О некоторых задачах в пространствах быстро убывающих функций

Мусин И.Х. (ИМВЦ УФИЦ РАН)

Воркшоп по комплексному анализу, посвященный юбилею д.ф.-м.н., профессора Абанина Александра Васильевича (г. Ростов-на-Дону, 12 – 13 февраля 2025 г.)

1. Пространство Шварца на замкнутом выпуклом неограниченном множестве в $\mathbb{R}^n$.

Пусть Ω – выпуклая неограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega}$ – её замыкание. Через $S(\overline{\Omega})$ обозначим пространство Шварца на $\overline{\Omega}$, т.е., функций f класса C^∞ на $\overline{\Omega}$ таких, что для любого $p \in \mathbb{Z}_+$

$$\|f\|_{p,\Omega} = \sup_{x \in \overline{\Omega}, |\alpha| \le p} |(D^\alpha f)(x)|(1 + \|x\|)^p < \infty.$$

Пусть C – открытый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале. „Острый“ =: существует опорная гиперплоскость к $\overline{C}$ – замыкание C, имеющая с $\overline{C}$ единственную общую точку 0. Пусть b – выпуклая позитивно однородная степени 1 функция на $\overline{C}$. Пара (b, C) опред. замкнутое выпуклое неогр. множество

$$U(b, C) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ -\langle \xi, y \rangle \ \le b(y), \forall y \in C\},$$

не содержащее целую прямую.

$U(b, C)$ – неогр.: так как C – острый конус, то у сопряжённого конуса $C^* = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, y\rangle \geq 0, \forall y \in C\}$ внутренность $int\ C^* \neq \emptyset$. И тогда если $\xi_0 \in U(b, C)$, $\eta \in intC^*$, то $\xi_0 + \lambda\eta \in U(b, C)$ для любого $\lambda > 0$.

Если $r \geq 0$ и $b(y) = r\|y\|$ для $y \in \overline{C}$, то

$$U(b, C) = C^* + B_r,$$

где B_r – замкнутый шар радиуса r с центром в нуле.

Если K – выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, $b(y) = \sup\limits_{t \in K}(-\langle y, t\rangle)$ для $y \in \overline{C}$, тогда $U(b, C) = C^* + K$.

Если b непрерывна на $\overline{C}$, то $U(b, C) \subseteq C^* + B_R$, где $R = \max(\max\limits_{y \in \overline{C}} b(y), 0)$, внутренность $U(b, C)$ непуста и совпадает с множеством

$$V(b, C) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ -\langle \xi, y\rangle \ < b(y), \forall y \in \overline{C}\},$$

а замыкание $V(b, C)$ есть $U(b, C)$.

Для краткости $U(b, C)$ – через U, а $V(b, C)$ – через V.

Известно (Theorem 5.6 в: J.W. de Roever // SIAM. J. Math. Analysis. Vol. 9, No. 6, December 1978), что $\forall\, z \in \mathbb{R}^n + iC$ функция $f_z(\xi) = e^{i\langle \xi, z\rangle}$ принадлежит $S(U)$. Поэтому $\forall\, \Phi \in S'(U)$ функция

$$\hat{\Phi}(z) = (\Phi, e^{i\langle \xi, z\rangle})$$

корректно определена в $T_C = \mathbb{R}^n + iC$. $\hat{\Phi}$ – преобр. Ф-Л функционала Φ. Известно, что $\hat{\Phi}$ голоморфна в T_C.

$H(T_C)$ – пространство голоморфных функций в трубчатой области $T_C = \mathbb{R}^n + iC$.

$d(z)$ – расстояние от точки $z \in T_C$ до границы T_C.

$\Delta_C(y)$ – расстояние от точки $y \in C$ до границы конуса C.

$d(z) = \Delta_C(y)$, $z = x + iy \in T_C$.

Определение. $V_b(T_C)$ – индуктивный предел пространств

$$V_{b,m}(T_C) = \left\{ f \in H(T_C) : N_m(f) = \sup_{z \in T_C} \frac{|f(z)| e^{-b(Im\, z)}}{(1 + \|z\|)^m (1 + \frac{1}{d(z)})^m} < \infty \right\}$$

$V_b(T_C)$ – пространство (LN^*) (или, иначе, – пространство DFS).

$S^*(U)$ – сильное сопряжённое к $S(U)$.

Теорема А

Пусть b непрерывна на $\overline{C}$. Тогда отображение $\mathcal{F} : \varPhi \in S^*(U) \to \hat{\varPhi}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $S^*(U)$ и $V_b(T_C)$.

