возвращающая значения изменения соответствующей координаты.

Литература

1. Петин В. А. Проекты с использованием контроллера Arduino.—БХВ-Петербург, 2014.—400 с.
2. Жуков Р. Методы оценки положения объекта в пространстве // Молодежный научно-технический вестник, издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана.—ФС77-51038.
3. Энкодер // Сайт сообщества любителей робототехники, электроники и программирования.—URL: <http://robocraft.ru/blog/technology/734.html>
4. Сирота В. С точки зрения оптических мышей . . . // Специализированный российский информационно-аналитический сайт с самыми актуальными новостями из сферы IT.—URL: <http://www.ixbt.com/peripheral/mice-sensor.shtml>
5. Визуальная одометрия // Сайт сообщества любителей робототехники, электроники и программирования.—URL: <http://robocraft.ru/blog/computervision/738.html>

ОБ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА
С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ¹

М. Х. Бештоков (Россия, Нальчик; КБГУ)

1. Постановка задачи

В замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу

$$u_t = \frac{1}{x^m} \left(x^m k(x, t) u_x \right)_x + \frac{1}{x^m} \left(x^m \eta(x, t) u_x \right)_{xt} + ru_x - q(x, t)u + f(x, t), \quad (1)$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^m \Pi(x, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l x^m u(x, t) dx = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4)$$

где

$$0 < c_0 \leq \eta(x, t), k(x, t) \leq c_1, \quad |\eta_t, r, q| \leq c_2 \quad (5)$$

$$\Pi(x, t) = k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\eta(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad m \in [0, 2],$$

$\mu(t)$ — непрерывная на $[0, T]$, $c_0, c_1, c_2 > 0$ — const.

Заметим, что вместо условия (3) можно рассматривать следующее условие

$$-\Pi(l, t) = -\frac{1}{l^m} \int_0^l x^m (ru_x - qu) dx + \bar{\mu}(t), \quad x = l, \quad t \in \bar{\omega}_T, \quad (3^*)$$

где

$$\bar{\mu} = \frac{1}{l^m} \left(\int_0^l x^m f(x, t) dx - \mu(t) \right).$$

Условие по существу выражает поток влаги (расход) на глубине l в зависимости от общего количества воды.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-31246.

Предположим, что регулярное решение рассматриваемой задачи существует, коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2)–(4) удовлетворяют нужным по ходу изложения условиям гладкости.

Итерационный процесс для задачи (1)–(4) будем строить следующим образом:

$$\frac{\partial {}^{s+1}u}{\partial t} = L {}^{s+1}u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^m \Pi^{s+1}(x, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

$$-\Pi^{s+1}(l, t) = -\frac{1}{l^m} \int_0^l x^m (r {}^s u_x - q {}^s u) dx + \bar{\mu}(t), \quad x = l, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad (8)$$

$${}^{s+1}u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (9)$$

где

$$Lu = \frac{1}{x^m} \left(x^m k(x, t) u_x \right)_x + \frac{1}{x^m} \left(x^m \eta(x, t) u_x \right)_{xt} + r(x, t)u - q(x, t)u,$$

$s = 0, 1, 2, \dots$ — итерационный индекс. В качестве нулевого приближения 0u можно взять, например, значение решения в начальный момент времени $u_0(x)$.

Пусть ${}^{s+1}z = {}^{s+1}u - u$ — погрешность метода (6)–(9), где u — решение задачи (1)–(4). Тогда, подставляя ${}^{s+1}u = {}^{s+1}z + u$ в (6)–(9), получим задачу для погрешности ${}^{s+1}z$:

$$\frac{\partial {}^{s+1}z}{\partial t} = L {}^{s+1}z, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^m \Pi^{s+1}(x, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11)$$

$$-\Pi^{s+1}(l, t) = -\frac{1}{l^m} \int_0^l x^m (r {}^s z_x - q {}^s z) dx, \quad x = l, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad (12)$$

$${}^{s+1}z(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (13)$$

Методом энергетических неравенств получена следующая оценка погрешности метода (6)–(9):

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left(\|x^{\frac{m}{2}} ({}^{s+1}u - u)\|_0^2 \right) \leq (TM(T))^{s+1} \max_{0 \leq t \leq T} \left(\|x^{\frac{m}{2}} ({}^0u - u)\|_0^2 \right),$$

где $M(T)$ — положительное постоянное.

Из этой оценки следует, что при $TM(T) < 1$ итерационный метод (6)–(9) сходится в норме $L[0, l]$. Сходимость итерационного процесса может быть обеспечена за счет малости времени T , то есть сходимость будет только в малом. Очевидно, что исходную задачу на каждой итерации можно решать обычными методами.

Литература

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Докл. АН СССР.—1960.—Т. 132, № 3.—С. 545–548.
2. Hallaire M. L'eau et la production vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique.—1964.—№ 9.
3. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв.—М: Наука, 1976.—352 с.
4. Rothe E. Wärmeleiturgsgleichung mit nichtconstanten Koeffizienten // Math. Ann.—1931.—№ 104.—С. 340–362.
5. Бештоков М. Х. О скорости сходимости итерационного метода для одной нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения с переменными коэффициентами // Материалы Всероссийской научн. конф. молодых ученых «Современные вопросы мат. физики, мат. биологии и информатики».—2014.—С. 34–37.

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ГРАФА,
ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ 3-НАКРЫТИЕМ 126-КЛИКИ

В. В. Биткина (Россия, Владикавказ; СОГУ),
А. А. Махнев (Россия, Екатеринбург; ИММ УрО РАН)

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ . Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ -подграфом (λ -подграфом). Если Γ — граф диаметра d , то через Γ_i , где $i \leq d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ , в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ .

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\text{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ , неподвижных относительно любого автоморфизма из X . Далее, через $p_{ij}^l(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y , находящихся на расстоянии l в графе Γ . В дистанционно регулярном графе числа $p_{ij}^l(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y , обозначаются p_{ij}^l и называются числами пересечения графа Γ .

Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

2. Результаты

В работах [1–3, 7] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_{s-3}(s, t)$.

Предложение 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $GQ(4, t)$. Тогда Γ — либо сильно регулярный граф, либо граф Джонсона $J(10, 5)$, либо граф с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$ или $\{45, 32, 12, 1; 1, 6, 32, 45\}$.

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$. Этот граф является 3-накрытием 126-клики.

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет (см. [4]) массив пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, $v = r(k+1)$ вершин и спектр $k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^g$, где $n, -m$ — корни уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - k = 0$ и $f = m(r-1)(k+1)/(n+m)$, $g = n(r-1)(k+1)/(n+m)$. Если $\mu \neq \lambda$, то собственные значения графа целые и параметры графа выражаются через r, n, m : $k = nm$, $\mu = (m-1)(n+1)/r$, $\lambda = \mu + n - m$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$. Тогда Γ имеет $v = 1 + 125 + 250 + 2 = 378$ вершин и спектр $125^1, 5^{210}, -1^{125}, -25^{42}$. Порядок клики в Γ не превосходит $1 - k/\theta_d = 6$. Так как $m = n^2$, то окрестности вершин в Γ — псевдогеометрические графы для $GQ(4, 6)$.

Теорема. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ и выполняется одно из утверждений:

- (1) Ω — пустой граф и либо
 - (i) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 60t - 6$ и $\alpha_2(g) = 384 - 60t$;
 - (ii) $p = 3$, $\alpha_3(g) = 9l$, $\alpha_1(g) = 90t + 36 - 3l$ и $\alpha_2(g) = 342 - 90t - 6l$;
 - (iii) $p = 7$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) \in \{126, 336\}$ и $\alpha_2(g) \in \{252, 42\}$;
- (2) Ω содержит по s вершин в t антиподальных классах и либо
 - (i) $p = 11$ и Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{15, 8, 1; 1, 4, 15\}$, либо
 - (ii) $p = 7$ и Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{13, 12, 1; 1, 6, 13\}$, либо
 - (iii) $p = 5$ и Ω — антиподальный класс или Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{25, 12, 1; 1, 6, 13\}$, либо
 - (iv) $p = 3$, Ω — объединение трех изолированных 3-клик или Ω является объединением трех изолированных 6-клик, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 360$, или Ω — регулярный граф степени 35, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 270$, либо
 - (v) $p = 2, s = 1$ и Ω является 6-кликой или $s = 3, t \in \{4, 14, 24\}$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 20w - 12 + 9t$ и $\alpha_2(g) = 390 - 20w - 12t$.

Литература

1. Гутнова А. К., Махнев А. А. Вполне регулярные графы, в которых окрестности вершин псевдогеометрические графы для $pG_{s-3}(s, t)$ // Докл. академии наук.—2014.—Т. 454, № 2.—С. 145–148.
2. Гутнова А. К., Махнев А. А. Расширения псевдогеометрических графов для $pG_{s-4}(s, t)$ // Теория групп и ее приложения. Тр. восьмой междунар. шк.-конф. по теории групп, посвященной 70-летию со дня рождения В. В. Кабанова.—Нальчик: КБГУ, 2014—С. 16–18.
3. Гутнова А. К., Махнев А. А. Локально псевдо $GQ(4, t)$ -графы // Алгебра и приложения. Тр. междунар. конф., посвященной 100-летию со дня рождения Л. А. Калужнина.—Нальчик: КБГУ, 2014—С. 34–35.
4. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs.—Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag, 1989.

5. *Cameron P. J.* Permutation Groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.—(London Math. Soc. Student Texts. № 5).
6. *Гаврилюк А. Л., Махнев А. А.* Доклады академии наук.—2010.—Т. 432, № 5.—С. 512–515.
7. *Гутнова А. К., Махнев А. А.* Расширения псевдогеометрических графов для $pG_{s-4}(s, t)$ // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, вып. 1.—С. 21–30.

МОНСТР КАМЕРОНА

В. В. Биткина (Россия, Владикавказ; СОГУ),
А. К. Гутнова (Россия, Владикавказ; СОГУ),
А. А. Махнев (Россия, Екатеринбург; ИММ УрО РАН)

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Через a^\perp обозначается подграф $\{a\} \cup [a]$, являющийся шаром радиуса 1 с центром a .

Граф Γ называется сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k , каждое ребро Γ лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a, b подграф $[a] \cap [b]$ содержит точно μ вершин.

Система инцидентности (X, \mathcal{B}) с множеством точек X и множеством блоков \mathcal{B} называется t - (V, K, Λ) схемой, если $|X| = V$, каждый блок содержит ровно K точек и любые t точек лежат ровно в Λ блоках. Любая 2-схема является (V, B, R, K, Λ) схемой, где B — число блоков, каждая точка инцидентна R блокам, и имеют место равенства $VR = BK$, $(V - 1)\Lambda = R(K - 1)$. Схема называется симметричной, если $B = V$. Схема называется квазисимметричной, если для любых двух блоков $B, C \in \mathcal{B}$ имеем $|B \cap C| \in \{x, y\}$. Числа x, y называются числами пересечений квазисимметричной схемы, и предполагается, что $x < y$.

Блочный граф квазисимметричной схемы (X, \mathcal{B}) в качестве вершин имеет блоки схемы и два блока $B, C \in \mathcal{B}$ смежны, если $|B \cap C| = y$.

Результаты

Предложение 1. *Блочный граф квазисимметричной (V, B, R, K, Λ) схемы сильно регулярен с собственными значениями $k = ((R - 1)K - xB + x)/(y - x)$ кратности 1, $(R - K - \Lambda + x)/(y - x)$ кратности $V - 1$ и $-(K - x)/(y - x)$ кратности $B - V$.*

Производной схемой для t - (V, K, Λ) схемы $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B})$ в точке $x \in X$ называется схема \mathcal{D}_x с множеством точек $X_x = X - \{x\}$ и множеством блоков $\mathcal{B}_x = \{B - \{x\} \mid x \in B \in \mathcal{B}\}$. Схема \mathcal{E} называется расширением схемы \mathcal{D} если производная схемы \mathcal{E} в каждой точке изоморфна \mathcal{D} . Вычетом схемы \mathcal{D} в блоке

B называется схема \mathcal{D}^B с множеством точек $X^B = X - \{x\}$ и множеством блоков $\mathcal{B}^B = \{C \in \mathcal{B} \mid |B \cap C| = 0\}$. Хорошо известно, что проективная плоскость расширяема, только если ее порядок равен 2 или 4. П. Камерон [1, теорема 1.35] описал расширения симметричных 2-схем.

Предложение 2. Пусть 3- (V, K, Λ) схема $\mathcal{E} = (X, \mathcal{B})$ является расширением симметричной 2-схемы. Тогда верно одно из утверждений:

- (1) \mathcal{E} является адямаровой 3- $(4\Lambda + 4, 2\Lambda + 2, \Lambda)$ схемой;
- (2) $V = (\Lambda + 1)(\Lambda^2 + 5\Lambda + 5)$ и $K = (\Lambda + 1)(\Lambda + 2)$;
- (3) $V = 496$, $K = 40$ и $\Lambda = 3$.

Монстр Камерона. Автоморфизмы графа с параметрами (1197, 156, 15, 21)

В случае (3) имеем $R = V - 1 = 495$, $B = VR/K = 496 \cdot 495 / 40 = 6138$ и дополнительный граф к блочному графу схемы имеет параметры (6138, 1197, 156, 252) и спектр $1197^1, 9^{5642}, -105^{495}$. Отсюда максимальный порядок коклики не больше $vt/(k + t) = 6138 \cdot 105 / 1302 = 495$. В частности, граница Хофмана для клик совпадает с границей Цветковича (см. лемму 1). Дополнительный граф к блочному графу 3- $(496, 40, 3)$ схемы назовем монстром Камерона. В [2] доказано

Предложение 3. Для монстра Камерона Γ выполняются следующие утверждения:

- (1) окрестность любой вершины в графе Γ — сильно регулярный граф с параметрами (1197, 156, 15, 21) и спектром $156^1, 9^{741}, -15^{455}$, причем порядок коклики в этом графе не больше 105;
- (2) множество блоков C_x , содержащих точку x схемы \mathcal{E} , является 495-кликкой графа Γ , для которой достигается равенство в границах Хофмана и Цветковича;
- (3) подграф $\Gamma - C_x$ сильно регулярен с параметрами (5643, 1092, 141, 228) и спектром $1092^1, 9^{5148}, -96^{494}$;
- (4) для различных точек x, y схемы \mathcal{E} имеем $|C_x \cap C_y| = 39$, причем для коклики $C_x - C_y$ графа $\Gamma - C_y$ достигается равенство в границе Хофмана.

В данной работе найдены автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (1197, 156, 15, 21).

Теорема 1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (1197, 156, 15, 21), $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $|\Omega| \leq 171$, $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Ω — пустой граф, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 72l$, либо $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 168l - 21$, либо $p = 19$ и $\alpha_1(g) = 456l + 171$;
- (2) Ω является n -кликкой, либо
 - (i) $p = 13$, $n = 1$ и $\alpha_1(g) = 312l + 156$, либо
 - (ii) $p = 2$, $n = 9$ и $\alpha_1(g) = 48l + 12$ или $n = 11$ и $\alpha_1(g) = 32l - 12$, либо
 - (iii) $p = 5$, $n = 2$ и $\alpha_1(g) = 120l + 45$ или $n = 7$ и $\alpha_1(g) = 120l - 30$;
- (3) Ω является $3t + 1$ -кликкой, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 72l + 12 - 45t$;
- (4) Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 13$.

Литература

1. *Cameron P., Van Lint J.* Designs, Graphs, Codes and their Links.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.—240 p.—(London Math. Soc. Student Texts, № 22).
2. *Махнев А. А.* Расширения симметричных 2-схем // Междунар. конф. «Мальцевские чтения»: тез. докладов.—2015.—112 с.

О СПЕКТРЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ,
ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ИЗ ПОДПРОСТРАНСТВА

М. С. Бичегкуев (Россия, Владикавказ; СОГУ)

Пусть X — комплексное банахово пространство. Символом $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим одно из банаховых пространств: $C_b = C_b(\mathbb{R}_+, X)$; $C_0 = C_0(\mathbb{R}_+, X)$ — подпространство из $C_b(\mathbb{R}_+, X)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$; $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, — пространства Лебега.

Пусть E — замкнутое линейное подпространство в X и $\mathcal{U} : \Delta_+ \rightarrow LB(X)$ — произвольное семейство эволюционных операторов. Линейный оператор \mathcal{L}_E определяется в пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ следующим образом: непрерывная функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, для которого вектор $x(0)$ принадлежит подпространству E , относится к области определения $D(\mathcal{L}_E)$ оператора \mathcal{L}_E , если существует функция $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ такая, что верны равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t, 0)x(0) - \int_0^t \mathcal{U}(t, \tau)y(\tau) d\tau, \quad t \geq 0.$$

При этом полагают $\mathcal{L}_E x = y$. Корректность определения оператора \mathcal{L}_E отмечалось в [1, 2].

Введем операторные функции $W_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow LB(X)$, $k = 1, 2$, $W_1(t) = P(t) + \tilde{Q}(t)$, $W_2(t) = \tilde{P}(t) + Q(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, и операторы $\mathcal{W}_k \in LB(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X))$, $k = 1, 2$, умножения на эти функции, т. е. $(\mathcal{W}_k x)(t) = W_k(t)x(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, где P , Q и \tilde{P} , \tilde{Q} — расщепляющие пары проекторов эволюционного семейства \mathcal{U} , $\text{Im } Q(0) = E$, $\text{Im } \tilde{Q}(0) = \tilde{E}$

Будем говорить, что замкнутые подпространства E и \tilde{E} *сильно изоморфны*, если существует изоморфизм (линейный непрерывно обратимый оператор) $J : X \rightarrow X$ такой, что $J(E) = \tilde{E}$, $J^{-1}(\tilde{E}) = E$.

Лемма 1. Если операторы \mathcal{L}_E и $\mathcal{L}_{\tilde{E}}$ непрерывно обратимы, то подпространства E и \tilde{E} *сильно изоморфны*, и соответствующий изоморфизм осуществляет оператор $J = W_1(0) = P(0) + \tilde{Q}(0)$.

Теорема 1. Операторы \mathcal{L}_E и $\mathcal{L}_{\tilde{E}}$ подобны и имеют место равенство $\mathcal{L}_{\tilde{E}} = \mathcal{W}_1^{-1} \mathcal{L}_E \mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_2 \mathcal{L}_E \mathcal{W}_1$.

Теорема 2. Если операторы \mathcal{L}_E и $\mathcal{L}_{\tilde{E}}$ непрерывно обратимы, то их спектры совпадают: $\sigma(\mathcal{L}_E) = \sigma(\mathcal{L}_{\tilde{E}})$.

Литература

1. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Изв. РАН. Сер. мат.—2009.—Т. 73, № 2.—С. 3–68.
2. Бичегкуев М. С. Об условиях разрешимости разностных уравнений с начальным условием из подпространства // Сиб. мат. журн.—2010.—Т. 51, № 4.—С. 751–768.

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ
ПО ВРЕМЕНИ И КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА¹

А. М. Гасиева (Россия, Нальчик; КБГУ),
А. А. Алиханов (Россия, Нальчик; НИИ ПМА КБНЦ РАН)

Разностная схема повышенного порядка аппроксимации для первой краевой задачи уравнения диффузии дробного порядка построена в работе [1]. Априорные оценки решений краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка в дифференциальной и разностной трактовках получены в работах [2–3].

В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим третью краевую задачу

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t)u + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\begin{cases} k(0, t)u_x(0, t) = \beta_1(t)u(0, t) - \mu_1(t), \\ -k(l, t)u_x(l, t) = \beta_2(t)u(l, t) - \mu_2(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где $\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_s(x, s)}{(t-s)^\alpha} ds$ — дробная производная Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$, $k(x, t)$, $q(x, t)$ и $f(x, t)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\beta_i(t) \geq \beta_0 > 0$, $i = 1, 2$.

В прямоугольнике \bar{Q}_T введем сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ где $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = l/N\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0, \tau = T/j_0\}$.

Дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \Lambda y^{(\sigma)} + \Phi_i^{j+1}, \quad i = 0, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad (4)$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (5)$$

где $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_i = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} y_{i,s}^\tau$ — разностный аналог дробной производной Капуто повышенного порядка аппроксимации [1],

$$\Lambda y = \begin{cases} \frac{2}{h}(\alpha_1 y_{\bar{x},1} - \bar{\beta}_1(t_{j+\sigma})y_0), & i = 0, \\ (\alpha y_{\bar{x}})_x - dy, & i = 1, \dots, N-1, \\ -\frac{2}{h}(\alpha_N y_{\bar{x},N} - \bar{\beta}_2(t_{j+\sigma})y_N^{(\sigma)}), & i = N, \end{cases}$$

¹Работа выполнена по гранту Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-3360.2015.1.

$$\Phi_i^{j+1} = \begin{cases} \frac{2}{h}\bar{\mu}_1(t_{j+\sigma}), & i = 0, \\ \varphi_i^{j+1}, & i = 1, \dots, N-1, \\ \frac{2}{h}\bar{\mu}_2(t_{j+\sigma}), & i = N, \end{cases}$$

$$\alpha_i^{j+1} = k(x_{i-1/2}, t_{j+\sigma}), \quad \varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+\sigma}), \quad d_i^{j+1} = q(x_i, t_{j+\sigma}),$$

$$\bar{\mu}_1(t_{j+\sigma}) = \mu_1(t_{j+\sigma}) + \frac{h}{2}f(0, t_{j+\sigma}), \quad \bar{\mu}_2(t_{j+\sigma}) = \mu_2(t_{j+\sigma}) + \frac{h}{2}f(1, t_{j+\sigma}).$$

Теорема. Разностная схема (4)–(5) безусловно устойчива и для ее решения справедлива априорная оценка

$$\| [y^{j+1}] \|_0^2 \leq M \left(\| [y^0] \|_0^2 + \max_{0 \leq j \leq j_0-1} (\| [\varphi^{j+1}] \|_0^2) + \mu_1^2(t_{j+\sigma}) + \mu_2^2(t_{j+\sigma}) \right), \quad (6)$$

где $M > 0$ — известная постоянная не зависящая от h и τ .

Из априорной оценки (6) следует устойчивость и сходимость разностной схемы (4)–(5).

