# **Некоторые вопросы теории операторов в банаховых решётках**

*Курс лекций*

Тасоев Б.Б.
Южный математический институт ВНЦ РАН;
Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН.

Владикавказ 2024

**Лекция №1.** Векторные решётки.

В данной лекции мы рассмотрим основные понятия теории векторных решёток: векторные подрешётки идеалы полосы, равномерная и порядковая полнота векторных решёток, порядковый проектор, спектральная теорема Фрейденталя. Подробное изложение теории векторных решёток и операторов в них можно найти в монографиях [1, 2, 3, 4, 5].

**Определение 1.1.** *Упорядоченным векторным пространством* над полем $\mathbb{R}$ называют пару $E := (E, \leqslant)$, где $E$ — векторное пространство, $\leqslant$ — отношение порядка, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) если $x \geqslant y$, то $x + z \geqslant y + z$ для всех $x, y, z \in E$;

(2) если $x \geqslant y$, то $\alpha x \geqslant \alpha y$ для всех $0 \leqslant \alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$.

Множество $E_+ := \{x \in E : x \geqslant 0\}$ называется *конусом положительных элементов.*

*Верхней границей* подмножества $A \subset E$ называется элемент $x \in E$ такой, что $x \geqslant y$ для всех $y \in A$. При этом говорят, что $A$ *ограничено сверху. Нижней границей* подмножества $A \subset E$ называется элемент $z \in E$ такой, что $z \leqslant y$ для всех $y \in A$. При этом говорят, что $A$ *ограничено снизу.*

Подмножество $A \subset E$ называется *порядково ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

*Супремумом* множества $A$ называется наименьший элемент множества всех его верхних границ. Обозначение: $\sup A$ или $\bigvee A$.

*Инфимумом* множества $A$ называется наибольший элемент множества всех его нижних. Обозначение: $\inf A$ или $\bigwedge A$.

**Определение 1.2.** *Векторной решёткой* называют упорядоченное векторное пространство $E$, в котором для любых элементов $x, y \in E$ существуют $x \vee y := \sup\{x, y\}$ и $x \wedge y := \inf\{x, y\}$. *Векторной подрешеткой* векторной решётки $E$ называют векторное подпространство $E_0 \subset E$ такое, что $x \vee y \in E_0$ и $x \wedge y \in E_0$ для любых $x, y \in E_0$.

Для каждого элемента $x \in E$ из векторной решётки $E$ можно определить: $|x| := x \vee (-x), \quad x^+ := x \vee 0, \quad x^- := (-x)^+ = -(x \wedge 0).$

**Предложение 1.3.** *Пусть $E$ — векторная решётка. Для произвольных $x, y, z \in E$ верны следующие соотношения:*

(1) $x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-, \quad x^+ \wedge x^- = 0;$

(2) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x + y|), \quad x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x + y|);$

(3) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)], \quad x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)];$

(4) $x + y \vee z = (x + y) \vee (x + z), \quad x + y \wedge z = (x + y) \wedge (x + z);$

(5) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$

(6) $|x \vee z - y \vee z| \leqslant |x - y|$ *(Неравенство Биркгофа);*

(7) $|x \wedge z - y \wedge z| \leqslant |x - y|$ *(Неравенство Биркгофа);*

(8) $||x| - |y|| = |x - y|$ *(Неравенство треугольника).*

$\lhd$ См. [2, Теоремы 1.5, 1.7, 1.9]. $\rhd$

**Примеры 1.4.**

(1) $\mathbb{R}^n$ — $n$-мерное векторное пространство является векторной решёткой, если определить в нём порядок и решёточные операции покоординатно, т.е. если для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ положим по определению $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $x_k \leqslant y_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$. При этом $x \vee y = (x_1 \vee y_1, \ldots, x_n \vee y_n)$ и.т.д.

(2) $\mathbb{R}^Q$ — множество всех функций $x : Q \to \mathbb{R}$, где $Q \neq \emptyset$, служит векторным пространством с поточечными операциями сложения и умножения на действительные числа. Порядок в $\mathbb{R}^Q$ также вводится поточечно: для $x, y \in \mathbb{R}^Q$ неравенство $x \leqslant y$ означает, что $x(t) \leqslant y(t)$ при всех $t \in Q$. Непосредственно из определений видно, что $\mathbb{R}^Q$ — архимедова векторная решётка, причём для всех $t \in Q$ выполняется

$$(x \vee y)(t) := x(t) \vee y(t) = \max\{x(t), y(t)\};$$
$$(x \wedge y)(t) := x(t) \wedge y(t) = \min\{x(t), y(t)\},$$

т. е. решеточные операции в $\mathbb{R}^Q$ также вычисляются поточечно.

(3) $l_0 = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — пространство всех последовательностей действительных чисел с поточеными решеточные и алгебраические операциями (следует из примера (2), полагая $Q := \mathbb{N}$).

(4) $l_p$, где $0 < p \leqslant \infty$, — пространство абсолютно сходящихся со степенью $p$ последовательностей с поточеными решеточные и алгебраические

операциями;

(5) $l_\infty$ — пространство ограниченных последовательностей с поточеными решеточные и алгебраические операциями;

(6) $c_0$ — пространство сходящихся к нулю последовательностей с поточеными решеточные и алгебраические операциями;

(7) $c$ — пространство сходящихся последовательностей с поточеными решеточные и алгебраические операциями;

(8) $\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство $\Sigma$-измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с поточеными решеточные и алгебраические операциями;

(9) $\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ $(0 < p < \infty)$ — пространство интегрируемых со степенью $p$ $\Sigma$-измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с поточеными решеточные и алгебраические операциями.

(10) $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma)$ — пространство ограниченных $\Sigma$-измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с поточеными решеточные и алгебраические операциями.

(11) $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство классов эквивалентности $\Sigma$-измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с почти всюду решеточные и алгебраические операциями;

(12) $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ $(0 < p < \infty)$ — пространство классов эквивалентности интегрируемых с $p$-ой степенью $\Sigma$-измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с почти всюду решеточные и алгебраические операциями;

(13) $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ $(0 < p < \infty)$ — пространство классов эквивалентности существенно ограниченных $\Sigma$-измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с почти всюду решеточные и алгебраические операциями;

(14) $C(X)$ — пространство непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}$, определённых на топологическом пространстве $X$, с поточеными решеточными и алгебраическими операциями.

(15) $C_b(X)$ — пространство непрерывных ограниченных функций $f : X \to \mathbb{R}$, определённых на топологическом пространстве $X$, с поточеными решеточными и алгебраическими операциями.

(16) Векторное пространство $P([a; b])$ — всех действительных полиномов на отрезке $[a; b] \subset \mathbb{R}$ с поточечным порядком *не является векторной*

*решёткой.* Для полиномов $p, q \in P([a;b])$ существует $p \vee q$ лишь тогда, когда либо $p \leqslant q$, либо $q \leqslant p$.

**Определение 1.5.** *Порядковым идеалом* в векторной решётке $E$ называется векторное подпространство $I$ в $E$ такое, что если $x \in E$ и $z \in I$ удовлетворяют неравенству $|x| \leqslant |z|$, то $x \in I$. Каждый порядковый идеал в векторной решётке сам является векторной решёткой. Наименьший порядковый идеал $I(M)$, содержащий непустое множество $M \subset E$, называют *порядковым идеалом, порождённым* $M$. Порядковый идеал вида $E_e := I(\{e\})$, где $e \in E$ называют *главным идеалом.* Если для некоторого $e \in E_+$ выполняется $E = E_e$, то $e$ называют *сильной порядковой единицей* в $E$.

**Определение 1.6.** Порядковый идеал $B$ в векторной решётке $E$ называют *полосой или компонентой*, если $\sup A \in B$ для любого подмножества $A \subset B$, имеющего точную верхнюю границу $\sup A \in E$.

Пересечение непустого семейства полос будет полосой, следовательно, для непустого множества $M \subset E$ существует наименьшая полоса $B(M)$, содержащая M. При этом говорят, что $B(M)$ — полоса, порождённая множеством $M$. Полосу вида $B(x) := B(\{x\})$ называют главной полосой, порождённой элементом $x \in E$.