Для $b(y) = a\|y\|$ $(a \geq 0)$ Теорема А получена В.С. Владимировым.

Интересное неравенство (важно, что b непрерывна на $\overline{C}$). Пусть $y \in C$, $m \in \mathbb{N}$,

$$g_y(\xi) = -\langle \xi, y \rangle + m \ln(1 + \|\xi\|), \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда существует число $d > 0$, не зависящее от y, такое, что

$$\sup_{\xi \in U} g_y(\xi) \leq b(y) + dm + 3m \ln\left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right) + 2m \ln(1 + \|y\|).$$

Если b – выпуклая непрерывная позитивно однородная степени 1 на C.

Тогда b непрерывна на C.

Пусть $(C_m)_{m=1}^{\infty}$ – последовательность выпуклых открытых конусов в $\mathbb{R}^n$ таких, что $\overline{pr\ C_m} \subset pr\ C_{m+1}$, $\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} C_m = C$.
Определим для каждого $m \in \mathbb{N}$ пространство $H(b, C_m)$ – индуктивный предел нормированных пространств

$$H_k(b, C_m) = \left\{ f \in H(T_{C_m}) : n_{m,k}(f) = \sup_{z \in T_{C_m}} \frac{|f(z)| e^{-b(y)}}{(1 + \|z\|)^k (1 + \frac{1}{\|y\|})^k} < \infty \right.$$

где $k \in \mathbb{Z}_+$, $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}^n, y \in C_m$.

Пусть $H(b, C)$ – проективный предел пространств $H(b, C_m)$.

Теорема R

Отображение $\mathcal{F} : \Phi \in S^*(U) \to \hat{\Phi}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $S^*(U)$ и $H(b, C)$.

Теорема R получена Роевером (J.W. de Roever // SIAM. J. Math. Analysis. Vol. 9, No. 6, December 1978).

Дифференциально-разностное уравнение

Далее b непрерывна на $\overline{C}$.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le m$ пусть $a_\alpha \in \mathbb{C}, h_\alpha \in \mathbb{R}^n$. Пусть K – выпуклая оболочка точек h_α.

Положим

$$H_K(y) = \max_{t \in K}(-\langle y, t\rangle), \;\; y \in \mathbb{R}^n.$$

Отметим, что

$$H_K(y) = \max_{|\alpha| \le m}(-\langle y, h_\alpha\rangle), \;\; y \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $G = U + K$.

Пусть H_G – опорная функция выпуклого множества G, т.е.,

$$H_G(y) = \sup_{\xi \in G}(-\langle \xi, y\rangle), \;\; y \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$G = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -\langle \xi, y\rangle \;\le H_G(y), \forall y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Для $y \in C$ имеем

$$H_G(y) = b(y) + H_K(y), \; y \in C. \tag{1}$$

Таким образом, функция H_G, определённая на всём $\mathbb{R}^n$, непрерывна на $\overline{C}$.

Определим на $S(G)$ оператор L по правилу:

$$(Lf)(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| \leq m} a_\alpha (D^\alpha f)(x + h_\alpha), \; f \in S(G), x \in U.$$

Отметим, что $Lf \in S(U)$ для любого $f \in S(G)$ и оператор L – линейный. Он непрерывно действует из $S(G)$ в $S(U)$.

Теорема 1

Оператор L действует из $S(G)$ в $S(U)$ сюръективно.

Для $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ и $\varepsilon > 0$ пусть

$$\Delta(\zeta, \varepsilon) = \{w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_j - \zeta_j| \leq \varepsilon,\, j = 1, \ldots, n\},$$

$$T(\zeta, \varepsilon) = \{w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_j - \zeta_j| = \varepsilon,\, j = 1, \ldots, n\},$$

Для функции g, голоморфной на $\Delta(\zeta, \varepsilon)$, пусть

$$[g(\zeta)]_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^n} \int\limits_{z \in T(\zeta,\varepsilon)} |g(z)||d\, z|.$$

То есть,

$$[g(\zeta)]_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} |g(\varepsilon e^{i\theta_1}, \ldots, \varepsilon e^{i\theta_n})|\, d\theta_1 \cdots d\theta_n.$$

Известен следующий результат (C.A. Berenstein, M.A.Dostal, *Some remarks on convolution equations*. Annales de l'institut Fourier, 23:1 (1973), 55-73).

