

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
РОСТОВСКИЙ ГОСУНИВЕРСИТЕТ
ЮЖНО-РОССИЙСКИЙ ГОСУНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИКИ И СЕРВИСА
ВОЛГОДОНСКИЙ ИНСТИТУТ СЕРВИСА

Комплексный анализ Теория операторов Математическое моделирование

Владикавказ
Изд-во ВНЦ РАН
2006

ББК 22.16
УДК 517 + 519
К 63

Ответственные редакторы:

доктор физико-математических наук Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК,
доктор физико-математических наук А. Г. КУСРАЕВ

Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование / отв. ред. Ю. Ф. Коробейник и А. Г. Кусраев.—
Владикавказ: Изд-во ВНИЦ РАН, 2006.—349 с.

В сборник вошли доклады, прочитанные на Международной конференции «Теория операторов. Комплексный анализ. Математическое моделирование», состоявшейся в сентябре 2005 года в г. Волгодонске Ростовской области на базе Волгодонского филиала Южно-Российского государственного университета экономики и сервиса. Конференция была организована в рамках празднования 90-летия Ростовского государственного университета и приурочена к 75-летию профессора РГУ Ю. Ф. Коробейника.

ISBN 5-93000-037-9

- © Институт прикладной математики и информатики
ВНИЦ РАН, 2006
- © Ростовский государственный университет, 2006
- © Волгодонский институт сервиса ЮРГУЭС, 2006

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	7
Налбандян Ю. С. Даты, имена, гипотезы	11
ЧАСТЬ I. КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ	
Абанин А. В. Индуктивные абсолютно представляющие системы подпространств	27
Иванова О. А., Мелихов С. Н. Левый обратный к опера- тору сужения на весовых (LB)-пространствах целых функций	35
1. Специальные семейства плюрисубгармонических функций	35
2. Применение к задаче о левом обратном к оператору сужения	43
3. Примеры функций W , для которых оператор R не имеет левого обратного	46
Литература	47
Карапетянц А. Н., Кодзоева Ф. Д. Характеризация функций из весового аналитического пространства Бесова на единичном диске	48
1. Введение	48
2. Вспомогательные сведения	49
3. Характеризация функций из пространства $B_p^\lambda(\mathbb{D})$	52
4. Дальнейшие свойства пространств $B_p^\lambda(\mathbb{D})$	61
Литература	62
Климентов С. Б. Теорема двойственности для классов Харди обобщенных аналитических функций	63
1. Введение. Формулировка основных результатов	63
2. Вспомогательные результаты	65
3. Доказательство теоремы 2	70
Литература	73
Коробейник Ю. Ф. Весовые пространства бесконечно дифференцируемых функций многих вещественных переменных	74
1. Основные пространства и некоторые их свойства	74
2. Многочлены и экспоненты в ВПБДФ	83
3. Абсолютная сходимость в ВПБДФ рядов из экспонент с мнимыми показателями	87
4. О непрерывности некоторых операторов в ВПБДФ	95

5. Примеры	99
6. Заключительные замечания	105
Литература	107
Никишин Ф. И. О базисах в пространствах ультрадифференцируемых функций	109
Хабибуллин Б. Н. Теоремы единственности для голоморфных функций и выметание	118
Введение	118
1. Основные понятия, постановки задач и выметание	119
2. Возвращение к дивизорам нулей и дивизорам неединственности ..	122
3. Субгармонические двойственные версии следствий 1 и 2	125
4. Построение функций Аренса — Зингера и Йенсена	129
Литература	131
Шерстюков В. Б. Об одном подклассе целых функций вполне регулярного роста	133
1. Введение	133
2. Критерий полной регулярности роста	134
3. Основной результат	137
Литература	140
ЧАСТЬ II. ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ	
Драгилев М. М. Замечание к одной теореме Пелчинского ..	145
Козоброд В. Н. Периодические случайные решения дифференциальных уравнений	149
1. Периодические случайные процессы	150
2. Линейные уравнения	155
3. Уравнения с параметром	162
Литература	168
Кусраев А. Г. Анализ, алгебра и логика в теории операторов	171
Введение	171
1. Анализ: Пространство Канторовича	174
2. Операторы: Проблема Викстеда	177
3. Анализ: Функциональное уравнение Коши	180
4. Алгебра: Расширения полей	184
5. Логика: Булевозначное моделирование	187
6. Логика: Правила Эшера	191
7. Синтез: Булевозначные числа	194
8. Операторы: Результаты	197
Литература	203

Пасенчук А. Э., Кабельков А. Н. Двумерный дискретный оператор Винера — Хопфа с мероморфным символом	205
Введение	205
1. Классы корректности	207
2. Описание образа двумерного дискретного оператора Винера — Хопфа с мероморфным символом	210
Литература	212
Семенов Е. М. Строго сингулярные вложения	214
1. Введение	214
2. Экстремальные вложения	217
3. Вложение конкретных классов г. i. пространств	218
Литература	220
Фетисов В. Г. L -характеристики нелинейных операторов суперпозиции Немыцкого	222
Введение	222
1. Вспомогательные сведения	222
2. Оператор суперпозиции в пространствах Лебега — Рисса	225
3. Оператор суперпозиции в модулярных пространствах Орлича	227
Литература	231
Филиппенко В. И. Спектральные разложения квазидифференциальных операторов по собственным функциям ...	232
Шишкин А. Б. Однородные уравнения π -свертки	237
 ЧАСТЬ III. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	
Астахов В. И., Науменко Я. А. Интегральные уравнения первого рода в парах пространств на поверхностях с краем	243
Богачев В. А., Богачев Т. В. Использование информационных технологий при изучении математических дисциплин	256
Буслаев А. П., Таташев А. Г., Яшина М. В. Устойчивость потоков на графах	263
Введение	263
1. Замкнутые сети	264
2. Открытые системы	270
3. Кольцо с управлением	273
Литература	283