**Примеры 1.7.**

(1) Каждая из векторных решёток $c_0 \subset l_p \subset l_\infty \subset l_0$ $(0 < p < \infty)$ является идеалом в объемлющей векторной решётке, но не полосой;

(2) Векторная решётка $\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ $(0 < p \leqslant \infty)$ является порядковым идеалом в $\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$, но не полосой;

(3) Векторная решётка $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ $(0 < p \leqslant \infty)$ является порядковым идеалом в $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$, но не полосой;

(4) Рассмотрим пространство с $\sigma$-конечной мерой $(\Omega, \Sigma, \mu)$. Пусть $A \in \Sigma$ — измеримое подмножество и $0 < p \leqslant \infty$. Пусть $B_A$ состоит из классов эквивалентности измеримых функций $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, обращающихся в нуль почти всюду на $A$. Тогда $B_A$ — полоса в $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Наоборот, всякая полоса в $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ имеет вид $B_A$ для измеримого $A \in \Sigma$.

(5) В $C([0,1])$ множество $B := \{f \in C[0,1] : (\forall\ t \in [0,1/2])\ f(t) = 0\}$ является полосой в $C([0,1])$.

(6) В $C([0,1])$ множество $I := \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$ является идеалом в $C([0,1])$, но не полосой. Действительно, положим по определению $f_n(t) := 1 \wedge t$ для всех $t \in [0,1]$. Тогда существует $\sup f_n = \mathbf{1} \in C[0,1]$, однако, $\mathbf{1} \notin I$, где $\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная единице.

(7) Векторная решётка сходящийся последовательностей *$c$ не является порядковым идеалом* в $l_\infty$.

(8) Не является порядковым идеалом подрешётка $C([0;1])$ в $\mathcal{L}^p([0;1])$.

**Определение 1.8.** Дизъюнктное дополнение $M^\perp$ непустого подмножество $M \subset E$ векторной решётки $E$ определяется формулой

$$M^\perp := \{x \in E :\ (\forall y \in M)\ |x| \wedge |y| = 0\}.$$

Положим по определению $M^{\perp\perp} := (M^\perp)^\perp$. Если $e \in E_+$ и $\{e\}^{\perp\perp} = E$ (или, равносильно, $\{e\}^\perp = \{0\}$), то $e$ называют *слабой порядковой единицей* в $E$. Если же $I_e = E$, то говорят, что $e$ — *сильная порядковая единица* в $E$.

**Предложение 1.9.** *Полоса $B(M)$, порождённая непустым подмножеством $M$ векторной решётки $E$, совпадает с $M^{\perp\perp}$. Более того, $M^\perp$ — также полоса в $E$, $M^\perp \cap M^{\perp\perp} = \{0\}$ и $B(M^\perp + M^{\perp\perp}) = E$.*

$\lhd$ См. [2, Теорема 1.39]. $\rhd$

Из предложения следует, что если $B$ — полоса в $E$, то $B^{\perp\perp} = B$.

**Примеры 1.10.**

(1) Рассмотрим векторную решётку $\mathbb{R}^Q$ всех функций $x : Q \to \mathbb{R}$, где $Q \neq \emptyset$ (пример 1.4(2)). Пусть $Q_1 \subset Q$, $Q_1 \neq \emptyset$ и $Q_2 = Q \setminus Q_1$. Положим по определению

$$B_1 := \{f \in \mathbb{R}^Q :\ \forall\ (t \in Q_1)\ f(t) = 0\},$$
$$B_2 := \{f \in \mathbb{R}^Q :\ \forall\ (t \in Q_2)\ f(t) = 0\}.$$

Тогда $B_1 = B_2^\perp$ и $B_1^\perp = B_2$. Действительно, если $f_1 \in B_1$ и $f_2 \in B_2$, то $|f| \wedge |g| = 0$. Отметим, что $\mathbb{R}^Q = B_1 \oplus B_2$.

(2) В примере (1) положим $Q := \mathbb{N}$. Тогда $\mathbb{R}^Q = \mathbb{R}^\mathbb{N} = l_0$ и всякая полоса $B$ в $l_0$ имеет вид: $B = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_0 : \ x_n = 0$ для всех $n \in A\}$, где $A \subset \mathbb{N}$.

**Определение 1.11.** Пусть $B$ — полоса в векторной решётке $E$. Тогда $B^\perp$ — также полоса. Предположим, что $E = B + B^\perp := \{x + y : \ x \in B, \ y \in B^\perp\}$. Тогда $E$ будет прямой суммой подпространств $B$ и $B^\perp$, поскольку выполняется равенство $B \cap B^\perp = \{0\}$. Следовательно, существует линейный проектор $P_B : E \to B$ на подпространство $B$. Проектор $P_B$ называют *порядковым проектором* на полосу $B$, а саму полосу $B$ — *полосой, допускающий проектор*. Проектор на главную полосу $B_e := \{e\}^{\perp\perp}$ называют *главным проектором* и обозначают символом $P_e := P_{\{e\}^{\perp\perp}}$.

**Предложение 1.12.** *Линейный оператор $P : E \to E$ в векторной решётке $E$ будет порядковым проектором в том и только в том случае, когда $P \circ P = P$ и $0 \leqslant Px \leqslant x$ для всех $x \in E_+$. Если $P_B$ и $P_e$ порядковые проекторы на полосу $B$ и главную полосу $B_e$ соответственно, то справедливы формулы*

$$P_B(x) = \sup\{u \in B : 0 \leqslant u \leqslant x\} \quad (x \in E_+);$$
$$P_e(x) = \sup\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in E_+).$$

$\lhd$ См. [2, Теоремы 1.43, 1.44]. $\rhd$

**Определение 1.13.** Векторную решётку $E$ называют *решёткой с проекциями* (*решёткой с главными проекциями*), если каждая полоса (главная полоса) в $E$ допускает порядковый проектор.

**Примеры 1.14.**

(1) Пространство $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ с $\sigma$-конечной мерой $\mu$ являются решёткой с проекциями для любого $0 \leqslant p \leqslant \infty$. Всякий порядковый проектор $P_B$ на полосу $B$ имеет вид: $P_B(f) = f\chi_A$ для всех $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, где $A \in \Sigma$ — измеримое множество, на котором все функции из $B$ обращаются в нуль почти всюду на $A$.

(2) В частности, $l^p = L^p(\mathbb{N}, 2^\mathbb{N}, \mu)$ — решёткой с проекциями для любого $0 \leqslant p \leqslant \infty$, где $\mu$ — считающая мера. Всякий порядковый проектор

$P$ имеет вид: $P(x) = x\chi_A$ для всех $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$, где $A \subset \mathbb{N}$.

(3) Пространство $C([0,1])$ не является решёткой с проекциями. Только тривиальные полосы $\{0\}$ и $C([0,1])$ допускают порядковый проектор. Тем не менее, в $C([0,1])$ существуют нетривиальные полосы, например $B := \{f \in C[0,1] : f(x) = 0 \ \forall x \in [0, 1/2]\}$ является полосой в $C([0,1])$.

**Определение 1.15.** Говорят, что последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в векторной решётке $E$ *равномерно сходится* к элементу $x \in E$ (соответственно, *равномерно фундаментальна*), если существуют такой $e \in E_+$, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать номер $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так, чтобы $|x_n - x| \leqslant \varepsilon e$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ (соответственно, $|x_n - x_m| \leqslant \varepsilon e$ для всех $n, m \geqslant n_\varepsilon$ ). Элемент $e \in E_+$ называют *регулятором сходимости.* Векторную решётку $E$ называют *равномерно полной*, если любая равномерно фундаментальная последовательность в $E$ равномерно сходится к некоторому элементу из $E$.

**Определение 1.16.** Векторную решётку $E$ называют *порядково полной* или *$K$-пространством*, если каждое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю границу. Векторную решётку $E$ называют *порядково $\sigma$-полной* или *$K_\sigma$-пространством*, если каждое непустое ограниченное сверху счётное множество имеет точную верхнюю границу.

**Предложение 1.17.** *Для любой векторной решётки порядковая полнота влечёт порядковую $\sigma$-полноту, а порядковая $\sigma$-полнота влечёт равномерную полноту.*

**Предложение 1.18.** *Всякая порядково полная векторная решётка является решёткой с проекциями, а всякая порядково $\sigma$-полная векторная решётка является решёткой с главными проекциями.*

Отметим, что существуют порядково $\sigma$-полные векторные решётки, которые не являются решёткой с проекциями. Обратно, существуют векторные решётки с проекциями, которые не являются порядково $\sigma$-полными. Также существуют векторные решётки с главными проекциями, не являющимися решётками с проекциями.

