Вклад Г. Г. Магарил-Ильяева в теорию оптимального восстановления

К.Ю. Осипенко

МГУ e-mail: kosipenko@yahoo.com

Общая постановка задачи оптимального восстановления

Истоковой задачей для общей задачи оптимального восстановления является задача о построении наилучшей квадратурной формулы, поставленная А. Н. Колмогоровым. Пусть дан некоторый класс функций W. Требуется вычислить

$$\int_a^b x(t)\,dt,$$

зная значения $x(t_1), \ldots, x(t_n)$.

В качестве методов восстановления значения интеграла рассматриваются всевозможные квадратурные формулы

$$\int_a^b x(t)\,dt \approx \sum_{j=1}^n a_j x(t_j).$$

Ставится задача о нахождении наилучшей квадратурной формулы, т.е. формулы, на которой достигалась бы нижняя грань

$$\inf_{a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}}\ \sup_{x(\cdot)\in W}\left|\int_a^b x(t)\,dt-\sum_{j=1}^{n}a_jx(t_j)\right|.$$

Такого рода постановки впервые стали рассматриваться в работах A. Sard (American J. of Math., 1949) и С.М. Никольского (Успехи матем. наук, 1950).

Если считать, что W — подмножество линейного пространства, и линейные Функционалы

$$Lx = \int_a^b x(t)\,dt, \quad l_j x = x(t_j),\ j = 1, \dots, n,$$

заменить на произвольные линейные функционалы и, кроме того, приближать Lx не только линейными, а всевозможными функциями, то мы придем к постановке, которая была предложена С.А. Смоляком в 1965 г.: найти величину

$$E(L, W, l_1, \dots, l_n) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} \sup_{x \in W} |Lx - \varphi(l_1 x, \dots, l_n x)|,$$

называемую погрешностью оптимального восстановления, а также метод, на котором достигается нижняя грань, называемый оптимальным.

С.А. Смоляк доказал, что если W — выпуклое центрально-симметричное множество, то существует линейный оптимальный метод и справедливо равенство

$$E(L, W, l_1, \dots, l_n) = \sup_{\substack{x \in W \\ l_j x = 0,\ j = 1, \dots, n}} |Lx|.$$

Н.С. Бахвалов предложил рассматривать эту задачу для случая, когда значения функционалов l_j, $j = 1, \dots, n$, задаются с погрешностью. В дальнейшем эта постановка обобщалась многими авторами и наиболее общая задача о восстановлении линейного функционала может быть сформулирована следующим образом.

Пусть X и Y — линейные пространства над полем K вещественных или комплексных чисел и $L\colon X \to K$ — линейный функционал. Требуется восстановить значения функционала L на некотором множестве $W \subset X$ по значениям многозначного отображения (м. о.) $F\colon W \to Y$, под которым понимается отображение, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in W$ непустое множество $F(x) \subset Y$. Множество

$$\operatorname{gr} F := \{\, (x, y) : x \in W,\ \ y \in F(x) \,\}$$

называется графиком м. о. F.

Многозначность отображения F моделирует неточно заданную информацию об элементах W. Часто в задачах восстановления рассматривают отображения вида $F(x) = Ix + U$, где $I\colon X \to Y$ — линейный оператор, называемый информационным, а U — некоторое фиксированное множество из Y. Например, если Y — нормированное пространство, то в качестве U рассматривают шар радиуса δ. При этом говорят, что значения информационного оператора I заданы с погрешностью δ.

Под методами восстановления функционала L будем понимать всевозможные функции $\varphi\colon F(W) \to K$.

Таким образом, имеем следующую диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
X \supset W \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "F"'] & & K \\
& F(W) \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}
$$

Погрешностью метода восстановления φ назовем величину

$$e(L, F, \varphi) = \sup_{(x,y)\in \operatorname{gr} F} |Lx - \varphi(y)|.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(L, F) = \inf_{\varphi\colon\, F(W)\to K} e(L, F, \varphi).$$

Введем величину, которая в некотором смысле характеризует “разброс” значений линейного функционал L на множестве элементов из W с одной и той же информацией. Величина

$$R(L, F) = \sup_{y \in F(W)} r(L, F, y),$$

где

$$r(L, F, y) = \inf_{c \in K} \sup_{x \in F^{-1}(y)} |Lx - c|$$

— чебышевский радиус множества $L(F^{-1}(y))$, называется радиусом информации в задаче оптимального восстановления.

