# Пространство голоморфных функций полиномиального роста как локальная алгебра

С.Н. Мелихов

Южный федеральный университет,
Южный математический институт ВНЦ РАН

Воркшоп по комплексному анализу, посвященный юбилею
д.ф.-м.н., профессора
АБАНИНА АЛЕКСАНДРА ВАСИЛЬЕВИЧА

Владикавказ, 12 февраля 2025 г.

В докладе идет речь о произведении Дюамеля $*$ в пространстве $H^{-\infty}(G)$ голоморфных в области $G \subset \mathbb{C}$ функций полиномиального роста вблизи границы $G$. Предполагается, что $G$ является звездной относительно точки 0;

$$(f * g)(z) := \frac{d}{dz} \int\limits_0^z f(t)g(z-t)dt, \;\; z \in G.$$

В пространстве Фреше $H(G)$ всех голоморфных в $G$ функций это произведение было введено и исследовано Н. Уигли[1].

С умножением $*$ пространство $H^{-\infty}(G)$ является ассоциативной и коммутативной топологической алгеброй с единицей — функцией, тождественно равной 1.

[1] Wigley N. The Duhamel product of analytic functions // Duke Math. J.—1974.—Vol. 41.—P. 211—217.

В последние десятилетия алгебры голоморфных функций с таким умножением достаточно интенсивно исследуются (см., например, статью М.Т. Караева [2]).
Оно находит приложения в операционном и операторном исчислениях,
к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами,
в обобщенной спектральной теории в смысле А. Бисваса, А. Ламберта и С. Петровича[3],
в задаче о спектральной кратности линейного непрерывного оператора, в краевых задачах.

(Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется расширенным собственным значением линейного непрерывного оператора $A : H \to H$, если существует ненулевой линейный непрерывный оператор $X : H \to H$ такой, что

$$XA = \lambda AX.$$

Это понятие возникло после исследований В.И. Ломоносова (1973).)

[2] Караев М. Т. Алгебры Дюамеля и их приложения // Функц. анализ и его прил.—2018.—Т. 52, Вып. 1.—С. 3—12.
[3] Biswas A., Lambert A., Petrovic S. Extended eigenvalues and the Volterra operator // Glasgow Math. J.—2002.—Vol. 44.—P. 521—534.

Умножение $*$ тесно связано с оператором интегрирования

$$J(f)(z) = \int\limits_0^z f(t)dt.$$

Именно, линейными непрерывными в $H^{-\infty}(G)$ операторами, перестановочными с $J$, являются операторы Дюамеля $S_g(f) = f * g$ (функция $g \in H^{-\infty}(G)$ фиксирована), и только они.

Это позволяет одновременно описывать замкнутые идеалы алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$ и замкнутые инвариантные подпространства оператора $J$.
Ключевым при этом является следующий результат:

*элемент $g$ алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$ обратим тогда и только тогда, когда $g(0) \neq 0$. Последнее равносильно также тому, что оператор $S_g$ является топологическим изоморфизмом $H^{-\infty}(G)$.*

Одними из первых работ, в которых изучалось пространство $H^{-\infty}(G)$, являются статьи Б. Коренблюма[4], [5] (в случае, когда $G$ — открытый единичный круг). В них исследованы нулевые множества функций из $H^{-\infty}(G)$, изучен соответствующий класс мероморфных функций, получено аналитическое описание замкнутых идеалов алгебры $H^{-\infty}(G)$ с поточечным умножением. Интерес к этому пространству вызван, в частности, и тем, что его аналоги для областей в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ используются в проблеме граничных значений в смысле распределений (см. статью Э.Дж. Штраубе[6]).

[4] Korenblum B. An extension of the Nevanlinna theory // Acta Math.—1975.—Vol. 135.—P. 187—219.

[5] Korenblum B. A Beurling-type theorem // Acta Math.—1977.—Vol. 138.—P. 265—293.

[6] Straube E. J. Harmonic and analytic functions admitting a distribution boundary value // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.—1989.—Vol. 11—P. 559—591.