**Примеры 1.19.**

(1) $\mathbb{R}^Q$ — множество всех функций $x : Q \to \mathbb{R}$, действующих из непустого множества $Q$ в $\mathbb{R}$, является порядково полной векторной решёткой;

(2) $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ с $\sigma$-конечной мерой $\mu$ является порядково полной векторной решёткой для любого $0 \leqslant p \leqslant \infty$;

(3) $l_p$ является порядково полной векторной решёткой для любого $0 \leqslant p \leqslant \infty$;

(4) $c_0$ — пространство сходящихся к нулю последовательностей является порядково полной векторной решёткой;

(5) Векторная решётка $C([0,1])$ равномерно полна, но не является порядково $\sigma$-полной.

(6) Множество функций на $[0,1]$, принимающие не более чем счётное число различных значений является порядково $\sigma$-полной векторной решёткой, но не является полной.

**Теорема 1.20** (Векслер). *Векторная решётка с проекциями порядково полна в том и только в том случае когда она равномерно полна. Векторная решётка с главными проекциями порядково $\sigma$-полна в том и только в том случае когда она равномерно полна.*

**Теорема 1.21** (Векслер–Гейлер). *Для равномерно полной векторной решётки $E$ имеют место следующие утверждения:*

(1) *$E$ порядково полна в том и только в том случае, если всякое порядково ограниченное сверху дизъюнктное подмножество в $E_+$ имеет точную верхнюю границу;*

(2) *$E$ порядково $\sigma$-полна в том и только в том случае, если всякое порядково ограниченное сверху дизъюнктное счетное подмножество в $E_+$ имеет точную верхнюю границу.*

**Определение 1.22.** Пусть $E$ — векторная решётка и $0 < e \in E$. Элемент $x \in E$ называется *компонентой* $e$, если $x \wedge (e - x) = 0$.

**Определение 1.23.** Элемент $s \in E$ называется *$e$-ступенчатым*, если он представим в виде $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $x_1, \ldots, x_n$ — компоненты $e$ такие, что $x_1 + \ldots + x_n = e$ и $x_i \wedge x_j = 0$ для всех $i \neq j$.

**Теорема 1.24** (Спектральная теорема Фрейденталя). *Пусть $E$ —*

*векторная решётка с главными проекциями и* $0 < e \in E$. *Тогда для любого* $x \in E_e$ *существует возрастающая последовательность* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $e$*-ступенчатых элементов такая, что* $x_n \uparrow x$ *и* $0 \leqslant x - x_n \leqslant \frac{1}{n} e$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

$\lhd$ См. [2, Теорема 2.8]. $\rhd$

## Литература

1. *Вулих Б.З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.:ГИФМЛ, 1961.
2. *Aliprantis C.D., and Burkinshaw O.* Positive Operators, Springer, 2006, 376 p.
3. *Kusraev A.G.* Dominated Operators, Springer, 2000, 446 p.
4. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices, Berlin etc.: Springer, 1991, 395 p.
5. *Zaanen A.C.* Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces, Springer, 1997, 312 p.

**Лекция №2.** Регулярные и порядково ограниченные операторы.

В данной лекции рассматрим следующие темы: теорема Рисса-Канторовича и её обращения, пространство порядково ограниченных операторов; теорема Хана-Банаха-Канторовича о мажорированном продолжении, пространство порядково непрерывных операторов. Подробное изложение теории векторных решёток и операторов в них можно найти в монографиях [1, 2, 3, 4, 5].

Всюду далее $E$ и $F$ — векторные решётки. Символом $L(E, F)$ будем обозначать пространство всех линейных операторов из $E$ в $F$. Как обычно, $E_+ := \{x \in E : x \geqslant 0\}$.

Множество $A \subset E$ называется *порядково ограниченным*, если найдутся такие элементы $a, b \in E$, что $A$ содержится в *порядковом отрезке* $[a, b] := \{x \in E : a \leqslant x \leqslant b\}$.

**Определение 2.1.** Линейный оператор $T : E \to F$ именуют:

(1) *положительным* и пишут $T \geqslant 0$, если $T(E_+) \subset F_+$;

(2) *регулярным*, если $T = T_1 - T_2$, где $T_1$, $T_2 \geqslant 0$;

(3) *порядково ограниченным*, если $T$ отображает каждое порядково ограниченное множество в $E$ в порядково ограниченное множество в $F$.

Всякий положительный оператор $T : E \to F$ возрастает, т.е. если $T \geqslant 0$ и $x \leqslant y$, то $Tx \leqslant Ty$ для всех $x, y \in E$ (Действительно, имеем $y - x \geqslant 0$ и в виду положительности и линейности $T$ выполняются соотношения $T(y) - T(x) = T(y - x) \geqslant 0$, т.е. $Tx \leqslant Ty$). Следовательно, $T([x, y]) \subset [Tx, Ty]$ для всех $x, y \in E$, т.е. *каждый положительный оператор порядково ограничен.*

Если оператор $T$ регулярен, т.е. $T = T_1 - T_2$, $T_1, T_2 \geqslant 0$, то выполняются соотношения

$$T([x, y]) = T_1([x, y]) - T_2([x, y]) = T_1([x, y]) + T_2([-y, -x]) \subset$$
$$[T_1x, T_1y] + [-T_2y, -T_2x] \subset [T_1x - T_2y, T_1y - T_2x].$$

Таким образом, *каждый регулярный оператор порядково ограничен.*

Множества всех регулярных, порядково ограниченных и положительных операторов из $E$ в $F$ обозначают соответственно символами $L^r(E,F)$, $L^\sim(E,F)$, и $L^+(E,F)$. Множества $L^r(E,F)$ и $L^\sim(E,F)$ являются подпространствами в $L(E,F)$ и ввиду сказанного выше, справедливы соотношения

$$L^+(E,F) \subset L^r(E,F) \subset L^\sim(E,F) \subset L(E,F).$$

Отношение порядка в $L^\sim(E,F)$, а также в его подпространстве $L^r(E,F)$ вводится с помощью конуса положительных операторов $L^+(E,F)$, т. е. по правилу $S \geqslant T \Leftrightarrow S - T \in L^+(E,F)$. Таким образом, $L^r(E,F)$ — *упорядоченное векторное подпространство* в $L^\sim(E,F)$.

Включение $L^r(E,F) \subset L^\sim(E,F)$ может оказаться строгим.

**Пример 2.2** (Лотц). Существует порядково ограниченный оператор, не являющийся регулярным. Пусть $T : C[-1,1] \to C[-1,1]$ — оператор, действующий по формуле

$$Tf(t) := f\Big(\sin\frac{1}{t}\Big) - f\Big(\sin(t+\frac{1}{t})\Big) \quad (f \in C[-1,1]),$$

при $0 < |t| \leqslant 1$ и $Tf(0) = 0$. Заметим, что из равномерной непрерывности $f$ и неравенства $|\sin\frac{1}{t} - \sin(t+\frac{1}{t})| \leqslant |t|$ вытекает непрерывность $Tf$ в нуле, следовательно, $Tf \in C([-1;1])$ для всех $f \in C[-1,1]$. Кроме того, $T([-\mathbf{1},\mathbf{1}]) \subset 2[-\mathbf{1},\mathbf{1}]$, где $\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная единице на $[-1,1]$. Поэтому оператор $T$ порядково ограничен. В то же время $T$ не является регулярным, см. [2, Пример 1.16].

**Пример 2.3** (Каплан). Существует регулярный оператор, не имеющий модуля. Пусть $c$ — векторная решётка всех сходящихся последовательностей. Рассмотрим два оператора $S, T : c \to$ , определённые следующим образом:

$$S(x_1, x_2, \dots) := (x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, \dots)$$
$$T(x_1, x_2, \dots) := (x_1, x_1, x_3, x_3, x_5, x_5, \dots)$$

Тогда $S$ и $T$ — линейные положительные операторы, а регулярный оператор $S - T$ не имеет модуля. Подробности см. [2, Пример1.17].