Теорема B

Пусть

$$P(\zeta) = \sum_{k=1}^{m} P_k(\zeta) e^{\langle \alpha_k, \zeta \rangle},$$

где для каждого k P_k *– аналитический полином в* $\mathbb{C}^n$ *и* $\alpha_k \in \mathbb{C}^n$*. Пусть* $h_P(\zeta) = \max_k Re\langle \alpha_k, \zeta \rangle$*. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся постоянная* $C = C(\varepsilon, P) > 0$ *такая, что если* f *– аналитическая функция в полидиске* $\Delta(\zeta, \varepsilon)$*, то*

$$|f(\zeta)| e^{h_P(\zeta)} \leq C[f(\zeta)P(\zeta)]_\varepsilon. \qquad (2)$$

Замечание 1. Анализ доказательства Теоремы B показывает, что при некоторых $a > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, не зависящих от $\varepsilon \in (0, 1)$, справедливо неравенство

$$C(\varepsilon, P) \leq \frac{a}{\varepsilon^N}.$$

Следствие 1

В условиях Теоремы B из (2) следует, что

$$|f(\zeta)|e^{h_P(\zeta)} \le C \max_{w\in\Delta(\zeta,\varepsilon)} |f(w)P(w)|. \qquad (3)$$

Замечание 2. Определим для каждого $\varepsilon > 0$ функцию b_ε на $\overline{C}$ по правилу $b_\varepsilon(y) = b(y) + \varepsilon\|y\|$ и пространство $V_{b_\varepsilon}(T_C)$ – индуктивный предел нормированных пространств

$$V_{b_\varepsilon,m}(T_C) = \left\{ f \in H(T_C) : N_{k,\varepsilon}(f) = \sup_{z\in T_C} \frac{|f(z)|e^{-b_\varepsilon(y)}}{(1+\|z\|)^k(1+\frac{1}{\Delta_C(y)})^k} < \infty \right.$$

где $k \in \mathbb{Z}_+,\ z = x + iy,\ \ x \in \mathbb{R}^n, y \in C$.

Пусть $H_b(T_C)$ – проективный предел пространств $V_{b_\varepsilon}(T_C)$. Известно из Теоремы D в (Musin, Il'dar Kh., Yakovleva, Polina V.: CEJM. 10(2), 665-692 (2012)), что пространства $V_b(T_C)$ и $H_b(T_C)$ совпадают.

Замечание 3. Пусть $(C_m)_{m=1}^{\infty}$ – последовательность выпуклых открытых конусов в $\mathbb{R}^n$ таких, что $\overline{pr\ C_m} \subset pr\ C_{m+1}$, $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} C_m = C$. Определим для каждого $m \in \mathbb{N}$ функцию b_m на $\overline{C}$, полагая $b_m(y) = b(y) + \frac{1}{m}\|y\|$, и пространство $\mathcal{V}_m(T_{C_m})$ – индуктивный предел нормированных пространств

$$\mathcal{V}_{m,k}(T_{C_m}) = \left\{ f \in H(T_{C_m}) : N_{m,k}(f) = \sup_{z\in T_{C_m}} \frac{|f(z)|e^{-b_m(y)}}{(1+\|z\|)^k(1+\frac{1}{\Delta_{C_m}(y)})^k} \right.$$

где $k \in \mathbb{Z}_+,\ z = x + iy,\ x \in \mathbb{R}^n, y \in C_m$.

Пусть $\mathcal{V}_b(T_C)$ – проективный предел пространств $\mathcal{V}_m(T_{C_m})$. Известно, что пространства $V_b(T_C)$ и $\mathcal{V}_b(T_C)$ совпадают.

В ходе доказательства Теоремы 1 используется следующее утверждение (Lemma 9 в (Musin, Il'dar Kh., Yakovleva, Polina V.: CEJMathematics. 10(2), 665-692 (2012)).

Лемма 1

Пусть Γ – открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале. Пусть h – выпуклая непрерывная позитивно однородная степени 1 функция на $\overline{\Gamma}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $A_\varepsilon > 0$ такая, что для любых $y_1, y_2 \in \Gamma$ таких, что $\|y_2 - y_1\| \leq 1$

$$|h(y_2) - h(y_1)| \leq \varepsilon\|y_1\| + \varepsilon\|y_2\| + A_\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть

$$g(\zeta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| \le m} a_\alpha (i\zeta)^\alpha e^{i\langle h_\alpha, \zeta\rangle}, \ \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Пусть $N_g = \{\zeta \in T_C : g(\zeta) = 0\}$. Для $\zeta \in \mathbb{C}^n$ через f_ζ обозначим функцию $f_\zeta(x) = e^{i\langle x, \zeta\rangle}, \ x \in U$. Для $\zeta \in T_C \setminus N_g$ рассмотрим уравнение $Lf(x) = f_\zeta$. Оно имеет решение $\frac{f_\zeta}{g(\zeta)}$. Отсюда и из полноты системы $\{f_\zeta\}_{\zeta \in T_C \setminus N_g}$ следует, что образ оператора L плотен в $S(U)$.