Цикл исследований, связанных с пространством $H^{-\infty}(G)$ для области $G$ в $\mathbb{C}^n$ при $n \geq 1$ проведен А.В. Абаниным, Ле Хай Хоем и Р. Ишимурой [7] [8], [9], [10], [11]. Он связан с описанием сопряженного пространства, изучением разложений в ряды эспонент, с достаточными множествами, с операторами свертки.

[7] Abanin A. V., Khoi Le Hai. Dual of the function algebra $A^{-\infty}(D)$ and representation of functions in Dirichlet series // Proc. Am. Math. Soc.—2010.—Vol. 138.—P. 3623–3635.

[8] Abanin A. V., Khoi Le Hai. Pre-dual of the Function Algebra $A^{-\infty}(D)$ and Representation of Functions in Dirichlet Series // Complex Anal. Oper. Theory.—2011.—Vol. 5.—P. 1073–1092.

[9] Abanin A. V., Ishimura R., Khoi Le Hai. Convolution operators in $A^{-\infty}$ for convex domains // Ark Mat.—2012.—Vol. 50.—P. 1-–22.

[10] Abanin A. V., Ishimura R., Khoi Le Hai. Extension of solutions of convolution equations in spaces of holomorphic functions with polynomial growth in convex domains // Bulletin des Sciences Mathematiques.—2012.—Vol. 136, Issue 1.—P. 96–110.

[11] Абанин А. В., Хой Ле Хай. Линейный непрерывный правый обратный оператор для оператора свертки в пространствах голоморфных функций полиномиального роста // Изв. вузов. Математика.—2015, № 1.—С. 3–13.

## Основные пространства, произведение Дюамеля

Пусть $G$ — ограниченная область в $\mathbb{C}$. Через $H(G)$ будем обозначать пространство всех функций, голоморфных в $G$, с топологией равномерной сходимости на компактах в $G$. Полагаем

$$d(z) = \inf_{t \in \partial G} |z - t|, \ z \in G.$$

Здесь $\partial G$ — граница области $G$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим банахово пространство

$$H^{-n}(G) := \left\{ f(z) \in H(G) : \|f\|_n := \sup_{z \in G} |f(z)|(d(z))^n < +\infty \right\}$$

с нормой $\|\cdot\|_n$.
Каждое пространство $H^{-n}(G)$ непрерывно вложено в $H^{-n-1}(G)$.
Введем в пространстве $H^{-\infty}(G) := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} H^{-n}(G)$ голоморфных в $G$ функций полиномиального роста вблизи границы $G$ топологию индуктивного предела последовательности пространств $H^{-n}(G)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в $H^{-\infty}(G)$.

Из интегральной формулы Коши следует, что оператор дифференцирования $f \mapsto f'$ непрерывно отображает $H^{-n}(G)$ в $H^{-n-1}(G)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, а значит, $H^{-\infty}(G)$ в $H^{-\infty}(G)$.

Далее предполагается, что $G$ — ограниченная область, звездная относительно точки 0, то есть для любого $z \in G$ отрезок $[0, z]$ содержится в $G$. Для $f, g \in H^{-\infty}(G)$ произведение Дюамеля $f * g$ определяется равенством (интеграл берется по отрезку $[0, z]$)

$$(f * g)(z) := \frac{d}{dz} \int\limits_0^z f(t)g(z-t)dt, \ \ z \in G.$$

Это произведение можно представить и в таком виде:

$$(f * g)(z) = g(0)f(z) + \int\limits_0^z f(t)g'(z-t)dt, \ \ z \in G.$$

Полагаем

$$(f \circledast g)(z) := \int\limits_0^z f(t)g(z-t)dt, \ z \in G, \ f, g \in H^{-\infty}(G).$$

