О вложении пространства обобщенных дробно-максимальных функций и пространства обобщенного потенциала Рисса в перестановочно-инвариантные пространства

Бокаев Н.А., Гогатишвили А.,Каршыгина Г.Ж. Абек А. Н., Унвер Т.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана,Институт Математики Академии наук Чехии, Прага

ВОРКШОП ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ПРОСТРАНСТВАМ, ПОСВЯЩЕННЫЙ ЮБИЛЕЮ Д.Ф.-М.Н., ПРОФЕССОРА ГОЛЬДМАНА МИХАИЛА ЛЬВОВИЧА

17 апреля 2025 года

Цель работы:

1.Рассмотрение пространства обобщенных потенциалов Рисса H_E^G и пространства обобщенных дробно-макимальных функций M_E^Φ, построенных на базе перестановочно-инвариантного пространства E.
2. Построение конусов монотонных функций дающие эквивалентные конструктивные описание для конусов убывающих перестановок обобщенных потенциалов Рисса и обобщенных дробно-максимальных функций.
3. Нахождение критериев вложений пространства обобщенных потенциалов Рисса и обобщенных дробно-максимальных функций $H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$ в перестановочно инвариантные пространства в терминах вложений построенных конусов монотонных функций.
4. Привести явное описание оптимального ПИП $X_0(R^n)$ для вложения $H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$ и в частности, в случае, когда базовое ПИП $E(R^n)$ совпадает с весовым пространством Лоренца $\Lambda_p(u)$.

Классический потенциал Рисса:

$$G(x) = \rho^{\alpha-n}, \;\; \rho = |x| \in \mathbb{R}_+,$$

$$I_\alpha f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

Обобщенный потенциал Рисса рассматривался в работах [8-9] как оператор свертки

$$(I_G f)(x) = (G * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y) dy, \;\; f \in E(\mathbb{R}^n), \qquad (1)$$

где ядро $G(x)$ удовлетворяет условию

$$G(x) \cong \Phi(|x|), \;\; x \in \mathbb{R}^n, \qquad (2)$$

$$\Phi \in B_n(\infty).$$

Классическая дробно-максимальная функция $M_\alpha f$:

$$(M_\alpha f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|dy, \alpha \in (0; n]. \tag{3}$$

Пусть $\Phi : (0, \infty) \to (0, \infty)$. Для функции $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *обобщенная дробно-максимальная функция* $M_\Phi f$ определяется следующим образом:

$$(M_\Phi f)(x) = \sup_{r>0} \Phi(r) \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|dy, \tag{4}$$

где $B(x, r)$ — шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ и радиусом $r > 0$. В случае $\Phi(r) = r^{\alpha-n}$, $\alpha \in (0; n)$ получаем классическую дробно-максимальную функцию $M_\alpha f$.

Пространство потенциалов Рисса

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) = \{u = G * f : f \in E(\mathbb{R}^n)\},$$

$$\|u\|_{H_E^G} = \inf\{\|f\|_E : \quad f \in E(\mathbb{R}^n); \quad G * f = u\}$$

$$(G * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y) dy$$

Пространства потенциалов на базе пространств L_p изложены в монографиях
С.М.Никольского (Приближение функций многих переменных и теоремы вложения),
Е.Стейна (Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций),
В.Г. Мазья, (Пространства Соболева).

Пространство общенных дробно-максимальных функции

Пусть $E \equiv E(\mathbb{R}^n)$ — перестановочно-инвариантное пространство. Введем пространство обобщенной дробно-максимальной функции $M_E^\Phi = M_E^\Phi(\mathbb{R}^n)$ как множество всех функций u, для которой существует функция $f \in E(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$u(x) = (M_\Phi f)(x),$$

$$\|u\|_{M_E^\Phi} = \inf\{\|f\|_E : f \in E(\mathbb{R}^n); \quad M_\Phi f = u \quad \text{a.e.}\} < \infty. \tag{5}$$

[9] Hakim, D.I., Nakai, E., Sawano, Y., (2016), Generalized fractional maximal operators and vector-valued inequalities on generalized Orlicz-Morrey spaces, Revista Matematica Complutense, 29, pp.59-90.

1. M.L. Goldman. On the cones of rearrangements for generalized Bessel and Riesz potentials, Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 55, Nos. 8-10, Oktober 2010, 817-832.
2. M.L.Goldman. Some constructive criteria of optimal embeddings for potentials, Complex Variables and Elliptic Equations, Vol.56, No.10-11, 2011, 1-19.
3. Н.,А. Бокаев, М. Л. Гольдман, Г. Ж. Каршыгина. Конусы функций с условиями монотонности для обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса, //Математические заметки, 2018, V 104, N3. C. 356-373
4. N.A. Bokayev, M.L. Goldman, G.Zh. Karshygina. Criteria for embedding of generalized Bessel and Riesz potential spaces in rearrangement invariant spaces. Eurasian mathematical journal Volume 10, Number 2 (2019), 8-29.
5. Bokayev N.A., Gogatishvili A., Abek A.N., (2023), On estimates of non-increasing rearrangement of generalized fractional maximal function, Eurasian Math. Journal, V14(No.2), pp.13-26.
6. BokayevN.A., Gogatishvili A., AbekA.N.Cones of monotone functions generated by a generalized fractional maximal function// TWMS journal J. Pure Appl. Math. 2024. V.15.no.1.P. 127–141.