Думачев В. Н., Родин В. А. Когерентное взаимодействие аттракторов двумерных отображений	285
1. Введение	285
2. Управление числом решений системы (3)	287
3. Заключение	290
Литература	291
Жданов В. С., Родин В. А. Оптимальное налогообложение и определение реальной ситуации ухода в «теневую экономику» производственной фирмы	292
1. Принципиальная модель деятельности фирмы	293
2. Налог на прибыль	294
3. Акцизный налог	295
4. Математическое описание особенностей налогообложения	297
5. Решение задачи налоговых органов методом множителей Лагранжа	298
6. Примеры решения задач	298
Литература	300
Каменецкий Е. С. Модели аэродинамики атмосферы над сложной подстилающей поверхностью	301
Введение	301
1. Трехмерные модели	304
2. Двумерные модели, не рассматривающие изменение метеоэлементов с высотой	311
3. Двумерные модели, не рассматривающие изменение метеоэлементов вдоль одной из горизонтальных координат	313
4. Граничные условия	320
Заключение	322
Литература	323
Кирютенко Ю. А. О компьютерных технологиях в образовании	326
Введение	326
1. Предположения о роли компьютеров в образовании	328
2. Возможности компьютера в образовании	330
3. Заключение	334
Кравченко П. Д., Дудченко А. Н. Применение математических и эвристических методов при оптимизации конструкции шиберной задвижки	335
Филькин Г. В. Приближенные фундаментальные решения уравнения диффузии с переменными коэффициентами диффузии в аналитическом виде, применение на практике	344

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящий сборник вошли доклады, прочитанные на Международной конференции «Теория операторов. Комплексный анализ. Математическое моделирование», состоявшейся 5–8 сентября 2005 года в г. Волгодонске Ростовской области на базе Волгодонского филиала (директор В. Н. Козоброд) Южно-Российского государственного университета экономики и сервиса. Организаторами конференции выступили Институт прикладной математики и информатики Владикавказского научного центра Российской академии наук (директор А. Г. Кусраев), Ростовский государственный университет (ректор А. В. Белоконь), Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса (ректор А. Г. Сапронов).

Конференция была организована в рамках праздничных мероприятий, посвященных 90-летию Ростовского государственного университета, и приурочена к 75-летию крупного российского математика, заслуженного деятеля науки РФ, профессора РГУ Юрия Федоровича Коробейника. Ю. Ф. Коробейник опубликовал более 300 научных статей и несколько монографий, оказавших значительное влияние на развитие комплексного анализа. Он сыграл огромную роль в укреплении и развитии Ростовского государственного университета и механико-математического научно-образовательного комплекса РГУ. В 1960-х годах в стенах Ростовского университета зародилась научная школа профессора Коробейника «Линейные операторы в комплексном анализе», по сей день пользующаяся заслуженным признанием во всем мире.

Более подробно об истории Ростовского государственного университета и его научной элите можно прочитать в статье Ю. С. Налбандян, которая открывает настоящий сборник.

В соответствии с основными научными направлениями конференции материал сборника разбит на три части.

Первая часть посвящена комплексному анализу. Вводится понятие индуктивной абсолютно представляющей системы подпространств и описывается метод Ю. Ф. Коробейника, разработанный им для абсолютно представляющих систем (А. В. Абанин). Исследуется задача о существовании левого обратного к оператору сужения на нулевое множество специальной целой функции, определенному на индуктивном пределе весовых банаховых пространств целых функций, задаваемых радиальными весами (О. А. Иванова, С. Н. Мелихов). Найдена характеристика функций из весового аналитического пространства Бесова в терминах весового проектора Бергмана (А. Н. Карапетянц, Ф. Д. Кодзоева). Дано описание двойственного пространства к пространству классов Харди обобщенных аналитических функций (С. Б. Климентов). Водятся и изучаются наиболее общие из известных к настоящему времени пространств функций, бесконечно дифференцируемых в открытом множестве вещественного конечномерного пространства; указываются условия, при которых в этих пространствах содержатся многочлены и экспоненты, а также условия, обеспечивающие непрерывность операторов частного дифференцирования и умножения на функцию; находятся критерии абсолютной сходимости в данных пространствах рядов из экспонент с мнимыми показателями и описывается свойство определенной «заразительности» поведения таких рядов (Ю. Ф. Коробейник). Установлена базисность различных систем специальных функций в весовых пространствах ультрадифференцируемых функций (Ф. И. Никишин). Изложен метод выметания, позволяющий находить для конкретных весовых пространств голоморфных функций бесконечные наборы достаточных условий для множеств единственности или необходимых условий для нулевых множеств (Б. Н. Хабибуллин). Обсуждается проблема А. Ф. Леонтьева о достаточных условиях полной регулярности целой функции экспоненциального типа в терминах последовательности ее нулей; дано частичное решение этой проблемы (В. Б. Шерстюков).

