Критерии распределений единственности в классах целых функций экспоненциального типа, убывающих вдоль вещественной оси

Б. Н. Хабибуллин

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук
Уфа, Республика Башкортостан, Российская Федерация

16:55 – 17:30, 13 февраля 2025 г.
ЮМИ ВНЦ РАН, ИМВЦ УФИЦ РАН, ЮФУ РФ
Доклад, посвященный юбилею
д.ф.-м.н., профессора Абанина Александра Васильевича

Общая трактовка

Для голоморфной на открытом множестве $O \subseteq \mathbb{C}$ функции f

$$\mathsf{Zero}_f\colon z \underset{z\in O}{\longmapsto} \sup\left\{p\in\mathbb{R} \;\middle|\; \limsup_{z\neq z'\to z}\frac{|f(z')|}{|z'-z|^p} < +\infty\right\} \in \{0,1,2,\dots,+\infty\}$$

— распределение корней этой функции f.

Постановка задачи

Пусть H — некоторый класс голоморфных функций на области $D \subseteq \mathbb{C}$, замкнутый относительно вычитания. Распределение точек $Z\colon D \to \{0,1,2,\dots,+\infty\}$ называем распределением единственности для H, если из $f \in H$ и $\mathsf{Zero}_f \geqslant Z$ следует, что $f = 0$. В противном случае Z — распределением неединственности для H. Задача — описать распределения (не)единственности для H.

Здесь ограничиваемся случаем $D = \mathbb{C}$, т.е. классами H в пространстве всех целых функций $\mathrm{Hol}(\mathbb{C})$, выделяемых специальными ограничениями на рост, и, не умаляя общности, удобно предполагать, что $Z(0) = 0$.

Функции w, отвечающие за убывание вдоль $\mathbb{R}$

Рассматриваем полунепрерывные сверху функции $w\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ с конечным логарифмическим интегралом

$$J[w] := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w(x)}{1+x^2}\,dx \tag{1}$$

Для них определено преобразование Пуассона

$$Pw\colon z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\operatorname{Im} z|w(t)}{(\operatorname{Im} z)^2+(\operatorname{Re} z-t)^2}\,dt & \text{при } z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\\ w(z) & \text{при } z\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

При условии выпуклости суперпозиции $w\circ \mathsf{exp}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ преобразование Пуассона Pw — положительная субгармоническая на $\mathbb{C}$ функция, гармоническая на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Рассматриваемые классы целых функций

Ключевую роль при исследовании ультрадифференцируемых функций на интервалах в $\mathbb{R}$ играют классы целых функций, определяемые при $-\infty < a < b < +\infty$ как (см. [A07] или [A08])

$$\mathcal{H}_{\mathrm{Pw}}([a,b]) := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}) \;\middle|\; \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\bigl(h_{[a,b]}(\mathrm{Im}\, z) - \mathrm{Pw}(z)\bigr)} < +\infty \right\}$$

$$h_{[a,b]}\colon y \underset{y\in\mathbb{R}}{\longmapsto} by^+ - ay^-, \quad h_{[a,b]}(\mathrm{Im}\, z) \underset{z\in\mathbb{C}}{=} b\,\mathrm{Im}^+ z - a\,\mathrm{Im}^- z,$$

где $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ — положительная чётная функция, возрастающая на $\mathbb{R}_+$, с конечным логарифмическим интегралом $J[w] \overset{(1)}{<} +\infty$ и со свойством выпуклости суперпозиции $w \circ \exp$. Иные специальные требования к функциям w из [A07] или [A08] не потребуются.

[A07] Абанин А. В. Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения.—М.: Наука, 2007.—222 с.

[A08] Абанин А. В. Ω-ультрараспределения // Изв. РАН. Сер. матем., 72:2, 3–38 (2008).