Литература

1. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. of Computational Physics.—2015.—Vol. 280.—P. 424–438.
2. Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения.—2010.—Т. 46 (5)—С. 658–664.
3. Alikhanov A. A. Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings // Appl. Math. & Comp.—2012.—Vol. 219.—P. 3938–3946.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ М. А. КРАСНОСЕЛЬСКОГО

Б. Д. Гельман (Россия, Воронеж; ВГУ)

В 1955 г. в работе М. А. Красносельского [1] была доказана теорема о неподвижной точке отображения, являющегося суммой сжимающего и вполне непрерывного отображений. Эта работа послужила толчком к развитию теории уплотняющих отображений, как однозначных, так и многозначных. Однако, в теории многозначных уплотняющих отображений всегда предполагается компактность образов многозначного отображения.

В настоящей работе доказывается теорема о неподвижной точке многозначного отображения, являющегося суммой многозначного сжимающего и многозначного компактного отображения в случае, когда многозначное сжимающее отображение может иметь некомпактные образы. Необходимые понятия из теории многозначных отображений содержатся в [2].

Приведем некоторые необходимые в дальнейшем факты и определения. Пусть X — метрическое пространство, $H^n(X)$ — когомологии Александера-Спенсера пространства X с коэффициентами в группе \mathbb{Z} целых чисел.

Пусть E — банахово пространство, $F : X \multimap K(E)$ многозначное отображение с компактными образами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что F является многозначным *псевдоациклическим* отображением, если существуют: метрическое пространство Y , многозначное плунепрерывное сверху отображение $P : X \multimap K(Y)$ с ациклическими образами и непрерывное отображение $s : Y \rightarrow E$ такие, что $F = s \circ P$, т. е. для любой точки $x \in X$ ее образ $F(x) = s(P(x))$.

Пусть $B_R[x_0] \subset E$ — замкнутый шар радиуса R с центром в точке $x_0 \in E$. Пусть

(i) $F_1 : B_R[x_0] \multimap Cv(E)$ — многозначное k -сжимающее отображение с выпуклыми замкнутыми образами;

(ii) $F_2 : B_R[x_0] \multimap K(E)$ — многозначное компактное псевдоациклическое отображение.

Пусть $G = F_1 + F_2$ — сумма этих многозначных отображений и выполнено следующее условие:

(iii) существует число $R_1 < (1 - k)R$ такое, что для любого

$$y \in Y = \overline{F_2(B_R[x_0])}$$

справедливо неравенство $\rho(x_0, F_1(x_0) + y) < R_1$.

Теорема 1. Пусть отображения F_1 и F_2 удовлетворяют сделанным предположениям (i), (ii) и (iii), тогда отображение G имеет неподвижную точку.

Справедливо следующее следствие из этой теоремы.

Следствие 1. Пусть $F_1 : E \multimap Cv(E)$ многозначное k -сжимающее отображение, $F_2 : E \multimap Kv(E)$ многозначное компактное псевдоациклическое отображение. Тогда отображение $G = F_1 + F_2$ имеет неподвижную точку.

Применим следствие 1 к изучению следующей задачи.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A : E_1 \rightarrow E_2$ — непрерывный линейный сюръективный оператор. Рассмотрим многозначное отображение $A^{-1} : E_2 \multimap Cv(E_1)$.

Число

$$\|A^{-1}\| = \sup_{y \in E_2} \left(\frac{\inf\{\|x\| \mid x \in E_1, A(x) = y\}}{\|y\|} \right)$$

называется *нормой многозначного отображения* A^{-1} .

Пусть $H_1 : E_1 \multimap Cv(E_2)$ — многозначное c -липшицево отображение; $H_2 : E_2 \multimap K(E_2)$ — многозначное компактное псевдоациклическое отображение.

Рассмотрим следующее включение:

$$A(x) \in H_1(x) + H_2(x). \quad (1)$$

Опираясь на теорему 1, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Если $\|A^{-1}\| c < 1$, то включение (1) имеет решение.

Литература

1. Красносельский М. А. Два замечания о методе последовательных приближений // Успехи мат. наук.—1955.—Т. 10, № 1 (63).—С. 123–127.
2. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений.—М.: Либроком, 2010.—224 с.

РАЗРАБОТКА ПРОТОТИПА ЭКСПЕРТНОЙ СИСТЕМЫ ОБУЧЕНИЯ ПРОИЗНОШЕНИЮ

И. Х. Гозоева (Россия, ладикавказ; СОГУ)

На сегодняшний день существует множество электронных языковых курсов, обучающих произношению. Но все эти курсы могут лишь выявлять несоответствие речи пользователя оригиналу или же демонстрируют абстрактные оценки произношения, никак не помогающие пользователю улучшить его. Такой подход является неэффективным и сегодня все чаще возникают идеи слияния обучающих систем с системами искусственного интеллекта. Поэтому целью работы являлось создание экспертной системы, которая обучает произношению, давая рекомендации по артикуляции произносимых пользователем звуков.

Все гласные звуки всех языков можно представить в виде трапеции гласных. Гласные звуки расположены в плоскости $(\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3/F_2}{F_2/F_1})$, где F_i — основные фонологические характеристики звуков — форманты. Положение звуков в трапеции однозначно определяет артикуляцию звука [1].

На основе этой информации была построена экспертная система (ЭС) [2], состоящая из среды развития и среды рекомендаций. Среда развития содержит базу знаний, представляющую собой статистические данные фонетических характеристик звуков и рекомендации эксперта по произношению. Среда рекомендаций — та часть ЭС, с которой работает пользователь.

Для создания базы знаний было обработано около 100 звуковых файлов для каждого звука. Были вычислены частоты формант методом линейного предсказания:

1. Вычисляются коэффициенты линейного предсказания a_k .

2. Строится полином $A(z) = 1 - \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}$, комплексные корни которого преобразуются в значения частот и ширины частотного диапазона по формулам

$$\varpi_i = \frac{1}{T} \operatorname{arctg} \left(\frac{z_{ii}}{z_{ir}} \right), \quad \sigma_i = \frac{1}{2T} \log(z_{ir}^2 + z_{ii}^2).$$

3. Из полученных частот выбираются 3 наибольшие, которые считаются формантами звука.

На основании этих данных были построены достоверные области для каждого гласного звука осетинского языка.

Среда рекомендаций включает в себя запись пользователя, определение положения произнесенного звука в плоскости $(\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3/F_2}{F_2/F_1})$, определение правильности произношения и рекомендации на естественном языке по артикуляции.

В среде рекомендаций также применялся алгоритм выделения звука из шума на основе вычисления энергии окна сигнала [4]:

1. Для каждого отсчета вычисляется функция среднего значения

$$M_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x(m)|w(n-m), \quad \text{где } w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Для первых 1000 отсчетов вычисляются верхний и нижний пороги функции среднего значения ITU и ITL .

3. Определяется фрагмент колебания, на котором среднее значение впервые превысило ITU . Предполагается, что начало и конец звука находятся вне этого фрагмента.

4. Двигаясь в двух направлениях, определяем моменты $N1$ и $N2$, в которые M_n впервые оказалась меньше нижнего порога ITL . Эти моменты выбираются в качестве предполагаемых начала и конца звука.

Фонетические характеристики звуков сильно зависят от пола говорящего. Наиболее ярко это сказывается на основном тоне, поэтому для выбора базы знаний автокорреляционным методом находится основной тон:

1. Ищется минимального значения из максимумов первых 100 отсчетов A_{\max} .

2. Вычисляется уровень ограничения C_L , как некоторого процента от A_{\max} (в работе [4] предлагается 68%).

3. К речевому сигналу применяется метод центрального ограничения. После чего от речевого сигнала остаются только несколько импульсов, которые расположены там же, где и исходные импульсы основного тона.

4. Вычисляется автокорреляционная функция

$$\varphi_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)x(m+k).$$

5. Период основного тона определяется местоположением максимального значения автокорреляции, частота основного тона — отношение частоты дискретизации к отсчету, являющемуся максимальным значением автокорреляции.

Таким образом в ходе работы были изучены основы теории речеобразования [5], фонологические основы артикуляции, алгоритмы вычисления фонетических характеристик, изучена теория построения ЭС, разработана архитектура ЭС, построен прототип системы, обучающей произношению гласных звуков осетинского языка.

Литература

1. Дзахова В. Т. Фонетические характеристики фонологической системы современного осетинского (иронского) литературного языка: Дис. ... д.-рафилол. наук, 2010.—С. 90–120.
2. Малышева Е. Н. Экспертные системы.—Кемерово: Кемеров. гос. ун-т культуры и искусств, 2010.—С. 5–29.
3. Маркел Дж. Д., Грэй А. Х. Линейное предсказание речи: Пер. с англ.—М.: Связь, 1980.—С. 207–209.
4. Рабинер Л. Р., Шафер Р. В. Цифровая обработка речевых сигналов: Пер. с англ.—М.: Радио и связь, 1981.—С. 123–128.
5. Фант Г. Акустическая теория речеобразования: Пер. с англ.—М.: Наука, 1964.—С. 109–135.

СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ, В КОТОРЫХ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИН — ПСЕВДОГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГРАФЫ ДЛЯ $GQ(4, t)$

А. К. Гутнова (Россия, Владикавказ; СОГУ),
А. А. Махнев, (Россия, Екатеринбург; ИММ УрО РАН),
Д. В. Цогоева (Россия, Владикавказ; СОГУ)

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается $[a]$, если граф Γ фиксирован. Положим $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Результаты

В работе [1] начато изучение дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с собственным значением 3. В частности, получена редукция к графам, в которых окрестности вершин — исключительные графы. В [2–3] изучение графов, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для частичных геометрий $pG_{s-3}(s, t)$, редуцировано к описанию локально псевдо $GQ(4, t)$ -графов.

В данной работе классифицированы дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $GQ(4, t)$. В случаях $t = 1$ и $t = 16$ псевдогеометрический граф для $GQ(4, t)$ является геометрическим и по следствию из [4] получим только граф Джонсона $J(10, 5)$ или его стандартное частное.

Теорема. Пусть Γ — вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $GQ(4, t)$, $t \in \{2, 4, 6, 8, 11, 12\}$. Тогда верно одно из утверждений:

- (1) Γ — сильно регулярный граф и либо
 - (i) $t = 2$ и Γ имеет параметры $(190, 45, 12, 10)$ или $(126, 45, 12, 18)$, либо
 - (ii) $t = 4$ и Γ имеет параметры $(246, 85, 20, 34)$, либо
 - (iii) $t = 6$ и Γ имеет параметры $(726, 125, 28, 20)$, либо
 - (iv) $t = 8$ и Γ имеет параметры $(870, 165, 36, 30)$ или $(486, 165, 36, 66)$;
- (2) $d(\Gamma) = 3$ и либо
 - (i) $t = 2$ и $\mu \in \{6, 8, 10, 12, 16, 18\}$ или $t = 4$ и $\mu \in \{10, 16, 20, 32, 34\}$, либо
 - (ii) $t = 6$ и $\mu \in \{20, 24, 30, 32, 40, 48, 50\}$ или
 $t = 8$ и $\mu \in \{30, 32, 40, 44, 48, 60, 64, 66\}$, либо
 - (iii) $t = 11$ и $\mu \in \{45, 48, 50, 55, 60, 66, 72, 75, 80, 88, 90\}$ или $t = 12$ и $\mu \in \{56, 60, 64, 70, 80, 84, 96, 98\}$;

(3) $d(\Gamma) > 3$, $t = 2$ и $\mu \in \{6, 8\}$ или $t = 4$ и $\mu = 10$.

Следствие. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $GQ(4, t)$. Тогда Γ — либо сильно регулярный граф, либо граф Джонсона $J(10, 5)$, либо граф с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$ или $\{45, 32, 12, 1; 1, 6, 32, 45\}$.

Литература

1. Махнев А. А. О сильно регулярных графах с собственным значением 3 и их расширениях // Докл. академии наук.—2013.—Т. 451, № 5.—С. 501–504.
2. Гутнова А. К., Махнев А. А. Вполне регулярные графы, в которых окрестности вершин псевдогеометрические графы для $pG_{s-3}(s, t)$ // Докл. академии наук.—2014.—Т. 454, № 2.—С. 145–148.
3. Гутнова А. К., Махнев А. А. Графы диаметра, не большего 3, в которых окрестности вершин псевдогеометрические графы для $pG_{s-3}(s, t)$ // Докл. академии наук.—2014.—Т. 457, № 5.—С. 475–478.
4. Нирова М. С. Дистанционно регулярные локально $GQ(4, t)$ -графы // Сиб. электрон. мат. изв.—2012.—Т. 9—С. 653–659.

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕРМОУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ В КАБЕЛЬНЫХ ПОКРЫТИЯХ

М. А. Джанкулаева (Россия, Нальчик; КБГУ)

В последнее время становятся все более жесткими требования, предъявляемые к долговечности и, особенно, к прочностным характеристикам кабельной продукции. В связи с этим особый интерес представляет разработка математических моделей для исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) и температурного поля кабельных покрытий на основе ПВХ и создание на базе этих исследований рецептур новых изоляций, более устойчивых к различным внешним механическим и температурным воздействиям и, следовательно, более долговечных в эксплуатации. Анализ указанных параметров на основе математических моделей позволит разработчикам кабельных сетей на стадии виртуального проектирования наиболее приемлемые свойства ПВХ слоев, обеспечивающие их функционирование в процессе эксплуатации, в том числе в экстремальных условиях.

При внутреннем нагреве кабеля возникают напряжения, связанные с большим расширением слоев, близких к радиусу $r = a$ (внутренние слои давят на соседние, которые имеют меньшую температуру). Если подобрать во внутренней части изоляции ПВХ с меньшим коэффициентом теплового расширения, чем в наружной области $r = b$, то указанное выше давление «внутренних слоев» ослабнет, при этом изоляция будет напряжена по своду почти равномерно. Это, естественно, продлит работоспособность кабельного покрытия, подверженного тепловому воздействию от сердечника, по которому идет электрический ток. В работе [1] предлагается простой способ выбора зависимости $\alpha = \alpha(r)$ при известном законе $T = T(r)$, который обеспечивает почти равномерное распределение кольцевых напряжений. Этот способ основывается на точных решениях задач термоупругости при действии радиально распределенных температурных полей.

В работах [2, 3] представлены результаты по расчету напряженно-деформированного состояния методом конечных элементов однослойных и многослойных электрических кабелей при действии на них внешних нагрузок. Математическое моделирование и анализ покрытия электрического кабеля состояли из нескольких этапов:

1. создание трехмерной геометрической модели;
2. создание на ее основе конечно-элементной модели;
3. описание внешних воздействий и граничных условий для экспериментальной модели;
4. расчет и анализ полученных результатов.

Таким образом, показано [1], что при разумном выборе закона изменения коэффициента теплового расширения в трехслойных изоляциях электрических кабелей колебания кольцевых напряжений по своду будут небольшими и такая

цилиндрическая трехслойная оболочка из ПВХ будет более работоспособной и долговечной, чем аналогичная изоляция с однородными свойствами; в работах [2, 3] разработаны математические и компьютерные модели расчета температурного поля и НДС одно- и многослойных изоляций на основе ПВХ, позволяющие выбрать конструктору кабельных сетей на стадии проектирования оптимальную структуру кабельных изоляций.

Литература

1. *Ошхунов М. М., Борукаев Т. А., Микитаев А. К., Лигидов М. Х., Джанкулаева М. А.* Об оптимальном выборе закона изменения коэффициента линейного расширения в полых цилиндрах при нагревании // *Материаловедение.*—2014.—№ 8.—С. 3–5.
2. *Джанкулаева М. А.* Моделирование и анализ напряженно-деформированного состояния в многослойных покрытиях электрических кабелей при воздействии внешних нагрузок // *Новые полимерные композиционные материалы: Материалы X Междунар. научно-практической конф.*—Нальчик: Изд-во Принт Центр, 2014.—С. 103–106.
3. *Джанкулаева М. А.* Расчет напряженно-деформированного состояния кабельной системы типа треугольник методом конечных элементов // *Перспектива-2015: материалы Междунар. науч. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. Т. IV.*—Нальчик: Каб.-Балк. ун-т, 2015.—С. 263–266.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СЕТЕВАЯ ГРУППА, АССОЦИИРОВАННАЯ
С НЕРАСЩЕПИМЫМ МАКСИМАЛЬНЫМ ТОРОМ

Н. А. Джусоева (Россия, Владикавказ; СОГУ)

1. Введение

Одним из важнейших, перспективных и интенсивно развивающихся разделов современной алгебры является теория линейных групп. Фундаментальной проблемой теории является классификация всех подгрупп заданной группы. Настоящая заметка находится в русле данных исследований посвящена изучению над групп нерасщепимого максимального тора.

2. Предварительные сведения

Пусть $x^n - d$ — неприводимый многочлен степени n над полем k , $d \in k$. Тогда $e_i = \theta^{i-1}$, $\theta = \sqrt[n]{d}$, $1 \leq i \leq n$, образуют базис радикального расширения степени n поля $K = k(\sqrt[n]{d})$ над k . Мы рассматриваем нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$, который является образом мультипликативной группы поля $K = k(\sqrt[n]{d})$ при регулярном вложении в G . В выбранном базисе тор $T = T(d)$ определяется как матричная группа

$$T = T(d) = \{c(x) : x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n \setminus \bar{0}\},$$

причем элементы матрицы $c(x) = (c_{ij})$ определяются следующим образом: $c_{ij} = x_{i+1-j}$ при $j \leq i$ и $c_{ij} = dx_{n+i+1-j}$ при $j \geq i + 1$. С каждой матрицей $c = c(x) = (c_{ij})$ связана обратная матрица $c^{-1} = c(y) = (c'_{ij})$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in k^n$, где $y_i = \frac{C_{1i}}{|C(x)|}$, причем C_{1i} — алгебраическое дополнение элемента c_{1i} матрицы $c = c(x)$. Рассматривается унитарное подкольцо $R_0 = R(d)$ поля k , порожденное элементами $x_i y_j$, $dx_r y_s$:

$$R_0 = R(d) = \text{ring} \langle x_i y_j, dx_r y_s : i + j \leq n + 1, r + s > n + 1, x \in k^n \setminus \bar{0} \rangle.$$

Пусть R — промежуточное подкольцо, $R_0 \subseteq R \subseteq k$. Пусть, далее, $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n$ — цепочка идеалов кольца R , причем $dA_n \subseteq A_1$. Через $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы обозначаем сеть идеалов, определенную формулой

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j \leq i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j \geq i + 1. \end{cases}$$

Через $G(\sigma)$ обозначается сетевая группа [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сеть σ мы называем сетью, ассоциированную с тором T . Подгруппу $E(\sigma)$, порожденную всеми (общими) трансвекциями из $G(\sigma)$, мы называем элементарной сетевой группой, ассоциированной с тором T .

3. Результат

Следующая теорема позволяет найти надгруппу максимального нерасщепимого тора.

Теорема 1. *Тор T нормализует группу $E(\sigma)$. Следовательно, $TE(\sigma)$ — промежуточная подгруппа группы $GL(n, k)$, содержащая тор T .*

Литература

1. Борович З. И. Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Зап. науч. сем. ПОМИ РАН.—1976.—Т. 64.—С. 12–29.
2. Джусоева Н. А. Сетевые кольца нормализуемые тором // Тр. ИММ УрО РАН.—2013.—Т. 19.—С. 113–119.
3. Койбаев В. А. Трансвекции в подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор // Алгебра и анализ.—2009.—Т. 21, № 5.—С. 70–86.

РАЗРАБОТКА АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ИНТЕРНЕТ-СЕРВИСА ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

И. В. Дзеранов (Россия, Владикавказ; СОГУ),
М. Д. Макаренко (Россия, Владикавказ, СОГУ; ЮМИ)

Как известно процесс решения задачи с помощью вычислительной системы состоит из нескольких этапов: постановка задачи, формализация, алгоритмизация, программирование, тестирование. Каждый этап представляет собой целый набор умений, которого нет у начинающих изучение языков программирования. В процессе обучения программированию, т. е. умению реализовать решение задачи на некотором языке программирования, учащимся сложно добраться до этапа программирования, если они не умеют решать задачи вообще. Многочисленные учебные пособия в печатном и электронном виде направлены в первую очередь на описание синтаксиса языка, не позволяют ни развить умение решать задачу, ни записать ее. С развитием сетевых технологий появилось большое число различных систем автоматической проверки, которые позволяют проверить правильность решения без участия учителя. Однако они ориентированы на учащихся уже готовых написать полную программу, т. е. готовых выполнить все шаги этапа решения, возможно не осознавая их. Таким образом, люди, начинающие свой путь программиста останавливаются в самом начале, так как не могут перейти от простых упражнений на синтаксис к более профессиональным задачам, требующих целого комплекса умений.

- Умение читать и понимать уже существующий код. Современный разработчик чаще всего работает в команде или продолжает работу своих предшественников, поэтому должен уметь вычлениить из существующего кода замысел автора.
- Умение представить как будет работать написанный текст программы. Разработка больших профессиональных приложений может приводить к тому, что откомпилировать код и посмотреть его работоспособность представляется не очень часто (иногда один раз в несколько дней), поэтому умение мысленно запустить код на выполнение может сохранить большое число человеко-часов.
- Умение тестировать программу в мысленном режиме, не используя специализированные системы. Именно это умение позволяет еще на этапе написания программы предотвратить многочисленные ошибки. Так же, составление трассировочных таблиц помогает выявить ошибку в программе, когда становится ясно, что выходные данные не совпадают с эталонными.
- Умение строить гипотезы неработоспособности кода программы и проверять гипотезу. При обнаружении ошибки в выходных данных программы

часто учащиеся пытаются методом случайных изменений текста программы, подогнать решение под верный вывод. «А что если так попробовать» — такой подход свойственен начинающим не умеющим анализировать совокупность входных и выходных данных.

На факультете математики и информационных технологий СОГУ уже несколько лет используется автоматизированная тестирующая система проверки навыков программирования для студентов 1-го курса. Система представляет собой реализацию уникальной методики представления заданий для пользователя (начинающего программиста) в виде небольших фрагментов кода или алгоритмов, не требующая умение писать полную самостоятельную программу. Система содержит большое число разнообразных типов заданий, позволяющих проверить простейшие навыки кодера и дать возможность реализовать свой потенциал на простых заданиях, создавая программу или алгоритм по небольшим кусочкам. Не решение полной задачи, где проверяются весь комплекс навыков, а работа с готовым текстом программы, с примерами входных и выходных данных позволяет учащимся сконцентрироваться на необходимых навыках и умениях.

