Ограниченность одного класса интегральных операторов в пространствах Лебега

Рыскул Ойнаров

Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилёва, Астана, Казахстан

15-17 Апреля 2025, Воркшоп

Работа выполнена совместно с А. Калыбай и А. Темирхановой

Пусть $\mathrm{I} = (0, \infty)$, $1 < p, q < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Пусть u и v - положительные, локально суммируемые на I функции такие, что $u \in L_q^{loc}(I)$ и $v \in L_{p'}^{loc}(I)$. Рассмотрим вопрос ограниченности из $L_p(I)$ в $L_q(I)$, $1 < q < p < \infty$, интегральных операторов

$$\mathcal{K}^+ f(x) = u(x) \int_0^x K(x,s) v(s) f(s) ds, \quad x > 0, \tag{1}$$

$$\mathcal{K}^- g(s) = v(s) \int_s^\infty K(x,s) u(x) g(x) dx, \quad s > 0, \tag{2}$$

с ядром $K(x,s) \geq 0$ при $x \geq s > 0$, т. е., выполнение неравенств

$$\|\mathcal{K}^+ f\|_q \leq C\|f\|_p, \ f \in L_p(I), \tag{3}$$

$$\|\mathcal{K}^- f\|_q \leq C\|f\|_p, \ f \in L_p(I), \tag{4}$$

где $\|\cdot\|_p$ - обычная норма пространства $L_p(I)$.
Если в операторах (1) и (2) ядро $K(\cdot,\cdot) \equiv 1$, то операторы (1) и (2) являются весовыми операторами Харди, для которых выполнение неравенств (3) и (4) установлено при различных допустимых значениях параметров $-\infty < q, p \leq \infty$ (см. [1–8]).

[1] K.F. Andersen, B. Muckenhoupt, Weighted weak type Hardy inequalities with applications to Hilbert transforms and maximal functions, Studia Math. 72:1 (1982) 9–26.
[2] J.S. Bradley, Hardy inequality with mixed norms, Canad. Math. Bull. 21 (1978) 405–408.
[3] V.M. Kokilashvili, On Hardy's inequality in weighted spaces, Soobscenija Akademii Nauk Gruzinskoj SSR 1:96 (1979) 37–40 (in Russian).
[4] V.G. Maz'ya, On (p,l)-capacity, imbedding theorems, and the spectrum of a selfadjoint elliptic operator, Mathematics of the USSR–Izvestiya 7:2 (1973) 357–387.
[5] V.G. Maz'ya, Sobolev spaces, Leningrad University Press, Leningrad, 1985.
[6] B. Muckenhoupt, Hardy's inequality with weights, Studia Math. 44:1 (1972) 31–38.
[7] G. Sinnamon, Weighted Hardy and Opial-type inequalities, J. Math. Anal. Appl. 160:2 (1991) 434–445.
[8] G. Sinnamon, V.D. Stepanov, The weighted Hardy inequalities: new proofs and the case $p = 1$, J. Lond. Math. Soc. 2:54 (1996) 89–101.

В конце прошлого века начались исследования операторов Харди с ядром, т. е. операторов вида (1) и (2). Так как проблема установления критериев выполнения неравенств (3) и (4) для операторов (1) и (2) с произвольным измеримым ядром $K(\cdot,\cdot) \geq 0$ является открытой, исследования ведутся для конкретных ядер, имеющих различные приложения.

Так, например, в работах

[9] V.D. Stepanov, On one weighted inequality of Hardy type for higher derivatives, Proc. Steklov Inst. Math. 187 (1990) 205–220.

[10] V.D. Stepanov, Weighted inequalities of Hardy type for Riemann–Liouville fractional integrals, Siberian Math. J. 3:31 (1990) 513–522.

[11] V.D. Stepanov, Two–weighted estimates of Riemann–Liouville integrals, Mathematics of the USSR–Izvestiya 36 (1991) 669–681.

впервые даны необходимые и достаточные условия выполнения неравенств (3) и (4) для операторов (1) и (2) с ядром $K(x,s) = (x-s)^{\alpha}$, $\alpha > 0$.

