Дифференциальные уравнения на дискретных графах

Цикл лекции

Пусть V — непустое конечное множество. Через E обозначим множество всех двухэлементных подмножеств из V .

Обыкновенным графом G называется пара множеств (V, E), где E — произвольное подмножество из V.

Элементы множеств V и E называют соответственно вершинами и ребрами графа G. Множества вершин и ребер графа G будем обозначать также через $V\,(G)$ и $E(G)$.

Обыкновенные графы удобно представлять в виде диаграмм, на которых вершинам соответствуют выделенные точки, а ребрам — непрерывные кривые, соединяющие эти точки.

Часто приходится рассматривать объекты более общего вида, чем обыкновенные графы. Такие объекты в дальнейшем будут называться графами.

Основные определения

Часто ребра графа обозначают в виде интервала (u,v), где u и v –вершины графа.

Две вершины графа называются смежными (соседними) если они соединены ребром.

Граф G, имеющий n вершин, часто называют n-графом; если, кроме того, G содержит m ребер, то G — (n,m)-граф.

Если e = uv — некоторое ребро данного графа, то вершины u,v называются смежными; говорят также, что u,v концевые вершины ребра e. Ребро e и вершина v инцидентны, если v — концевая вершина для e

Ребра e и f называются смежными, если они имеют общую концевую вершину.

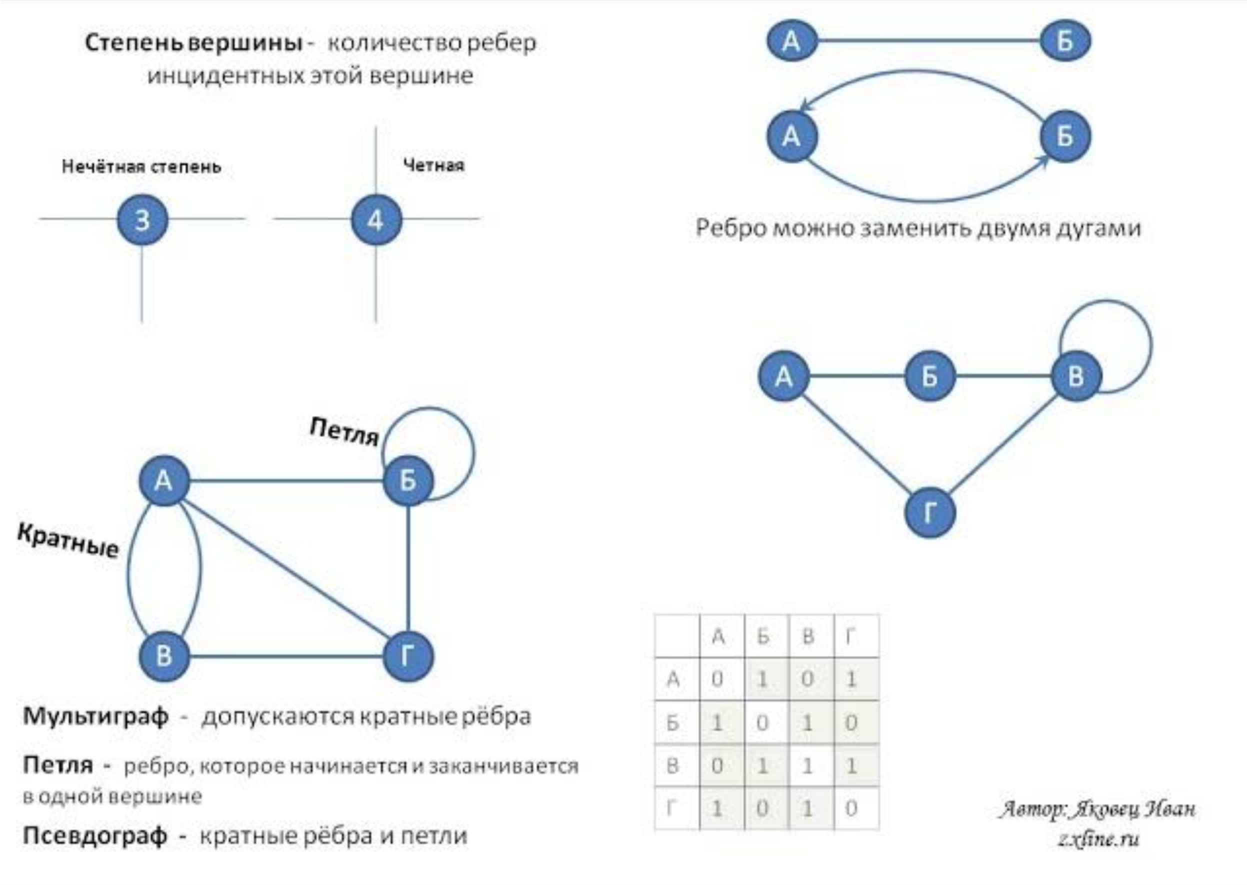
Две вершины графа, которые соединены более чем одним ребром, называются кратными либо параллельными. В этом случае граф называется мульти графом.

Граф, содержащий ребра, соединяющие вершину саму с собой, называется петлей.

Число ребер, приходящих к данной вершине v (инцидентных вершине v), называются степенью этой вершины и обозначается deg(v).

Вершина графа, не имеющая смежных вершин, называется изолированной.

Обыкновенный граф- это граф без вершин и петель.



	А	Б	В	Г
А	0	1	0	1
Б	1	0	1	0
В	0	1	1	1
Г	1	0	1	0

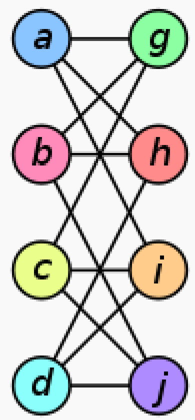
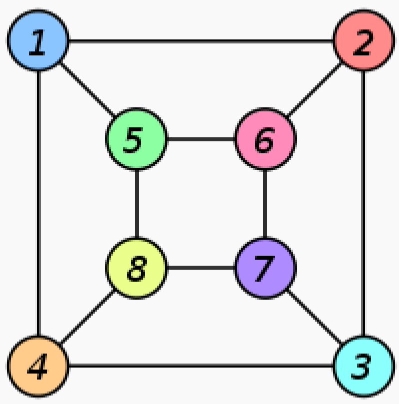
Если deg$v$ = 0, то вершина v называется изолированной, а если deg$v$ = 1, то — висячей. Ребро e, инцидентное висячей

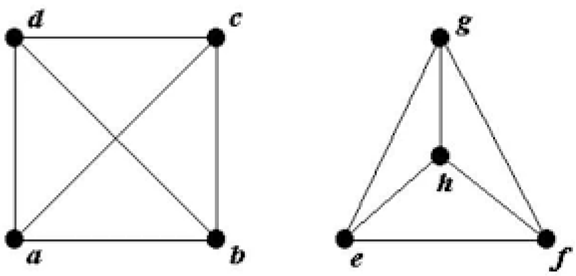
Окружением $N(v)$ вершины v называется множество всех вершин, смежных с v.

