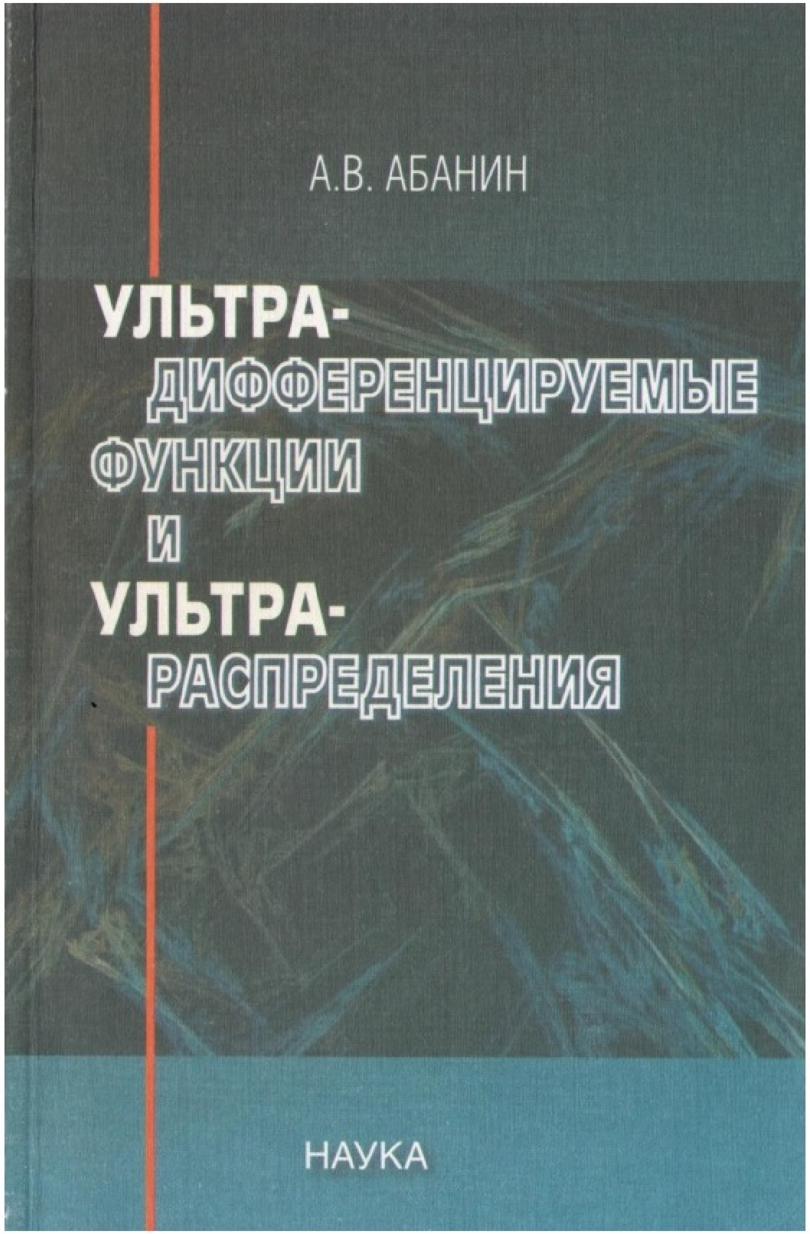
РЕГУЛЯРНЫЙ РОСТ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

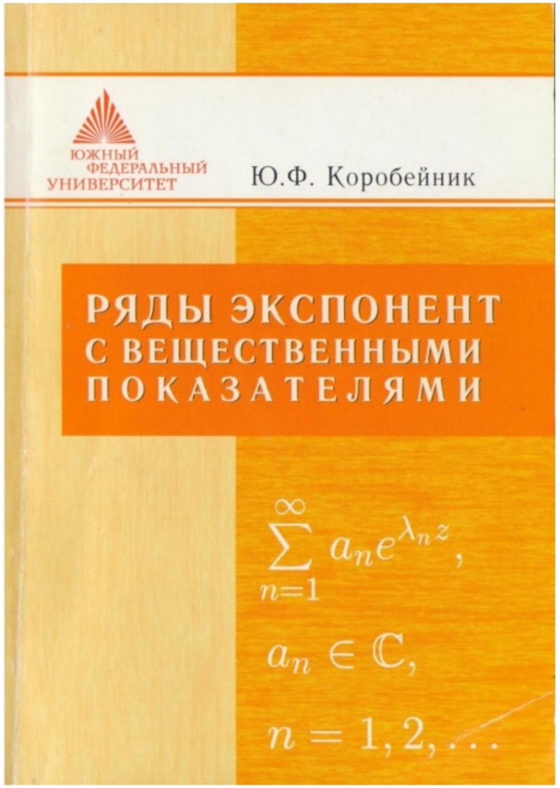
А.М. Гайсин

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия)

Воркшоп по комплексному анализу, посвященный юбилею
доктора физико-математических наук, профессора
Абанина Александра Васильевича

(12 – 13 февраля 2025 г., дистанционный формат)


А.В. АБАНИН
УЛЬТРА-
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ
ФУНКЦИИ
И
УЛЬТРА-
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
НАУКА



Разумеется, автор понимает, что тематику, затронутую в этой небольшой книге, желательно осветить более подробно. К написанию подобной монографии было бы целесообразно привлечь, кроме ростовских математиков, их украинских коллег (из Харькова, Киева и особенно Львова, из группы во главе с М. Н. Шереметой), а также учеников и последователей А. Ф. Леонтьева (в первую очередь, А. М. Гайсина и его учеников). Автор был бы рад, если эта небольшая книга послужила бы отправной точкой для создания подобной монографии.

ДОСТОЯНИЕ РЕСПУБЛИКИ

ОСНОВОПОЛОЖНИК УФИМСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ АН СССР АЛЕКСЕЙ ФЕДОРОВИЧ ЛЕОНТЬЕВ (1917 – 1987)

В 1971 г. по приглашению руководства Башкирии А.Ф. Леонтьев с группой учеников приехал в Уфу, имея перед собой конкретную программу: организовать в Башкирском филиале АН СССР (БФАН СССР) математические исследования на самом современном уровне и привлечь к этим исследованиям талантливую молодежь. В год приезда Алексея Федоровича в Уфу в составе БФАН СССР был организован Отдел физики и математики (ОФМ) и создан сектор теории функций, а в 1972 г. в Башкирском государственном университете была создана кафедра теории функций и функционального анализа, которыми он и руководил до последнего дня своей жизни – 14 апреля 1987 г.