**Теорема 2.4** (Рисса-Канторовича). *Пусть $E$ и $F$ — векторные решётки, причём $F$ порядково полна. Тогда $L^{\sim}(E,F) = L^r(E,F)$, т. е. всякий порядково ограниченный оператор из $E$ в $F$ регулярен. Более того, в этом случае пространство $L^r(E,F)$ является порядково полной векторной решёткой и для любых $x \in E_+$ и $S, T \in L^{\sim}(E,F)$ имеют место следующие формулы:*

$$(S \vee T)x = \sup\{Sx_1 + Tx_2 : x_1, x_2 \geqslant 0, x = x_1 + x_2\};$$

$$(S \wedge T)x = \inf\{Sx_1 + Tx_2 : x_1, x_2 \geqslant 0, x = x_1 + x_2\};$$

$$S^+x = \sup\{Sy : 0 \leqslant y \leqslant x\};$$

$$S^-x = -\inf\{Sy : 0 \leqslant y \leqslant x\};$$

$$|S|x = \sup\{|Sy| : |y| \leqslant x\}.$$

$\lhd$ См. [2, Теорема 1.18]. $\rhd$

**Примеры 2.5.**

(1) Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор, определяемый матрицей $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m,n}$. Тогда $T$ положителен тогда и только тогда, когда положительна матрица $A$, $a_{ij} \geqslant 0$. Более того, существуют операторы $T^+$, $T^-$, $|T|$ и определяются соответственно матрицами $A^+$, $A^-$, $|A|$:

$$A^+ = (a_{ij}^+)_{i=1,j=1}^{m,n}, \quad A^- = (a_{ij}^-)_{i=1,j=1}^{m,n}, \quad |A| = (|a_{ij}|)_{i=1,j=1}^{m,n},$$

где $a_{ij}^+ = a_{i,j} \vee 0 = \max\{a_{i,j}, 0\}$, $a_{ij}^- = a_{i,j} \wedge 0 = \min\{a_{i,j}, 0\}$. Таким образом, $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = L^{\sim}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = L^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(2) Пусть $E := \mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma)$ — пространство всех $\Sigma$-измеримых функций на непустом множестве $\Omega$. Зафиксируем функцию $g \in E$ и положим по определению $T_g(f) = gf$ для всех $f \in E$. Тогда $T_g \in L^{\sim}(E,E)$ и справедливы равенства $T_g^+ = T_{g^+}$, $T_g^- = T_{g^-}$, $|T_g| = T_{|g|}$.

(3) Пусть $E \subset L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $F \subset L^0(\Omega', \Sigma', \mu')$ — идеальные подпространства. Оператор $T_k : E \to F$ называется *интегральным*, если существует функция $k \in L^0(\Omega \times \Omega', \Sigma \otimes \Sigma', \mu \otimes \mu')$ такая, что справедливо представление

$$(T_k x)(t) = \int_\Omega k(s,t)x(s)d\mu(s) \quad (x \in E, \text{ для почти всех } t \in \Omega')$$

Тогда справедливы равенства $|T_k| = T_{|k|}$, $T_k^+ = T_{k^+}$, $T_k^- = T_{k^-}$.

**Теорема 2.6** (Абрамовича). *Пусть $E$ и $F$ — векторные решётки, причём $F$ порядково полна и $E$ обладает свойством главных проекций. Тогда $L^\sim(E,F) = L^r(E,F)$ является порядково полной векторной решёткой и для любых $x \in E_+$ и $S$, $T \in L^\sim(E,F)$ имеют место следующие формулы:*

$$(S \vee T)x = \sup\{Sx_1 + Tx_2 : x_1 \wedge x_2 = 0, x = x_1 + x_2\};$$
$$(S \wedge T)x = \inf\{Sx_1 + Tx_2 : x_1 \wedge x_2 = 0, x = x_1 + x_2\}.$$

$\lhd$ См. [2, Теорема 1.50]. $\rhd$

**Теорема 2.7.** *Для векторной решётки $F$ равносильны условия:*

(1) *$F$ порядково полна;*

(2) *для любой векторной решётки $E$ каждый порядково ограниченный оператор из $E$ в $F$ является регулярным и $L^r(E,F)$ — порядково полная векторная решётка;*

(3) *для любой векторной решётки $E$ каждый порядково ограниченный оператор из $E$ в $F$ является регулярным и $L^r(E,F)$ — векторная решётка.*

**Определение 2.8.** Пусть $X$ — произвольное множество, $(A, \leqslant)$ — направленное множество, т.е. частично упорядоченное, в котором для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ найдется элемент $\alpha_3 \in A$ такой, что $\alpha_3 \geqslant \alpha_1$ и $\alpha_3 \geqslant \alpha_2$. Пусть каждому $\alpha \in A$ поставлено в соответствие единственный элемент $x_\alpha \in X$. Тогда отображение $\alpha \mapsto x_\alpha$ *называется сетью* и обозначается символом $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ или $(x_\alpha)$. Сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ называется *возрастающей (убывающей)*, если $x_\alpha \leqslant x_\beta$ (соответственно $x_\beta \leqslant x_\alpha$) при $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in A$.

**Определение 2.9.** Говорят, что сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ в векторной решётке $E$ *порядково сходится или $o$-сходится* к $x \in E$, если существует убывающая сеть $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ с тем же индексным множеством $A$ такая, что $|x_\alpha - x| \leqslant y_\alpha \downarrow 0$. Запись $y_\alpha \downarrow 0$ означает, что сеть $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ убывающая и $\inf\{y_\alpha : \alpha \in A\} = 0$. В этом случае элемент $x$ называют *порядковым пределом* или *$o$-пределом* сети $(x_\alpha)$ и пишут $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ или $x = o\text{-}\lim x_\alpha$.

Из сходимости с регулятором (см. определение 1.15) следует порядковая сходимость. Обратное не верно в общем случае.

**Примеры 2.10.**

(1) В пространстве $l_\infty$ рассмотрим последовательность $((x_{nk})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ такую, что $x_{nk} = 0$ при $k \leqslant n$ и $x_{nk} = 1$ при $k > n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $x_n \downarrow 0$, т.е. $(x_n)$ порядково сходится к нулю в $l_\infty$, но не сходится равномерно.

(2) В пространстве $l_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ последовательность $((x_{nk})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}} \subset l_p$ порядково сходится к элементу $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l_p$ тогда и только тогда, когда она порядково ограничена и сходится для каждого $k \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$, т.е. существует $0 \leqslant (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l_p$ такая, что $|x_{nk}| \leqslant y_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$, также выполняется $x_k = \lim_{n\to\infty} x_{nk} \in \mathbb{R}$ для каждого $k \in \mathbb{N}$.

(3) Пусть $(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство с $\sigma$-конечно мерой. Тогда в пространстве $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ последовательность $(f_n)$ порядково сходится к $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ тогда, когда найдётся $g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ такая, что $f_n \leqslant g$ $\mu$-п.в. и $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

**Определение 2.11.** Оператор $T : E \to F$ между векторными решётками $E$ и $F$ называется:

$(a)$ *порядково непрерывным*, если $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$ для любой сети $(x_\alpha) \subset E$, порядково сходящейся к $x \in E$;

$(b)$ *порядково $\sigma$-непрерывным*, если $Tx_n \xrightarrow{o} Tx$ для любой последовательности $(x_n) \subset E$, порядково сходящейся к $x \in E$.

Пусть $E$ и $F$ — векторные решётки. Обозначим символом $L_n^\sim(E, F)$ множество всех порядково ограниченных порядково непрерывных операторов, $L_\sigma^\sim(E, F)$ — множество всех порядково ограниченных порядково $\sigma$-непрерывных операторов.

Ясно, что каждый порядково непрерывный оператор порядково $\sigma$-непрерывен, т.е. $L_n^\sim(E, F) \subset L_c^\sim(E, F)$. Обратное, вообще говоря, неверно.

**Пример 2.12.** Пусть $\mathcal{L}^1([0, 1])$ — векторная решётка интегрируемых по Лебегу функций (не классы эквивалентности). Положим по опреде-

лению
$$T(f) := \int_0^1 f(x)d\mu$$
для всех $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$. Тогда $T : \mathcal{L}^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ — линейный положительный функционал. $T$ порядково $\sigma$-непрерывен в силу теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Однако, $T$ не является порядково непрерывным. Действительно, обозначим через $\mathcal{F}$ семейство всех конечных подмножеств в $[0,1]$. Отметим, что $\mathcal{F}$ — направленное множество относительно включения. Тогда $\{\chi_\alpha : \alpha \in \mathcal{F}\}$ представляет собой сеть в $\mathcal{L}^1([0,1])$ такая, что $\chi_\alpha \uparrow \mathbf{1}$, т.е. $\{\chi_\alpha : \alpha \in \mathcal{F}\}$ возрастает и $\sup\{\chi_\alpha : \alpha \in \mathcal{F}\} = \mathbf{1}$ ($\equiv$ функция, тождественно равная единице). С другой стороны, $T(\chi_\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{F}$. Таким образом, $\chi_\alpha \xrightarrow{o} \mathbf{1}$, но $T(\chi_\alpha) \xrightarrow{o} 0 \neq T(\mathbf{1}) = 1$.