Внешняя плотность Ж.-П. Кахана

Z удовлетворяет условию Бляшке вне $\mathbb{R}$, если

$$\sum_{|z|\geqslant 1} Z(z)\Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{z}\Bigr| < +\infty. \tag{3}$$

Сопоставим Z возрастающую на $\mathbb{R}$ функцию её распределения

$$Z^{\mathbb{R}}\colon x \underset{0\neq x\in\mathbb{R}}{\longmapsto} \frac{x}{|x|} \sum_{|z-\frac{x}{2}|\leqslant\frac{|x|}{2}} Z(z) + \frac{x^+}{|x|}Z(0), \quad Z^{\mathbb{R}}(0) := Z(0).$$

Внешняя плотность Кахана не больше $c \in \mathbb{R}_+$, если выполнено условию Бляшке (3) вне $\mathbb{R}$ и найдётся возрастающая липшицева функция $L\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с липшицевой постоянной

$$\sup_{\mathbb{R}\ni x_1\neq x_2\in\mathbb{R}} \frac{L(x_2)-L(x_1)}{x_2-x_1} < c,$$

для которой конечен логарифмический интеграл $J\bigl[|Z^{\mathbb{R}}-L|\bigr] < +\infty$, а $\inf$ с таких c — это внешняя плотность Кахана $\overline{\mathrm{Kah}}(Z)$ для Z.

Вариация на тему теоремы Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты

Теорема (A. Beurling, P. Malliavin, 1961–67; вариации в 1960-70-е J.-P. Kahane, J. Korevaar, de Branges, R. Redheffer; P. Koosis 1960-е–2000-е; И.Ф. Красичков-Терновский, 1989; В.П. Хавин, Ёрикке, 1994; В. П. Хавин, Ф. Л. Назаров, Дж. Машреги, А. Д. Баранов, 2005–06; Н. Макаров, А. Г. Полторацкий, 2010; ХБН, 1991, 2023–24)

Распределение точек Z — распределение единственности для $\mathcal{H}_{\mathrm{Pw}}([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$ при $\mathrm{b} - \mathrm{a} < 2\pi\overline{\mathrm{Kah}}(\mathrm{Z})$, но распределение неединственности при $\mathrm{b} - \mathrm{a} > 2\pi\overline{\mathrm{Kah}}(\mathrm{Z})$.

Замечание

Условия в этой теореме не зависят от функции w.
Если $\mathrm{b} - \mathrm{a} = 2\pi\overline{\mathrm{Kah}}(\mathrm{Z})$, то возможен любой вариант и внешняя плотность Кахана $\overline{\mathrm{Kah}}(\mathrm{Z})$ перестаёт быть информативной.

Функция распределения для функции w

Определим функцию распределения для w, как в [2016; теорема 4],

$$\varDelta_{\mathrm{w}}^{\mathbb R}\colon \mathrm{x}\longmapsto \frac{\mathrm{x}}{\pi^2}\mathrm{PV}\int_{\mathbb R}\frac{\mathrm{w(t)}}{\mathrm{t(t-x)}}\,\mathrm{dt} \quad \text{в каждой точке } \mathrm{x}\in\mathbb R\setminus \mathrm{N_w}, \tag{4}$$

где главное значение $\mathrm{PV}\displaystyle\int$ определено всюду на $\mathbb R\setminus \mathrm{N_w}$ для некоторого счётного $\mathrm{N_w}\subset\mathbb R$,

$$\varDelta_{\mathrm{Pw}}^{\mathbb R}(\mathrm{x}) := \inf_{\mathrm{x}<\mathrm{t}\in\mathbb R\setminus \mathrm{N_w}} \varDelta_{\mathrm{Pw}}^{\mathbb R}(\mathrm{t}) \quad \text{в каждой точке } \mathrm{x}\in \mathrm{N_M}. \tag{5}$$

[2016] Т. Ю. Байгускаров, Г. Р. Талипова, Б. Н. Хабибуллин, “Подпоследовательности нулей для классов целых функций экспоненциального типа, выделяемых ограничениями на их рост”, Алгебра и анализ, 28:2 (2016), 1–33.