Группа математиков, прибывшая в Уфу в 1971 г. Слева направо: И.Ф. Красичков-Терновский, А.А. Миролюбов, Ю.Н. Фролов, А.Ф. Леонтьев, В.В. Напалков

«Успехи математических наук»

(1987. Т. 42. № 5. С. 177 – 178):

«За шестнадцать лет пребывания в Уфе Алексей Федорович проделал поразительную по своим масштабам работу. Он получил огромное количество превосходных научных результатов, написал четыре книги, на современном уровне организовал преподавание математических курсов, создал аспирантуру, городской научный семинар, подготовил большую группу кандидатов и докторов наук, периодически проводил всесоюзные симпозиумы по теории функций, организовал совет по защитам диссертаций. В итоге в Башкирии создана и активно действует мощная математическая школа, имеющая высокий всесоюзный и международный авторитет. Без всякого преувеличения весь этот подвижнический труд Алексея Федоровича можно расценить как научный подвиг».

Удивительно плодотворным оказался этот уфимский период и для него самого: именно здесь были получены важнейшие результаты по представлению аналитических функций рядами экспонент и более общими рядами. Подытоживая свои исследования, здесь он написал монографии «Ряды экспонент» (1976), «Последовательности полиномов из экспонент» (1980) (в 1989 г. были удостоены Государственной премии СССР) и «Обобщения рядов экспонент» (1981).

Обложка брошюры (2017)

РЯДЫ ЭКСПОНЕНТ И КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ: РАЗВИТИЕ ИДЕЙ А.Ф. ЛЕОНТЬЕВА

Речь идет о некоторых классических задачах комплексного анализа, которые были предложены мне А.Ф. Леонтьевым еще в 1978 – 1983 гг.

Первые результаты были получены только в начале 1987 г. – незадолго до кончины Алексея Федоровича. В конце 1990-х – начале 2000-х гг. были полностью решены две известные и наиболее трудные проблемы, поставленные Дж. Полиа в 1929 г. В 2011 был дан окончательный ответ и на гипотезу Полиа о минимуме модуля.

УДК 517.53 + 517.537.7
ББК 22.161
Г120

Гайсин А. М.

Г120 Регулярный рост целых функций, представленных рядами Дирихле. — М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2024. — 212 с.

ISBN 978-5-4344-1026-7

Исследуются классические задачи, связанные с асимптотическими свойствами лакунарных степенных рядов, сходящихся во всей плоскости и имеющих произвольный, сколь угодно быстрый рост. Рассматриваются эти задачи здесь с более общей точки зрения, а именно для рядов Дирихле. В работе представлены решения проблемы Полиа о росте целых функций с лакунами на кривых, уходящих в бесконечность и двойственной проблемы для целых трансцендентных функций с вещественными коэффициентами, редко меняющими знак. В более общей постановке дается полный ответ на гипотезу Полиа о минимуме модуля целой функции произвольного роста с лакунами. В качестве приложения приводится решение задачи И. Бейкера по комплексной динамике о компонентах множества Фату произвольной целой трансцендентной функции бесконечного нижнего порядка. Уделено внимание и на применение условия повторного логарифма в теории целых функций, рядов Дирихле.

Для специалистов по комплексному и гармоническому анализу, преподавателей и аспирантов математических факультетов университетов.

Библ. 99.

ББК 22.161
УДК 517.53 + 517.537.7

ISBN 978-5-4344-1026-7

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $D(\Lambda)$ – класс рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

абсолютно сходящихся в $\mathbb{C}$.

Речь пойдет о соотношениях типа

$$\ln M_F(\sigma) \sim \ln m_F(\sigma, h)$$

при $\sigma \to +\infty$, $\sigma \notin E \subset \mathbb{R}_+$, где

$$M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|, \quad m_F(\sigma, h) = \min_{|t|\le h} |F(\sigma + it)|,$$

и их применениях в некоторых задачах комплексной динамики.

Пусть f – целая трансцендентная функция вида

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \qquad p_n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Говорят, что последовательность $P = \{p_n\}$ (или целая функция f) имеет:

лакуны Фабри, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{p_n} = 0; \tag{3}$$

лакуны Фейера, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty. \tag{4}$$

Путем замены $z = e^s$ приходим к рядам (1). Поэтому те же термины будем использовать и для последовательности Λ, и для функций $F \in D(\Lambda)$.

Первая теорема Пикара: *любая целая функция $f(z) \not\equiv$ const принимает каждое значение $a \in \mathbb{C}$ (по крайней мере один раз), за исключением, возможно, одного.*

Если $f(z) \neq a$, $a \in \mathbb{C}$, то a является асимптотическим значением: *существует кривая γ, уходящая в ∞, вдоль которой $f(z) \to a$ при $z \to \infty$.*

Но любая целая функция f вида (2) с лакунами Фейера принимает каждое значение $a \in \mathbb{C}$ бесконечно много раз. Это – результат **Л. Фейера** (см. ***[1. L. Fejer. Math. Ann. 1908. P. 413–423]***).

В 1952 г. возникла следующая гипотеза (см. ***[2. A.J. Macintyre. Asymptotic paths of integral functions with gap power series // Proc. London Math. Soc. 2:2 (1952), 286–296]***).

Гипотеза Макинтайра (1952). *Любая целая функция (2) с лакунами Фейера не имеет конечных асимптотических значений.*

Гипотеза верна:

1. для радиальных асимптотических значений (**Макинтайр, 1952**; см. ***[2]***);

2. для целых функций (2) конечного нижнего порядка (**L. Sons, 1970**; см. ***[3. L.R. Sons. On the Macintyre conjecture // Illinois J. Math. 1970. V. 14, 613–629]***).

Справедливость гипотезы ранее была доказана:

Фуксом (1963) – для случая конечного порядка; **Т. Ковари (1965)**, **Д. Гайером (1965)**, **Андерсеном** и **Бинмором (1968)** – при более сильных ограничениях на $P = \{p_n\}$.

В общем случае эта гипотеза до сих пор остается открытой проблемой.

В 1983 результат Фейера 1908 г. (см. ***[1]***) был существенно усилен **Takafumi Murai** (см. ***[4. T. Murai. The deficiency of entire functions with Fejer gaps // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 33:3 (1983), 39–58]***):

*При условии (4) для любого $a \in \mathbb{C}$ неванлинновский дефект**

$$\delta(a,f) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r,a,f)}{T(r,f)} = 0,$$

где

$$N(r,a,f) = \int\limits_0^r \frac{n(t,a,f)}{t} dt, \quad T(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta}| d\theta,$$

$n(t,a,f)$ – *количество корней уравнения $f(z) = a$ в проколотом круге* $\{z\colon\ |z| < t\} \setminus \{0\}$.

