Пространство дробных потенциалов Римана–Лиувилля на полуоси

М. Л. Гольдман [1]
В. Д. Степанов [1,2]

[1] Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
[2] Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия

Воркшоп по дифференциальным уравнениям и функциональным пространствам, посвященный юбилею д.ф.-м.н., профессора Гольдмана Михаила Львовича

15 – 17 апреля 2025 г.

[GS-2023] М. Л. Гольдман, В. Д. Степанов, Пространство дробных потенциалов Римана–Лиувилля на полуоси, Теория функций многих действительных переменных и ее приложения, Сборник статей. К 90-летию чл.–корр. РАН Олега Владимировича Бесова, Труды МИАН, 323, МИАН, М., 2023, 127–136; M. L. Goldman, V. D. Stepanov, Riemann–Liouville Space of Fractional Potentials on the Half–Line, Proc. Steklov Inst. Math., 323 (2023), 120–129.

Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $\mathbb{R}_+ : = [0, \infty)$ и $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Дробный интеграл Римана-Лиувилля на полуоси определен формулой

$$I_\alpha f(x) : = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{1}$$

Рассмотрим линейное пространство дробных потенциалов Римана-Лиувилля

$$\mathbb{H}_p^\alpha : = \left\{ w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) : w = I_\alpha f, f \in L^p(\mathbb{R}_+) \right\} \quad \text{с нормой} \tag{2}$$

$$\|w\|_{\mathbb{H}_p^\alpha} : = \|f\|_p : = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \tag{3}$$

Хорошо известно, что при $p = 2$ это пространство совпадает с пространством типа Бесова на полуоси $\mathcal{H}_2^\alpha$ всех функций $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ с конечной нормой

$$\|w\|_{\mathcal{H}_2^\alpha} : = \left(\frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \frac{|w(x)|^2 dx}{x^{2\alpha}} + 2 \int_0^\infty \frac{dy}{y^{1+2\alpha}} \int_0^\infty |w(x+y) - w(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{4}$$

Пусть $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $\mathbb{R}_+ :\ = [0, \infty)$ и $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}_+)$. Дробный интеграл Римана-Лиувилля на полуоси определен формулой

$$I_\alpha f(x):\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{1}$$

Рассмотрим линейное пространство дробных потенциалов Римана-Лиувилля

$$\mathbb{H}_p^\alpha :\ = \left\{ w \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}_+) : w = I_\alpha f, f \in L^p(\mathbb{R}_+) \right\} \quad \text{с нормой} \tag{2}$$

$$\|w\|_{\mathbb{H}_p^\alpha} :\ = \|f\|_p :\ = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \tag{3}$$

Хорошо известно, что при $p = 2$ это пространство совпадает с пространством типа Бесова на полуоси $\mathcal{H}_2^\alpha$ всех функций $w \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}_+)$ с конечной нормой

$$\|w\|_{\mathcal{H}_2^\alpha} :\ = \left(\frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \frac{|w(x)|^2 dx}{x^{2\alpha}} + 2 \int_0^\infty \frac{dy}{y^{1+2\alpha}} \int_0^\infty |w(x+y) - w(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{4}$$

Более того, они изометричны ([NS], Лемма 2.1; [PS], § 5.2) и

$$\|w\|_{\mathbb{H}_2^\alpha} = \|w\|_{\mathcal{H}_2^\alpha}.$$

[NS] Newman J., Solomyak M., Two-sided estimates on singular values for a class of integral operators on the semiaxis, *Integr. Equat. Oper. Th.*, **20** (1994), 335–349.

[PS] Прохоров Д.В., Степанов В.Д. Весовые оценки операторов Римана-Лиувилля и приложения, *Труды МИАН*, **243** (2003), 289-312.

Поэтому нам представляется естественным попытаться охарактеризовать пространства $\mathbb{H}_p^\alpha$ при $p \neq 2$ посредством вложений в пространства типа Бесова на полуоси такие, что норма (4) является частным случаем.