Перестановочно инвариантные пространства

Пусть (S, Σ, μ) есть пространство с мерой. Здесь $\Sigma - \sigma$-алгебра подмножеств множества S, на которых определена неотрицательная σ-конечная, $\sigma-$ аддитивная мера μ. Через $L_0 = L_0(S, \Sigma, \mu)$ обозначим множество μ-измеримых вещественнозначных функций $f : S \to R$;

$$L_0^+ = \{f \in L_0 : f \geq 0\}.$$

Определение 1.

([4] Bennett C., Sharpley R.C. Interpolation of Operators, New York, *Math.*,1988,129)

Отображение $\rho : L_0^+ \to [0, \infty]$ называется функциональной нормой (кратко: ФН), еслидлявсех $f, g, f_n \in L_0^+, \quad n \in N$ выполнены условия:

$(P1) \quad \rho(f) = 0 \Rightarrow f = 0, \ \mu-$ почти всюду (кратко: $\mu-$ п.в);

$\rho(\alpha f) = \alpha\rho(f), \alpha \geq 0; \rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g)$ (свойства нормы);

$(P2) \quad f \leq g, \ (\mu-$ п.в.$) \Rightarrow \rho(f) \leq \rho(g)$ (монотонность нормы);

$(P3) \quad f_n \uparrow f \Rightarrow \rho(f_n) \to \rho(f) (n \to \infty)$(свойство Фату);

$(P4) \quad 0 < \mu(\sigma) < \infty \Rightarrow \int\limits_\sigma f d\mu \leq c_\sigma \rho(f), f \in L_0^+$. (Локальная интегрируемость);

$(P5) \quad 0 < \mu(\sigma) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_\sigma) < \infty$ (конечность ФН для характеристических функций (χ_σ) множеств конечной меры).

Пример функциональной нормы:

$$L_p[a,b] : \quad \|f\|_{L_p[a,b]} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Введем отношения порядка на L_0^+, $f \prec g$:
1. $f \prec f$;
2. $f \prec g$, $g \prec h \Rightarrow f \prec h$.
3.; $f \approx g \Leftrightarrow f \prec g \prec f$.
Примеры:
1. $f \prec g \Leftrightarrow f \leq g$, μ-п.в.
2. $f \prec g \Leftrightarrow f^*(t) \leq g^*(t) \qquad t \in (0, \mu(S))$.
3. $f \prec g \Leftrightarrow \int\limits_0^t f^*(\tau)d\tau \leq \int\limits_0^t g^*(\tau)d\tau, \qquad t \in (0, \mu(S))$
где $f^*(t) = \inf\{y > 0 : \lambda_f(y) \leq t\}$- невозрастающая перестановка функций f.
где $\lambda_f(y) = \mu_n\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > y\}$ - функция распределения для f.
f^* : 1. $0 \leq f^* \downarrow$ 2. $f^*(t+0) = f^*(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$.
3. f^* равноизмеримас f т.е.
$\mu_n\{x \in R^n : |f(x)| > y\} = \mu_1\{t \in R_+ : f^*(t) > y\}, y \in R_+$.
$f^{**}(t) = t^{-1} \int\limits_0^t f^*(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+$

Определение 2.

Пусть ρ есть ФН. Скажем, что ρ **согласована сотношением порядка** $\prec$, если для $f,\ \ g \in L_0^+,\ \ f \prec g$ имеем

$$\rho(f) \leq \rho(g).$$

Отметим, что любая ФН согласована с поточечной оценкой:

$$f \leq g \quad (\mu - \text{п.в.}) \Rightarrow \rho(f) \leq \rho(g).$$

Определение 3.

Пусть ρ естьФН. Множество $X = X(\rho)$ функций из L_0, для которых $\rho(|f|) < \infty$ называется **Банаховым функциональным пространством** (кратко: БФП), порожденным ФН ρ.

Для $f \in X$ полагаем

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

Для ФН ρ введем ассоциированную норму $\rho^{'}$:

$$\rho^{'}(g) = sup\left\{ \int_S f\ g\ d\mu :\ f \in L_0^+,\ \rho(f) \le 1 \right\}, g \in L_0^+.$$

Теорема 1.

Пусть ρ есть ФН, ρ'— ассоциированная норма,

$$X' = X(\rho') = \left\{g \in L_0 : \qquad \rho'(|g|) < \infty\right\}. \tag{6}$$

Тогда, ρ' является ФН; X' есть БФП с нормой

$$\|g\|_{X'} = \rho'(|g|), \tag{7}$$

причем пространства X и X' являются банаховыми и для них справедлив принцип двойственности

$$X'' := (X')' = X. \tag{8}$$

[Bennett C., Sharpley R.C. Interpolation of Operators, New York, *Math.*,1988,129]

Пример: $X = L_p(R_+): \quad \rho(f) = \left(\int_{R_+} |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$,
$X' = L_{p'}(R_+), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \;\; 1 \le p < \infty.$

Определение 4.

