Нижний и верхний классы Марцинкевича измеримых функций на полуоси $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$

Муратов М.А.(Симферополь, Россия)
Рубштейн Б.А. (Беер-Шева, Израиль)

Воркшоп по дифференциальным уравнениям и функциональным пространствам, посвященный юбилею д.ф.-м.н., профессора

ГОЛЬДМАНА Михаила Львовича

16 апреля 2025 г.

1. Введение

Рассматриваются симметричные пространства измеримых функций на пространстве с мерой $(I, \mathcal{B}_m, m)$, где $I = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ или $I = [0, a]$ с $0 < a < \infty$, m — обычная мера Лебега на I, а $\mathcal{B}_m = \mathcal{B}(I)_m$ является m-пополнением борелевской σ-алгебры $\mathcal{B} = \mathcal{B}(I)$ относительно меры m.
Мы используем определение симметричного пространства, включающее как банаховы, так и квази-банаховы пространства.
В банаховом случае это определение взято из

С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов Интерполяция линейных операторов. Москва, Наука, — 1978.
Krein S. G., Petunin Yu. I., Semenov E. M. Interpolation of liniar operators.— Providence: AMS, 1982.

Семенов Е. М. Об одной шкале пространств с интерполяционным свойством// Докл. АН СССР.—1963.—*148*, № 5. —С. 1038-1041.

В отличие от многих авторов

Luxemburg W. A. J. Rearrangement invariant Banach function Spaces// Queen's Papers in Pure Appl. Math.—1967.—*10*. —P. 83-144.

Bennet C., Sharpley R. Interpolation of operators. — Boston, etc.: Academic Press, 1988.

Edmunds D. E., Evans W. D. Hardy operators, function spaces and embeddings. —Berlin: Springer, 2004.

мы не включаем в определение симметричного пространства условие максимальности или, в случае квази-банаховых пространств, условие Фату.

Это позволяет рассматривать такие интересные классы, как неинтерполяционные пространства или, скажем, пространства Шимогаки

Shimogaki T. Hardy-Littlewood majorants in functons spaces// J. Math. Soc. Japan.—1965.—*17*. —P. 365-375.

Shimogaki T. On the complete continuty of operators in an interpolation theorem// J. Func. Anal.—1968.—*2*. —P. 31-51.

а также пространства, для которых каноническое вложение $\mathbf{E} \to \mathbf{E}^{11}$ не изометрическое и даже не является открытым отображением.

4. Равноизмеримые функции

Пусть $(I, \mathcal{B}_m, m)$ измеримое пространство, где $I = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ или $I = [0, a]$ с $0 < a < \infty$.
Обозначим через $\mathbf{S} = \mathbf{S}(I, \mathcal{B}_m, m)$ множество всех классов m-измеримых (равных m-почти всюду) функций $f : I \to \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Для каждой функции $f \in \mathbf{S}(I, \mathcal{B}_m, m)$ определена единственная убывающая непрерывная справа функция f^* на $[0, \infty)$, которая называется *невозрастающей перестановкой* функции $|f|$ относительно меры m.

Функция $f^*(x)$ определена на $[0, \infty)$ и продолжается на $[0, \infty]$ равенством

$$f^*(\infty) := \lim_{x \to \infty} f^*(x).$$

5. Равноизмеримые функции

Возможно, что $f^*(x) = \infty$ для некоторых или для всех $x \in [0, \infty)$, поэтому удобно ввести подпространство

$$\mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m) := \{f \in \mathbf{S}(I, \mathcal{B}_m, m)\colon\, f^*(x) < \infty, x \in I\}$$

Определение

Две неотрицательные функции $f_1 \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ и $f_2 \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ называются *равноизмеримыми*, если они имеют одинаковые невозрастающие перестановки:

$$f_1^* = f_2^*.$$

6. Симметричные пространства.

Нетривиальное банахово (или, более обще, квази-банахово) пространство $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}}) = (\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)})$ действительных измеримых функций на пространстве с мерой $(I, \mathcal{B}_m, m)$ называется *симметричным*, если выполнены следующие два условия:

1. Если $f \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$, $g \in \mathbf{E}$ и $|f| \leq |g|$, то $f \in \mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}} \leq \|g\|_{\mathbf{E}}$.
2. Если $f \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$, $g \in \mathbf{E}$ и $f^* = g^*$, то $f \in \mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}} = \|g\|_{\mathbf{E}}$.

Условие 1 означает, что **E** является идеальной банаховой (квази-банаховой) подрешеткой в $\mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$. Условие 2 представляет собой *условием симметричности* или *перестановочной инвариантности* нормы (квази-нормы) $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$. Таким образом, симметричное пространство — это идеальная банахова (квази-банахова) решетка с симметричной нормой (квази-нормой).

Так как из $|f| \le |g|$ следует $f^* \le g^*$, то условия 1 и 2 могут быть записаны с помощью перестановок f^* и g^* следующим образом:

$$f \in \mathbf{L}_0\,,\ g \in \mathbf{E} \text{ и } f^* \le g^* \implies f \in \mathbf{E} \text{ и } \|f\|_{\mathbf{E}} \le \|g\|_{\mathbf{E}}\,.$$

8. Пространства $\mathbf{L}_p$, $0 < p \leq \infty$.