Поэтому нам представляется естественным попытаться охарактеризовать пространства $\mathbb{H}_p^\alpha$ при $p \neq 2$ посредством вложений в пространства типа Бесова на полуоси такие, что норма (4) является частным случаем.
Пусть $1 \leq p,\, q < \infty,\, 0 < \alpha < 1$. Определим линейное пространство $\mathcal{H}_{p,q}^\alpha$ всех локально суммируемых функций на полуоси с конечной нормой

$$\|w\|_{\mathcal{H}_{p,q}^\alpha} :\; = \left(c_\alpha \int_0^\infty \frac{dy}{y^{1+\alpha q}} \left[\int_0^y |w(x)|^p dx + \int_0^\infty |w(x+y) - w(x)|^p dx \right]^{q/p} \right)^{1/q}. \quad (5)$$

Поэтому нам представляется естественным попытаться охарактеризовать пространства $\mathbb{H}_p^\alpha$ при $p \neq 2$ посредством вложений в пространства типа Бесова на полуоси такие, что норма (4) является частным случаем.
Пусть $1 \leq p,\, q < \infty,\, 0 < \alpha < 1$. Определим линейное пространство $\mathcal{H}_{p,q}^\alpha$ всех локально суммируемых функций на полуоси с конечной нормой

$$\|w\|_{\mathcal{H}_{p,q}^\alpha} :\, = \left(c_\alpha \int_0^\infty \frac{dy}{y^{1+\alpha q}} \left[\int_0^y |w(x)|^p dx + \int_0^\infty |w(x+y) - w(x)|^p dx \right]^{q/p} \right)^{1/q}. \quad (5)$$

Легко видеть, что $\|w\|_{\mathcal{H}_2^\alpha} = \|w\|_{\mathcal{H}_{2,2}^\alpha}$. Положим

$$\mathcal{H}_p^\alpha :\, = \mathcal{H}_{p,p}^\alpha.$$

Поэтому нам представляется естественным попытаться охарактеризовать пространства $\mathbb{H}_p^\alpha$ при $p \neq 2$ посредством вложений в пространства типа Бесова на полуоси такие, что норма (4) является частным случаем.
Пусть $1 \leq p,\, q < \infty,\, 0 < \alpha < 1$. Определим линейное пространство $\mathcal{H}_{p,q}^\alpha$ всех локально суммируемых функций на полуоси с конечной нормой

$$\|w\|_{\mathcal{H}_{p,q}^\alpha}:\ = \left(c_\alpha \int_0^\infty \frac{dy}{y^{1+\alpha q}} \left[\int_0^y |w(x)|^p dx + \int_0^\infty |w(x+y) - w(x)|^p dx \right]^{q/p} \right)^{1/q}. \quad (5)$$

Легко видеть, что $\|w\|_{\mathcal{H}_2^\alpha} = \|w\|_{\mathcal{H}_{2,2}^\alpha}$. Положим

$$\mathcal{H}_p^\alpha:\ = \mathcal{H}_{p,p}^\alpha.$$

Основным результатом работы является следующая
Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha < 1,\, 1 < p < \infty$. *Тогда*
(a) $\mathbb{H}_p^\alpha \hookrightarrow \mathcal{H}_p^\alpha,\, 2 \leq p < \infty$,
(b) $\mathbb{H}_p^\alpha \hookrightarrow \mathcal{H}_{p,2}^\alpha,\, 1 < p \leq 2$,
(c) $\mathcal{H}_p^\alpha \hookrightarrow \mathbb{H}_p^\alpha,\, 1 < p \leq 2$,
(d) $\mathcal{H}_{p,2}^\alpha \hookrightarrow \mathbb{H}_p^\alpha,\, 2 \leq p < \infty$.
Более того, при $p \neq 2$ *указанные вложения строгие.*

