ВОРКШОП
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И
ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ПРОСТРАНСТВАМ,
ПОСВЯЩЕННЫЙ ЮБИЛЕЮ
ПРОФЕССОРА М. Л. ГОЛЬДМАНА

Некоторые вопросы теории интегральных операторов в пространствах Морри

Авсянкин О. Г.
(Южный федеральный университет)

17 апреля 2025 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА МОРРИ

Будем говорить, что $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$, если $f \in L_p(K)$ для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Говорят, что функция* $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *если* $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \equiv \|f\|_{p,\lambda} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \frac{\|f\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))}}{r^\lambda} < \infty, \tag{1}$$

где $\mathbb{B}(x,r)$ *— открытый шар радиуса* r *с центром в точке* x.

Относительно обычных линейных операций и нормы, определяемой формулой (1), множество $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ образует банахово пространство, которое называют *пространством Морри.*

Пространства $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ являются нетривиальными, т. е. состоят не только из функций, эквивалентных нулю на $\mathbb{R}^n$, тогда и только тогда, когда $0 \leqslant \lambda \leqslant n/p$. При $\lambda = 0$ и $\lambda = n/p$ пространства Морри совпадают с L_p–пространствами, а именно

$$L_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n), \quad L_{p,n/p}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Пространства Морри были введены в 1938 году Ч. Морри в связи с исследованием регулярности решений эллиптических уравнений с частными производными второго порядка.

[1] Morrey C. B. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1938. **43**. P. 126–166.

Пространства Морри — это очень полезное семейство пространств с параметрами, которое используется для доказательства регулярности решений различных типов УЧП. Особенно полезны они в теории нелинейных эллиптических систем.

[2] Kato T. Strong solutions of the Navier-Stokes equation in Morrey spaces // Bol. Soc. Brasil Mat. 1992. **22**(2). P. 127–155.

ОБОБЩЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО МОРРИ

Определение 2. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* w *— неотрицательная, измеримая по Лебегу функция на* $\mathbb{R}_+$*, не эквивалентная нулю. Обобщенное пространство Морри* $L_{p,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *— это пространство всех функций* $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ *таких, что*

$$\|f\|_{L_{p,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \equiv \|f\|_{p,w(\cdot)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big\| w(r) \|f\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))} \Big\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} < \infty. \tag{3}$$

Если $w(r) = r^{-\lambda}$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant n/p$, то пространство $L_{p,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с классическим пространством Морри $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Если $w(r) \equiv 1$, то пространство $L_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с обычным пространством $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Определение 3. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Множество* $\Omega_{p\infty}$ *— это совокупность всех функций* w, *которые неотрицательны, измеримы по Лебегу на* $\mathbb{R}_+$, *не эквивалентны нулю и таковы, что для некоторого* $t > 0$

$$\left\| w(r) r^{n/p} \right\|_{L_\infty(0,t)} < \infty, \quad \left\| w(r) \right\|_{L_\infty(t,\infty)} < \infty. \tag{4}$$

Обобщенные пространства Морри $L_{p,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ являются нетривиальными тогда и только тогда, когда $w \in \Omega_{p\infty}$.

[1] В. И. Буренков, Х. В. Гулиев. Необходимые и достаточные условия ограниченности максимального оператора в локальных пространствах типа Морри // Докл. РАН. 2003. Т. 391, № 5. С. 591–594.

ОПЕРАТОРЫ ТИПА СВЕРТКИ: ОГРАНИЧЕННОСТЬ И КОМПАКТНОСТЬ

В пространстве $L_{p,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор свертки

$$(H\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

где $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 1. (В. И. Буренков, Т. В. Тарарыкова.) *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$ *и* $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$. *Тогда оператор* H *ограничен в пространстве* $L_{p,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, *причем для любой функции* $\varphi \in L_{p,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *справедливо неравенство*

$$\|H\varphi\|_{p,w(\cdot)} \leqslant \|h\|_1 \|\varphi\|_{p,w(\cdot)} \tag{6}$$

Пусть M_a — оператор умножения на функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим вопрос о компактности в пространстве $L_{p,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ оператора $M_a H$.

Пусть $C_0(\mathbb{R}^n)$ — совокупность всех функций a, непрерывных на $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих условию $\lim\limits_{x\to\infty} a(x) = 0$.

Лемма 1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$, $a \in C_0(\mathbb{R}^n)$. *Тогда оператор* $M_a H$ *компактен в* $L_{p,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство основано на следующем утверждении.