**Теорема 2.13.** *Пусть $E$ и $F$ — векторные решётки, $F$ порядково полна. Тогда $L^\sim_n(E,F)$ и $L^\sim_c(E,F)$ являются полосами в $L^\sim(E,F)$.*

$\lhd$ См. [2, Теорема 1.57]. $\rhd$

В условиях предыдущей теоремы $L^\sim_n(E,F)$ и $L^\sim_c(E,F)$ — полосы в порядково полной векторной решётке $L^\sim(E,F)$, следовательно, $L^\sim_n(E,F)$ и $L^\sim_c(E,F)$ допускают порядковые проекторы, т.е. справедливы равенства

$$L^\sim(E,F) = L^\sim_n(E,F) \oplus L^\sim_n(E,F)^\perp,$$
$$L^\sim(E,F) = L^\sim_c(E,F) \oplus L^\sim_c(E,F)^\perp.$$

Таким образом всякий оператор $T \in L^\sim(E,F)$ имеет представления $T = T_n + T_n^\perp$ и $T = T_c + T_c^\perp$ где $T_n \in L^\sim_n(E,F)$ и $T_c \in L^\sim_c(E,F)$.

**Теорема 2.14.** *Пусть $E$ и $F$ — векторные решётки, $F$ порядково полна и $T \in L^\sim(E,F)_+$. Справедливы равенства*

$$T_n(x) = \inf\{\sup T(x_\alpha) : \ 0 \leqslant x_\alpha \uparrow x\},$$
$$T_c(x) = \inf\{\sup T(x_n) : \ 0 \leqslant x_n \uparrow x\}$$

*для всех $x \in E_+$.*

$\lhd$ См. [2, Теорема 1.59]. $\rhd$

**Примеры 2.15.**

(1) $L_c^\sim(C[0,1], L^p[0,1]) = \{0\}$ для любого $1 < p < \infty$ ([2, Пример 1.58]).

(2) $L_c^\sim(L^p[0,1], \mathbb{R}) = L_n^\sim(L^p[0,1], \mathbb{R}) \simeq L^q[0,1]$ для любого $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$.

Далее рассмотрим обобщение классической теоремы Хана–Банаха о продолжении на тот случай, когда вместо функционалов рассматриваются операторы со значениями в порядково полной векторной решётке.

Всюду далее $X$ — действительное векторное пространство, $E$ — упорядоченное векторное пространство и $L(X, E)$ — пространство всех линейных операторов из $X$ в $E$.

**Определение 2.16.** Оператор $p : X \to E$ называют *сублинейным*, если он *субаддитивен* и *положительно однороден*, т. е. для всех $x, y \in X$ и $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}$ выполнены условия

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y); \quad p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

Пусть $p : X \to E$ — сублинейный оператор. *Опорным множеством* сублинейного оператора $p$ называется множество

$$\partial p := \{T \in L(X, E) : (\forall x \in X)\ Tx \leqslant p(x)\}.$$

**Теорема 2.17** (Хан–Банах–Канторович). *Пусть $X$ — векторное пространство, $X_0$ — подпространство в $X$, $E$ — порядково полная векторная решётка, $p : X \to E$ — сублинейный оператор, $T_0 : X_0 \to E$ — линейный оператор такой, что $T_0 x \leqslant p(x)$ для всех $x \in X_0$. Тогда существует линейный оператор $T : X \to E$, удовлетворяющий следующим условиям:*

*(1) $T_0 x = Tx$ для всех $x \in X_0$, т.е. $T$ является продолжением $T_0$;*

*(2) $T(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$, т.е. $T \in \partial p$.*

$\lhd$ Доказательство можно найти в [2, Теорема 1.25]. $\rhd$

**Следствие 2.18.** *Пусть $X$ — векторное пространство, $E$ — порядково полная векторная решётка и $p : X \to E$ — сублинейный оператор. Тогда для произвольной точки $x_0 \in X$ существует такой линейный* *оператор* $T : X \to E$, *что* $Tx_0 = p(x_0)$ *и* $Tx \leqslant p(x)$ *для всех* $x \in X$. *В частности, справедлива формула*

$$p(x) = \sup\{Tx : T \in \partial p\} \quad (x \in X).$$

Теорема Хана–Банаха–Канторовича допускает обращение следующим образом.

**Теорема 2.19** (Бонайс–Сильверман–Ту). *Пусть* $E$ *— упорядоченное векторное пространство,* $X$ *— векторное пространство,* $X_0$ *— подпространство в* $X$, $T_0 : X_0 \to E$ *— линейный оператор такой, что* $T_0x \leqslant p(x)$ *для всех* $x \in X_0$. *Если для любых таких* $X$, $X_0$, $T_0$, $p$ *существует оператор* $T \in \partial p$, *являющийся продолжением* $T_0$ *с подпространства* $X_0$ *на всё* $X$, *то* $E$ *является порядково полной векторной решёткой.*

$\lhd$ Доказательство можно найти в [6, Теоремы 1.4.10 и 1.4.13]. $\rhd$

## Литература


1. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.:ГИФМЛ, 1961.
2. *Aliprantis C.D., and Burkinshaw O.* Positive Operators, Springer, 2006, 376 p.
3. *Kusraev A.G.* Dominated Operators, Springer, 2000, 446 p.
4. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices, Berlin etc.: Springer, 1991, 395 p.
5. *Zaanen A.C.* Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces, Springer, 1997, 312 p.
6. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление: Теория и приложения.—М.: Наука, 2007.

**Лекция №3.** Банаховы решётки.

В данной лекции рассмотрим следующие понятия: банаховы решётки, сопряжённая банахова решётка, AM, AL, KB-пространства, порядковая непрерывность нормы, свойства Леви и Фату. Подробное изложение теории векторных решёток и операторов в них можно найти в монографиях [1, 2, 3, 4, 5].

**Определение 3.1.** Норму $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ векторной решётке $E$ называют *монотонной*, если $|x| \leqslant |y|$ следует $\|x\| \leqslant \|y\|$ для всех $x, y \in E$.

**Определение 3.2.** Пусть $E$ — векторная решётка, $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$. Пару $(E, \|\cdot\|)$ называют *нормированной решёткой*. *Банаховой решёткой* называют нормированную решётку, полную по норме.

В каждой нормированной решётке $E := (E, \|\cdot\|)$ выполняется равенство $\|x\| = \||x|\|$ для всех $x \in E$.

**Примеры 3.3.**

(1) Пространство $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ с нормой $\|\cdot\|_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p} \quad (x = (x, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n).$$

является банаховой решёткой.

(2) Векторная решётка непрерывных функций $C(Q)$ на компактном топологическом пространстве $Q$, снабжённое нормой

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x(q)| : \ q \in Q\} \quad (x \in C(Q)),$$

является банаховой решёткой.