*Так как $0 \le N(r,a,f) \le T(r,f) + O(1)$, $r \to \infty$, то всегда $0 \le \delta(a,f) \le 1$.

В 1975 – 1980 гг. возникла гипотеза (**М.Н. Шеремета**): *если для последовательности* $\{p_n\}$ *перемен знаков коэффициентов ряда*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad z = x + iy,$$

выполняется условие Фейера (4), то

$$d(f, \mathbb{R}_+) \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\ln |f(x)|}{\ln M_f(x)} = 1,$$

где $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ (см. ***[5. M.M. Sheremeta, O.B. Skaskiv, M.V. Zabolotskyi. Open problems in function theory // Математичні студії. 1994. Випуск 3, 117–119]***).

Эта проблема из ***[5]***, как и двойственная задача о равенстве $d(f, \gamma) = 1$ (γ – любая кривая, уходящая в ∞) для целых функций (2) с лакунами Фейера, оставались открытыми до конца 1990-х – начала 2000-х гг.

Как выяснилось, гипотеза М.Н. Шереметы ***не верна*** (см. ***[6. А.М. Гайсин. Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых // Матем. сб. 194:8 (2003), 55–82]***): выполнение только условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty$$

недостаточно для «регулярного роста» целой функции (2).

В ***[6]*** было показано, что существенное значение имеет поведение последовательности $\{c_k\}$,

$$c_k = \int_0^{p_k} \frac{\mu(t, p_k)}{t} dt,$$

где $\mu(t, p_k)$ – количество точек $p_n \neq p_k$ из отрезка $\{x\colon\ |x - p_k| \leq t\}$.

Дело в том, что эта последовательность может сильно осциллировать и при этом быстро возрастать.

Гипотеза Макинтайра ***верна***, если для любой кривой γ, уходящей в ∞, $\sup_\gamma |f(z)| = \infty$, тем более, если $f(z)$ имеет регулярный рост.

Регулярный рост функции f понимается в смыслах:

A. *Для любой кривой* γ, *уходящей в* ∞, $\exists \, \{\xi_n\} \subset \gamma, \xi_n \to \infty$, *такая, что*

$$\ln M_f(|\xi_n|) \sim \ln |f(\xi_n)|, \quad M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

B. *При* $r \to \infty$ *вне множества* $E \subset \mathbb{R}_+$, *например, конечной логарифмической меры*

$$\ln M_f(r) \sim \ln m_f(r), \quad m_f(r) = \min_{|z|=r} |f(z)|.$$

Множество E имеет конечную логарифмическую меру или конечную логарифмическую плотность, если соответственно:

$$\int_E \frac{dt}{t} < \infty, \quad \varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{\ln r} \int_{E\cap[0,r]} \frac{dt}{t} < \infty.$$

В случае регулярности роста, например, типа А последовательность $\{\xi_n\}$ такова, что

$$|\xi_n| \notin E = \bigcup_{k\geq 1} [a_k, b_k], \quad \sum_{k\geq 1} \ln \frac{b_k}{a_k} < \infty,$$

т.е. E – исключительное множество конечной логарифмической меры.

В работе ***[7. G. Polya. Math. J. 1929. V. 29. P. 549–640]*** доказано: *если целая функция* f *вида (2) имеет порядок* $\rho < \infty$, *а* $\{p_n\}$ *имеет лакуны Фабри, то* (см. ***[7, с. 631]***)

$$d(f,\gamma) = \varlimsup_{z\in\gamma, z\to\infty} \frac{\ln|f(z)|}{\ln M_f(|z|)} = 1. \tag{5}$$

В ***[7, с. 631]*** сформулирована

Гипотеза Полиа. *Если* $\rho < \infty$, $n = o(p_n)$, $n \to \infty$, *то*

$$d_0(f) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln m_f(r)}{\ln M_f(r)} = 1. \tag{6}$$

Справедливость гипотезы доказана Фуксом (см. ***[8. W.H.J. Fuchs. Illinois J. Math. 1963. V. 7. P. 661–667]***).

В ***[9. Skaskiv O.B. Anal. Math. 1990. V. 16. № 2. P. 143–157]*** условие Фабри ослаблено: *если*

$$\left.\begin{array}{r} \textit{нижний порядок} \quad \rho_* < \infty \\ \textit{порядок} \quad \rho < \infty \end{array}\right\}, \ \textit{то} \ \begin{cases} \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \\ \underline{\lim\limits_{r\to\infty}} \end{cases} \frac{1}{\ln r} \sum_{p_n \le r} \frac{1}{p_n} = 0.$$

В статье ***[10. Гайсин А.М. Об одной гипотезе Полиа. Изв. РАН. Т. 58. №2. С. 73–92]*** результат из [9] перенесен на класс $D(\Lambda)$. В [10] получены более общие результаты, причем другим методом. В [9, 10] получены критерии. В [10] впервые введено понятие логарифмического индекса конденсации

$$\delta_{\ln}(\Lambda) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{\ln r} \int_1^r \frac{q(t)}{t^2} dt, \qquad q(t) = \max_{\lambda_n \le t} \left\{ -\ln |Q'(\lambda_n)| \right\},$$

$$Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2} \right).$$

До конца 1990-х гг. оставались открытыми:

Проблема 1. *При каких* p_n *для функций* f *произвольного роста, имеющих вид (2),* $d(f,\gamma)=1$*?*

Проблема 2. *При каких* p_n *для функций* f *произвольного роста, имеющих вид (2),* $d_0(f)=1$*?*

Обзор литературы

Пусть L – класс непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций w, $0 < w(x) \uparrow \infty$, $x \to \infty$,

$$W = \Big\{ w\colon\ w \in L, \quad w(x)(1+x^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}_+) \Big\},$$

$$\Omega = \left\{ \omega\colon\ \omega \in W, \quad \frac{\omega(x)}{x} \downarrow, \quad x \to \infty \right\}.$$

Положим $d(f) = \inf_\gamma d(f,\gamma)$. Пусть $q(t)$ – наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $\{-\ln|Q'(\lambda_n)|\}$.

Предшествующие результаты:

1. **А.И. Павлов** в ***[11. СМЖ. 1972. Т. 13. № 5. С. 577–588]*** показал: *если*

$$a)\ \frac{n}{p_n}\downarrow; \quad b)\ \sum_n \frac{1}{p_n} < \infty, \tag{7}$$

то $d(f,\gamma) = 1$.