Во второй части собраны доклады, относящиеся к теории операторов. Устанавливается существование неметризуемого локально выпуклого пространства, содержащего пару не квазиэквивалентных

шаудеровских базисов (М. М. Драгилев). Дан обзор новейших результатов о строго сингулярных и дизъюнктно строго сингулярных вложениях в классе перестановочно инвариантных банаховых функциональных пространств (Е. М. Семенов). Еще один обзор содержит результаты относящиеся к теории существования случайных периодических и стационарных решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве со случайными периодическими и стационарными возмущениями (В. Н. Козоброд). Используя комбинированные методы анализа, алгебры и математической логики, обсуждаются разные аспекты проблемы Викстеда об ограниченности нерасширяющих операторов в пространстве Канторовича (А. Г. Кусраев). Для двумерного дискретного оператора Винера — Хопфа с мероморфным символом строится пространство последовательностей, в котором он нормально разрешим, хотя и не фредгольмов (А. Э. Пасенчук, А. Н. Кабельков). Рассмотрены некоторые свойства оператора суперпозиции Немыцкого в локально ограниченных функциональных пространствах (В. Г. Фетисов). Рассмотрен вопрос о спектральном разложении квазидифференциального оператора по обобщенным собственным функциям (В. И. Филиппенко). Показано, что каждое решение уравнения π -свертки можно аппроксимировать линейными комбинациями элементарных решений этого уравнения (А. Б. Шишкин).

Третья часть посвящена математическому моделированию. Рассмотрена модель физического поля (электрического, магнитного т. п.) и для соответствующей системы дифференциальных уравнений установлена корректность в пространствах, естественных для задач электромагнитного поля (В. И. Астахов, Я. А. Наumenко). Статья В. А. Богачева, Т. В. Богачева посвящена использованию информационных технологий при изучении математических дисциплин, а работа Ю. А. Кирютенко — весьма актуальному в настоящее время вопросу о применении компьютеров в образовании. Исследуется задача устойчивости потоков частиц (автомобилей) на сети, представляющей собой ориентированный граф, ребра которого соответствуют перегонам дорог, а вершины перекресткам; состояние потока моделируется системой дифференциальных уравнений

(А. П. Буслаев, А. Г. Таташев, М. В. Яшина). Изучается модель типа Ферхюльста — Пирла для случая двух взаимодействующих популяций (В. Н. Думачев, В. А. Родин). Рассмотрена модель оптимального налогообложения и определения ухода фирмы в теневую экономику (В. С. Жданов, В. А. Родин). В сборник помещен также обзор математических моделей аэродинамики атмосферы над сложной подстилающей поверхностью, характерной для горных и предгорных районов (Е. С. Каменецкий). Рассмотрен практический пример совместного применения математических моделей и эвристических приемов при оптимизации конструкции отдельных элементов шиберной задвижки на трубопроводе (П. Д. Кравченко, А. Н. Дудченко). Рассмотрено применение фундаментального решения уравнения диффузии с коэффициентом, зависящим только от времени, при решении задачи перемешивания сточных вод в водотоке (Г. В. Филькин).

А. Г. Кусраев

1.

Альма-матер, альма-матер —
Легкая ладья,
Белой скатертью дорога
В ясные края...

Д. Сухарев

В октябре 2005 г. в Ростове-на-Дону проходили торжества в честь 90-летия Ростовского государственного университета. Однако так ли все просто с этой годовщиной? Ведь в 1959 году эту же дату уже отмечали — тогда отсчет велся от 1869 г., от основания Варшавского Императорского университета. Новое учебное заведение, укомплектованное высококласными специалистами, быстро вошло в число ведущих в России. Этому в немалой степени способствовал коллектив ученых, работавших на физико-математическом факультете (академик Петербургской АН Н. Я. Сонин, профессора М. А. Андреевский, Н. Н. Алексеев, В. А. Анисимов, Т. К. Бабчинский, Г. В. Вороной, Н. Н. Зинин, П. О. Сомов).

В июле 1915 г. в связи с приближением немцев к Варшаве университет был эвакуирован в Москву. Министерство предлагало разные варианты дальнейшего пребывания, но ни Москва, ни Саратов, ни Казань не были готовы принять все факультеты. Наиболее приемлемые условия предложила Ростовская городская дума: «...дать в Ростове приют всему Варшавскому университету; для медицинского факультета помещения уже имеются, а для других факультетов городское управление обязуется срочно приготовить все потребные помещения» (Государственный архив Ростовской области (ГАРО), ф. 527, оп. 1, д. 34). И 1 декабря 1915 г. уже начались занятия на новом месте.

Таким образом, нынешнее 90-летие — формально это 90-летие пребывания университета на Донской земле (против того, чтобы вести историю с 1869 года, категорически высказались поляки). Между тем эту же годовщину можно отметить еще несколько раз. Судите сами.

1917 год. До мая этого года университет продолжал называться Варшавским Императорским и подчинялся Варшавскому учебному округу. 5 мая декретом Временного правительства Варшавский Императорский университет был закрыт, а на его базе, как следует из архивных документов, был учрежден Донской университет. При этом деятельность учебного заведения не прекращалась, а «весь личный состав, как по учебной, так и административной, и хозяйственной части», был переведен в Донской университет «на соответствующие должности, причем выборные лица — на срок, остающийся за ними полномочий...» (Российский Государственный исторический архив (РГИА), ф. 733, оп. 226, № 241, л. 87).

Последующие три года университет несколько раз менял административное подчинение, а в 1918–1919 гг., когда Ростов находился под властью белогвардейцев, носил имя выпускника историко-филологического факультета Петербургского университета, Председателя Донского Войскового круга Митрофана Петровича Богаевского (расстрелянного Красной Армией 1 апреля 1918 г.)

В 1925 году университет переименован в Северо-Кавказский государственный. А вскоре в стране началась реорганизация системы высшего образования. Фактически все университеты (за исключением Московского и Ленинградского) преобразовывались в специализированные институты. В 1930 году был расформирован и СКГУ. На его базе были образованы медицинский институт (ныне Ростовский государственный медицинский университет), педагогический институт (сегодня — Ростовский государственный педагогический университет), финансово-экономический институт (Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)). Однако период «бездействия» был коротким.