(3) Пространство ограниченных последовательностей $l_\infty$ с нормой

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| \quad (x = (x_n) \in l_\infty)$$

является банаховой решёткой. Банаховыми решётками будут подрешетки сходящихся последовательностей $c$ и сходящихся к нулю последовательностей $c_0$ с индуцированной из $l_\infty$ нормой. Таким образом,

$$(c_0, \|\cdot\|_\infty) \subset (c, \|\cdot\|_\infty) \subset (l_\infty, \|\cdot\|_\infty).$$

(4) Векторная решётка $l_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ абсолютно сходящихся со степенью $p$ последовательностей является банаховой решёткой относительно нормы, определяемой формулой

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p} \quad (x = (x_n) \in l_p).$$

(5) Векторная решётка $L^p(\mu) := L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — классов эквивалентности интегрируемых со степенью $p$ $\Sigma$-измеримых функций является банаховой решёткой относительно нормы

$$\|f\|_p := \Big(\int_{\Omega} |f|^p d\mu\Big)^{1/p} \quad (f \in L^p(\mu)).$$

(6) Векторная решётка $L^{\infty}(\Omega, \Sigma, \mu)$ $(0 < p < \infty)$ классов эквивалентности существенно ограниченных $\Sigma$-измеримых функций является банаховой решёткой относительно нормы

$$\|f\|_{\infty} := \operatorname{esssup} |f| = \inf\{a \in \mathbb{R}_+ : \mu(\{|f| > a\}) = 0\} \quad (f \in L^{\infty}(\mu)).$$

(7) Если рассмотреть $C(Q)$ с $L_1$-нормой $\|x\|_1 := \int_Q |x(q)| d\mu(q)$, где $\mu$ — какая-нибудь регулярная борелевская мера на $Q$, то $(C(Q), \|\cdot\|_1)$ — нормированная решётка, но *не является банаховой решёткой.*

**Предложение 3.4.** *В каждой нормированной решётке $E$ справедливы следующие утверждения:*

(1) *отображения $(x, y) \to x \vee y$ и $(x, y) \to x \wedge y$ из $E \times E$ в $E$ непрерывны. В частности непрерывны отображения $x \to x^+$, $x \to x^-$ и $x \to |x|$ из $E$ в $E$ непрерывны;*

(2) *конус положительных элементов $E_+$ замкнут норме;*

(3) *замыкание подрешетки (порядкового идеала) является подрешеткой (порядковым идеалом);*

(4) *дизъюнктное дополнение любого непустого множества замкнуто и, в частности, любая полоса замкнута.*

$\lhd$ Доказательство можно найти в [1, Теоремы VII.1.2 и VII.1.3]. $\rhd$

Напомним, что подмножество $A$ в векторной решётке $E$ называется порядково ограниченным, если найдутся такие элементы $a, b \in E$, что $A$ содержится в порядковом отрезке $[a, b] := \{x \in E : a \leqslant x \leqslant b\}$.

**Определение 3.5.** Пусть $E$ — векторная решётка. Линейный функционал $f : E \to \mathbb{R}$ *называют порядково ограниченным*, если образ $f(A)$ любого порядково ограниченного множества $A \subset E$ порядково ограничен в $\mathbb{R}$. Пространство всех порядково ограниченных функционалов называют *порядково сопряжённым* и обозначают символом $E^\sim := L^\sim(E, \mathbb{R})$.

**Предложение 3.6.** *Пусть $E$ — векторная решётка. Тогда порядково сопряжённое пространство $E^\sim$ является порядково полной векторной решёткой. Решеточные операции в $E$ вычисляются по формулам Рисса-Канторовича:*

$$
\begin{gathered}
(f \vee g)x = \sup\{f(x_1) + g(x_2) : x, x2 \geqslant 0, x = x_1 + x_2\}; \\
(f \wedge g)x = \inf\{f(x_1) + g(x_2) : x_1, x_2 \geqslant 0, x = x_1 + x_2\}; \\
f^+(x) = \sup\{f(y) : 0 \leqslant y \leqslant x\}; \\
f^- x = -\inf\{f(y) : 0 \leqslant y \leqslant x\}; \\
|f|x = \sup\{|f(y)| : |y| \leqslant x\} \quad (f, g \in E^\sim).
\end{gathered}
$$

$\lhd$ См. Теорема 2.4. $\rhd$

Для нормированной решётки $(E, \|\cdot\|)$ символом $(E', \|\cdot\|_{E'})$ обозначают банахово пространство всех *непрерывных по норме* линейных функционалов на $E$ *с равномерной нормой*, заданной по формуле

$$
\|x'\|_{E'} := \sup\{|x'(x)| : \ \|x\| \leqslant 1\}.
$$

**Теорема 3.7.** *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — нормированная решётка. Имеют место следующие утверждения:*

(1) *$E'$ является порядковым идеалом в $E^\sim$;*

(2) *$(E', \|\cdot\|_{E'})$ — порядково полная банахова решётка;*

(3) *если $(E, \|\cdot\|)$ — банахова решётка, то $E' = E^\sim$.*

$\lhd$ См. [2, Теорема 4.71]. $\rhd$

**Определение 3.8.** Норма в нормированной решётке $E$ называется *порядково непрерывной*, если каждая убывающая к нулю сеть $x_\alpha \downarrow 0$ сходится к нулю по норме. Говорят, что векторная решётка $(E, \|\cdot\|)$ *порядково непрерывна* или *обладает свойством $A$* и пишут $E \in (A)$, если $\|\cdot\|$ — порядково непрерывная норма. Если указанное условие выполняется лишь для последовательностей, то говорят, что $E$ *порядково $\sigma$-непрерывна.*

**Теорема 3.9.** *Для произвольной банаховой решётки $E$ равносильны следующие утверждения:*

(1) *норма в $E$ порядково непрерывна;*

(2) *$E$ порядково полна и порядково $\sigma$-непрерывна;*

(3) *$E$ порядково $\sigma$-полна и порядково $\sigma$-непрерывна;*

(4) *всякая монотонная порядково ограниченная последовательность в $E$ сходится;*

(5) *любая порядково ограниченная дизъюнктная последовательность положительных элементов в $E$ сходится к нулю.*

$\lhd$ См. [2, Теоремы 4.9 и 4.14]. $\rhd$

**Примеры 3.10.**

(1) Банахова решётки $c_0$ порядково непрерывна;

(2) Всякая рефлексивная банахова решётка порядково непрерывна. В частности, банахова решётка $l_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ порядково непрерывна.

(2) Банахова решётка $l_\infty$ не является порядково непрерывной.

$\lhd$ Действительно, пусть последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty = ((x_{nk})_{k=1}^\infty)_{n=1}^\infty \subset l_\infty$ такая, что $x_{nk} = 0$ при $k \leqslant n$ и $x_{nk} = 1$ при $k > n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда то последовательность $(x_n) \subset l_\infty$ убывает и $\inf x_n = 0$, но то же время $\|x_n\|_\infty = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $x_\alpha \downarrow 0 \Rightarrow \lim_\alpha \|x_\alpha\| = 1$. Следовательно, $l_\infty$ не является порядково непрерывной. $\rhd$

(3) Пусть $(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство с $\sigma$-конечно мерой и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда банахова решётка $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ порядково непрерывна

(4) Банаховы решётки $L^\infty[a, b]$ и $C[a, b]$ не являются порядково непрерывными.

**Определение 3.11.** Пусть $E$ — векторная решётка. Каждый элемент $x \in E$ определяет порядково ограниченный функционал $\hat{x} \in (E^{\sim})^{\sim}$ по формуле $\hat{x} : f \mapsto f(x)$ для всех $f \in E^{\sim}$. Отображение $\iota : x \mapsto \hat{x}$, сопоставляющее каждому элементу $x \in E$ функционал $\hat{x} \in (E^{\sim})^{\sim}$ называют *каноническим вложением* во второе порядково сопряжённое пространство. При этом $\iota(E)$ векторной подрешёткой в $E^{\sim\sim}$. Если $E$ — банахова решётка, то $E' = E^{\sim}$, следовательно, $(E^{\sim})^{\sim} = E^{''}$ и тогда $\iota : E \mapsto E^{''}$ и $\iota(E)$ является банаховой подрешёткой в $E^{''}$.

**Определение 3.13.** Пусть $E$ — векторная решётка. Линейный функционал $f \in E^{\sim}$ называют *порядково непрерывным*, если $\lim_{\alpha} f(x_{\alpha}) = 0$ для каждой убывающей к нулю сети $(x_{\alpha}) \subset E_{+}$, $x_{\alpha} \downarrow 0$. Множество всех порядково непрерывных линейных функционалов $E_n^{\sim}$ является полосой в $E^{\sim}$. Если $E$ — банахова решётка, то $E' = E^{\sim}$, следовательно $E_n^{\sim} = E_n'$.

**Определение 3.12.** Банаховы решётки $E$ и $F$ называют *решеточно изоморфными*, если существует решеточный изоморфизм одной из них на другую. Скажем, что $E$ и $F$ *банахово изоморфны*, если они изоморфны как банаховы пространства, т.е. существует линейная биекция $T$ между $E$ и $F$ такая, что $T$ и $T^{-1}$ непрерывны.