2. Ранее **Т. Ковари (1965)** этот же результат получил для p_n,

$$p_n > n(\ln n)^{2+\eta}, \quad \eta > 0, \quad n \ge n_0 \tag{8}$$

(см. ***[12. T. Kövari. J. Anal. Math. 1965. V. 15. P. 281–286]***).

3. В ***[13. T. Kövari. Michigan Math. J. 1965. V. 12. № 2. P. 133–140]*** при том же условии (8) доказана более сильная регулярность роста функции f: *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует множество* $E \subset \mathbb{R}_+$ *конечной логарифмической меры, вне которого*

$$\ln m_f(r) > (1-\varepsilon)\ln M_f(r).$$

В [13] сказано: «*самое большее, что можно было бы выжать из нашего метода – это замена условия (8) на*

$$p_n > n(\ln n)(\ln\ln n)^{2+\eta}, \quad n \geq n_1». \tag{9}$$

Доказательство этого утверждения в [13] не приводится. Отметим, что условие (9) можно записать в виде:

$$p_n > C_0 n(\ln p_n)(\ln\ln p_n)^{2+\eta}, \quad C_0 > 0.$$

4. **Дж. Коревар** и **М. Диксон** в ***[14. Indag. Math. 1978. V. 40. № 2. C. 243–258]*** показали, что последовательности Павлова (7) и Ковари (9) являются интерполяционными: $\forall\, b_n$, $|b_n| \leq 1$, $\exists$ *ц.ф.э.т.* φ, *такая, что*

$$\varphi(p_n) = b_n, \quad n \geq 1; \quad M_\varphi(r) \leq e^{\omega(r)}, \quad \omega \in \Omega.$$

Для интерполяционных в смысле Павлова-Коравера-Диксона последовательностей $\{p_n\}$ гипотеза Макинтайра верна (см. ***[14]***).

В ***[15. B. Berntsson. A note on Pavlov-Korevaar-Dixon interpolation. Indag. Math. 1978. V. 81. P. 400–414]*** доказан критерий интерполяционности: $\exists\, \omega \in \Omega$, *такая, что*

$$1)\ n(t) \le \omega(t), \quad n(t) = \sum_{p_n \le t} 1;$$

$$2)\ -\ln \prod_{\frac{p_n}{2} < p_k < 2p_n} \left| 1 - \frac{p_n}{p_k} \right| \le \omega(p_n), \quad n \ge 1. \qquad (10)$$

В [6] доказана

Теорема 1 (*А. Гайсин, 2003*). *Для того, чтобы для любой функции f вида (2) выполнялось равенство $d(f) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1), 2) из (10) с мажорантой $w \in W$.*

Теорема 1 дает ответ на Проблему 1 (см. ***[7. G. Polya, 1992]***).

Отметим, что условия теоремы 1 в точности есть критерий интерполяционности в классе мажорант из W для последовательности $\{\pm\lambda_n\}$ (см. ***[16. Р.А. Гайсин, Матем. сб. Т. 212. № 2. 2021. С. 58–79]***).

Из теоремы 1 также следует, что гипотеза М.Н. Шереметы **не верна** (см. ***[6]***). Эта гипотеза, как и гипотеза Макинтайра, верна в классе последовательностей $\{p_n\}$, удовлетворяющих условию 2) из (10).

«Гипотеза Т. Ковари» из [13] доказана в работе ***[17. Гайсин А.М. СМЖ. 1998. Т. 39. № 3. С. 501–516]***.

Условия теоремы 1 равносильны тому, что:

$$c)n(t)(1+t^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}_+); \quad d)q(t)(1+t^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}_+)^*.$$

$^*q(t)$ – наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $\{-\ln|Q'(p_n)|\}$ (или для последовательности $\{c_k\}$, $c_k = \int_0^{p_k} \frac{\mu(t,p_k)}{t} dt$).

Пара условий c), d) означает, что

$$e)\sum_n \frac{1}{p_n} < \infty; \qquad f)\int_0^\infty \frac{q(t)}{1+t^2}dt < \infty.$$

Замечания.

1. *Если выполняется только e), то можно лишь утверждать, что*

$$0 \le d(f,\gamma) \le 1, \tag{11}$$

причем обе границы в (11) достигаются.

2. *Если условие f) не выполняется, то существуют* f_1, f_2 *– функции вида (4), для которых*

$$d(f_1) = 0, \quad d(f_2) = 1.$$

3. *Группа условий c), d) слабее (10).*

Пример. Пусть

$$P = \{n\colon\ n \in \Delta\}, \quad \Delta = \bigcup_{j\geq 1} \Delta_j, \quad \Delta_j = \left[2^{j^2} - \frac{2^{j^2}}{j^2}, 2^{j^2}\right].$$

Для P условия c), d) выполнены, но условие 1) из (10) – нет (см. ***[18. Гайсин А.М. Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 6. С. 810–816]***).

Приведем теперь результаты по **Проблеме 2**.

Теоремы о минимуме модуля

Считаем, что $\rho_* = \infty$ (ρ_* – нижний порядок f).

1. **Т. Ковари** (см. ***[13], 1965***). *Если* $p_n > n(\ln n)^{2+\eta}$, $\eta > 0$, $n \geq n_0$, *то*

$$\ln m_f(r) > (1-\varepsilon)\ln M_f(r) \tag{12}$$

вне множества $E \subset \mathbb{R}_+$ *конечной логарифмической меры.*

2. **У. Хейман** (см. ***[19. W.K. Hayman. Proc. London Math. Soc. 1972. V. 24. P. 590–624]***): *если существует* $\varepsilon > 0$, *такое, что*

$$\frac{n}{p_n}(\ln p_n)(\ln\ln p_n)^{2+\varepsilon} \to 0, \quad n \to \infty,$$

то оценка (12) верна вне множества E *нулевой логарифмической плотности* (отсюда следует, что гипотеза Т. Ковари (см. ***[13], 1965)*** **верна**).

3. **О.Б. Скаскив** (см. ***[20. Вестн. Львів ун-ту. 1987. 28, 80–81]***): *при условии*

$$\sum_{n \geq N} \frac{\ln\ln p_n}{p_n} < \infty \qquad (13)$$

верен результат У. Хеймана.

4. **А.М. Гайсин** (см. ***[17. Об одной теореме Хеймана. СМЖ. 1998. С. 501–516]***): *если*

$$\sum_{n\geq N}\frac{1}{p_n}\ln\frac{p_n}{n}<\infty, \tag{14}$$

то верен результат У. Хеймана.

Результаты перечислены в порядке ослабления условий на p_n. Так, из (13) следует (14), обратное не верно.