Рассмотрим типы заданий автоматической системы проверки:

1. «Черный ящик». Очень популярный в программистской среде способ обучения построению алгоритмов. Учащийся имеет возможность многократно ввести данные, которые автоматически по некоторому заложенному в задании алгоритму, преобразуются в выходные данные. Задание «черный ящик» является популярнейшей моделью любого программного кода. В результате анализа соответствия входных и выходных данных учащийся должен записать единственную строчку кода на изучаемом языке программирования. Задание позволяет сконцентрироваться именно на алгоритме решения и его записи, минуя сложности с описанием переменных, вводом и выводом значений и прочих ступеней оформления кода.
2. Перестановка строк. Пользователю предоставляется условие задачи с кодом решения, строки которого расположены в неправильном порядке на одном из языков программирования. Пользователю предлагается поменять некоторые строчки так, чтобы получился код, решающий поставленную задачу. Данное задание проверяет умение читать код и понимать его структуру.
3. По входным данным получить выходные. Пользователю предоставляется готовый код алгоритма и входные данные. Учащийся должен определить какой результат выведет программа. Задание ориентировано на умение выполнять код, составлять трассировочную таблицу.
4. По выходным данным получить входные. Пользователю предоставляется готовый код и выходные данные. Учащийся должен определить какие входные данные позволили получить результат по заданному коду. Проверяется умение восстановить условие задачи по заданному коду.

5. По условию задачи выбрать решение задачи. Пользователю предлагается условие задачи, и несколько вариантов решения. Ему необходимо выбрать код, решающий поставленную задачу. Проверяется умение формализовать условие, выделить входные и выходные данные. Формализация задачи одно из базовых умений программиста, без которой невозможно продолжить дальнейшее обучение.
6. По решению выбрать условие. Дается одно решение задачи и несколько вариантов условий. Пользователь должен выбрать условие задачи, решением которого является данный код.

Разработанная система проверки работает на локальном компьютере, что создает сложности систематизации данных проверки и ограничивает доступ к системе всех желающих. Дальнейшим развитием системы является разработка автоматизированного онлайн-интернет сервиса для получения навыков профессионального программирования на различных языках программирования. Еще одним новшеством системы должно стать использование технологии динамической компиляции, позволяющей более качественно проверять решения, поскольку одну и ту же задачу можно решить различными способами.

Динамическая компиляция — технология увеличения производительности программных систем, использующих байт-код, путем компиляции байт-кода в машинный код или в другой формат непосредственно во время работы программы. Таким образом, достигается высокая скорость выполнения по сравнению с интерпретируемым байт-кодом за счет увеличения потребления памяти и затрат времени на компиляцию.

Пользователь выбирает на странице сервиса тип задания и язык программирования. На основе этих данных из базы данных сервиса выбирается множество заданий, которые предоставляются пользователю. Работая над каждым заданием, пользователь вводит фрагмент кода, к которому системой добавляется заголовок и все необходимые строки для получения полнофункциональной программы. Используя технологию динамической компиляции, полученный код тестируется на группе тестов. Результаты тестирования выдаются на страницу пользователя.

Литература

1. Албахари Дж., Албахари Б. Си Шарп 5.0. Справочник. Полное описание языка.—2014.
2. Дистанционная подготовка по информатике.—URL: <http://informatics.mccme.ru>.
3. Сайт по спортивному программированию.—URL: <http://codeforces.com>.
4. Сайт статей по программированию.—URL: <http://www.cyberguru.ru>.

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ГРИНА ДЛЯ СИСТЕМЫ РАЗНОПОРЯДКОВЫХ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. В. Дикарева (Россия, Воронеж; ВИ МВД)

Рассмотрим на промежутке $[0, l]$ дифференциальные уравнения разного порядка

$$(p_1 u_1'')'' = f_1(x), x \neq \xi, \quad (1)$$

$$-(p_2 u_2')' = f_2(x), x \neq \xi. \quad (2)$$

Первое из них возникает при описании поперечных деформаций классического стержня, а второе — обычной струны (или продольных деформаций стержня). В точке ξ (где, естественно, $0 < \xi < l$) оба уравнения выключаются, так что фактически (1)–(2) — это система четырех уравнений. В этой же точке мы предполагаем выполненным условие взаимодействия (трансмиссии)

$$\delta(p_1 u_1'')'(\xi) + \delta(p_2 u_2')(\xi) = 0, \quad (3)$$

где через $\delta\varphi(\xi)$ обозначается скачок φ в точке ξ . Если на концах $x = 0$, $x = l$ отрезка поставить стандартные условия закрепления, т. е.

$$u_1(0) = u_1'(0) = 0, \quad u_1(l) = u_1'(l) = 0, \quad u_2(0) = u_2(l) = 0, \quad (4)$$

то мы сможем смотреть на систему (1)–(4) как на краевую задачу, моделирующую, например, деформации большого канатного моста. При $f_2 \equiv 0$ второе уравнение (2) вместе с условиями (3)–(4) заменяются, как несложно проверить, условием

$$\delta(p_1 u_1'')'(\xi) + \gamma u_1(\xi) = 0, \quad \gamma > 0,$$

что приводит к модели двухзвенной цепочки стержней с упругой опорой в месте стыка ($x = \xi$). Подобные нестандартные задачи для одного скалярного уравнения изучались ранее в [1, 2], см. также [3].

Задача (1)–(4) рассматривается в классе достаточно гладких функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ на $[0, l]$. Далее во всех формулировках и условиях мы предполагаем, что $x \neq \xi$ без дополнительных оговорок.

Всюду далее считаем, что $p_1(\cdot)$ и $p_2(\cdot)$ сильно положительны.

Приведем основные результаты.

Теорема 1. Для любых F_1, F_2 из $BV[0, l]$ задача (1)–(4) однозначно разрешима (при $f_1 = F_1'$ и $f_2 = F_2'$).

Теорема 2. Пусть F_1 и F_2 — первообразные функций f_1 и f_2 . Тогда для любых неубывающих F_1, F_2 при наличии хотя бы одной точки роста F_1 или F_2 решение $u(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}$ строго положительно в $(0, l)$, т. е. $u_1(x) > 0$ и $u_2(x) > 0$ на $(0, l)$. Более того, для любых двух "неотрицательных" пар $\{f_1, f_2\}$

соответствующие им решения $u(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}$ и $v(x) = \{v_1(x), v_2(x)\}$ соизмеримы по конусу неотрицательных функций в $C[0, l] \times C[0, l]$, т. е.

$$\sup_{x,s} \frac{u_i(x) v_i(s)}{v_i(x) u_i(s)} < \infty \quad \text{при } i = 1, 2.$$

$$(AF)'(x) = \int_0^l G(x, s) dF(s),$$

где $G(x, s)$ — двумерная матрица-функция Грина. Определяемый этой функцией интегральный оператор действует в $E = C[0, l] \times C[0, l]$ и сильно положителен на конусе K .

Результаты могут быть применены для уравнений с краевыми условиями третьего рода [4], а также в теории операторов преобразования [5–10].

Литература

1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М: Физматлит, 2004.
2. Покорный Ю. В., Белоглазова Т. В., Дикарева Е. В., Перловская Т. В. О функции Грина для локально взаимодействующей системы обыкновенных уравнений разного порядка // Мат. заметки.—2003.—Т. 74, № 1.—С. 146–148.
3. Кулаев Р. Ч. О знаке функции Грина краевой задачи на графе для уравнения четвертого порядка // Владикавказ. мат. журн.—2013.—Т. 15, вып. 4.—С. 19–29.
4. Найдюк Ф. О., Прядиев В. Л., Ситник С. М. Описание профилей прямой и обратной волн для волнового уравнения на отрезке с краевыми условиями первого или второго рода на одном конце и третьего рода или присоединенной массы — на другом // Черномоземный альманах науч. исслед. Сер. фундаментальная математика.—2005.—№ 1 (1).—С. 53–68.
5. Sitnik S. M. Buschman–Erdelyi transmutations, classification and applications // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2012 / ed. M. V. Dubatovskaya, S. V. Rogosin.—Cottenham: Cambridge Scientific Publishers, 2013.—P. 171–201.—(URL: <http://arxiv.org/abs/1304.2114v1>).
6. Ситник С. М. Операторы преобразования и их приложения // Исслед. по современному анализу и мат. моделированию / ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев —Владикавказ: ВНИЦ РАН и РСО-А, 2008.—С. 226–293.—(URL: <http://arxiv.org/abs/1012.3741>).
7. Ситник С. М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости.—Владивосток, 1990.—44 с.—(Препринт / Институт автоматизации и процессов управления ДВО АН СССР).
8. Ситник С. М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана — Эрдейи // Докл. АН СССР.—1991.—Т. 320, № 6.—С. 1326–1330.
9. Ситник С. М. Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сони́на — Пуассона // Научные ведомости Белгородского гос. университета.—2010.—Вып. 18, № 5 (76).—С. 135–153.
10. Ситник С. М. Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений // Вестн. Самарского гос. университета. Естеств. сер.—2008.—Т. 67, № 8/1.—С. 237–248.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОСЕДАНИЯ
БУГРА ГРУНТОВЫХ ВОД
В ОБЛАСТЯХ С ОДНИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

В. И. Дорофеева (Россия, Орел; ОГУ),
И. В. Афанаскина (Россия, Орел; ОГУ)

Система интегрального и дифференциального уравнений описывает опускание бугра грунтовых вод под действием силы тяжести [1]:

$$g - 2G[g, L_t] = -2\Pi, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{V}[g, L_t] \quad \text{на } L_t,$$

где $G[g, L_t](M) = \int_{L_t} g(N)\Omega(M, N)dl_N$ — оператор квазипотенциала двойного слоя, ядро $\Omega = P(N)\frac{\partial \Phi_1(M, N)}{\partial \mathbf{n}_N}$, Φ_1 — квазипотенциал стока с полным расходом равным -1 , $\Pi = y$ — потенциал силы тяжести, оператор

$$\mathbf{V}[g, L_t](M) = \text{grad } G[g, L_t](M) = \int_{L_t} \frac{\partial g(N)}{\partial \mathbf{l}_N} \mathbf{V}_2(M, N)dl_N,$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{H(M)} \left(\frac{\partial \Psi_2(M, N)}{\partial y_M} \mathbf{e}_x - \frac{\partial \Psi_2(M, N)}{\partial x_M} \mathbf{e}_y \right)$$

— скорость вихря с полной циркуляцией, равной -1 , Ψ_2 — функция тока этого вихря, \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y — единичные орты. Начальное положение бугра описывается гладкой кривой L_t . Область совместной фильтрации жидкостей может быть ограничена непроницаемой прямой L_1 , разделяющей грунт и непроницаемые породы. В области фильтрации имеется включение произвольной формы с проницаемостью λ .

Рассмотрим влияние проницаемости включения на время растекания бугра и выравнивания уровня воды, а также на высоту h , на которой произойдет полное растекания бугра.

Первоначальная высота бугра составила $H_0 = 1.451$. Рассмотрены случаи с $\lambda = 0.4, 0.6, 0.8$. На рис. 1 график демонстрирует влияние проницаемости на время выравнивания, а на рис. 2 показана зависимость высоты h от проницаемости включения λ .

Кроме указанных характеристик получена зависимость величины поднятия уровня воды при полном растекании бугра от минимального уровня до уровня выравнивания воды.

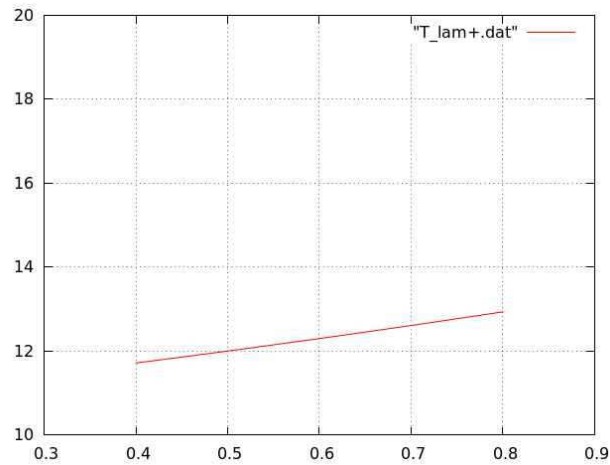


Рис. 1. Зависимость времени T растекания бугра от проницаемости λ .

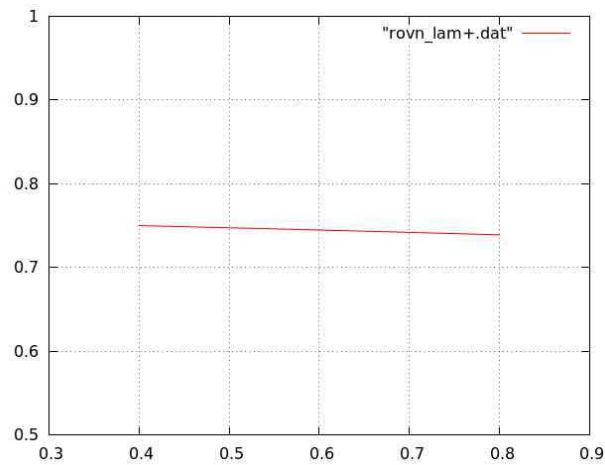


Рис. 2. Зависимость высоты h растекания бугра от проницаемости λ .

Литература

1. Никольский Д. Н., Дорфеева В. И. Математическое моделирование двумерного процесса изменения уровня грунтовых вод под действием силы тяжести методом дискретных особенностей // Вычислительные методы и программирование.—2011.—Vol. 12.—С. 85–89.—URL: <http://num-meth.srcc.msu.ru>.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ АДДИТИВНЫХ ПОДГРУПП
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СЕТЕЙ¹

Р. Ю. Дряева (Россия, Владикавказ; СОГУ),
В. А. Койбаев (Россия, Владикавказ; СОГУ)

Рассматривается элементарная сеть (ковер) порядка n $\sigma = (\sigma_{ij})$ аддитивных подгрупп коммутативного кольца (то есть сеть без диагонали) и связанная с σ производная сеть $\omega = (\omega_{ij})$. Доказано (предложение), что производная сеть является дополняемой и приводятся два способа дополнения производной элементарной сети до (полной) сети. В основе доказательств утверждений, приведенных в данной заметке, лежат формулы, полученные в лемме 1.

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n — натуральное число. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, аддитивных подгрупп кольца R называется сетью (ковром) [1, 2] над кольцом R порядка n , если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j . Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер) [2, 3, вопрос 15.46].

Лемма 1. Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть. Для подгрупп элементарной сети имеют место следующие утверждения.

(1) Пусть $i \neq j$. Тогда

$$(\sigma_{ir}\sigma_{ri})(\sigma_{jr}\sigma_{rj}) \subseteq (\sigma_{ir}\sigma_{ri}) \cap (\sigma_{jr}\sigma_{rj}) \cap (\sigma_{ij}\sigma_{ji});$$

(2) а) Если $i \neq r$, то $\sigma_{ik}\sigma_{kr}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ir}\sigma_{rj}$;

б) Если $i = r$, $k \neq j$, то $\sigma_{ik}\sigma_{kr}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kj}$;

(3) Если $k \neq j$, то $(\sigma_{ik}\sigma_{ki})\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kj} \subseteq \sigma_{ij}$;

(4) (цикл) Имеем $\sigma_{ik}\sigma_{kr}\sigma_{ri} \subseteq (\sigma_{ir}\sigma_{ri}) \cap (\sigma_{kr}\sigma_{rk}) \cap (\sigma_{ik}\sigma_{ki})$;

(5) Пусть $i \neq j$. Тогда (m — натуральное)

$$(\sigma_{ik}\sigma_{kj})(\sigma_{rj}\sigma_{jr})^m \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kj}.$$

Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i \neq j \leq n$, называется дополняемой, если для некоторых аддитивных подгрупп σ_{ii} кольца R таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ является (полной) сетью. Другими словами, элементарная сеть σ является дополняемой, если ее можно дополнить (диагональю) до (полной) сети. Хорошо известно (см., например, [1]), что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемой тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij} \tag{1}$$

¹Работа В. А. Койбаева поддержана РФФИ, проект № 13-01-00469. Результаты настоящей заметки были получены в рамках государственного задания Минобрнауки России.

для любых $i \neq j$. Диагональные подгруппы σ_{ii} определяются формулой

$$\sigma_{ii} = \sum_{k \neq i} \sigma_{ki} \sigma_{ik}, \quad (2)$$

где суммирование берется по всем k отличным от i . Ясно, что элементарная сеть может быть дополнена до сети не всегда единственным способом. Однако, очевидно, формула (2) (при выполнении условий (1)) позволяет дополнить элементарную сеть σ наименьшей диагональю.

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом R порядка n . Рассмотрим набор $\sigma^{(1)} = \omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца R , определенных для любых $i \neq j$ следующим образом:

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{kj},$$

где, очевидно (так как σ — элементарная сеть), суммирование берется по всем k , отличным от i и j . Ясно, что $\omega_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$, следовательно, для любой тройки попарно различных чисел i, r, j , мы имеем $\omega_{ir} \omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$. Таким образом, набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца R является элементарной сетью.

Предложение 1. *Производная элементарная сеть $\sigma^{(1)} = \omega$ является дополняемой.*

Элементарную сеть $\sigma^{(1)} = \omega$ можно дополнить до (полной) сети стандартным способом по формуле (2), полагая для произвольного i , $1 \leq i \leq n$,

$$\omega_{ii} = \sum_{k \neq i} \omega_{ki} \omega_{ik},$$

где суммирование ведется по всем $k = 1, 2, \dots, n$, $k \neq i$. Однако, мы предлагаем другой (необходимый нам для дальнейшей работы с элементарными группами) способ дополнения элементарной сети $\sigma^{(1)} = \omega$ до полной. Для любых $i \neq j$ положим

$$\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji} \sigma_{ij})^m.$$

Тогда диагональные элементы ω_{ii} , $1 \leq i \leq n$, определим следующим образом:

$$\omega_{ii} = \sum_{k \neq s} (\gamma_{ik} \cap \gamma_{is} \cap \gamma_{ks}), \quad (3)$$

где суммирование ведется по всем $1 \leq k \neq s \leq n$ (ясно, что $k \neq i$, $s \neq i$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что последняя сумма содержит группу (см. выше)

$$\sum_{k \neq i} \omega_{ki} \omega_{ik},$$

а потому представленная формулой (3) диагональ абелевых групп содержит диагональ, получаемую стандартным способом (дополнения диагональю).

Если, например, $n = 3$, то

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = \gamma_{12} \cap \gamma_{13} \cap \gamma_{23}.$$

Ясно, что ω_{ii} состоит из сумм элементов вида

$$t(i, k, s) = \sum_{m=1}^{m_1} (\sigma_{ik}\sigma_{ki})^m \cap \sum_{p=1}^{p_1} (\sigma_{is}\sigma_{si})^p \cap \sum_{l=1}^{l_1} (\sigma_{sk}\sigma_{ks})^l.$$

Лемма 2. Пусть i, j, k, p, m — натуральные, причем i, j, k — попарно различны. Тогда

$$(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m (\sigma_{ik}\sigma_{ki})^p \subseteq (\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m \cap (\sigma_{ik}\sigma_{ki})^p \cap (\sigma_{kj}\sigma_{jk})^q,$$

где $q = \min(m, p)$. В частности,

$$(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m (\sigma_{ik}\sigma_{ki})^p \subseteq \gamma_{ij} \cap \gamma_{ik} \cap \gamma_{kj}.$$

Предложение 2. Производная элементарная сеть $\sigma^{(1)} = \omega$, дополненная диагональю формулой (3), является (полной) сетью.

Литература

1. Борович З. И. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семин. ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
2. Левчук В. М. Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 5.—С. 504–517.
3. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Издание 17-е.—Новосибирск, 2010.

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА
АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА
ДРОБНОГО ПОРЯДКА¹

Ф. А. Карова (Россия, Нальчик; КБГУ),
А. А. Алиханов (Россия, Нальчик; НИИ ПМА КБНЦ РАН)

Движение влаги в капиллярно пористых средах описывается уравнением Аллера [1]. Априорные оценки для диффузионно-волнового уравнения в дифференциальной и разностной трактовках получены в работах [2–4].

В прямоугольнике $\bar{Q}_\tau = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим задачу

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \partial_{0t}^\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t)u + f(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где $\partial_{0t}^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t u_s(x, s)(t-s)^{-\alpha} ds$ — дробная производная Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$, $0 < c_1 \leq k(x, t)$, $\eta(x) \leq c_2$, $q(x, t) \geq 0$ всюду на \bar{Q}_τ .

В прямоугольнике \bar{Q}_τ введем сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, где

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = l\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0, \tau j_0 = T\}.$$

Задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \Lambda_1 y^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \Lambda_2 y + \varphi, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq j_0-1, \quad (4)$$

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad (5)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (6)$$

где $\sigma = 1 - \frac{\alpha}{2}$, $\varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+\sigma})$, $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} y_t^s$ — разностный аналог повышенного порядка аппроксимации производной Капуто [4], где $c_0^{(\alpha, \sigma)} = a_0^{(\alpha, \sigma)}$ при $j = 0$; и при $j \geq 1$,

$$c_s^{(\alpha, \sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha, \sigma)} + b_1^{(\alpha, \sigma)}, & s = 0, \\ a_s^{(\alpha, \sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha, \sigma)} - b_s^{(\alpha, \sigma)}, & 1 \leq s \leq j-1, \\ a_j^{(\alpha, \sigma)} - b_j^{(\alpha, \sigma)}, & s = j, \end{cases}$$

¹Работа выполнена по гранту Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК–3360.2015.1.

$$\begin{aligned}
a_0^{(\alpha, \sigma)} &= \sigma^{1-\alpha}, \quad a_l^{(\alpha, \sigma)} = (l + \sigma)^{1-\alpha} - (l - 1 + \sigma)^{1-\alpha}, \\
b_l^{(\alpha, \sigma)} &= \frac{1}{2 - \alpha} [(l + \sigma)^{2-\alpha} - (l - 1 + \sigma)^{2-\alpha}] - \\
&\quad - \frac{1}{2} [(l + \sigma)^{1-\alpha} + (l - 1 + \sigma)^{1-\alpha}], \quad l \geq 1, \\
\Lambda_1 y &= (ay_{\bar{x}})_x, \quad a_i^{j+1} = k(x_{i-1/2}, t_{j+\sigma}), \\
\Lambda_2 y &= (by_{\bar{x}})_x, \quad b_i = \eta(x_{i-1/2}).
\end{aligned}$$

Погрешность аппроксимации разностной схемы (4)–(6) имеет порядок $O(\tau^2 + h^2)$ (см. [4] и [5]).