ФН ρ называется **перестановочно инвариантной**, если она согласована с отношением порядка

$$f^* \leq g^* \Rightarrow \rho(f) \leq \rho(g).$$

(Монотонность ФН относительно убывающих перестановок)

БФП $X = X(\rho)$, порожденное перестановочно инвариантной ФН ρ, будем называть **перестановочно инвариантным пространством** (кратко: ПИП). Известно, что для ПИП также

$$\int_0^t f^* d\tau \leq \int_0^t g^* d\tau \Rightarrow \rho(f) \leq \rho(g).$$

ПИП пространствам посвящены работы М.Л.Гольдмана, D.Haroske, Ф.Энрикес, А.В.Малышевой, Э.Г.Бахтыгареевой и другие.

Конусы монотонных функций на положительной полуоси

Определение 5

Определим $\Gamma_T = \{K(T)\}$ для $T \in (0, \infty]$ как множество конусов, состоящих из измеримых неотрицательных функций на $(0, T)$, снабженных положительными однородными функционалами $\rho_{K(T)} : K(T) \to [0, \infty)$ со свойствами:
(1) $h \in K(T), \ \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha h \in K(T), \quad \rho_{K(T)}(\alpha h) = \alpha \rho_{K(T)}(h)$;
(2) $\rho_{K(T)}(h) = 0 \Rightarrow h = 0$ п.в. на $(0, T)$.

$$\Omega(T) = \left\{ \varphi : \quad 0 < \varphi(t) \downarrow; \ \varphi(t+0) = \varphi(t), \ \int\limits_0^t \varphi d\xi < \infty; \ \ t \in (0, T) \right\}$$

$$f_\varphi(t, \tau) = \varphi(\max\{t, \tau\}) = \begin{cases} \varphi(t), & 0 < \tau \leq t, \\ \varphi(\tau), & t < \tau < \infty; \end{cases}$$

$$\tilde{f}_\varphi(t, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \varphi(\xi) d\xi, & 0 < \tau \leq t, \end{cases}$$

ПИП $\tilde{E}(\mathbb{R}_+)$ - представлениеЛюксембургадляПИП $E(\mathbb{R}^n)$, т.е.

$$\|f\|_{E(\mathbb{R}^n)} = \|f^*\|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)};$$

$\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$ - ассоциированноеПИПдля $\tilde{E}(\mathbb{R}_+)$.

$$\tilde{E}^{\downarrow}(\mathbb{R}_+) = \left\{g \in \tilde{E}(\mathbb{R}_+) : \ 0 \leq g \downarrow; \ g(t+0) = g(t), \ t \in \mathbb{R}_+\right\};$$

При $T < \infty$

$$\tilde{E}^{\downarrow}(0, T) = \left\{g \in \tilde{E}^{\downarrow}(\mathbb{R}_+) : \ g(t) = 0, \ t \in [T, \infty)\right\}.$$

$$K(T) = K_{\varphi,\tilde{E}}(T) =$$

$$= \left\{ h(t) \equiv h(g;t) := \int\limits_0^\infty f_\varphi(t,\tau) g(\tau) d\tau : g \in \tilde{E}^{\downarrow}(0,T) \right\};$$

$$\rho_{K(T)}(h) = \inf \left\{ \|g\|_{\tilde{E}} : \ g \in \tilde{E}^{\downarrow}(0,T); \ h(g;t) = h(t), \ t \in \mathbb{R}_+ \right\};$$

$$\tilde{K}(T) = \tilde{K}_{\varphi,\tilde{E}}(T) =$$

$$= \left\{ \tilde{h}(t) \equiv \tilde{h}(g;t) := \int\limits_0^\infty \tilde{f}_\varphi(t,\tau) \tilde{g}(\tau) d\tau : \ \tilde{g} \in \tilde{E}^{\downarrow}(0,T) \right\}.$$

$$\rho_{\tilde{K}}(\tilde{h}) = \inf \left\{ \|\tilde{g}\|_{\tilde{E}} : \ \ \tilde{g} \in \tilde{E}^{\downarrow}(0,T); \ \ \tilde{h}(\tilde{g};t) = \tilde{h}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Конусы убывающих перестановок для потенциала Рисса

$$M(T) = M_E^G(T) = \left\{ h(t) = u^*(t), \quad t \in (0,T) : u \in H_E^G \right\};$$

$$\rho_{M(T)}(h) = \inf \left\{ \|u\|_{H_E^G} : u \in H_E^G, u^*(t) = h(t), \quad t \in (0,T) \right\}$$

$$\tilde{M}(T) = \tilde{M}_E^G(T) = \left\{ h(t) = u^{**}(t), \quad t \in (0,T) : u \in H_E^G \right\};$$