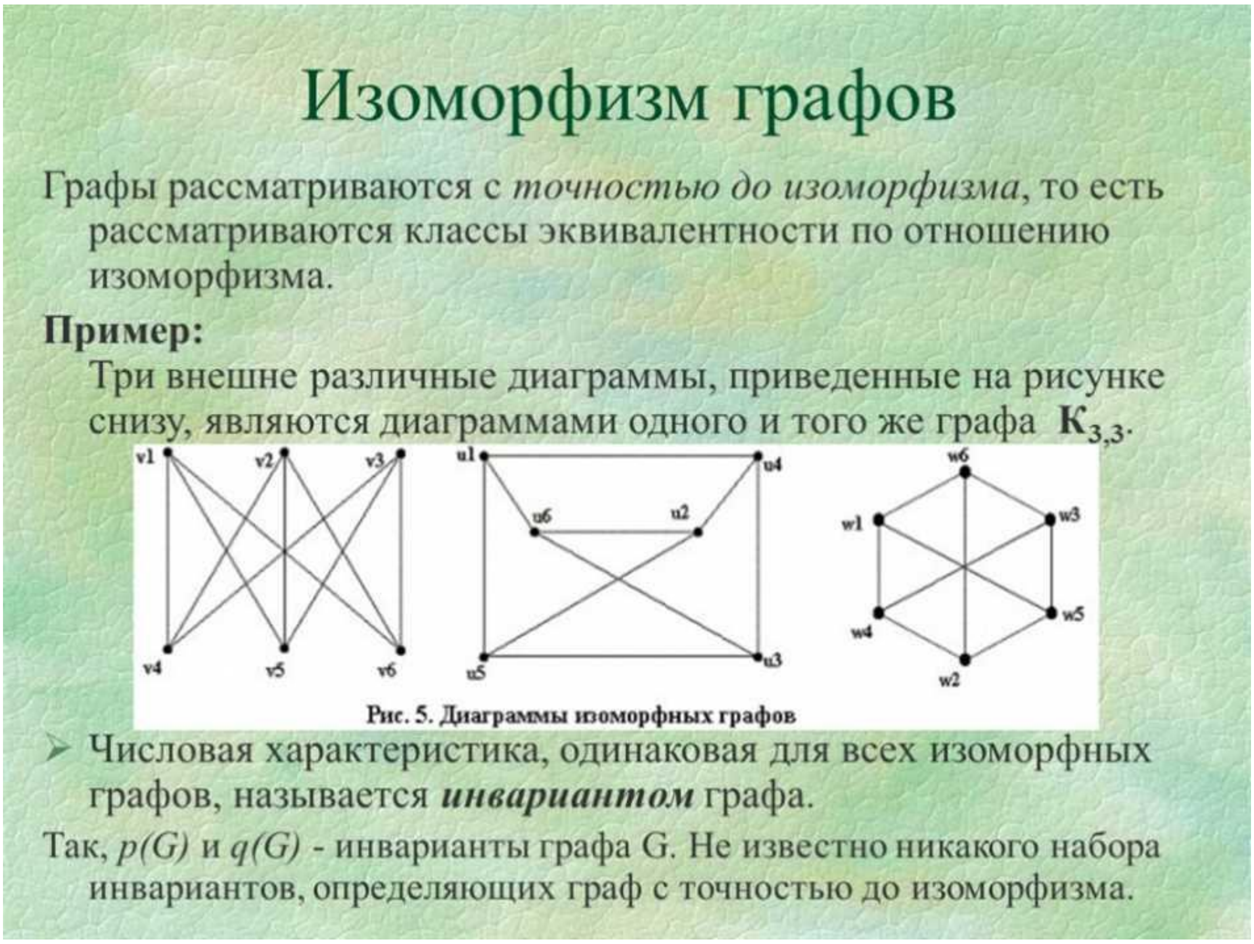
Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2(V_2, E_2)$ — два графа. Биективное отображение ψ : $V_1 \to V_2$ называется изоморфизмом . G_1 на G_2 , если для любых $u,v \in V_1$ число ребер, соединяющих вершины u и v в G 1, равно числу ребер, соединяющих $\psi(u)$ и $\psi(v)$ в G_2 (разумеется, при u = v число петель в вершине u равно числу петель в вершине $\psi(u)$).

Отметим, что в случае обыкновенных графов изоморфизм — это биекция, сохраняющая отношение смежности; иными словами, изоморфизм ψ характеризуется свойством: произвольные вершины u,v смежные в графе G_1

Рис. 3

Graph G	Graph H	An isomorphism between G and H
		$f(a) = 1$ $f(b) = 6$ $f(c) = 8$ $f(d) = 3$ $f(g) = 5$ $f(h) = 2$ $f(i) = 4$ $f(j) = 7$





Отношение «быть изоморфными» на множестве всех графов, очевидно, является отношением эквивалентности. Таким образом, множество всех графов разбивается на классы попарно изоморфных графов. Заметим, что диаграмма задает граф с точностью до изоморфизма.

Степенью вершины v называется число ребер, инцидентных этой вершине, причем каждая петля учитывается дважды.

Степень вершины v обозначается через deg$v$. Ясно, что в обыкновенном графе степень вершины v равна количеству вершин, смежных с v. Окружением $N(v)$ вершины v называется множество всех вершин, смежных с v.

Лемма 1 (о рукопожатиях). Пусть G — произвольный граф. Тогда

∑ deg v=2M, $v \in V$

Доказательство. При подсчете суммы степеней произвольное ребро $e = uw$ внесет свой вклад, равный единице, как в $\deg u$, так и в $\deg w$, причем петля будет учитываться дважды.

Будем называть граф одноэлементным, если он имеет единственную вершину. Граф G называется нулевым или вполне несвязным, если множество его ребер EG пусто. Нулевой n-граф будем обозначать через $O\ n$. Диаграмма графа O 4 приведена на рис. 1,b. Ясно, что нулевой граф является обыкновенным графом.

Обыкновенный граф G называется полным графом, если любые его две различные вершины смежные. Для полного n-графа применяется обозначение F_n . Очевидно, степень каждой вершины в графе

F_n равна $n - 1$. Поэтому из леммы о рукопожатиях следует,

что число ребер в F_n равно

$$C_n^{\ 2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Основные понятия теории графов

Граф G называют двудольным, если множество $V\ G$ можно

разбить на два непустых подмножества X и Y так, что любое

ребро графа соединяет вершину из X с вершиной из Y. Множества X и Y — это доли двудольного графа G. Если любые вершины $x \in X$ и $y \in Y$ смежные и двудольный граф является обыкновенным графом, то G называют полным двудольным графом. Если $|X| = p$, $|Y\ | = q$, то такой полный двудольный

граф обозначают через $K\ p,q$.

Граф H называется подграфом графа G, если $V\ H \subseteq V\ G$ и $EH \subseteq EG$. В число подграфов графа G будем включать и

пустой подграф $\emptyset$. Если $V\ H = V\ G$, то подграф H называется ´остовным подграфом. Редукция графа G — это такой его ´ остовный подграф H, что H является обыкновенным графом с наибольшим возможным числом ребер.

Пусть U — подмножество из $V\,G$. Обозначим через D множество всех ребер $e = uv \in EG$ таких, что $uv \in U$. Граф $G(U) = (U, D)$ называется подграфом, порожденным множеством вершин U.