Примерами симметричных пространств являются классические пространства $\mathbf{L}_p(I, \mathcal{B}_m, m)$, $0 < p \leq \infty$

$$\mathbf{L}_p(I, \mathcal{B}_m, m) := \{f \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m) \colon \|f\|_{\mathbf{L}_p(I, \mathcal{B}_m, m)} < \infty\},$$

где для $0 < p < \infty$,

$$\|f\|_{\mathbf{L}_p} = \|f\|_{\mathbf{L}_p(I, \mathcal{B}_m, m)} = \left(\int_I |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}$$

и

$$\|f\|_{\mathbf{L}_\infty} = \|f\|_{\mathbf{L}_\infty(I, \mathcal{B}_m, m)} := \inf\{a > 0 \colon m\{|f| > a\} = 0\}.$$

Пространства $\mathbf{L}_p(I, \mathcal{B}_m, m)$ являются идеальными банаховыми решетками, если $1 \leq p \leq \infty$, и идеальными квази-банаховыми решетками при $0 < p < 1$.

9. Пространства $\mathbf{L}_p$, $0 < p \le \infty$.

В последнем случае квазинорма $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_p(I,\mathcal{B}_m,m)}$ является p-нормой, т.е. $\|f+g\|_{\mathbf{L}_p}^p \le \|f\|_{\mathbf{L}_p}^p + \|g\|_{\mathbf{L}_p}^p$, $f, g \in \mathbf{L}_p$.
Таким образом, $\mathbf{L}_p$ является полным метрическим пространством относительно метрики $\delta_p(f,g) = \|f-g\|_{\mathbf{L}_p}^p$.
С другой стороны, для каждого $0 < p < \infty$

$$\|f\|_{\mathbf{L}_p(I,\mathcal{B}_m,m)} = \left(\int_0^\infty |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty (f^*)^p dm\right)^{\frac{1}{p}} = \|f^*\|_{\mathbf{L}_p(I,\mathcal{B}_m,m)}, \;,$$

$$\|f\|_{\mathbf{L}_\infty(I,\mathcal{B}_m,m)} = \max_{x\in\mathbb{R}^+} f^*(x) = f^*(0) = \|f^*\|_{\mathbf{L}_\infty(I,\mathcal{B}_m,m)} \;,$$

так как функции $|f| \in \mathbf{L}_0(I,\mathcal{B}_m,m)$ и $f^* \in \mathbf{L}_0(I,\mathcal{B}_m,m)$ равноизмеримые. Эти равенства показывают, что $\mathbf{L}_p(I,\mathcal{B}_m,m)$ являются симметричными квази-банаховыми пространствами для каждого $0 < p \le \infty$ и симметричными банаховыми пространствами при $1 \le p \le \infty$.

10. Первая теорема вложения

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ симметричное банахово пространство на $(I, \mathcal{B}_m, m)$. Тогда имеют место непрерывные вложения

$$\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \subset \mathbf{L}_0,$$

причем

$$\varphi_{\mathbf{E}}(1) \cdot \|f\|_{\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty} \geq \|f\|_{\mathbf{E}} \geq \varphi_{\mathbf{E}}(1) \cdot \|f\|_{\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty} \ , \ \ f \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty,$$

где

$$\varphi_{\mathbf{E}}(t) := \|\mathbf{1}_{[0,t]}\|_{\mathbf{E}}, \ \ t \geq 0$$

фундаментальная функция симметричного пространства $\mathbf{E}$ и $\varphi_{\mathbf{E}}(1) = \|\mathbf{1}_{[0,1]}\|_{\mathbf{E}}$.

11. Первая теорема вложения.

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ симметричное квази-банахово пространство на $(I, \mathcal{B}_m, m)$, удовлетворяющее слабому неравенству треугольника

$$\|f + g\|_{\mathbf{E}} \leq C(\|f\|_{\mathbf{E}} + \|g\|_{\mathbf{E}}) \ , \ \ f, g \in \mathbf{E} \tag{1}$$

с константой $C > 1$. Тогда по теореме Аоки-Ролевича квази-норму $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ можно заменить на эквивалентную p-субаддитивную квазинорму $|||\cdot|||_{\mathbf{E}}$ такую, что

$$|||f + g|||_{\mathbf{E}}^p \leq |||f|||_{\mathbf{E}}^p + |||g|||_{\mathbf{E}}^p \ , \ \ f, g \in \mathbf{E} \ ,$$

где

$$p := \frac{\ln 2}{\ln 2 + \ln C} < 1 \ .$$

Такая квази-норма $|||\cdot|||_{\mathbf{E}}$ называется *p-нормой*, а квази-банахово пространство называется *p-нормируемым*.

12. Первая теорема вложения.

Отметим, что **E** становится полным линейным метрическим пространством относительно трансляционно-инвариантной метрики

$$\delta_{\mathbf{E}}(f,g) = \|f - g\|_{\mathbf{E}}, f, g \in \mathbf{E}.$$

Константа

$$C_{\mathbf{E}} = \inf\{C \text{ в слабом неравенстве треугольника } (1)\}$$

называется *модулем вогнутости* квази-банахова пространства **E**. Очевидно, $C_{\mathbf{E}} = 1$, если пространство **E** нормируемо. Обратное, вообще говоря, неверно.

Kalton N. J. Quasi-Banach spaces// In "Handbook of the Geomety of Banach spaces. Eslevier". —Amsterdam: North-Holland, 2003. —P. 1099-1106.

13. Минимальность.

Определение

Симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ называется *минимальным* если множество $\mathbf{F}_1$ всех простых (конечно-значных) интегрируемых функций на I плотно в $\mathbf{E}$, т.е. замыкание $cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{F}_1)$ совпадает с $\mathbf{E}$.

Множество $\mathbf{F}_1$ состоит из всех простых функций $f : I \to [0, \infty)$ таких, что

$$0 \leq m(\{|f| = a\}) < \infty$$

для всех $a > 0$.

14. Минимальность.

Для каждого $0 < p < \infty$, множество $\mathbf{F}_1$ плотно в $\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty$ по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty}$.