Множество A в линейном пространстве X называется уравновешенным, если из того, что $x \in A$ и $|\lambda| = 1$ следует, что $\lambda x \in A$. Если $A \subset X$, то через $\operatorname{bco} A$ обозначим наименьшее выпуклое уравновешенное множество, содержащее A.
Пусть X и Y — линейные пространства и $W \subset X$. Сопоставим многозначному отображению $F\colon W \to Y$ выпуклое уравновешенное многозначное отображение $\operatorname{bco} F\colon \operatorname{bco} W \to Y$ по правилу

$$\operatorname{bco} F(x) = \{\, y \in Y \mid (x, y) \in \operatorname{bco} \operatorname{gr} F \,\}.$$

Теорема (1991)

Пусть X и Y — линейные пространства над полем K вещественных или комплексных чисел, $W \subset X$, $F\colon W \to Y$ и $L \in X'$. Тогда для существования линейного оптимального метода необходимо и достаточно, чтобы

$$R(L, F) = R(L, \operatorname{bco} F).$$

При этом

$$E(L, F) = \sup_{x \in (\operatorname{bco} F)^{-1}(0)} |Lx|.$$

В частности, если $F(x) = Ix + \delta B$, где $I\colon X \to Y$ — линейный оператор, Y — линейное нормированное пространство, а B — единичный шар в Y, то отображение F является выпуклым уравновешенным и среди оптимальных методов есть линейный.

Регуляризация по Тихонову и по Колмогорову

Пусть функция $x(\cdot)$ такова, что ее ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

равномерно сходится на $\mathbb{T}$. Предположим, что вместо точных значений коэффициентов Фурье этой функции a_k, $k = 0, 1, \ldots$, и b_k, $k = 1, 2, \ldots$, нам известны их приближенные значения $\widetilde{a}_k$ и $\widetilde{b}_k$ такие, что

$$\frac{(a_0 - \widetilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big((a_k - \widetilde{a}_k)^2 + (b_k - \widetilde{b}_k)^2 \Big) \leq \delta^2, \qquad (1)$$

где $\delta > 0$ характеризует погрешность задания коэффициентов Фурье. Задача состоит в восстановлении значения функции $x(\cdot)$ в данной точке t.

При замене точных значений коэффициентов Фурье приближенными невозможно восстановить значение функции, какова бы малой ни была погрешность задания исходных данных. Действительно, пусть

$$\widetilde{a}_0 - a_0 = \widetilde{b}_k - b_k = 0, \quad \widetilde{a}_k - a_k = \frac{\delta}{Ck}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где

$$C = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}.$$

Тогда неравенство (1) выполнено, а погрешность в точке $t = 0$ равна

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \widetilde{a}_k) = \frac{\delta}{C\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Тем не менее, можно предложить метод восстановления, погрешность которого будет стремится к нулю при стремлении к нулю погрешности, с которой задаются приближенные коэффициенты Фурье.

Теорема (А. Н. Тихонова)

Пусть $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ и непрерывна в фиксированной точке $t \in \mathbb{T}$. Тогда сумма ряда

$$\frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2\alpha}(\widetilde{a}_k \cos kt + \widetilde{b}_k \sin kt),$$

где $\widetilde{a}_k$ и $\widetilde{b}_k$ — приближенные значения коэффициентов Фурье функции $x(\cdot)$, удовлетворяющие условию (1), а $\alpha = \delta C(\delta)$, $0 < C_1 \le C(\delta) \le C_2$, совпадает со значением $x(t)$ с погрешностью, стремящейся к нулю при $\delta \to 0$.

В учебнике по математическому анализу В. А. Ильин и Э. Г. Позняка пишут: “... должны ли мы, желая получить как можно более точное представление об интересующем нас физическом процессе, неограниченно совершенствовать точность прибора или путь к этому лежит через развитие таких математических методов обработки результатов измерений, которые позволяют при имеющейся точности измерения частотных характеристик извлечь максимальную информацию об изучаемом процессе.” Но метод регуляризации утверждает о сходимости предложенного алгоритма при $\delta \to 0$ и не дает информации о погрешности алгоритма при данном фиксированном δ. Кроме того, мы не можем утверждать, что мы “извлекли максимальную информацию об изучаемом процессе”, так как нет гарантии, что не существует алгоритма, который дал бы лучший результат (в данной постановке нет возможности сравнивать разные алгоритмы).

Обозначим через $\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T})$, $r \geq 1$, множество 2π-периодических функций с абсолютно непрерывными производными $x^{(r)}(\cdot)$, удовлетворяющих условию $x^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$. В пространстве $\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T})$ рассмотрим класс функций

$$W_2^r(\mathbb{T}) = \{\, x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}) : \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1 \,\}.$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления функции $x^{(k)}(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})$, $k < r$, по информации о неточно заданных коэффициентах Фурье a_j, $j \in A$, и b_j, $j \in B$, где A и B некоторые конечные подмножества $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \ldots\}$ и $\mathbb{N}$ соответственно. Положим $N = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$ и

$$F_{A,B}x(\cdot) = (\{a_j\}_{j\in A}, \{b_j\}_{j\in B}).$$

Введем величину, называемую погрешностью метода восстановления $\varphi\colon l_2^N \to L_2(\mathbb{T})$

$$e(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{T}),\ y\in l_2^N \\ \|F_{A,B}x(\cdot)-y\|_{l_2^N}\le\delta}} \|x^{(k)}(\cdot)-\varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

и величину, называемую погрешностью оптимального восстановления

$$E(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \inf_{\varphi\colon l_2^N\to L_2(\mathbb{T})} e(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi).$$

Метод, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным.

