Единая шкала роста целых функций конечного порядка

Р.Г. Письменный, А.Б. Шишкин, Б.А. Шишкин

февраль 2025

Кубанский государственный университет, кафедра теории функций

Филиал КубГУ в г. Славянске-на-Кубани, кафедра МИЕОД

О шкалах роста

Пусть неотрицательные функции $\varphi(r)$ и $m(r)$ определены в окрестности $+\infty$. Говорим, что функция $\varphi(r)$ *растет как функция* $m(r)$ и пишем $\varphi(r) \simeq m(r)$, если

1) $\varphi(r) = O(m(r))$ при $r \to +\infty$,

2) $m(r_n) = O(\varphi(r_n))$ при $n \to +\infty$ для некоторой последовательности $r_n \to +\infty$.

Предложение. Функция $\varphi(r)$ растет как функция $m(r)$ тогда и только тогда, когда она имеет нормальный тип

$$\sigma_{\varphi,m} := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\varphi(r)}{m(r)} \in (0, +\infty)$$

относительно этой функции.
Функция $\varphi(r)$ растет *медленее* (соответственно, *быстрее*) функции $m(r)$, если

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\varphi(r)}{m(r)} = 0 \quad \left(\text{соответственно, } \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\varphi(r)}{m(r)} = +\infty\right).$$

О шкалах роста

Выберем произвольное семейство функций $\{\varphi(r)\}$ и произвольное семейство «хороших» функций $\{m(r)\}$. Говорят, что семейство функций $\{m(r)\}$ является *шкалой роста* семейства функций $\{\varphi(r)\}$, если выполнены *условие достаточности:*

$$(\forall \varphi(r) \in \{\varphi(r)\})\,(\exists m(r) \in \{m(r)\}) : \varphi(r) \simeq m(r),$$

(любая функция $\varphi(r)$ из семейства $\{\varphi(r)\}$ растет как некоторая функция из семейства $\{m(r)\}$) и *условие необходимости:*

$$(\forall m(r) \in \{m(r)\})\,(\exists \varphi(r) \in \{\varphi(r)\}) : \varphi(r) \simeq m(r),$$

(для любой функции $m(r)$ из семейства $\{m(r)\}$ найдется функция из семейства $\{\varphi(r)\}$, которая растет как функция $m(r)$).

Если семейство $\{\varphi(r)\}$ состоит из «хороших» функций, то оно само является шкалой роста для себя.

О степенной шкале роста

Неотрицательную функцию $m(r)$ действительной переменной называем *квазистепенной функцией с показателем* $\rho \in [0, +\infty)$, если она определена в окрестности точки $+\infty$, возрастает и

$$m(r) \to +\infty, \quad \frac{m(tr)}{m(r)} \to t^{\rho}, \quad r \to +\infty.$$

равномерно по t из произвольного компакта $d \Subset (0, +\infty)$. Если функция $\varphi(r)$ растет как некоторая квазистепенная функция $m(r)$, то говорят, что она имеет *степенной рост*. Если шкала роста $\{m(r)\}$ состоит из квазистепенных функций, то ее называют *степенной шкалой роста.*

ПРИМЕР. Семейство функций $\{r^{\rho(r)} : \rho > 0\}$ является степенной шкалой роста семейства функций $\{\ln M_f(r) : \rho_f > 0\}$, где $\rho(r)$ – уточненный порядок в смысле Валирона. Семейство функций $\{r^{\rho(r)} : \rho \geq 0\}$ не является (степенной) шкалой роста семейства функций $\{\ln M_f(r) : \rho_f \geq 0\}$.

О степенной шкале роста

Если добавить к определению уточненного порядка условие

$$\frac{r^{\rho(r)}}{\ln r} \to q \in \bar{\mathbf{N}} := \mathbf{N} \cup \{+\infty\}, \quad r \to +\infty,$$

то получим определение уточненного порядка в смысле Гришина и Нгуен Ван Куиня

$$\frac{r^{\rho(r)}}{\ln r} \to q, \quad \rho(r) \to \rho, \quad \rho'(r) r \ln r \to 0, \quad r \to +\infty.$$

Семейство функций $\{r^{\rho(r)} : q \in \bar{\mathbf{N}}, \ \rho \geq 0\}$ уже является шкалой роста семейства функций $\{\ln M_f(r) : \rho_f \geq 0\}$, но не является степенной шкалой роста.

Построение степенной шкалой роста удобно проводить в терминологии весов $m(r)$ (а не в терминологии весовых порядков $\rho(r)$).

Построение степенной шкалы роста

Неотрицательную функцию $m(r)$, определенную в окрестности $+\infty$, называем *степенным весом* порядка ρ, если она возрастает и

$$\frac{m(r)}{\ln r} \to q \in \bar{\mathbf{N}}, \quad \frac{\ln m(r)}{\ln r} \to \rho \in [0, +\infty), \quad r \to +\infty.$$

Если действительная функция $m(r)$ дифференцируема в окрестности $+\infty$ и

$$m'(r)r \to q \in \bar{\mathbf{N}}, \quad \frac{m'(r)r}{m(r)} \to \rho \in [0, +\infty), \quad r \to +\infty,$$

то ее называем *уточненным степенным весом* порядка ρ. Если функция $m(r)$ является уточненным степенным весом, то функция $\rho_m(r) := \ln m(r)/\ln r$ является уточненным порядком и в смысле Валирона и в смысле Гришина.

Теорема. Семейство функций $\{m(r) : q \in \bar{\mathbf{N}},\ \rho \geq 0\}$ является степенной шкалой роста семейства функций $\{\ln M_f(r) : \rho_f \geq 0\}$.