- Пусть $\mathbf{E}$ симметричное квази-банахово пространство с модулем вогнутости $c_{\mathbf{E}} > 1$ и пусть $0 < p < 1$ такое, что $C = 2^{1/p-1} > c_{\mathbf{E}}$. Тогда $\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E}$, причем $\mathbf{E}$ минимально тогда и только тогда, когда $cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty) = \mathbf{E}$.
- Пусть $\mathbf{E}$ симметричное банахово пространство. Тогда $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E}$, причем $\mathbf{E}$ минимально тогда и только тогда, когда $cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty) = \mathbf{E}$.

В общем случае $\mathbf{E}^0 := cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{F}_1) \subseteq \mathbf{E}$ является симметричным пространством, называемым *минимальной частью* $\mathbf{E}$. Таким образом, $\mathbf{E}$ — минимальное симметричное пространство тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}$.

15. Условие (A).

Определение

Говорят, что симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ удовлетворяет условию (A) (имеет порядково непрерывную норму), если

(A) Если $0 \le f_n \in \mathbf{E}$ и $f_n \downarrow 0$, то $\|f_n\|_{\mathbf{E}} \downarrow 0$.

Определение

Говорят, что функция $f \in \mathbf{E}$ имеет *абсолютно непрерывную норму*,, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое. что $\|\mathbf{1}_A f\| < \varepsilon$ для каждого $A \in \mathcal{B}_m$ с мерой $m(A) < \delta$.

16. Условие (A).

Теорема

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ симметричное пространство на $(I, \mathcal{B}_m, m)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- **E** удовлетворяет условию (A).
- Каждая функция $f \in \mathbf{E}$ имеет абсолютно непрерывную норму.
- **E** минимально и $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) = 0$.

Этот результат хорошо известен в случае, когда **E** является симметричным банаховым пространством, Утверждение остается в силе, если мы заменим норму на p-норму.

17. Условие (C).

Определение

Говорят, что симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ удовлетворяет условию (C) (*имеет порядково полу-непрерывную норму*) если

(C) Из $0 \le f_n \uparrow f \in \mathbf{E}$ следует. что $\sup_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}}$.

Легко видеть, что из условия (A) следуют условие (C) и минимальность.

Минимальное симметричное пространство не обязательно должно удовлетворять условию (A). В то же время,

Теорема

Любое минимальное симметричное пространство удовлетворяет условию (C).

18. Ассоциированное пространство.

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ симметричное пространство на $(I, \mathcal{B}_m, m)$.
Ассоциированное пространство $(\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m))^1$ симметричного пространства $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ определяется как

$$(\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m))^1 := \left\{ g \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m) \colon \|g\|_{(\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m))^1} < \infty \right\} ,$$

где

$$\|g\|_{(\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m))^1} := \sup \left\{ \int_I fg \, dm, \ \|f\|_{\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)} \leq 1 \right\} .$$

Утверждение

Пусть $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — симметричное банахово пространство на пространстве с мерой $(I, \mathcal{B}_m, m)$.
Пространства $(\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m))^1$ являются симметричными банаховыми пространствами на $(I, \mathcal{B}_m, m)$.

19. Ассоциированное пространство.

В дальнейшем мы будем писать $\mathbf{E}^1(I, \mathcal{B}_m, m)$ вместо $(\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m))^1$.
Ассоциированное пространство $\mathbf{E}^1$ симметричного банахова пространства $\mathbf{E}$ можно отождествить с подмножеством $\{v_g : g \in \mathbf{E}^1\}$ дуального пространства $\mathbf{E}^*$, где

$$v_g(f) := \int fg\,dm\,,\ f \in \mathbf{E}\,.$$

По определению, $v_g \in \mathbf{E}^*$ и $\|v_g\|_{\mathbf{E}^*} = \|g\|_{\mathbf{E}^1}$ для каждой функции $g \in \mathbf{E}^1$.
Естественное вложение $v : \mathbf{E}^1 \ni g \to v_g \in \mathbf{E}^*$ является изометрическим изоморфизмом $\mathbf{E}^1$ на замкнутое подпространство $\{v_g, g \in \mathbf{E}^1\}$ пространства $\mathbf{E}^*$.

20. Ассоциированное пространство.

Следует отметить, что в общем случае, $v(\mathbf{E}^1)$ может быть собственным подмножеством $\mathbf{E}^*$. Например, $v(\mathbf{E}^1)$ собственное подмножество $\mathbf{E}^*$, если $\mathbf{E} = \mathbf{L}_\infty$.

Теорема

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ симметричное банахово пространство. Тогда

$$v(\mathbf{E}^1) = \{v_g,\ g \in \mathbf{E}^1\} = \mathbf{E}^*$$

тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (A).

Рассмотрим ассоциированные пространства

$$\mathbf{E}^{11} = (\mathbf{E}^1)^1, \mathbf{E}^{111} = (E^{11})^1$$

и так далее.

21. Ассоциированное пространство.

Непосредственно из определений следует, что

$$\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11},$$

причем это вложение может быть строгим. Более того,

$$\|f\|_{\mathbf{E}^{11}} \leq \|f\|_{\mathbf{E}}\ ,\ f \in \mathbf{E}\ ,$$

то есть естественное вложение $\mathbf{E} \to \mathbf{E}^{11}$ является сжатием. Из условия (C) следует, что это отображение является изометрией. А именно,

Теорема

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ симметричное банахово пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (C).
2. $\|f\|_{\mathbf{E}} = \sup\{v_g(f) : \|g\|_{\mathbf{E}^1} \leq 1\}$.
3. $\|f\|_{\mathbf{E}^{11}} = \|f\|_{\mathbf{E}}\ ,\ f \in \mathbf{E}$.

22. Максимальность. Условие (B).

Пусть $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — симметричное банахово пространство на пространстве с мерой $(I, \mathcal{B}_m, m)$.