В 1931 г. университет возрождается. Факультеты (физико-математический, химический, геолого-ботанический) создаются в 1933 г. «На основании постановления коллегии Наркомпроса от 4.04 с. г. и распоряжения зам. Наркома просвещения т. Кржижановского от 16.04 с. г. с 3.05 с. г. СКГУ переходит от отделенческой структуры построения и управления на факультетскую систему.» (Приказ по университету № 55 от 3 мая 1933 г.) Этим же приказом исполняющим обязанности декана физико-математического факультета назначается Михаил Павлович Черняев (1891–1962). 16 марта 1934 г. выходит приказ Наркомпроса о переименовании университета в Ростовский-на-Дону.

В последующие годы серьезных изменений в статусе РГУ уже не происходило (разве что в разное время он носил имена В. М. Молотова и М. А. Суслова). Сегодня Ростовский государственный университет (который все чаще называют классическим — из-за преобразования в университеты большинства высших учебных заведений Ростова) — ведущий университет на Юге России, включающий в свой состав 14 факультетов, 10 научно-исследовательских институтов, созданный на базе Вычислительного центра Южно-Российский региональный центр информатизации, 4 филиала в городах Ростовской области и республиках Северного Кавказа.

2.

Страна талантами богата,
Но все ж, куда ни погляди,
Студенты славного физмата
Всегда и всюду впереди.

*И. Бердичевский,
И. Литвинов*

Нынешний механико-математический факультет — один из старейших в РГУ. Как уже было отмечено, физико-математический факультет (с естественным и математическим отделениями) фактически в полном составе прибыл в Ростов-на-Дону в 1915 г. Ученых старшего поколения, упомянутых в первой части, к этому времени заменили Д. Мордухай-Болтовской (1876–1952), В. П. Вельмин (1885–1974), Д. Н. Горячев (1867–1949), В. И. Романовский (1879–1954), а также недавние выпускники М. Ф. Субботин и С. А. Хвялковский. В Ростове к ним в последующие годы присоединятся представитель Петербургской математической школы Б. М. Коялович (1867–1941), выпускник Московского университета М. П. Черняев (1891–1962), воспитанники Варшавского университета В. К. Матышук (1893–1961) и Н. М. Несторович (1891–1955).

Восстанавливает свою деятельность Общество естествоиспытателей, учрежденное в Варшаве в 1888 г. (см. [3]). Физмат на некоторое время (1922/1923 уч. г. — 1931 г.) входит в состав нового педагогического факультета на правах физико-технического отделения. Пополнение преподавательских кадров происходит во многом за счет собственных выпускников. Так, в разные годы на факультет вернутся

А. П. Гремяченский, Г. П. Самко, В. И. Квальвассер, М. Г. Хапланов, П. С. Палков, А. Ф. Бермант. Они станут известными учеными и ведущими педагогами университета.

После 1931 г. значительный вес в учебном процессе приобретают фундаментальные математические дисциплины. Возросший уровень подготовки абитуриентов позволяет расширить объем и повысить сложность математических курсов. Для качественной организации учебного процесса создается кафедра высшей математики, которую возглавляет Николай Михайлович Несторович (1891–1955 гг.), замечательный педагог, видный специалист в области геометрии Лобачевского. В 1951 г. выйдет из печати монография «Геометрические построения на плоскости Лобачевского», итог 20-летней научной деятельности известного ученого. «По богатству идей и содержащихся в ней фактов она является единственной в мировой литературе по данному вопросу» [10, с. 165].

Активно ведется на физмате научная работа, налаживаются международные связи. В 1940 г., выступая на торжественном собрании, посвященном 25-летию пребывания университета в Ростове, Д. Д. Мордухай-Болтовской отметит: «Тенденция к выдвижению университета преимущественно как организатора научно-исследовательской работы выступает с самого начала его возрождения... Более всего связи с прошлым имеет физмат, в особенности его математическое отделение, так как там все преподаватели, за исключением доцента И. Я. Верченко, или бывшие студенты нашего университета, или аспиранты. Более молодое поколение несет на себе не только педагогическую работу, но и интенсивную работу исследовательских институтов» (ГАРО, ф. Р-46, оп. 10, № 57, л. 46–49).

Успешное развитие университета было прервано Великой Отечественной Войной. О тех, кто сражался на фронтах, участвовал в партизанском движении, участвовал в строительстве оборонных сооружений, а также об учебном процессе и научных исследованиях времен эвакуации можно узнать из соответствующих глав [1] и [2]. В мае 1944 г. возобновляются занятия в Ростове. Увеличивается набор студентов, в университет приходят недавние фронтовики (М. М. Драгилев, И. П. Оборотов, Н. Н. Рожанская, И. М. Мельник и мн. др.), восстанавливается Научно-исследовательский физико-математический институт, возобновляет деятельность областное физико-математическое общество, которое можно считать преемником Общества естествоиспытателей.

На новый уровень выходит ростовская школа механики. Ее родоначальником можно считать Дмитрия Никаноровича Горячева, выпускника Московского университета ученика Н. Е. Жуковского, приехавшего в Ростов из Варшавы (см. [2, с. 19–20], [10, с. 169–178]). Во время реорганизаций на некоторое время кафедра механики прекращала свое существование и была возрождена в 1934 г. В разные годы ее возглавляли Р. Я. Штейман, А. А. Батырев, а с 1938 г. кафедрой теоретической механики руководил Александр Петрович Коробов (1885–1952), воспитанник Киевского политехнического института, работавший в Новочеркасске. За десять лет он заложил основы лаборатории теории упругости, подготовил немало учеников (см. [2, с. 20], [10, с. 179–181]), а в 1948 г. передал бразды правления А. К. Никитину.

В конце 40-х — начале 50-х годов в коллектив кафедры теоретической механики вливаются воспитанники Московского университета, молодые кандидаты наук Н. Н. Моисеев, И. И. Ворович, Л. А. Толоконников, А. С. Космодамианский.