Критерий распределений единственности

Теорема (для $\mathcal{H}_{\mathrm{Pw}}([a,b])$)

Z — распределение единственности для пространства $\mathcal{H}_{\mathrm{Pw}}([a,b])$, если и только если равна $+\infty$ точная верхняя грань

$$\sup_{v}\left(\sum_{z\in\mathbb{C}} Z(z)Pv(z) - \frac{b-a}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\,d\varDelta_{\mathrm{Pw}}^{\mathbb{R}}(t)\right) \tag{6}$$

по всем полунепрерывным сверху на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ функциям $v\geqslant 0$ с

$$\lim_{|t|\to\infty} v(t)=0,\qquad \limsup_{0\neq x\to 0}\frac{v(x)}{-\ln|x|}\leqslant 1$$

и неравенством с интегральным логарифмическим средним

$$v(x)\leqslant\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} v(x+t)\ln\left|\frac{t+r}{t-r}\right|\frac{dt}{t}\quad \text{при всех } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ и } r\in(0,r_x).$$

Версия критерия с более узким набором функций v

Замечание

Предыдущий критерий остаётся таковым, если $\sup\limits_{v}$ взять по гораздо более узкому классу положительных функций $v \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, финитных, т.е. равных нулю вне некоторого своего отрезка $[-R_v, R_v]$, с $\sup\limits_{0 \neq x \in \mathbb{R}} \bigl| v(x) + \ln|x| \bigr| < +\infty$ и преобразованием Гильберта

$$Hv \colon x \underset{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}{\longmapsto} \frac{1}{\pi} \, \mathrm{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{x-t} \, dt \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{7}$$

убывающим как на положительной открытой полуоси $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, так и на отрицательной открытой полуоси $-\mathbb{R}_+ \setminus 0$.

О классах тестовых функций v

Пример

Финитная функция

$$v\colon x \underset{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}{\longmapsto} \ln^+\frac{R}{|x|}$$

принадлежит первому более широкому классу из теоремы, но не второму классу из замечания. Её сглаживания

$$x \underset{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}{\longmapsto} \int_{|t|\leqslant\varepsilon|x|} \ln^+\frac{R}{|x-axt|}h(t)\,dt$$

где $0\leqslant h\in C^\infty(-1,1)$, $a\in(0,1)$, дают функции второго класса более узкого класса из замечания.

Как конструировать тестовые функции v?

Пример

Для любой возрастающей ограниченной функции $\sigma\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ при

$$\int_{\mathbb{R}} \ln^+ t\, d\sigma(t) < +\infty \quad \text{и} \quad s_0 := \lim_{t\to+\infty}\sigma(t) - \lim_{t\to-\infty}\sigma(t) > 0 \qquad (8)$$

каждая из функций

$$v\colon x \underset{0\neq x\in\mathbb{R}}{\longmapsto} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \ln^+\Bigl|1-\frac{t}{x}\Bigr|\frac{d\sigma(t)}{s_0}$$

$$v\colon x \underset{0\neq x\in\mathbb{R}}{\longmapsto} \left(\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \ln^+\Bigl|1-\frac{t}{x}\Bigr|\frac{d\sigma(t)}{s_0}\right)^+$$

тестовая для теоремы.

Кстати, тестовые функции v инвариантны относительно гомотетии переменной. Всяческие Суперпозиция с выпуклой функцией также даёт подобные конструкции

Как конструировать тестовые функции v?

Пример

Пусть p — голоморфная функция в окрестности замкнутого единичном круге $\overline{\mathbb{D}}$. Тогда тестовой будет функция

$$\mathrm{v}\colon \mathrm{x} \underset{0\neq \mathrm{x}\in\mathbb{R}}{\longmapsto} \int_0^{2\pi} \ln^+\left|1-\frac{\mathrm{p}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\mathrm{x}}\right| \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$

Такие классы тестовых функций v тоже достаточны для формулировки критерия даже если ограничиться лишь многочленами p.