Определение

Говорят, что симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ удовлетворяет условию (B) (*имеет монотонно полную норму*), если

(B) Если $0 \leq f_n \uparrow$, $f_n \in \mathbf{E}$, $\sup_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} < \infty$, то $f_n \uparrow f$ для некоторого $f \in \mathbf{E}$.

В случае симметричных банаховых пространств мы можем использовать вложение $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11}$.

Определение

Симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ называется *максимальным (или порядково рефлексивным)*, если $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$ как множества.

23. Максимальность. Условие (B).

Теорема

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ симметричное банахово пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$ как множества, т.е. $\mathbf{E}$ максимально.
2. $\mathbf{E} = \mathbf{G}^{1}$ для некоторого симметричного пространства $\mathbf{G} = \mathbf{G}(I, \mathcal{B}_m, m)$.
3. $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (B).

24. Максимальность. Условия (B) и (C).

Теорема

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ симметричное пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{E}} = \|\cdot\|_{\mathbf{E}^{11}}$.
2. $\mathbf{E} = \mathbf{G}^1$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{E}} = \|\cdot\|_{\mathbf{G}^1}$ для некоторого симметричного пространства $\mathbf{G} = \mathbf{G}(I, \mathcal{B}_m, m)$.
3. $\mathbf{E}$ удовлетворяет условиям (B) и (C).
4. Если $\kappa\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}^{**}$ каноническое вложение, то существует проектор $\pi\colon \mathbf{E}^{**} \to \kappa(\mathbf{E})$ с нормой $\|\pi\| = 1$.
5. Каждая центрированная последовательность замкнутых шаров имеет непустое пересечение в $\mathbf{E}$.

25. Условие Фату.

Комбинация свойств (B) и (C) (используемых в приведенной выше теореме) означает:

(BC) Если $0 \le f_n \uparrow$, $f_n \in \mathbf{E}$ и $\sup_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} < \infty$, то $f_n \uparrow f$ для некоторого $f \in \mathbf{E}$ и

$$\sup_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}}.$$

Это свойство имеет смысл для общих симметричных квази-банаховых пространств и может быть переформулировано как следующее условие Фату (F):

(F) Если $\{f_n\} \subset \mathbf{E}$, $f_n \xrightarrow{(\text{п.в.})} f$ и $\sup_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} < \infty$, то $f \in \mathbf{E}$ и

$$\|f\|_{\mathbf{E}} \le \liminf_n \|f_n\|_{\mathbf{E}}.$$

Отметим, что в случае $\mathbf{E} = \mathbf{L}_1$ свойство (F) — это утверждение классической леммы Фату.

26. Рефлексивность.

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ симметричное банахово пространство. Мы снова рассмотрим вложения

$$\mathbf{E}^0 \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11},$$

где $\mathbf{E}^0$ — минимальная часть $\mathbf{E}$, а $\mathbf{E}^{11}$ — второе ассоциированное пространство. Наша цель — специальный случай, когда

$$\mathbf{E}^0 = \mathbf{E} = \mathbf{E}^{11},$$

т.е. когда пространство $\mathbf{E}$ минимально и максимально одновременно.

Предполагая, вдобавок к равенству $\mathbf{E}^0 = \mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$, что $\varphi_{\mathbf{E}}(0) = 0$ (т.е. $\mathbf{E} \not\subseteq \mathbf{L}_\infty$), мы получим, что пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет обоим свойствам (A) и (B).

27. Рефлексивность.

Сочетание свойств (A) и (B) приводит нас к следующему условию

(AB) Если $0 \le f_n \uparrow$, $f_n \in \mathbf{E}$ и $\sup_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} < \infty$, то $f_n \uparrow f$ и $\|f_n - f\|_{\mathbf{E}} \to 0$ для некоторой функции $f \in \mathbf{E}$.

Напомним, что для любого банахова пространства $\mathbf{E}$ имеет место каноническое вложение

$$\kappa : \mathbf{E} \ni f \to \kappa_f \in \mathbf{E}^{**},$$

где κ_f ограниченный линейный функционал на $\mathbf{E}^*$, определяемый равенством

$$\kappa_f(u) = u(f), \quad u \in \mathbf{E}^*$$

Вложение $\kappa : \mathbf{E} \to \mathbf{E}^{**}$ является линейной изометрией пространства $\mathbf{E}$ на замкнутое подпространство $\kappa(\mathbf{E}) \subseteq \mathbf{E}^{**}$. Банахово пространство $\mathbf{E}$ называется *рефлексивным*, если

$$\kappa(\mathbf{E}) = \mathbf{E}^{**}.$$

28. Рефлексивность

Теорема

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ симметричное пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\mathbf{E}$ рефлексивно.
2. $\mathbf{E}$ удовлетворяет условиям (A) и (B), а $\mathbf{E}^*$ удовлетворяет условию (A).
3. $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}^*$ удовлетворяют условиям (A) и (B).

29. Рефлексивность

Рассмотренные условия (A) и (AB) могут быть охарактеризованы в терминах общих банаховых пространств.

Теорема

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ симметричное банахово пространство
Тогда

1. $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (A) тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}$ не содержит подпространства, изометричного $\mathbf{l}_\infty$.
2. $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (AB) тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}$ не содержит подпространства, изометричного $\mathbf{c}_0$.
3. $\mathbf{E}$ рефлексивно тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}$ не содержит подпространства, изометричного $\mathbf{c}_0$ или $\mathbf{l}_1$.

30. Пространство Лоренца Λ_W .