Пример. Пусть

$$P=\{n\colon\ n\in\Delta\},\quad \Delta=\bigcup_{j\geq 1}\Delta_j,\quad \Delta_j=[2^j,2^j+\beta_j],$$

$$\beta_j=\left[\frac{2^j}{\alpha_j}\right],\quad \alpha_j=\begin{cases}\ln j, & \text{если } j=2^{n^2};\\ j^2, & \text{если } j\neq 2^{n^2}.\end{cases}$$

В [17] доказаны:

Теорема 2 (*А. Гайсин, 1998*). *Пусть*

$$n(t)(1+t^2)^{-1}, \quad q(t)(1+t^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Тогда при $\sigma \to +\infty$ *вне множества* $E \subset \mathbb{R}_+$ *нулевой плотности, т.е.*

$$DE = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\mathrm{m}(E \cap [0,\sigma])}{\sigma} = 0,$$

верно асимптотическое соотношение

$$\ln M_F(\sigma) \sim \ln |F(\sigma)|,$$

где F *– функция из класса* $D(\Lambda)$.

Теорема 3 (*А. Гайсин, 1998*). *Пусть*

$$q(t)(1+t^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}_+). \tag{15}$$

Если

$$\sum_{n\geq N} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{\lambda_n}{n} < \infty,$$

то при $\sigma \to +\infty$ *вне множества* $E \subset \mathbb{R}_+$, $DE = 0$, *выполняется соотношение*

$$\ln M_F(\sigma) \sim \ln m_F(\sigma, h), \tag{16}$$

где

$$m_F(\sigma, h) = \min_{|t|\leq h} |F(\sigma + it)|.$$

Условие (15) для выполнения (16) и необходимо (см. ***[6]***).

Обобщение теорем типа Дж. Полиа о минимуме модуля

Сформулируем основной результат работы ***[21. А.М. Гайсин, Ж.Г. Рахматуллина. Оценка суммы ряда Дирихле через минимум модуля на вертикальном отрезке. Матем. сб. 2011. Т. 202. № 12. С. 23–56]***.

Теорема 4 (см. ***[21]***). *Пусть выполнены условия теоремы 1, т.е.*

$$n(t)(1+t^2)^{-1}, \quad q(t)(1+t^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Тогда существует исключительное множество $E \subset \mathbb{R}_+$, $mE < \infty$, *такое, что для любого вертикального отрезка*

$$I_H = \{s = \sigma + it\colon\ |t - t_0| \le H\}$$

найдется измененный отрезок I_H^* *, такой, что при* $\sigma \to +\infty$ *вне* E *верны утверждения:*

1. $m(I_H \cap I_H^*) \to 2H$;

2. $\ln M_F(\sigma + \Delta(\sigma)) \sim \ln M_F(\sigma)$,

где $\Delta(\sigma)$ *– модуль отклонения измененного отрезка* I_H^* *от* I_H;

3. $\ln M_F(\sigma) \sim \ln m_F^*(\sigma), \quad m_F^*(\sigma) = \min_{\xi \in I_H^*} |F(\xi)|.$ (17)

Оценка (17) хуже, чем (16), но:

1. *Все условия теоремы 4. необходимы;*

2. *Деформированный отрезок* I_H^* *не обязан находиться в полосе;*

3. *Оценка (17) имеет важное приложение в комплексной динамике.*

Применение результатов

Речь будет идти об итерациях

$$f^1(z) = f(z), \quad \dots, \quad f^{k+1}(z) = f(f^k(z)), \quad k = 1, 2, \dots$$

целых трансцендентных функций

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \quad p_n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Множеством Фату *ц.ф. f называется наибольшее открытое множество $F(f) \subset \mathbb{C}$, на котором семейство итераций $\{f^k(z)\}$ нормально.*

Свойства множества Фату:

1. *Множество $F(f)$ вполне инвариантно, т.е.*

$$f(F(f)) = f^{-1}(F(f)) = F(f)$$

($(F(f)$ совпадает как со своим образом, так и с полным прообразом)

(см. ***[22. J. Milnoz. Dinamics in one complexe variable. 1999]; [23. А.Э. Еременко, М.Ю. Любич. Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 3. С. 1–70]***).

2. *Любая неограниченная компонента множества* $F(f)$ *целой трансцендентной функции* f *односвязна* (см. ***[24. I.N. Baker. An. Acad. Sci. Fen. 1975. V. 1. P. 277–283]***.

3. *Множество Фату целой функции* f *вида (18) может иметь: сколько угодно неограниченных компонент, либо ровно 1, либо 0* (см. ***[23]***).

Исследование итераций целых функций начато в 1926 г. Фату.

Позже возникла

Задача *(I. Baker, 1981)*. *При каких условиях на* $\{p_n\}$ *каждая компонента множества Фату функции* f *вида (18) ограничена?*

Выяснилось, что это будет так, если, например, при $r \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной логарифмической меры

$$\ln M_f(r) \sim \ln m_f(r). \tag{19}$$

Теорема 5 (*Ю. Ванг*). *Пусть* $0 < \rho_* \leq \rho < \infty$. *Если* $n = o(p_n)$, $n \to \infty$, *то любая компонента* $F(f)$ *функции (18) ограничена* (см. ***[25. Yu Wang. Tohoku Math. Soc. 2001. V. 53. № 1. P. 163–170]***.

Результаты работ [9, 10] позволяют условие Фабри в теореме 5 заменить на более слабое требование

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\ln r} \sum_{p_n \leq r} \frac{1}{p_n} = 0, \tag{20}$$

так как при условии (20) соотношение (19) имеет место вне множества E нулевой логарифмической плотности.

В 2022 г. была доказана

Теорема 6 (*Аиткужина Н.Н., Гайсин А.М., Гайсин Р.А.*). *Пусть кривая* $\gamma = \{z\colon\ z = x + ig(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ *имеет* K*-наклон, т.е.*

$$\sup_{x_1 \neq x_2} \left| \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = K < \infty.$$

Пусть $\Phi(\sigma)$ *– выпуклая на* $\mathbb{R}$ *функция,* $\varphi(x)$ *– обратная к* $\Phi(\sigma)$*. Пусть* $F \in D(\Lambda)$*, причем* $\ln M_F(\sigma) \le \Phi(\sigma)$*.*

Предположим, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int_1^x \frac{q(t)}{t^2} dt = 0, \quad \sup_{x>0} \frac{\varphi(x^2)}{\varphi(x)} < \infty.$$

Если

$$\varliminf_{x\to\infty}\frac{1}{\varphi(x)}\sum_{\lambda_n\le x}\frac{1}{\lambda_n}=0, \tag{21}$$

