РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ ИМЕНИ ПАТРИСА ЛУМУМБЫ

В.И. Буренков

Неравенства разных метрик и разных измерений для целых функций экспоненциального типа и тригонометрических многочленов в пространствах Морри

Москва-2024

Доклад состоит из двух частей. В первой части рассматриваются неравенства для целых функций экспоненциального типа ν в пространствах Морри. Вторая часть посвящена неравенствам для тригонометрических многочленов в периодических пространствах Морри.

Целые функции экспоненциального типа ν

Определение 1.1

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$. Функция $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ называется целой функцией экспоненциального типа ν, если выполняются следующие свойства:
1) она разлагается в степенной ряд для любых $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$: для некоторых $a_{k_1,...,k_n} \in \mathbb{C}$

$$g(z) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} a_{k_1,...,k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \tag{1}$$

для любых $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$,
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_\varepsilon > 0$ такое, что для всех $z \in \mathbb{C}^n$ выполняется неравенство

$$|g(z)| \leq A_\varepsilon e^{(\nu+\varepsilon)(|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|)}. \tag{2}$$

.

Обозначим через $E_\nu(\mathbb{C}^n)$ совокупность всех целых функции экспоненциального типа ν и пусть $E_\nu(\mathbb{R}^n)$ – это множество всех функций g, заданных на $\mathbb{R}^n$, для каждой из которых $g(x) = G(x+iy)|_{y=0}$, $x \in \mathbb{R}^n$, для некоторй функции $G \in E_\nu(\mathbb{C}^n)$.
В дальнейшем мы всегда считаем, что $\nu > 0$, не оговаривая этого в каждом утверждении.
Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Положим

$$\mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n) = E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n). \tag{3}$$

Известные неравенства для целых функции экспоненциального типа $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$.

1. (Неравенство Бернштейна) Пусть $1 \le p \le \infty$, тогда для любой функция $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \nu \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

2. (Неравенство разных метрик) Пусть $1 \le p \le q \le \infty$, тогда для любой функции $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \le 2^n \nu^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{5}$$

3. (Неравенство разных измерений) Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq m < n$,
$x = (u, v)$, $u = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $v = (x_{m+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$,
тогда для любой функции $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$ имеет место неравенство

$$\Big\| \|g(u, v)\|_{L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m})} \Big\|_{L_{p,u}(\mathbb{R}^m)} \leq 2^{n-m} \nu^{\frac{n-m}{p}} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{6}$$

в частности,

$$\|g(u, 0)\|_{L_p(\mathbb{R}^m)} \leq 2^{n-m} \nu^{\frac{n-m}{p}} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{7}$$

Целью является доказательство аналогичных неравенств в случае, когда пространство L_p заменено на пространство Морри M_p^λ.

Определение 1.2

Пусть $0 < p \leq \infty$ и $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, тогда $f \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, если

$$f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$$

и

$$\|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{r>0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty. \tag{8}$$

Отметим некоторые свойства этих пространств.
1. Из определения сразу видно, что при $\lambda = 0$, $M_p^0(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|f\|_{M_p^0(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

2. При $\lambda = \frac{n}{p}$, $M_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|f\|_{M_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} = v_n^{\frac{n}{p}} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)},$$

где v_n— объём единичного шара в $\mathbb{R}^n$.
3. Если $\lambda < 0$ или $\lambda > \frac{n}{p}$, то пространства $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ состоят только из функций, эквивалентных 0 на $\mathbb{R}^n$.
4. (Инвариантность относительно сдвига) Для любых $0 < p \leq \infty$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$

$$\|f(y+h)\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \|f(y)\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Неравенство Бернштейна

Теорема 1.1

Пусть $Z(\mathbb{R}^n)$ – нормированное пространство функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, причем норма $\|\cdot\|_{Z(\mathbb{R}^n)}$ инвариантна относительно сдвига: для любой функции $f \in Z(\mathbb{R}^n)$

$$\|f(x+h)\|_{Z(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{Z(\mathbb{R}^n)} \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Тогда для любой функции $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap Z(\mathbb{R}^n)$

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\|_{Z(\mathbb{R}^n)} \le \nu \|g(x)\|_{Z(\mathbb{R}^n)}, \ j = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Следствие 1.1 (Неравенство Бернштейна)

Пусть $1 \le p \le \infty$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, тогда
$\forall g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \le \nu \|g\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Это неравенство также имеет место, если заменить $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ на $\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$.