Пусть W- возрастающая функция на $[0, +\infty)$ такая, что: $W(0) = 0$, W вогнутая на $(0, +\infty)$, и $W(x) > 0$ для $x > 0$.
Тогда W абсолютно непрерывна на $(0, \infty)$, в то время как значение $W(0+)$ может быть положительным.
Пространство Лоренца $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{\Lambda}_W(I, \mathcal{B}_m, m)$ определяется как

$$\mathbf{\Lambda}_W := \left\{ f \in \mathbf{L}_0 \colon \|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W} := f^*(0) W(0+) + \int_0^\infty f^*(x)\, W'(x)\, dx < \infty \right\} .$$

Норму $\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W}$ можно записать как интеграл Римана-Стилтьеса $\displaystyle\int_0^\infty f^*(x)\, d\, W(x)$, который имеет атомарную часть $f^*(0)\, W(0+)$ в случае, когда $W(0+) > 0$.

31. Пространство Лоренца Λ_W .

- $(\mathbf{\Lambda}_W, \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W})$ является симметричным банаховым пространством с фундаментальной функцией $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_W = W}$.
- $\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{L}_\infty \iff W(0+) > 0$ и
  $\mathbf{\Lambda}_W \supseteq \mathbf{L}_\infty \iff W(\infty) < \infty$.
  Таким образом, $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{L}_\infty$ тогда и только тогда, когда выполнены оба условия $W(0+) > 0$ и $W(\infty) < \infty$.
- $\mathbf{\Lambda}_W$ удовлетворяет условия (B) и (C) и, потому, условию Фату (F). Поэтому, $\mathbf{\Lambda}_W$ является максимальным $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{\Lambda}_W^{11}$.
- $\mathbf{\Lambda}_W^0 = cl_{\mathbf{\Lambda}_W}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty) = \mathbf{\Lambda}_W \cap \mathbf{R}_0 = \{f \in \mathbf{\Lambda}_W \colon f^*(\infty) = 0\}$.
  Отсюда, $\mathbf{\Lambda}_W$ является минимальным $\iff W(\infty) = \infty$ $\iff \mathbf{L}_\infty \not\subseteq \mathbf{\Lambda}_W$.
- $\mathbf{\Lambda}_W$ удовлетворяет условию (A) тогда и только тогда, когда $W(0+) = 0$ и $W(\infty) = \infty)$

32. Мажорантная функция $\theta_{f,m} = f^{**}$

Используя оператор Харди $H\colon \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_0$

$$Hg(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g\,dm\ ,\ x \geq 0\ ,\ g \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(I, \mathcal{B}_m, m)\ ,$$

мы вводим мажорантную функцию Харди-Литтлвуда как

$$f^{**}(x) = \theta_{f,m}(x) = Hf^*(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f^*\,dm\ ,\ x \in I\ ,$$

где $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(I, \mathcal{B}_m, m)$.
Тогда имеем:

- $0 \leq f^*(x) \leq f^{**}(x) < \infty\,,\ 0 < x < \infty.$
- $f^{**}(x)$ является убывающей и непрерывной на I.

33. Мажорантная функция $\theta_{f,m} = f^{**}$

- $f^{**}(x) = \dfrac{1}{x} \sup \left\{ \int_A |f| dm, \;\; m(A) = x \right\}, \;\; x > 0, \;\; f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(I, \mathcal{B}_m, m)$.
- $(f_1 + f_2)^{**}(x) \leq f_1^*(x) + f_2^*(x), \;\; f_1, f_2 \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(I, \mathcal{B}_m, m)$

Последнее "неравенство треугольника" как раз показывает существенное отличие f^{**} от f^*, для которого имеет место только слабое неравенство треугольника

$$(f_1 + f_2)^*(x) \leq f_1^* \left(\frac{x}{2} \right) + f_2^* \left(\frac{x}{2} \right).$$

34. Пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_V$.

Пусть V — квази-вогнутая функция на $[0,\infty)$, т.е. положительная функция V на $(0,\infty)$ такая, что $V(0)=0$, и функции $V(x)$ и $V_*(x)=\dfrac{x}{V(x)}$ являются возрастающими.

Положим

$$\mathbf{M}_V=\mathbf{M}_V(I,\mathcal{B}_m,m)=\{f\in(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty)\colon\ V_*\cdot f^{**}\in\mathbf{L}_\infty\}\ ,$$

и для $f\in\mathbf{M}_V$

$$\|f\|_{\mathbf{M}_V}=\|V_*\cdot f^{**}\|_{\mathbf{L}_\infty}=\inf\left\{C>0\colon\ \int_0^x f^*\,dm\le C\,V(x),x\ge 0\right\}.$$

Пространство $(\mathbf{M}_V,\|\cdot\|_{\mathbf{M}_V})$ называется пространством Марцинкевича.

35. Пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_V$.

Напомним основные свойства пространства $\mathbf{M}_V$

- $\mathbf{M}_V$ является симметричным банаховым пространством с фундаментальной функцией $\varphi_{\mathbf{M}_V} = V_*$.
- $\mathbf{M}_V \subseteq \mathbf{L}_\infty \iff V_*(0+) > 0$ и $\mathbf{M}_V \supseteq \mathbf{L}_\infty \iff V_*(\infty) < \infty$. Поэтому $\mathbf{M}_V = \mathbf{L}_\infty$ тогда и только тогда, когда имеют место оба условия $V_*(0+) > 0$ и $V_*(\infty) < \infty$.
- $\mathbf{M}_V$ удовлетворяет условиям (B) и (C) и потому, условию Фату (F), т.е. $\mathbf{M}_V$ является максимальным, $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_V^{11}$.

- Пусть

$$\mathbf{M}_0 = \{f \in \mathbf{M}_V : \lim_{x \to 0+} V_*(x) f^{**}(x) = \lim_{x \to \infty} V_*(x) f^{**}(x) = 0\} \subseteq \mathbf{M}_V$$

Тогда подпространство $\mathbf{M}_0$ совпадает с минимальной частью

$$\mathbf{M}_V^0 = cl_{\mathbf{M}_V}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$$

пространства $\mathbf{M}_V$ при условии $V_*(0+) = 0$. Следовательно, $\mathbf{M}_V$ удовлетворяет условию (A) тогда и только тогда, когда $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_0$ и $V_*(0+) = 0$.