**Теорема 3.14.** *Для произвольной банаховой решётки $E$ равно сильны следующие утверждения:*

(1) *норма в $E$ порядково непрерывна;*

(2) *каждый непрерывный по норме линейный функционал на $E$ порядково непрерывен, т.е. $E' = E_n'$;*

(3) *всякий порядковый интервал в $E$ $(E, E')$-компактен;*

(4) *каноническое вложение $\iota : E \mapsto E^{''}$ отображает $E$ на порядковый идеал в банаховой решетке $E^{''}$;*

(5) *любой порядковый проектор в $E'$ $(E', E)$-непрерывен;*

(6) *любая полоса в $E'$ $(E', E)$-замкнута.*

(7) *в $E$ нет подрешетки, решеточно изоморфной $l_{\infty}$;*

(8) *в $E$ нет подпространства, банахово изоморфного $l_{\infty}$.*

$\lhd$ См. [4, Теорема 2.4.2] [2, Теорема 4.456]. $\rhd$

**Определение 3.15.** Норму в нормированной решётки $E$ называют *нормой Фату*, если для любой возрастающей сети $(x_\alpha) \subset E_+$ из того, что существует $x = \sup x_\alpha$ следует $\lim_\alpha \|x_\alpha\| = \|x\|$. Говорят, что векторная решётка $(E, \|\cdot\|)$ *обладает свойством Фату* и пишут $E \in (C)$, если $\|\cdot\|$ — норма Фату.

**Определение 3.16.** Норму в нормированной решётки $E$ называют *нормой Леви*, если любая ограниченная по норме возрастающая сеть $(x_\alpha) \subset E_+$, $\sup_\alpha \|x_\alpha\| < \infty$ имеет $\sup_\alpha x_\alpha \in E_+$. Говорят, что векторная решётка $(E, \|\cdot\|)$ *обладает свойством Леви* и пишут $E \in (B)$, если $\|\cdot\|$ — норма Леви. Нормированную решётку $E$ с нормой Леви также называют *монотонно полной*

**Примеры 3.17.**

(1) Всякая что рефлексивная банахова решётка обладает свойством Леви и Фату;

(2) $l_1$ представляет собой банахову решётку со свойством Леви и Фату, которая не является рефлексивной;

(3) Нормированная решётка с нормой Леви является порядков полной банаховой решёткой. Однако, $c_0$ представляет собой пример порядково полной банаховой решётки без свойства Леви;

(4) Всякая порядково непрерывная норма является нормой Фату, так как возрастающая последовательность сходится по норме к своему супремуму. В частности, свойством Фату обладают банаховы решётки $L_p(\mu)$ и $l_p$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а также $c_0$.

(5) Каждое $AM$-пространство с единицей обладает свойством Фату. В частности, свойством Фату обладают $l_\infty, L^\infty(0;1)$ и $C([0;1])$, но не имеет поряково непрерывную норму.

(6) Банахова решётка $C([0;1])$ обладает свойством Фату, но не обладает свойством Леви.

**Определение 3.18.** Банахову решётку $E$ называют пространством *Канторовича–Банаха* или *$KB$-пространством*, если в $E$ сходится каждая возрастающая ограниченная по норме последовательность положительных элементов:

$$x_n \in E,\ 0 \leqslant x_n \uparrow,\ \sup_n \|x_n\| < \infty \Rightarrow (\exists\, x \in E)\ \lim_n x_n = x.$$

**Определение 3.19.** Банахово пространство $X$ называется *слабо секвенциально полным*, если всякая последовательность Коши относительно слабой топологии $w = \sigma(X, X')$ сходится в этой же топологии к некоторому элементу $x \in X$.

**Теорема 3.20.** *Для банаховой решётки $E$ равносильны условия:*

(1) *$E$ является $KB$-пространством;*

(2) *$E$ порядково непрерывна и обладает свойством Леви;*

(3) *каноническое вложение $\iota : E \to E''$ отображает $E$ на полосу $(E')_n^\sim$ в банаховой решётке $E''$, т.е $\iota(E) = (E')_n^\sim$;*

(4) *$E$ слабо секвенциально полна;*

(5) *в $E$ нет подпространства, банахово изоморфного $c_0$;*

(6) *в $E$ нет подрешетки, решеточно изоморфного $c_0$.*

$\lhd$ См. [2, Теорема 4.60]. $\rhd$

**Примеры 3.21.**

(1) Всякая рефлексивная банахова решётка является $KB$-пространством, в частности $l_p$ и $L^p(\mu)$ — $KB$-пространства при всех $1 < p < \infty$;

(2) Всякое $AL$-пространство является $KB$-пространством (см. определение ниже), в частности $l_1$ и $L^1(\mu)$ — $KB$-пространства;

(3) $c_0,\ l_\infty,\ L^\infty(\mu),\ C[0,1]$ не являются $KB$-пространствами.

**Определение 3.22.** Банахову решётку $E$ называют $AM$-пространством, если $\|x \vee y\| = \|x\| \vee \|x\|$ для любых $x, y \in E_+$. Равносильное определение получится, если потребовать, чтобы указанное равенство выполнялось для всех $x, y \in E$ с дополнительным условием $x \wedge y = 0$. Если единичный шар $B_E$ в $AM$-пространстве $E$ содержит наибольший элемент $e$, то $e$ — сильная порядковая единица (см. определение 1.15), а единичный шар совпадает с порядковым интервалом $[-e; e] = B_E$. В этом случае $E$ именуют *$AM$-пространством с единицей*, а норма определяется формулой $\|x\| = \inf\{\lambda \geqslant 0 :\ |x| \leqslant \lambda e\}$ для всех $x \in E$.

**Определение 3.23.** Банахову решётку $E$ называют $AL$-пространством, если $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ для любых $x, y \in E_+$. Равносильное определение получится, если потребовать, чтобы указанное равенство выполнялось для всех $x, y \in E$ дополнительным условием $x \wedge y = 0$.

**Теорема 3.24** *Для банаховой решётки $E$ верны утверждения:*

(1) *$E$ будет $AL$-пространством в том и только в том случае, когда $E'$ является $AM$-пространством с единицей.*

(2) *$E$ будет $AM$-пространством в том и только в том случае, когда $E'$ является $AL$-пространством.*

$\lhd$ См. [2, Теорема 4.23]. $\rhd$

**Теорема 3.25** (Какутани). *Если $E$ — некоторое $AL$-пространство, то существует пространство с мерой $(\Omega, \Sigma, \mu)$ такое, что $E$ изометрически и решеточно изоморфна банаховой решетке $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$.*

$\lhd$ См. [4, Теорема 2.7.1]. $\rhd$

**Теорема 3.26** (Какутани–Бохненбласт–М.Крейн–С.Крейн). *Банахова решётка $E$ является $AM$-пространством с единицей тогда и только тогда, когда существует компакт $\Omega$ такой, что $E$ изометрично решёточно изоморфно $C(\Omega)$.*

*В частности, $E$ является $AM$-пространством тогда и только тогда, когда $E$ изометрично решёточно изоморфно некоторой банаховой подрешётке в $C(\Omega)$.*

$\lhd$ См. [2, Теорема 4.29]. $\rhd$

## Литература


1. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.:ГИФМЛ, 1961.
2. *Aliprantis C.D., and Burkinshaw O.* Positive Operators, Springer, 2006, 376 p.
3. *Kusraev A.G.* Dominated Operators, Springer, 2000, 446 p.
4. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices, Berlin etc.: Springer, 1991, 395 p.
5. *Zaanen A.C.* Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces, Springer, 1997, 312 p.

**Лекция №4.** Банаховы решётки.

В данной лекции рассмотрим следующие вопросы: регулярная и равномерная норма операторов в банаховых решетках, банахова решётка регулярных операторов. Подробное изложение теории векторных решёток и операторов в них можно найти в монографиях [1, 2, 3, 4, 5].

Пусть $E$ и $F$ — нормированные решётки. Обозначим символом $L(E, F)$ пространство всех ограниченных по норме ($\equiv$ непрерывных) операторов из $E$ в $F$ с операторной нормой

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| \leqslant 1\} \quad (T \in L(E, F)).$$

Как обычно, $L^{\sim}(E, F)$ и $L^r(E, F)$ будут обозначать соответственно пространства порядково ограниченных и регулярный операторов.