Затем эти результаты успешно использовались для установления критерия дискретности спектра одного класса “полярных” операторов высокого порядка [9].
Возникла задача выделения классов ядер, включающих в себя ядра известных операторов, и для операторов (1) и (2) с ядрами из выделенного класса установить критерии выполнения неравенств (3) и (4).

В начале 90-х годов прошлого века в работах

[12] R. Oinarov, Weighted inequalities for a class of integral operators, Doklady Mathematics 44:1 (1991) 291–293.

[13] S. Bloom, R. Kerman, Weighted norm inequalities for operators of Hardy type, Proc. Amer. Math. Soc. 113:1 (1991) 135–141.

был выделен класс $\mathcal{O}$ ядер, содержащих в себе многие ядра конкретных операторов и, в частности, операторов дробного интегрирования.

Измеримая функция $K(x, s) \geq 0$ принадлежат к классу $\mathcal{O}$, если существует число $h \geq 1$ и выпонено

$$h^{-1}\big(K(x,t) + K(t,s)\big) \leq K(x,s) \leq h\big(K(x,t) + K(t,s)\big)$$

при $x \geq t \geq s$.
Критерии ограниченности операторов (1) и (2) с ядром из класса $\mathcal{O}$ имели хорошие применения в разных задачах анализа, например, в осцилляционной и спектральной теориях дифференциальных операторов высокого порядка:

[14] A. Baiarystanov, A. Kalybay, R. Oinarov, Oscillatory and spectral properties of fourth-order differential operator and weighted differential inequality with boundary conditions, Bound. Value Probl. 2022:78 (2022).

[15] A. Kalybay, R. Oinarov, Ya. Sultanaev, Weighted differential inequality and oscillatory properties of fourth order differential equations, J. Inequal. Appl. 2021:199 (2021).

[16] A. Kalybay, R. Oinarov, Ya. Sultanaev, Oscillation and spectral properties of some classes of higher order differential operators and weighted nth order differential inequalities, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 3 (2021).

В последние годы операторы (1) и (2) с ядром из класса $\mathcal{O}$ стали объектом многих исследователей [17–22].

[17] D. Chutia, R. Haloi, Weighted integral inequalities for modified Integral Hardy operators, Bull. Korean Math. Soc. 59:3 (2022) 757-780.

[18] Q. Sun, X. Yu, H. Li, The supremum-involving Hardy-type operators on Lorentz-type spaces, Port. Math. 77:1 (2020) 1–29.

[19] A. Gogatishvili, R. Mustafayev, Weighted iterated Hardy-type inequalities. Math. Inequal. Appl. 20:3 (2017) 683–728.

[20] A. Kalybay, R. Oinarov, On weighted inequalities for a class of quasilinear integral operators, Banach J. Math. Anal. 17:3 (2023).

[21] D.V. Prokhorov, On a class of weighted inequalities containing quasilinear operators, Proc. Steklov Inst. Math. 293 (2016), 272–287.

[22] V.D. Stepanov, G.E. Shambilova, On weighted iterated Hardy-type operators, Anal. Math. 44:2 (2018) 273–283.

В работах [19-25]

[23] V. García García, P. Ortega Salvador, Weighted weak-type iterated and bilinear Hardy inequalities, J. Math. Anal. Appl. (2023), 127284,

[24] A. Gogatishvili, Z. Mihula, L. Pick, H. Turčinová, T. Ünver, Weighted inequalities for a superposition of the Copson operator and the Hardy operator, J. Fourier Anal. Appl. 28:24 (2022).

[25] V.D. Stepanov, G.E. Shambilova, On iterated and bilinear integral Hardy-type operators, Math. Inequal. Appl. 22:4 (2019), 1505–1533.

исследованы весовые оценки квазилинейных операторов, где участвует итерация оператора Харди и операторов вида (1), (2) с ядром из класса $\mathcal{O}$. Однако, в случае итерации операторов (1), (2) с ядром из класса $\mathcal{O}$ возникает множество проблем, так как ядра итерации таких операторов могут не принадлежать классу $\mathcal{O}$.

В работе
[26] R. Oinarov, Boundedness and compactness of Volterra type integral operators, Siberian Math. J. 48:5 (2007) 884–896.