37. Связь между пространством Лоренца и пространством Марцинкевича.

Сначала мы опишем ассоциированные пространства к пространствам $\mathbf{\Lambda}_W$ и $\mathbf{M}_V$.

Теорема

Пусть $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{\Lambda}_W(I, \mathcal{B}_m, m)$ — пространство Лоренца, а $\mathbf{M}_W = \mathbf{M}_W(I, \mathcal{B}_m, m)$ — пространство Марцинкевича с одной и той же вогнутой весовой функцией W. Тогда

1. $\mathbf{\Lambda}_W^1 = \mathbf{M}_W$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W^1} = \|\cdot\|_{\mathbf{M}_W}$.
2. $\mathbf{M}_W^1 = \mathbf{\Lambda}_W$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{M}_W^1} = \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W}$.

38. Связь между пространством Лоренца и пространством Марцинкевича.

Если пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_V$ построено по квази-вогнутой функции V, которая не является вогнутой, мы можем заменить V на её наименьшую вогнутую мажоранту W. Тогда $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_W$ и $\mathbf{M}^1_V = \mathbf{\Lambda}_W$, причем из неравенства $\frac{1}{2}V \le W \le V$ следует, что

$$\frac{1}{2}\|\cdot\|_{\mathbf{M}_V} \le \|\cdot\|_{\mathbf{M}_W} \le \|\cdot\|_{\mathbf{M}_V}$$

и

$$\frac{1}{2}\|\cdot\|_{\mathbf{M}^1_V} \le \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W} \le \|\cdot\|_{\mathbf{M}^1_V}.$$

39. Связь между пространством Лоренца и пространством Марцинкевича.

Теперь рассмотрим теорему вложения.
Напомним, что $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_W} = W$ и $\varphi_{\mathbf{M}_{V_*}} = V$, где $V_*(x) = x/V(x),\ x > 0$.

Теорема

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — симметричное банахово пространство с фундаментальной функцией $V = \varphi_{\mathbf{E}}$ и W наименьшая вогнутая мажоранта V. Тогда имеют место непрерывные вложения

$$\mathbf{\Lambda}_W^0 \subseteq \mathbf{E} \subseteqq \mathbf{M}_{V_*},$$

причем

$$\|f\|_{\mathbf{M}_{V_*}} \leq \|f\|_{\mathbf{E}},\ f \in \mathbf{E}$$

и

$$\|f\|_{\mathbf{E}} \leq \|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W}, f \in \mathbf{\Lambda}_W^0 .$$

40. Связь между пространством Лоренца и пространством Марцинкевича.

Заметим, что квазивогнутая функция V не обязательно является вогнутой, т. е. в общем случае

$$W = \varphi_{\mathbf{\Lambda}_W} \neq \varphi_{\mathbf{M}_{V_*}} = V.$$

Тем не менее, можно добиться равенства

$$\varphi_{\mathbf{E}} = \varphi_{\mathbf{\Lambda}_W} = \varphi_{\mathbf{M}_{W_*}} = W,$$

переходя к некоторой эквивалентной симметричной норме на $\mathbf{E}$.

Замечание

Вложение $\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{E}$ вообще говоря не верно без дополнительных предположений, что $\mathbf{E}$ максимально или $\mathbf{\Lambda}_W$ минимально. Действительно, если $\mathbf{E}$ минимально, а $\mathbf{\Lambda}_W$ не минимально, мы имеем $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{R}_0$, в то время как $\mathbf{\Lambda}_W \not\subseteq \mathbf{R}_0$, откуда $\mathbf{\Lambda}_W \not\subseteq \mathbf{E}$.

41. Пространство $\mathbf{L}_\infty(U)$.

Мы рассматриваем пространства $(\mathbf{L}_\infty(U), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(U)})$

$$\mathbf{L}_\infty(U) = \{f \in \mathbf{L}_0 \colon U \cdot f^* \in \mathbf{L}_\infty\},$$

$$\|f\|_{\mathbf{L}_\infty(U)} = \|U \cdot f^*\|_{\mathbf{L}_\infty}, f \in \mathbf{L}_\infty(U),$$

в предположении, что U является непрерывной строго возрастающей положительной функцией, удовлетворяющей условиям $U(0) = 0$ и $U(\infty) = \infty$.
Пусть U удовлетворяет Δ_2-условию

$$U^\sharp(2) = \sup_{x>0} \frac{U(2x)}{U(x)} < \infty.$$

Тогда

- $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(U)}$ является квазинормой на $\mathbf{L}_\infty(U)$.
- $(\mathbf{L}_\infty(U), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(U)})$ является симметричным квази-банаховым пространством.

42. Пространство $\mathbf{L}_\infty(U)$.

- Пространство $(\mathbf{L}_\infty(U), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(U)})$ удовлетворяет условию Фату (F) и его фундаментальная функция имеет вид $\varphi_{\mathbf{L}_\infty(U)} = U$.

Следующие утверждения справедливы даже в том случае, если U не удовлетворяет Δ_2-условию.

- $\mathbf{L}_\infty(U)$ является порядковым идеалом, т.е.

$$|g| \le |h|, \, h \in \mathbf{L}_\infty(U) \implies g \in \mathbf{L}_\infty(U).$$

- $\lambda \in \mathbb{R}, \, g \in \mathbf{L}_\infty(U) \implies \lambda g \in \mathbf{L}_\infty(U))$.
- $\mathbf{L}_\infty(U)$ является симметричным, т.е.

$$f \in \mathbf{L}_\infty(U) \iff f^* \in \mathbf{L}_\infty.$$

$(\mathbf{L}_\infty(U), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(U)})$ является симметричным квази-банаховым пространством.