**Лемма 4.1.** *В банаховой решётке $E$ последовательность $(x_n) \subset E$ сходится по норме к элементу $x \in E$ тогда и только тогда, когда из любой частичной подпоследовательности $(x_{n_k})$ можно выделить подпоследовательность $(x_{n_{k_i}})$, сходящуюся равномерно к $x$.*

$\lhd$ См. [1, Теорема VII.2.1]. $\rhd$

**Теорема 4.2.** *Всякий порядково ограниченный оператор из банаховой решётки $E$ в нормированную решётку $F$ ограничен по норме.*

$\lhd$ Оператор $T$ порядково ограничен в том и только в том случае, когда для любого $u \in E_+$ существует такой $v \in F_+$, что $T([-u, u]) \subset [-v, v]$. Отсюда следует, что если $|x_n/\lambda_n| \leqslant u$, то $|Tx_n/\lambda| \leqslant v$, следовательно, из сходимости последовательности $(x_n)$ к нулю с регулятором $u$ следует сходимость $(Tx_n)$ к нулю с регулятором $v$ (см. определение 1.15). Так как сходимость с регулятором ($\equiv$ равномерная сходимость) влечёт сходимость по норме, то требуемое следует из леммы 4.1. $\rhd$

Следовательно, для банаховых решёток $E$, $F$ имеют место включения

$$L^r(E, F) \subset L^{\sim}(E, F) \subset L(E, F).$$

Мы знаем из примера 2.2, что включение $L^r(E, F) \subset L^{\sim}(E, F)$ может оказаться строгим. Включение $L^{\sim}(E, F) \subset L(E, F)$ также может оказаться строгим, как показывает следующий пример.

**Пример 4.3** (см. [2, пример 4.73]). Рассмотрим оператор линейный $T : C[0,1] \to c_0$, действующий по формуле

$$Tf := \big(f(1) - f(0), f(1/2) - f(0), f(1/3) - f(0), \ldots\big) \quad (f \in C[0,1]).$$

Из неравенство $|f(1/n) - f(0)| \leqslant 2\|f\|_\infty$ видно, что $\|Tf\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty$ для всех $f \in C[0,1]$ и, следовательно, $T$ непрерывен. Покажем, что $T$ не является порядково ограниченным. Предположим, что существует $u = (u_1, u_2, \ldots) \in c_0$ такой, что $|Tf| \leqslant u$ для всех $f \in [0, \mathbf{1}] \subset C[0,1]$, где $\mathbf{1}$ — функция тождественно равная единице. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ подберем $f_n \in [0, \mathbf{1}]$ так, чтобы $f_n(0) = 0$ и $f(1/n) = 1$. Заметим, что $1 = |f_n(1/n) - f_n(0)| = T(f_n)_n \leqslant u_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. $u = (1, 1, \ldots) \notin c_0$, что противоречит условию $u \in c_0$. Таким образом, $T$ не является порядково ограниченным, т.е. $L(E,F) \not\subset L^\sim(E,F)$.

**Определение 4.4.** Для каждого $T \in L^r(E,F)$ между нормированными решётками $E$, $F$ введем *регулярную норму* по формуле

$$\|T\|_r := \inf\{\|S\| : \ S \in L(E,F)_+, \ |Tx| \leqslant S(|x|) \text{ для всех } x \in E\}.$$

**Предложение 4.5.** *Для нормированных решёток $E$ и $F$ имеют место следующие утверждения:*

(1) *функция $\|\cdot\|_r : L^r(E,F) \to \mathbb{R}$ является нормой, причём справедлива формула $\|T\| = \inf\{\|S\| : \ \pm T \leqslant S \in L(E,F)_+\}$;*

(2) *$\|T\| \leqslant \|T\|_r$ для любого $T \in L^r(E,F)$ и, следовательно, вложение $L^r(E,F) \subset L(E,F)$ непрерывно;*

(3) *если оператор $T$ имеет модуль $|T|$, то $\|T\|_r = \||T|\|$, в частности, для положительного оператора $T$ будет $\|T\| = \|T\|_r$.*

**Теорема 4.6.** *Если $E$ и $F$ — банаховы решётки, то пространство $L^r(E,F)$, снабжённое $r$-нормой $\|\cdot\|_r$, является упорядоченным банаховым пространством. Если, сверх того, $F$ порядково полна, то $(L^r(E;F), \|\cdot\|_r)$ — порядково полная банахова решётка.*

$\lhd$ См. [2, 19, теорема 4.74], [4, предложение 1.3.6]. $\rhd$

В связи с примером 4.1 возникают два важных вопроса: Для каких банаховых решёток $E$ и $F$ выполняется $L(E,F) = L^r(E,F)$? Если это верно, то при каких дополнительных условиях $\|T\| = \|T\|_r$ для всех $T \in L^r(E,F)$?

Напомним, что $AM$-пространством с единицей называется $AM$-пространство с сильной порядковой единицей (см. определение 3.22).

**Теорема 4.7.** *Пусть $F$ — порядково полная банахова решётка с сильной порядковой единицей $e$. Тогда для каждой банаховой решётки $E$ выполняются равенства $L(E,F) = L^r(E,F)$. Если сверх того, $F$ — $AM$-пространство с единицей $e$, то $\|T\| = \|T\|_r$ для всех $T \in L^r(E,F)$.*

$\lhd$ См. [4, теорема 1.5.11]. $\rhd$

Имеет место следующее обращение теоремы 4.7.

**Теорема 4.8.** *Если $F$ — порядково полная банахова решётка и выполняется $L(E,F) = L^r(E,F)$ для любой банаховой решётки $E$, то $F$ имеет сильную порядковую единицу.*

$\lhd$ См. [7, теорема 4.1]. $\rhd$

Отметим, что теоремы 4.7 и 4.8 не сохраняют силу без предположения о порядковой полноте $F$.

**Теорема 4.9.** *Если $E$ — $AL$-пространство, а $F$ — банахова решётка с нормой Леви, то $L(E,F) = L^r(E,F)$. Если сверх того, норма в $F$ обладает свойством Фату, то $\|T\| = \|T\|_r$ для всех $T \in L^r(E,F)$.*

$\lhd$ Канторович и Вулих получили эту теорему, предполагая, что $F$ — $KB$-пространство (см. [6]), но данное ими доказательство даже упрощается, когда $F$ — произвольная банахова решётка со свойством Леви. Доказательство можно найти в [1, теорема VIII.7.2] и [2, теорема 4.75] для $KB$-пространства $F$. $\rhd$

Верно следующее обращение теоремы 4.9.

**Теорема 4.10.** *Если $F$ — порядково полная банахова решётка и выполняется $L(E,F) = L^r(E,F)$ для любого $AL$-пространства $E$, то $F$ обладает свойством Леви.*

$\lhd$ См. [7, теорема 3.5]. $\rhd$

**Замечание 4.11.** Отметим, что сформулированное обращение неполное, так как в теореме 4.9 нельзя ослабить предположение о порядковой полноте $F$. Существуют банаховы решётки $F$, не обладающие свойством Леви, но любой непрерывный оператор из произвольного $AL$-пространство в $F$ является регулярным, см. [7, замечание 3.2].

**Определение 4.12.** Говорят, что банахова решётка $F$ обладает *счётным свойством Леви*, если любая возрастающая ограниченная по норме последовательность в $F_+$ имеет супремум.

**Теорема 4.13.** *Для порядково $\sigma$-полной векторной решётки $F$ равносильны утверждения:*

(1) *$F$ обладает счётным свойством Леви;*

(2) *Для любого сепарабельного $AL$-пространства $E$ имеет место равенство $L(E, F) = L^r(E, F)$;*

(3) *Для $E := L^1[0, 2\pi]$ верно равенство $L(E, F) = L^r(E, F)$.*

$\triangleleft$ См. [7, теорема 3.1]. $\triangleright$

## Литература


1. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.:ГИФМЛ, 1961.
2. *Aliprantis C.D., and Burkinshaw O.* Positive Operators, Springer, 2006, 376 p.
3. *Kusraev A.G.* Dominated Operators, Springer, 2000, 446 p.
4. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices, Berlin etc.: Springer, 1991, 395 p.
5. *Zaanen A.C.* Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces, Springer, 1997, 312 p.
6. *Kantorovich L.V., Vulikh B.Z.* Sur la representation des opeations lineares, Compositio Math. 5 (1937), 119-165.
7. Abramovich Y.A., Wickstead A.W. When each continuous operator is regular II. Indag. Math., 8 (1997), 281–294.