то при $s\in\gamma$, $\sigma=\mathrm{Re}\,s\to+\infty$ *вдоль асимптотического множества* $A\subset\mathbb{R}_+$, $DA\ge\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$, *выполняется равенство*

$$\ln|F(s)|\sim\ln M_F(\sigma).$$

В 2023 г. стало ясно, что в теореме 6 на самом деле $DA=1$. Пользуясь идеей доказательства теоремы 4 из ***[21, Матем. сб. 2011]***, нами получена

Теорема 7. *Пусть выполнены все условия теоремы 6, кроме того, вместо (21) выполняется условие*

$$\varlimsup_{x\to\infty}\frac{1}{\varphi(x)}\sum_{\lambda_n\le x}\frac{1}{\lambda_n}=0.$$

Тогда для любого вертикального отрезка I_H (см. теорему 4) существует измененный отрезок I_H^*, такой, что при $\sigma \to +\infty$ вне некоторого множества E, $DE = 0$, справедливо соотношение

$$\ln M_F(\sigma) \sim \ln m_F^*(\sigma).$$

При этом справедливы свойства 1, 2 из теоремы 4.

Применяя теорему 7, можно получить дальнейшее обобщение теоремы 5 Ю. Ванга. Но при условии, что функция $\ln M_f(r)$ растет достаточно быстро. Об этом речь пойдет ниже.

Рассмотрим теперь общий случай, когда функция f не имеет ограничений на рост сверху.

Теорема 8 (***[25]. Ю. Ванг, 2001***). *Пусть целая функция (18) обладает свойством: существует* $T_0 > 1$, такое, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r^{T_0})}{\ln M_f(r)} > T_0. \qquad (22)$$

Если существует $\eta > 0$, *такое, что*

$$p_n > n(\ln n)(\ln\ln n)^{2+\eta}, \quad n \geq n_0,$$

то каждая компонента множества $F(f)$ *ограничена.*

Замечание 1. *По теореме Адамара о трех окружностях, левая часть (22) всегда* $\geq T_0$, *где* $T_0 > 1$ *– любое.*

Замечание 2. *В теореме 5 требуется, чтобы* $0 < \rho^* \le \rho < \infty$. *В этом случае (22) выполнено, т.к. левая часть в (22) равна* ∞.

Теорема 9 (см. ***[26], основной результат***)*. *Пусть выполнено (22). Если*

$$q(t)(1+t^2)^{-1}, \quad n(t)(1+t^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}_+),$$

то каждая компонента множества $F(f)$ *ограничена.*

Здесь существенно использовано соотношение

$$\ln M_f(r) \sim \ln m_f^*(r), \quad r \to \infty, \quad r \notin E, \quad \mathrm{m}_{\ln} E < \infty,$$

для функции f вида (18), доказанное в [18].

*[26]. ***А.М. Гайсин, Ж.Г. Рахматуллина. УМЖ. 2012. Т. 4. № 1. С. 38–46.***

Замечание. *В теореме 9 условие*

$$\sum_n \frac{1}{p_n} < \infty$$

существенно ***[26]****: для любой последовательности* $\{p_n\}$, $\sum_n p_n^{-1} = \infty$, *существует функция* f *вида (18), для которой имеется компонента* K *множества* $F(f)$, *такая, что* $K \supset \mathbb{R}$.

Пример. Согласно результата Макинтайра из [2] имеем: *для любой последовательности* $\{p_n\}$, $\sum_n p_n^{-1} = \infty$, *существует целая функция* f *вида (18), такая, что* $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty$. Тогда существует открытое связное множество $D \supset \mathbb{R}$, такое, что $\sup_{z\in D} |f(z)| < \infty$.

Можно считать, что

$$|f(z)| \le 1, \quad z \in D; \quad \sum_n |a_n| \le 1.$$

Пусть K – любой компакт из D. Тогда для $z \in K$ имеем:

$$|f^1(z)| = |f(z)| \le 1,$$

$$|f^2(z)| \le \sum_n |a_n||f(z)|^{p_n} \le \sum_n |a_n| \le 1,$$

$$|f^3(z)| \le \sum_n |a_n||f^2(z)|^{p_n} \le \sum_n |a_n| \le 1,$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$|f^k(z)| \le \sum_n |a_n||f^{k-1}(z)|^{p_n} \le \sum_n |a_n| \le 1.$$

Таким образом, семейство итераций $\{f^k(z)\}$ нормально в D, $\mathbb{R} \subset D \subset F(f)$.

Это означает, что множество $F(f)$ содержит неограниченную компоненту.

Вопрос:

Является ли условие

$$q(t)(1+t^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}_+)$$

существенным для справедливости теоремы 9?

Теорема 9 существенно усиливает теорему 8 Ю. Ванга и, возможно, является неулучшаемой.

Полное доказательство этой теоремы приведено в статье ***[26. А.М. Гайсин, Ж.Г. Рахматуллина. Итерации целых трансцендентных функций с правильным поведением минимума модуля. УМЖ. 2012. Т. 4. № 1. С. 38–46]***.

Схема доказательства соотношений типа $\ln M_F(\sigma) \sim \ln m_F(\sigma)$

Здесь $m_F(\sigma) = \min_{\xi \in I_H} |F(\xi)|$, I_H – вертикальный отрезок с центром в точке $s = \sigma + it_0$, t_0 – любое, $|I_H| = 2H = \text{const}$.

Если $n(t)(1+t^2)^{-1}, \quad q(t)(1+t^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, то, как известно,

$$d(F,\gamma) = 1, \quad \forall\, F \in D(\Lambda).$$

Дополнительно предположим, что $\lambda_1 \geq 1$,

$$\sum_n \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{\lambda_n}{n} < \infty.$$

Последнее условие равносильно тому, что

$$n(t) \ln \frac{t}{n(t)} (1+t^2)^{-1} \in L^1[1,+\infty).$$

Тогда (см. ***[26]***):

1) существует $w \in W$, такое, что $q(t) + N_l(2et) \le w(t)$, где

$$N_l(x) = N(x)\ln\frac{x}{N(x)}, \quad N(x) = \int\limits_0^x \frac{n(t)}{t}dt.$$

2) существует $w^* \in W$, $w^*(t) = \beta(t)w(t)$, $0 < \beta(t) \uparrow \infty$.

