О наименьшем типе целой функции с заданной (под)последовательностью нулей

Брайчев Георгий Генрихович

Российский университет дружбы народов,
Московский педагогический государственный университет

VI Воркшоп по комплексному анализу,
посвященный юбилею д.ф.-м.н., профессора
Абанина Александра Васильевича

12 – 13 февраля 2025 г.

Рост целой функции

Совокупность всех целых функций $f = f(z)$ обозначим $H(\mathbb{C})$. Пусть $M_f(r)$ — максимум модуля $f \in H(\mathbb{C})$ на окружности $|z| = r$ и $\rho > 0$. Величины

$$\sigma_\rho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho},$$

$$h_\rho(\theta, f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho},$$

$$I_\rho(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h_\rho(\theta, f)\, d\theta$$

суть тип, индикатор функции f и усредненное значение индикатора (относительно порядка ρ). Пусть еще $E[\rho, \infty)$ — класс целых функций конечного типа при порядке ρ.

Рост последовательности нулей целой функции

Обозначим через $\Lambda_f = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ последовательность нулей функции f. Считаем, что ее члены выписаны в порядке возрастания модулей, причем кратный нуль записан столько раз, какова его кратность. Если $\Lambda_f = \Lambda$, то говорим, что f является порождающей функцией последовательности Λ.
Пусть $n_\Lambda(r) = \max\{n : |\lambda_n| \leqslant r,\ \lambda_n \in \Lambda\}$ — считающая функция последовательности Λ. Усредненная считающая функция этой последовательности определятся формулой

$$N_\Lambda(r) = \int\limits_0^r \frac{n_\Lambda(t) - n_\Lambda(0)}{t}\,dt.$$

Верхняя и нижняя ρ-плотности последовательности Λ, верхняя и нижняя усредненные ρ-плотности Λ определяются соответственно формулами:

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{r^\rho}, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{r^\rho},$$

$$\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N(r)}{r^\rho}, \qquad \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N(r)}{r^\rho}.$$

Последовательность называется измеримой, если

$$\overline{\Delta}_\rho = \underline{\Delta}_\rho \quad \sim \quad \overline{\Delta}^*_\rho = \underline{\Delta}^*_\rho.$$

Связь между ростом функции и ростом последовательности ее нулей

Согласно теореме Вейерштрасса каждая последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ без конечных предельных точек имеет порождающую целую функцию f, т. е. $\Lambda = \Lambda_f$. Адамар показал, что целую функцию конечного порядка ρ можно представить также и в виде произведения

$$f(z) = z^m e^{P(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) e^{\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z^2}{2\lambda_n^2} + \cdots + \frac{z^p}{p\lambda_n^p}}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где m — кратность нуля в точке $z = 0$, $P(z)$ — многочлен степени, не превосходящей ρ, а $p \leqslant [\rho]$.

Ключевую роль играет формула Иенсена (считаем $f(0) = 1$)

$$\ln \frac{r^n}{|\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n|} = \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta}) \, d\theta.$$

Из этой формулы следует оценка

$$\overline{\Delta}_{\rho}^{*}(\Lambda_f) \leqslant I_{\rho}(f) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_{\rho}(\theta, f) \, d\theta \leqslant \sigma_{\rho}(f).$$

Известные результаты

Определим величины

$$T(\Lambda,\rho) = \inf\{\sigma_\rho(f):\ f \in E[\rho,\infty),\, \Lambda_f = \Lambda\},$$

$$T^*(\Lambda,\rho) = \inf\{\sigma_\rho(f):\ f \in E[\rho,\infty),\, \Lambda_f \supset \Lambda\}.$$

Близкие понятия вводились в работах Б. Н. Хабибуллина (1992 г., 2009 г.). При $\rho \in (0,1)$ в ситуациях, когда все нули функций расположены на одном или нескольких лучах, а также в нескольких правильно расположенных углах, точные значения экстремальных величин $T(\Lambda,\rho)$, выраженные через различные плотности последовательности Λ, найдены в работах А. Ю. Попова (2005 г.), В. Б. Шерстюкова (2011 г.), Г. Г. Брайчева ($\geqslant$ 2012 г.).

Приведем, например, такой результат А. Ю. Попова.

Пусть $\rho \in (0,1)$ и все нули функции f положительны. Тогда справедливо точное неравенство

$$\sigma_\rho(f) \geqslant C(\rho)\,\overline{\Delta}_\rho, \qquad C(\rho) = \max_{a>0} \frac{\ln(1+a)}{a^\rho}.$$

В таком случае

$$T(\Lambda,\rho) = C(\rho)\,\overline{\Delta}_\rho(\Lambda).$$

Известные результаты

Величины $T^*(\Lambda,\rho)$, важные для приложений, вычисляются реже, причем при дополнительных предположениях регулярности роста (Г. Г. Брайчев, Б. Н. Хабибуллин, В. Б. Шерстюков, 2023–2024 гг.).
Б. Н. Хабибуллиным доказаны следующие оценки

$$\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \leqslant T^*(\Lambda,\rho) \leqslant P_\rho\,\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda).$$

$$T^*(\Lambda,\rho) \leqslant T(\Lambda,\rho) \leqslant (1+J_\rho)\,T^*(\Lambda,\rho).$$