Поэтому нам представляется естественным попытаться охарактеризовать пространства $\mathbb{H}_p^\alpha$ при $p \neq 2$ посредством вложений в пространства типа Бесова на полуоси такие, что норма (4) является частным случаем.
Пусть $1 \leq p,\, q < \infty$, $0 < \alpha < 1$. Определим линейное пространство $\mathcal{H}_{p,q}^\alpha$ всех локально суммируемых функций на полуоси с конечной нормой

$$\|w\|_{\mathcal{H}_{p,q}^\alpha} := \left(c_\alpha \int_0^\infty \frac{dy}{y^{1+\alpha q}} \left[\int_0^y |w(x)|^p dx + \int_0^\infty |w(x+y) - w(x)|^p dx \right]^{q/p} \right)^{1/q}. \quad (5)$$

Легко видеть, что $\|w\|_{\mathcal{H}_2^\alpha} = \|w\|_{\mathcal{H}_{2,2}^\alpha}$. Положим

$$\mathcal{H}_p^\alpha := \mathcal{H}_{p,p}^\alpha.$$

Основным результатом работы является следующая
Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$. *Тогда*
(a) $\mathbb{H}_p^\alpha \hookrightarrow \mathcal{H}_p^\alpha$, $2 \leq p < \infty$,
(b) $\mathbb{H}_p^\alpha \hookrightarrow \mathcal{H}_{p,2}^\alpha$, $1 < p \leq 2$,
(c) $\mathcal{H}_p^\alpha \hookrightarrow \mathbb{H}_p^\alpha$, $1 < p \leq 2$,
(d) $\mathcal{H}_{p,2}^\alpha \hookrightarrow \mathbb{H}_p^\alpha$, $2 \leq p < \infty$.
Более того, при $p \neq 2$ *указанные вложения строгие.*
Данная теорема является полным аналогом известных отношений между классами Лиувилля (бесселевыми потенциалами) и классическими пространствами Бесова (см., например, [Nik], Гл. 9; [St], Гл. 5, Теорема 5).

[Nik] Никольский С.М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М.: Наука, 1977.

[St] Стейн И.М., Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М.: Мир, 1973.

Перечисленные пространства являются однородными в том смысле, что если

$$w_t(x) \colon = w(tx), \quad t > 0, \qquad \text{то}$$

$$\|w_t\|_{\mathbb{H}_p^\alpha} = t^{\alpha - 1/p}\|w\|_{\mathbb{H}_p^\alpha},$$

$$\|w_t\|_{\mathcal{H}_{p,q}^\alpha} = t^{\alpha - 1/p}\|w\|_{\mathcal{H}_{p,q}^\alpha}.$$

Кроме этого, при продолжении нулем на отрицательную полуось функции из $\mathbb{H}_p^\alpha$ и $\mathcal{H}_{p,q}^\alpha$ образуют подпространства однородных классов Лиувилля $\mathcal{L}_p^\alpha$ и Бесова $b_{p,q}^\alpha$, соответственно (см. определение $\mathcal{L}_p^\alpha$ и $b_{p,q}^\alpha$ далее). Однако этой информации еще недостаточно. Для доказательства (b) и (d) Теоремы 1 необходимо привлечь третью шкалу однородных пространств на действительной оси типа Лизоркина-Трибеля, которые при соответствующем выборе параметров суммирования совпадают с точностью до эквивалентности норм либо с классами Лиувилля, либо Бесова и наиболее удобны для выяснения вложений между ними. Необходимые результаты по однородным пространствам приведены в далее. Эти результаты известны (см., например, [Tr1], [Tr2]), однако для целостности изложения мы воспроизводим схему построения однородных пространств и доказательство необходимого нам факта (Теорема 2).

[Tr1] Трибель Х., Теория функциональных пространств, М.: Мир, 1985.
[Tr2] Triebel H., Theory of function spaces II, Birkhäuser, Basel, 1992.