Пусть $v = v(\sigma)$ – решение уравнения

$$w_1(v) = 3\ln M_F(\sigma), \quad w_1(t) = \sqrt{\beta(t)}w(t).$$

Далее последовательно показывается:

1. Очевидное соотношение $\quad w(v) = o(\ln M_F(\sigma)), \quad \sigma \to \infty \qquad (23)$

2. **Оценки типа** *Бореля-Неванлинны* (см. ***[6]***):

$$\text{а)}\quad \ln M_F(\sigma+h) < (1+\mathrm{o}(1))\ln M_F(\sigma), \quad h = \frac{w_1(v(\sigma))}{v(\sigma)},$$

$\sigma \to \infty$ *вне некоторого* $E \subset \mathbb{R}_+$, $\mathrm{m}E < \infty$;

$$\text{б)}\quad |F(s) - F_v(s)| < 1, \quad F_v(s) = \sum_{\lambda_n \le v} a_n e^{\lambda_n s},$$

$s = \sigma + it$, $v = v(\sigma)$, $\sigma \notin E$, $\sigma \to \infty$.

3. **Следующая *оценка через максимум модуля на любом отрезке*** $I_h \subset I_H$ (см. ***[17], [21]***): при $\sigma \to \infty$ вне E

$$M_F^{1+\mathrm{o}(1)}(\sigma) \le \max_{I_h} |F_v(z)|, \quad v = v(\sigma), \quad |I_h| = 2h.$$

4. ***Оценка на отрезке*** $J_h \subset I_h$, $|J_h| = 2h^2$

Для этого применяем лемму П. Турана (или специальную формулу для коэффициентов (см. ***[21, Матем. сб. 2011]***)): *если* $J \subset I \subset i\mathbb{R}$,

$$P(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j e^{it\mu_j}, \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n,$$

то

$$||P||_I \le \left(2e\frac{|I|}{|J|}\right)^n ||P||_J, \quad ||P||_I = \max_I |P(z)|.$$

Так как $(2e|I_h|/|J_h|)^{n(v)} \le e^{w(v)}$, то при $\sigma \to \infty$ вне E

$$M_F^{1+o(1)}(\sigma) \le e^{w(v)} \max_{J_h} |F_v(z)|, \quad v = v(\sigma).$$

Отсюда с учетом (23) и свойства б) из п. 2 имеем: при $\sigma \notin E$, $\sigma \to \infty$,

$$M_F^{1+o(1)}(\sigma) \le \max_{J_h} |F(z)|, \quad |J_h| = 2h^2 \quad (!).$$

Эта оценка верна для любого отрезка $J_h \subset I_H$, $|J_h| = 2h^2$, где $H =$ const, а функция h определена в п. 2.

Очевидно, при $\sigma \to \infty$ вне E

$$M_F^{1+o(1)}(\sigma) \leq \max_{k_h} |F(z)|,$$

где k_h – квадрат, для которого J_h – средняя линия (см. рис. 1).

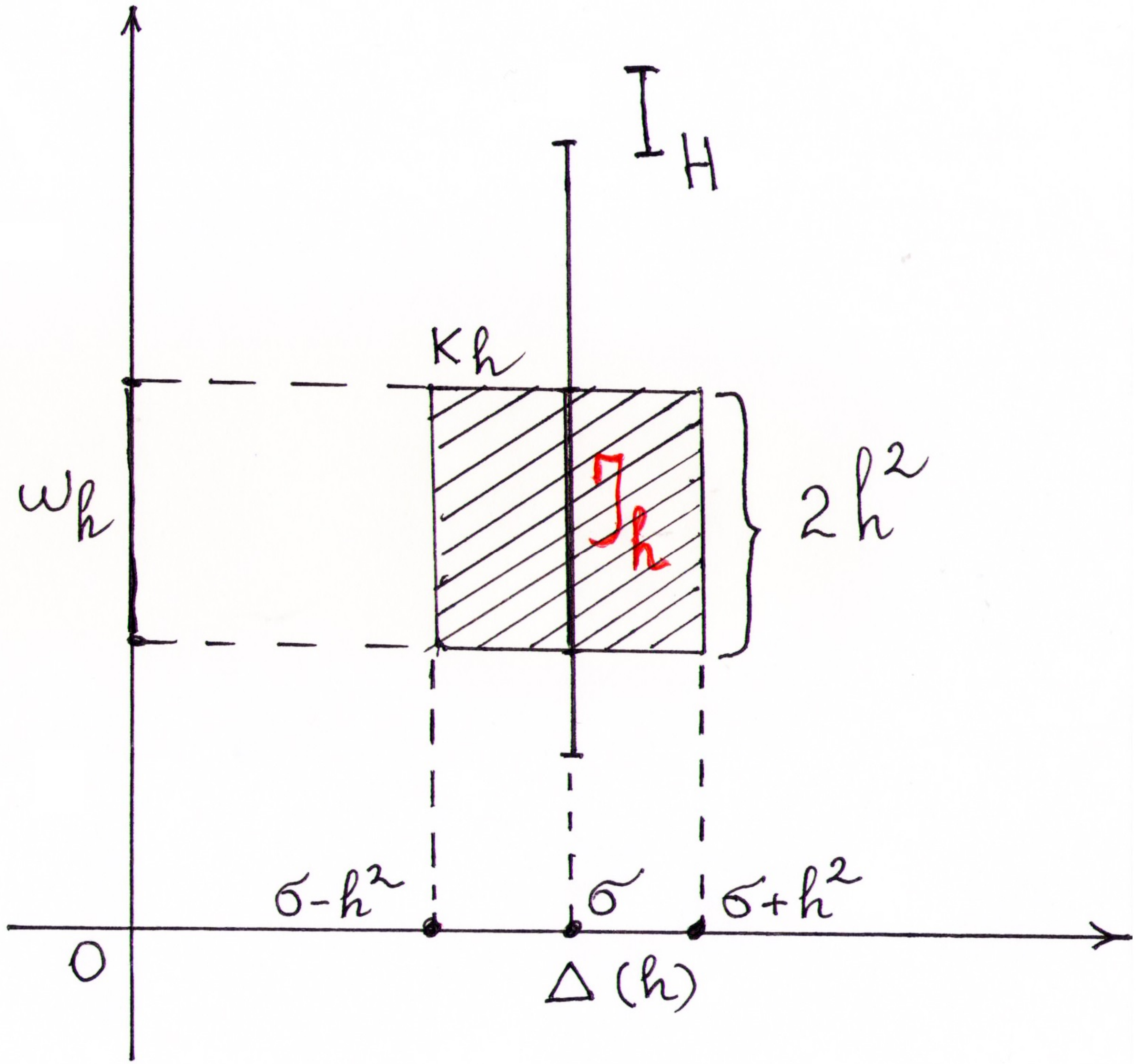


Рис. 1

5. ***Оценка в прямоугольнике в «легких точках»***

Пусть $A = \mathbb{R}_+ \setminus E$. Тогда $\exists\, \sigma_j \uparrow \infty$, $\sigma_j \in \overline{A}$, $\sigma_{j+1} \geq \sigma_j + h_j^2$,

$$A \subset \bigcup_{j \geq 1} \Delta_j, \quad \Delta_j = [\sigma_j, \sigma_j + h_j^2], \quad h_j = h(v(\sigma_j)).$$

Рассмотрим прямоугольник P_j, проекция которого на вещественную ось есть Δ_j, а левая сторона совпадает с I_H. Тогда

$$P_j \subset \bigcup_{i=1}^{m_j} k_{ij}, \quad m_j \leq \frac{4H}{h_j^2}, \quad j \geq j_0,$$

где k_{ij} – квадраты типа k_h без общих внутренних точек (см. рис. 2).