Образ оператора L замкнут в $S(U)$. По теореме Дьедонне-Шварца замкнутость образа оператора L эквивалентна замкнутости в $S^*(G)$ образа сопряжённого оператора L^*. Определим оператор $\hat{L}^*$ на $V_b(T_C)$ по правилу

$$\hat{L}^*(F) = \mathcal{F}(L^*(\mathcal{F}^{-1}(F))), \ F \in V_b(T_C).$$

В силу Теоремы А линейный оператор $\hat{L}^*$ действует из $V_b(T_C)$ в $V_{H_G}(T_C)$, причём непрерывно.

Для произвольной функции $F \in V_b(T_C)$ при любом $\zeta \in T_C$

$$\hat{L}^*(F)(\zeta) = (L^*(\mathcal{F}^{-1}(F)), f_\zeta) = (\mathcal{F}^{-1}(F)), L(f_\zeta)) =$$

$$= (\mathcal{F}^{-1}(F)), g(\zeta) f_\zeta) = g(\zeta)(\mathcal{F}^{-1}(F)), f_\zeta) = g(\zeta) F(\zeta).$$

Из результатов Себаштьяна-и-Сильвы следует, что образ $im\, \hat{L}^*$ оператора $\hat{L}^*$ замкнут в $V_{H_G}(T_C)$ тогда и только тогда, когда множество $im\, \hat{L}^* \cap V_{H_G,m}(T_C)$ замкнуто в $V_{H_G,m}(T_C)$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$. Итак, пусть $m \in \mathbb{Z}_+$ и функция F принадлежит замыканию множества $im\, \hat{L}^* \cap V_{H_G,m}(T_C)$ в $V_{H_G,m}(T_C)$. Тогда существует последовательность $(F_k)_{k=1}^\infty$ функций $F_k \in im\, \hat{L}^* \cap V_{H_G,m}(T_C)$, сходящаяся к F в $V_{H_G,m}(T_C)$. В частности, последовательность $(F_k)_{k=1}^\infty$ функций F_k сходится к F равномерно на компактах из T_C. Отсюда и из того, что функции F_k имеют вид $F_k(\zeta) = g(\zeta)\psi_k(\zeta)$, где $\psi_k \in V_b(T_C)$, $\zeta \in T_C$, следует, что функция

$$\psi(\zeta) = \frac{F(\zeta)}{g(\zeta)}, \ \zeta \in T_C,$$

голоморфна в T_C.

Оценим рост функции ψ. Пусть $\zeta \in T_C$. Пусть $\delta \in (0,1)$ произвольно. Положим $\varepsilon = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Delta_C(y))$, где $y = Im\, z$. Согласно Следствию 1 из теоремы А и Замечанию 1, имеем при некоторых $K > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ (не зависящих от ε)

$$|\psi(\zeta)| e^{\max\limits_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| \le m} Re\, \langle \zeta, i h_\alpha \rangle} \le \frac{K}{\varepsilon^N} \max_{w \in \Delta(\zeta, \varepsilon)} |F(w)|.$$

Отсюда следует, что

$$|\psi(\zeta) \le \frac{K}{\varepsilon^N} \max_{w \in \Delta(\zeta, \varepsilon)} |F(w)| e^{-H_K(Im\, \zeta)}. \tag{4}$$

Так как $F \in V_{H_G, m}(T_C)$, то при некотором $A_F > 0$

$$|F(w)| \le A_F (1 + \|w\|)^m (1 + \frac{1}{\Delta_C(Im\, w)})^m e^{H_G(Im\, w)},$$

где $w \in T_C$.