Однородные классы Лиувилля, Бесова и Лизоркина-Трибеля на $\mathbb{R}$

Для функций из класса Шварца $\mathcal{L} :=\mathcal{L}(\mathbb{R})$ ([Nik], § 1.5) прямое и обратное преобразование Фурье задаются формулами

$$\hat{g}(\xi) = \mathcal{F}g(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{2\pi i \xi x} dx,$$

$$\mathcal{F}^{-1}G(x) := \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi) e^{-2\pi i \xi x} d\xi.$$

При $0 < \alpha < 1$ определим дробную производную

$$D^{\alpha} w(x) := \mathcal{F}^{-1} \left[(2\pi i \xi)^{\alpha} \mathcal{F} w(\xi) \right] (x).$$

При $w \in \mathcal{L}$ равенство

$$w = J_{\alpha} D^{\alpha} w,$$

где

$$J_{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy,$$

выполняется в классическом смысле. Если $\Phi \subset \mathcal{L}$ подпространство функций, у которых преобразование Фурье исчезает в начале координат, то для $w \in \Phi$

$$w = D^{\alpha} J_{\alpha} w.$$

[Nik] Никольский С.М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М.: Наука, 1977.

Обозначим $\mathcal{L}_p^\alpha \subset \Phi'$ пополнение Φ относительно нормы

$$\|w\|_{\mathcal{L}_p^\alpha} :\, = \|D^\alpha w\|_p,$$

где интеграл в L^p-норме $\|\cdot\|_p$ берется по всей оси $\mathbb{R}$. Пространства

$$L_p^\alpha :\, = L_p \cap \mathcal{L}_p^\alpha$$

на $\mathbb{R}$ интенсивно изучались П.И. Лизоркиным [Liz1] – [Liz3]. Обозначим $\mathcal{M}_p$, $1 < p < \infty$ пространство всех мультипликаторов интегралов Фурье в $L_p(\mathbb{R})$. По определению ([St], Гл. IV, § 3), ограниченная функция $m(\xi) \in \mathcal{M}_p$, если

$$\|\mathcal{F}^{-1}(m\mathcal{F}f)\|_p \le A\|f\|_p, \quad f \in \mathcal{L},$$

с константой $A > 0$, не зависящей от f. Пусть $0 < \alpha < 1$ и

$$\lambda_\alpha(\xi) :\, = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha}\chi_{[2^k,2^{k+1}]}(|\xi|) =:\, \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha}\chi_k(\xi).$$

Тогда по теореме Марцинкевича ([St], Гл. 4, § 6)

$$\mu(\xi) :\, = \frac{(i\xi)^\alpha}{\lambda_\alpha(\xi)} \in \mathcal{M}_p; \quad \frac{1}{\mu(\xi)} \in \mathcal{M}_p, \;\; 1 < p < \infty. \tag{6}$$

[Liz1] Лизоркин П.И., Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^{(r)}(E_n)$, Матем. сборник, 1963, т. 50, № 3, 325-353.
[Liz2] Лизоркин П.И., Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложения, Труды МИАН СССР, 1969, т. 105, 105-202.
[Liz3] Лизоркин П.И., Операторы, связанные с дробным дифференцированием, и классы дифференцируемых функций, Труды МИАН СССР, 1972, т. 117, 212-243.
[St] Стейн И.М., Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М.:

Положим

$$w_\alpha \colon = \mathcal{F}^{-1}[\lambda_\alpha \mathcal{F} w], \quad w \in \Phi.$$

Тогда

$$D^\alpha w = \mathcal{F}^{-1}[\mu \lambda_\alpha \mathcal{F} w] = \mathcal{F}^{-1}[\mu \mathcal{F} w_\alpha]$$

и

$$w_\alpha = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mu} \mathcal{F} D^\alpha w\right].$$

Применяя (6), получим соотношение

$$\|D^\alpha w\|_p \ll \|w_\alpha\|_p \ll \|D^\alpha w\|_p, \tag{7}$$

которое по непрерывности распространяется на все пространство $\mathcal{L}_p^\alpha$.
Далее, по теореме Литтлвуда-Пэли ([St], Гл. 4, § 5)

$$\|w\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |S_k w|^2 \right)^{1/2} \right\|_p, \quad w \in \Phi, \tag{8}$$

где

$$S_k w \colon = \mathcal{F}^{-1}[\chi_k \mathcal{F} w].$$

[St] Стейн И.М., Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М.: Мир, 1973.