На чём основаны критерии?

Пусть $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ — последовательность векторных решёток X_n с отношениями порядка соответственно $\leq_n$. Ей соответствует произведение $\prod \mathrm{X}_n := \prod_{n=0}^{\infty} \mathrm{X}_n$, для которого при $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \prod \mathrm{X}_n$ полагаем $\mathrm{pr}_n x = x_n \in \mathrm{X}_n$, а $x \leqslant x'$ в $\prod \mathrm{X}_n$, если $\mathrm{pr}_n x \leqslant_n \mathrm{pr}_n x'$ для каждого $n \in \mathbb{N}_0$.

Пусть $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ — последовательность линейных положительных функций $p_n \in \mathrm{lin}^+ \mathrm{X}_n^{\mathrm{X}_{n+1}}$ из X_{n+1} в X_n, $n \in \mathbb{N}_0$, для которой предполагаем сохранение точной верхней грани для конечных подмножеств. Тогда следующее подпространство

$$\mathrm{X} := \mathrm{pr}\,\mathsf{lim}\, \mathrm{X}_n p_n := \left\{ x \in \prod \mathrm{X}_n \;\middle|\; \mathrm{pr}_n x = p_n(\mathrm{pr}_{n+1} x)\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

в $\prod \mathrm{X}_n$ с тем же отношением порядка $\leqslant$, что и на $\prod \mathrm{X}_n$, — векторная решётка, называемая проективным пределом последовательности $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ векторных решёток по $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Не умаляя общности, можно считать, что проекции pr_n из проективного предела $\mathrm{X} = \mathrm{pr}\,\mathsf{lim}\, \mathrm{X}_n p_n$ на X_n сюръективны.

Теорема о нижней огибающей

Пусть $H \subset X := \operatorname{pr}\lim X_n p_n$ — выпуклый конус с вершиной в нуле, а для любой ограниченной в X последовательности $\left(h^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ векторов $h^{(k)} \in H$ существует принадлежащий H верхний предел

$$\limsup_{k\to\infty} h^{(k)} := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} h^{(k)} \in H. \tag{9}$$

Пусть $S \subset X$ — векторное подпространство, $H \subset S$, и при каждом $n \in \mathbb{N}_0$ для любого $s_n \in \operatorname{pr}_n S$ найдётся такое $h_n \in \operatorname{pr}_n H$, что $h_n \leqslant_n s_n$. Пусть выбрана линейная положительная функция $q_0 \in \operatorname{lin}^+\mathbb{R}^{X_0}$ на X_0, и для суперпозиции $q := q_0 \circ \operatorname{pr}_0 \in \operatorname{lin}^+\mathbb{R}^X$ при любой убывающей в X последовательности $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ с $h^{(k)} \in H$ при условии конечности $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \in \mathbb{R}$ эта последовательность $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена снизу в X и $q\left(\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\right) \geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)})$. Тогда для каждого $s \in S$ величина $\sup\left\{q(h) \;\middle|\; H \ni h \leqslant s\right\} \in \overline{\mathbb{R}}$ равна величине

$$\inf\left\{(l_n\circ\operatorname{pr}_n)(s) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0, l_n \in \operatorname{lin}^+\mathbb{R}^{\operatorname{pr}_n S}, q(h) \leqslant (l_n\circ\operatorname{pr}_n)(h)\ \forall h \in H\right\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Общий критерий

Теорема (ХБН, 1990–2024)

Пусть $\mathfrak{m}_2$ — плоская мера Лебега, функция $\mathrm{M}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ непрерывная или разность субгармонических и для некоторого числа $\mathrm{P} \geqslant 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{M}\Big(\mathrm{z} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{(1+|\mathrm{z}|)^{\mathrm{P}}}\Big)\,\mathrm{d}\theta \underset{\mathrm{z}\in\mathbb{C}}{\leqslant} \mathrm{M}(\mathrm{z}) + \mathrm{P}.$$