Отсюда следует, что при некотором $B_F > 0$ (не зависящем от ε)

$$\max_{w\in\Delta(\zeta,\varepsilon)} |F(w)| \le B_F(1+\|\zeta\|)^m \left(1+\frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^m e^{\max\limits_{w\in\Delta(\zeta,\varepsilon)} H_G(Im\, w)}.$$

Согласно Лемме 1 $\forall\,\delta > 0\ \ \exists\, c_\delta > 0$ такая, что

$$\max_{w\in\Delta(\zeta,\varepsilon)} H_G(Im\, w) \le H_G(Im\,\zeta) + \delta|Im\,\zeta| + c_\delta.$$

Отсюда и из (4) с учётом равенства (1) получим, что $\forall\,\delta > 0$ $\exists\, C_\delta > 0$ такая, что для $\zeta \in T_C$

$$|\psi(\zeta)| \le C_\delta\,(1+\|\zeta\|)^m \left(1+\frac{1}{\Delta_C(Im\,\zeta)}\right)^{m+N} e^{b(Im\,\zeta)+\delta|Im\,\zeta|}. \quad (5)$$

Отсюда с учётом Замечания 2 имеем $\psi \in V_b(T_C)$.

Так как $F(\zeta) = \psi(\zeta)g(\zeta),\ \zeta \in T_C$, то $F \in im\,\hat{L}^*$. Итак, множество $im\,\hat{L}^* \cap V_{H_G,m}(T_C)$ замкнуто в $V_{H_G,m}(T_C)$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, образ $im\,\hat{L}^*$ оператора $\hat{L}^*$ замкнут в $V_{H_G}(T_C)$. Но тогда образ оператора L замкнут в $S(U)$. А так как ещё образ оператора L плотен в $S(U)$, то $im\,L = S(U)$.

2. Об одном классе ультрадифференцируемых функций.

В 70-х годах в связи с потребностями математической физики и продолжая исследования В.С. Владимирова по обобщённым функциям медленного роста с носителями в неограниченных замкнутых выпуклых множествах в $\mathbb{R}^n$, ограниченных со стороны выпуклого острого конуса, Роевер изучал весовые пространства быстро убывающих гладких функций на замкнутых выпуклых неограниченных множествах в $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью с определёнными оценками на все частные производные на всём этом множестве. В силу определения топологии в этих пространствах носители линейных непрерывных функционалов над ними (также называемых ультрараспределениями) могут быть некомпактными. Для этих пространств им было получено описание преобразований Фурье-Лапласа функционалов над этими пространствами в виде (DFS)-пространств голоморфных функций в некоторой трубчатой области полиномиального роста вблизи границы области и с определёнными оценками роста на бесконечности.

Пусть $\mathcal{H} = \{h_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ – семейство выпуклых функций $h_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с $h_\nu(0) = 0$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:

i_1) $h_\nu(x) = h_\nu(|x_1|, \dots, |x_n|),\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

i_2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{h_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty$;

i_3) для любого $M > 0$ существует число $A_{\nu,M} > 0$ такое, что

$$h_\nu(x) \le \sum_{1 \le j \le n : x_j \ne 0} x_j \ln \frac{x_j}{M} + A_{\nu,M},\ x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n;$$

i_4) найдётся число $b_\nu > 0$, что
$h_\nu(x + y) \le h_{\nu+1}(x) + b_\nu,\ x \in [0, \infty)^n, y \in [0, 1]^n$;

i_5) сходится ряд $\sum\limits_{|\alpha| \ge 0} e^{h_\nu(\alpha) - h_{\nu+1}(\alpha)}$.

Каждая функция h_ν неотрицательна в $\mathbb{R}^n$, а её сужение на $[0, \infty)^n$ не убывает по каждой переменной.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ введём пространство

$$\mathcal{E}_m(U) = \{f \in C^\infty(U) : \rho_m(f) = \sup_{x \in V, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)|}{\alpha! e^{-h_m(\alpha)}} < \infty\}.$$

Положим $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_m(U)$. Наделим $\mathcal{E}_U(\mathcal{H})$ счётно-норм. топологией, определяемой семейством норм ρ_m $(m \in \mathbb{N})$.

Пусть $f \in \mathcal{E}_U(\mathcal{H})$. Тогда при любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, k \in \mathbb{N}$

$$(1 + \|x\|)^k |(D^\alpha f)(x)| \le \rho_k(f) \alpha! e^{-h_k(\alpha)} \ , \ x \in V. \tag{6}$$

Показывается, что для $f \in \mathcal{E}_U(\mathcal{H})$ справедливо представление

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \ge 0} \frac{(D^\alpha f)(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha, \ x \in V.$$

Пользуясь оценкой (6) и условием i_2), делаем вывод, что для каждого $x_0 \in V$ функция

$$F_{f,x_0}(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(D^\alpha f)(x_0)}{\alpha!}(z - x_0)^\alpha \ , z \in \mathbb{C}^n,$$