введены классы $\mathcal{O}_{\mathrm{n}}^{+}$, $\mathcal{O}_{\mathrm{n}}^{-}$, $\mathrm{n} \geq 0$, функций $\mathrm{K}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) \geq 0$, $\mathrm{x} \geq \mathrm{s} > 0$, более широкий чем класс $\mathcal{O}$, и были установлены необходимые и достаточные условия ограниченности операторов (1) и (2) из $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathrm{I})$ в $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\mathrm{I})$ при $1 < \mathrm{p} \leq \mathrm{q} < \infty$, когда их ядра $\mathrm{K}(\cdot, \cdot)$ принадлежат классу $\mathcal{O}_{\mathrm{n}}^{+} \bigcup \mathcal{O}_{\mathrm{n}}^{-}$, $\mathrm{n} \geq 1$.

Эти классы образует расширяющиеся системы $\mathcal{O}_{\mathrm{m}}^{\pm} \subset \mathcal{O}_{\mathrm{n}}^{\pm}$, $\mathrm{n} \geq \mathrm{m} \geq 0$.
В работе
[27] L.S. Arendarenko, Estimates for Hardy-type integral operators in weighted Lebesgue spaces, PhD thesis, Luleå, Sweden 2013.

показано, что ядро итерации двух операторов (1) ((2)) из классов $\mathcal{O}_{\mathrm{n}}^{\pm}$ и $\mathcal{O}_{\mathrm{m}}^{\pm}$ принадлежат классу $\mathcal{O}_{\mathrm{n+m+1}}^{\pm}$, т. е. система классов $\{\mathcal{O}_{\mathrm{n}}^{\pm},\ \mathrm{n} \geq 0\}$ замкнуто по отношению итерации.

Данное свойство классов позволяет исследовать различные задачи, где участвует итерация интегральных операторов, в частности, вышесказанную проблему весовых оценок квазилинейных операторов с итерацией операторов вида (1) и (2).

Для случая $1 < q < p < \infty$ ограниченность от $L_p(I)$ до $L_q(I)$ операторов (1) и (2) с ядрами из $\mathcal{O}_n^+$ и $\mathcal{O}_n^-$, $n > 1$, в общем случае не установлена. Классы $\mathcal{O}_1^+$ и $\mathcal{O}_1^-$ рассматривались в

[28]L.S. Arendarenko, R. Oinarov, L.-E. Persson, On the boundedness of some classes of integral operators in weighted Lebesgue spaces, Eurasian Math. J. 3:1 (2012) 5–17.,

а классы $\mathcal{O}_2^+$ и $\mathcal{O}_2^-$ рассматривались в

[29]R. Oinarov, A. Temirkhanova, A. Kalybay, Boundedness of one class of integral operators from L_p to L_q for $1 < q < p < \infty$, Ann. Funct. Anal. 14, 65 (2023).

Основная цель данной работы — установить критерии ограниченности операторов (1) и (2) из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ при $1 < q < p < \infty$, когда их ядра принадлежат классам $\mathcal{O}_n^\pm$, при $n \geq 2$. Для этого нам необходимо проверить справедливость неравенств (3) и (4) при $1 < q < p < \infty$, когда их ядра принадлежат классам $\mathcal{O}_n^\pm$.

Конкретный вид этих операторов и пространства, в которых они рассматриваются, будут представлены позже. А пока определим классы $\mathcal{O}_n^\pm$ при $n \geq 0$.

Определение 1. Измеримая на множестве Ω функция $K(\cdot,\cdot) \equiv K_0(\cdot,\cdot) \geq 0$ принадлежит классу $\mathcal{O}_0^+$ $(\mathcal{O}_0^-)$, если $K_0(x,s) \equiv r(s) \geq 0$ $(K_0(x,s) \equiv \bar{r}(x) \geq 0)$

Определение 2. Измеримая на множестве Ω функция $K(\cdot,\cdot) \equiv K_n(\cdot,\cdot) \geq 0$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+$, $n \geq 1$, если функция $K(\cdot,\cdot) \geq 0$ не убывает по первому аргументу и существуют неотрицательные измеримые на Ω функции $K_{n,i}(\cdot,\cdot), i = 0, 1, ..., n-1$, $K_i(\cdot,\cdot), i = 0, 1, ..., n-1$, и число $h_n \geq 1$ такие, что $K_i(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}_i^+$, $i = 0, 1, ..., n-1$,

$$h_n^{-1} \sum_{i=0}^{n} K_{n,i}(x,t) K_i(t,s) \leq K_n(x,s) \leq h_n \sum_{i=0}^{n} K_{n,i}(x,t) K_i(t,s) \qquad (5)$$

при всех $x, t, s : x \geq t \geq s > 0$, где $K_{n,n}(\cdot,\cdot) \equiv 1$, $n \geq 1$.