Прежде всего мы приведем необходимые для дальнейшего определения и факты, относящиеся к теории преобразований Фурье.

Определение

Пусть функции $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, тогда сверткой называется функция $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенная равенством

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t-\tau)g(\tau)d\tau, \ \ t \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Определение

Преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ задаётся следующей формулой:

$$(Ff)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx, \; \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

$\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$.

Определение

Если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, где $1 < p \leq 2$, то преобразование Фурье задается равенством

$$(Ff)(\xi) = \lim_{r \to \infty} \big(F(f\chi_{B(0,r)})\big)(\xi) \;\; L_{p'}(\mathbb{R}^n), \tag{15}$$

где $p' = \frac{p}{p-1}$ $\big(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\big)$. (Это равенство справедливо и при p=1 для преобразования Фурье Ff , задаваемого равенством (14).)

Замечание

При этом $Ff \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|Ff\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \tag{16}$$

(равенство Парсеваля), при $1 \le p < 2$

$$\|Ff\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} \le (2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \left(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{p'^{\frac{1}{p'}}} \right)^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le (2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{17}$$

(неравенство Хаусдорфа-Юнга-Бекнера, постоянная $(2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \left(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{p'^{\frac{1}{p'}}} \right)^{\frac{n}{2}}$ является точной).

Если $1 \le p \le 2$, то, поскольку $fF\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, согласно теореме Фубини

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(F\varphi)(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \big(F(f(x)\chi_{B(0,r)})\big)(\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

Таким образом, при $1 \le p \le 2$

$$(\mathcal{F}f,\varphi) = (f, F\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(\xi)\phi(\xi)d\xi \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно, $\mathcal{F}f$ является регулярной обобщенной функцией, порождаемой преобразованием Фурье $Ff \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$, задаваемым равенством (14) при p=1 и равенством (15) при $1 < p \le 2$.

(Теорема Л. Шварца, см., например, книгу [?])

Если $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$ и $1 \le p \le \infty$, то преобразование Фурье Fg, понимаемое в смысле теории обобщенных функций из пространства Шварца $S'(\mathbb{R}^n)$, равно нулю вне замыкания куба

$$\Delta_\nu = \{|x_j| < \nu, \ j = 1, \dots, n\}. \tag{18}$$

Напомним, что для $\varphi, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$

$$(F(\varphi * g))(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(F\varphi)(\xi)(Fg)(\xi), \; \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{19}$$

Из (19) сразу следует, что если $(F\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ для любого $\xi \in supp\ Fg$, то $F(\varphi * g) = Fg$ и

$$g(x) = (\varphi * g)(x) \tag{20}$$

для любых всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1.5

Пусть $1 \le p \le \infty$, $\nu > 0$. Будем говорить, что $\varphi \in J_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$, если $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ и преобразование Фурье $F\varphi$, понимаемое, вообще говоря, в смысле теории обобщенных функций из пространства $S'(\mathbb{R}^n)$, равно $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ на Δ_ν.