Предположим теперь, что $(\mathbf{L}_\infty(U), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(U)})$ является симметричным банаховым пространством.
Тогда его фундаментальная функция $\varphi_{\mathbf{L}_\infty(U)} = U$ является квазивогнутой.
Мы можем использовать функцию

$$V(x) = U_*(x) = \frac{x}{U(x)}, \; x > 0,$$

которая является также как и U квази-вогнутой, и рассмотреть пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_V$.

44. Пространство $\mathbf{L}_\infty(U)$.

Непосредственно из определения следует, что

$$f \in \mathbf{M}_V \iff V_* \cdot f^{**} \in \mathbf{L}_\infty \implies U \cdot f^* \in \mathbf{L}_\infty \iff f \in \mathbf{L}_\infty(U) \ ,$$

т.е. $\mathbf{M}_V \subseteq \mathbf{L}_\infty(U)$.
На самом деле, имеет место равенство $\mathbf{M}_V = \mathbf{L}_\infty(U)$, так как $\mathbf{M}_V$ является наибольшим симметричным банаховым пространством с фундаментальной функцией

$$V_* = \varphi_{\mathbf{M}_V} = \varphi_{\mathbf{L}_\infty(U)} = U.$$

Следовательно,

$$f \in \mathbf{M}_V \iff f^* \in \mathbf{M}_V \iff f^{**} \in \mathbf{L}_\infty \implies f^{**} \in \mathbf{M}_V \ ,$$

т.е. пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_V$ удовлетворяет свойству Харди-Литтлвуда $(\mathcal{HLP})$.

45. Пространство $\mathbf{L}_\infty(U)$.

Таким образом мы доказали:

- Пространство $\mathbf{L}_\infty(U)$ нормируемо тогда и только тогда, когда
$$\limsup_{x\to 0} \frac{U(2x)}{U(x)} < 2.$$
В этом случае существует эквивалентная U квазивогнутая функция U_1 такая, что $L_\infty(U_1)$ является симметричным банаховым пространством.

Astashkin S. V. On the normability of Marcinkiewicz classes// Math. Notes. —2007. —*81*. —P. 429-431.

46. Свойство Харди-Литтлвуда $(\mathcal{HLP})$

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — симметричное пространство. Обозначим

$$\Xi(\mathbf{E}) = \{f^* \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m),\ \ f \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)\}$$

и

$$\Theta(\mathbf{E}) = \{f^{**} \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m),\ \ f \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)\}\ .$$

Тогда

$$\Xi(\mathbf{E}) \subseteq \Theta(\mathbf{E}),$$

Говорят, что симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ удовлетворяет *свойству (условию) Харди-Литтлвуда* ($\mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$), если $\Theta(\mathbf{E}) = \Xi(\mathbf{E})$:

$$\mathbf{E} \in (\mathcal{HLP}) \Longleftrightarrow \Theta(\mathbf{E}) = \Xi(\mathbf{E}).$$

Например, мы имеем:

- $\mathbf{L}_p \in (\mathcal{HLP})$ и $\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_\infty \in (\mathcal{HLP})$ для всех $1 < p \leq \infty$.
- $\mathbf{L}_1 \notin (\mathcal{HLP})$ и $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \in (\mathcal{HLP})$.

47. Классы Марцинкевича.

Пусть $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_V(I, \mathcal{B}_m, m)$ пространство Марцинкевича с квазивогнутой функцией V. Мы предполагаем, что $V(0+) = 0$ и $V(\infty) = \infty$.

отметим, что $V' \in \mathbf{M}_V$, $(V')^{**} = 1/V_*$ и
$f^* \in \mathbf{M}_V \iff f^{**} \le C(V')^{**}$ для некоторого $C > 0$. Откуда

$$\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP}) \iff 1/V_* \in \mathbf{M}_V.$$

Нижний и верхний классы Марцинкевича $\underline{\mathbf{M}}_V$ и $\overline{\mathbf{M}}_V$ определяются как пространства

$$\mathbf{L}_\infty(U) = \{f \in \mathbf{L}_0 : \|f\|_{\mathbf{L}_\infty(U)} = \|U \cdot f^*\|_{\mathbf{L}_\infty} < \infty\}$$

с весовыми функциями $U = 1/V'$ и $U = V_*$, соответственно.

48. Классы Марцинкевича.

$$\underline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{L}_\infty\left(\frac{1}{V'}\right) = \left\{f \in \mathbf{L}_0 \colon \frac{f^*}{V'} \in \mathbf{L}_\infty\right\},$$

$$\|f\|_{\underline{\mathbf{M}}_V} = \left\|\frac{f^*}{V'}\right\|_{\mathbf{L}_\infty}, \quad f \in \underline{\mathbf{M}}_V$$

$$\overline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{L}_\infty(V_*) = \{f \in \mathbf{L}_0 \colon \;\; V_* f^* \in \mathbf{L}_\infty\},$$

$$\|f\|_{\overline{\mathbf{M}}_V} = \|V_* f^*\|_{\mathbf{L}_\infty}, \quad f \in \overline{\mathbf{M}}_V.$$

Напомним, что если U квази-вогнута, то $U^\sharp$ тоже квазивогнутая. Следовательно. функция $U^\sharp$ конечна и удовлетворяет Δ_2-условию. Таким образом, $\|f\|_{\mathbf{L}_\infty(U)}$ является квази-нормой и $\mathbf{L}_\infty(U)$ является квази-нормированным пространством, удовлетворяющим условию Фату.