Определение 3. Измеримая на множестве Ω функция $\mathrm{K}(\cdot,\cdot) \equiv \mathrm{K}_{\mathrm{n}}(\cdot,\cdot) \geq 0$ принадлежит классу $\mathcal{O}_{\mathrm{n}}^{-}$, $\mathrm{n} \geq 1$, если функция $\mathrm{K}(\cdot,\cdot) \geq 0$ не возрастает по второму аргументу и существуют неотрицательные измеримые на Ω функции $\mathrm{K}_{\mathrm{i,n}}(\cdot,\cdot)$, $\mathrm{i} = 0, 1, ..., \mathrm{n}-1$, $\mathrm{K}_{\mathrm{i}}(\cdot,\cdot), \mathrm{i} = 0, 1, ..., \mathrm{n}-1$, число $\bar{\mathrm{h}}_{\mathrm{n}} \geq 1$ такие, что $\mathrm{K}_{\mathrm{i}}(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}_{\mathrm{i}}^{-}, \mathrm{i} = 0, 1, ..., \mathrm{n}-1$.

$$\bar{\mathrm{h}}_{\mathrm{n}}^{-1} \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{K}_{\mathrm{i}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) \mathrm{K}_{\mathrm{i,n}}(\mathrm{t},\mathrm{s}) \leq \mathrm{K}_{\mathrm{n}}(\mathrm{x},\mathrm{s}) \leq \bar{\mathrm{h}}_{\mathrm{n}} \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{K}_{\mathrm{i}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) \mathrm{K}_{\mathrm{i,n}}(\mathrm{t},\mathrm{s}) \qquad (6)$$

при всех $\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{s} : \mathrm{x} \geq \mathrm{t} \geq \mathrm{s} > 0$, где $\mathrm{K}_{\mathrm{n,n}}(\cdot,\cdot) \equiv 1$, $\mathrm{n} \geq 1$.

Из (5) при $\mathrm{n} = 1$, т.е., когда $\mathrm{K}(\cdot,\cdot) \equiv \mathrm{K}_1(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}_1^{+}$ имеем

$$\mathrm{h}_1^{-1} \left(\mathrm{K}_{1,0}(\mathrm{x},\mathrm{t}) \mathrm{r}_1(\mathrm{s}) + \mathrm{K}_1(\mathrm{t},\mathrm{s})\right) \leq \mathrm{K}_1(\mathrm{x},\mathrm{s}) \leq \mathrm{h}_1 \left(\mathrm{K}_{1,0}(\mathrm{x},\mathrm{t}) \mathrm{r}_1(\mathrm{s}) + \mathrm{K}_1(\mathrm{t},\mathrm{s})\right) \qquad (7)$$

при всех $\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{s} : \mathrm{x} \geq \mathrm{t} \geq \mathrm{s} > 0$.

Из (6) при $\mathrm{n} = 1$, т.е., когда $\mathrm{K}(\cdot,\cdot) \equiv \mathrm{K}_1(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}_1^{-}$ имеем

$$\bar{\mathrm{h}}_1^{-1} \left(\mathrm{K}_1(\mathrm{x},\mathrm{t}) + \bar{\mathrm{r}}_1(\mathrm{x}) \mathrm{K}_{0,1}(\mathrm{t},\mathrm{s})\right) \leq \mathrm{K}_1(\mathrm{x},\mathrm{s}) \leq \bar{\mathrm{h}}_1 \left(\mathrm{K}_1(\mathrm{x},\mathrm{t}) + \bar{\mathrm{r}}_1(\mathrm{x}) \mathrm{K}_{0,1}(\mathrm{t},\mathrm{s})\right)$$

при всех $\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{s} : \mathrm{x} \geq \mathrm{t} \geq \mathrm{s} > 0$.