Пример. При $1 < p \le \infty$ функция

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} F^{-1}(\chi_{\Delta_\nu})(x) = \pi^{-n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin \nu x_j}{x_j} \qquad (21)$$

принадлежит пространству $J_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема

Пусть $1 \le p < \infty$, $\varphi \in J_{\nu,p'}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R}^n)$. Тогда равенство (20) справедливо для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Неравенство типа Юнга для пространств Морри, см. [7]

Пусть

$$1 \le p < q \le \infty, \quad 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p},$$

$f_1 \in L_r(\mathbb{R}^n)$ и $f_2 \in \widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\|f_1 * f_2\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \le \|f_1\|_{L_r(\mathbb{R}^n)} \|f_2\|_{M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{q}} \|f_2\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{q}}. \tag{22}$$

Теорема 1.4 (Неравенство разных метирк)

Пусть $1 \le p \le q \le \infty, \quad 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}, \quad 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, тогда

$$\|g\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \le c_2(n,p,q)\nu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|g\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{q}}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{q}} \tag{23}$$

для любых $\nu > 0$ и $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, где

$$c_2(n,p,q) = \inf_{\psi \in J_{1,p}(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{L_r(\mathbb{R}^n)}. \tag{24}$$

Следствие 1.4 (Неравенство разных метирк)

В предположениях теоремы

$$\|g\|_{\widehat{M}_q^{\frac{p\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 \nu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|g\|_{\widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} \tag{25}$$

для любых $\nu > 0$ и $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

(Неулучшаемость показателя $\frac{p}{q}\lambda$ в неравенстве разных метрик)

Предположим, что для некоторых $\mu \geq 0$ и $c > 0$, для любых $\nu > 0$ и $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)$ выполнятся неравенство

$$\|g\|_{M_q^{\mu}(\mathbb{R}^n)} \leq c \nu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|g\|^{\frac{p}{q}}_{M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{1-\frac{p}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{26}$$

Тогда $\mu = \frac{\lambda p}{q}$.

Неравенство разных измерений для пространств Морри

Определение 1.6

Пусть

$$0 < p_1, p_2 \le \infty, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N}$$

$$0 \le \lambda_1 \le \frac{m_1}{p_1}, \quad 0 \le \lambda_2 \le \frac{m_2}{p_2}.$$

Определим пространство

$$M^{\lambda_1}_{p_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M^{\lambda_2}_{p_2}(\mathbb{R}^{m_2}) \tag{27}$$

со смешанной квазинормой как множество всех измеримых на $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ функций f, для которых

$$\|f\|_{M^{\lambda_1}_{p_1}(\mathbb{R}^{m_1})\times M^{\lambda_2}_{p_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \Big\|\|f(u_1,u_2)\|_{M^{\lambda_1}_{p_1,u_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\Big\|_{M^{\lambda_2}_{p_2,u_2}(\mathbb{R}^{m_2})}. \tag{28}$$

Теорема 1.5 (Неравенство разных измерений)

Пусть $1 \le p < \infty$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, тогда

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le 2^{n-m} \nu^{\frac{n-m}{p}} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}, \tag{29}$$

в частности, если $x = (u, v)$, $u = (x_1 \dots x_m)$, $v = (x_{m+1}, \dots, x_n)$, то

$$\|g(u, 0)\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le 2^{n-m} \nu^{\frac{n-m}{p}} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}. \tag{30}$$

для любых $g \in E_\nu(\mathbb{R}^{n-m}) \cap (L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m))$, и существует такое $c_4 = c_4(m, n, \lambda) > 0$, что

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m}) \times \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le c_4 \nu^{\frac{n-m}{p}} \max\{1, \nu^\lambda\} \|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}, \qquad (31)$$

в частности,

$$\|g(u, 0)\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le c_4 \nu^{\frac{n-m}{p}} \max\{1, \nu^\lambda\} \|g\|_{\widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \qquad (32)$$

для любых $\nu > 0$ и $g \in E_\nu(\mathbb{R}^n) \cap \widehat{M}_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$.