Теорема (2002)

Пусть $\delta < 1$, $1 \le k \le r-1$. Тогда

$$E(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2},$$

и для любых наборов чисел $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\in A\setminus\{0\}}$ и $\beta = \{\beta_j\}_{j\in B}$ таких, что

$$j^{2k}\left(\frac{(1-\alpha_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\alpha_j^2}{\lambda_1}\right) \le 1,\ \ j \in A\setminus\{0\},$$

$$j^{2k}\left(\frac{(1-\beta_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\beta_j^2}{\lambda_1}\right) \le 1,\ \ j \in B,$$

методы $\varphi_{\alpha,\beta}\left(\{\widetilde{a}_j\}_{j\in A}, \{\widetilde{b}_j\}_{j\in B}\right)(t)$ являются оптимальными.

$$\varphi_{\alpha,\beta}\left(\{\widetilde{a}_j\}_{j\in A},\{\widetilde{b}_j\}_{j\in B}\right)(t)=\sum_{j\in A\setminus\{0\}} j^k\alpha_j\widetilde{a}_j\cos\left(jt+\frac{\pi k}{2}\right)$$
$$+\sum_{j\in B} j^k\beta_j\widetilde{b}_j\sin\left(jt+\frac{\pi k}{2}\right)$$

Через $\mathcal{W}^r_{2,2}(\mathbb{R})$ обозначим пространство функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, для которых $x^{(r-1)}(\cdot)$ локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Положим

$$W^r_{2,2}(\mathbb{R}) = \{\, x(\cdot) \in \mathcal{W}^r_{2,2}(\mathbb{R}) : \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1 \,\}.$$

Предположим, что известно преобразование Фурье $Fx(\cdot)$ функции $x(\cdot) \in W^r_{2,2}(\mathbb{R})$, заданное на $\Delta_\sigma = [-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$, с точностью до δ в метрике $L_2(\Delta_\sigma)$, т. е. известна функция $y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma)$ такая, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \le \delta$. Требуется по этой информации восстановить функцию $x^{(k)}(\cdot)$, $0 \le k < r$, в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

Погрешностью метода восстановления $\varphi\colon L_2(\Delta_\sigma) \to L_2(\mathbb{R})$ назовем величину

$$e(x^{(k)}(\cdot), W^r_{2,2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W^r_{2,2}(\mathbb{R}),\ y\in L_2(\Delta_\sigma)\\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)}\le\delta}} \|x^{(k)}(\cdot)-\varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

а величину

$$E(x^{(k)}(\cdot), W^r_{2,2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta) = \inf_{\varphi\colon L_2(\Delta_\sigma)\to L_2(\mathbb{R})} e(x^{(k)}(\cdot), W^r_{2,2}(\mathbb{R}), \sigma, \delta, \varphi)$$

будем называть погрешностью оптимального восстановления. Метод, на котором достигается нижняя грань, будем, как обычно, называть оптимальным методом восстановления.

Положим

$$\widehat{\sigma} = \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2r}}.$$

Введем также следующие обозначения: $\sigma_0 = \min\{\sigma, \widehat{\sigma}\}$,

$$\widehat{\lambda}_1 = \left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}} \frac{r-k}{r} \sigma_0^{2k}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \sigma_0^{-2(r-k)}.$$

Теорема (2003, 2010)

Пусть $1 \le k \le r-1$, $\sigma > 0$ и $\delta > 0$. Тогда

$$E(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) = \begin{cases} \sigma^k \sqrt{\dfrac{r-k}{2\pi r}\left(\dfrac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}}\delta^2 + \dfrac{1}{\sigma^{2r}}}, & \sigma < \widehat{\sigma}, \\ \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{r-k}{2r}}, & \sigma \ge \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Для всех измеримых на $[-\sigma, \sigma]$ функций $a(\cdot)$ таких, что

$$\xi^{2k}\left(\frac{|1-a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2r}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_1}\right) \le 1$$

методы $\widehat{\varphi}(y)(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}(i\xi)^k a(\xi) y(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi$ являются оптимальными.

Теорема (2003)

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le r-1$ и $2 \le p \le \infty$. Имеет место точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le K(k,r,p)\|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})}^{\frac{r-k}{r+1/2-1/p}}\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{k+1/2-1/p}{r+1/2-1/p}}, \quad (2)$$

где при $2 < p < \infty$

$$K(k,r,p) = \sqrt{\frac{r+1/2-1/p}{k+1/2-1/p}}\left(\frac{\sqrt{k+1/2-1/p}B^{1/2-1/p}}{(2\pi)^{1/2}(r-k)^{1-1/p}}\right)^{\frac{r-k}{r+1/2-1/p}},$$

$$B = B\left(\frac{k+1/2-1/p}{(r-k)(1-2/p)}, 2\frac{1-1/p}{1-2/p}\right),$$

$$K(k,r,\infty) = \sqrt{\frac{2r+1}{2k+1}}\left(\frac{1}{\pi(2r+1)}\right)^{\frac{r-k}{2r+1}}, \quad K(k,r,2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{r-k}{2r}}.$$