является целой в $\mathbb{C}^n$. Причём, для $x \in V \quad F_{x_0}(x) = f(x)$. Отсюда следует, что для любых $x_1, x_2 \in V$ $F_{f,x_1}(z) = F_{f,x_2}(z), \ z \in \mathbb{C}^n$. Тем самым определена целая функция F_f такая, что для $\xi \in V \quad F_f(z) = F_{f,\xi}(z), \ z \in \mathbb{C}^n$, и $F_f(x) = f(x), \ x \in V$. Итак, f допускает (единственное) продолжение до целой функции в $\mathbb{C}^n$. Таким образом, возникло (линейное) отображение T, которое каждой функции f из $\mathcal{E}_U(\mathcal{H})$ ставит в соответствие целую функцию F_f.

Оценим рост F_f. Но вначале несколько определений.

Определение. Преобразование Юнга-Фенхеля g^* функции $g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ есть функция $g^* : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, определённая по правилу $g^*(x) = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - g(y))$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим функцию φ_m в $\mathbb{R}^n$, полагая

$$\varphi_m(x) = h_m^*(\ln^+ |x_1|, \dots, \ln^+ |x_n|),\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Она принимает конечные значения, непрерывна в $\mathbb{R}^n$, её сужение на $\mathbb{R}_+^n$ не убывает по каждой переменной. Ввиду i_3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\varphi_m(x)}{\|x\|} = +\infty$. Показывается, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$h_m^*(x) \geq h_{m+1}^*(x) + \sum_{j=1}^{n} x_j - b_m,\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n,$$

где b_m то же, что и в условии i_4). Тогда отсюда

$$\varphi_{m+1}(x) + \ln(1 + \|x\|) \leq \varphi_m(x) + r_m,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

где $r_m = b_m + n \ln 2$.

Пусть $z = x + iy, \ x \in V, y \in \mathbb{R}^n$. Пользуясь неравенством (7), свойствами функций h_m, h_m^*, φ_m и разложением F_f в ряд Тейлора в точке x

$$F(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(D^\alpha f)(x)}{\alpha!}(iy)^\alpha \ ,$$

получим, что при некотором $b_m > 0$

$$(1 + \|z\|)^m |F_f(z)| \leq b_m \rho_{2m+1}(f) e^{\varphi_m(Im\, z)}. \tag{8}$$

Пользуясь представлением

$$F_f(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(D^\alpha f)(\xi)}{\alpha!}(z - \xi)^\alpha,$$

где ξ – произвольная точка множества V, неравенством (6), свойствами функций h_m, h_m^*, φ_m, получим, что в точках $z = x + iy$, $x \notin V, y \in \mathbb{R}^n$

$$(1 + \|z\|)^m |F_f(z)| \leq c_m \rho_{2m+1}(f) e^{\varphi_m(|z_1 - \xi_1, \ldots, |z_n - \xi_n|)}.$$

Отсюда следует, что в точках $z = x + iy$, $x \notin V, y \in \mathbb{R}^n$

$$(1 + \|z\|)^m |F_f(z)| \le c_m \rho_{2m+1}(f) e^{\inf\limits_{\xi \in V} \varphi_m(|z_1 - \xi_1|, \dots, |z_n - \xi_n|)}. \qquad (9)$$

Положим

$$\Phi_m(z) = \inf_{\xi \in V} \varphi_m(|z_1 - \xi_1|, \dots, |z_n - \xi_n|), \ z \in \mathbb{C}^n.$$

В силу (7) $\Phi_{m+1}(z) \le \Phi_m(z) + r_m, \ z \in \mathbb{C}^n$. Из (8) и (9) получаем, что для любого $z \in \mathbb{C}^n$

$$(1 + \|z\|)^m |F_f(z)| \le d_m \rho_{2m+1}(f) e^{\Phi_m(z)}, \qquad (10)$$

где $d_m = \max(b_m, c_m)$.

Определим пространство $E(U)$ целых функций f в $\mathbb{C}^n$ как проективный предел нормированных пространств

$$E_m(U) = \{F \in H(\mathbb{C}^n) : q_m(F) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|F(z)|(1 + \|z\|)^m}{e^{\Phi_m(z)}} < \infty\}, \; m \in \mathbb{N}.$$

Пространства $E_m(U)$ – банаховы и вложения $I_m : E_{m+1}(U) \to E_m(U)$ вполне непрерывны.

Теорема 2

Отображение T устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathcal{E}_U(\mathcal{H})$ и $E(U)$.