Будущий действительный член Российской академии наук Никита Николаевич Моисеев (1917–2000) в своих воспоминаниях [4] очень тепло отозвался об университете, с которым его связали несколько лет активной научной и общественной (в основном, спортивной) работы. В Ростовском государственном университете в 1950–1956 гг. Н. Н. Моисеев преподавал теоретическую механику и проводил исследования в области механики и гидродинамики, в дальнейшем его работы были посвящены численным методам в теории оптимального управления, теории иерархических систем, имитационному моделированию, автоматизации проектирования, междисциплинарным исследованиям экологических проблем. В каждой из этих областей Никите Николаевичу принадлежат фундаментальные результаты. Он автор более 300 научных и научно-популярных статей и 20 монографий, лауреат Государственной премии СССР и Премии Совета министров СССР, лауреат премии «ГЛОБ-500», действительный и почетный член четырех академий.

Иосиф Израилевич Ворович (1920–2001), действительный член АН СССР, начавший работу в Ростове в 1950 г., с 1961 г. руководил кафедрой теории упругости, «одним из первых среди механиков использовал топологические и вариационные методы функционального анализа для исследования тонких пластин и оболочек и в короткий срок стал крупным специалистом по теории упругости, нелиней-

ной теории оболочек, механике сплошных сред» [2, с. 31]. В 1971 г. он возглавил только что созданный Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики, которым руководил до последних дней своей жизни (и который теперь носит его имя). И. И. Ворович — автор и соавтор более 300 опубликованных работ в области механики, машиностроения, прикладной математики, в том числе 14 монографий, лауреат Государственных премий СССР и Российской Федерации. Благодаря его научному и педагогическому таланту сформировалась знаменитая на весь мир ростовская школа механиков-упругистов.

С 1949 года работал на кафедре теоретической механики РГУ Леонид Александрович Толоконников (1923–1998), Заслуженный деятель науки и техники Российской Федерации, переехавший позже в Тулу и заложивший там основы Тульской школы механики. Вместе с Н. Н. Моисеевым и И. И. Воровичем в Ростове он сумел сплотить способных студентов и внести свежую струю в образовательную и научную работу. Среди учеников Леонида Александровича, выпускников РГУ, следует отметить профессоров, докторов наук С. П. Яковлева, В. Г. Зубчанинова, В. Г. Громова.

Усиливается в эти годы и коллектив математиков. В 1953 г. в Ростовский университет приезжает из Казани Федор Дмитриевич Гахов (1906–1980), будущий академик АН Белоруссии, один из родоначальников теории краевых задач аналитических функций. Как отмечено в [2, с. 26–27], он «сплотил вокруг себя большой работоспособный коллектив», сформировал свою научную школу, в общей сложности (в Ростове и Минске) подготовил более 50 кандидатов и 10 докторов наук. Благодаря деятельности его учеников (Р. Х. Зарипов, Л. А. Чикин) начинается свою историю Вычислительный центр РГУ (первоначально подчинявшийся кафедре математического анализа, см. § 3) и создается кафедра вычислительной математики (Л. А. Чикин станет ее первым заведующим). В 1961 г. Ф. Д. Гахов переехал в Минск, где в Белорусском государственном университете возглавлял кафедру математического анализа, затем кафедру теории функций и функционального анализа, а впоследствии и математический факультет БГУ (см. [2, с. 26–27] и [5, с. 39–44]).

После разделения физмата в 1961 г. на физический и механикоматематический факультеты возникают новые научные направления, происходит рост числа кафедр (см. также § 3). В 1961 их было семь (кафедру математического анализа возглавлял профессор

М. Г. Хапланов, дифференциальных и интегральных уравнений — профессор В. С. Рогожин, геометрии — профессор К. К. Мокрищев, высшей математики — доцент С. Е. Белозеров, вычислительной математики — доцент Л. С. Чикин, теории упругости — профессор И. И. Ворович, теоретической гидроаэромеханики — профессор А. К. Никитин). В 1965 г. из состава кафедры математического анализа выделяется кафедра теории функций и функционального анализа (ее возглавляет М. Г. Хапланов, а кафедрой математического анализа в это время руководит С. Я. Альпер), в 1970 г. создается кафедра методов теории функций комплексного переменного (первым заведующим стал Ю. Ф. Коробейник; кафедра просуществовала до 1987 г.). В 1972 г. кафедра вычислительной математики, в соответствии с тематикой проводимых исследований, разделяется на три. Кафедру алгебры и дискретной математики возглавляет профессор И. Б. Симоненко, кафедру вычислительной математики — профессор В. И. Юдович, кафедру математического обеспечения ЭВМ и АСУ — профессор А. Б. Горстко (с 1985 г. эта кафедра называется кафедрой прикладной математики и программирования). В 1974 г. открывается отделение прикладной математики, в 1976 г. кафедра высшей математики фактически распускается, а вместо нее создается кафедра исследования операций (заведующий — профессор С. В. Жак).

Сегодня мехмат РГУ — это 12 кафедр, подготовка студентов по четырем специальностям, 15 научных направлений, в рамках которых ведут исследования более 30 докторов и более 90 кандидатов наук. Более подробную информацию о жизни факультета в 1915–1985 гг. можно найти в [1; 2; 6, с. 44–101; 7, с. 109–118; 8].

Таким образом, можно считать, что нынешний мехмат — ровесник университета и тоже отмечает свое «девяностолетие». Существенную роль в его развитии сыграл тот факт, что на протяжении ряда лет во главе университета стояли представители физмата (мехмата).