Теорема 1. *Разностная схема (4)–(6) абсолютно устойчива и для ее решения справедлива априорная оценка*

$$\|y^{j+1}\|_1^2 \leq \|y^0\|_1^2 + \frac{l^2 T^\alpha \Gamma(1 - \alpha)}{4c_1} \max_{0 \leq j \leq j_0} \|\varphi^j\|_0^2, \quad (7)$$

где $\|y\|_1^2 = \|y\|_0^2 + \|\sqrt{b}y_{\bar{x}}\|_0^2$.

Из априорной оценки (7) следует безусловная устойчивость и сходимость разностной схемы (4)–(6).

Литература

1. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв.—М.: Наука, 1976.—137 с.
2. Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения.—2010.—Т. 46, № 5.—С. 658–664.
3. Alikhanov A. A. Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings // Appl. Math. & Comput.—2012.—Vol. 219—P. 3938–3946.
4. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. of Computational Physics.—2015.—Vol. 280.—P. 424–438.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОРОДНЫХ СОЛИТОНОВ РИЧЧИ
НА ГРУППАХ ЛИ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ
С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ¹

П. Н. Клепиков (Россия, Барнаул; АлтГУ),
Д. Н. Оскорбин (Россия, Барнаул; АлтГУ),
Е. Д. Родионов (Россия, Барнаул; АлтГУ)

Полное риманово многообразие (M, g) называется солитоном Риччи, если метрика g удовлетворяет уравнению

$$r = \Lambda \cdot g + L_X g, \quad (1)$$

где r — тензор Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, $L_X g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля X .

Если $M = G$ — группа Ли, а X — левоинвариантное векторное поле, то левоинвариантная риманова метрика, удовлетворяющая (1), называется однородным инвариантным солитоном Риччи.

Рассмотрим также алгебраические солитоны Риччи на группе Ли G , которые тесно связаны с однородными солитонами Риччи и определяются в некотором ортонормированном базисе формулой:

$$\text{Ric} = \Lambda \cdot \text{Id} + D,$$

где Ric — матрица оператора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, Id — единичная матрица, D — матрица некоторого дифференцирования алгебры \mathfrak{g} .

Универсальные математические пакеты символьных вычислений являются одним из основных вычислительных инструментов компьютерного моделирования, хорошо зарекомендовавших себя при исследовании инвариантных тензорных полей на группах Ли конечной размерности.

В настоящей работе в среде пакета символьных вычислений разработан программный комплекс для исследования однородных инвариантных и алгебраических солитонов Риччи на метрических группах Ли. С его помощью решены следующие задачи:

— составить полную классификацию алгебраических солитонов Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой в терминах структурных констант алгебр Ли;

— получить отрицательный ответ на вопрос о существовании нетривиальных решений уравнения однородных инвариантных солитонов Риччи на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

¹Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ, грант НШ-2263.2014.1, Правительства РФ, госконтракт № 14.В25.31.0029, Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет», код проекта: 1148.

О ПРОГРАММНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ В ЗАДАЧАХ
ИССЛЕДОВАНИЯ СИГНАТУР ОПЕРАТОРОВ ТЕНЗОРОВ
КРИВИЗНЫ НА МЕТРИЧЕСКИХ ГРУППАХ ЛИ¹

П. Н. Клепиков (Россия, Барнаул; АлтГУ),
С. В. Пастухова (Россия, Барнаул; АлтГУ),
Е. Д. Родионов (Россия, Барнаул; АлтГУ),
О. П. Хромова (Россия, Барнаул; АлтГУ)

Универсальные математические пакеты являются одним из основных вычислительных инструментов компьютерного моделирования, хорошо зарекомендовавших себя при исследовании инвариантных тензорных полей на однородных (псевдо)римановых многообразиях и, в частности, на группа Ли конечной размерности.

В настоящей работе в среде пакета символьный вычислений Maple разработан программный комплекс для исследования сигнатур операторов тензоров кривизны на метрических группах Ли. Данный программный продукт позволил решить следующие задачи.

1) Вычислить спектры операторов тензора кривизны Риччи R одномерной кривизны A , секционной кривизны R конечномерных групп Ли с левоинвариантными (псевдо)римановыми метриками.

2) Определить возможные сигнатуры операторов R , A , R левоинвариантных (псевдо)римановых метрик групп Ли малой размерности.

¹Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ, грант НШ-2263.2014.1, Правительства РФ, госконтракт № 14.V25.31.0029, Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет», код проекта: 1148.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ

Р. Ч. Кулаев (Россия, Владикавказ; СОГУ)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$Lu = f(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1)$$

заданное на геометрическом графе Γ . При этом под дифференциальным уравнением (1) на графе мы подразумеваем, следуя [1, § 3.1], набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа и набор условий согласования во внутренних вершинах.

В данной работе мы рассматриваем уравнение, порожаемое системой дифференциальных уравнений на ребрах γ_i графа

$$(p_i(x)u_i'')'' - (q_i(x)u_i')' = f_i(x), \quad x \in \gamma_i \subset \Gamma, \quad (2)$$

с коэффициентами, определяемыми функциями $p \in C^2[\Gamma]$, $\inf_{x \in \Gamma} p(x) > 0$, $q \in C^1[\Gamma]$, $q(x) \geq 0$, $f \in C[\Gamma]$, и дополняемое в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$ равенствами

$$\begin{aligned} u_i(a) &= u_k(a), \quad u_i'(a) = \alpha_{ki}(a)u_k'(a) + \alpha_{ji}(a)u_j'(a), \\ \sum_{i \in I(a)} p_i(a)\alpha_{ki}(a)u_i''(a) &= 0, \quad \sum_{i \in I(a)} p_i(a)\alpha_{ji}(a)u_i''(a) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

и условиями с третьими производными

$$\sum_{i \in I(a)} D^3 u_i(a) + \delta(a)u(a) = \tilde{f}(a), \quad a \in J(\Gamma), \quad D^3 u = (pu'')' - qu', \quad (4)$$

где $J(\Gamma)$ — множество всех внутренних вершин графа Γ , $I(a)$ — множество индексов всех ребер, примыкающих к вершине $a \in J(\Gamma)$.

Левая часть Lu уравнения (1) — это левые части уравнений (2) на ребрах вместе с равенствами (3) и левыми частями условий (4). В условиях (3), (4) все производные считаются в направлении от вершины $a \in J(\Gamma)$; k, j — фиксированные (базисные) индексы из $I(a)$, $i \in I(a)$; $\alpha_{ki}(a)$, $\alpha_{ji}(a)$ и $\delta(a)$, $\tilde{f}(a)$ — заданные числа, причем $\alpha_{kk}(a) = \alpha_{jj}(a) = 1$ и $\alpha_{kj}(a) = \alpha_{jk}(a) = 0$, $\delta(a) \geq 0$; для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ и каждого индекса $i \in I(a)$ хотя бы одна из констант $\alpha_{ji}(a)$, $\alpha_{ki}(a)$ отлична от нуля, причем для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ можно задать базисные индексы $j, k \in I(a)$ так, что для некоторого индекса $i \in I(a) \setminus \{j, k\}$ одновременно будут выполняться неравенства $\alpha_{ji}(a) \leq 0$, $\alpha_{ki}(a) \leq 0$, одно из которых строгое. Также полагаем, что граф Γ является деревом и к каждой внутренней вершине примыкает не менее трех ребер.

Для каждой граничной вершины $b \in \partial\Gamma$ определим функцию $y_b(x)$, которая является решением однородного уравнения (1) на Γ и удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} y_b(b) &= 0, & \vartheta(b)y'_b(b) - \beta(b)y''_b(b) &= 1, \\ y_b(a) &= 0, & \vartheta(a)y'_b(a) - \beta(a)y''_b(a) &= 0, \quad a \in \partial\Gamma \setminus b, \end{aligned} \quad (5)$$

в которых $\vartheta, \beta \geq 0$, $\vartheta + \beta > 0$. Предположения относительно свойств коэффициентов уравнения (1) гарантируют однозначную разрешимость краевых задач (1), (5) (см. [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Дифференциальное уравнение (1) назовем *слабо неосциллирующим*, если при $\beta \equiv 0$ каждая из функций $y_b(x)$, $b \in \partial\Gamma$, строго положительна на Γ .

Рассмотрим на $\partial\Gamma$ две пары неотрицательных функций ϑ_1, β_1 и ϑ_2, β_2 , удовлетворяющих условиям $\vartheta_i + \beta_i > 0$, $i = 1, 2$.

Теорема 1 (признак сравнения). Пусть в каждой вершине $b \in \partial\Gamma$ выполнено неравенство

$$\frac{\vartheta_1(b)}{\beta_1(b)} \leq \frac{\vartheta_2(b)}{\beta_2(b)} \quad \left(\text{если } \beta_i(b) = 0, \text{ то } \frac{\vartheta_i(b)}{\beta_i(b)} = \infty \right).$$

Тогда положительность функции Грина задачи (1), (5) с коэффициентами $\vartheta \equiv \vartheta_2$, $\beta \equiv \beta_2$ влечет положительность функции Грина задачи (1), (5) с коэффициентами $\vartheta \equiv \vartheta_1$, $\beta \equiv \beta_1$.

Для каждой граничной вершины $b \in \partial\Gamma$ определим функцию $w_b(x)$, которая является решением однородного уравнения (1) на Γ и удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} w_b(b) + \alpha(b)D^3w_b(b) &= 1, & \vartheta(b)w'_b(b) - \beta(b)w''_b(b) &= 0, \\ w_b(a) + \alpha(b)D^3w_b(a) &= 0, \\ \vartheta(a)w'_b(a) - \beta(a)w''_b(a) &= 0, \quad a \in \partial\Gamma \setminus b, \end{aligned} \quad (5)$$

в которых $\alpha \geq 0$, $\vartheta, \beta \geq 0$, $\vartheta + \beta > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Дифференциальное уравнение четвертого порядка (1) назовем *сильно неосциллирующим*, если при $\alpha \equiv 0$, $\vartheta(b) = 0$ и $\beta(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma \setminus b$, каждая из функций $w_b(x)$, $b \in \partial\Gamma$, строго положительна на Γ .

Теорема 2. Уравнение (1) сильно неосциллирует на Γ тогда и только тогда, когда функция Грина краевой задачи (1), (5) положительна на $\Gamma \times \Gamma$, если только функция α равна нулю всюду на $\partial\Gamma$, кроме, быть может, одной граничной вершины.

Теорема 3 (принцип максимума). Пусть уравнение (1) сильно неосциллирует на графе Γ . Тогда любое непостоянное решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее на $\partial\Gamma$ краевым условиям $u'u'' \geq 0$ достигает своих наибольшего и наименьшего значений только на границе графа.

Решением дифференциального неравенства на графе $Lu \geq 0$, $x \in \Gamma$, мы называем всякое решение уравнения $Lu = f(x)$, $x \in \Gamma$, правая часть которого неотрицательна на всем графе Γ .

Теорема 4. Пусть уравнение (1) сильно неосциллирует на Γ . Тогда любое нетривиальное решение неравенства $Lu \geq 0$, $x \in \Gamma$, удовлетворяющее на границе графа условиям $u \geq 0$, $u'u'' \geq 0$ строго положительно на Γ .

Теорема 5. Пусть уравнение (1) сильно неосциллирует на Γ . Тогда любое нетривиальное решение неравенства $Lu \geq 0$, $x \in \Gamma$, удовлетворяющее на границе графа условиям $u \geq 0$, $u' \geq 0$ строго положительно на Γ .

Литература

1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Пряднев В. Л., Боровских А. В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2004.—192 с.
2. Кулаев Р. Ч. О разрешимости краевой задачи для уравнения четвертого порядка на графе // Дифференц. уравнения.—2014.—Т. 50, № 1. С. 27–34.

ТЕОРЕМА АРТИНА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КОЛЕЦ

А. Г. Кусраев (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

А. Г. Кусраев

Напомним некоторые понятия из [5]. Всюду ниже K — коммутативное кольцо с единицей. *Полное кольцо частных* коммутативного кольца K обозначается символом $Q(K)$. Назовем K *рационально полным*, если $Q(K) \simeq K$ канонически, или эквивалентно, областью определения каждой неприводимой дроби в K является все K . Для подмножества A кольца K определим его *аннулятор* формулой $A^* := \{k \in K : kA = \{0\}\}$. Ясно, что A^* — идеал и идеалы такого вида называют *аннуляторными*. Таким образом, J — аннуляторный идеал тогда и только тогда, когда $J = A^*$ для некоторого $A \subset K$, что эквивалентно соотношению $J^{**} := (J^*)^* = J$. Аннуляторные идеалы коммутативного полупервичного кольца K образуют полную булеву алгебру $\mathbb{A}(K)$, в которой пересечение и аннулятор служат инфимумом и булевым дополнением. Коммутативное кольцо K называют *полупервичным*, если в нем нет ненулевых нильпотентных элементов. Аннуляторный идеал коммутативного полупервичного рационально полного кольца K является прямым слагаемым, причем $\mathbb{P}(K) \simeq \mathbb{A}(K)$, где $\mathbb{P}(K)$ — булева алгебра идемпотентов K .

Кольцо K называют *формально вещественным* если из $a_1^2 + \dots + a_n^2 \in J$ следует $a_1, \dots, a_n \in J$ для любого конечного набора $a_1, \dots, a_n \in K$ и любого $J \in \mathbb{A}(K)$ или, в терминологии [1, Definition 4.1.3], каждый аннуляторный идеал в K является вещественным. Полупервичное регулярное кольцо K будет вещественным в том и только в том случае, когда $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 0$ влечет $a_1 = \dots = a_n = 0$ для всех $a_1, \dots, a_n \in K$ и $n \in \mathbb{N}$, так как в этом случае всякий главный идеал является прямым слагаемым.

Рассмотрим коммутативные кольца с единицей K и L . Скажем, что L *расширяет* K , если $K \subset L$ и отображение $J \mapsto J \cap K$ представляет собой биекцию из $\mathbb{A}(L)$ на $\mathbb{A}(K)$. Скажем, что L *локально алгебраично* над K , если L расширяет K и для данных $x \in L$ и ненулевого $I \in \mathbb{A}(K)$ существуют ненулевой $J \in \mathbb{A}(K)$, натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и $a_0, \dots, a_n \in K$ такие, что $J \subset I$ и $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in J^*$. В случае полупервичных регулярных колец, L локально алгебраично над K в том и только в том случае, если $\mathbb{P}(K) = \mathbb{P}(L)$ и для любых $x \in L$ и ненулевого $d \in \mathbb{P}(K)$ существуют ненулевой $e \in \mathbb{P}(K)$, натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и $a_0, \dots, a_n \in K$ такие, что $e \leq d$ и $e(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = 0$.

Напомним также, что *f-кольцо* — решеточно упорядоченное кольцо K , в котором из $u \wedge z = 0$ следует $xy \wedge z = ux \wedge z = 0$, каковы бы ни были $x, y, z \in K_+$. *Полоса* (или *поляра*) в K — множество вида $A^\perp := \{k \in K : (\forall a \in A) |k| \wedge |a| = 0\}$, где $\emptyset \neq A \subset K$. Множество всех полос $\mathbb{B}(K)$ в полупервичном архимедовом *f*-кольце K совпадает с $\mathbb{A}(K)$ и, следовательно, является полной булевой алгеброй, поскольку $A^* = A^\perp$ для любого $A \subset K$. Полное кольцо частных $Q(A)$

произвольного f -кольца K единственным образом превращается в f -кольцо так, что K становится подрешеткой и подалгеброй $Q(A)$.

Вещественное замыкание f -кольца K с единицей — рационально полное f -кольцо \overline{K} , удовлетворяющее следующим условиям: 1) $Q(K)$ — подкольцо и подрешетка \overline{K} и $\mathbb{P}(\overline{K}) = \mathbb{P}(Q(K))$; 2) \overline{K} локально алгебраично над $Q(A)$; 3) если K' — рационально полное f -кольцо, локально алгебраическое над $Q(K)$ и содержащее \overline{K} в качестве подрешетки и подкольца, то $K' = \overline{K}$. Скажем, что K *вещественно замкнуто*, если $K = \tilde{K}$.

Теорема. Пусть K — архимедово f -кольцо с единицей и \overline{K} — его вещественное замыкание, так что $K \subset Q(K) \subset \overline{K}$. Если полином $p \in K[x_1, \dots, x_N]$ таков, что $p(a_1, \dots, a_N) \geq 0$ для всех $(a_1, \dots, a_N) \in \overline{K}^N$, то имеет место представление $q^2 p = \sum_{j=1}^m k_j p_j^2$ для некоторых неделителей нуля $0 < k_1, \dots, k_m \in Q(K)$ и полиномов $p_1, \dots, p_m, q \in Q(K)[x_1, \dots, x_N]$, причем равенства $eq(a_1, \dots, a_N) = 0$ и $ep(a_1, \dots, a_N) = 0$ эквивалентны для всех $a_1, \dots, a_N \in K$ и $e \in \mathbb{P}(Q(K))$.

Доказательство этой теоремы использует булевозначный анализ, а именно результат Гордона [2] о *булевозначном представлении* колец, согласно которому рационально полное полупервичное коммутативное кольцо с единицей превращается в поле при погружении в подходящую булевозначную модель, детали см. в [3, Theorem 8.3.5]. Термин *булевозначный анализ* обозначает технику изучения математических объектов посредством сравнительного анализа их представлений в двух различных булевозначных моделях теории множеств, конструкция которых использует две различные полные булевы алгебры. В качестве таких моделей берут, чаще всего, мир классических множеств в виде *универсума фон Неймана* и специальным образом подобранный *булевозначный универсум* в котором общепринятое теоретико-множественные понятия и утверждения получают нестандартную интерпретацию. Упомянутый сравнительный анализ проводится с помощью техники *спусков* и *подъемов* в том виде, как она представлена в монографиях [3] и [4]. В частности, сформулированная выше теорема представляет собой интерпретацию в подходящей булевозначной модели теоремы Артина, содержащей положительное решение семнадцатой проблемы Гильберта. Таким же образом можно получить булевозначную интерпретацию других результатов вещественной алгебраической геометрии, представленной в [1] и [6].

Литература

1. Bochnak J., Coste M., and Roy M.-F.: Real Algebraic Geometry.—Berlin a. o.: Springer, 1998.—x+430 p.
2. Gordon, E. I. Rationally Complete Semiprime Commutative Rings in Boolean Valued Models of Set Theory.—Gor'kii, 1983.—35 p. (VINITI, № 3286-83).
3. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S., Introduction to Boolean Valued Analysis.—Moscow: Nauka, 2005.—526 p.
4. Kusraev, A. G. and Kutateladze, S. S. Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—iv+400 p.
5. Lambek J. Lectures on rings and modules.—Toronto: Blaisdell Publ. Company, 1966.—(AMS Chelsea publishing, Providence, Rhode Island).
6. Prestel A. and Delzell Ch. N. Positive Polynomials: From Hilbert's 17th Problem to Real Algebra.—Berlin a. o.: Springer, 2001.—viii+267 p.

ТЕОРЕМА ДЕКОМПОЗИЦИИ¹

З. А. Кусраева (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Устанавливается теорема декомпозиции для операторов, определенных на упорядоченном векторном пространстве. Ранее известный вариант этой теоремы (см. [2]) для операторов в векторных решетках играет важную роль в выпуклом анализе.

Оператор $P : X \rightarrow Y \cup \{+\infty\}$ называется *сублинейным*, если $P(0) = 0$, $P(x + y) \leq P(x) + P(y)$ и $P(\lambda x) = \lambda P(x)$ для всех $x, y \in X$ и $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ (при этом условимся, что $+\infty + y = y + \infty = +\infty$ и $\lambda(+\infty) = +\infty$ ($y \in Y, \lambda \in \mathbb{R}_+$)).

Определим множество $\text{dom } P := \{x \in X : P(x) < +\infty\}$. Множество всех линейных операторов, действующих из X в Y , мажорируемых оператором P называется *оторное множество* оператора P и обозначается символом ∂P :

$$\partial P := \{T \in L(X, Y) : Tx \leq P(x), \forall x \in X\},$$

где $L(X, Y)$ — это пространство линейных операторов из X в Y .

Положительным разбиением оператора T называется N -ка (T_1, \dots, T_N) , где $N \in \mathbb{N}$, $T_k \geq 0$ ($k := 1, \dots, N$), и $T = T_1 + \dots + T_N$. Все необходимые определения см. в [2].

Для возрастающего сублинейного оператора $P : X \rightarrow Y \cup \{+\infty\}$ определим оператор $P^\wedge : X^N \rightarrow Y \cup \{+\infty\}$ следующим образом

$$P^\wedge(x_1, \dots, x_N) = \inf\{P(x) : x_1, \dots, x_N \leq x\}.$$

Теорема декомпозиции. Пусть H_1, \dots, H_N — конусы в упорядоченном векторном пространстве X . Предположим, что P и Q — возрастающие сублинейные операторы из X в $Y \cup \{+\infty\}$ и $H_1 \times \dots \times H_N + \Delta_N(\text{dom}(P)) - X_+^N$ подпространство в X^N . Неравенство

$$P^\wedge(h_1, \dots, h_N) \geq Q^\wedge(h_1, \dots, h_N)$$

имеет место для всех $(h_1, \dots, h_N) \in H_1 \times \dots \times H_N$ в том и только том случае, если для всякого разбиения (T_1, \dots, T_N) произвольного $T \in \partial Q$ найдутся $S \in \partial P$ и положительное разбиение (S_1, \dots, S_N) оператора S такие, что

$$S_k(h_k) \geq T_k(h_k) \quad (h_k \in H_k, k := 1, \dots, N).$$

Литература

1. Kutateladze S. S. Choquet boundaries in K-spaces // Russ. Math. Surveys.—1975.—Vol. 30, № 4.—P. 115–155.
2. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Subdifferentials: Theory and Applications.—Novosibirsk: Nauka, 2002.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-91339.