Аналогично можно написать аналог соотношений (7) и (6) при $\mathrm{n} = 2$.

Замечание 1. Примеры функций $K(\cdot,\cdot) \geq 0$ принадлежащие классам $\mathcal{O}_n^{\pm}, n \geq 1$ достаточно много, некоторые из них приведены в

[30] R. Oinarov, Boundedness and compactness of Volterra type integral operators, Siberian Math. J. 48:5 (2007) 884–896.

и

[31] R. Oinarov, Boundedness and compactness in weighted Lebesgue spaces of integral operators with variable integration limits, Siberian Math. J. 52:6 (2011) 1042–1055.

Кроме того в [27] доказано, что ядро суперпозиции двух операторов (1) ((2)) с ядром $K(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}_n^{\pm}$ и $K(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}_m^{\pm}$ принадлежит классу $\mathcal{O}_{n+m+1}^{\pm}$.

Символ $A \ll B$ означает $A \leq CB$ с некоторой постоянной C. Если $A \ll B \ll A$, то пишем $A \approx B$.

Операторы (1), (2) с ядром из класса $\mathcal{O}_n^+$, $n \geq 1$

Пусть Ψ — множество неотрицательных борелевских мер, определенных на σ-алгебре борелевских множеств $B(I)$ интервала I. Предположим, что $\mu \in \Psi$.

Пусть $\mu \in \Psi$. Рассмотрим интегральные операторы

$$K^+f(x) = \int_0^x K(x,s)v(s)f(s)ds, \quad x > 0, \tag{8}$$

$$K^-g(s) = \int_s^\infty K(x,s)v(s)g(x)d\mu(x), \quad s > 0. \tag{9}$$

Пусть $L_{q,\mu}(I)$ - пространство μ-измеримых функций на I, для которых

$$\|g\|_{q,\mu} = \left(\int_0^\infty |g(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Оператор (8) будем рассматривать из $L_p(I)$ в $L_{q,\mu}(I)$, а оператор (9) из $L_{p,\mu}(I)$ в $L_q(I)$. Легко видеть, что для оператора (8) оператор (9) из $L_{q',\mu}(I)$ в $L_{p'}(I)$, а для оператора (9) оператор (8) из $L_{q'}(I)$ в $L_{p',\mu}(I)$ является дуальным относительно линейной формы $\int_0^\infty f(x)g(x)d\mu(x)$.

Положим

$$B^+_{n,i} = \left(\int\limits_{(0,\infty]} \left(\int\limits_{[z,\infty]} K^q_{n,i}(x,z)d\mu(x) \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\int\limits_0^z K_i^{p'}(z,s)v^{p'}(s)ds \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \right.$$

$$\left. \times d \left(\int\limits_0^z K_i^{p'}(z,t)v^{p'}(t)dt \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}}, \ i = 0, 1, ..., n.$$

Теорема 1. Пусть $1 < q < p < \infty$, $\mu \in \Psi$ и $K(\cdot,\cdot) \equiv K_n(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}^+_n$, $n \geq 1$. Тогда оператор (8) ограничен из $L_p(I)$ в $L_{q,\mu}(I)$ тогда и только тогда, когда $B^+_n = \max\limits_{0\leq i\leq n} B^+_{n,i} < \infty$, при этом $\|K^+\|_{p\to q} \approx B^+_n$, где $\|K^+\|_{p\to q}$ - норма оператора (8) из $L_p(I)$ в $L_{q,\mu}(I)$.

Теперь расмотрим оператор (9) из $L_{p,\mu}(I)$ в $L_q(I)$, когда его ядро $K(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}_n^-$, $n \geq 1$. В (6) предполагаем $K_0(\cdot,\cdot) \equiv 1$.