$$\rho_{\tilde{M}(T)}(h) = \inf \left\{ \|u\|_{H_E^G} : u \in H_E^G, u^{**}(t) = h(t), \quad t \in (0,T) \right\}$$

$$\rho_M : \quad M \to [0, \quad \infty); \quad h \in M \Rightarrow \alpha h \in M, \ \alpha \geq 0; \ \rho_M(\alpha h) = \alpha \rho_M(h);$$

$$K = K_{E,\Phi}(\infty) = \left\{ h(g;t) = h(t) = \int_0^\infty f_\Phi(t;\tau) g(\tau) d\tau, t \in \mathbb{R}_+ : g \in \widetilde{E}_0(\mathbb{R}_+$$

$$\rho_K(h) = inf \left\{ \|g\|_{\widetilde{E}(\mathbb{R}_+)} : h(g;t) = h(t), t \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Определение 6

Конус M **порядково накрывает конус** K при отношении порядка $\prec$ с константами накрывания $c_0 \in \mathbb{R}_+$ и $c_1 \in [0,\infty)$ если для любой $h_1 \in K$ найдется $h_2 \in M$ такая, что

$$\rho_M(h_2) \le c_0 \rho_K(h_1), \qquad h_1 \prec h_2 + c_1 \rho_K(h_1).$$

При **поточечном накрывании:**

$$\rho_M(h_2) \le c_0 \rho_K(h_1), \qquad h_1 \le h_2 + c_1 \rho_K(h_1), \qquad \mu\text{- п.в.}$$

Обозначения: $K \prec M$ - конус M порядково накрывает конус K;
$K \approx M \Leftrightarrow K \prec M \prec K$ - порядковая эквивалентность конусов.
Поточечное накрывание: $K \le M$, поточечная эквивалентность: $K \cong M$.
Замечание $K \le M \Rightarrow K \prec M$; $\quad K \cong M \Rightarrow K \approx M$.

Теорема 2.

1. В приведенных обозначениях и условиях имеет место поточечное накрывание

$$K(T) \le \tilde{K}(T)$$

сконстантаминакрывания: $c_0(A) \le 1 + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0; \quad c_1(A) = 0.$

2. Пусть выполнены условия части 1 и еще

$$A_\varphi \equiv A_\varphi(T) := \sup_{t \in (0,T)} \frac{\int\limits_0^t \varphi d\tau}{t\varphi(t)} < \infty.$$

Тогда, имеет место поточечное накрывание $\tilde{K}(T) \le K(T)$ с константами накрывания $c_0(\mathcal{D}) \le (1+\varepsilon)A_\varphi, \quad \forall \varepsilon > 0$; $c_1(\mathcal{D}) = 0, \quad$ если $\quad T = \infty; \quad c_1(\mathcal{D}) = \| \tilde{f}_\varphi(T, \cdot) \|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)} < \infty, \quad$ если $\quad T < \infty.$

Следствие 1.

В условиях части 2 Теоремы 2 имеет место поточечная эквивалентность конусов

$$\tilde{K}(T) \cong K(T).$$

Теорема 3.

1. В условиях части 1 Теоремы 2 и еще

$$B_\varphi \equiv B_\varphi(T) := \sup_{t\in(0,T)} \frac{\int\limits_0^t \varphi d\tau}{\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\tau d\tau} < \infty.$$

Тогда, справедливо порядковое накрывание

$$\tilde{K}(T) \prec K(T)$$

при отношении порядка $\int\limits_0^t f_1^*(\tau)d\tau \leq \int\limits_0^t f_2^*(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+$ с константами накрывания

$$c_0(D) \leq 2(B_\varphi + 1)(2B_\varphi^2 + 1);\;\; c_1(D) = 0.$$

Следствие 2.

В условиях Теоремы 3 и из почечного накрывания $K(T) \le \tilde{K}(T)$ имеет место порядковая эквивалентность конусов

$$K(T) \approx \tilde{K}(T)$$

при отношении порядка $\int\limits_0^t f_1^* d\tau \le \int\limits_0^t f_2^* d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+$.

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) = \{u = G * f : f \in E(\mathbb{R}^n)\},$$

$$\|u\|_{H_E^G} = \inf\{\|f\|_E : \quad f \in E(R^n); \quad G * f = u\}$$

Ядро представления G называем допустимым, если

$$G \in L_1(R^n) + E'(R^n).$$

Теорема 4.

(Гольдман 2010). Пусть G есть допустимое ядро. Тогда, интеграл $(G * f)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} G(x - y) f(y) dy$ сходится для почти всех $x \in R^n$.

