О поведении гамма-функции на мнимой оси (по совместным работам с А. Б. Костиным)

Шерстюков Владимир Борисович

МГУ имени М.В. Ломоносова

Воркшоп по комплексному анализу, посвященный юбилею д.ф.-м.н., проф. Абанина Александра Васильевича

13 февраля 2025 г.

Обозначения

Открытая правая полуплоскость

$$\Pi_+ \equiv \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Ее замыкание без точки $z = 0$

$$\overline{\Pi}_+^{\circ} \equiv \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \ \operatorname{Re} z \geqslant 0\}.$$

Логарифм, корень и арктангенс

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z = \int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \qquad z \in \overline{\Pi}_+^{\circ},$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i}{2} \arg z} = e^{\frac{1}{2} \ln z}, \qquad z \in \overline{\Pi}_+^{\circ},$$

$$\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{d\zeta}{\zeta^2 + 1}, \qquad z \in \Pi_+.$$

Базовые сведения

Гамма-функция

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad z \in \Pi_+.$$

Функция $1/\Gamma(z)$ — целая, с простыми нулями $z = -n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Произведение Вейерштрасса

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right\}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

где γ — константа Эйлера–Маскерони.

Формулы Бине

Первая формула Бине

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \exp\left\{ z \ln z - z + \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-zt}}{t}\, dt \right\}, \quad z \in \Pi_+.$$

Вторая формула Бине

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \exp\left\{ z \ln z - z + 2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(t/z)}{\exp(2\pi t) - 1}\, dt \right\}, \qquad z \in \Pi_+.$$

Whittaker E. T. and Watson G. N.
A Course of Modern Analysis.
Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

К. Мальмстен (1847 г., $z = x > 0$).
Для всех $z \in \Pi_+$ справедливо
интегральное представление

$$\Gamma(z) \; = \; \exp\left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-zt} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} + (z-1)\, e^{-t} \right) \frac{dt}{t} \right\}.$$

Формула К. Ф. Гаусса

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right) dt\,.$$

Malmstén C. J.
Sur la formule $hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{2!}\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{4!}\Delta u^{IV}_x + etc.$.
J. Reine Angew. Math. 1847. Vol. 35. № 1. P. 55–82.

Blagouchine I.
Rediscovery of Malmsten's integrals, their evaluation by contour integration methods and some related results.
The Ramanujan Journal. 2014. Vol. 35. № 1. P. 21–110.

Вспомогательная задача

Задача. Распространить первую формулу Бине и формулу Мальмстена на множество $\overline{\Pi}_+^{\circ} \supset \Pi_+$.

Утверждение. Указанные формулы справедливы при всех $z \in \overline{\Pi}_+^{\circ}$.

Костин А. Б., Шерстюков В. Б.
Об интегральных представлениях величин, связанных с гамма-функцией.
Уфимский матем. журнал. 2021. Т. 13. № 4. С. 51–64.

Вспомогательная функция

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\,\exp\left\{ z\ln z - z + \int\limits_0^{+\infty} g(t)\,e^{-zt}\,dt \right\}, \qquad z \in \Pi_+,$$

$$g(t) \equiv \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right)\frac{1}{t}, \quad t > 0, \qquad g(0) \equiv \lim_{t\to 0} g(t) = \frac{1}{12}.$$

Поведение на бесконечности

$$g(t) \sim \frac{1}{2t}, \qquad g'(t) \sim -\frac{1}{2t^2}, \qquad t \to +\infty.$$

Разложения на простые дроби

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{t^2 + 4\pi^2 n^2} > 0, \qquad t \geqslant 0,$$

$$g'(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4t}{(t^2 + 4\pi^2 n^2)^2} < 0, \quad t > 0, \qquad g'(0) = 0.$$

Первая формула Бине

Теорема

Справедливо интегральное представление

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \exp\left\{ z\ln z - z + \int\limits_0^{+\infty} g(t)\, e^{-zt}\, dt \right\}, \qquad z \in \overline{\Pi}{}^{\circ}_{+}.$$

В частности, для $z = iy$*, где* $y > 0$*, имеем*

$$|\Gamma(iy)| = \sqrt{\frac{2\pi}{y}} \exp\left\{ -\frac{\pi y}{2} + \int\limits_0^{+\infty} g(t)\, \cos(yt)\, dt \right\},$$

$$y\ln y - y - \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^{+\infty} g(t)\, \sin(yt)\, dt \in \operatorname{Arg}\Gamma(iy),$$

$$\int\limits_0^{+\infty} g(t)\, \cos(yt)\, dt = \frac{\pi y}{2} - \frac{1}{2}\ln\Bigl(2\operatorname{sh}(\pi y)\Bigr).$$