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ КОНТУРА ПИТАНИЯ НА РАБОТУ
СОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЫ В АНИЗОТРОПНОМ ПЛАСТЕ

Д. Г. Лекомцев (Россия, Орел; ОГУ)

Объемы добычи флюидов (воды, нефти) в настоящее время постоянно растут. Этим обусловлена необходимость создания новых математических моделей фильтрационных течений в пластах сложной геологической структуры (анизотропных и неоднородных). В работе поставлена задача о работе скважины в анизотропном пласте грунта в случае произвольного контура питания. Получено аналитическое решение задачи о работе совершенной скважины с бесконечным прямолинейным и полосовым контурами питания. Получено численное решение задачи в случае кругового, эллиптического и квадратного контуров питания.

Совершенная эксплуатационная скважина дебита Q расположена в горизонтальном пласте постоянной толщины. Грунт пласта, недеформируемый анизотропный и однородный, характеризуется коэффициентом проницаемости K — тензором второго ранга (вообще говоря, несимметричным). В предположении плоскопараллельности задачи $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$. Компоненты (K_{ij}) — постоянные. Для определения вклада в дебит различных компонентов тензора введем коэффициенты $\alpha = K_{22}/K_{11}$ и $\beta = (K_{12} + K_{21})/2K_{11}$.

Работу скважины моделируем стоком мощности Q . Контур σ_{Π} моделируем произвольной замкнутой кривой класса Ляпунова (в случае численного решения задачи), а контур σ_C , малой окружностью радиуса R_C с центром в точке z_0 . Причем контуры σ_{Π} и σ_C не пересекаются. Контур σ_{Π} проходится против часовой стрелки.

Полагаем, что жидкость несжимаемая и ее течение стационарное. Обобщенный потенциал $\varphi(M) = -(p + \rho\Pi)/\mu$ (Π — потенциал массовой силы — силы тяжести, p — давление, μ и ρ — вязкость и плотность жидкости) и скорость фильтрации \vec{v} течения как функции точки $M = (x, y)$ удовлетворяют всюду в области D , (за исключением изолированных особых точек $\varphi(M)$) уравнению [1]:

$$\nabla \cdot (K \cdot \nabla \varphi(M)) = 0, \quad M \in D. \quad (1)$$

Полагаем, что давления на контурах σ_{Π} , σ_C постоянные, т. е. для $\varphi(M)$ имеем условия (φ_C и φ_{Π} — константы, $\varphi_C \neq \varphi_{\Pi}$):

$$\varphi(M) = \varphi_{\Pi}, \quad M \in \sigma_{\Pi}, \quad (2)$$

$$\varphi(M) = \varphi_C, \quad M \in \sigma_C. \quad (3)$$

Так как уравнение (1) имеет сложный вид, то для описания течения введем две комплексные плоскости: физическую плоскость $z = x + iy$ (x, y — декартовы координаты) и вспомогательную $\zeta = \xi + i\eta$ (ξ, η — декартовы координаты). Перейдем на плоскость ζ используя гомеоморфное (взаимно однозначное и

непрерывное) аффинное прямое (и обратное) преобразование [2]:

$$\zeta = z + \mu_0 \bar{z} \quad \left(z = \frac{\zeta + \mu_0 \bar{\zeta}}{1 - \mu_0^2} \right) \quad (4)$$

где

$$\mu_0 = \frac{K_{22} - K_{11} - i(K_{12} + K_{21})}{K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{D(K_S)}}, \quad |\mu_0| < 1.$$

Откуда следует:

$$\begin{aligned} \xi &= (1 + a)x + by, \quad \eta = bx + (1 - a)y, \\ x &= \frac{(1 - a)\xi + b\eta}{1 - \mu_0^2}, \quad y = \frac{(1 + a)\eta + b\xi}{1 - \mu_0^2}, \end{aligned}$$

где

$$a = \frac{\alpha - 1}{(\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2})}, \quad b = \frac{-2\beta}{(\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2})}, \quad \mu_0^2 = a^2 + b^2.$$

Применим преобразований (4) к задаче (1)–(3). Получим на плоскости ζ для функции $\varphi(\zeta)$ уравнение Лапласа. В случае замкнутых контуров питания воспользуемся методом дискретных особенностей [3].

С целью изучения влияния анизотропии грунта на дебит введем величину $\epsilon = Q/Q_0 - 1$, характеризующую относительный дебит. Q — дебит скважины в анизотропной среде, Q_0 — дебит скважины в изотропной среде, определяемый по известной формуле [4].

Была исследована зависимость относительного дебита ϵ от значений коэффициентов α и β , в случае бесконечного прямолинейного [5], кругового [6], эллиптического [7], квадратного [8] контуров питания, а также в случае, когда область D имеет форму бесконечной полосы [9]. Анизотропия грунта может сильно сказываться на дебите Q (может его увеличивать или уменьшать по отношению к Q_0). С увеличением отношения недиагональных к диагональным компонентам тензора (K_{ij}) (увеличение коэффициента α , коэффициент β фиксирован) влияние анизотропии уменьшается. В случае, когда характерные размеры задач (расстояние до прямолинейного контура питания, радиус кругового контура питания и т. п.) одинаковы, форма контура питания не оказывает решающего влияния на дебит скважины.

Литература

1. Пивень В. Ф. Постановка основных граничных задач фильтрации в анизотропной пристой среде // Тр. XIII Междунар. симп. «МДОЗМФ». — Харьков–Херсон: Издательский центр Харьковского ун-та, 2007. — С. 239–243.
2. Пивень В. Ф. Решение граничных задач двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном слое пористой среды // Тр. Междунар. шк.-сем. «МДОЗМФ». — Орел: Изд-во Орловского ун-та, 2007. — С. 91–100.
3. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: ТОО Янус, 1995. — 520 с.
4. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука, 1977. — 348 с.

5. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г. Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта // Ученые записки Орловского гос. ун-та.—2012.—Т. 47, № 3.—С. 69–74.
6. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г. Исследование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Ученые записки Орловского гос. ун-та.—2014.—Т. 59, № 3.—С. 83–87.
7. Лекомцев Д. Г. Сравнение математических моделей работы совершенной скважины с эллиптическим контуром питания в анизотропном грунте // Сб. тр. VII междунар. конф. «ПМТУКТ-2014».—Воронеж: Научная книга, 2014.—С. 223–225.
8. Лекомцев Д. Г. Работа совершенной скважины с квадратным контуром питания в анизотропном грунте // Материалы конф. ВНКСФ-21.—Омск: Изд-во АСФ России, 2015.—С. 77–78.
9. Лекомцев Д. Г. Работа совершенной скважины в полособразном слое, ограниченном линиями сброса // Сб. тр. VI междунар. конф. «ПМТУКТ-2013».—Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского гос. ун-та, 2013.—С. 138–139.

О $\{2, 3\}$ -ГРУППАХ С РАЗЛИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ КОНЕЧНОСТИ¹

Д. В. Лыткина (Россия, Новосибирск; СибГУТИ),
В. Д. Мазуров (Россия, Новосибирск; ИМ СО РАН)

Натуральное число n называется *периодом* группы G , если $x^n = 1$ для любого $x \in G$. Наименьший период группы называется ее *экспонентой*. И. Н. Санов [1] доказал локальную конечность групп периода 12 без элементов порядка 6. До него группы периода 6 без элементов порядка 6 описал Б. Нойман [2]. Д. В. Лыткина [3] получила полное описание групп, множество порядков элементов которых равно $\{1, 2, 3, 4\}$. Позднее В. Д. Мазуров [4] установил локальную конечность групп экспоненты 24, не содержащих элементов порядка 6. Вслед за этим Э. Джабара и Лыткина [5] выяснили строение периодической группы, порядок каждого элемента которой делит одно из чисел 4 или 9. Недавно Джабара, Лыткина и Мазуров [6] доказали локальную конечность групп экспоненты 72, не содержащих элементов порядка 6.

Наша цель — обобщить все названные результаты.

Если π — некоторое множество простых чисел, то π -группой называется периодическая группа, каждый элемент которой является π -элементом, т. е. элементом, порядок которого может делиться только на простые числа из π .

Запрещенной подгруппой группы G назовем ее подгруппу H , обладающую следующими свойствами:

- (а) H порождается инволюцией, т. е. элементом порядка 2, и элементом порядка 3, и H является $\{2, 3\}$ -группой;
- (б) H не содержит элементов порядка 6;
- (в) любая максимальная 2-подгруппа из H является бесконечной локально циклической группой.

Авторам не известны примеры групп, содержащих запрещенную подгруппу.

Теорема 1. Пусть G — $\{2, 3\}$ -группа, не содержащая элементов порядка 6 и запрещенных подгрупп. Если порядок произведения любых двух элементов из G , порядки которых не превосходят числа 4, не превосходит числа 9, то выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) $G = O_3(G)T$, где $O_3(G)$ абелева, а T — либо локально циклическая 2-группа, либо кватернионная группа порядка 8 или 16;
- (2) $G = O_2(G)R$, где $O_2(G)$ нильпотентна ступени нильпотентности, не превосходящей двух, а R — 3-группа с единственной подгруппой порядка 3, действующей свободно на $O_2(G)$;
- (3) $G = O_2(G)D$, где D содержит локально циклическую подгруппу R индекса 2 и $O_2(G)R$ удовлетворяет п. (2);
- (4) G является 2-группой или 3-группой.

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, № 13-01-00505, № 14-21-00065.

Здесь $O_p(G)$ для простого числа p обозначает наибольшую нормальную p -подгруппу группы G .

Отметим, что существуют примеры не локально конечных групп, удовлетворяющих п. (2) теоремы (см., например, [7]).

Рассмотрим теперь группы периода 12. Локальная конечность таких групп была доказана при некоторых дополнительных условиях в [1, 8–10].

Мы сводим вопрос о локальной конечности групп периода 12 к вопросу о локальной конечности их подгрупп, порожденных тремя элементами порядка 3. Основным результатом является доказательство следующего факта.

Теорема 2. *Группа периода 12 локально конечна тогда и только тогда, когда конечна любая ее подгруппа H , удовлетворяющая одному из следующих условий:*

(1) H порождается элементом a порядка 3 и элементами b и c порядка 2, для которых $(ab)^3 = (bc)^3 = 1$;

(2) H порождается элементами a и b порядка 3 и элементом c порядка 2, для которых $(ac)^2 = 1$.

В частности, группа периода 12 локально конечна, если конечна любая ее подгруппа, порожденная тремя элементами порядка 3.

Литература

1. Санов И. Н. Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Ученые записки Ленинградского гос. ун-та. Сер. мат.—1940.—№ 55.—С. 166–170.
2. Neumann B. H. Groups whose elements have bounded orders // J. London Math. Soc.—1937.—Vol. 12.—P. 195–198.
3. Лыткина Д. В. Структура группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4 // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 2.—С. 353–358.
4. Мазуров В. Д. О группах периода 24 // Алгебра и логика.—2010.—Т. 49, № 6.—С. 766–781.
5. Джабара Э., Лыткина Д. В. О группах периода 36 // Сиб. мат. журн.—Т. 54, № 1.—С. 44–48.
6. Jabara E., Lytkina D. V., Mazurov V. D. On groups of exponent 72 // J. Group Theory.—2014.—Vol. 17, № 6.—P. 947–955.
7. Журтов А. Х., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д., Созутов А. И. О периодических группах, свободно действующих на абелевых группах // Тр. ИММ УрО РАН.—2013.—Т. 19, № 3.—С. 136–143.
8. Мамонтов А. С. Группы периода 12 без элементов порядка 12 // Сиб. мат. журн.—2013.—Т. 54, № 1.—С. 150–156.
9. Лыткина Д. В., Мазуров В. Д., Мамонтов А. С. Локальная конечность некоторых групп периода 12 // Сиб. мат. журн.—2012.—Т. 53, № 6.—С. 1373–1378.
10. Мазуров В. Д., Мамонтов А. С. Инволюции в группах периода 12 // Алгебра и логика.—2013.—Т. 52, № 1.—С. 92–98.

НЕРАСПОЗНАВАЕМЫЕ ПО СПЕКТРУ
КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ
И ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ ИМ ГРУППЫ¹

В. Д. Мазуров (Россия, Новосибирск; ИМ СО РАН)

В докладе рассматриваются только конечные группы. Пусть G — группа. Обозначим через $\omega(G)$ спектр G , т. е. множество всех порядков элементов G . Группы с одинаковым спектром будем называть *изоспектральными*.

Скажем, что G *распознаваема* (более точно, распознаваема по спектру в классе конечных групп), если любая конечная группа, изоспектральная G , изоморфна G . Группа G *нераспознаваема по спектру*, если существует бесконечно много попарно неизоморфных групп, изоспектральных G .

В. Дж. Ши [1] первым отметил, что группа G , содержащая нетривиальную абелеву нормальную подгруппу V , нераспознаваема. В [2] приведен набросок доказательства того, что это утверждение остается верным, если требование коммутативности V заменить на принадлежность экспоненты V к спектру G . В действительности, такое обобщение не верно: противоречащий пример построен в [3].

В [4] доказано, что группа нераспознаваема тогда и только тогда, когда она изоспектральна группе, содержащей нетривиальную разрешимую нормальную подгруппу. В этой же работе сформулировано определение критической группы. Группа G называется *критической* относительно данного конечного множества ω (или ω -критической), если $\omega(G) = \omega$ и спектр любой собственной секции группы G (т. е. фактор группы H/K , где $K \triangleleft H \leq G$ и либо $K \neq 1$, либо $H \neq G$), отличен от ω . Там же доказано, что для любого ω , число ω -критических групп конечно.

Все известные к настоящему времени нераспознаваемые по спектру конечные простые группы перечислены в таблице 1.

В столбце H таблицы 1 указано композиционное строение одной из групп, изоспектральных группе G и содержащих нетривиальную абелеву нормальную подгруппу. Как уже отмечалось, из существования одной такой группы вытекает нераспознаваемость группы G .

Доклад представляет собой обзор результатов, касающихся строения групп, изоспектральных нераспознаваемым по спектру конечным простым группам. Особое внимание уделяется группе $U_3(3)$, для которой существует по меньшей мере 7 (рекордное на сегодняшний день число) изоспектральных ей критических групп.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-90013.

Таблица 1. Нераспознаваемые простые группы

	G	Условия на G	$\mu(L)$	H
1	A_6		3,4,5	$2^4 : A_5$
2	A_{10}		8,9,10,12,15,21	$(7^4 \times 3^{12}) : (2.L_2(5).2)$
3	$L_3(3)$		6,8,13	$13^4 : (2.S_4)$
4	$L_4(q)$	$q = 13^{2^4}$	$13(q-1), q^2-1, 13(q^2-1)/4,$ $(q^3-1)/4, (q^3+q^2+q+1)/4$	$13^{2304} : L_4(q)$
5	$U_3(3)$		7,8,12	$2^6 : U_3(3)$
6	$U_3(5)$		6,7,8,10	$2^9 : L_3(4)$
7	$U_3(7)$		43,48,56	$2^{42} : U_3(7)$
8	$U_4(2)$		5,9,12	$3^4 : S_5$
9	$U_5(2)$		8,11,12,15,18	$3^5 : M_{11}$
10	$S_4(q)$	$q = 3$ $q = 2^m,$ $m > 1$ $q = 3^{2^m}$ $q = p^m, p >$ $3 - \text{простое}$	5,9,12 $4, 2(q \pm 1), q^2 \pm 1$ $9, 3(q \pm 1), (q^2 \pm 1)/2$ $p(q \pm 1), (q^2 \pm 1)/2$	$3^4 : S_5$ $2^{8m} : L_2(q^2)$ $3^{28m} : L_2(q^2)$ $p^{8m} : (L_2(q^2).2)$
11	$O_9(q)$	$q = p^m, p -$ простое	$\mu(M)$ где M состоит из $(q^4 \pm 1)/(2, q - 1),$ $p(q^3 \pm 1)/(2, q - 1),$ $(q^2 \pm q + 1)(q^2 - 1)/(2, q - 1),$ $p(q^2 + 1)(q \pm 1)/(2, q - 1),$ $p(q^2 - 1);$ $4(q^2 \pm 1), 8(q \pm 1),$ если $p = 2;$ $9(q^2 \pm 1)/2,$ если $p = 3;$ $25(q \pm 1)/2,$ если $p = 5;$ $49,$ если $p = 7$	$p^{8m} : O_8^-(q)$
12	${}^3D_4(2)$		8,12,13,18,21,28	$2^{24} : {}^3D_4(2)$
13	J_2		7,8,10,12,15	$2^6 : A_8$

Литература

1. Shi. W. J. A characteristic property of the Mathieu groups // Chinese Ann. Math. Ser. A.—1988.—Vol. 9, № 5.—P. 575–580.
2. Chigira N. and Shi W.J. More on the set of element orders in finite groups // Northeast. Math. J.—1996.—Vol. 12, № 3.—P. 257–260.
3. Мазуров В. Д. Распознавание конечных непростых групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика.—1997.—Т. 36, № 3.—С. 304–322.
4. Мазуров В. Д., Ши В. Дж. Признак нераспознаваемости конечной группы по спектру // Алгебра и логика.—2012.—Т. 51, № 2.—С. 239–243.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО
УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. МЕТОД РОТЭ

В. Х. Мамсурова (Россия, Владикавказ; СОГУ)

Постановка задачи

В области $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < \ell, 0 < t < T\}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \sum_{k=1}^m \alpha_k u(\xi_k, t) + f(x, t), \quad (1)$$

$$\begin{cases} k(0, t) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \beta_1 u + \int_0^\ell u dx - \mu_1(t), \\ -k(\ell, t) \frac{\partial u(\ell, t)}{\partial x} = \beta_2 u - \mu_2(t), \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3)$$

α_k — постоянные числа, $k(x, t) \geq c_1 > 0$, $|\alpha_k|, |\beta_1|, |\beta_2| \leq c_2$, $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m < \ell$ — фиксированные точки интервала $(0, \ell)$. Задачи типа (1)–(3) встречаются при изучении переноса примеси вдоль русла рек [1].

Метод Ротэ

Задаче (1)–(3) поставим в соответствие схему Ротэ

$$y_{\bar{t}} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} \right] + \sum_{k=1}^m \alpha_k y(\xi_k, t) + f(x, t), \quad (4)$$

$$\begin{cases} k(0, t) \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = \beta_1 y + \int_0^\ell y dx - \mu_1(t), \\ -k(\ell, t) \frac{\partial y(\ell, t)}{\partial x} = \beta_2 y - \mu_2(t), \end{cases} \quad (5)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad k(x, t) \geq c_1 > 0, \quad (6)$$

где

$$y_{\bar{t}} = \frac{y - \check{y}}{\tau}, \quad y = y^j, \quad \check{y} = y^{j-1},$$

$\tau = T/j_0$ — шаг сетки по времени. Умножим уравнение (4) скалярно на $2\tau y$

$$2\tau(y_{\bar{t}}, y) = 2\tau((ky_x)_x, y) + 2\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k y(\xi_k, t), y\right)\tau + 2\tau(f, y). \quad (7)$$

Преобразуем слагаемые, входящие в тождество (7):

$$2\tau(y_{\bar{t}}, y) = \|y\|_0^2 - \|\check{y}\|_0^2 + \tau\|y_{\bar{t}}\|_0^2,$$

$$\begin{aligned}
((ky_x)_x, y) &= \int_0^\ell (ky_x)_{xx} y dx = (ky_x)y|_0^\ell - \int_0^\ell ky_x^2 dx = \\
&= k(\ell, t)y_x(\ell, t)y(\ell, t) - k(0, t)y_x(0, t)y(0, t) - \int_0^\ell ky_x^2 dx = \\
&= -\beta_2 y^2(\ell, t) + y(\ell, t)\mu_2(t) - \beta_1 y^2(0, t) - y(0, t) \int_0^\ell y dx + \\
&\quad + y(0, t)\mu_1(t) - \int_0^\ell ky_x^2 dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^m \alpha_k y(\xi_k, t) \int_0^\ell u(x, t) dx &\leq \sum_{k=1}^m \frac{|\alpha_k|}{2} [\varepsilon \|y_x\|_0^2 + c_\varepsilon \|y\|_0^2] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m |\alpha_k| \|y\|_0^2 \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^m |\alpha_k| \|y\|_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (\ell + c_\varepsilon) \|y\|_0^2, \\
(f, y) &\leq \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2 + \varepsilon \|y\|_0^2.
\end{aligned}$$

Подставляя последние неравенства в (7), находим

$$\|y\|_0^2 - \|\check{y}\|_0^2 + v_1 \|y_x\|_0^2 \tau \leq v_2 \|y\|_0^2 \tau + \frac{\tau}{4\varepsilon} \|f\|_0^2 + \frac{\mu_1^2(t)}{2} + \frac{\mu_2^2(t)}{2}, \quad (8)$$

v_1, v_2 — некоторые положительные постоянные.

Суммируя (8) по j' от 1 до j , получаем

$$\begin{aligned}
&\|y^j\|_0^2 + v_1 \sum_{j'=1}^j \|y_x^{j'}\|_0^2 \tau \leq \\
&\leq v_2 \sum_{j'=1}^j \|y^{j'}\|_0^2 \tau = \frac{1}{4\varepsilon} \sum_{j'=1}^j \left(\|f^{j'}\|_0^2 + \mu_1^2(t_{j'}) + \mu_2^2(t_{j'}) \right) \tau + \|u_0(x)\|_0^2.
\end{aligned} \quad (9)$$

Имеет место следующая [2]

Лемма 1. Пусть q_j, p_j — функции, заданные на $\bar{\omega}_\tau, j = 1, 2, 3, \dots, p_j$ — неотрицательная неубывающая функция ($p_{j+1} \geq p_j$), тогда из неравенства

$$q_{j+1} \leq c_0 \sum_{j'=1}^j \tau q_{j'} + p_j$$

следует

$$q_{j+1} \leq e^{c_0 t_j} p_j.$$

На основании леммы 1 из (8), при малом τ , находим

$$\|y\|_0^2 + v_1 \sum_{j'=1}^j \|y_x^{j'}\|_0^2 \tau \leq M \left(\sum_{j'}^j \left(\|f^{j'}\|_0^2 + \mu_1^2(t_{j'}) + \mu_2^2(t_{j'}) \right) \tau + \|u_0(x)\|_0^2 \right), \quad (9)$$

где $M > 0$ — постоянная, не зависящая от τ .