Предложение 2. (Н. А. Бокаев, В. И. Буренков, Д. Т. Матин.) *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$ *и* Ψ — *множество функций из* $L_{p,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

i) $\sup\limits_{\psi \in \Psi} \|\psi\|_{p,w(\cdot)} < \infty$,

ii) $\lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{\psi \in \Psi} \|\psi(\cdot + \delta) - \psi(\cdot)\|_{p,w(\cdot)} = 0$,

iii) $\lim\limits_{R \to \infty} \sup\limits_{\psi \in \Psi} \big\|\psi \chi_{C\mathbb{B}(0,R)}\big\|_{p,w(\cdot)} = 0$, $\chi_{C\mathbb{B}(0,R)}$ — *характеристическая функция множества* $C\mathbb{B}(0,R) = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}(0,R)$.

Тогда множество Ψ *предкомпактно в пространстве* $L_{p,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

[1] N. A. Bokayev, V. I. Burenkov, D. T. Matin. On precompactness of a set in general local and global Morrey-type spaces // Eurasian Math. J., 2017. V. 8, N. 3. P. 109–115.

Определение 4. *Будем говорить, что функция* $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ *принадлежит классу* $B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, *если*

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} |a(x)| = 0. \tag{7}$$

Класс $B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$ представляет собой замыкание по L_∞–норме множества всех функций из $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем.

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$, $a \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда оператор* $M_a H$ *компактен в пространстве* $L_{p,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. *В частности, оператор* $P_D H$ *компактен для любого измеримого ограниченного множества* $D \subset \mathbb{R}^n$ *(здесь* P_D *— оператор умножения на характеристическую функцию множества* D*).*

КОММУТАТОР ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ И ОПЕРАТОРА УМНОЖЕНИЯ НА ФУНКЦИЮ

Рассмотрим коммутатор $[M_a, H]$ операторов M_a и H:

$$[M_a, H] = M_a H - H M_a. \tag{8}$$

Каким условиям должна удовлетворять функция a, чтобы коммутатор был компактным?

Будем говорить, что функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ функция

$$a^*(x) := \operatorname*{ess\,sup}_{t \in K} |a(x) - a(x - t)| \tag{9}$$

принадлежит классу $B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$. Функции из $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$ будем называть функциями *типа слабо осциллирующих на бесконечности.*

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$, $a \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$. *Тогда коммутатор* $[M_a, H]$ *компактен в пространстве* $L_{p,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$, $a \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда оператор* HM_a *компактен в пространстве* $L_{p,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. *В частности, оператор* HP_D *компактен для любого измеримого ограниченного множества* $D \subset \mathbb{R}^n$.

ОПЕРАТОРЫ СВЕРТКИ С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

В пространстве $L_{p,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор H_b вида

$$(H_b\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(x,y)h(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

где $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Функцию $b(x,y)$ назовем *характеристикой.*

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$ *и* $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$. *Тогда если функция* $b \in L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N,|y|>N} |b(x,y)| = 0, \tag{11}$$

то оператор H_b *компактен в пространстве* $L_{p,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

ОБРАТИМОСТЬ ОПЕРАТОРОВ ТИПА СВЕРТКИ

В пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, $0 < \lambda < n/p$, рассмотрим оператор $cI + H$, где $c \in \mathbb{C}$, I — тождественный оператор, H — оператор свертки с ядром $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ множество всех операторов вида $cI + H$. Легко проверить, что относительно обычных операций сложения, умножения, умножения на комплексные числа и нормы, определяемой равенством

$$\|cI + H\|_{\mathfrak{A}_0} = |c| + \|h\|_1, \tag{12}$$

множество $\mathfrak{A}_0$ образует коммутативную банахову алгебру.

Обозначим через $\mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ винеровскую алгебру, т. е. множество всех функций вида $c+\widehat{f}(\xi)$, где $c\in\mathbb{C}$ и $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$. Известно, что это множество, снабженное поточечными алгебраическими операциями и нормой

$$\|c+\widehat{f}\|_{\mathcal{W}}=|c|+\|f\|_1 \tag{13}$$

является коммутативной банаховой алгеброй.

Легко проверить, что отображение

$$\mathcal{F}\colon \mathfrak{A}_0\to\mathcal{W}(\mathbb{R}^n),\quad cI+H\to c+\widehat{h}(\xi) \tag{14}$$

является изометрическим изоморфизмом. Следовательно, оператор $cI+H$ обратим в алгебре $\mathfrak{A}_0$, тогда и только тогда, когда выполнялняется условие

$$c+\widehat{h}(\xi)\neq 0,\quad \forall\xi\in\dot{\mathbb{R}}^n, \tag{15}$$

где $\dot{\mathbb{R}}^n$ — компактификация $\mathbb{R}^n$ одной бесконечно удаленной точкой.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$, содержащую все операторы вида $cI+H$. Эта алгебра представляет собой замыкание в равномерной операторной топологии множества $\mathfrak{A}_0$. Заметим, что алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна.

Лемма 2. *Если оператор* $cI + H$ *обратим в* $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$, *то оператор* $(cI + H)^{-1}$ *принадлежит алгебре* $\mathfrak{A}$.