Определение 2.1

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{N}_0$. Обозначим через $\mathfrak{M}^*_\mu(\mathbb{R}^n)$ множество всех тригонометрических многочленов порядка μ

$$T_\mu(x) = T_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{-\mu \le k_j \le \mu \\ j=1,\dots,n}} c_{k_j} e^{ik\cdot x} \tag{33}$$

$$= \sum_{-\mu \le k_1 \le \mu} \cdots \sum_{-\mu \le k_n \le \mu} c_{k_1,\dots,k_n} e^{i(k_1x_1+\dots k_nx_n)}.$$

где $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $c_{k_1,\dots,k_n} \in \mathbb{C}-$ постоянные коэффициенты, такие что $c_{-k} = \bar{c}_k$ (при этом $T_\mu(x) \in \mathbb{R}$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$). Пусть далее $0 < p \le \infty$. Функция $f \in L^*_p$, если $f - 2\pi-$ периодическая измеримая функция, для которой

$$\|f\|^*_{L_p} = \|f\|_{L_p(Q(0,\pi))} < \infty, \tag{34}$$

где $Q(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x_j - y_j| < r, j = 1, \dots, n\}$.

Известные неравенства для тригонометрических многочленов для лебеговых пространств.

Для тригонометрических многочленов $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{M}^*_\mu(\mathbb{R}^n) \cap L^*_p(\mathbb{R}^n)$ выполняются следующие неравенства

1. (Неравенство Бернштейна) Пусть $1 \le p \le \infty$, тогда для любых тригонометрических многочленов $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$ выполняются неравенства

$$\left\| \frac{\partial T_\mu}{\partial x_j} \right\|^*_{L_p} \le \mu \| T_\mu \|^*_{L_p}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{35}$$

2. (Неравенство разных метрик) Пусть $1 \le p < q \le \infty$, тогда для любых тригонометрических многочленов $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$ выполняются неравенства

$$\| T_\mu \|^*_{L_q} \le 3^n \mu^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \| T_\mu \|^*_{L_p}. \tag{36}$$

3. (Неравенство разных измерений) Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq m < n$, $x = (u, v)$, $u = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $v = (x_{m+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$, тогда для любоых тригонометрических многочленов $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$ выполняются неравенства

$$\| T_\mu(u, 0)\|^*_{L_p} \leq 3^{n-m} \mu^{\frac{n-m}{p}} \| T_\mu\|^*_{L_p}. \qquad (37)$$

Неравенства (36) - (37) были доказаны в книге [7] с помощью эквивалентной нормы $((T_\mu))^*_{L_p}$, определяемой следующим образом: пусть

$$1 \le p \le \infty,\ x_{k_i} = k_i \frac{2\pi}{N_i}, N_i \in \mathbb{N},\ k_i \in \{1, \ldots, N_i\}, i = 1, \ldots, n$$

$$((T_\mu))^*_{L_p} = \max_{\overline{u_l \in Q(0,\pi)}} \left(\prod_{l=1}^{n} \frac{2\pi}{N_l} \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} |T_\mu(x_{k_1} - u_1, \ldots, x_{k_n} - u_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{38}$$

Неравенства (36) - (37) можно также доказать, используя предствления тригонометрических полиномов в виде свертки его с некоторым ядром, см., например, книгу [6], где используется представление в виде сверки с ядром Валле-Пуссенна: $\mathfrak{V}_\mu$

$$T_\mu = T_\mu * \mathfrak{V}_\mu. \tag{39}$$

Целью является доказательство аналогичных неравенств в случае, когда пространство $(L_p)^*$ заменено на периодическое пространство Морри $(M_p^\lambda)^*$.