Из оценки (9) следует сходимость метода Рунге со скоростью $O(\tau)$.

Таким образом, краевая задача (1)–(3) для уравнения частных производных редуцирована к системе обыкновенных дифференциальных уравнений на слоях $t = t_j$.

Литература

1. Анохин Ю. А., Горстко А. Б., Дамещек Л. Ю. и др. Математические модели и методы управления крупномасштабным водным объектом.—Новосибирск: Наука, 1987.—187 с.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—415 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ МУЛЬТИКОПТЕРАМИ

М. Д. Макаренко (Россия, Владикавказ, СОГУ; ЮМИ),
В. А Савченко (Россия, Владикавказ; СОГУ)

Беспилотные летательные аппараты за короткий промежуток времени, в течении 10 лет, преодолели путь от военных систем разведки, до систем доставки заказа в кафе и ресторане. Сегодня очень интенсивно ищутся новые и новые способы применения автономных летательных аппаратов, часто происходит их включение в многоагентные системы управления. Наиболее популярными являются квадрокоптеры — устройства с четырьмя моторами, однако разрабатываются мультикоптеры: с тремя двигателями (трикоптер), шестью (гексокоптер), восемью (октокоптер) или, реже, двенадцатью бесколлекторными электродвигателями с винтами. Причем, винтов может быть по одному на двигатель или коаксиально по два. Общим для всех аппаратов данного класса является, пожалуй, конструктив и принцип полета. Центральная часть служит для размещения полезной нагрузки, батареи и устройства управления. Радиально от центра на балках устанавливаются микроэлектродвигатели с несущими винтами. С одной стороны устройства имеют симметричный вид, но предполагают наличие передней и задней частей, относительно которых сориентировано направление движения. Для начала движения мультикоптер выводится из состояния баланса путем увеличения скорости вращения части винтов. В результате наклона происходит движение в нужном направлении, для поворота два противоположных винта ускоряют вращение, а другие два — замедляют. Устройство управления содержит контроллер, который в автоматическом режиме, используя данные от нескольких датчиков, и стабилизирует аппарат в воздухе в горизонтальном положении путем подачи управляющих сигналов двигателям. Управляющая программа, вычисляет скорость для каждого винта, компенсирует внешние воздействия ветра и другие помехи. Практически все мультикоптеры, даже управляемые вручную, оснащены автоматическими системами взлета и захода на посадку, поддержания заданной высоты и скорости полета, стабилизация углов ориентации, принудительной посадки в случае отказа двигателя или прочих серьезных неполадок. Это обусловлено желанием исключить человеческий фактор в таких ситуациях, где требуется не интеллектуальный анализ ситуации, а четкое управление конструкционными составляющими. Наиболее часто применяются простейшие регуляторы, имеющим эффективные аппаратные реализации, позволяющие поддерживать некий параметр на заданном уровне, с возможностью перехода между разными заданными уровнями. Более сложные регуляторы обладают большей вычислительной сложностью и сложнее в настройке. К простейшим регуляторам относится ПИД — пропорционально-интегрирующе-дифференцирующий регулятор, использующий обратную связь. Управляющий

сигнал вычисляется как сумма пропорциональной, интегральной и дифференцирующей поправки.

$$u(t) = P + I + D = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de}{dt}.$$

Основой для регулирования является сигнал рассогласования $e(t)$, т. е. разность между желаемым значением сигнала и полученным по обратной связи, называемый невязкой. Первое слагаемое обратно пропорционально невязке, и противодействует текущему отклонению. Однако за счет инерционности системы использование только пропорционального регулятора никогда не стабилизирует заданное значение. Для предотвращения перерегулирования используется дифференциальное слагаемое, которое пропорционально изменению ошибки во времени, и предназначено для противодействия отклонениям от целевого значения, которые прогнозируются в будущем. Отклонения могут быть вызваны внешними возмущениями или запаздыванием воздействия регулятора на систему. Интегрирующая составляющая пропорциональна интегралу по времени от отклонения, и накапливая ошибки во времени корректирует положение мультикоптера, связанные с его конкретными особенностями конструкции. Если какие-то из составляющих не используются то регулятор называют пропорционально-интегрируемым, пропорционально-дифференцирующим, пропорциональным и т. д.

Литература

1. *Зинченко О. Н.* Беспилотный летательный аппарат: применение в целях аэрофотосъемки для картографирования.—М.: Ракурс, 2011.
2. *Стельмащук С. В.* Настройка пид-регулятора по кривой разгона объекта с самовыравниванием для максимального быстродействия с заданным перерегулированием при идентификации объекта моделью первого порядка с запаздыванием.—Вестник ТОГУ, 2013.—№ 2 (29).
3. *Ефимов И.* Программирование квадрокоптера на Arduino, 2014.—URL: <http://habrahabr.ru/post/227425/>
4. *Федоров А.* Корректная реализация разностной схемы ПИД регулятора, 2012.—URL: <http://habrahabr.ru/post/143388/>
5. *Хамзатов М.* Особенности развития беспилотной авиации в современных условиях // Портал российской беспилотной авиации.—2012.—URL: <http://www.uav.ru/articles/hmm.pdf>

**КОНСТРУКТОР.
КЛИЕНТ-СЕРВЕРНОГО МОБИЛЬНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ.
СИСТЕМАТИЗАЦИЯ УЧЕБНЫХ ДАННЫХ ВУЗОВ**

С. Г. Назаров (Россия, Владикавказ; СОГУ)

Современные гаджеты и мобильные технологии позволяют из обыденного процесса превратить учебу в увлекательное занятие. С каждым днем все больше людей использует возможности мобильных устройств, но мало какой ВУЗ может похвастаться наличием собственного мобильного приложения для студентов и преподавателей ВУЗов. Переход на потребление контента с мобильных устройств дал новый вызов университетской информационной инфраструктуре. Пользователи больше не хотят пользоваться сайтами, не оптимизированными для просмотра хотя бы с планшета. Так же известно, что хорошо сделанное нативное приложение под Android или iOS будет удобнее любого оптимизированного мобильного сайта. Поэтому, некоторые ВУЗы ощутили потребность в выпуске специализированного мобильного приложения под своим брендом. Одна из основных моих целей — решить проблему специализированности приложения, для кого-либо вуза и создать единое приложение адаптированное под любой вуз.

Для того чтобы понять, каким функционалом требуется обладать самому приложению и какими возможностями должен обладать конструктор, необходимо было понять в чем именно заинтересованы учащиеся:

1. Быстрых отзвов на выполненные задания;
2. Интерактивных материалах курсов;
3. Электронной библиотеки ВУЗа;
4. Контроля успеваемости;
5. Улучшенной доступности материалов через мобильные устройства.

Рассмотрим процесс работы системы. Пользователь проходит обязательную авторизацию в сети для удаленного доступа и хранения собственных данных. Из базы данных университета пользователь может получить:

- Данные об успеваемости и хранить их локально, для работы в режиме офлайн.
- Расписания занятий, коллоквиумов, рейтингов, зачетов и экзаменов.
- Доступ к электронной библиотеке университета и сохранить электронные варианты книг и методичек в своем устройстве, для работы в режиме офлайн.
- Свежие новости, а так же сохранять их в закладках, для режима работы в офлайн.
- Данные преподавателей для дальнейшей возможности связи с ними.

Приложение имеет собственное облачное хранилище, в котором хранятся данные пользователей, а точнее ссылки на данные БД университета. Это позволит студентам и преподавателям удаленно хранить данных, что даст возможность использовать свои ресурсы на различных устройствах и избежать потерю данных.

На данный момент ведется разработка и тестирование приложения под мобильной ОС Android, а так же создание базового конструктора, который позволит быстро собирать специализированное приложение для любых ВУЗов. На данном этапе мною был реализован функционал позволяющий дистанционно отслеживать успеваемость. В нем было реализовано 4 базовые функции под названием CRUD:

CREATE — легко добавлять новые предметы;

READ — быстро и просто просматривать результаты;

UPDATE — изменять добавленные предметы;

DELETE — удалять добавленные предметы.

Литература

1. *Дейтел П., Дейтел Х., Дейтел Э., Моргано М.* Android для программистов. Создаем приложения.—Санкт-Петербург: Изд-во Санкт-Петербург, 2013.
2. *Анатольев А. Г.* Компоненты сетевого приложения. Клиент-серверное взаимодействие и роли серверов, 2013.—(4stud.info).
3. *Климов А.* Освой Android играючи.

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ УОЛЛАХА¹

Ю. Г. Никоноров (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Доклад основан на работе [5] и посвящен классификации обобщенных пространств Уоллаха, образующих примечательный класс компактных однородных пространств. Они были впервые рассмотрены в статье [4], где были названы три-локально-симметрическими пространствами. Здесь мы называем их *обобщенными пространствами Уоллаха*, следуя [6]. Подробное обсуждение свойств этих пространств можно найти в работах [3], [6, с. 6346–6347] или [5].

Пусть G/H — компактное однородное пространство с компактной полупростой группой Ли G и компактной подгруппой H . Обозначим через \mathfrak{g} и \mathfrak{h} соответственно алгебры Ли групп Ли G и H . Будем считать, что G/H почти эффективно, т. е. в $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ отсутствуют нетривиальные идеалы алгебры Ли \mathfrak{g} . Обозначим через $B = B(\cdot, \cdot)$ форму Киллинга алгебры Ли \mathfrak{g} . Поскольку группа Ли G компактна и полупроста, B отрицательно определена на \mathfrak{g} , т. е. $\langle \cdot, \cdot \rangle := -B(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение на \mathfrak{g} . Пусть \mathfrak{p} — $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональное дополнение к \mathfrak{h} в \mathfrak{g} . Ясно, что модуль \mathfrak{p} является $\text{Ad}(H)$ -инвариантным (в частности, $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -инвариантным) и естественно отождествляется с касательным пространством к G/H в точке eH . Каждая G -инвариантная риманова метрика на G/H порождает $\text{Ad}(H)$ -инвариантное скалярное произведение на \mathfrak{p} и наоборот. Следовательно, можно отождествить множество инвариантных римановых метрик на G/H с множеством $\text{Ad}(H)$ -инвариантных скалярных произведений на \mathfrak{p} .

Предположим, что однородное пространство G/H обладает следующим свойством: модуль \mathfrak{p} раскладывается в прямую сумму трех $\text{Ad}(H)$ -инвариантных и $\text{Ad}(H)$ -неприводимых попарно ортогональных относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ модулей, т. е. $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{p}_3$, таких, что $[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i] \subset \mathfrak{h}$ для $i \in \{1, 2, 3\}$. Однородные пространства с этим свойством называются *обобщенными пространствами Уоллаха*.

Известно много примеров таких пространств, например, многообразия полных флагов в комплексной и кватернионной плоскостях или в плоскости Кэли: $SU(3)/T_{\max}$, $Sp(3)/Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(1)$, $F_4/Spin(8)$. Эти пространства (известные как *пространства Уоллаха*) интересны также тем, что они допускают инвариантные римановы метрики положительной секционной кривизны (см. [7]).

¹Работа частично поддержана грантом 1452/GF4 Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2015–2017 гг. (Договор № 299 от 12 февраля 2015).

Таблица 1. Пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, соответствующие обобщенным пространствам Уоллаха G/H с простыми группами

N	\mathfrak{g}	\mathfrak{h}	d_1	d_2	d_3
1	$so(k+l+m)$	$so(k) \oplus so(l) \oplus so(m)$	kl	km	lm
2	$su(k+l+m)$	$s(u(k) \oplus u(l) \oplus u(m))$	$2kl$	$2km$	$2lm$
3	$sp(k+l+m)$	$sp(k) \oplus sp(l) \oplus sp(m)$	$4kl$	$4km$	$4lm$
4	$su(2l), l \geq 2$	$u(l)$	$l(l-1)$	$l(l+1)$	l^2-1
5	$so(2l), l \geq 4$	$u(1) \oplus u(l-1)$	$2(l-1)$	$2(l-1)$	$(l-1)(l-2)$
6	e_6	$su(4) \oplus 2sp(1) \oplus \mathbb{R}$	16	16	24
7	e_6	$so(8) \oplus \mathbb{R}^2$	16	16	16
8	e_6	$sp(3) \oplus sp(1)$	14	28	12
9	e_7	$so(8) \oplus 3sp(1)$	32	32	32
10	e_7	$su(6) \oplus sp(1) \oplus \mathbb{R}$	30	40	24
11	e_7	$so(8)$	35	35	35
12	e_8	$so(12) \oplus 2sp(1)$	64	64	48
13	e_8	$so(8) \oplus so(8)$	64	64	64
14	f_4	$so(5) \oplus 2sp(1)$	8	8	20
15	f_4	$so(8)$	8	8	8

Отметим, что каждое обобщенное пространство Уоллаха допускает 3-параметрическое семейство инвариантных римановых метрик, задаваемых скалярными произведениями $(\cdot, \cdot) = x_1 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_1} + x_2 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_2} + x_3 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_3}$, где x_1, x_2, x_3 являются положительными числами. В [4] показано, что каждое обобщенное пространство Уоллаха допускает по крайней мере одну инвариантную метрику Эйнштейна. Позже в работе [3] предпринято детальное исследование инвариантных метрик Эйнштейна на обобщенных пространствах Уоллаха. В частности, было доказано, что каждое такое пространство допускает не более четырех (с точностью до гомотетии) инвариантных метрик Эйнштейна. В недавних работах [1, 2] обобщенные пространства Уоллаха изучены с точки зрения потока Риччи.

Обозначим через d_i размерность модуля \mathfrak{p}_i , где $i \in \{1, 2, 3\}$. Основным результатом является следующая

Теорема 1. *Связное и односвязное компактное однородное пространство G/H является обобщенным пространством Уоллаха тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

- 1) G/H — прямое произведение трех неприводимых симметрических пространств компактного типа;
- 2) Группа Ли G проста, а пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ содержится в Таблице 1;
- 3) $G = F \times F \times F \times F$ и $H = \text{diag}(F) \subset G$ для некоторой связной и односвязной компактной простой группы Ли F , причем имеет место следующее описание на уровне алгебр Ли:

$$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{f}, \text{diag}(\mathfrak{f})) = \{(X, X, X, X) \mid X \in \mathfrak{f}\},$$

где \mathfrak{f} — алгебра Ли группы Ли F и (с точностью до перестановки),

$$\mathfrak{p}_1 = \{(X, X, -X, -X) \mid X \in \mathfrak{f}\},$$

$$\mathfrak{p}_2 = \{(X, -X, X, -X) \mid X \in \mathfrak{f}\},$$

$$\mathfrak{p}_3 = \{(X, -X, -X, X) \mid X \in \mathfrak{f}\}.$$

Литература

1. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P.* The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces // *Diff. Geometry and its Appl.*—2014.—Vol. 35.—P. 26–43.
2. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P.* The Ricci flow on some generalized Wallach spaces // *Geometry and its Appl. Proceedings in Mathematics & Statistics* / eds. V. Rovenski, P. Walczak.—Springer.—2014.—Vol. 72.—P. 3–37.
3. *Lomshakov A. M., Nikonorov Yu. G., Firsov E. V.* Invariant Einstein metrics on three-locally-symmetric spaces // *Siberian Adv. Math.*—2004.—Vol. 14, № 3.—P. 43–62.
4. *Nikonorov Yu. G.* On a class of homogeneous compact Einstein manifolds // *Siberian Math. J.*—2000.—Vol. 41, № 1.—P. 168–172.
5. *Nikonorov Yu. G.* Classification of generalized Wallach spaces // *Preprint.*—2014.—(arXiv:1411.3131).
6. *Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavskii V. V.* Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // *J. of Mathematical Sciences.*—2007.—Vol. 146, № 7.—P. 6313–6390.
7. *Wallach N.* Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature // *Annals of Mathematics, Second Series.*—1972.—Vol. 96.—P. 277–295.

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ
ПРОЦЕССА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ РУКОЙ РОБОТА

М. М. Ошхунов (Россия, Нальчик; КБГУ),
М. А. Джанкулаева (Россия, Нальчик; КБГУ),
Л. Ю. Бесланева (Россия, Нальчик; КБГУ)

Рассмотрим следующую задачу. Из точки $A(x_0, y_0)$ необходимо перенести в точку $B(x, y)$ тело массы m в условиях действия гравитационного поля.

Для решения задачи предлагается следующий алгоритм переноса. После взятия тела в точке A робот мгновенно прикладывает постоянную силу в направлениях Ox , Oy . Материальная точка при этом, очевидно, будет двигаться равноускорено по двум направлениям до определенного момента t_0 после чего отключаются силы, вызвавшие это движение. Тело после этого движется с постоянной скоростью в течение времени t_1 (или движется по баллистической траектории в случае свободного полета). Затем включаются постоянные тормозящие силы, которые опускают тело в точку B с нулевой абсолютной скоростью (рис. 1).

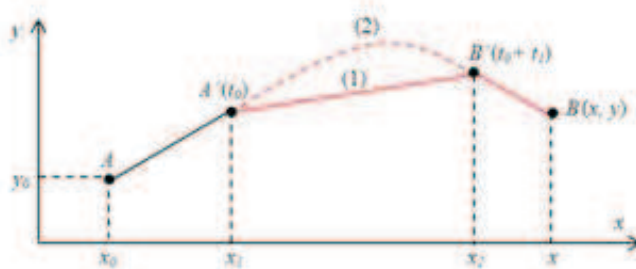


Рис. 1. Два возможных алгоритма переноса тела из точки A в B :
(1) — равномерный перенос; (2) — движение по баллистической траектории.

Выпишем основные уравнения движения материальной точки для описания этих траекторий

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x = C_1^0, & m\ddot{y} &= F_y = C_2^0 - mg, \\ x(0) &= x_0, & \dot{x}(0) &= \emptyset, & y(0) &= y_0, & \dot{y}(0) &= y_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Решения этих уравнений имеют соответственно вид

$$x(t) = C_1^0 t^2 / 2 + x_0, \quad y(t) = (C_2^0 - mg)t^2 / 2 + y_0. \quad (2)$$

К моменту времени t_0 координаты тела и его скорости по направлениям, очевидно, равны

$$x(t_0) = C_1^0 t_0^2 / 2 + x_0 \equiv x_1, \quad \dot{x}(t_0) = C_1^0 t_0 = V_x^1,$$

$$y(t_0) = C_2^0 t_0^2 / 2 + y_0 \equiv y_1, \quad \dot{y}(t_0) = (C_2^0 - mg)t_0 = V_y^1.$$

Таким образом, координаты точки A' равны $(x_1; y_1)$, а скорости V_x^1, V_y^1 . Далее тело движется равномерно или по баллистической траектории в течение времени t_1 ; в первом случае его координаты (точка B'), очевидно, будут равны

$$x_2 = x_1 + V_x^1 t_1, \quad y_2 = y_1 + V_y^1 t_1. \quad (3)$$

В случае баллистической траектории (2) имеем [1]

$$\begin{aligned} x(t) &= (C_1^0 t^2) / 2 + V_x^1 t + x_1, & x(t_1) &= x_2, \\ y(t) &= (C_2^0 - mg)t^2 / 2 + V_y^1 t + y_1, & y(t_1) &= y_2, \\ \dot{x}(t_1) &= C_1^0 t_1 + V_x^1, & \dot{y}(t_1) &= (C_2^0 - mg)t_1 + V_y^1. \end{aligned} \quad (4)$$

Следующий шаг — перемещение тела из точки B' в точку B так, чтобы скорость в точке $B(x; y)$ была нулевой. Очевидно, для этого необходимо приложить тормозящие силы. Уравнения в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -C_1^1, & m\ddot{y} &= -C_2^1 - mg, \\ x(0) &= x_2, & y(0) &= y_2, \\ \dot{x}(0) &= V_x^1, & \dot{y}(0) &= V_y^1. \end{aligned} \quad (5)$$

В случае баллистической траектории начальные значения скорости определяются из формул (4). Решения этих уравнений имеют вид [2]

$$x(t) = (-C_1^1 t^2) / 2 + V_x^1 t + x_2, \quad y(t) = ((-C_2^1 - mg)t^2) / 2 + V_y^1 t + y_2, \quad (6)$$

В случае баллистической траектории начальные скорости определяются из формул (4). Потребуем, чтобы $\dot{x}(t_2) = 0, \dot{y}(t_2) = 0$, где t_2 — время торможения. Выберем это время из условия $t_2 = \frac{V_x^1}{C_1^1}$, а нагрузку C_2^1 из условия отсутствия скорости по направлению Oy

$$(-C_2^1 - mg) \frac{V_x^1}{C_1^1} + V_y^1 = 0. \quad (7)$$

Условие (7) позволяет определять нагрузку C_2^1 : $C_2^1 = \frac{V_y^1 C_1^1}{V_x^1} - mg$. Координаты тела к моменту времени $t = t_2$ равны

$$\begin{aligned} -C_1^1 \left(\frac{V_x^1}{C_1^1} \right)^2 / 2 + V_x^1 \frac{V_x^1}{C_1^1} + x_2 &= \frac{(V_x^1)^2}{2C_1^1} + x_2 = x_3, \\ -\frac{C_1^1 V_y^1}{2V_x^1} \left(\frac{V_x^1}{C_1^1} \right)^2 + V_y^1 \frac{V_x^1}{C_1^1} + y_2 &= \frac{V_x^1 V_y^1}{2C_1^1} + y_2 = y_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Потребуем, чтобы $x_3 = x$ (см. рис. 1), т. е. имеет место точное «приземление» по координате Ox

$$C_1^1 = (V_x^1)^2 / (2(x - x_2)). \quad (9)$$

Тогда невязка по оси Oy очевидно будет равна

$$y^* = y - y_2 - \frac{V_x^1 V_y^1}{2C_1^1} = y - y_2 - \frac{V_y^1}{V_x^1} (x - x_2). \quad (10)$$

Последний шаг работа — пройти это расстояние по оси Oy с постоянной (небольшой) скоростью.