Построение степенной шкалы роста

Если функция $\ln M_f(r)$ растет как уточненный степенной вес $m(r)$, то говорим, что функция $m(r)$ является уточненным степенным весом целой функции f. Если функция $\ln M_f(r)$ растет как уточненный степенной вес $m(r)$, то

$$q = q_f := \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\ln r}, \quad \rho = \rho_f := \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r},$$

где q_f – *алгебраическая степень* целой функции f, ρ_f – *степенной порядок* целой функции f. Понятно, что степенной порядок целой функции совпадает с порядком целой функции в смысле Валирона.

Другими словами, в степенной шкале роста любая отличная от константы целая функция имеет два ключевых параметра роста q_f и ρ_f.

О логарифмической шкале роста

Для целых функций нулевого порядка степенная шкала роста является слишком грубой и требует уточнения. Неотрицательную функцию $m(r)$ действительной переменной называем *квазилогарифмической функцией степени* $\varrho \in [0, +\infty]$, если она определена в окрестности точки $+\infty$, возрастает и

$$m(r) \to +\infty, \quad \frac{m(r^t)}{m(r)} \to t^{\varrho}, \quad r \to +\infty.$$

равномерно по t из произвольного компакта $d \Subset (0, +\infty)$ (в случае бесконечной степени $d \Subset (0; 1) \cup (1, +\infty)$). Например, при любом $\varrho \in (0, +\infty)$ функция $m(r) := \ln^{\varrho} r$ является квазилогарифмической функцией степени ϱ.

Если функция $\varphi(r)$ растет как некоторая квазилогарифмическая функция $m(r)$, то говорим, что функция $\varphi(r)$ имеет *логарифмический рост*. Если шкала роста $\{m(r)\}$ состоит из квазилогарифмических функций, то ее называем *логарифмической шкалой роста*.

Построение логарифмической шкалы роста

Весовую функцию $m(r)$ нулевого порядка называем *логарифмической весовой функцией* (конечного порядка) или *логарифмическим весом* порядка ϱ, если она возрастает и

$$\frac{\ln m(r)}{\ln\ln r} \to \varrho \in [0, +\infty], \quad r \to +\infty.$$

Специфика логарифмической весовой функции состоит в том, что ее порядок ϱ может совпадать с $+\infty$. Уточненный вес $m(r)$ нулевого порядка называем *уточненным логарифмическим весом* порядка ϱ, если

$$\frac{m'(r) r \ln r}{m(r)} \to \varrho \in [0, +\infty], \quad r \to +\infty.$$

Теорема. Семейство функций $\{m(r) : q \in \bar{\mathbf{N}},\ \varrho \geq 1\}$ является логарифмической шкалой роста семейства функций $\{\ln M_f(r) : \rho_f = 0\}$.

Построение логарифмической шкалы роста

Если функция $\ln M_f(r)$ растет как уточненный логарифмический вес $m(r)$, то говорим, что функция $m(r)$ является уточненным логарифмическим весом целой функции f. Если функция $\ln M_f(r)$ растет как уточненный логарифмический вес $m(r)$, то

$$q = q_f := \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\ln r}, \quad \varrho = \varrho_f := \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln\ln r},$$

где ϱ_f – *логарифмический порядок* целой функции f.

Другими словами, в логарифмической шкале роста любая отличная от константы целая функция нулевого порядка имеет два ключевых параметра роста q_f и ϱ_f. Если логарифмический порядок ϱ_f целой функции f конечен, то он совпадает с порядком целой функции $f(e^z)$ в смысле Валирона.

Единая шкала роста

Степенная и логарифмическая шкалы роста образуют в совокупности *единую шкалу роста*

$$\{m(r) : q \in \bar{\mathbf{N}},\ \rho \in [0, +\infty),\ \varrho \in [1, +\infty]\}$$

семейства функций $\{\ln M_f(r) : \rho_f \geq 0\}$, где $m(r)$ – *уточненный вес* (*в смысле единой шкалы роста*), то есть дифференцируемая в окрестности $+\infty$ действительная функция, удовлетворяющая условиям: при $r \to +\infty$

$$m'(r)r \to q \in \bar{\mathbf{N}}, \quad \frac{m'(r)r}{m(r)} \to \rho \in [0, +\infty), \quad \frac{m'(r)r\ln r}{m(r)} \to \varrho \in [0, +\infty].$$

Если функция $\ln M_f(r)$ растет как уточненный вес $m(r)$, то говорим, что функция $m(r)$ является уточненным весом целой функции f (в смысле единой шкалы роста). Если функция $\ln M_f(r)$ растет как уточненный вес $m(r)$, то

$$q = q_f := \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\ln r}, \quad \rho = \rho_f := \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r},$$

$$\varrho = \varrho_f := \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln\ln r}.$$

Единая шкала роста

Другими словами, в единой шкале роста любая отличная от константы целая функция конечного порядка имеет три ключевых параметра роста q_f, ρ_f и ϱ_f. Если отказаться от дифференцируемости, то *вес* (*в смысле единой шкалы роста*) определяется с помощью следующих соотношений

$$q := \lim_{r\to+\infty} \frac{m(r)}{\ln r}, \quad \rho := \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln m(r)}{\ln r}, \quad \varrho : = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln m(r)}{\ln\ln r}.$$

Логарифмическая шкала роста является самой тонкой (точной), то есть более тонкие шкалы роста для целых функций теряют смысл. Однако можно дополнять единую шкалу роста *промежуточными шкалами роста*, основанными на параметрах роста типа *u-порядка*

$$\varrho_u : = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln m(r)}{u(\ln r)} \quad \text{или} \quad \varrho_u := \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{m'(r)r}{m(r)u'(\ln r)},$$

где функция $u(t)$ растет быстрее, чем функция $\ln t$ и медленнее, чем функция t.