Аналогично определяется подграф, порожденный заданным множеством ребер. Пусть $D \subseteq EG$. Обозначим через U множество всех вершин, являющихся концевыми для ребер из D. Тогда граф $G(D) = (U, D)$ называют подграфом, порожденным множеством ребер D.

Пусть G — произвольный граф и H — его подграф. С каждой вершиной v и каждым ребром e можно связать подграфы

$H - v$, $H - e$ и $H + e$.

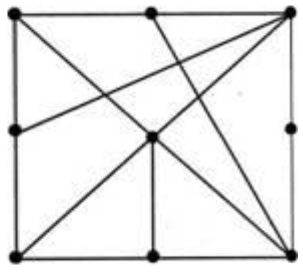
Подграф $H - v$ получается из подграфа H удалением вершины v и всех инцидентных этой вершине ребер. Отметим, что если v не лежит в подграфе H, то $H - v = H$.

Подграф $H - e$ получается из H удалением ребра e. Здесь также $H - e = H$, если e не лежит в H.

Подграф $H + e$ получается из H добавлением ребра e и двух его концевых вершин. Если e лежит в H, то $H + e = H$.

Через Sub(G) будем обозначать множество всех подграфов графа G. Определим отношение $\leqslant$ на Sub(G), полагая $H_1 \leq H_2$ для подграфов $H_1 \leq H_2$ графа G тогда и только тогда, когда H_1 является подграфом в H_2, т. е. когда $VH_1 \subseteq VH_2$ и $EH_1 \subseteq EH_2$. Очевидно, отношение $\leqslant$ есть частичный порядок

§ 1.2. Маршруты, связность, циклы и разрезы



Маршрутом в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, .., v_{t-1}, e_t, v_t$, в которой $e_i = v_{i-1}, v_i (1 \le i \le t)$. Такой маршрут кратко называют v_0, v_t -маршрутом и говорят, что он соединяет v_0, v_t ; в свою очередь вершины v_0, v_t — это концевые вершины указанного маршрута.

Длиной маршрута называют количество содержащихся в нем ребер. Случай, когда длина маршрута равна нулю, не исключается; в этом случае маршрут сводится к одной вершине.

Заметим, что в обыкновенном графе маршрут полностью определяется последовательностью $v_0, e_1, v_1, .., v_{t-1}, e_t, v_t$ своих вершин.

Если $v_0 = v_t$, то (v_0, v_t)-маршрут называется замкнутым.

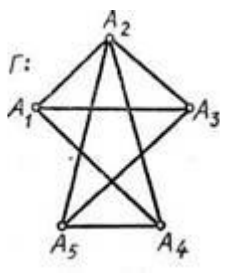
В произвольном маршруте любое ребро и любая вершина, разумеется, могут повторяться. Накладывая ограничения на число повторений вершин или ребер, мы приходим к следующим частным видам маршрутов.

Цепь — это маршрут без повторяющихся ребер. Цепь называется простой цепью, если в ней нет повторяющихся вершин, кроме, быть может, совпадающих концевых вершин. Замкнутая простая цепь называется циклом. Заметим, что цикл полностью определяется множеством своих ребер, поэтому часто под циклом мы будем понимать соответствующее ему множество ребер. Петля дает цикл длины 1, пара кратных ребер образует цикл длины 2. Циклы длины 3 называют обычно треугольниками.

Лемма 1. Если для некоторых вершин u,v в графе существует (u,v)-маршрут, то существует и простая (u,v) цепь.

Плоские графы. Формула Эйлера .

Рассмотрим изображения графа G. На рисунке 34 изображен граф G, некоторые ребра его пересекаются. На рисунке 35 этот же граф G изображен так, что его ребра не пересекаются.
Граф на рисунке 40 является плоским представлением графа на рисунке 39.



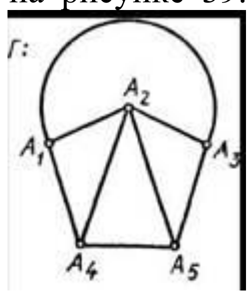
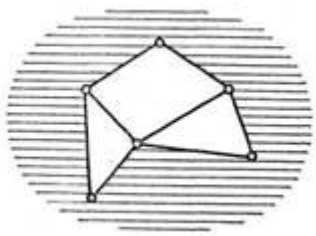


Рис.39 рис. 40

Граф G называют **плоским,** если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие два его ребра не имели других общих точек, кроме их общей вершины.
Примерами плоских графов являются простые циклы, деревья, лес.
В качестве характеристики плоского представления графа вводится понятие грани.

Гранью в плоском представлении графа G называется часть плоскости, ограниченная простым циклом и не содержащая внутри других циклов.
В качестве грани можно рассматривать и часть плоскости, расположенную «вне» плоского представления графа; она ограничена «изнутри» простым циклом и не содержит в себе других циклов. Эту часть плоскости называют **«бесконечной» гранью**.



На рисунке 41 часть бесконечной грани заштрихована.

Дерево и лес имеют одну бесконечную грань.

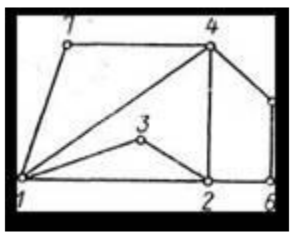


Рис. 42

Задание 7.1. На рисунке 42 плоское представление графа G. Назовите его грани.

Ответ: (1, 7, 4, 1), (1, 3, 2, 4, 1), (1, 2, 3, 1), (2, 6, 5, 4, 2), (1, 2, 6, 5, 4, 7, 1).

Почему часть плоскости, ограниченная простым циклом (1, 2, 4, 1), не является гранью?

Потому, что она содержит внутри себя цикл (1, 2, 3, 1).
Задание 7.2.

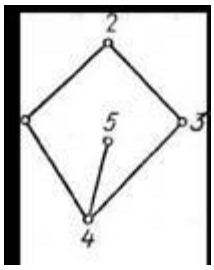


Рис. 43

Назовите все грани графа.
Ответ: (1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 4, 5, 1).
Почему часть плоскости, ограниченная простым циклом (1, 2, 3, 4, 5, 1), является гранью?
Потому что ребро (4, 5), расположенное внутри грани, не образует цикла.

Теорема 10. Формула Эйлера. Для всякого связного плоского графа верно равенство: n – m + f = 2, где n – число вершин m — число ребер, а f— число граней графа.
Доказательство.
Подграф графа G, содержащий все вершины графа, называется **остовным**. Если остовный подграф является деревом, то он называется **остовным деревом**.
Рассмотрим остовное дерево T-графа G. Очевидно, что граф T имеет n вершин и одну грань (внешнюю). Поскольку T – дерево, то число ребер T равно (n-1). Поэтому для графа T доказываемая формула верна. Теперь будем поочередно добавлять к T недостающие ребра графа G. При каждом добавлении число вершин не метется, а число ребер и граней увеличивается на единицу. Это значит, что доказываемая формула будет верна для всякого графа, получаемого в результате операций добавления ребер, а, значит, и для исходного графа. Теорема доказана.

.

Теорема:

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K5�5 или K3, 3�3,3 .