Z — распределение единственности по M тогда и только тогда, когда

$$\sup_{\mathrm{V}}\left(\sum_{\mathrm{z}\in\mathbb{C}} \mathrm{Z}(\mathrm{z})\mathrm{V}(\mathrm{z}) - \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{M}\triangle\mathrm{V}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_2\right) = +\infty. \tag{10}$$

где $\sup\limits_{\mathrm{V}}$ взят по всем субгармоническим функциям V класса C^2 или C^∞ на $\mathbb{C}\setminus 0$, удовлетворяющим неравенствам

$$0 \leqslant \mathrm{V}(\mathrm{z}) \leqslant \ln^+\frac{\mathrm{R}_{\mathrm{V}}}{|\mathrm{z}|} \text{ при всех } \mathrm{z}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}. \tag{11}$$

Список литературы

[1961] P. Malliavin, L. A. Rubel, “On small entire functions of exponential type with given zeros”, Bull. Soc. Math. France, 89:2 (1961), 175–201

[1962] A. Beurling A., P. Malliavin, On Fourier transforms of measures with compact support, Acta Math., 107 (1962), 1291–309.

[1962] J.-P. Kahane, Travaux de Beurling et Malliavin, Séminaire Bourbaki (année 1961/62, exposés 223–240, Talk no. 225), no. 7 (1962), 27–39.

[1967] A. Beurling A., P. Malliavin, On the closure of characters and the zeros of entire functions, Acta Math., 118 (1967), 79–93.

[1977] R. M. Redheffer, Completeness of sets of complex exponentials, Adv. in Math., 24 (1977), 1–62.

[1996] P. Koosis, Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin, Montréal, QC: Univ. Montréal, Les Publications CRM, 1996.

Список литературы

[1989] B. N. Khabibullin, "On the growth of entire functions of exponential type along the imaginary axis", Mat. Sb., 180:5 (1989), 706–719; Math. USSR-Sb., 67:1 (1990), 149–163

[1991] B. N. Khabibullin, "On the growth of entire functions of exponential type with given zeros along a line" (in Russian), Analysis Math., 17:3 (1991), 239–256

[1992] Б. Н. Хабибуллин, "О типе целых и мероморфных функций". Матем. сб., 183:11 (1992), 35–44; B. N. Khabibullin "On the type of entire and meromorphic functions", Russian Acad. Sci. Sb. Math. 77:2 (1994), 293–301.

[1993] Б. Н. Хабибуллин, "Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. II. Целые и мероморфные функции конечного порядка", Изв. РАН. Сер. матем., 57:3 (1993), 70–91; Russian Acad. Sci. Izv. Math., 42:3 (1994), 479–500

Список литературы

[1995] Б. Н. Хабибуллин, "Неконструктивные доказательства теоремы Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты и теоремы неединственности для целых функций", Изв. РАН. Сер. матем., 58:4 (1994), 125–148; Russian Acad. Sci. Izv. Math., 45:1 (1995), 125–149

[2012] Б. Н. Хабибуллин, Полнота систем экспонент и множества единственности, 4-е изд., доп., РИЦ БашГУ, г. Уфа, 2012; B. N. Khabibullin, Completeness of exponential systems and sets of uniqueness, 4th Edition, Revised, Bashkir State University, Ufa, 2012, 192 pp. http://www.researchgate.net/publication/271841461

[2014] Б. Н. Хабибуллин, "Теорема Хелли и сдвиги множеств. II. Опорная функция, системы экспонент, целые функции", Уфимск. матем. журн., 6:4 (2014), 125–138; Ufa Math. J., 6:4 (2014), 122–134

Список литературы

[2014] Б. Н. Хабибуллин, Г. Р. Талипова, Ф. Б. Хабибуллин, Подпоследовательности нулей для пространств Бернштейна и полнота систем экспонент в пространствах функций на интервале, Алгебра и анализ, 26:2 (2014), 185–215.