Кроме того, $H_E^G(R^n)$ есть банахово пространство, причем

$$H_E^G(R^n) \subset E(R^n) + L_\infty(R^n),$$

$$\|u\|_{E+L_\infty} \leq \|G\|_{L_1+E'} \|u\|_{H_E^G}, \quad u \in H_E^G.$$

Определение 7

Пусть $R \in (0, \infty]$. Функция $\Phi :$ принадлежит классу $B_n(R)$, если

$$0 < \Phi(r) \downarrow \text{на} (0, R); \Phi(r+0) = \Phi(r), \quad \int\limits_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1} d\rho < \infty, r \in (0, R).$$

$$\text{и если} \quad R < \infty, \text{то} \quad \Phi(r) = 0, \quad r \in [R, \infty).$$

Обозначим

$$\varphi(\tau) := \Phi\left((\tau / V_n)^{1/n}\right), \quad \tau \in (0, T);$$

$$T = V_n R^n, \text{при } R < \infty, \qquad T = \infty, \text{при } R = \infty;$$

тогда $\varphi \in \Omega(T)$, т.е.

$$0 < \varphi \downarrow \text{на } (0, T); \quad \int\limits_0^t \varphi(\tau) d\tau < \infty, \quad \tau \in (0, T).$$

Обобщенный потенциал Рисса

Определение 8

Пусть $R = \infty$; $G(x) \cong \Phi(\rho) \in \mathrm{B}_n(\infty)$, $\rho = |x| \in (0, \infty)$, $\varphi \in \Omega(\infty)$ и

$$\varphi \in \tilde{E}'(t, \infty), t \in (0, \infty)$$

тогда потенциалы $u = H_E^G(\mathbb{R}^n)$ называется обобщенными потенциалами Рисса.

Классический потенциал Рисса:

$$G(x) = \rho^{\alpha - n}, \ \ \rho = |x| \in \mathbb{R}_+,$$

$$\Phi(\rho) = \rho^{\alpha - n} \Rightarrow \varphi(t) = ct^{\alpha/n - 1}, \quad 0 < \alpha < n.$$

$$(G * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy.$$

Теорема (Гольдман 2010). Пусть G допустимое ядро и еще

$$A_\varphi \equiv A_\varphi(T) := \sup_{t\in(0,T)} \frac{\int\limits_0^t \varphi d\tau}{t\varphi(t)} < \infty.$$

тогда для обобщенных потенциалов типа Рисса имеем:

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow M_E^G(\infty) \mapsto \tilde{X}(\mathbb{R}_+).$$

Теорема 5.

Для обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса при $T < \infty$ или $T = \infty$, соответственно, имеет место

1. при условии $A_\varphi \equiv A_\varphi(T) := \sup\limits_{t\in(0,T)} \dfrac{\int\limits_0^t \varphi d\tau}{t\varphi(t)} < \infty$ - поточечная эквивалентность конусов

$$M_E^G(T) \cong \tilde{M}_E^G(T) \cong K(T); \tag{9}$$

2. при условии $B_\varphi \equiv B_\varphi(T) := \sup\limits_{t\in(0,T)} \dfrac{\int\limits_0^t \varphi d\tau}{\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\tau d\tau} < \infty$ - порядковая эквивалентность конусов

$$M_E^G(T) \approx \tilde{M}_E^G(T) \approx K(T) \tag{10}$$

при следующем отношении порядка: $h_1, \quad h_2 \in L_0^+(0, T)$

Неэквивалентность условий $A_\varphi < \infty$ и $B_\varphi < \infty$ для $\varphi \in \Omega(T)$.

$$A_\varphi \equiv A_\varphi(T) := \sup_{t\in(0,T)} \frac{\int\limits_0^t \varphi d\tau}{t\varphi(t)} < \infty.$$

$$B_\varphi \equiv B_\varphi(T) := \sup_{t\in(0,T)} \frac{\int\limits_0^t \varphi d\tau}{\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\tau d\tau} < \infty.$$

1. Для $\varphi \in \Omega(T)$ справедлива оценка

$$B_\varphi \le 2A_\varphi.$$

2. Обратная оценка не имеет места; более того,

$$\exists \quad \varphi \in \Omega(T): \qquad B_\varphi < \infty, \qquad A_\varphi = \infty.$$

Определение 9

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $R \in (0; \infty]$. Функция $\Phi : (0; R) \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу $A_n(R)$, если:
(1) Φ убывающая и непрерывная на $(0; R)$;
(2) функция $\Phi(r) r^n$ квазивозрастает на (0,R).

Например, $\Phi(t) = t^{\alpha - n} \in A_n(\infty), \ \ 0 < \alpha < n.$

Определение 10

[8] Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $R \in (0; \infty]$. Функция $\Phi : (0; R) \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу $B_n(R)$ если выполняются следующие условия:
(1) Φ невозрастающая и непрерывная на $(0; R)$;
(2) существует $C = C(\Phi, n) > 0$ такая, что

$$\int\limits_0^r \Phi(\rho) \rho^{n-1} d\rho \le C \Phi(r) r^n, \quad r \in (0, R). \tag{11}$$

$\Phi(\rho) = \rho^{\alpha - n} \in B_n(\infty)$ $(0 < \alpha < n)$; $\Phi(\rho) = ln \frac{eR}{\rho} \in B_n(R)$.