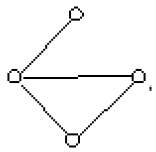
Доказательство:

Хроматический полином

Лемма. Хроматический полином графа имеет вид

$$P(G,x) = P(G_1,x) + P(G_2,x),$$

где G_1 - граф, полученный из G добавлением нового ребра (uv), а граф G_2 получается из G отождествлением вершин u и v.



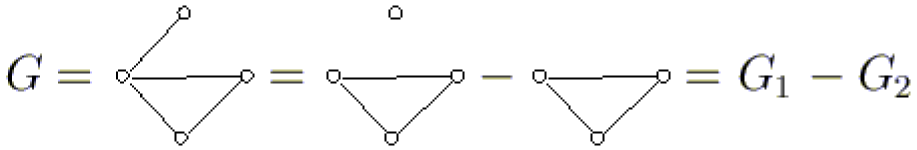
Задача. Найти хроматический полином графа

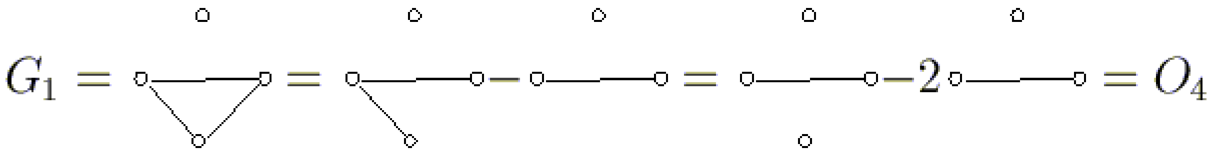
Решение

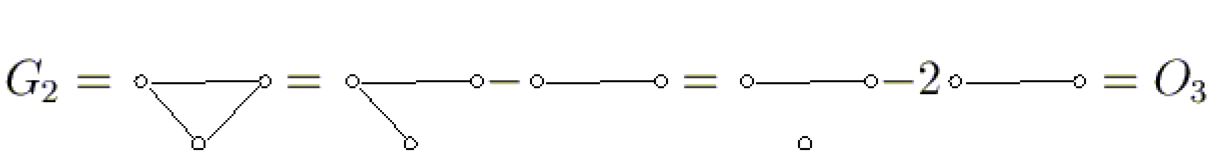
Способ 1 Воспользуемся леммой, записанной в виде

$$P(G_1,x) = P(G,x) - P(G_2,x)$$

Убирая ребра и отождествляя соответствующие вершины, сведем исходный граф к пустым графам. Известно, что для пустого графа $P(O_n,x)=x^n$.







$$G = G_1 - G_2 = O_4 - O_3 - 2(O_3 - O_2) - (O_3 - O_2 - 2(O_2 - O_1)) = O_4 - 4O_3 + 5O_2 - 2O_1.$$

$$P(G,x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$$

Оператор Лапласа

Введем понятие весовых графов.

Весовой граф это пара (G, μ), где $G = (V, E)$ граф и μ_{xy} неотрицательные функции на $V \times V$ и такие ,что

1. $\mu_{xy} = \mu_{yx}$;
2. $\mu_{xy} > 0$ тогда и только тогда если $x \sim y$
3. Определим меру вершины :

$$\mu(x) = \sum\nolimits_{y, y \sim x} \mu_{xy} .$$

Если $\mu_{xy} = 1$, то есть простой вес, тогда $\mu(x) = \deg(x)$

Лемма. Для любого обыкновенного весового графа

$$\sum_{x \in V} \mu(x) = 2 \sum_{\xi \in E} \mu_{\xi}$$

Доказательство. Имеем

$$\mu(x) = \sum_{y \in V} \mu_{xy} ,$$

где суммирование распространяется на все $y \in V$ это не поменяет сумму поскольку мы прибавляем ребра для которых $\mu_{xy} = 0$.
Таким образом,

$$\sum_{x \in V} \mu(x) = \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} \mu_{xy} = \sum_{x, y \in V} \mu_{xy} = \sum_{x, y : x \sim y} \mu_{xy} = 2 \sum_{\xi \in E} \mu_{\xi} .$$

Определение. Последовательность $\{x_k\}^n_{k=0}$ вершин графа называется цепью если $x_k \sim x_{k+1}$ для всех $k = 0,1,..,n-1$.

Число ребер в цепи называется длиной цепи.

Определение. Граф (V, E) называется связным если для любых двух вершин $x, y \in V$ существует цепь, соединяющая x и y, т.е.

Цепь $\{x_k\}^n_{k=0}$ такая, что $x_0 = x$ и $x_n = y$.

Если граф связный, тогда определим расстояние в графе $d(x, y)$ между двумя вершинами x, y следующим образом:

Если $x \neq y$, то $d(x, y)$ это минимальная длина цепи, соединяющая x и y. Если же $x = y$, то $d(x, y)$ =0.

Пусть $f(x)$ дифференцируемая функция на R. Тогда

$$\frac{d^2}{dx^2} f \approx \frac{2(f(x+h)+f(x-h))}{2h^2} - f(x)$$

По аналогии введем оператор Лапласа

Определение. Пусть (V, E) локально конечный граф без изолированных вершин , т.е. $0 < \deg x < \infty$ для любого $x \in V$. Для любой функции $f: V \to R$ определим функцию $\Delta f(x)$:

$$\Delta f(x) = \frac{1}{\deg x} \sum_{y \sim x} f(y) - f(x).$$

Примеры. Рассмотрим решетку Z. Тогда

$$\Delta f(x) = \frac{f(x+1) + f(x-1)}{2} - f(x)$$, в то время как для Z^2

$$\Delta f(x,y) = \frac{f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1)}{4} - f(x)$$

Введем аналогично весовой Лапласиан

Определение. *Пусть* (V,μ) *локально конечный весовой граф без изолированных вершин. Для любой функции* $f : V \to R$
определим $\Delta_\mu f$ *следующим образом*

$$\Delta_\mu f(x) = \frac{1}{\mu(x)} \sum_y f(y)\mu_{xy} - f(x).$$

Введем также ядро Маркова

$$P(x,y) = \frac{\mu_{xy}}{\mu(x)}$$

Тогда имеем

$$\Delta_\mu f(x) = \sum_y P(x,y) f(y) - f(x)$$

Пусть

$$Pf(x) = \sum_y P(x,y) f(y)$$ - Оператор Маркова

Тогда

$$\Delta_\mu = P - id.$$

Формула интегрирования по частям. Формула Грина

Рассмотрим разностный оператор

$$\nabla_{xy} f = f(y) - f(x)\,.$$

Соотношение между Δ_μ и разностным оператором такова

$$\Delta_\mu f(x) = \frac{1}{\mu(x)} \sum_y (\nabla_{xy} f)\mu_{xy} = \sum_y P(x,y)(\nabla_{xy} f)\,.$$

В самом деле,

$$\sum_y (f(y) - f(x))P(x,y) = \sum_y f(y)P(x,y) - \sum_y f(x)P(x,y) =$$

$$\sum_y f(y)P(x,y) - f(x) = \Delta_\mu f(x)\,.$$

Далее рассмотрим произвольное подмножество $\Omega \subset V$ и обозначим через $\Omega^c = V \setminus \Omega$. Справедлива следующая теорема