Литература

1. *Ошхунов М. М., Нагоев З. В., Сенов Х. М., Хамуков Ю. Х., Пшенокова И. А.* Методы расчета прочностных характеристик виртуальных прототипов одноосных роботов под действием экстремальных механических и тепловых нагрузок // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН.—2015.—№ 1 (63).—С. 42–49.
2. *Ошхунов М. М., Нагоев З. В., Сенов Х. М., Хамуков Ю. Х., Пшенокова И. А.* Модели оценки экстремальных нагрузок интегрированных виртуальных прототипов мобильных одноосных роботов // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН.—2015.—№ 1 (63).—С. 50–54.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

С. В. Синегубов (Россия, Воронеж; ВИ МВД)

Системы охраны и защищенные телекоммуникационные системы можно описать с помощью системы массового обслуживания класса $A/B/s/0$ или $A/B/s/m$, где s — количество приемных устройств, m — количество поступающей информации. В классической теории связи и в теории массового обслуживания исследуются, прежде всего, два вида математических моделей, отличающихся одна от другой характером требований, которые в момент их предъявления к системе не могут быть немедленно выполнены. Однако сущность проводной связи наилучшим образом отображает третий вид модели, то есть модель с повторением. В данной модели необслуженная заявка, поступившая в систему массового обслуживания, хотя и уходит из системы, но только временно, то есть происходит многократная попытка для получения информации приемным устройством.

Для расчета проводных сетей обычно используется метод Эрланга. В соответствии с этим методом для количества вызовов, поступающим по N линиями определяется новое количество соединительных линий Nn таким образом, чтобы новая величина потери заявки не превысила установленную границу, определяемую распределением Эрланга. В связи с тем, что в методе Эрланга не учитываются повторные вызовы, а каждое требование, которое наталкивается на неудачу, считается утраченным, при его использовании имеет место существенно большая разница между предложением и нагрузкой, чем это бывает в действительности, особенно в случаях сильно нагруженной системы. При описании систем, обслуживающих поступающие заявки, модель Джонина — Седола является грубым приближением к реальной ситуации. Главным недостатком является здесь пренебрежение всеми причинами неудачи вызовов кроме причины, которая не учитывает такие факторы потери заявки как техническая неисправность, неправильные действия вызывающего абонента и др. Поэтому модель затруднительно применять в системах массового обслуживания большой размерности.

Более детальной и реалистической моделью телефонной связи в телефонной системе с повторными вызовами, чем модель Джонина–Седола, занимался Эллдин [1–2], которая представляет собой одну из основных теоретических работ в области повторных вызовов. По сравнению с моделью Джонина — Седола модель Эллдина расширена в двух направлениях:

1. Интенсивность потока требований, поступающих в систему, может быть зависимой от количества занятых линий и от количества требований, которые находятся в состоянии повторений.
2. Вызов, для которого нашлась свободная линия, еще не может считаться успешным в последующих фазах соединения.

Все перечисленные модели имеют описательный характер и показывают степень приближенности к реальным системам. В работе предлагается более эффективная математическая модель, для которой были проверены законы распределения, описывающие системы с повторными вызовами, различными критериями согласия. Было проверено, что время обслуживания заявок не является распределенным по закону Пуассона, а распределено по нормальному закону. В результате чего время обслуживания заявки на этапе планирования можно существенно уменьшить.

Для получения оценок временных интервалов выполнения заявок в системе в работе используются обобщения неравенств Коши–Буняковского, разработанные в [3–4]. Вероятностные подходы из данной работы также могут найти применения в теории интерполяции с использованием Гауссианов [5–7].

Литература

1. Думачев В. Н., Родин В. А. Эволюция антагонистически взаимодействующих популяций на базе двумерной модели Ферхюльста — Пирла // *Мат. моделирование.*—2005.—Т. 17, № 7.—С. 11–22.
2. Синегубов С. В., Родин В. А. Применение метода наименьших квадратов для выравнивания экспериментальных данных, характеризующих поток информации интенсивного режима работы ПЦО // *Вестник Воронежского института МВД России.*—1999.—№ 2.—С. 152–155.
3. Ситник С. М. Уточнения и обобщения классических неравенств // *Исслед. по мат. анализу / Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев.*—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А.—2009.—С. 221–266.—(Итоги науки. ЮФО. Мат. форум. Том 3).
4. *Sitnik S. M. Generalized Young and Cauchy–Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey.*—2010.—51 p.—(arXiv: 1012.3864).
5. Киселев Е. А., Минин Л. А., Новиков И. Я., Ситник С. М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // *Мат. заметки.*—2014.—Т. 96, № 2.—С. 239–250.
6. Тимашов А. С., Ситник С. М. Вычислительные аспекты метода квадратичной экспоненциальной интерполяции в задачах теории сигналов // *Новые информационные технологии в автоматизированных системах: Материалы семнадцатого научно-практического семинара.*—М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2014.—С. 292–300.
7. Тимашов А. С., Ситник С. М. Расчет конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // *Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Сер. Математика, Физика.*—2013.—№ 19 (162), вып. 32.—С. 184–186.

О СВЯЗИ НЕРАВЕНСТВ М. Г. КРЕЙНА И Е. А. ГОРИНА
В ТЕОРИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ

С. М. Ситник (Россия, Воронеж; ВИ МВД)

Нам понадобится следующее элементарное тригонометрическое неравенство, ссылку на которое не удалось найти в литературе.

Теорема 1. При любых действительных $x_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$, справедливо неравенство

$$\sin^2 \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \leq n \cdot \sum_{k=1}^n \sin^2(x_k).$$

Это неравенство следует из аналогичного более простого

$$\left| \sin \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n |\sin(x_k)|,$$

которое очевидным образом доказывается по индукции, а в книгах по неравенствам обычно приводится с ненужными ограничениями без модулей в правой части. Результат теоремы 1 получается отсюда применением неравенства Коши — Буняковского.

Следствие 1. При любых действительных $x_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \sin^2 \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) &\leq n \cdot \sum_{k=1}^n \cos^2(x_k), \quad n — \text{четное}, \\ \cos^2 \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) &\leq n \cdot \sum_{k=1}^n \cos^2(x_k), \quad n — \text{нечетное}. \end{aligned}$$

Определения и основные свойства положительно определенных функций см., например, в [1–2]. Так, в работе Е. А. Горина [1] приведено двухточечное неравенство М. Г. Крейна, а также с помощью теоремы Бохнера выведено его многоточечное обобщение. Некоторые другие обобщения получены также в [2].

Интересно отметить, что приведенные элементарные неравенства, по-видимому, не вытекают из свойств выпуклости-вогнутости тригонометрических функций.

Рассмотрим случай непрерывной положительно определенной функции $f(x)$ над действительным полем (см. [2]). В этом случае доказана следующая

Теорема 2. Для указанной функции $f(x)$ и любых действительных чисел x_k, y_k , $1 \leq k \leq n$, справедливо неравенство

$$2 \left(f(0) - f \left(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k) \right) \right) \leq 2n \sum_{k=1}^n (f(0) - f(x_k - y_k)).$$

Целью получения оценки из теоремы 2 был прямой вывод неравенства Е. А. Горина из неравенства М. Г. Крейна (см. [1]). Теорема 2 также справедлива для вероятностных характеристических функций симметричных распределений, при этом $f(0) = 1$.

Следствие 2. *Многоточечное неравенство Е. А. Горина выводится из двухточечного неравенства М. Г. Крейна и неравенства теоремы 2.*

В [2] рассмотрены также приложения неравенств для положительно определенных функций к задачам интерполяции с использованием квадратичных экспонент — функций Гаусса [3–7]. Применение в процессе доказательства неравенства Коши–Буняковского позволяет использовать разработанный автором метод для обобщений этого неравенства [8–10] для дальнейшего усиления оценок.

Литература

1. Горин Е. А. Положительно определенные функции как инструмент математического анализа // *Фундамент. и прикл. математика*.—2012.—Т. 17, № 7.—С. 67–95.
2. Певный А. Б., Ситник С. М. Строго положительно определенные функции, неравенства М. Г. Крейна и Е. А. Горина // *Новые информационные технологии в автоматизированных системах: Материалы восемнадцатого научно-практического семинара*.—М.: Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2015.—С. 247–254.
3. Киселев Е. А., Минин Л. А., Новиков И. Я., Ситник С. М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // *Мат. заметки*.—2014.—Т. 96, № 2.—С. 239–250.
4. Тимашов А. С., Ситник С. М. Вычислительные аспекты метода квадратичной экспоненциальной интерполяции в задачах теории сигналов // *Новые информационные технологии в автоматизированных системах: Материалы семнадцатого научно-практического семинара*.—М.: Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2014.—С. 292–300.
5. Тимашов А. С., Ситник С. М. Расчет конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // *Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Сер. Математика, Физика*.—2013.—№ 19 (162), вып. 32.—С. 184–186.
6. Zhuravlev M. V., Kiselev E. A., Minin L. A., Sitnik S. M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // *J. of Math. Sci.: Springer*, 2011.—Vol. 173, № 2.—P. 231–241.
7. Журавлев М. В., Минин Л. А., Ситник С. М. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // *Научные ведомости Белгородского государственного университета*.—2009.—№ 13 (68), вып. 17/2.—С. 89–99.
8. Ситник С. М. Уточнения и обобщения классических неравенств // *Исслед. по мат. анализу* / Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А.—2009.—С. 221–266.—(Итоги науки. ЮФО. Мат. форум. Том 3).
9. Sitnik S. M. Generalized Young and Cauchy–Bunyakovsky Inequalities with Applications: a survey.—2010.—51 p.—(arXiv: 1012.3864).
10. Ситник С. М. Уточнение интегрального неравенства Коши — Буняковского // *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физико-мат. науки*.—2000.—Вып. 9.—С. 37–45.

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БУШМАНА — ЭРДЕЙИ

С. М. Ситник (Россия, Воронеж; ВИ МВД)

Теория операторов преобразования составляет самостоятельный раздел современной математики, имеющий многочисленные приложения [1–4]. Важным классом операторов преобразования являются операторы Бушмана — Эрдейи.

Операторы Бушмана — Эрдейи имеют многочисленные модификации. Автором предложена удобная классификация их различных вариантов. Операторы Бушмана — Эрдейи первого рода содержат ядра, выражающиеся через функции Лежандра первого рода. Их предельным случаем являются операторы нулевого порядка гладкости, играющие важную роль в различных приложениях. Операторы Бушмана — Эрдейи второго рода содержат ядра, выражающиеся через функции Лежандра второго рода. Комбинация операторов первого и второго родов приводит к операторам Бушмана — Эрдейи третьего рода. При специальном выборе параметров они сводятся к унитарным операторам преобразования, которые автор назвал унитарными операторами преобразования Сони́на — Катрахова и Пуассона — Катрахова, в честь В. В. Катрахова, начавшего их изучение.

Изучение разрешимости и обратимости данных операторов было начато в 1960-х гг. в работах Р. Бушмана и А. Эрдейи. Операторы Бушмана — Эрдейи или их аналоги изучались также в работах E. T. Copson, T. P. Higgins, Ta Li, E. R. Love, Динь Хоанг Ань, В. И. Смирнова, В. В. Катрахова, Н. А. Вирченко, А. А. Килбаса, О. В. Скоромник, Б. Рубина и ряде других работ. При этом изучались задачи о решении интегральных уравнений с этими операторами, их факторизации и обращения.

Важность операторов Бушмана — Эрдейи во многом обусловлена их многочисленными приложениями [2–12]. Например, они встречаются в следующих вопросах теории уравнений с частными производными: при решении задачи Дирихле для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу в четверти плоскости и установлении соотношений между значениями решений уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу на многообразии начальных данных и характеристике, теории преобразования Радона, при исследовании краевых задач для различных уравнений с существенными особенностями. Автором было показано [7–8], что операторы Бушмана — Эрдейи являются операторами преобразования для дифференциального выражения Бесселя и изучены их специальные свойства именно как операторов преобразования.

В докладе рассматриваются приложения операторов преобразования Бушмана — Эрдейи различных классов к вложению пространств И. А. Киприянова в весовые пространства С. Л. Соболева, формулам для решений уравнений с частными производными с операторами Бесселя, уравнениям Эйлера — Пуассона — Дарбу, включая лемму Копсона, построению операторов обобщенного

сдвига, операторам Дункла, преобразованию Радона, построению обобщенных сферических гармоник и B -гармонических полиномов, а также доказательству унитарности в пространстве Лебега обобщений классических операторов Харди. Приведен обзор результатов В. В. Катрахова по приложению операторов преобразования к теории псевдодифференциальных операторов и изучению введенного им нового класса краевых задач с K -следом с существенными особенностями в решениях.

Литература

1. *Carroll R. W.* Transmutation, Scattering Theory and Special Functions.—North Holland, 1982.
2. *Carroll R. W.* Transmutation Theory and Applications.—North Holland, 1986.
3. *Sitnik S. M.* Buschman–Erdelyi transmutations, classification and applications // *Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations* / Ed. by M. V. Dubatovskaya, S. V. Rogosin).—Cottenham: Cambridge Sci. Publ., 2013.—P. 171–201.—URL: <http://arxiv.org/abs/1304.2114v1>
4. *Ситник С. М.* Операторы преобразования и их приложения // *Исслед. по современному анализу и мат. моделированию* / Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев).—Владикавказ, 2008.—С. 226–293.—URL: <http://arxiv.org/abs/1012.3741>
5. *Sitnik S. M.* Some problems in the modern theory of transmutations // *Spectral theory and differential equations. International conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday.*—Kharkiv, 2012.—P. 101–102.
6. *Sitnik S. M.* Buschman–Erdelyi transmutations: classification, analytical properties and applications to differential equations and integral transforms // *International Conference “Mathematics Days in Sofia”. 7th Minisymposium TMSF-14 in frames of MDS-2014. Dedicated to the 80th Anniversary of Professor Ivan Dimovski, Corr.—Member of Bulgarian Academy of Sciences.*—Sofia, 2014.—P. 20–21.
7. *Ситник С. М.* Унитарность и ограниченность операторов Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости.— Владивосток: Институт автоматки и процессов управления ДВО АН СССР, 1990.—44 с.—(Препринт).
8. *Ситник С. М.* Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана — Эрдейи // *Докл. АН СССР.*—1991.—Т. 320, № 6.—С. 1326–1330.
9. *Ситник С. М.* Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сони́на — Пуассона // *Научные ведомости Белгородского государственного университета.*—2010.—Вып. 18, № 5 (76).—С. 135–153.
10. *Ситник С. М.* О явных реализациях дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложениях к дифференциальным уравнениям // *Докл. Адыгской (Черкесской) Междун. академии наук.*—2010.—Т 12, № 2.—С. 69–75.
11. *Ситник С. М.* О представлении в интегральном виде решений одного дифференциального уравнения с особенностями в коэффициентах // *Владикавк. мат. журн.*—2010.—Т. 12, вып. 4.—С. 73–78.
12. *Ситник С. М.* Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений // *Вестник Самарского гос. ун-та. Естеств. серия.*—2008.—№ 8/1 (67).—С. 237–248.

РАЗРАБОТКА УСТРОЙСТВА ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ ИГРЕ НА ПИАНИНО

П. А. Скворцов (Россия, Владикавказ; СОГУ)

Все больше миниатюрных устройств создается в помощь людям. Предлагается разработка устройства, позволяющего пользователю, не имеющему опыта игры на пианино, воспроизвести мелодию музыкального произведения. Устройство состоит из светодиодной ленты, которая закрепляется на крышке пианино или фортепьяно и управляющего блока включающего в себя плату Intel Galileo Gen 2 и миниатюрный микрофон. Пользователю предоставлен дружественный интерфейс реализованный в виде приложения на Android, связанный с устройством посредством технологии Bluetooth, с помощью которого происходит управление устройством. Обучающийся должен будет загрузить, либо выбрать уже загруженный, музыкальный файл формата .mid и приступить к обучению. Устройство переведет файл в последовательность зажиганий светодиодов на ленте, причем каждому светодиоду соответствует клавиша над которой он расположен. Пользователь должен нажимать подсвеченные клавиши, а встроенный в устройство микрофон будет проверять правильность нажатий и сообщать об ошибках. Для реализации устройства используется контроллер Intel Galileo Gen 2 с процессором Intel® Quark SoC X1000 который оснащен слотом для карты памяти MicroSD, что позволяет оперировать файлами больших размеров. Файлы представляют из себе композиции различных мелодий, исполняемых на пианино в широко распространенном формате MIDI. Формат файла содержит набор пар 8-мибитных байтов, где старший байт (статус-байт) дает команду устройству (компьютеру с установленным ПО для чтения MIDI-файлов либо синтезатору), а младший байт (байт данных) содержит информацию сопутствующую команде. В представляемом устройстве значимыми являются только 2 команды из огромного многообразия команд необходимых для профессиональных музыкальных систем. Это команды взятия ноты ('90' в 16-тиричном представлении) и отпускания ноты ('80' в 16-тиричном представлении). За этими командами следуют байты данных, содержащие в себе номер ноты, громкость и динамику нажатий клавиш. Для извлечения из файла последовательности нот необходимо выбрать из файла, необходимые команды и провести соответствие между ними и клавишами на клавиатуре пианино. Следующим этапом является передача последовательности нажатий клавиш на цифровую светодиодную ленту. Для это используется разработанная автором библиотека, которая составляет из номера светодиода, считая от начала ленты, бинарную последовательность, которая представляет из себя набор байт, по три байта для каждого светодиода, которые в совокупности представляют из себя определенный цвет в формате RGB. Эти три байта и задают цвет светодиода, причем первые три байта предназначены для первого светодиода, вторые три для второго и так далее. Контроллер ленты (в проекте используется лента с контроллером WS2811) воспринимает данные в

виде электромагнитных колебаний, поэтому контроллер Intel Galileo переводит полученную на предыдущем этапе последовательность байт, в электромагнитные колебания, причем единице соответствует подача 5 вольт длительностью 1.2 мкс и последующая подача 0 вольт длительностью 1.3 мкс, а нулю соответствует подача 5 вольт длительностью 0.5 мкс и последующая подача 0 вольт в течение 2.0 мкс. Разные состояния ленты должны быть разделены промежутком в не менее чем 50 мкс для инициализации ленты. Далее следует ожидание нажатия пользователем соответствующей клавиши на пианино и проверка верно ли нажата клавиша с помощью микрофона и таблицы соответствий нот и их частот заложенных в контроллер. На данный момент система находится в состоянии прототипа, а именно был отработан алгоритм действия устройства на платформе Arduino при помощи библиотеки для управления светодиодной лентой FastLED.

Литература

1. *Соммер У.* Программирование микроконтроллерных плат Arduino/Freeduino // БХВ-Петербург, 2012.—С. 70–100.
2. URL: <https://www.adafruit.com/about>
3. Signal line 256 Gray level 3 channel Constant current LED drive IC.—URL: <http://www.adafruit.com/datasheets/WS2811.pdf>.
4. *Федоров А.* MIDI в деталях. 2003.—URL: <http://www.muzoborudovanie.ru/articles/midi/midi1.php>.

О СВОЙСТВАХ ω -ВЕЕРНЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

М. М. Сорокина (Россия, Брянск; БГУ)

Рассматриваются только конечные группы. Используемые определения и обозначения можно найти в [1–2]. Пусть ω — непустое подмножество множества \mathbb{P} всех простых чисел, \mathfrak{G}_ω — класс всех ω -групп, $O_\omega(G)$ — \mathfrak{G}_ω -радикал группы G . Функции $f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ и $\delta : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$ называются ωF -функцией и $\mathbb{P}FR$ -функцией соответственно. Формация $\mathfrak{F} = (G : G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/G_{\delta(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G))$ называется ω -веерной формацией с ω -спутником f и направлением δ и обозначается $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ [1].

Пусть \mathfrak{H} и \mathfrak{F} — классы групп. Тогда $\mathfrak{H}\mathfrak{F} = (G : G \text{ имеет нормальную подгруппу } N \in \mathfrak{H} \text{ с } G/N \in \mathfrak{F})$. Направление δ ω -веерной формации называется b -направлением, если $\delta(q)\mathfrak{N}_q = \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$; p -направлением, если $\mathfrak{G}_q\delta(q) = \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$; bp -направлением, если δ является одновременно b -направлением и p -направлением [2].

Пусть \mathfrak{F} — класс групп. Через $M(\mathfrak{F})$ обозначается класс всех \mathfrak{F} -критических групп (см., например, [3]).

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ — ω -веерная формация с произвольным направлением δ и внутренним ω -спутником f . Тогда $M(f(p)) \subseteq M(\mathfrak{F}) \cup \mathfrak{F}$ для любого $p \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ — ω -веерная формация с bp -направлением δ и внутренним ω -спутником f , $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. Если всякая минимальная нормальная подгруппа любой \mathfrak{F} -критической группы является абелевой и содержит $f(p)$ -корадикал группы, то $M(f(p)) \cap \mathfrak{N}_p\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$.

Литература

1. Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω -веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. заметки.—2002.—Т. 71, вып. 1.—С. 43–60.
2. Ведерников В. А. О новых типах ω -веерных формаций конечных групп // Укр. мат. конгресс. Алг. і теор. чисел. Праці. Киев.—2002.—С. 36–45.
3. Семенчук В. Н. Минимальные не \mathfrak{F} -группы // Алгебра и логика.—1979.—Т. 18, № 3.—С. 348–382.