Теорема 2. Пусть $1 < q < p < \infty$, $\mu \in \Psi$ и $K(\cdot,\cdot) \equiv K_n(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}_n^-$, $n > 1$. Тогда оператор (9) ограничен из $L_{p,\mu}(I)$ в $L_q(I)$ тогда и только тогда, когда $B_n^- = \max\limits_{0\leq i\leq n} B_{i,n}^- < \infty$, при этом $\|K^-\|_{p\to q} \approx B_n^-$, где $\|K^-\|_{p\to q}$ - норма оператора (8) из $L_{p,\mu}(I)$ в $L_q(I)$ и

$$B_{n,i}^- = \left(\int\limits_{(0,\infty]} \left(\int\limits_{[z,\infty]} K_i^{p'}(x,z)d\mu(x) \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\int\limits_0^z K_{i,n}^q(z,s)v^q(s)ds \right)^{\frac{q}{p-q}} \times d\left(\int\limits_0^z K_{i,n}^q(z,s)v^q(s)ds \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}}, \quad i = 0,1,...,n.$$

Теперь рассмотрим оператор (9) из $L_{p,\mu}(I)$ в $L_q(I)$ и оператор (8) из $L_p(I)$ в $L_{q,\mu}(I)$ при $1 < q < p < \infty$, когда их ядра соответственно принадлежат классу $\mathcal{O}_n^+$ и $\mathcal{O}_n^-$, $n > 1$. В силу взаимной дуальности операторов (9), (8) из теорем 2 и 1 соответственно, имеем

Теорема 3. Пусть $1 < q < p < \infty$, $\mu \in \Psi$ и $K(\cdot,\cdot) \equiv K_n(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}_n^-$, $n \geq 1$. Тогда оператор (8) ограничен из $L_p(I)$ в $L_{q,\mu}(I)$ тогда и только тогда, когда $\bar{B}_n^- = \max\limits_{0\leq i\leq n} \bar{B}_{n,i}^+ < \infty$, при этом $\|K^-\|_{p\to q} \approx \bar{B}_n^-$, где $\|K^-\|_{p\to q}$ - норма оператора (9) из $L_p(I)$ в $L_{q,\mu}(I)$ и

$$\bar{B}_{n,i}^+ = \left(\int\limits_{(0,\infty]} \left(\int\limits_{[z,\infty]} K_i^q(x,z)d\mu(x) \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\int\limits_0^z K_{i,n}^{p'}(z,s)v^{p'}(s)ds \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \right.$$

$$\left. \times d\left(\int\limits_0^z K_{i,n}^{p'}(z,s)v^{p'}(s)ds \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}}, \ i = 0, 1, ..., n.$$

Теорема 4. Пусть $1 < q < p < \infty$, $\mu \in \Psi$ и $K(\cdot,\cdot) \equiv K_n(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}_n^+$, $n > 1$. Тогда оператор (9) ограничен из $L_{p,\mu}(I)$ в $L_q(I)$ тогда и только тогда, когда $\bar{B}_n^- = \max_{0 \le i \le n} \bar{B}_{n,i}^- < \infty$, при этом $\|K^-\|_{p \to q} \approx \bar{B}_n^-$, где $\|K^-\|_{p\to q}$ - норма оператора (9) из $L_p(I)$ в $L_{q,\mu}(I)$

$$\bar{B}_{n,i}^- = \left(\int\limits_{(0,\infty]} \left(\int\limits_{[z,\infty]} K_{n,i}^{p'}(x,z) d\mu(x) \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\int\limits_0^z K_i^q(z,s) v^q(s) ds \right)^{\frac{q}{p-q}} \right.$$

$$\left. \times d\left(\int\limits_0^z K_i^q(z,t) v^q(t) dt \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}}, \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Наконец дадим ответ на основной вопрос этой работы – ограниченность операторов (1) и (2)

$$\mathcal{K}^+ f(x) = u(x) \int_0^x K(x,s) v(s) f(s) ds, \quad x > 0,$$

$$\mathcal{K}^- g(s) = v(s) \int_s^\infty K(x,s) u(x) g(x) dx, \quad s > 0$$

из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ при $1 < q < p < \infty$.