Теорема (Формула Грина). *Пусть* (V,μ) *локально конечный весовой граф без изолированных точек и* Ω *не пусто. Тогда для любых двух функции* f, g *на* V *имеет место*

$$\sum_{x\in\Omega} \Delta_\mu f(x) g(x)\mu(x) = -\frac{1}{2} \sum_{x,y\in\Omega} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g)\mu_{xy}$$

$$= \sum_{x\in\Omega} \sum_{y\in\Omega^c} (\nabla_{xy} f) g(x)\mu_{xy}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{x\in\Omega} \Delta_\mu f(x) g(x)\mu(x) = \sum_{x\in\Omega} \Big(\frac{1}{\mu(x)} \sum_{y\in V} (f(y) - f(x))\mu_{xy}\Big) g(x)\mu(x) =$$

=

$$\sum_{x\in\Omega}\sum_{y\in V}(f(y)-f(x))g(x)\mu_{xy}= +$$

$$\sum_{x\in\Omega}\sum_{y\in\Omega}(f(y)-f(x))g(x)\mu_{xy}+\sum_{x\in\Omega}\sum_{y\in\Omega^c}(f(y)-f(x))g(x)\mu_{xy}$$

$$=\sum_{y\in\Omega}\sum_{x\in\Omega}(f(x)-f(y))g(y)\mu_{xy}+\sum_{x\in\Omega}\sum_{y\in\Omega^c}(\nabla_{xy}f)g(x)\mu_{xy}.$$

Суммируя последние две строки и результат деля на 2 , получим

$$\sum_{x\in\Omega}\Delta_\mu f(x)g(x)\mu(x)=-\frac{1}{2}\sum_{x,y\in\Omega}(f(y)-f(x))(g(y)-g(x))\mu_{xy}$$
$$+\sum_{x\in\Omega}\sum_{y\in\Omega^c}(\nabla_{xy}f)g(x)\mu_{xy}.$$

Теорема доказана.

Задача на собственные значения на конечных графах.

Прежде всего напомним, что если A линейный оператор в N -мерном векторном пространстве V над R , то вектор $v\neq 0$ называется собственным вектором A если $Av=\lambda v$, λ собственное значение A . Все собственные значения определяются из характеристического уравнения

$$\det(A-\lambda id)=0.$$

Рассмотрим простой (не весовой) граф и

$$Lf(x)=f(x)-\frac{1}{\deg(x)}\sum_{y\sim x}f(y).$$

Пример 1. Пусть V состоит из двух вершин $\{1,2\}$ связанные ребром. Тогда

$$Lf(1) = f(1) - f(2)$$
$$Lf(2) = f(2) - f(1)$$

Значит, $Lf = \lambda f$ означает

$$(1-\lambda) f(1) = f(2)$$
$$(1-\lambda) f(2) = f(1)$$

Отсюда $(1-\lambda)^2 f(k) = f(k)$, т.е. $\lambda = 0, \lambda = 2.$

Пример 2. Пусть $V = \{1, 2, 3\}$ с ребрами $1 \sim 2 \sim 3 \sim 1$, то есть $(V, E) = C_3 = K_3$. Тогда

$$Lf(1) = f(1) - \frac{1}{2}(f(2) + f(3))$$

Аналогично для $Lf(2), Lf(3)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} Lf(1) \\ Lf(2) \\ Lf(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}$$

Значит, $\lambda = 0$, $\lambda = 3/2$

Пример 3. Рассмотрим цикл $C_m = Z_m = \{0, 1, .., m-1\}$, где ребра задаются следующим образом

$0 \sim 1 \sim 2 \sim .. \sim m-1 \sim 0$.

Тогда оператор Маркова имеет вид

$Pf(k) = \frac{1}{2}(f(k+1) + f(k-1))$ и уравнение для собственных значений имеет вид:

$$f(k+1)-2\alpha f(k)+f(k-1)=0, \alpha \in (-1,1).$$

Решение ищем в виде $f(k)=r^k$. Это даст

$$r^2-2\alpha r+1=0.$$

Решая это уравнение, находим

$$r=\alpha \pm i\sqrt{1-\alpha^2}=e^{\pm i\theta}, \theta \in (0,\pi), \cos\theta=\alpha.$$

Таким образом, мы имеем

$f_1(k)=e^{ik\theta}$, $f_2(k)=e^{-ik\theta}$ откуда, пользуясь формулами Эйлера, имеем для действительных частей

$$f_1(k)=\cos k\theta,\ f_2(k)=\sin k\theta.$$

В силу периодичности

$$f(k+m)=f(k), k \in Z.$$

Значит, для некоторого целого l

$$\theta=\frac{2\pi l}{m}.$$

Геометрические свойства собственных значений

Основной целью этой главы является оценка первого собственного числа оператора Лапласа на весовых графах.

1. **Неравенство Чигера**.

Рассмотрим весовой граф (V,μ) с реберным множеством E.

Напомним, что для любого подмножества вершин $\Omega \subset V$,

$$\mu(\Omega) = \sum_{x\in\Omega} \mu(x).$$

Аналогично, для любого подмножества ребер $S \subset E$

$$\mu(S) = \sum_{\xi\in S} \mu_\xi \ ,$$

где $\mu_\xi \coloneqq \mu_{xy}$ для любого ребра $\xi = \overline{xy}$,

$$\left|\nabla_\xi\ f\right| \coloneqq \left|\nabla_{xy}\ f\right| = \left|f(y) - f(x)\right|.$$

Лемма. Пусть f определенная на V функция и пусть $t \in R$ и

$$\Omega_t = \left\{x \in V : f(x) > t\right\}.$$

Тогда имеет место:

$$\sum_{\xi\in E} \left|\nabla_\xi f\right| \mu_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \mu\left(\partial\Omega_t\right) dt \ .$$

Доказательство. Любому ребру $\xi = \overline{xy}$ соответствует интервал $I_\xi = \left[\,f(x), f(y)\right)$, в котором можем предположить, что $f(x) \le f(y)$. Обозначим $\left|I_\xi\right|$ длину интервала I_ξ. Таким образом, $\left|\nabla_\xi f\right| = \left|I_\xi\right|$.

Мы утверждаем, что

$$\xi \in \partial\Omega_t \Leftrightarrow t \in I_\xi \ .$$

Действительно, $\partial\Omega_t$ содержит ребра $\xi = \overline{xy}$ такие, что $x \in \Omega_t^{\ c}$ и

$y \in \Omega_t$, т.е. $f(x) \le t,\ f(y) > t$. Последнее эквивалентно

$t \in \left[f(x), f(y) \right) = I_\xi$. Следовательно,

$$\mu(\partial\Omega_t) = \sum_{\xi\in\Omega_t} \mu_\xi = \sum_{\xi\in E: t\in I_\xi} \mu_\xi = \sum_{\xi\in E} \mathrm{I}_{I_\xi}(t),$$

значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\partial\Omega_t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\xi\in E} \mu_\xi I_{I_\xi}(t)dt =$$

$$\sum_{\xi\in E} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_\xi I_{I_\xi}(t)dt = \sum_{\xi\in E} \mu_\xi \left| I_\xi \right| = \sum_{\xi\in E} \mu_\xi \left| \nabla_\xi f \right| . \square$$

Лемма. *Для любой неотрицательной функции* f *на* V *такой, что если*

$$\mu\left\{ x \in V : f(x) > 0 \right\} \le \frac{1}{2}\mu(V),$$

То

$$\sum_{\xi\in E} \left| \nabla_\xi f \right| \mu_\xi \ge h \sum_{x\in V} f(x)\mu(x),$$

где h *является константой Чигера* (V, μ).