Полезные интегралы

Вещественными и комплексными методами вычисляются следующие интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - \cos t}{t}\, dt = 0,$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1} - \frac{e^{-t}}{2} \right) \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln 2\pi,$$

$$\ln z \;=\; \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{t}\, dt, \qquad z \in \overline{\Pi}_+^{\circ},$$

$$z \ln z \;-\; z \;=\; \int\limits_0^{+\infty} \left(z e^{-t} + \frac{e^{-zt} - 1}{t} \right) \frac{dt}{t}, \qquad z \in \overline{\Pi}_+^{\circ}.$$

Формула Мальмстена

Теорема

Справедливо интегральное представление

$$\Gamma(z) = \exp\left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-zt} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} + (z-1)\, e^{-t} \right) \frac{dt}{t} \right\}, \qquad z \in \overline{\Pi}_+^{\circ}.$$

В частности, для $z = iy$, *где* $y > 0$, *имеем*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(yt) - 1}{e^t - 1} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi y}{\operatorname{sh}(\pi y)},$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(y e^{-t} - \frac{\sin(yt)}{1 - e^{-t}} \right) \frac{dt}{t} \in \operatorname{Arg} \Gamma(iy).$$

Поведение модуля гамма-функции на мнимой оси

Произведение Вейерштрасса

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\,e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right\}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{1}{y^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+y^2} = \frac{\pi}{y\,\mathrm{sh}(\pi y)}, \qquad y > 0,$$

с известной асимптотикой

$$|\Gamma(iy)| \sim \sqrt{\frac{2\pi}{y}}\, \exp\left(-\frac{\pi y}{2}\right), \quad y \to +\infty.$$

$$\arg \Gamma(iy) = ?$$

Применения в задачах математической физики

Второе уравнение Пенлеве и уравнение Кортевега–де Фриза. Геометрическая оптика.

Painlevé P.
Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont lintégrale générale est uniforme.
Acta Mathematica. 1902. Vol. 25. P. 1–85.

Hastings S. P., McLeod J. B.
A boundary value problem associated with the second Painlevé transcendent and Korteveg-de Vries equation.
Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1980. Vol. 73. № 1. P. 31–51.

Segur H., Ablowitz M. J.
Asymptotic solutions of nonlinear evolution equations and a Painlevé transcendent.
Physica D.: Nonlinear Phenomena. 1981. Vol. 3. № 1-2. P. 165–184.

Сулейманов Б. И.
Связь асимптотик на разных бесконечностях решений второго уравнения Пенлеве.
Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 5. С. 834–842.

Сулейманов Б. И.
Влияние малой дисперсии на самофокусировку в пространственно одномерном случае.
Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2017. Т. 106. Вып. 6. С. 375–380.

Аргумент гамма-функции в точках мнимой оси

Из первой формулы Бине

$$\Phi(y) \equiv y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} - \int_0^{+\infty} g(t)\, \sin(yt)\, dt \in \operatorname{Arg} \Gamma(iy), \qquad y > 0,$$

где функция g определена формулой

$$g(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{1}{t}, \qquad t > 0, \qquad g(0) = \frac{1}{12}\,.$$

Синус-преобразование Фурье

$$\int_0^{+\infty} g(t)\, \sin(yt)\, dt\,, \qquad y > 0.$$

Седлецкий А. М.
Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации.
Физматлит, М., 2005.

Простейшая двусторонняя оценка функции Φ

Оценка сверху:

$$\Phi(y) \; < \; y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4}\,, \qquad y > 0.$$

Оценка снизу:

$$\Phi(y) \; > \; y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6y}\,, \qquad y > 0.$$

В теореме ниже используются корни уравнения вида

$$y \ln \frac{y}{e} = A\,,$$

выражаемые в терминах W-функции Ламберта.

Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К.
W-функция Ламберта и её применение в математических задачах физики.
РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров, 2006.