Функции $f * g$ и $f \circledast g$ голоморфны в $G$.
Далее

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \ f_n(z) := \frac{1}{n!} z^n, \ n \in \mathbb{N}_0,$$

$$J(f)(z) := \int\limits_0^z f(t)dt, \ \ f \in H^{-\infty}(G), \ z \in G.$$

Оператор интегрирования $J$ линеен и непрерывен в $H^{-\infty}(G)$.
В $G$ выполняются равенства

$$\begin{gathered} J(f * g) = f \circledast g, \;\; J(f) * g = f \circledast g, \;\; f, g \in H^{-\infty}(G), \\ f_m * f_n = f_{m+n}, \;\; m, n \in \mathbb{N}_0, \\ J^n(f) = f_n * f, \;\; f \in H^{-\infty}(G), \, n \in \mathbb{N}_0. \end{gathered} \tag{1}$$

Ниже будут использоваться области, обладающие усиленным свойством звездности.
Ограниченная область $G$ в $\mathbb{C}$ является строго звездной относительно точки 0, если для любого $q \in [0,1)$ множество $q\overline{G}$ содержится в $G$. При этом $\overline{G}$ — замыкание $G$ в $\mathbb{C}$. Ясно, что ограниченная область $G$ в $\mathbb{C}$, строго звездная относительно 0, является звездной относительно 0.
Если $G$ строго звездная относительно точки 0, то любой луч с началом в 0 пересекает границу $\partial G$ области $G$ в единственной точке и выполняются равенства

$$G = \bigcup_{w \in \partial G} [0,w), \quad \overline{G} = \bigcup_{w \in \partial G} [0,w].$$

## Теорема

Пусть $G$ — ограниченная область в $\mathbb{C}$, звездная относительно точки 0.

(i) Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $f \in H^{-m}(G),\ g \in H^{-n}(G)$

$$\|f \circledast g\|_{m+n} \le C\|f\|_m \|g\|_n,$$

а если $G$ строго звездная относительно точки 0, то

$$\|f \circledast g\|_{\max\{m,n\}} \le C\|f\|_m \|g\|_n.$$

(ii) Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ существует постоянная $B > 0$ такая, что для всех $f \in H^{-m}(G),\ g \in H^{-n}(G)$

$$\|f * g\|_{m+n+1} \le B\|f\|_m \|g\|_n,$$

а если $G$ строго звездная относительно точки 0, то

$$\|f * g\|_{\max\{m,n\}+1} \le B\|f\|_m \|g\|_n.$$

Для $g \in H^{-\infty}(G)$ введем оператор Дюамеля

$$S_g(f) := f * g, \ f \in H^{-\infty}(G).$$

**Следствие**

*Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область, звездная относительно точки 0; $g \in H^{-\infty}(G)$.*
*(i) Линейный оператор $S_g$ непрерывно отображает $H^{-\infty}(G)$ в $H^{-\infty}(G)$.*
*(ii) Оператор интегрирования $J$ линеен и непрерывен в $H^{-\infty}(G)$.*

Из теоремы, равенств (1) и плотности множества всех многочленов в $H^{-\infty}(G)$ вытекает

### Следствие

*Пусть $G$ — область в $\mathbb{C}$, звездная относительно точки 0. Тогда $(H^{-\infty}(G), *)$ — ассоциативная и коммутативная топологическая алгебра. Функция, тождественно равная $1$, является ее единицей.*

При этом используются следующие понятия. Алгебра – это локально выпуклое пространство $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$, в котором введено умножение, то есть билинейное отображение $\cdot$ из $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$. Алгебра $(\mathcal{A}, \cdot)$ называется топологической, если отображение $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ непрерывно.

## Описание коммутанта оператора интегрирования

Пусть $\{J\}'$ — коммутант $J$ в алгебре $\mathcal{L}(H^{-\infty}(G))$ всех линейных непрерывных в $H^{-\infty}(G)$ операторов с умножением — композицией операторов:

$$\{J\}' = \{A \in \mathcal{L}(H^{-\infty}(G)) \,:\, AJ = JA \text{ в } H^{-\infty}(G)\}.$$

Множество $\{J\}'$ является подалгеброй $\mathcal{L}(H^{-\infty}(G))$. Опишем его.