В 1922–1924 гг. ректором был Владимир Петрович Вельмин. Выпускник Киевского университета был направлен на работу в Варшавский университет после сдачи магистерских экзаменов в 1909 г. В 1917 г. он стал ординарным профессором ДГУ, проработал в Ростове до 1950 г. (до своего переезда в Киев). Возглавлял кабинет алгебры (с 1920 г.), кафедру алгебры и теории чисел, руководил Ассоциацией НИИ Северо-Кавказского края. Его перу принадлежат

более 50 научных публикаций, в том числе — «Введение в теорию алгебраических чисел», практически первое учебное руководство по теории чисел на русском языке. Среди учеников В. П. Вельмина — Петр Степанович Папков (1899–1949), руководивший в 1938–1941 гг. Научно-исследовательским институтом физики и математики (впоследствии, в 1945–1948 гг., П. С. Папков был проректором РГУ по учебной работе); будущий действительный член АН БССР Дмитрий Алексеевич Супруненко (1915–1990), один из ведущих преподавателей физмата Ефим Львович Литвер (1915–1982).

27 марта 1934 г. приступает к исполнению обязанностей директора РГУ (так в период реорганизации, вплоть до 1938 г. назывались руководители университетов) Николай Андреевич Дернов (1891–1938), выпускник Петербургского университета, возглавлявший до этого Вятский педагогический институт и педагогический факультет Воронежского университета (см. [10]). Именно при Н. А. Дернове начинают функционировать физико-математический и биологический научные институты и научно-техническое бюро, подчиненное физико-математическому факультету. После доклада, сделанного Н. А. Дерновым в ЦК ВКП(б) и Наркомпросе (в связи с двадцатилетним юбилеем пребывания университета в Ростове), выделяются значительные средства на расходы по научно-учебному оборудованию, на строительство общежития для студентов, а город предоставляет дополнительное пятиэтажное здание (нынешний Главный Корпус, Б. Садовая, 105). Однако общее положение в стране отразилось и на судьбе Н. А. Дернова. 15 июля 1937 г. он освобожден от должности директора, вскоре исключен из рядов ВКП(б), а 22 июля — арестован. В 1938 г. Н. А. Дернов был расстрелян (в 1958 г. — реабилитирован посмертно).

С июля 1937 г. по февраль 1938 г. Ростовским университетом руководил Федор Николаевич Щеголев, а в 1938–1954 гг. — Семен Ефимович Белозеров, впоследствии возглавлявший кафедру высшей математики. Выпускник Саратовского университета, он стоял у руля РГУ в тяжелые военные годы (организовав эвакуацию в г. Ош и сумев сохранить педагогические кадры) и в напряженную эпоху послевоенного восстановления. Именно благодаря С. Е. Белозерову в Ростов были приглашены (с созданием вполне приемлемых условий для жизни и работы), упомянутые выше механики, Ф. Д. Гахов с группой своих учеников, прекрасный лектор и знаток теории множеств и интегралов в действительной области Ю. С. Очан. Все это в нема-

лой степени способствовало подъему учебной и научной деятельности физмата. Специалист в области истории физико-математических наук, автор пользующейся популярностью монографии «Пять знаменитых задач древности (история и современная теория)», С. Е. Белозеров заложил основы обстоятельного изучения истории университета.

С 1967 г. по 1970 г. проректором университета по научной работе работал Юрий Федорович Коробейник. Его деятельность в немалой степени способствовала становлению и развитию механико-математического учебно-научного комплекса.

С 1988 г. ректором (первым, избранным коллективом РГУ) является доктор физико-математических наук Александр Владимирович Белоконь, возглавлявший до этого (с 1981 г.) механико-математический факультет.

3.

И мы горды за свой предмет,
Работе трудной знаем цену:
Несем анализа мы свет
Всем тем, кто нам идет на смену.

Ю. Ф. Коробейник

Сегодня кафедра математического анализа мехмата РГУ, бесспорно, является одной из старейших кафедр. На основании имеющихся (хотя и скудных, неполных) архивных данных можно восстановить следующую картину.

На физико-математическом факультете Варшавского (Донского) университета существовали 11 кафедр, в том числе кафедра механики (ею руководил Д. Н. Горячев, сменивший на этом посту П. О. Сомова) и кафедра чистой математики (в эпоху педагогического факультета именовавшаяся «кафедрой чистой и прикладной математики»). В Государственном архиве Ростовской области сохранился рапорт профессоров Д. Д. Мордухай-Болтовского, Б. М. Кояловича, В. П. Вельмина (от 24.06.1920 г.) о переименовании кабинета чистой математики в кабинет геометрии и математических моделей и об учреждении двух новых кабинетов: анализа и алгебры (ф. 46, оп. 1, № 16, л. 38–39). Факультет проект утвердил, а авторы рапорта возглавили эти кабинеты (игравшие, судя по документам, роль кафедр).

После возобновления учебной деятельности в сентябре 1931 г. на физмате действовали (по косвенным упоминаниям в различных архивных документах и воспоминаниям преподавателей) три кафедры. Кафедру алгебры и теории чисел возглавлял П. С. Папков, анализа — Д. Д. Мордухай-Болтовской, геометрии — М. П. Черняев). Существует приказ по университету № 139 от 14 октября 1932 г. об объединении кафедр анализа и алгебры с назначением заведующим кафедрой анализа и алгебры профессора П. С. Папкова (в 1934 г. это объединение будет отменено, а из состава кафедры геометрии выделится кафедра теоретической механики и астрономии).

В послевоенные годы продолжается деятельность четырех математических кафедр (включая кафедру высшей математики), впоследствии (50-е годы) кафедры объединяются в две — математического анализа и алгебры, геометрии и высшей математики (эта ситуация сохранится до 1961 г.).