Более точные оценки функции Φ

Теорема

Для функции Φ при всех $y > 0$ верна двусторонняя оценка

$$\underline{\Phi}(y) < \Phi(y) < \overline{\Phi}(y)\,,$$

в которой миноранта $\underline{\Phi}$ и мажоранта $\overline{\Phi}$ задаются формулами

$$\underline{\Phi}(y) = \begin{cases} y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{2}\,, & 0 < y < \frac{2}{3\pi}\,, \\ y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6y}\,, & y \geqslant \frac{2}{3\pi}\,, \end{cases}$$

$$\overline{\Phi}(y) = \begin{cases} y \ln \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\,, & 0 < y < y_0\,, \\ y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4}\,, & y \geqslant y_0\,. \end{cases}$$

Здесь $\dfrac{2}{3\pi} = 0.21\ldots,\ y_0 = -\dfrac{\pi}{4W_{-1}(-\frac{1}{2e})} = 0.29\ldots,$ *а символом* W_{-1} *обозначена соответствующая ветвь W-функции Ламберта.*

Границы вспомогательных интервалов

При каждом $m \in \mathbb{N}$ положим

$$y_m = \frac{(8m-3)\pi}{4W_0\left(\frac{(8m-3)\pi}{4e}\right)},$$

$$\underline{y}_m = \frac{3(8m-3)\pi y_m + 2}{12 y_m W_0\left(\frac{3(8m-3)\pi y_m + 2}{12 e y_m}\right)},$$

$$\overline{y}_m = \frac{(8m+5)\pi}{4W_0\left(\frac{(8m+5)\pi}{4e}\right)},$$

где W_0 обозначает основную ветвь W-функции Ламберта.

Правило для вычисления $\arg\Gamma(iy)$

Теорема

Пусть Φ *— определенная выше функция. Тогда главное значение аргумента величины* $\Gamma(iy)$ *при*

$$y \in \left(0,\ \frac{5\pi}{4W_0\left(\frac{5\pi}{4e}\right)}\right) = (\,0,\ 5.52\ldots\,)$$

вычисляется по правилу $\arg\Gamma(iy) = \Phi(y)$, *а при* $y \in (\,\underline{y}_m,\ \overline{y}_m\,)$ *с заданным* $m \in \mathbb{N}$ *— по правилу* $\arg\Gamma(iy) = \Phi(y) - 2\pi m$.

Костин А. Б., Шерстюков В. Б.
О поведении гамма-функции на мнимой оси.
Материалы международной Воронежской зимней математической школы.
Воронеж. Изд. дом ВГУ. 2025. С. 189–191.

Пример 1 (грубая оценка)

$$\Phi(y) \equiv y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} - \int_0^{+\infty} g(t) \sin(yt)\, dt \in \operatorname{Arg} \Gamma(iy), \qquad y > 0,$$

$$y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6y} < \Phi(y) < y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4}, \qquad y > 0.$$

Пусть $y = \ln 2/(2\pi)$. Тогда эта предварительная оценка даёт

$$\frac{\ln 2}{2\pi} \ln \frac{\ln 2}{2\pi e} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3 \ln 2} < \arg \Gamma\left(\frac{\ln 2}{2\pi} i\right) < \frac{\ln 2}{2\pi} \ln \frac{\ln 2}{2\pi e} - \frac{\pi}{4}.$$

Здесь левая часть $= -2.649\ldots$, правая часть $= -1.138\ldots$.
Истинное значение

$$\arg \Gamma\left(\frac{\ln 2}{2\pi} i\right) = -1.633\ldots.$$

Пример 1 (уточнённая оценка)

$$\Phi(y) \equiv y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^{+\infty} g(t)\,\sin(yt)\,dt \;\in\; \operatorname{Arg}\Gamma(iy), \qquad y > 0,$$

$$y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{2} \;<\; \Phi(y) \;<\; y \ln \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\,, \qquad 0 < y < 0.22.$$

Пусть $y = \ln 2/(2\pi) = 0.11\ldots$ Тогда такая уточнённая оценка даёт

$$\frac{\ln 2}{2\pi} \ln \frac{\ln 2}{2\pi e} - \frac{\pi}{2} \;<\; \arg\Gamma\left(\frac{\ln 2}{2\pi}\, i\right) \;<\; \frac{\ln 2}{2\pi} \ln \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}.$$

Здесь левая часть $= -1.924\ldots$, правая часть $= -1.520\ldots$, существенно улучшая границы для истинного значения

$$\arg\Gamma\left(\frac{\ln 2}{2\pi}\, i\right) = -1.633\ldots.$$

Пример 2

Взяв $y = 1$, по теореме получим

$$\arg\Gamma(i) = \Phi(1) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^t - 1 - t}{(e^t - 1)t^2} \sin t \, dt - 1 - \frac{\pi}{2} = -1.87\ldots$$

с приемлемыми для практических вычислений границами

$$-1.95\ldots = -\frac{7}{6} - \frac{\pi}{4} = \underline{\Phi}(1) < \arg\Gamma(i) < \overline{\Phi}(1) = -1 - \frac{\pi}{4} = -1.78\ldots$$

Другая формула

$$\arg\Gamma(i) = \int\limits_0^{\pi/2} \{\operatorname{tg} t\} \, dt - 1 - \frac{\pi}{2}, \qquad \{\cdot\} \text{ — дробная часть.}$$

Задача опубликована в 2017 году в «La Gaceta de la RSME» (vol. 20, num. 2, probl. 327).