Лемма 3. *Если оператор* $cI + H$ *обратим в алгебре* $\mathfrak{A}$, *то оператор* $(cI + H)^{-1}$ *принадлежит алгебре* $\mathfrak{A}_0$.

Теорема 4. *Оператор* $cI+H$ *был обратим в* $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$, *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$c + \widehat{h}(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}^n. \tag{16}$$

ЛОКАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО МОРРИ

Определение 5. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $\lambda \geqslant 0$. *Локальное пространство Морри* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *— это совокупность всех функций* $f \in L^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$, *таких что*

$$\|f\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{r>0} \frac{\|f\|_{L_p(\mathbb{B}(0,r))}}{r^\lambda} < \infty. \tag{17}$$

При $\lambda = 0$ локальное пространство Морри совпадает с L_p–пространством, т. е.

$$L^0_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n).$$

Поэтому ниже считаем, что $\lambda > 0$.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

В пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, где $1 \leqslant p < \infty$ и $\lambda > 0$, рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

где функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (здесь и далее $n \geqslant 2$), измерима и удовлетворяет следующим условиям:

1° однородность степени $(-n)$, т. е.

$$k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x,y), \quad \forall\, \alpha > 0;$$

2° инвариантность относительно группы вращений $SO(n)$, т. е.

$$k(\omega(x), \omega(y)) = k(x,y), \quad \forall\, \omega \in SO(n).$$

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

Предложение 3. (Н. Г. Самко) *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $\lambda > 0$ *и выполнены условия* 1°–2°. *Тогда если*

$$3^\circ \qquad \varkappa_{p,\lambda} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y)||y|^{-n/p+\lambda}\, dy < \infty,$$

то оператор K *ограничен в пространстве* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *причем*

$$\|K\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varkappa_{p,\lambda}\|\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}. \tag{19}$$

Если $k(x, y) \geqslant 0$, *то условие* 3° *необходимо для ограниченности оператора* K.

КОМПАКТНОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

Ниже всюду предполагается, что $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, а ядро оператора K удовлетворяет условиям 1°–3°.

Обозначим через $C_{0,0}(\mathbb{R}^n)$ совокупность всех непрерывных на $\mathbb{R}^n$ финитных функций, носитель которых не содержит точку $x = 0$.

Лемма 4. *Пусть функции $a(x)$ и $b(x)$ принадлежат классу $C_{0,0}(\mathbb{R}^n)$. Тогда оператор $M_a K M_b$ компактен в пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство основано на следующем утверждении.

Предложение 4. (Н. А. Бокаев, В. И. Буренков, Д. Т. Матин.) *Пусть* $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$. *Множество* $\Psi \subset L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *является предкомпактным, если выполнены следующие условия:*

I) $\sup\limits_{f\in\Psi} \|f\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty$,

II) $\lim\limits_{R_1\to 0} \sup\limits_{f\in\Psi} \|f\chi_{B(0,R_1)}\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = 0$,

III) $\lim\limits_{\delta\to 0} \sup\limits_{f\in\Psi} \|A_\delta f - f\|_{L_p(B(0,R_2)\setminus B(0,R_1))} = 0$,

IV) $\lim\limits_{R_2\to \infty} \sup\limits_{f\in\Psi} \|f\chi_{CB(0,R_2)}\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = 0$,

где

$$(A_\delta f)(x) = \frac{1}{|B(x,\delta)|} \int\limits_{B(x,\delta)} f(y)\,dy.$$

Определение 6. *Будем говорить, что функция* $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ *принадлежит классу* $B^{\sup}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$*, если*

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} |a(x)| = \lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|<1/N} |a(x)| = 0. \tag{20}$$

Теорема 5. *Пусть функции* $a(x)$ *и* $b(x)$ *принадлежат классу* $B^{\sup}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$*. Тогда оператор* $M_a K M_b$ *компактен в пространстве* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$*.*

Следствие 2. *Пусть* D_1 *и* D_2 *— ограниченные измеримые области в* $\mathbb{R}^n$*, причем* $0 \notin \overline{D_1}$ *и* $0 \notin \overline{D_2}$*. Тогда оператор* $P_{D_1} K P_{D_2}$ *компактен в пространстве* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$*.*

В пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор

$$(K_c\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} c(x,y)k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{21}$$

где $k(x,y)$ удовлетворяет условиям 1°–3°, $c(x,y) \in L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Теорема 6. *Пусть характеристика $c(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N, y\in\mathbb{R}^n} |c(x,y)| = \lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|<1/N, y\in\mathbb{R}^n} |c(x,y)| = 0, \tag{22}$$

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n, |y|>N} |c(x,y)| = \lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n, |y|<1/N} |c(x,y)| = 0. \tag{23}$$

Тогда оператор K_c компактен в пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!