Учитывая равенства

$$V' = (V')^*,$$

$$(V')^{**} = \frac{1}{x}\int_0^x (V')^*(u)du = \frac{1}{x}\int_0^x V'(u)du = \frac{1}{x}V(u)\Big|_0^x = \frac{V(x)}{x} = \frac{1}{V_*}$$

и

$$V'(x) \le V(x)/x, \; x > 0$$

получаем:

- $\underline{\mathbf{M}}_V \subseteq \mathbf{M}_V \subseteq \overline{\mathbf{M}}_V$.
- $\overline{\mathbf{M}}_V$ является симметричным пространством с квази-нормой

$$\|f\|_{\overline{\mathbf{M}}_V} = \|V_* f^*\|_{\mathbf{L}_\infty}, \; f \in \overline{\mathbf{M}}_V.$$

.

50. Классы Марцинкевича.

- $\overline{\mathbf{M}}_V$ удовлетворяет условию Фату и
$$\varphi_{\overline{\mathbf{M}}_V} = \varphi_{\mathbf{M}_V} = V_*.$$
- $\underline{\mathbf{M}}_V$ является симметричным пространством с квази-нормой
$$\|f\|_{\underline{\mathbf{M}}_V} = \left\|\frac{f^*}{V'}\right\|_{\mathbf{L}_\infty}, \quad f \in \underline{\mathbf{M}}_V$$
при условии, что функция $xV'(x)$ возрастает, т.е. функция $\dfrac{1}{V'(x)}$ является квази-вогнутой.
При этом $\underline{\mathbf{M}}_V$ симметричное квази-банахово пространство со свойством Фату и
$$\varphi_{\underline{\mathbf{M}}_V} = \varphi_{\mathbf{M}_V} = \frac{1}{V'}.$$

51. Классы Марцинкевича

Теорема

Пусть V квази-вогнутая функция, такая что $V(0+) = 0$ и $V(\infty) = \infty$. Тогда

1. Если $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$, то $\underline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{M}_V = \overline{\mathbf{M}}_V$.
2. Если $\mathbf{M}_V \notin (\mathcal{HLP})$, то оба вложения $\underline{\mathbf{M}}_V \subset \mathbf{M}_V \subset \overline{\mathbf{M}}_V$ строгие.
3. Если $(\overline{\mathbf{M}}_V, \|\cdot\|_{\overline{\mathbf{M}}_V})$ нормируемо, то $\overline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{M}_V$ и $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$.
4. Если $(\underline{\mathbf{M}}_V, \|\cdot\|_{\underline{\mathbf{M}}_V})$ нормируемо, то $\underline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{M}_V$ и $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$.

52. Классы Марцинкевича

Большая часть этих результатов содержится в

Браверман М. Ш., Меклер А. А. О свойстве Харди-Литтлвуда в симметричных пространствах// Сиб. мат. ж. —1977. —*18*, № 3. —С. 522-540.

[1] для случая конечной меры, см. также,

Mekler A. A. Conditianal expectations and interpolation of linear operators on ordered ideals between $L_1(0,1)$ and $L_1(0,1)$// ArXiv. —2018. — 1803.09796v1, 26 Mar.

[1] и имеющиеся там ссылки. Случай бесконечной меры был рассмотрен в

J. Soria. Lorentz spaces of weak type. Quart. J. Math. Oxford, 49(1998), 93-103.

Astashkin S. V. On the normability of Marcinkiewicz classes// Math. Notes. —2007. —*81*. —P. 429-431.

Спасибо за внимание!

Многие из приведенных результатов имеют место и для симметричных F-пространств измеримых функций на пространствах с конечной или бесконечной σ-конечной не атомической мерой. Ниже приведены соответствующие литературные ссылки.

S. Banach. Theorie des operations lineaires. Monografie Matematyczne I. Warszawa, 1932.

H. Nakano. Modular semiordered linear spaces. Maruzen Co. Ltd., Tokio, 1950.

S. Rolewicz. Metric linear spaces. PWM, Warsaw, 1984.

2. Литература.

- J. Musielak, W. Orlicz. On Modular Spaces. Studia Math. 18 (1959) , 49-65.
- J. Musielak, W. Orlicz. Some Remarks on Modular Spaces. Bull. Acad. Pol. Sci. 7(1959), 661-668.
- J. Musielak. Modular Spaces. Wyd. UAM, Pozna, 6(1978) (in Polish).
- J. Musielak. Orlicz spaces and modular spaces. Lect. Notes in Math., 1034, Springer-Verlag, 1983.

3. *Литература.*

- *С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов* Интерполяция линейных операторов. Москва, Наука, — 1978. *Krein S. G., Petunin Yu. I., Semenov E. M.* Interpolation of liniar operators.— Providence: AMS, 1982.
- *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces II. Function Spaces, Springer. — 1979.
- *Bennet C., Sharpley R.* Interpolation of operators, London, Academic Press. — 1988.
- W. Orlicz. Linear Fanctional Analysis. Serias in Real Analysis Volume 4, 1992, — P. 262.

4. Литература.

- *Rubshtein B.-Z. A., Grabarnik G. Ya., Muratov M. A., Pashkova Yu. S.* Foundations of Symmetric spaces of measurable functions.— Development in Mathematics 45, Springer.—2016.
- M.A. Muratov, B.-Z. A. Rubshtein. Equimeasurable symmetric spaces of measurable functions Preprint, 2019.
- М.А.Муратов, Б.А.Рубштейн. Симметричные пространства измеримых функций. Старые и новые достижения. *Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, №2, 2020 г.*, стр. 221-272.
- M.A. Muratov, Yu. Pashkova, B.-Z. A. Rubshtein. Mean Ergodic Theorems in Symmetric Spaces of Measurable Functions. *Lobachtvskii Journal of Mathematics. Vol.42, №5, 2021*, P. 1094-1112.