Известный ученый, выпускник Петербургского университета, сыгравший немалую роль в становлении ростовской математической школы, Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской заведовал кабинетом анализа в 20-е годы (после того, как Б. Я. Коялович не вернулся из командировки в Петроград), кафедру анализа возглавлял с 1931 по 1945 г. (с перерывом на время объединения с кафедрой алгебры). Материал о его жизни и деятельности можно найти в [2, с. 11–16; 10, с. 146–160; 11–14]. Влияние этого математика в той или иной степени испытали такие выдающиеся ученые, как М. Ф. Субботин, М. Я. Выгодский, Н. В. Ефимов, А. Ф. Бермант, а также многие специалисты, продолжившие его дело в Ростовском университете и других высших учебных заведениях.

Еще первокурсником включился в работу математического семинария, организованного Д. Д. Мордухай-Болтовским, Михаил Григорьевич Хапланов. В 1927 г. он будет зачислен сверхштатным аспирантом по Северо-Кавказской краевой научно-исследовательской Ассоциации, а позднее, в 1931 г., проработав ассистентом в Новочеркасске, а затем в Ростовском пединституте, займет единственную появившуюся в РГУ ассистентскую вакансию. 30 мая 1934 года М. Г. Хапланов защитил кандидатскую диссертацию, в 1935 г. получил звание доцента. Докторскую диссертацию ему удастся защитить только в 1961 г., поскольку на протяжении предшествующих лет он будет вести огромную административную работу. М. Г. Хапланов был заведующим астрономической обсерваторией, замести-

телем директора НИФМИ, в течение ряда труднейших лет возглавлял факультет («выделяется доцент М. Г. Хапланов, которому физмат многим обязан как декану» — из упомянутого ранее выступления Д. Д. Мордухай-Болтовского в 1940 г.). Долгие годы Михаил Григорьевич был председателем физико-математического общества, «в очередь» с Д. Д. Мордухай-Болтовским руководил кафедрой анализа: М. Г. Хапланов — в 1942–1947, 1950–1953, 1961–1965 гг., Д. Д. Мордухай-Болтовской с 1947 по 1949 гг. (последние два года своей работы в РГУ).

Впоследствии (как отмечено выше, в 1965 г.) Михаил Григорьевич сформировал и возглавил новую на факультете кафедру теории функций и функционального анализа и буквально до последнего дня жизни руководил ею и созданным им научным семинаром по тем же проблемам, в работе которого принимали участие математики других (в том числе и не ростовских) вузов. Этот семинар продолжает функционировать и сегодня.

Начав с работ по теории функций комплексного переменного в классическом духе, М. Г. Хапланов стал создателем нового направления, связанного с применением в теории функций идей и методов функционального анализа и линейных топологических пространств. Более подробную информацию можно найти в [2; 5, с. 237–240¹; 14].

С 1953 по 1960 гг. кафедрой математического анализа заведовал Федор Дмитриевич Гахов. На заседаниях «большого гаховского» семинара по математическому анализу и механике излагались наиболее важные результаты, полученные ростовскими математиками. Выступали здесь и представители других наук (в частности, химик В. И. Минкин, физиолог А. Б. Коган). Уделявший исключительно большое внимание педагогической работе, Ф. Д. Гахов обосновал необходимость разделения «сложнейшего агрегата», которым стала кафедра (а в ее ведении находились сотрудники вычислительного центра и аспиранты), на три новых, «одна из которых выполняла бы обязанности прежней кафедры, другая возглавила бы вычислительную специальность, а третья — специальная кафедра дифференциальных уравнений» (ГАРО, ф. 46, оп. 10, № 2161, л. 3.4).

После Ф. Д. Гахова и М. Г. Хапланова, с 1966 по 1971 гг., кафедрой руководил Семен Яковлевич Альпер, ученик Д. Д. Мордухай-Болтовского, доктор физико-математических наук, специалист в об-

¹Автором этой статьи является В. П. Захарюта, ученик М. Г. Хапланова, а не ошибочно указанный В. И. Филоненко.

ласти теории приближения функций комплексного переменного, автор более 30 научных работ, опубликованных, в том числе, в таких центральных журналах как «Доклады Академии наук СССР», «Успехи математических наук», «Известия Академии наук СССР».

Впоследствии у руля кафедры стояли И. М. Мельник и В. Т. Фоменко. В 1976 г. к руководству пришел заслуженный деятель науки Российской Федерации Юрий Федорович Коробейник, ученик С. Я. Альпера и М. Г. Хапланова, автор более 300 научных работ, подготовивший 22 кандидата и 4 доктора наук.

Занявшись изучением дифференциальных уравнений бесконечного порядка и операторов свертки в комплексной области, Ю. Ф. Коробейник в 1965 г. блестяще защищает докторскую диссертацию «Аналитические решения операторных уравнений бесконечного порядка», а в 1967 году получает звание профессора по кафедре теории функций и функционального анализа. Эти годы стали временем зарождения и становления в Ростовском университете научной школы «Линейные операторы в комплексном анализе», пользующейся заслуженным признанием.

Успешно и плодотворно руководя кафедрой математического анализа (с 1976 по 2000 гг.), Ю. Ф. Коробейник вел активную организаторскую работу, направленную на становление и развитие всего механико-математического учебно-научного комплекса. Более 30 лет он руководит научно-исследовательским семинаром кафедры (имеющим широкую известность и авторитет), в течение 15 лет он был президентом Ростовского математического общества, долгие годы успешно работал в НИИ механики и прикладной математики РГУ (заведовал теоретическим отделом, на общественных началах руководил лабораторией линейных операторов), активно трудился в редколлегии (в последние годы — в редакционном совете) журнала «Известия вузов. Северо-Кавказский регион», а с 2004 г. успешно сотрудничает с редколлекцией Владикавказского математического журнала, единственного специализированного математического издания в Южном федеральном округе. Юрий Федорович Коробейник — один из инициаторов установления плодотворных научных связей между математиками Ростовского университета и Институтом прикладной математики и информатики Владикавказского научного центра РАН, в котором он возглавил отдел комплексного анализа.