**Теорема**

Пусть $G$ — ограниченная область в $\mathbb{C}$, звездная относительно точки 0.
(i) Если $A \in \{J\}'$, то существует единственная функция $g \in H^{-\infty}(G)$, для которой $A = S_g$.
(ii) Для любой функции $g \in H^{-\infty}(G)$ оператор $S_g$ принадлежит $\{J\}'$.

Для пространств всех голоморфных функций в областях $\mathbb{C}$ подобные результаты ранее были получены И.С. Райчиновым[12], Н.И. Нагнибидой[13] (см. также исторический обзор в монографии Ю.Ф. Коробейника[14]), для пространств непрерывных $C(\Delta)$ и локально интегрируемых $\mathcal{L}(\Delta)$ функций ($\Delta$ — промежуток в $\mathbb{R}$, содержащий точку 0) — И. Димовским[15], для пространства $C^\infty[0,1]$ — Р. Тапдигоглу и Б.Т. Торебеком[16].

[12] Райчинов И. О линейных операторах, перестановочных с операцией интегрирования // Математический анализ и его приложения. Т. 2.—Ростов-на-Дону: изд-во РГУ.—1970.—С. 63–72.

[13] Нагнибида Н. И. К вопросу об описании коммутантов оператора интегрирования в аналитических пространствах // Сибирский матем. журн.—1981.—Т. 22, № 5.—С. 127–131.

[14] Коробейник Ю. Ф. Операторы сдвига на числовых семействах.—Ростов-на-Дону: изд-во РГУ.—1983.

[15] Dimovski I. Convolutional Calculus.—Kluwer Academic Publishers, 1990.

[16] Tapdigoglu R., Torebek B. T. Commutant and Uniqueness of Solutions of Duhamel Equations // Bull. Malays. Math. Sci. Soc.—2020.—Vol. 44, Issue 2.—P. 705–710.

Теорема и ассоциативность умножения $*$ влекут

### Следствие

*Отображение* $g \mapsto S_g$ *является изоморфизмом алгебры* $(H^{-\infty}(G), *)$ *на алгебру* $\{J\}'$.

## Обратимые элементы алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$ и обратимость оператора Дюамеля

В этой части идет речь об $*$-обратимости и обратимости $S_g$ в $H^{-\infty}(G)$.

**Теорема**

Пусть $G$ — ограниченная область в $\mathbb{C}$, строго звездная относительно точки 0. Функция $g \in H^{-\infty}(G)$ обратима в $(H^{-\infty}(G), *)$ тогда и только тогда, когда $g(0) \neq 0$.

**Следствие**

*Пусть $G$ — ограниченная строго звездная относительно точки 0 область в $\mathbb{C}$, $g \in H^{-\infty}(G)$. Следующие утверждения равносильны:*
*(i) Оператор $S_g : H^{-\infty}(G) \to H^{-\infty}(G)$ имеет линейный непрерывный обратный.*
*(ii) Оператор $S_g : H^{-\infty}(G) \to H^{-\infty}(G)$ сюрьективен.*
*(iii) $g(0) \neq 0$.*

Теорема ранее была доказана Л. Бергом [гл. 5, § 26][17] для пространства всех непрерывно дифференцируемых функций на $[0, +\infty)$, Н. Уигли[18] — для $H(G)$ в случае, когда область $G \subset \mathbb{C}$ звездна относительно точки 0,

[17] Berg L. Einführung in die Operatorenrechnung.—Berlin: VEB Duetscher Verlag der Wissenschaften, 1965.

[18] Wigley N. The Duhamel product of analytic functions // Duke Math. J.—1974.—Vol. 41.—P. 211—217.

следствие — И. Райчиновым[19], Н.И. Нагнибидой[20], М.Т. Караевым[21], Р. Тапдигоглу и Б.Т. Торебеком[22] для $C^\infty[0,1]$, в [23] для пространств бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций на интервале или отрезке в $\mathbb{R}$, содержащем 0 (здесь отмечены результаты для ненормируемых пространств).