Имеем:

$$M_F^{1+o(1)}(\sigma) \leq \max_{k_{ij}} |F(z)| = |F(z_{ij})|, \quad \sigma \notin E, \quad \mathrm{m}E < \infty.$$

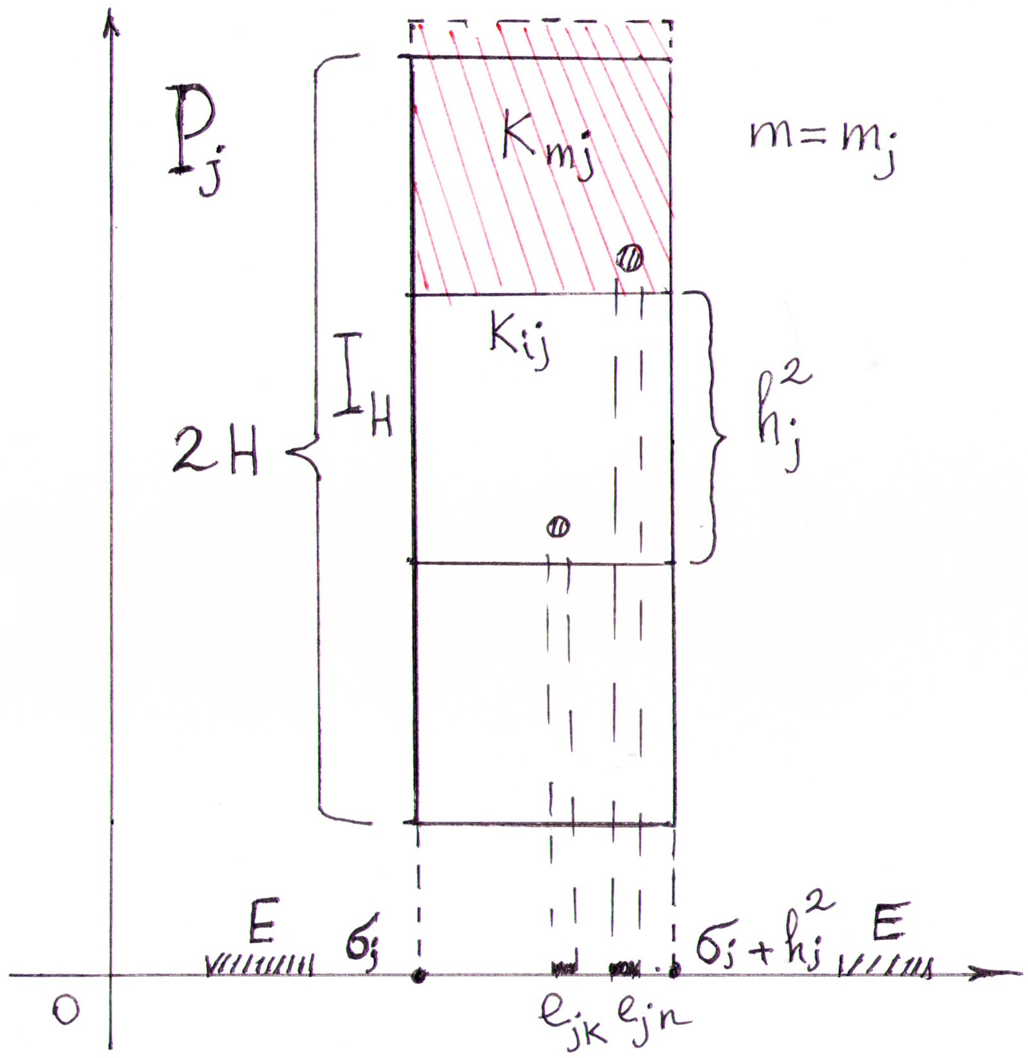


Рис. 2

Оценка снизу типа Н.В. Говорова (см. ***[6]***): *если* $g \in H^\infty(D_R)$, $D_R = \{z\colon\ |z| < R\}$, *то при* $|g(0)| >> 1$ *вне множества кружков с общей суммой радиусов* $\le Rr^N(1-r)$, $0 < r < 1 - N^{-1}$, $N > 1$, *в круге* D_{Rr} *верна оценка*

$$\ln|g(z)| \sim \ln|g(0)|.$$

Применяя это для некоторого круга $D_{ij} \supset k_{ij}$ радиуса $R = 2\delta_j$ и полагая $N = 4$, $r = \delta_j$, получаем: в каждом квадрате k_{ij}, но вне кружков с общей суммой радиусов $\le 2h_j^5$,

$$\ln|F(z)| > (1 + \mathrm{o}(1))\ln|F(z_{ij})|, \quad j \to \infty,$$

т.е.

$$\ln|F(z)| > (1 + \mathrm{o}(1))\ln M_F(\sigma_j) \sim \ln M_F(\sigma), \quad \sigma \in \Delta_j.$$

Мера проекций исключительных кружков всех k_{ij} (т.е. «тяжелых» точек множества P_j) $\le 10Hh_j^3$, $j \ge j_1$. Значит, вне проекций найдется отрезок типа I_H, $|I_H| = 2H$, свободный от «тяжелых» точек P_j.

Так как для множества e тяжелых точек $De = 0$, то при $\sigma \to \infty$ вне $E_0 = e \cup E$, $DE_0 = 0$,

$$\ln M_F(\sigma) \sim \ln m_F(\sigma, I_H) \tag{24}$$

(см. ***[21, Матем. сб. 2011]***).

Замечание. *Если* $\sum_n \lambda_n^{-1} \ln \frac{\lambda_n}{n} = \infty$, *то в (24) будет* $m_F^*(\sigma)$ *– минимум по «измененному» отрезку* I_H^*, $I_H^* \sim I_H$, *причем оценка типа (24) будет верна вне* E, $\mathrm{m}E < \infty$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!