Пусть мера $\mu \in \Psi$ абсолютно непрерывна по отношению меры Лебега с плотностью u^{q}, где u - неотрицательная функция, такая что $\mathrm{u} \in L_q^{\log}(I)$. Тогда $\int\limits_0^\infty \left(K^+ f(x)\right)^q d\mu(x) = \int\limits_0^\infty \left(\mathcal{K}^+ f(x)\right)^q dx$, $f \geq 0$ и ограниченность оператора (8) из $L_p(I)$ в $L_{q,\mu}(I)$ совпадает с ограниченности оператора (1) из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ с нормой $\|K^+\|_{p\to q} = \|\mathcal{K}^+\|_{p\to q}$. Поэтому из теорем 1 и 3, соответственно, имеем

Теорема 5. Пусть $1 < q < p < \infty$ и $K(\cdot,\cdot) \equiv K_n(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}_n^+$, $n \geq 1$. Тогда оператор (1) ограничен из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}_n^+ = \max\limits_{0\leq i\leq n} \mathcal{B}_{n,i}^+ < \infty$, при этом $\|\mathcal{K}^+\|_{p\to q} \approx \mathcal{B}_n^+$, где $\|\mathcal{K}^+\|_{p\to q}$ - норма оператора (1) из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ и

$$\mathcal{B}_{n,i}^+ = \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_z^\infty K_{n,i}^q(x,z) u^q(x) dx\right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\int\limits_0^z K_i^{p'}(z,s) v^{p'}(s) ds\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \right.$$

$$\left. \times d\left(\int\limits_0^z K_i^{p'}(z,t) v^{p'}(t) dt\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}}, \ i = 0, 1, ..., n.$$

Теорема 6. Пусть $1 < q < p < \infty$ и $K(\cdot,\cdot) \equiv K_n(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}_n^-$, $n \geq 1$. Тогда оператор (1) ограничен из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{B}_n^+ = \max\limits_{0\leq i\leq n} \mathbb{B}_{n,i}^+ < \infty$, при этом $\|\mathbb{K}^+\|_{p\to q} \approx \mathbb{B}_n^+$, где $\|\mathbb{K}^+\|_{p\to q}$ - норма оператора (1) из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ и

$$\mathbb{B}_{n,i}^+ = \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_z^\infty K_i^q(x,z)u^q(x)dx\right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\int\limits_0^z K_{i,n}^{p'}(z,s)v^{p'}(s)ds\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \times d\left(\int\limits_0^z K_{i,n}^{p'}(z,s)v^{p'}(s)ds\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}}, \ i = 0,1,...,n.$$

Теперь установим критерий ограниченности оператора (2) из $L_p(I)$ в $L_q(I)$, когда его ядро $K(\cdot,\cdot) \equiv K_n(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}_n^+$. Используя взаимосопряженность операторов (1) и (2) из теорем 5 и 6, соответственно, получим

Теорема 7. Пусть $1 < q < p < \infty$ и $K(\cdot,\cdot) \equiv K_n(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}_n^+$, $n \geq 1$. Тогда оператор (2) ограничен из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}_n^- = \max\limits_{0\leq i\leq n} \mathcal{B}_{n,i}^- < \infty$, при этом $\|\mathcal{K}^-\|_{p\to q} \approx \mathcal{B}_n^-$, где $\|\mathcal{K}^-\|_{p\to q}$ - норма оператора (2) из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ и

$$\mathcal{B}_{n,i}^- = \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_z^\infty K_{n,i}^{p'}(x,z)u^{p'}(x)dx\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\int\limits_0^z K_i^q(z,s)v^q(s)ds\right)^{\frac{q}{p-q}} \times d\left(\int\limits_0^z K_i^q(z,t)v^q(t)dt\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}}, \ i = 0, 1, ..., n.$$

Теорема 8. Пусть $1 < q < p < \infty$ и $K(\cdot,\cdot) \equiv K_n(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}_n^-$, $n \geq 1$. Тогда оператор (2) ограничен из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{B}_n^- = \max\limits_{0\leq i\leq n} \mathbb{B}_{n,i}^- < \infty$, при этом $\|\mathbb{K}^-\|_{p\to q} \approx \mathbb{B}_n^-$, где $\|\mathbb{K}^-\|_{p\to q}$ - норма оператора (2) из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ и

$$\mathbb{B}_{n,i}^- = \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_z^\infty K_i^{p'}(x,z)u^{p'}(x)dx\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\int\limits_0^z K_{i,n}^q(z,s)v^q(s)ds\right)^{\frac{q}{p-q}} \times d\left(\int\limits_0^z K_{i,n}^q(z,s)v^q(s)ds\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}}, \ i = 0,1,...,n.$$

Спасибо за внимание!