Заметим, что для функции $f = I_\Omega$, тогда $\mu(\Omega) \le \frac{1}{2}\mu(V)$ и утверждение Леммы эквивалентно

$$\mu(\partial\Omega) \ge h\mu(\Omega).$$

Действительно,

$$\sum_{x\in V} f(x)\mu(x)=\sum_{x\in\Omega}\mu(x)=\mu(\Omega),$$
$$\sum_{\xi\in E}\left|\nabla_\xi f\right|\mu_\xi=\sum_{x\in\Omega,\,y\in\Omega^c}\left|f(y)-f(x)\right|\mu_{xy}=\sum_{x\in\Omega,\,y\in\Omega^c}\mu_{xy}=\mu(\partial\Omega).$$

Доказательство.

По Лемме имеем

$$\sum_{\xi\in E}\left|\nabla_\xi f\right|\mu_\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\mu(\partial\Omega_t)dt\geq\int_0^{\infty}\mu(\partial\Omega_t)dt.$$

По условию Леммы множество

$$\Omega_t=\left\{x\in V:\,f(x)>t\right\}$$

имеет меру $\leq\frac{1}{2}\mu(V)$ для любого $t\geq 0$. Значит,

$\mu(\partial\Omega_t)\geq\frac{1}{2}h\mu(V)$ откуда

$$\sum_{\xi\in E}\left|\nabla_\xi f\right|\mu_\xi\geq h\int_0^{\infty}\mu(\Omega_t)dt.$$

С другой стороны, $x\in\Omega_t, t\geq 0$ эквивалентно $t\in\left[0,\,f(x)\right)$. Значит,

$$\int_0^{\infty}\mu(\Omega_t)dt=\int_0^{\infty}\sum_{x\in\Omega_t}\mu(x)dt=\int_0^{\infty}\sum_{x\in V}\mu(x)I_{[0,\,f(x)]}(t)dt$$

$$=\sum_{x\in V}\mu(x)\int_0^{\infty}I_{[0,\,f(x)]}(t)dt=\sum_{x\in V}\mu(x)\,f(x).\square$$

Теорема. (Неравенство Чигера) ***Имеем***

$$\lambda_1 \geq \frac{h^2}{2}$$

Доказательство. Пусть f собственная функция соответствующая λ_1. Рассмотрим два множества

$$V^+ = \left\{ x \in V : f(x) \geq 0 \right\}, V^- = \left\{ x \in V : f(x) < 0 \right\}$$

Не ограничивая общности, мы можем предположить, что

$\mu(V^+) \leq \mu(V^-)$. Тогда $\mu(V^+) \leq \frac{1}{2}\mu(V^-)$. Рассмотрим функцию

$g = f_+ := \max\left\{ f, 0 \right\}$. Пользуясь формулой Грина

$$(Lf, g) = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in V}(\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g)\mu_{xy}$$

и пользуясь тем, что $Lf = \lambda_1 f$, получим

$$\lambda_1 \sum_{x\in V} f(x)g(x)\mu(x) = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in V}(\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g)\mu_{xy}.$$

Учитывая, что $fg = g^2$ и

$$(\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) = (f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) \geq$$
$$(g(y) - g(x))^2 = \left|\nabla_{xy} g\right|^2$$
, получим

$$\lambda_1 \geq \frac{\sum_{\xi\in E}\left|\nabla_\xi g\right|^2 \mu_\xi}{\sum_{x\in V} g^2(x)\mu(x)}$$

Заметим, что $g \neq 0$ поскольку в противном случае $f_+ = 0$ и $(f,1) = 0$, которое влечет что $f_- = 0$. Следовательно, достаточно установить

$$\sum_{\xi \in E} \left|\nabla_\xi g\right|^2 \mu_\xi \geq \frac{h^2}{2} \sum_{x \in V} g^2(x)\mu(x).$$

Поскольку

$$\mu(x \in V : g(x) > 0) \leq \mu(V^+) \leq \frac{1}{2}\mu(V),$$

имеем

$$\sum_{\xi \in E} \left|\nabla_\xi (g^2)\right| \mu_\xi \geq h \sum_{x \in V} g^2(x)\mu(x).$$

Далее,

$$\sum_{\xi \in E} \left|\nabla_\xi (g^2)\right| \mu_\xi = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} \left|g^2(x) - g^2(y)\right| \mu_{xy}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} \left|g(x) - g(y)\right| \mu_{xy}{}^{1/2} \ \left|g(x) + g(y)\right| \mu_{xy}{}^{1/2}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\left(\sum_{x,y} (g(x) - g(y))^2 \mu_{xy}\right) \frac{1}{2} \sum_{x,y} (g(x) + g(y))^2 \mu_{xy}\right)^{1/2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{\xi \in E} \left|\nabla_\xi (g)^2 \ \right| \mu_\xi \leq \left(\sum_{\xi \in E} \left|\nabla_\xi g\right|^2 \mu_\xi \sum_{x,y} (g^2(x) + g^2(y))\mu_{xy}\right)^{1/2}$$

$$= (2\sum_{\xi\in E} \left|\nabla_{\xi} g\right|^2 \mu_{\xi} \ \sum g^2(x)\mu_{xy})^{1/2}$$

$$= (2\sum_{\xi\in E} \left|\nabla_{\xi} g\right|^2 \mu_{\xi} \ \sum g^2(x)\mu \ (x))^{1/2}.$$

Наконец, получаем

$$h\sum_{x\in V} g^2(x)\mu(x) \le (2\sum \left|\nabla_{\xi} g\right|^2 \mu_{\xi})^{1/2} (\sum g^2(x)\mu(x))^{1/2}.\square$$

Пример.

Оценка скорости стабилизации для решения задачи Коши.

Рассмотрим задачу Коши для дискретного вырождающегося параболического уравнения следующего вида

$$(1)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta_p u(x,t) = 0, x \in V, t > 0$$

$$(2) u(x,0) = u_0(x), x \in V$$

Здесь V множество вершин графа $G(V,E)$ с множеством ребер $E \subset V \times V$ и весов ω и

$$\Delta_p u(x,t) = \frac{1}{d_{\omega}(x)} \sum_{y\in V} \left|u(y) - u(x)\right|^{p-2} (u(y) - u(x))\omega(x,y).$$

Предполагается, что G простой, неориентированный, бесконечный, связный с локально-ограниченной степенью

$d_\omega(x) = \sum_{y \sim x} \omega(x, y),$ где мы пишем $y \sim x$ тогда и только тогда

если $\{x, y\} \in E.$ Кроме того, $\omega : V \times V \to [0, +\infty)$

$\omega(x, y) = \omega(y, x),$ положителен тогда и только тогда

$y \sim x, \omega(x, x) = 0, x \in V$

Далее, мы предполагаем, что $p > 2, u_0(x) \geq 0.$

Обозначим для $R \in N, B_R(x_0) = \{x \in V : d(x, x_0) \leq R\}$. Здесь d стандартное комбинаторное расстояние принимающие целочисленные значения. Для

$f : V \to R, q \geq 1, U \subset V$

$\| f \|^q_{l^q(U)} = \sum_{x \in U} | f(x)|^q d_\omega(x), \| f \|_{l^\infty(U)} = \sup_{x \in U} | f(x)|, \mu_\omega(U) = \sum_{x \in U} d_\omega(x)$.