[19] Райчинов И. О линейных операторах, перестановочных с операцией интегрирования // Математический анализ и его приложения. Т. 2.—Ростов-на-Дону: изд-во РГУ.—1970.—С. 63–72.

[20] Нагнибида Н. И. К вопросу об описании коммутантов оператора интегрирования в аналитических пространствах // Сибирский матем. журн.—1981.—Т. 22, № 5.—С. 127–131.

[21] Karaev M. T. New proof of Nagnibida's theorem // J.of Function Spaces and Appl.—2008.—Vol. 4.—P. 85–90.

[22] Tapdigoglu R., Torebek B. T. Commutant and Uniqueness of Solutions of Duhamel Equations // Bull. Malays. Math. Sci. Soc.—2020.—Vol. 44, Issue 2.—P. 705–710.

[23] Иванова О. А., Мелихов С. Н. Об обратимости оператора Дюамеля в пространствах ультрадифференцируемых функций // Уфимск. матем. журн.—2023.—Т. 15, Вып. 4.—С. 61-–74.

При $*$-обращении $g$ используется ряд Неймана, применяемый, как правило, в банаховых пространствах:

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Ранее в ненормируемых пространствах с умножением $*$ для доказательства аналогичного критерия он привлекался Л. Бергом, Н. Уигли, М.Т. Караевым.
Структура $H^{-\infty}(G)$ отличается от структуры пространств, рассмотренных в этом направлении ранее: $H^{-\infty}(G)$ является ненормируемым счетным индуктивным пределом весовых банаховых пространств.

Возможность привлечения ряда Неймана в рассматриваемой ситуации дают характер непрерывности свертки $\circledast$, выявленный теоремой 1 для области $G$, строго звездной относительно точки 0, и сужения $\circledast$ на банаховы пространства, образующие данный индуктивный предел.

## Следствие

*(о факторизации) Пусть* $G$ *— ограниченная строго звездная относительно точки 0 область в* $\mathbb{C}$, $g \in H^{-\infty}(G)$, $n \in \mathbb{N}$, $g^{(k)}(0) = 0$, $0 \le k \le n-1$, $g^{(n)}(0) \ne 0$. *Тогда*

$$S_g = J^n S_h,$$

*где* $h = g^{(n)}$ *и* $S_h$ *— изоморфизм* $H^{-\infty}(G)$.

## Идеалы алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$, инвариантные подпространства и циклические векторы оператора интегрирования

Ниже предполагается, что $G$ — ограниченная область в $\mathbb{C}$, строго звездная относительно точки 0.

**Теорема**

Для любого $m \in \mathbb{N}_0$ множество

$$I_m := \{f \in H^{-\infty}(G) \mid f^{(k)}(0) = 0,\ 0 \le k \le m\}$$

является собственным замкнутым идеалом алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$. Любой собственный замкнутый идеал $(H^{-\infty}(G), *)$ совпадает с некоторым множеством $I_m$.

### Теорема

Семейство $\{I_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ совпадает с множеством всех собственных замкнутых $J$-инвариантных подпространств $H^{-\infty}(G)$.

Структура решетки замкнутых $J$-инвариантных подпространств $H^{-\infty}(G)$, описанная в теореме, позволяет определить и множество циклических векторов $J$.

При этом элемент $x$ локально выпуклого пространства $E$ называется циклическим вектором линейного непрерывного в $E$ оператора $L$, если замыкание линейной оболочки орбиты $\{L^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ совпадает с $E$.

Ненулевой элемент $x \in E$ является циклическим вектором $L$ в том и только в том случае, когда $x$ не принадлежит ни одному замкнутому собственному $L$-инвариантному подпространству $E$. Этот факт и теорема влекут

### Следствие

*Функция $f \in H^{-\infty}(G)$ является циклическим вектором оператора $J$ в $H^{-\infty}(G)$ тогда и только тогда, когда $f(0) \neq 0$.*

Спасибо за внимание !