Определение 11

Пусть $R \in (0;\infty]$. Будем говорить, что $\Phi : (0;R) \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу $D(R)$, если для некоторого $C = C(\Phi) > 0$

$$\int\limits_0^r \frac{dt}{\Phi(t)t} \le \frac{C}{\Phi(r)}, \quad r \in (0;R). \tag{12}$$

2. Оценки сверху невозрастающей перестановки обобщенной дробно-максимальной функции

Для классического максимального оператора Харди-Литтлвуда M имеет место неравенство

$$cf^{**}(t) \le (Mf)^*(t) \le Cf^{**}(t), \quad t \in (0, \infty)$$

выполняется для некоторого $0 < c \le C < \infty$ [11]. Для классического дробного максимального оператора

$$(M_\gamma f)(x) := \sup_{r>0} |B(x,r)|^{\frac{\gamma}{n}-1} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy, \quad 0 < \gamma < n,$$

в [12] для некоторого $C > 0$ получена следующая оценка

$$(M_\gamma f)^*(t) \le C \sup_{t<\tau<\infty} \tau^{\gamma/n} f^{**}(\tau), \quad t \in (0, \infty)$$

для каждого $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

[12] Cianchi, A., Kerman, R., Opic, B., Pick, L., (2000), A sharp rearrangement inequality for the fractional maximal operator, Studia Mathematica, V138(No 3), pp.277-284.

Теорема 6.

Let $\Phi \in A_n(\infty)$. Then there exists a positive constant C, depending only on Φ and n, such that

$$(M_\Phi f)^*(t) \leq C \sup_{t<s<\infty} s\Phi(s^{1/n}) f^{**}(s), \quad t \in (0,\infty), \tag{13}$$

for every $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 7.

Let $\Phi \in A_n(\infty)$. Inequality (2.8) is sharp in the sense that for every $\varphi \in L^+_0(0,\infty;\downarrow)$ there exists a function $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$ such that $f^* = \varphi$ almost everywhere on $(0,\infty)$ and

$$(M_\Phi f)^*(t) \geq C_1 \sup_{t<s<\infty} s\Phi(s^{1/n}) f^{**}(s), \quad t \in (0,\infty), \tag{14}$$

where C_1 is a positive constant which depends only on Φ and n.

В следующей лемме доказывается, что обобщенная дробно-максимальная функция $(M_\Phi f)(x)$ оценивается обобщенным потенциалом Рисса.

Лемма 1

Let $\Phi \in B_n(\infty)$ and $G(x) \cong \Phi(|x|), \;\; x \in \mathbb{R}^n$. Then

$$(M_\Phi f)(x) \leq (I_G|f|)(x), \;\; x \in \mathbb{R}^n \tag{15}$$

for all $f \in E(\mathbb{R}^n)$.

Пусть E — ПИП. Рассмотрим следующие четыре конуса, порожденные невозрастающими перестановками ОДМФ:

$$K_1 \equiv K_E^{\Phi} := \{h \in L^+(\mathbb{R}_+) : h(t) = u^*(t),\ t \in \mathbb{R}_+,\ u \in M_E^{\Phi}\},$$
$$\rho_{K_1}(h) = \inf\{\|u\|_{M_E^{\Phi}} : u \in M_E^{\Phi};\ u^*(t) = h(t),\ t \in \mathbb{R}_+\};$$

$$K_2 \equiv \widehat{K_E^{\Phi}} := \{h : h(t) = u^{**}(t),\ t \in \mathbb{R}_+,\ u \in M_E^{\Phi}\},$$
$$\rho_{K_2}(h) = \inf\{\|u\|_{M_E^{\Phi}} : u \in M_E^{\Phi};\ u^{**}(t) = h(t),\ t \in \mathbb{R}_+\};$$

$$K_3 \equiv \widetilde{K_E^{\Phi}} := \Big\{h \in L^+(\mathbb{R}_+) : h(t) = \sup_{t<\tau<\infty} \tau\Phi(\tau^{1/n})u^{**}(\tau),\ t \in \mathbb{R}_+,\ u \in E$$
$$\rho_{K_3}(h) = inf\Big\{\|u\|_{E(\mathbb{R}^n)}, u \in E(\mathbb{R}^n) : \sup_{t<\tau<\infty} \tau\Phi(\tau^{1/n})u^{**}(\tau) = h(t),\ t \in \mathbb{R}$$

$$K_4 \equiv \widetilde{\widetilde{K_E^{\Phi}}} := \Big\{h \in L^+(\mathbb{R}_+) : h(t) = t\Phi(t^{1/n})u^{**}(t) + \sup_{t<\tau<\infty} \tau\Phi(\tau^{1/n})u^*(\tau$$
$$\rho_{K_4}(h) = inf\Big\{\|u\|_{E(\mathbb{R}^n)}, u \in E(\mathbb{R}^n) : t\Phi(t^{1/n})u^{**}(t) + \sup_{t<\tau<\infty} \tau\Phi(\tau^{1/n})u^*(\tau$$

Следующая теорема доказывает, что конус $M_{E,G}$, порожденный обобщенным потенциалом Рисса, накрывает конус, порожденный обобщенной максимальной функцией.

Теорема 8.