Пусть $1 < p,\ q < \infty$, $\alpha \in (0,1)$. Обозначим $\mathcal{F}^{\alpha}_{p,q}$ пополнение Φ по норме

$$\|w\|_{\mathcal{F}^{\alpha}_{p,q}} :\ = \left\| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{qk\alpha} |S_k w|^q \right)^{1/q} \right\|_p . \tag{9}$$

Аналогично, обозначим $\mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}$ пополнение Φ по норме

$$\|w\|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}} :\ = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{qk\alpha} \|S_k w\|_p^q \right)^{1/q} , \tag{10}$$

а символом $b^{\alpha}_{p,q}$ будем обозначать замыкание подпространства функций $w \in \Phi$ таких, что

$$\|w\|_{b^{\alpha}_{p,q}} :\ = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dh}{|h|^{1+\alpha q}} \left(\int_{\mathbb{R}} |w(x+h) - w(x)|^p dx \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty. \tag{11}$$

Классы $\mathcal{F}^{\alpha}_{p,q}$ обычно называют однородными пространствами Лизоркина-Трибеля, а $b^{\alpha}_{p,q}$ и $\mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}$ – однородными пространствами Бесова.
Применяя (7) и (8), находим

$$\|w\|_{\mathcal{L}^{\alpha}_p} \approx \|w_\alpha\|_p \approx \left\| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |S_k w_\alpha|^2 \right)^{1/2} \right\|_p = \left\| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{2k\alpha} |S_k w|^2 \right)^{1/2} \right\|_p = \|w\|_{\mathcal{F}^{\alpha}_{p,2}}. \tag{12}$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}^{\alpha}_p = \mathcal{F}^{\alpha}_{p,2}. \tag{13}$$

Из определения нормы пространства $\mathcal{F}^{\alpha}_{p,q}$ и неравенств Йенсена вытекает, что

$$\|w\|_{\mathcal{F}^{\alpha}_{p,2}} \leq \|w\|_{\mathcal{F}^{\alpha}_{p,p}}, \quad 1 < p \leq 2, \tag{14}$$

$$\|w\|_{\mathcal{F}^{\alpha}_{p,p}} \leq \|w\|_{\mathcal{F}^{\alpha}_{p,2}}, \quad 2 \leq p < \infty. \tag{15}$$

Поэтому из эквивалентности (12) следует

$$\|w\|_{\mathcal{L}^{\alpha}_{p}} \ll \|w\|_{\mathcal{F}^{\alpha}_{p,p}}, \quad 1 < p \leq 2, \tag{16}$$

$$\|w\|_{\mathcal{F}^{\alpha}_{p,p}} \ll \|w\|_{\mathcal{L}^{\alpha}_{p}}, \quad 2 \leq p < \infty. \tag{17}$$

Очевидно, что

$$\|w\|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{p,p}} = \|w\|_{\mathcal{F}^{\alpha}_{p,p}}. \tag{18}$$

Отсюда и (14) – (17) получаем вложения однородных пространств на $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}^{\alpha}_{p} \hookrightarrow \mathcal{B}^{\alpha}_{p,p}, \quad 2 \leq p < \infty, \tag{19}$$

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{p,p} \hookrightarrow \mathcal{L}^{\alpha}_{p}, \quad 1 < p \leq 2. \tag{20}$$

Важнейшим свойством однородных пространств Бесова является эквивалентность норм (10) и (11) (см. теорему ниже).