Периодическое пространство Морри

Определение 2.2

Пусть $0 < p \leq \infty$ и $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, тогда $f \in (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$, если она имеет период 2π, измерима на $\mathbb{R}^n$ и

$$\|f\|^*_{M_p^\lambda} = \sup_{x \in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leq\pi} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(Q(x,r))} < \infty. \tag{40}$$

Отметим некоторые свойства этих пространств.
1. Из определения сразу видно, что при $\lambda = 0$

$$\|f\|^*_{M_p^0} = \|f\|^*_{L_p}.$$

2. При $\lambda = \frac{n}{p}$

$$\|f\|^*_{M_p^{\frac{n}{p}}} = \|f\|^*_{L_\infty},$$

3. Если $\lambda < 0$ или $\lambda > \frac{n}{p}$, то пространства $(M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$ состоят только из функций, эквивалентных 0 на $(\mathbb{R}^n)$

4. Отметим, что пространство $(M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$ обладает свойством монотонности по параметру λ:

$$(M_p^\mu)^* \subset (M_p^\lambda)^*,\ 0 \le \lambda < \mu \le \frac{n}{p},\ 0 < p < \infty. \tag{41}$$

Действительно,

$$\|f\|^*_{M_p^\lambda} = \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda}\|f\|_{L_p(Q(x,r))} \tag{42}$$

$$= \pi^{-\lambda} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\le\pi} \left(\frac{\pi}{r}\right)^\lambda \|f\|_{L_p(Q(x,r))} \tag{43}$$

$$\le \pi^{-\lambda} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\le\pi} \left(\frac{\pi}{r}\right)^\mu \|f\|_{L_p(Q(x,r))} \tag{44}$$

$$= \pi^{\mu-\lambda} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\mu}\|f\|_{L_p(Q(x,r))} \tag{45}$$

$$= \pi^{\mu-\lambda}\|f\|^*_{M_p^\mu}, \tag{46}$$

следовательно,

$$\|f\|^*_{M_p^\lambda} \le \pi^{\mu-\lambda}\|f\|^*_{M_p^\mu}. \tag{47}$$

5. В [4] доказано, что для любых $p > 0$ и $f \in (M_p^\lambda)^*$

$$\|f\|^*_{M_p^\lambda} = \|f\|^{**}_{M_p^\lambda} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda}\|f\|^*_{L_p(Q(x,r))}. \tag{48}$$

6. Инвариантность относительно сдвига: для любых $f \in (M_p^\lambda)^*$

$$\|f(y+h)\|^*_{M_p^\lambda} = \|f(y)\|^*_{M_p^\lambda} \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \tag{49}$$

Действительно,

$$\|f(y+h)\|^*_{M_p^\lambda} = \|f(y+h)\|^{**}_{M_p^\lambda} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda}\|f(y+h)\|^*_{L_p(Q(x,r))}$$

$(z = y + h)$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda}\|f(z)\|^*_{L_p(Q(x+h,r))}$$

$(x + h = u)$

$$= \sup_{u\in\mathbb{R}^n} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda}\|f(z)\|^*_{L_p(Q(u,r))} = \|f\|^*_{M_p^\lambda}$$

7. $(M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n) \subset (L_p)^*(\mathbb{R}^n)$, причем для любых $f \in (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|^*_{L_p} \leq \pi^\lambda \|f\|^*_{M_p^\lambda}$$

Действительно,

$$\|f\|^*_{M_p^\lambda} \geq \sup_{0<r<\pi} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(Q(0,r))} \geq \pi^{-\lambda} \|f\|^*_{L_p}.$$

В одномерном случае интерполяционная формула для произвольного тригонометрического многочлена T_μ порядка μ имеет вид (см.[7]):

$$T'_\mu(x) = \frac{1}{4\mu} \sum_{k=1}^{2\mu} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{x_k}{2}} T_\mu(x + x_k), \tag{50}$$

где x_k-нули полинома $\cos(nx)$.
Если положить здесь $T_\mu(x) = \sin(\mu x)$ и $x = 0$, то получим

$$\mu = \frac{1}{4\mu} \sum_{k=1}^{2\mu} \frac{1}{\sin^2 \frac{x_k}{2}}. \tag{51}$$

В одномерном случае интерполяционная формула для произвольного тригонометрического многочлена T_μ порядка μ имеет вид (см.[7]):

$$T'_\mu(x) = \frac{1}{4\mu} \sum_{k=1}^{2\mu} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{x_k}{2}} T_\mu(x + x_k), \qquad (52)$$