Здесь константа Пэли P_ρ задается формулой

$$P_\rho = \frac{\pi\rho}{\sin(\pi\rho)}, \qquad \text{если} \qquad 0<\rho<\frac{1}{2},$$

$$P_\rho = \pi\rho, \qquad \text{если} \qquad \rho \geqslant \frac{1}{2},$$

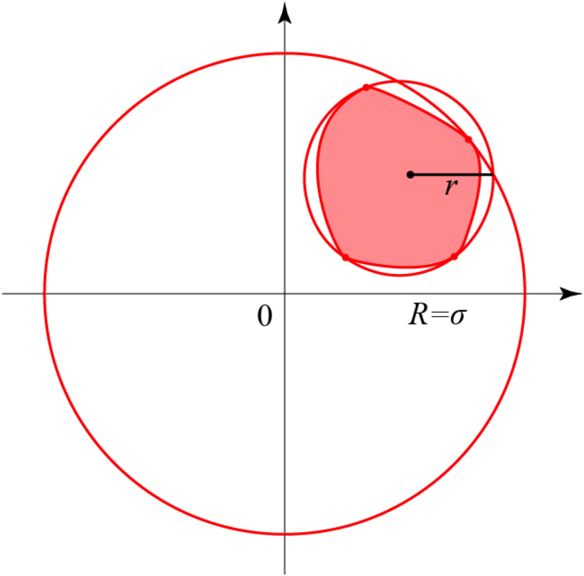
а константа из второй оценки имеет вид

$$J_\rho = \rho^2 \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{\ln(1-2s\cos\psi+s^2)}{2} - \sum_{k=1}^{[\rho]} \frac{s^k}{k}\cos k\psi \right)^{+} \frac{ds}{s^{k+2}} \right).$$

Целые функции экспоненциального роста

Рассмотрим важный во многих приложениях класс целых функций экспоненциального роста, когда $\rho = 1$. В этом случае некоторые характеристики имеют наглядный геометрический смысл. Так, множество точек на плоскости $G_f = \left\{ z \in \mathbb{C} : \sup\limits_{\theta} \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}) \leqslant h(\theta, f) \right\}$, называемое индикаторной диаграммой функции f, представляет собой наименьший выпуклый компакт, вне которого аналитически продолжается из бесконечности преобразование Бореля–Лапласа f, а величина $2\pi I(f) = \int\limits_0^{2\pi} h(\theta, f)\, d\theta$ равна длине границы индикаторной диаграммы. И эта длина не зависит от расположения индикаторной диаграммы на плоскости. Но максимум индикатора целой функции равен типу этой функции. Следовательно, тип будет наименьшим, когда индикаторная диаграмма находится в круге наименьшего радиуса с центром в начале координат. Этого можно добиться соответствующим сдвигом индикаторной диаграммы, что раносильно прибавлению к индикатору $h(\theta, f)$ слагаемого вида $d\cos(\theta - \theta_0)$, не меняющего величины $I(f)$. Поясню некоторые факты на рисунке.

Рисунок



Некоторые дополнительные определения

Индикатор целой функции f при порядке $\rho > 0$ дается формулой

$$h_\rho(\theta, f) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho}.$$

Функция f имеет вполне регулярный рост на луче $\arg z = \theta$, если в этой формуле существует предел, когда $r \to +\infty$, $r \notin C_0$.

Для всех $\theta \in [0, 2\pi]$ выполняется неравенство

$$h_\rho(\theta, f) \leqslant \sigma_\rho(f).$$

Лучи, на которых достигается равенство

$$h_\rho(\theta, f) = \sigma_\rho(f),$$

назовем лучами экстремального роста функции f.

Новые результаты

Теорема

Пусть целая функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!}\, z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

имеет при порядке $\rho \in \mathbb{N}$ *тип*

$$\sigma_\rho(f) = \sigma > 0 \quad \textit{и} \quad \Lambda_f = \Lambda.$$

Тогда верна формула

$$T(\Lambda, \rho) = \frac{1}{\rho} \inf_{|a| \leqslant \sigma} \left\{ \varlimsup_{n\to\infty} \left| \sum_{k=0,\, k|\rho}^{n} C_n^k\, f_{n-k}\, a^k \right|^{\rho/n} \right\}.$$

Новые результаты

Теорема

Пусть $\rho > 0$, $f \in E[\rho, \infty)$ *и* $\Lambda_f = \Lambda$. *Равенства*

$$T^*(\Lambda, \rho) = T(\Lambda, \rho) = \sigma_\rho(f)$$

справедливы при выполнении любого из следующих условий:

1. $\rho \in (0,\, 1/2]$ *и* f *имеет вполне регулярный рост на одном луче экстремального роста;*

2. $\rho > 1/2$ *и* f *имеет вполне регулярный рост на двух лучах экстремального роста, образующих угол раствора* π/ρ*;*

3. $\rho > 1/2$ *и* f *имеет вполне регулярный рост на трех лучах экстремального роста* $\arg z = \theta_1, \theta_2, \theta_3$ *таких, что* $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ *и* $\theta_2 - \theta_1 < \pi/\rho$, $\theta_3 - \theta_2 < \pi/\rho$, $\pi/\rho < \theta_3 - \theta_1 < 2\pi$.

Основные источники

1. Хабибуллин Б. Н. О типе целых и мероморфных функций // Матем. сб., 183:11 (1992), 35–44.
2. Хабибуллин Б. Н. Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции // Матем. сб., 200:2 (2009), 129–158.
3. Попов А. Ю. Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1 (2005), 31–36.
4. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. матем., 75:1 (2011), 3–28.
5. Брайчев Г. Г., Хабибуллин Б. Н., Шерстюков В. Б. Задача Сильвестра, покрытия сдвигами и теоремы единственности для целых функций // Уфимск. матем. журн., 15:4 (2023), 30–41.
6. Braichev G. G., Sherstyukov V. B. Uniqueness theorem for entire functions of exponential type // Lobachevskii J. Math., 45 (2024), 2672–2677.

Благодарности

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!