Теорема 2. *Пусть* $1 < p,\, q < \infty$, $\alpha \in (0,1)$. *Тогда*

$$\|w\|_{b^{\alpha}_{p,q}} :\, = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dh}{|h|^{1+\alpha q}} \left(\int_{\mathbb{R}} |w(x+h) - w(x)|^p dx\right)^{q/p}\right)^{1/q}$$

$$\asymp \|w\|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}} := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{qk\alpha} \|S_k w\|_p^q\right)^{1/q}. \tag{21}$$

Следствие 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда для однородных пространств на действительной оси выполняются вложения*

$$b^{\alpha}_{p,p} = \mathcal{B}^{\alpha}_{p,p} = \mathcal{F}^{\alpha}_{p,p} \supset \mathcal{F}^{\alpha}_{p,2} = \mathcal{L}^{\alpha}_{p}, \ \ 2 \le p < \infty \tag{22}$$

$$\mathcal{L}^{\alpha}_{p} = \mathcal{F}^{\alpha}_{p,2} \supset \mathcal{F}^{\alpha}_{p,p} = \mathcal{B}^{\alpha}_{p,p} = b^{\alpha}_{p,p}, \ \ 1 < p \le 2, \tag{23}$$

в частности,

$$\|w\|_{b^{\alpha}_{p,p}} \ll \|w\|_{\mathcal{L}^{\alpha}_{p}}, \ \ 2 \le p < \infty \tag{24}$$

$$\|w\|_{\mathcal{L}^{\alpha}_{p}} \ll \|w\|_{b^{\alpha}_{p,p}}, \ \ 1 < p \le 2. \tag{25}$$

Напомним, что

$$\|w\|_{\mathcal{F}^{\alpha}_{p,q}} :\, = \left\| \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{qk\alpha} |S_k w|^q \right)^{1/q} \right\|_p$$

$$\|w\|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}} :\, = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{qk\alpha} \|S_k w\|_p^q \right)^{1/q}$$

$$\|w\|_{b^{\alpha}_{p,q}} :\, = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dh}{|h|^{1+\alpha q}} \left(\int_{\mathbb{R}} |w(x+h) - w(x)|^p dx \right)^{q/p} \right)^{1/q}$$

$$\|w\|_{\mathcal{L}^{\alpha}_{p}} :\, = \|D^{\alpha} w\|_p, \quad \text{где } D^{\alpha} w(x) :\, = \mathcal{F}^{-1}\left[(2\pi i \xi)^{\alpha} \mathcal{F} w(\xi) \right](x).$$

Основной результат работы

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$. *Тогда*
(a) $\mathbb{H}_p^\alpha \hookrightarrow \mathcal{H}_p^\alpha$, $2 \le p < \infty$,
(b) $\mathbb{H}_p^\alpha \hookrightarrow \mathcal{H}_{p,2}^\alpha$, $1 < p \le 2$,
(c) $\mathcal{H}_p^\alpha \hookrightarrow \mathbb{H}_p^\alpha$, $1 < p \le 2$,
(d) $\mathcal{H}_{p,2}^\alpha \hookrightarrow \mathbb{H}_p^\alpha$, $2 \le p < \infty$.
Более того, при $p \ne 2$ *указанные вложения строгие.*

Напомним, что здесь

$$\mathbb{H}_p^\alpha :\ = \left\{ w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) : w = I_\alpha f, f \in L^p(\mathbb{R}_+) \right\}$$

есть пространство дробных потенциалов Римана-Лиувилля с нормой

$$\|w\|_{\mathbb{H}_p^\alpha} :\ = \|f\|_p :\ = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

и норма в пространстве $\mathcal{H}_{p,q}^\alpha$ имеет вид

$$\|w\|_{\mathcal{H}_{p,q}^\alpha} :\ = \left(c_\alpha \int_0^\infty \frac{dy}{y^{1+\alpha q}} \left[\int_0^y |w(x)|^p dx + \int_0^\infty |w(x+y) - w(x)|^p dx \right]^{q/p} \right)^{1/q}.$$

Спасибо за внимание !

Дорогой Миша !

С Днём Рождения !