О наименьшем модуле, содержащем весовое нормированное пространство целых функций

Юлмухаметов Р.С., Исаев К.П.

ИМВЦ УФИЦ РАН, Уфимский университет науки и технологий

Воркшоп по комплексному анализу, посвященный юбилею д.ф.-м.н., профессора Абанина Александра Васильевича (12 – 13 февраля 2025 г.)

Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^p$ и E — некоторое локально - выпуклое пространство в H(D). Если система экспонент $e^{<z,\lambda>}$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$, $< z, \lambda >= \sum_{j=1}^{p} z_j \lambda_j$ полна в пространстве E, то преобразование Фурье-Лапласа $S \to \widehat{S}(\lambda)$, которое каждому линейному непрерывному функционалу $S \in E^*$ ставит в соответствие функцию

$$\widehat{S}(\lambda) = S_z(e^{<z,\lambda>}),\ \lambda \in \mathbb{C}^p,$$

линейно и инъективно отображает сильно сопряженное пространство E^* в некоторое пространство $\widehat{E}$ функций на $\mathbb{C}^p$. Как правило, пространство $\widehat{E}$ является подпространством $H(\mathbb{C}^p)$. Задача об описании сопряженных пространств состоит в том, чтобы для конкретного пространства E определить само пространство $\widehat{E}$ и выяснить (описать) наведенную из E^* топологию.

Тема описания сопряженных для Ростовской школы — родная. Не менее родная для Уфы.

Определения

Для последовательности положительных чисел $\mathcal{M} = (M_k)_{k \in \mathbb{Z}_+^p}$ через $H(D, \mathcal{M})$ обозначим линейное нормированное пространство функций f, голоморфных в области D и удовлетворяющих оценке

$$\|f\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^p} \frac{1}{M_k} \sup_{z \in D} |D^k f(z)| < \infty,$$

где

$$D^k f(z) = \frac{D^{|k|} f(z)}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_p^{k_p}}.$$

Для семейства Σ последовательностей $\mathcal{M}_m = \{(M_k^{(m)}),\ k \in \mathbb{Z}_+^p\}$, $m \in \mathbb{N}$, в предположении непрерывности вложений $H(D, \mathcal{M}_{m+1}) \subset H(D, \mathcal{M}_m)$ через $H_{pr}(D, \Sigma)$ обозначим проективный предел пространств $H(D, \mathcal{M}_m)$:

$$H_{pr}(D, \Sigma) = \bigcap_m H(D, \mathcal{M}_m).$$

Пусть $\varphi(z)$ — непрерывная функция на плоскости. Положим

$$H(\mathbb{C},\varphi) = \{F \in H(\mathbb{C}) : \ \|F\| := \sup_{z\in\mathbb{C}} |F(z)|e^{-\varphi(z)} < \infty\}.$$

Опорную функцию области D обозначим через H_D^c:

$$H_D^c = \sup_{z\in D} \mathrm{Re} \ < z,\lambda >, \ \lambda \in \mathbb{C}^p,$$

а через T(r) — функцию следа последовательности положительных чисел $\mathcal{M} = (M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+^p}$:

$$T(r) = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+^p} \frac{r^k}{M_k}, \ r \in \mathbb{R}_+^p, \ r^k = r_1^{k_1}...r_p^{k_p}.$$

В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема A

Пусть $\mathcal{M}_k = \{M_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, — логарифмически выпуклые последовательности положительных чисел, удовлетворяющие условию

$$\sum_n \frac{M_{n+1}^{(k+1)}}{M_n^{(k)}} < \infty.$$

Тогда преобразование Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством к проективному пределу пространств $H(D, \mathcal{M}_k)$, $k \in \mathbb{N}$, и индуктивным пределом пространств $H(\mathbb{C}, \psi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, где $\psi_k(\lambda) = H_D^c(\lambda) + \ln T_k(|\lambda|)$.

(1) К.П. Исаев, "Представляющие системы экспонент в пространствах аналитических функций Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры», 161 (2019), 3–64.

В работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема B

Пусть $\mathcal{M}_k = \{M_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{Z}_+^p}$, $k \in \mathbb{N}$, — логарифмически выпуклые последовательности положительных чисел, удовлетворяющие условию

$$\sum_n \frac{\max_{|s|\le 1} M_{n+s}^{(k+1)}}{M_n^{(k)}} < \infty, \ \ k \in \mathbb{Z}_+^p.$$

Тогда преобразование Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством к проективному пределу пространств $H(D, \mathcal{M}_k)$, $k \in \mathbb{N}$, и индуктивным пределом пространств $H(\mathbb{C}, \psi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, где $\psi_k(\lambda) = H_D^c(\lambda) + \ln T_k(|\lambda|)$.

(2) А.В. Луценко, И.Х. Мусин, “О пространстве голоморфных функций с граничной гладкостью и его сопряженном”, Уфимск. матем. журн., 13:3 (2021), 82–96.

Эти проективные пределы достаточно тонкие, в том смысле, что образ сопряженного пространства выдерживает умножение только на многочлены. Это обстоятельство в [1] сформулировано в более точным образом. Инвариантным ядром пространства $H(D, \mathcal{M})$ назовем наибольшее линейное подпространство $H(D, \mathcal{M})$, замкнутое относительно дифференцирования. В случае одной переменной в упомянутой работе доказано, что ядро совпадает с пересечением $H(D, \mathcal{M}_k)$ "сдвигов" налево $\mathcal{M}_k$, $-k \in \mathbb{N}$. Если в этом пересечении рассматривать топологию проективного предела, то сопряженное в терминах преобразования Лапласа оказывается индуктивным пределом пространств $H\left(\mathbb{C},\, H_D^c(\lambda) + \ln T(|\lambda|) + j \ln(1 + |\lambda|)\right)$.

Попытки перевести понятия инвариантного ядра на многие переменные наткнулись на неожиданные трудности, связанные с делением на многочлен.

Наименьший модуль

Пусть E — некоторое линейное пространство в $H(\mathbb{C}^n)$. Через $O(E)$ обозначим наименьший модуль над кольцом многочленов, содержащий пространство E, то есть $O(E)$ — пересечение всех модулей, содержащих пространство E. Очевидно, что

$$O(E) = \{F_1 p_1 + \dots + F_n p_n : \ F_j \in E, \ p_j - \text{многочлен}\}.$$

Утверждение 1

Пусть $\varphi(z)$ — плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^p$ и

$$H_2(\varphi) = \{F \in H(\mathbb{C}^n) : \int_{\mathbb{C}^p} |F(z)|^2 e^{-\varphi(z)} dm(z) < \infty\},$$

где $dm(z)$ — мера Лебега. Предположим, что функция φ удовлетворяет условию:

Ф1. Для $s = (6p+4)p^2$ найдется плюрисубгармоническая на $\mathbb{C}^p$ функция ψ такая, что

$$|(\varphi(z) - s \ln(1 + \|z\|^2) - \psi(z)| \le c, \quad z \in \mathbb{C}^p.$$

Тогда

$$O(H_2(\varphi)) = \bigcup_{j \in N} H_2(\varphi + j \ln(1 + \|z\|^2)).$$

Список литературы

- А.В. Абанин, Т.М. Андреева, “Аналитическое описание сопряженных с пространствами голоморфных функций заданного роста в областях Каратеодори”, Матем. заметки, 104:3 (2018), 323–335.
- А.В. Абанин, И.А. Филипьев, “Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространствам бесконечно дифференцируемых функций”, Сиб. матем. журн., 47:3 (2006), 485–500.
- В.А. Варзиев, С.Н. Мелихов, “О сопряженном к пространству аналитических функций полиномиального роста вблизи границы”, Владикавк. матем. журн., 10:4 (2008), 17–22.
- О.В. Епифанов, “Двойственность одной пары пространств аналитических функций ограниченного роста”, Докл. АН СССР, 319:6 (1991), 1297–1300.
- К.П. Исаев, "Представляющие системы экспонент в пространствах аналитических функций Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры», 161(2019), 3–64.
- А.В. Луценко, И.Х. Мусин, “О пространстве голоморфных функций с граничной гладкостью и его сопряженном”, Уфимск. матем. журн., 13:3 (2021), 82–96.

Спасибо за внимание!