где x_k-нули полинома $\cos(nx)$.
Если положить здесь $T_\mu(x) = \sin(\mu x)$ и $x = 0$, то получим

$$\mu = \frac{1}{4\mu} \sum_{k=1}^{2\mu} \frac{1}{\sin^2 \frac{x_k}{2}}. \qquad (53)$$

Теорема

Пусть Z^*—нормированное пространство периодических функций периода 2π по каждой переменной, причем $\|\cdot\|_Z^*$ инвариантна относительно сдвига, т.е. для любой функции $f \in Z^*$

$$\|f(x+h)\|_Z^* = \|f\|_Z^* \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \tag{54}$$

Тогда для любых тригонометрических многочленов $T_\mu \in Z^*(\mathbb{R}^n)$

$$\left\|\frac{\partial T_\mu}{\partial x_j}\right\|_Z^* \leq \mu \|T_\mu\|_Z^*, \; j = 1, \ldots, n. \tag{55}$$

Следствие 2.1 (Неравенство Бернштейна)

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, тогда
$\forall \; T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$

$$\left\| \frac{\partial T_\mu}{\partial x_j} \right\|^*_{M_p^\lambda} \leq \mu \| T_\mu \|^*_{M_p^\lambda}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{56}$$

Неравенство разных метрик в пространствах $(M_p^\lambda)^*$. (Доказательство с помощью эквивалентных норм $(M_{p,N}^\lambda)^*$.)

Пусть $1 \le p \le \infty$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, $r > 0$, $\mu, N \in \mathbb{N}$, $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$

$$((T_\mu))^*_{M^\lambda_{p,N}} = \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\le\pi} r^{-\lambda}\Bigg(\left(\frac{r}{N}\right)^n \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \tag{57}$$

$$\left| T_\mu\left(x_1 + \frac{r}{N}k_1, \dots, x_n + \frac{r}{N}k_n\right)\right|^p\Bigg)^{1/p}.$$

Теорема 2.2

Пусть $1 \le p \le \infty$, $n, \mu, N \in \mathbb{N}$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$ $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$, тогда имеет место неравенство

$$\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda} \le ((T_\mu))^*_{M^\lambda_{p,N}} \le (1 + \frac{\pi}{N}\mu)^n \|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda} \tag{58}$$

Лемма

Пусть $n = 1,\ 1 \le p < q \le \infty,\ r > 0,\ \mu, N \in \mathbb{N}$,
$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \le \lambda \le \frac{1}{p},\ \ T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$((T_\mu))^*_{M_{q,N}^{\lambda-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} \le N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}((T_\mu))^*_{M^\lambda_{p,N}}. \qquad (59)$$

Теорема 2.3 (Неравенства разных метрик)

Пусть $1 \le p \le q \le \infty,\ n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \le \lambda \le \frac{n}{p},\ \ T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} \le (1+\pi)^n \mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{M^\lambda_p}. \qquad (60)$$

Неравенство разных метрик в пространствах $(M_p^\lambda)^*$ (Доказательство с помощью представления тригонометрических многочленов в виде сверток.)

Рассмотрим свёртку функций $\varphi, g \in L_1(Q(0,\pi))$ $2\pi-$ периодических по каждой переменной

$$(\varphi * g)(x) = \int_{Q(0,\pi)} \varphi(x-y)g(y)dy, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{61}$$

Напомним, что $\forall k \in \mathbb{Z}^n$

$$c_k(\varphi * g) = (2\pi)^n c_k(\varphi) c_k(g). \tag{62}$$

Если $c_k(\varphi) = (2\pi)^{-n}$ для $k \in \mathbb{Z}^n$ для которых $c_k(g) \neq 0$, то

$$c_k(g) = c_k(\varphi * g). \tag{63}$$

Лемма

Пусть $n \in \mathbb{N},\ \mu \in \mathbb{N}, \varphi \in L_1(Q(0,\pi))\ - 2\pi$ периодическая функция по каждой переменной. Для того, чтобы для любого тригонометрического многочлена T_μ порядка μ по каждой переменной выпольнялось равенство

$$T_\mu = \varphi * T_\mu, \tag{64}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$c_k(\varphi) = (2\pi)^{-n}\ \forall k \in \mathbb{Z}^n : |k_j| \le \mu,\ j = 1, \ldots, n \tag{65}$$