Определение 1. *Будем говорить, что* G *удовлетворяет глобальному условию Фабэра-Крана, если для заданного* $p > 1, \Lambda_p : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *если для любого* $v > 0$ *и любого подмножества* $U \subset V, \mu_\omega(U) = v$ *имеет место*

$$(3) \Lambda_p(v) \sum_{x \in U} | f(x)|^p d_\omega(x) \leq \sum_{x, y \in (U)_1} | f(y) - f(x)|^p \omega(x, y),$$

для всех $f : V \to R, f(x) = 0 : x \notin U$, *где*

$(U)_1 = \{x \in V : d(x, U) \leq 1\}$.

Предположим, что $\Lambda_p \in C(0, \infty)$ убывающая и удовлетворяющая следующим условиям функция:

$(4) v \to \Lambda_p(v)^{-1} v^{-p/N}, v > 0$ не убывает;

$(5) v \to \Lambda_p(v)^{-1} v^{-\omega}, v > 0$ не возрастает.

Введем также геометрическую характеристику

$$(6) \psi_r(s) = s^{\frac{p-2}{r}} \Lambda_p(s^{-1}), s > 0, r \geq 1.$$

Определение 2. *Будем говорить, что* $u(x,t) \in C^1([0,T])$ *для* $x \in V$ *и* u *удовлетворяет (1) в классическом поточечном смысле*.

Предложение 1. *Пусть* $u : V \to R$ *решение задачи (1) и*

$u \in L^\infty(0,T; l^r(V)), r \geq 1.$ *Тогда для всех имеет место* $x \in V, 0 < t < T$

$$u(x,t) \leq k,$$

При условии, что $k > 0$ *удовлетворяет условию*

$$k^{-1} t^{-\frac{1}{p-2}} \Lambda_p(\sup_{\frac{t}{4} < \tau < t} \mu_\omega(\{x \in V : u(x,\tau) > k/2\}))^{-\frac{1}{p-2}} \leq \gamma_0$$

Следствие 1. *При условиях Предложения 1*

$$u(x,t) \leq \gamma \sup_{0<\tau<t} \|u(\tau)\|_{l^r(V)} \left[\psi_r^{(-1)} \ (t^{-1} \sup_{0<\tau<t} \|u(\tau)\|_{l^r(V)}^{-(p-2)})\right]^{1/r}$$

Доказательство предложения состоит из нескольких шагов.

1 шаг. Неравенство типа Каччопполи.

Лемма. *Пусть* $q > 0, p > 2, h \geq 0, u, v : V \to R.$ *Тогда для всех* $x, y \in V$

$$(\left|D_y u(x)\right|^{p-2} D_y u(x) - \left|D_y v(x)\right|^{p-2} D_y v(x)) D_y (u(x)-v(x)-h)_+{}^q$$

$$\geq \gamma_0 \left| D_y (u(x)-v(x)-h)_+{}^{\frac{q-1+p}{p}} \right|^p .$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можем полагать $h=0$.

Далее, предположим, что $D_y u(x) \neq D_y v(x)$. Имеем

$$(\left|D_y u(x)\right|^{p-2} D_y u(x) - \left|D_y v(x)\right|^{p-2} D_y v(x)) D_y (u(x)-v(x)) A$$
$$\geq \gamma_0(p) \left|D_y (u(x)-v(x)\right|^p A,$$
$$A = \frac{D_y (u(x)-v(x))_+{}^q}{D_y (u(x)-v(x))} \geq 0.$$

С другой стороны, п.ч. в требуемом неравенстве можно представить в виде

$$\left|D_y (u(x)-v(x)\right|^p B, B = \left| \frac{D_y (u(x)-v(x)_+{}^{\frac{q-1+p}{p}}}{D_y (u(x)-v(x))} \right|^p .$$

Следовательно, осталось доказать, что $A \geq \gamma_0 B$. Очевидно, что можно предположить $u(y)-v(y) > u(x)-v(x)$.

Значит, нам осталось доказать, что

$$\left[u(y)-v(y)-(u(x)-v(x)\right]^{p-1} \left[(u(y)-v(y))_+{}^q - (u(x)-v(x))^q{}_+\right]$$

$$\geq \gamma_0 \left[(u(y)-v(y))_+{}^{\frac{q-1+p}{p}} - u(x)-v(x))_+{}^{\frac{q-1+p}{p}} \right]^p .$$

Обозначим $a=u(y)-v(y), b=u(x)-v(x)$. При $b\le 0$ требуемое неравенство справедливо с $\gamma_0=1$. Пусть $b>0$.

Применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\left[a^{\frac{q-1+p}{p}}-b^{\frac{q-1+p}{p}}\right]^p=\left[\frac{q-1+p}{p}\int_b^a s^{\frac{q-1}{p}}ds\right]^p$$

$$\le\gamma(q,p)\left[\int_b^a s^{q-1}ds\right]\left[\left[\int_b^a ds\right]^{p-1}\right]\le\gamma(q,p)(a^q-b^q)(a-b)^{p-1}.$$

Лемма доказана. □

Лемма. (*Неравенство Каччопполи). Пусть* $u\in L^\infty(0,T;l^q(V)), q>1$ *решение задачи Коши в* $V\times(0,T)$. *Тогда для всех* $T>\tau_1>\tau_2>0, h\ge 0,$ *имеем для всех* $0<t<T$

$$\sup_{\tau_1<\tau<t}\sum_{x\in V}(u(x,\tau)-h)_+{}^q d_\omega(x)+\int_{\tau_1}^t\sum_{x,y\in V}\left|D_y(u(x,\tau)-h)_+{}^{\frac{p+q-2}{p}}\right|^p\omega(x,y)d\tau$$

$$\le\frac{\gamma}{\tau_1-\tau_2}\int_{\tau_2}^{\tau_1}\sum_{x\in V}(u(x,\tau)-h)_+{}^q d_\omega(x)d\tau$$

Продолжаем доказательство предложения. Рассмотрим $(u(t)-k)_+$. Для заданных чисел $0<\sigma_1<\sigma_2<1/2, k>0, 0<t<T$ определим последовательности

$$k_i=k\left[1-\sigma_2+2^{-i}(\sigma_2-\sigma_1)\right], i=0,1,2,..$$

$$t_i=\frac{t}{2}\left[1-\sigma_2+2^{-i}(\sigma_2-\sigma_1)\right], i=0,1,2,..$$

Пусть

$$f_i(x,\tau)=(u(x,\tau)-k_i)_+{}^{\nu},\nu=(p+q-2)/p,$$
$$m_i(\tau)=\mu_\omega(\{x\in V:u(x,\tau)>k_i\}),M_i=\sup_{t_i<\tau<t} m_i(\tau),$$
$$D_i(\tau)=\sum_{x,y\in V}\left|D_y f_i(x,\tau)\right|^p\omega(x,y).$$