Пусть $\Phi \in B_n(\infty)$ и ядро $G(x)$ удовлетворяет условию (15). Тогда конус, порожденный обобщенным потенциалом, накрывает конус, порожденный обобщенной максимальной функцией, т.е. $K_E^{\Phi} \prec M_{E,G}$.

Теорема 9.

1) Пусть $\Phi \in B_n(\infty)$. Тогда

$$K_4 \prec K_3$$

2) Пусть $\Phi \in D(\infty)$. Тогда

$$K_3 \prec K_4.$$

3) Пусть $\Phi \in B_n(\infty) \cap D(\infty)$. Тогда

$$K_3 \approx K_4.$$

Следствие 3.

Пусть $\Phi \in B_n(\infty) \cap D(\infty)$. Тогда

$$K_1 \approx K_2 \approx K_3 \approx K_4.$$

Критерий вложения ОП Рисса в ПИП

Теорема 10.

Пусть $\varphi(\tau)\chi_{(t,\infty)}(\tau) \in \tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$ и существуют постоянные d_0, d_1 :

$$d_0\Phi(r) \le G(x) \le d_1\Phi(r), \quad r = |x| \in \mathbb{R}_+$$

и пусть $B_\varphi \equiv B_\varphi(\infty) := \sup_{t\in(0,\infty)} \dfrac{\int\limits_0^t \varphi d\tau}{\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\tau d\tau} < \infty$. Тогда справедлив критерий вложения обобщенных потенциалов Рисса в ПИП $X(\mathbb{R}^n)$:

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow K_{\varphi,\tilde{E}}(\infty) \mapsto \tilde{X}(\mathbb{R}_+),$$

где $K_{\varphi,\tilde{E}}(\infty)$ - конус с $T = \infty$; $\tilde{E}(\mathbb{R}_+)$, $\tilde{X}(\mathbb{R}_+)$ - представления Люксембурга для ПИП $E(\mathbb{R}^n)$ и $X(\mathbb{R}^n)$, соответственно.

4. Критерий вложения пространства дробно-максимальных функций в ПИП

Теорема 11.

Пусть $\Phi \in B_n(\infty)$. Тогда вложение $M_E^{\Phi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow X(\mathbb{R}^n)$ эквивалентно следующему вложению

$$K_1 \mapsto \widetilde{X}(\mathbb{R}_+).$$

Следствие 4.

1) Пусть $\Phi \in B_n(\infty)$. Тогда

$$M_E^{\Phi}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow K_i \mapsto \widetilde{X}(\mathbb{R}_+), \quad i = 1; 2; 3. \tag{16}$$

2) Пусть $\Phi \in B_n(\infty) \cap D_n(\infty)$. Тогда

$$M_E^{\Phi}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow K_i \mapsto \widetilde{X}(\mathbb{R}_+), \quad i = 1; 2; 3; 4. \tag{17}$$

5. Описания оптимального пространства

Пусть E - ПИП. Под оптимальной ПИП для вложения $M_E^\Phi(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow X(\mathbb{R}^n)$ понимается такое ПИП $X_0 = X_0(R^n)$, что $M_E^\Phi(\mathbb{R}^n) \mapsto X_0(\mathbb{R}^n)$ и если $M_E^\Phi(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow X(\mathbb{R}^n)$ справедливо для другого ПИП X, то $X_0 \subset X$. Такое оптимальное ПИП называется перестановочно- инвариантной оболочкой пространства ДМФ.

Теорема 12.

В приведенных обозначениях оптимальное ПИП $X_0(\mathbb{R}^n)$ для вложения

$$H^G_{\Lambda^p(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$$

имеет эквивалентную норму в представлении Люксембурга:
1. для потенциалов типа Рисса:

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(0,\infty)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(w;(0,\infty))}.$$

Теорема 13.

Пусть $\Phi \in B_n(\infty)$. Оптимальное ПИП $X_0 = X_0(\mathbb{R}^n)$ для вложения $M_E^{\Phi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow X(\mathbb{R}^n)$ имеет эквивалентную норму (в смысле представления Люксембурга:

$$\|f\|_{\widetilde{X}_0(0,\infty)} = \sup_{g^*}\left\{\int\limits_0^\infty f^*(\tau)g^*(\tau)d\tau : g \in L_0(0,\infty),\right.$$

$$\left.\sup_{\int\limits_0^t h(s)ds \le \int\limits_0^t g^*(s)ds} \Big\| \int\limits_t^\infty \Phi(s^{1/n})sh(s)ds\Big\|_{E'} \le 1\right\}.$$

ПИП пространство Лоренца $E(R^n) = \Lambda^p(u)$, норма определяется в следующем виде:

$$\|f\|_{\Lambda^p(u)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{*p}(t)u(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 < p < \infty; \\ ess \sup\limits_{t\in(0,\infty)} \{f^*(t)u(t)\}, \ p = \infty. \end{cases} \tag{18}$$

ПространствомЛоренцасвесом u называетсяпространство $\Gamma^p(u)$

$$\|f\|_{\Gamma^p(u)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{**p}(t)u(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 < p < \infty; \\ ess \sup\limits_{t\in(0,\infty)} \{f^{**}(t)u(t)\}, \ p = \infty; \end{cases} \tag{19}$$

Пространство $\Gamma^\infty(u)$ называюттакжепространствомМарцинкевича.