Ядро Дирихле

$$D_\mu(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\mu}^{\mu} e^{ikx} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\mu}\cos(kx) = \frac{\sin(\mu+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad (66)$$

$$\widetilde{D}_\mu(x) = \frac{1}{\pi} D_\mu(x). \qquad (67)$$

Ядро Валле Пуссена

Пусть $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ и $\nu > \mu$. Ядра Валле Пуссена определяются следующим образом

$$\mathfrak{V}_{\mu,\nu}(x) = (\nu-\mu)^{-1}\sum_{l=\mu}^{\nu-1} D_l(x), \qquad (68)$$

в частности,

$$\mathfrak{V}_\mu(x) = \mathfrak{V}_{\mu,2\mu}(x), \quad \mu \geq 1, \quad \mathfrak{V}_0(x) = 1, \qquad (69)$$

Положим

$$\widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\pi}\mathfrak{V}_{\mu,\nu}(x), \quad \widetilde{D}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\pi}D_{\mu,\nu}(x), \tag{70}$$

Частным случаем равенства (64) является равенства

$$T_\mu(x) = \widetilde{D}_\mu(x) * T_\mu(x)$$

и

$$T_\mu(x) = \widetilde{\mathfrak{V}}_\mu(x) * T_\mu(x).$$

Пусть для $\alpha, n \in \mathbb{N}$

$$\Delta_\alpha(j) = \{k \in \mathbb{Z}^n, |k_j| \le \alpha\}$$

и

$$\Delta_\alpha = \Delta_\alpha(1) \times \cdots \times \Delta_\alpha(n).$$

Замечание

Если φ— тригонометрический многочлен порядка $\nu > \mu$ по каждой переменной, то равенство (64) выполняется для любых тригонометрических многочленов T_μ порядка μ по каждой переменной тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\Delta_\nu} c_k e^{ik\cdot x} = \prod_{j=1}^{n} \widetilde{D}_\mu(x_j) + \sum_{k\in\Delta_\nu\setminus\Delta_\mu} c_k e^{ik\cdot x}. \qquad (71)$$

$\Big($В частности, при $n = 1$ $\varphi(x) = \widetilde{D}_\mu(x) + \left(\sum_{k=-\nu}^{-\mu-1} + \sum_{k=\mu+1}^{\nu}\right) c_k e^{ik\cdot x}.\Big)$

Для $\mu,\nu \in \mathbb{N}, \nu \geq \mu, 1 \leq p \leq \infty$ обозначим через $J^*_{\mu,\nu,p}$ множество функций вида (71), принадлежащих пространству L^*_p.

Следствие из неравенства типа Юнга для периодических пространств Морри, см. [7]

Пусть $0 \leq \lambda < \frac{n}{p}, 1 \leq r, p < q \leq \infty, \quad 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$, $f_1 \in L_r(\mathbb{R}^n)$ и $f_2 \in (M_p^\lambda)^*$. Тогда

$$\|f_1 * f_2\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} \leq \|f_1\|^*_{L_r} (\|f_2\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}} (\|f_2\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}}. \tag{72}$$

Теорема 2.4 см., например, [6]

Пусть $\mu \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, тогда

$$\|\widetilde{\mathfrak{V}}_\mu\|^*_{L_p} \leq 3^n \mu^{n(1-1/p)}. \tag{73}$$

Теорема 2.5 (Неравенство разных метрик)