Поскольку $b=q/\nu<p$, в силу неравенств Фабэра-Крана, Гельдера и Юнга имеем

$$\sum_{x\in V} f_{i+1}(x,\tau)^b d_\omega(x)\le m_{i+1}(\tau)^{1-\frac{b}{p}}\Lambda_p(m_{i+1}(\tau))^{-\frac{b}{p}}D_{i+1}(\tau)^{\frac{b}{p}}$$
$$\le\varepsilon^{\frac{p}{b}}D_{i+1}(\tau)+\varepsilon^{-\frac{p}{p-b}}\Lambda_p(m_{i+1}(\tau))^{-\frac{b}{p-b}}m_{i+1}(\tau).$$

Здесь $\varepsilon>0$ произвольное число. Интегрируя последнее неравенство, получим

$$\int_{t_{i+1}}^{t}\sum_{x\in V} f_{i+1}(x,\tau)^b d_\omega(x)d\tau\le\varepsilon^{\frac{p}{b}}\int_{t_{i+1}}^{t}D_{i+1}(\tau)d\tau$$
$$+\varepsilon^{-\frac{p}{p-b}}\int_{t_{i+1}}^{t}\Lambda_p(m_{i+1}\tau))^{-\frac{b}{p-b}}m_{i+1}(\tau)d\tau$$
$$\le\varepsilon^{\frac{p}{b}}\int_{t_{i+1}}^{t}D_{i+1}(\tau)d\tau+\varepsilon^{-\frac{p}{p-b}}t\Lambda_p(M_{i+1})^{-\frac{b}{p-b}}M_{i+1}.$$

Применяя неравенство Каччопполи с $\tau_1=t_i,\tau_2=t_{i+1},h=k_i$, получим

$$L_i := \sup_{t_i<\tau<t} \sum_{x\in V} f_i(x,\tau)^b d_\omega(x) + \int_{t_i}^{t} D_i(\tau)d\tau$$

$$\le \frac{\gamma 2^i}{t(\sigma_2-\sigma_1)} \int_{t_i}^{t} \sum_{x\in V} f_{i+1}(x,\tau)^b d_\omega(x)d\tau$$

$$\le \frac{\gamma 2^i}{t(\sigma_2-\sigma_1)} \varepsilon^{\frac{p}{b}} \int_{t_{i+1}}^{t} D_{i+1}(\tau)d\tau + \frac{\gamma 2^i}{t(\sigma_2-\sigma_1)} \varepsilon^{-\frac{p}{p-b}} \Lambda_p(M_{i+1})^{-\frac{b}{p-b}} M_{i+1}.$$

Положим

$$\frac{\gamma 2^i}{t(\sigma_2-\sigma_1)} \varepsilon^{\frac{p}{b}} = \delta.$$

Имеем

$$L_i \le \delta L_{i+1} + \frac{\gamma 2^{\frac{pi}{p-b}}}{(\sigma_2-\sigma_1)^{\frac{p}{p-b}}} \delta^{-\frac{b}{p-b}} t^{-\frac{b}{p-b}} \Lambda_p(M_\infty)^{-\frac{b}{p-b}} M_\infty.$$

Здесь

$$t_\infty = \frac{t}{2}(1-\sigma_2), k_\infty = k(1-\sigma_2), M_\infty = \sup_{t_\infty<\tau<t} \mu_\omega(x\in V : u(x,\tau) > k_\infty).$$

Итерируя это неравенство, получим

$$L_0 \le \delta^j L_j + \left(\sum_{i=0}^{j} \delta^i 2^{\frac{pi}{p-b}}\right) \frac{\gamma t^{-\frac{b}{p-b}}}{(\sigma_2-\sigma_1)^{\frac{p}{p-b}}} \Lambda_p^{-\frac{b}{p-b}}(M_\infty) M_\infty.$$

Устремляя $j \to \infty$ и выбирая $\delta < 2^{-\frac{p}{p-b}}$, получим

$$\sup_{t(1-\sigma_1)<\tau<t} \sum_{x\in V} (u(x,\tau)-k(1-\sigma_1))^q{}_+ d_\omega(x) \le L_0$$

$$\le \frac{\gamma}{(\sigma_2-\sigma_1)^{\frac{q}{p-2}}} t^{-\frac{q}{p-2}} \Lambda_p(M_\infty)^{-\frac{q}{p-2}} M_\infty .$$

Далее, пусть

$$\tau_n = \frac{t}{2}(1-\sigma 2^{-n}), h_n = k(1-\sigma 2^{-n}),$$

$$\overline{h}_n = \frac{h_n + h_{n+1}}{2} = k(1-3\sigma 2^{-n-2}), n \ge 0,$$

$$Y_n = \sup_{\tau_n<\tau<t} \mu_\omega(\{u(x,\tau) > h_n\}).$$

По неравенству Чебышева

$$Y_{n+1} \le 2^{(n+2)q} \sigma^{-q} k^{-q} \sup_{\tau_{n+1}<\tau<t} \sum_{x\in V} (u(x,\tau)-\overline{h_n})_+ d_\omega(x).$$

Таким образом, получаем

$$Y_{n+1} \le \gamma \sigma^{-\frac{q(p-1)}{p-2}} 2^{\frac{n(p-2)+q}{p-2}} t^{-\frac{q}{p-2}} k^{-q} \Lambda_p(Y_n)^{-\frac{q}{p-2}} Y_n .$$

Учитывая свойства Λ_p

$$Y_{n+1} \le \gamma \sigma^{-\frac{q(p-1)}{p-2}} 2^{\frac{n(p-2)+q}{p-2}} t^{-\frac{q}{p-2}} k^{-q} \Lambda_p(Y_0)^{-\frac{q}{p-2}} Y_n^{1+\frac{pq}{N(p-2)}} Y_0^{-\frac{pq}{N(p-2)}} .$$

Отсюда выводим, что $Y_n \to 0, n \to \infty$ при условии, что

$$k^{-1} t^{-\frac{1}{p-2}} \Lambda_p(Y_0)^{-\frac{1}{p-2}} \le \gamma_0(q,p,N) .$$

Отсюда следует, что

$u(x,t) \le k, x \in V.\square$

Теорема. Пусть $u_0 \in l^1(V), u_0 \ge 0.$ Тогда задача Коши имеет единственное решение и для всех

$$t > 0$$
$$\|u(t)\|_{l^1(V)} = \|u_0\|_{l^1(V)},$$
$$\|u(t)\|_{l^\infty(V)} = \gamma \|u_0\|_{l^1(V)} \psi_1^{(-1)}(t^{-1} \|u_0\|_{l^1(V)}^{-(p-2)}).$$

Примеры. Пусть $G = Z^N, \Lambda_p(v) = \gamma_0 v^{-p/N}$, тогда

$$\psi_r(s) = \gamma_0 s^{\frac{N(p-2)+pr}{Nr}}, s > 0 .$$

Следовательно,

$$\|u(t)\|_{l^\infty(V)} \le \gamma \|u_0\|_{l^1(V)}^{\frac{p}{N(p-2)+p}} t^{-\frac{N}{N(p-2)+p}} .$$