Пример 3

При выборе $y = 3e \in (\underline{y}_1, \overline{y}_1) = (5.54\ldots, 8.74\ldots)$ получим

$$\arg\Gamma(3ei) = \Phi(3e) - 2\pi =$$

$$= 3e\ln 3 - \frac{5\pi}{2} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^t - 1 - t}{(e^t-1)t^2}\,\sin(3et)\,dt = 1.88\ldots;$$

согласно же теоремам имеем

$$1.86\ldots = 3e\ln 3 - \frac{9\pi}{4} - \frac{1}{18e} = \underline{\Phi}(3e) - 2\pi < \arg\Gamma(3ei) < \overline{\Phi}(3e) - 2\pi$$
$$= 3e\ln 3 - \frac{9\pi}{4} = 1.89\ldots,$$

что даёт весьма неплохое приближение.

Альтернативное представление

Всюду $\{\cdot\}$ — дробная часть. Одно из значений аргумента

$$\int\limits_0^{\pi/2} \{y \operatorname{tg} \tau\}\, d\tau + y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{2} \in \operatorname{Arg} \Gamma(yi), \quad y > 0.$$

Справедливы тождества

$$\int\limits_0^{\pi/2} \{y \operatorname{tg} \tau\}\, d\tau = y \int\limits_0^{+\infty} \frac{\{s\}}{s^2 + y^2}\, ds = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^t - 1 - t}{(e^t - 1)\, t^2} \sin yt\, dt, \quad y > 0.$$

Главное значение аргумента

$$\arg \Gamma(yi) = \pi - 2\pi \left\{ \frac{3}{4} - \frac{y}{2\pi} \ln \frac{y}{e} - \int\limits_0^{1/4} \{y \operatorname{tg}(2\pi\tau)\}\, d\tau \right\}, \quad y > 0.$$

Вспомогательное утверждение. Простые примеры

Элементарное соображение

Пусть $a \in \mathbb{C}, \quad \Phi \in \operatorname{Arg} a, \quad \varphi = \arg a \in (-\pi, \pi].$

Тогда $$\varphi = \pi - 2\pi \left\{ \frac{\pi - \Phi}{2\pi} \right\}.$$

Примеры применения формулы

$$y = 1 \quad \Rightarrow \quad \arg \Gamma(i) = \int\limits_0^{\pi/2} \{\operatorname{tg} \tau\}\, d\tau - 1 - \frac{\pi}{2}.$$

$$y = y_0 \equiv \frac{\pi}{2W_0(\frac{\pi}{2e})} \quad \Rightarrow \quad \arg \Gamma(y_0 i) = \int\limits_0^{\pi/2} \{y_0 \operatorname{tg} \tau\}\, d\tau.$$

Более сложный пример

$$z = -2025 + i \quad \Rightarrow \quad \arg\Gamma(-2025+i) = ?$$

Точный ответ:

$$\frac{1}{2}\ln\left(2025^2+1\right) - \frac{3\pi}{2} + \int\limits_{\operatorname{arctg} 2025}^{\pi/2} \{\operatorname{tg}\tau\}\,d\tau - \left(1 - 2025\operatorname{arctg}\frac{1}{2025}\right).$$

$$\arg\Gamma(-2025+i) \approx \ln 2025 - \frac{3\pi}{2} \quad \textit{с погрешностью} \quad < 5\cdot 10^{-4},$$

$$\arg\Gamma(-2025+i) = 2.901182\ldots, \qquad \ln 2025 - \frac{3\pi}{2} = 2.900935\ldots$$

Костин А. Б., Шерстюков В. Б.
Аналитическая формула для аргумента гамма-функции как комплексной величины.
Матем. заметки (направлена в печать).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

С ЮБИЛЕЕМ, АЛЕКСАНДР ВАСИЛЬЕВИЧ!