Пусть $1 \le r, p < q \le \infty$, $n, \mu \in \mathbb{N}$ $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}, 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$. Тогда

$$\| T_\mu \|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} \le c(\| T_\mu \|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}} (\| T_\mu \|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}} \tag{74}$$

для любого $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, где

$$= c(\mu, r) = \inf_{\substack{\nu \in \mathbb{N} \\ \nu \ge \mu}} \inf_{\varphi \in J^*_{\mu,\nu,r}} \|\varphi\|^*_{L_r}. \tag{75}$$

Неравенство разных измерений для пространств Морри

Определение 2.3

Пусть

$$0 < p_1, p_2 \leq \infty, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \frac{m_1}{p_1}, \quad 0 \leq \lambda_2 \leq \frac{m_2}{p_2}.$$

Определим пространство

$$(M_{p_1}^{\lambda_1})^*(\mathbb{R})^{m_1} \times (M_{p_2}^{\lambda_2})^*(\mathbb{R}^{m_2}) \tag{76}$$

со смешанной квазинормой как множество всех измеримых на $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ 2π - периодических функций f, для которых f

$$\|f\|^*_{M_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \| \| f(u_1, u_2) \|^*_{M_{p_1,u_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})} \|^*_{M_{p_2,u_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} < \infty.$$

Теорема 2.6 (Неравенство разных измерений)

Пусть $1 \le p < \infty$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, тогда

$$\| T_\mu \|^*_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le 3^n \mu^{\frac{n}{p}} \| T_\mu \|^*_{L_{p,v}(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}, \tag{77}$$

в частности, если $x = (u, v)$, $u = (x_1 \ldots x_m)$, $v = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$, то

$$\| T_\mu(u, 0) \|^*_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \le 3^n \mu^{\frac{n}{p}} \| T_\mu \|^*_{L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}. \tag{78}$$

Основные результаты работы представлены в следующих публикациях.

1. V. I. Burenkov, D. J. Joseph, “Inequalities for entire functions of exponential type in Morrey spaces”, Eurasian Math. J., 13:3 (2022), 92–99
2. В. И. Буренков, Д. Дж. Джосеф, “Интегральные неравенства для целых функций экспоненциального типа в пространствах Морри”, Труды МИАН, 323 (2023), 87–106
3. V. I. Burenkov, D. J. Joseph, “Inequalities of trigonometric polynomials in periodic Morrey spaces” (сдана в печать)
4. Д. Дж. Джосеф, “Неравенства разных метрик и разных измерений тригонометрических многочленов в пространствах Морри”(готов к печать)

Доклады на конференции и семинар

1. Конференция молодых ученых, XVIII Владикавказской молодежной математической школы, г Владикавказ 22-26 мая 2023 года
2. Конференция по теории функций многих действительных переменных, посвященная 90-летию со дня рождения чл.- корр. РАН О. В. Бесова
3. Семинар по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (Семинар Никольского) 6 декабря 2023 г. 16:00, г. Москва, МИАН,

Спасибо за внимание.

Литература

- V. I. Burenkov, D. J. Joseph, “Inequalities for entire functions of exponential type in Morrey spaces”, Eurasian Math. J., 13:3 (2022), 92–99
- В. И. Буренков, Д. Дж. Джосеф, “Интегральные неравенства для целых функций экспоненциального типа в пространствах Морри”, Труды МИАН, 323 (2023), 87–106
- V. I. Burenkov, D. J. Joseph, “Inequalities of trigonometric polynomials in periodic Morrey spaces” (сдана в печать)
- В. И. Буренков, Т. В. Тарарыкова *Аналог неравенства Юнга для сверток функций для общих пространств типа Морри*, Тр. МИАН, 293, МАИК, М., 2016, 113–132
- Д. Дж. Джосеф, “Неравенства разных метрик и разных измерений тригонометрических многочленов в пространствах Морри”(готов к печать)
- V. Temlyakov, Multivariate approximation, Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math., 32, Cambridge University Press, Cambridge, 2018