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КВАДРАТИЧНЫХ
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИЙ
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ
ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ

А. С. Тимашов (Россия, Воронеж; ВИ МВД)

Рассмотрим задачу о приближении достаточно произвольной функции в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Для численного анализа и приложений основную роль играют приближения данного типа конечными суммами, которые возникают при усечении соответствующих рядов. Исследованию таких конечных приближений и посвящена данная работа. Историю вопроса, основные результаты и многочисленные приложения см. в [1–5]. Более точно, будет исследована следующая

Задача: рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, заданную на всей оси $x \in \mathbb{R}$ и некоторый параметр $\sigma > 0$, который в приложениях играет роль среднеквадратичного отклонения. Будем искать интерполирующую функцию $f_{\text{approx}}(x)$, так же определенную на всей прямой, которая представляется в виде ряда по целочисленным сдвигам функции Гаусса

$$f_{\text{approx}}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}\right)$$

и совпадает с исходной функцией во всех целых точках.

Известны два подхода к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета-функций Якоби [1]. Как показано в [2–4], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели. Другой подход разрабатывался в [2], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Такой подход имеет определенную вычислительную ценность, но она достигается ценой существенного усложнения алгоритма, при этом вычисления возможны в достаточно узких диапазонах параметров и с небольшим числом разрядов в результатах. Поэтому в настоящей работе предлагается наиболее простой прямой метод решения поставленной задачи, основанный на сведении ее к решению конечных систем линейных уравнений, см также [6–10]. Существенным препятствием для развития этого метода являлось отсутствие результатов по доказательству однозначной разрешимости соответствующих систем линейных уравнений. В настоящей работе получены результаты, устанавливающие требуемую однозначную разрешимость линейных систем.

Перечислим основные результаты работы.

1. Доказано, что при всех допустимых значениях параметров исследуемые конечномерные системы линейных уравнений имеют единственное решение. Проведено компьютерное исследование решений полученных конечномерных систем линейных уравнений численными методами при помощи компьютерного пакета MATHEMATICA при широком наборе управляющих параметров.

2. Рассмотрены приложения полученных теоретических и численных результатов к теории фильтрации электрических сигналов. Произведен численный расчет и анализ погрешности для реализации фильтров, близких к идеальным.

Литература

1. *Maz'ya V., Schmidt G.* Approximate approximations.—University of Linköping, 2007.
2. *Zhuravlev M. V., Kiselev E. A., Minin L. A., Sitnik S. M.* Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // *J. of Math. Sci.*—2011.—Vol. 173, № 2.—P. 231–241.
3. *Журавлев М. В., Минин Л. А., Ситник С. М.* О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // *Научные ведомости Белгородского государственного университета.*—2009.—№ 13 (68), вып. 17/2.—С. 89–99.
4. *Киселев Е. А., Минин Л. А., Новиков И. Я., Ситник С. М.* О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // *Мат. заметки.*—2014.—Т. 96, № 2.—С. 239–250.
5. *Певный А. Б., Ситник С. М.* Строго положительно определенные функции, неравенства М. Г. Крейна и Е. А. Горина // *Новые информационные технологии в автоматизированных системах: Материалы восемнадцатого научно-практического семинара.*—М.: Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2015.—С. 247–254.
6. *Ситник С. М., Тимашов А. С.* Вычислительные аспекты метода квадратичной экспоненциальной интерполяции в задачах теории сигналов // *Новые информационные технологии в автоматизированных системах: Материалы семнадцатого научно-практического семинара.*—М.: Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2014.—С. 292–300.
7. *Ситник С. М., Тимашов А. С.* Расчет конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика, Физика.*—2013.—№ 19 (162), вып. 32.—С. 184–186.
8. *Ситник С. М., Тимашов А. С.* Приложения экспоненциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусса // *Вестник Воронежского гос. ун-та инженерных технологий.*—2013.—№ 2 (56).—С. 90–94.
9. *Ситник С. М., Тимашов А. С.* Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции сигналов // *Вестник Воронежского института МВД России.*—2014.—№ 2.—С. 163–171.
10. *Ситник С. М.* Обобщенные дискретные преобразования Фурье и их спектральные свойства // *Новые информационные технологии в автоматизированных системах: Материалы семнадцатого научно-практического семинара.*—2014.—М.: Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.—С. 281–291.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ
ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ
В ОРТОТРОПНОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Ю. С. Федяев (Россия, Орел; ОГУ)

Стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости в недеформируемом анизотропном однородном слое пористой среды постоянной толщины с тензором проницаемости K описывают обобщенный потенциал φ и функцией тока ψ . Они удовлетворяют в области фильтрации D системе уравнений [1]:

$$K_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad K_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1)$$

Здесь x, y — декартовы координаты в плоскости основания слоя, $K_{ij}, i, j = 1, 2$ — постоянные компоненты тензора проницаемости. В ортотропном слое тензор проницаемости симметричен ($K_{12} = K_{21}$).

Область фильтрации D ограничивает контур питания L_1 или непроницаемая граница L_2 , которые в общем случае будем обозначать L . Граница L является прямой линией. На границе L_1 должно выполняться условие

$$\varphi^+(z, t) = \text{const}, \quad z \in L_1, \quad (2)$$

а на L_2 — условие

$$\psi^+(z, t) = \text{const}, \quad z \in L_2. \quad (3)$$

Здесь $z = x + iy$, t — время, символ «+» («-») означает предельное значение функции при подходе к границе со стороны (с противоположной стороны) орта нормали к ней. Нормаль к границе L направлена внутрь области D .

Подвижная граница Γ_t между различными жидкостями делит область фильтрации на части D_1 и D_2 . В области D_1 движется жидкость вязкости μ_1 и плотности ρ_1 , а в области D_2 — жидкость вязкости μ_2 и плотности ρ_2 . Полагаем, что при движении одна жидкость полностью замещает другую и на границе раздела жидкостей капиллярные силы пренебрежимо малы. Тогда условия непрерывности давления и расхода жидкости имеют вид:

$$\begin{aligned} \mu_1 \varphi^+(z, t) - \mu_2 \varphi^-(z, t) &= (\rho_2 - \rho_1) \Pi(z, t), \\ \psi^+(z, t) &= \psi^-(z, t), \quad z \in \Gamma_t, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Pi(z, t)$ — потенциал массовой силы. Нормаль к границе Γ_t направлена в область D_1 .

Положение границы Γ_t на плоскости z в любой момент времени $t > 0$ задаем параметрическим уравнением (s — параметр)

$$z = z(t, s) \quad (x = x(t, s), \quad y = y(t, s)), \quad z \in \Gamma_t. \quad (5)$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение границы Γ_t известно

$$z_0 = z(0, s) \quad (x_0 = x(0, s), y_0 = y(0, s)), \quad z \in \Gamma_0. \quad (6)$$

Дифференциальные уравнения движения границы Γ_t имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_t, \quad (7)$$

где v_x, v_y — проекции скорости фильтрации. Первое и второе уравнения системы (1) определяют проекции v_x и v_y соответственно.

Таким образом, задано положение границ Γ_0, L , тензор проницаемости K . Необходимо найти положение границы Γ_t (5) при $t > 0$. Решение задачи состоит в интегрировании системы уравнений (1), (7) с учетом граничных условий (2)–(4) и начальных условий (6).

Поставленная задача сводится к решению системы интегрального уравнения и дифференциальных уравнений движения границы Γ_t [2, 3]. Граница L учитывается с помощью теоремы сопряжения на прямой. Построен численный алгоритм решения задачи на основе метода дискретных особенностей.

Исследована эволюция границы раздела жидкостей к эксплуатационной скважине. Получены зависимости времени достижения границей Γ_t скважины от параметров задачи. Изучено влияние анизотропии грунта, границ области фильтрации, различия физических свойств жидкостей на движение границы раздела жидкостей.

Литература

1. Пивень В. Ф. Математические модели фильтрации жидкости.—Орел: Изд-во ФГБОУ ВПО ОГУ, ПФ «Картуш», 2015.—408 с.
2. Федяев Ю. С. Математическое моделирование эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей в анизотропном слое пористой среды, ограниченном контуром питания // Ученые записки Орловского гос. ун-та. Сер. Естеств., техн. и мед. науки.—2013.—№ 3 (53).—С. 95–101.
3. Федяев Ю. С. Математическое моделирование эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей в анизотропном слое пористой среды, ограниченном непроницаемой границей // Ученые записки Орловского гос. ун-та. Сер. Естеств., техн. и мед. науки.—2013.—№ 6 (56).—С. 70–75.

HOLOMORPHIC MINORANTS¹

B. N. Khabibullin (Россия, Уфа; БашГУ),
T. Yu. Baiguskarov (Россия, Уфа; БашГУ)

General case

As usual, $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, \mathbb{R} and \mathbb{C} are the sets of real and complex numbers, resp. We denote by λ the Lebesgue measure on \mathbb{C}^n , $n \in \mathbb{N}$. Given $z \in \mathbb{C}^n$ and $r > 0$, $B(z, r) := \{z' \in \mathbb{C}^n : |z' - z| < r\}$. For a function $f: B(z, r) \rightarrow [-\infty, +\infty] := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, we set

$$B_f(z, r) := \frac{1}{\lambda(B(z, r))} \int_{B(z, r)} f d\lambda$$

when this integral there exists. We start from new even for $n = 1$.

Theorem 1. *Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a pseudoconvex domain, $z_0 \in D$, and u be a plurisubharmonic function on D , $u(z_0) \neq -\infty$. Then for each number $\varepsilon > 0$ there is a holomorphic function f on D such that $f(z_0) \neq 0$ and*

$$\log |f(z)| \leq B_u(z, r) + n \log \frac{1}{r} + (n + \varepsilon) \log(1 + |z| + r)$$

for all $z \in D$ and $0 < r < \inf\{|z' - z| : z' \in \mathbb{C}^n \setminus D\} =: \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus D)$.

This Theorem develops and generalizes results of O. V. Epifanov for $n = 1$ [1; Lemma], our results [2; Lemma 1.1], [3, Main Theorem] etc. The proof uses the Hörmander–Bombieri method [4; Theorem 4.2.7].

Case $n = 1$

The symbol $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ denotes the Riemann sphere, i. e. the extended complex plane. Let D be a subdomain of $\mathbb{C}_\infty \neq D$ always here. We denote by $\text{Hol}(D)$ and $\text{sbh}(D)$ the class of holomorphic and subharmonic functions on D , respectively. The class $\text{sbh}(D)$ contains the function $-\infty: z \mapsto -\infty, z \in D$.

Let $u \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$ with the Riesz measure ν_u hereinafter.

Theorem 2. *Let $d: D \rightarrow (0, +\infty)$ be a function such that*

$$0 < d(z) < \min\{\text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus D), 1 + |z|\} \quad \text{for all } z \in D,$$

and this function is locally separated from zero on D , i. e. for each $z \in D$ there is a number $r_z > 0$ such that $B(z, r_z) \subset D$ and $\inf_{z' \in B(z, r_z)} d(z') > 0$. If at least one of the following three conditions:

¹Supported by RFBR, project № 13-01-00030.

- 1) the closure of D is not equal to \mathbb{C}_∞ ;
 - 2) for the Riesz measure ν_u of u the inequality $\nu_u(D) > 1$ holds;
 - 3) the domain D is simply connected in \mathbb{C}_∞ ;
- is fulfilled, then there is a non-zero function $f \in \text{Hol}(D)$ such that

$$\log|f(z)| \leq B_u(z, d(z)) + \log \frac{1}{d(z)} \quad \text{for all } z \in D.$$

Case $D = \mathbb{C}$

Theorem 3. Let $D = \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ and $u(z_0) \neq -\infty$. Then for each number $N \geq 0$ there is an entire function f such that

$$f(z_0) \neq 0 \quad \text{and} \quad \log|f(z)| \leq B_u\left(z, (1 + |z|)^{-N}\right) \quad \text{for all } z \in \mathbb{C}.$$

The following Theorem is a development of Hörmander's results [5, 8].

Theorem 4. The following four statements are equivalent:

- 1) for every number $N \geq 0$, there is non-zero entire function f such that

$$\log|f(z)| \leq B_u\left(z, (1 + |z|)^{-N}\right) - N \log(1 + |z|) \quad \text{for all } z \in \mathbb{C};$$

- 2) for every number $N \geq 0$, there is non-zero entire function f such that

$$\log|f(z)| \leq B_u(0, N|z|) - N \log(1 + |z|) \quad \text{for all } |z| \geq R_N;$$

- 3) $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log r} B_u(0, r) = +\infty$;

- 4) $\nu_u(\mathbb{C}) = +\infty$.

Special case $\nu_u(D) < +\infty$

If the closure of $S \subset D$ is a compact subset of $D \subset \mathbb{C}_\infty$, then we write $S \Subset D$. For $b \in \mathbb{R}$, we set $b^+ := \max\{0, b\}$.

Theorem 5. Let $n \in \mathbb{N}$. If $D \subset \mathbb{C}_\infty$ is n -connected and $\nu_u(D) < +\infty$, then, for each positive $\varepsilon < \nu(D)$, there are a constant $b < n - 1$, a subdomain $D_0 \Subset D$, and a function $f \in \text{Hol}(D)$ without zeros such that

$$\begin{aligned} \log|f(z)| &\leq B_u(z, r) + b^+ \log(1 + |z|) + \varepsilon \log \frac{1}{r} + \\ &+ \begin{cases} (2\varepsilon - \nu_u(D)) \log(1 + |z|), & z \in D \setminus D_0, \\ \nu_u(D) \log \frac{1}{r}, & z \in D_0, \end{cases} \end{aligned}$$

and for all $r < \min\{\text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus D), 1 + |z|\}$.

Corollary. If $D \subset \mathbb{C}_\infty$ is n -connected and $\nu_u(D) < +\infty$, then, for any positive number $\varepsilon < \nu(D)$ and a function $d: D \rightarrow (0, +\infty)$ from Theorem 2, there are a constant $b < n - 1$ and a function $f \in \text{Hol}(D)$ without zeros such that

$$\log|f(z)| \leq B_u(z, d(z)) + b^+ \log(1 + |z|) + \varepsilon \log \frac{1}{d(z)} + (2\varepsilon - \nu_u(D)) \log(1 + |z|)$$

for all $z \in D$. So, for simply connected domain D we have $b^+ = 0$.

Литература

1. *Епифанов О. В.* О разрешимости неоднородного уравнения Коши — Римана в классах функций, ограниченных с весом и системой весов // *Мат. заметки.*—1992.—Т. 51, вып. 1.—С. 83–92. Engl. transl.: *Epifanov O. V.*, On solvability of the nonhomogeneous Cauchy–Riemann equation in classes of functions that are bounded with weights or systems of weights // *Math. Notes.*—1992.—Vol. 51, № 1.—P. 54–60.
2. *Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б., Чередникова Л. Ю.* Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. I // *Алгебра и анализ.*—2008.—Т. 20.—С. 146–189. Engl. transl.: *Khabibullin B. N., Khabibullin F. B., Cherednikova L. Yu.* Zero subsequences for classes of holomorphic functions: stability and the entropy of arcwise connectedness. I // *St. Petersburg Math. J.*—2009.—Vol. 20, № 1.—P. 101–129.
3. *Хабибуллин Б. Н.* Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // *Изв. АН СССР. Сер. мат.*—1991.—Т. 55.—С. 1101–1123. Engl. transl.: *Khabibullin B. N.* Sets of uniqueness in spaces of entire functions of a single variable // *Math. of the USSR-Izvestiya.*—1992.—Vol. 39, № 2.—P. 1063–1084.
4. *Hörmander L.* *Notions of Convexity.*—Boston: Birkhäuser, 1994.
5. *Hörmander L.* On the Legendre and Laplace transformations // *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser.*—1997.—Vol. 25, № 3–4.—P. 517–568.

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ¹

А. А. Хагажеева (Россия, Нальчик; КБГУ),
А. А. Алиханов (Россия, Нальчик; НИИ ПМА КБНЦ РАН)

Априорные оценки решений краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка в дифференциальной и разностной трактовках получены в работах [1–3].

В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим первую краевую задачу

$$\partial_{0t}^\alpha u + \lambda D_{0t}^{\alpha-1} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - qu + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где $k(x, t)$, $q(x, t)$, $f(x, t)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t u_\tau(x, \tau)(t-\tau)^{-\alpha} d\tau$ — дробная производная Капуто порядка α , $D_{0t}^{\alpha-1} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t u(x, \tau)(t-\tau)^{-\alpha} d\tau$ — дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $1-\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Теорема. Для решения $u(x, t)$ задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка

$$D_{0t}^{\alpha-1} \|u\|_0^2 + \lambda D_{0t}^{-\alpha} \|v\|_0^2 + \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \|u_0\|_0^2, \quad (4)$$

где $v(x, t) = D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (1) на $u(x, t)$ и проинтегрируем по x от 0 до 1:

$$\int_0^1 u \partial_{0t}^\alpha u dx + \lambda \int_0^1 u D_{0t}^{\alpha-1} u dx - \int_0^1 uu_{xx} dx = \int_0^1 uf dx. \quad (5)$$

Преобразуем слагаемые, входящие в тождество (5):

$$-\int_0^1 uu_{xx} dx = \|u_x\|_0^2, \quad \left| \int_0^1 uf dx \right| \leq \varepsilon \|u\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2.$$

¹Работа выполнена по гранту Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК–3360.2015.1.

В силу Леммы 1 из [1] получим

$$\int_0^1 u \partial_{0t}^\alpha u \, dx \geq \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \int_0^1 u^2 \, dx = \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2,$$

$$\int_0^1 u D_{0t}^{\alpha-1} u \, dx = \int_0^1 v \partial_{0t}^{1-\alpha} v \, dx \geq \frac{1}{2} \partial_{0t}^{1-\alpha} \|v\|_0^2.$$

Из тождества (5) с учетом приведенных выше преобразований приходим к неравенству

$$\frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \frac{\lambda}{2} \partial_{0t}^{1-\alpha} \|v\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \leq \varepsilon \|u\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2. \quad (6)$$

Из (6) в силу неравенства $\|u\|_0^2 \leq (\frac{1}{2}) \|u_x\|_0^2$, при $\varepsilon = 1$, получим

$$\partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \lambda \partial_{0t}^{1-\alpha} \|v\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \leq \frac{1}{2} \|f\|_0^2. \quad (7)$$

Проинтегрировав неравенство (7) по τ от 0 до t , приходим к оценке (4).

Из априорной оценки (4) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1)–(3) от входных данных.

Литература

1. Аликханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения.—2010.—Т. 46, № 5.—С. 658–664.
2. Alikhanov A. A. Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings // Appl. Math. & Comput.—2012.—Vol. 219—P. 3938–3946.
3. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. of Computational Physics.—2015.—Vol. 280.—P. 424–438.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ
ПЕРЕНОСА С ДРОБНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ПРОИЗВОДНОЙ.
АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА

М. З. Худалов (Россия, Владикавказ; СОГУ)

Постановка задачи

В области $Q = \{(x, t) : 0 < x < \ell, 0 < t < T\}$, рассмотрим задачу

$$D_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t)u + f(x, t), \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(0, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \quad (2)$$

$$k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, \quad (3)$$

$$D_{0t}^{\alpha-1} u = u_0(x), \quad (4)$$

где $D_{0t}^\alpha u$ — дробная производная Римана — Лиувилля порядка α [1]; $k(x, t) \geq c > 0$, $0 < \alpha < 1$.

Априорная оценка

Допустив существование регулярного решения задачи (1)–(4), получим для нее априорную оценку. Умножим уравнение (1) скалярно на

$$U = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}.$$

$$(D_{0t}^\alpha u, U) - ((ku_x)_x, U) + (qu, U) = (f, U). \quad (5)$$

После оценки интегралов входящих в тождество (5) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|U\|_0^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} U^2(0, t) + \int_0^\ell ku_x(x, t) U_x dx + \\ + \int_0^\ell q(x, t) u U dx \leq \frac{1}{2} \|f\|_0^2 + \frac{1}{2} \|U\|_0^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Проинтегрируем (6) по τ от 0 до t

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|U\|_0^2 + \frac{1}{2}U^2(0, t) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t d\tau \int_0^\ell k u_x(x, \tau) \int_0^\tau \frac{u_x(x, \tau_1) d\tau_1}{(\tau - \tau_1)^\alpha} dx + \\ & + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t d\tau \int_0^\ell q(x, \tau) u(x, \tau) \int_0^\tau \frac{u(x, \tau_1) d\tau_1}{(\tau - \tau_1)^\alpha} dx \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|U\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2} \|U(x, 0)\|_0^2 + \frac{1}{2} U^2(0, 0). \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом $0 < \alpha < 1$, $k(x, t) \geq c_1$, $k_t(x, t) \leq 0$ и $q(x, t) \geq 0$, $q_t(x, t) \leq 0$ получаем

$$\|U\|_0^2 \leq \|f\|_{2, Q_t}^2 + \int_0^t \|U\|_0^2 d\tau + \|u_0(x)\|_0^2 + U^2(0, 0),$$

или так

$$\|U\|_0^2 \leq \int_0^t \|U\|_0^2 d\tau + F(t),$$

где $\|v\|_{2, Q_t}^2 = \int_0^t \|v\|_0^2 d\tau$, $F(t) = \|f\|_{2, Q_t}^2 + \|u_0(x)\|_0^2 + U^2(0, 0)$.

На основании леммы 1.1 из [2] окончательно находим

$$\|U\|_0^2 \leq M(t) (\|f\|_{2, Q_t}^2 + \|u_0(x)\|_0^2 + U^2(0, 0)). \quad (8)$$

Из априорной оценки (8) следует единственность решения задачи (1) – (4).

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
2. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.—407 с.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АлтГУ** — Алтайский государственный университет
БашГУ — Башкирский государственный университет
БелГУ — Белорусский государственный университет
БГУ — Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
ВГИ — Высокотурный геофизический институт
ВГУ — Воронежский государственный университет
ВНЦ — Владикавказский научный центр РАН
ВИ МВД — Воронежский институт МВД России
ИММ УрО РАН — Институт математики и механики УрО РАН
ИМ СО РАН — Институт математики имени С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН
КБГУ — Кабардино-Балкарский государственный университет
НИИ ПМА КБНЦ РАН — Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН
ОГУ — Орловский государственный университет
СибГУТИ — Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики
СОГУ — Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова
ТГУ — Тбилисский государственный университет имени Иванэ Джавахишвили
УдГУ — Удмуртский государственный университет
ЮМИ — Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук

**АЛГЕБРА, АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

тезисы докладов
Российской научной конференции
(г. Владикавказ, 26–27 июня 2015 г.)

Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова, 2015