Использованная литература:

1. С.Г.Крейн, Ю.И.Петунин и Е.М.Семенов. Интерполяция линейных операторов, Издательство: М., Наука, Физматлит, 1978,400
2. Bennett C., Sharpley R.C. Interpolation of Operators, New york, *Math.*,1988,129
3. M.L. Goldman. Some constructive criteria of optimal embeddings for potentials, Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 56, Nos. 10-11, Oktober 2011, 1-19.
4. M.L. Goldman.On the cones of rearrangements for generalized Bessel and Riesz potentials, Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 55, Nos. 8-10, Oktober 2010, 817-832.
5. С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М.: Наука 1969
6. Е.,Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М.: Мир 1973

7. Е.,Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М.: Мир 1973
8. В.Г. Мазья Пространства Соболева, Л.: ЛГУ 1985
9. М.,Л. Гольдман Об оптималных вложениях потенциалов Бесселя и Рисса, Труды Матем.Института им. В.А.Стеклова, 269. 2010 p. 91-111
10. А. В. Малышева, Оптимальные вложения обобщённых потенциалов Рисса, Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. N 2. 2013. С. 28–37
11. A., Gogatishvili, J.,S. Neves, B.,Opitz. Optimality of embeddings of Bessel-potential- type spaces, Function spaces, differential operators and nonlinear analysis, Math Inst. Acad. Sci. Chech Republic. vol. 2005 p. 97-102
12. М.,З. Берколайко, В.,И. Овчинников. Неравенства для целых функций экспоненциального типа в нормах симметричных пространств. Труды Матем. Инст. им. В.А.Стеклова, vol 161. 1983 p. 3-17

1. Н.,А. Бокаев, М. Л. Гольдман, Г. Ж. Каршыгина. Конусы функций с условиями монотонности для обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса, //Математические заметки, 2018, V 104, N3. С. 356-373
2. Каршыгина Г.Ж., Оптимальные вложения потенциалов типа Бесселя и Рисса на базе пространств Лоренца. // Вестник КарГУ, серия "Математика". N4, (88), 2017, С. 15-25
3. Karshygina G.Zh. Some integral estimates on the cones of functions with the monotonicity conditions // ВестникКарГУсерия "Математика". N2, (90), 2018, С. 80-87
4. Бокаев Н.А., Гольдман М.Л., Каршыгина Г.Ж. О конусах монотонных функций на положительной полуоси // Математический журнал Институт математики МОН РК Алматы, 2018. Т. 18, N2(68). С. 31-46.

5. Каршыгина Г.Ж. О достаточных условиях для вложения пространства потенциалов типа Рисса в весовые пространства Лоренца //13 Междунар. науч. конф. студентов, магистрантов и молодых ученых "Ломоносов - 2017". С. 12-13
6. М.Л.Гольдман, Н. А. Бокаев, М. Л. Гольдман, Г.Ж.Каршыгина, Оптимальные вложения потенциалов типа Рисса с базовым пространством Лоренца // Межд. науч. конф., посв. 70-летиюд. ф-м.н., Р. Ойнарова. 2017 С. 50-53
7. G.Zh. Karsygina, Optimal embeddings of Bessel and Riesz type potentials on the basis of weighted Lorentz spaces // AIP Conf. Proc. 1880, 030014-1-030014-7

8. G.Zh. Karsygina, Optimal embeddings for Bessel type potentials on the base of Lorentz spaces. // The VI Congress of the Turkic World Math. Soc.1. Astana 2017. p. 84.
9. Н. А. Бокаев, М. Л. Гольдман, Г.Ж.Каршыгина, О взаимосвязи конусов функций с условиями монотонности // "Известия"Межд. казахстко-турецкого университета им. Х.А.Яссави. Серия Мат., физ., инф. спец. вып. по матер. конф. мат. Казахстана "Актуальныепроблемыматематики"V II. N4, 2018. С. 32-35
10. Igenberlina A., Suleimenova Z.R., Karshygina G.Zh. On the sufficient condition for embedding of generalized Lizorkin-Triebel spaces // The abstract book of third International Conference on Analysis and Applied Mathematics. - 2016. - 74 p.

11. Bokayev N.A., Goldman M.L., Karshygina G.Zh., Criterion for embedding of generalized Riesz potential into a rearrangement invariant space. // Межд. конф. КРОМШ-2018, С. 46-47
12. Каршыгина Г.Ж. Об интегральных оценках для некоторого класса монотонных функций // VIII межд.научно-практ.конф. - УФА, 2018. Т. 2. С. 219-223
13. Bokayev N.A., Goldman M.L., Karshygina G.Zh. The criterion of embedding for generalized Bessel potentials into rearrangement invariant spaces,// Пятой Межд. конференции, посвящённой 95-летию со дня рождения члена- корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева, Москва, РУДН, 2018 г. С. 21-22

Спасибо за внимание!