[2016] Т. Ю. Байгускаров, Г. Р. Талипова, Б. Н. Хабибуллин, Подпоследовательности нулей для классов целых функций экспоненциального типа, выделяемых ограничениями на их рост, Алгебра и анализ, 28:2 (2016), 1–33.

[2017] B. N. Khabibullin, N. R. Tamindarova, “Uniqueness Theorems for Subharmonic and Holomorphic Functions of Several Variables on a Domain”, Azerbaijan Journal of Mathematics, 7:1 (2017), 70–79

[2017] Т. Ю. Байгускаров, Б. Н. Хабибуллин, А. В. Хасанова, “Логарифм модуля голоморфной функции как миноранта для субгармонической функции. II. Комплексная плоскость”, Матем. заметки, 101:4 (2017), 483–502

[2018] Б. Н. Хабибуллин, А. П. Розит, “К распределению нулевых множеств голоморфных функций”, Функц. анализ и его прил., 52:1 (2018), 26–42

Список литературы

[2019] Б. Н. Хабибуллин, А. П. Розит, Э. Б. Хабибуллина, "Порядковые версии теоремы Хана—Банаха и огибающие. II. Применения в теории функций", Комплексный анализ. Математическая физика, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 162, ВИНИТИ РАН, М., 2019, 93–135.

[2019] Э. Б. Меньшикова, Б. Н. Хабибуллин, "К распределению нулевых множеств голоморфных функций. II", Функц. анализ и его прил., 53:1 (2019), 84–87

[2019] Б. Н. Хабибуллин, Ф. Б. Хабибуллин, "К распределению нулевых множеств голоморфных функций. III. Теоремы обращения", Функц. анализ и его прил., 53:2 (2019), 42–58;

[2020] Э. Б. Меньшикова, Б. Н. Хабибуллин, "Критерий последовательности корней голоморфной функции с ограничениями на ее рост", Изв. вузов. Матем., 2020, № 5, 55–61

Список литературы

[2020] Б. Н. Хабибуллин, А. В. Шмелёва, З. Ф. Абдуллина, “Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей. II. Выметания конечного рода и регулярность роста на одном луче”, Алгебра и анализ, 32:1 (2020), 208–243

[2020] А. Е. Салимова, Б.Н. Хабибуллин, “Рост субгармонических функций вдоль прямой и распределение их мер Рисса”, Уфим. матем. журн., 11:2, 56–69

[2020] Б. Н. Хабибуллин, А. Е. Салимова, “Распределение нулей целых функций экспоненциального типа с ограничениями на рост вдоль прямой”, Матем. заметки, 108:4, 588–600

Список литературы

[2021] B. N. Khabibullin, “Poisson–Jensen formulas and balayage of measures”, Eurasian Math. J., 12:4 (2021), 53–73

[2021] B. N. Khabibullin, F. B. Khabibullin, “Necessary and Sufficient Conditions for Zero Subsets of Holomorphic Functions with Upper Constraints in Planar Domains”, Lobachevskii Journal of Mathematics, 42:4, 800–810.

[2021] Б. Н. Хабибуллин, Огибающие в теории функций, Монография, РИЦ БашГУ, Уфа, 2021 , 140 с., ISBN 978-5-7477-5396-9.

Список литературы

[2022] B. N. Khabibullin, E. B. Menshikova, “Preorders on Subharmonic Functions and Measures with Applications to the Distribution of Zeros of Holomorphic Functions”, Lobachevskii Journal of Mathematics, 43:3, 587–611.

[2024] Б. Н. Хабибуллин, “Распределения корней и масс целых и субгармонических функций с ограничениями на их рост вдоль полосы”, Изв. РАН. Сер. матем., 88:1 (2024), 141–202

С юбилеем,
дорогой Александр Васильевич!