Да, кафедра математического анализа пережила вместе с университетом и факультетом все перипетии бурных лет, и на протяжении

всех этих лет ее коллектив решал самые серьезные научные и педагогические задачи. Что касается ее возраста... Можно вести ее историю от кафедры чистой математики (и, следовательно, признать 90-летней — как и университет, и факультет). Можно считать датой ее основания 1920-й год, выделение кабинета анализа. Можно — 1931-й. А можно продолжать вести поиск архивных документов. Ибо все это — наша история.

4.

Статья написана с использованием материалов (архивных, мемуарных, эпистолярных и т. п.), собранных за длительный период времени доцентом кафедры геометрии Маргаритой Бабкиной Налбандян, ушедшей из жизни в декабре 2004 г.

Автор также выражает благодарность Юрию Федоровичу Коробейнику за ценные замечания и уточнения.

Литература

1. Белозеров С. Е. Очерки истории Ростовского университета.—Ростов-на-Дону: ИРУ, 1959.
2. Коробейник Ю. Ф., Ерусалимский Я. М., Налбандян М. Б., Рожанская Н. Н. Механико-математический факультет Ростовского государственного университета (краткий исторический очерк).—Ростов-на-Дону: ИРУ, 1989.
3. Налбандян М. Б., Налбандян Ю. С. Из истории общества естествоиспытателей при Варшавском (Донском, Северо-Кавказском) университете.—Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1995.
4. Моисеев Н. Н. Как далеко до завтрашнего дня... Свободные размышления. 1917–1993.—М.: Тайдекс Ко, 2003.
5. Путиами познания. Биографические очерки о видных ученых Ростовского государственного университета им. М. А. Суслова.—Ростов-на-Дону: ИРУ, 1985.
6. Развитие науки в Ростовском государственном университете. 1915–1965.—Ростов-на-Дону: ИРУ, 1965.
7. Ростовский государственный университет (1915–1985).—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1985.
8. История отечественной математики. В 4-х томах. Т. 3. 1917–1967 / Под ред. И. З. Штокало.—Киев: Наукова думка, 1968.
9. Налбандян М. Б., Налбандян Ю. С. Из истории Ростовского университета. Николай Андреевич Дернов (1891–1938).—Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1991.
10. Ростовский государственный университет. 1915–1965. Статьи, воспоминания, документы.—Ростов-на-Дону: ИРУ, 1965.

11. Налбандян М. Б., Минковский В. Л., Мокрицев К. К., Хапланов М. Г. Д. Д. Мордухай-Болтовской (к 100-летию со дня рождения) // Вопросы истории естествознания и техники. Вып. 3/4 (56–57).—М.: Наука, 1977.—С. 102–103.
12. Налбандян Ю. С. Научно-педагогическая деятельность профессора Д. Д. Мордухай-Болтовского в Варшаве (1898–1916).—Деп. в ВИНТИ 20.07.1998, № 2290—В 98.—23 с.
13. Nalbandjan Yu. S. O dzialalnosci profesora D. D. Morduchaja-Boltowskiego w Waszawie w latach 1898–1916 // XXII Szkola Historii Matematyki. Krakow: Wydawnictwo Wydzialu Matematyki Stosowanie Akademii Gorniczo.—Hutnicze, 1999.—С. 162–168.
14. Налбандян М. Б., Налбандян Ю. С. Памятные даты: Д. Д. Мордухай-Болтовской (1876–1952) и М. Г. Хапланов (1902–1977) // Тр. участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова.—Ростов-на-Дону, 2002.—С. 11–14.
15. Белозеров С. Е., Миесерова С. И., Ткачева В. А. Труды ученых механико-математического факультета Ростовского университета (библиографический указатель).—Вып. 1. 1869–1919.—Ростов-на-Дону, 1972.
16. Белозеров С. Е., Миесерова С. И., Ткачева В. А. Механико-математический факультет Ростовского университета (библиографический справочник). Вып. 2. Математики (1920–1970).—Ростов-на-Дону, 1972.

Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет
E-mail: nalb@math.rsu.ru

Часть I

Комплексный
анализ

ИНДУКТИВНЫЕ АБСОЛЮТНО ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ
СИСТЕМЫ ПОДПРОСТРАНСТВ

А. В. Абанин

1. В соответствии с определением, введенным Ю. Ф. Коробейником в [1], последовательность $\mathcal{H} = (H_k)_{k=1}^\infty$ нетривиальных подпространств локально выпуклого пространства (ЛВП) E называется *абсолютно представляющей системой подпространств* (АПСП) в E , если любой элемент $x \in E$ можно представить в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad x_k \in H_k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

причем ряд в правой части равенства (1) сходится в E абсолютно. В терминах набора $\mathcal{P}$ преднорм, задающего топологию в E , это означает, что для любой преднормы $p \in \mathcal{P}$ имеем

$$p\left(x - \sum_{k=1}^m x_k\right) \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) < \infty.$$

В случае, когда $E = \text{ind } E_n$ — внутренний индуктивный предел последовательности ЛВП $(E_n)_{n=1}^\infty$, а $H_k \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ при всех $k \in \mathbb{N}$, имеет смысл рассмотреть специальный подкласс АПСП. Именно, назовем $\mathcal{H}$ *индуктивной АПСП* (ИАПСП) в E , если любой элемент $x \in E$ можно представить в виде ряда (1), сходящегося к x в E , и найдется такое $n = n(x) \in \mathbb{N}$, что этот ряд сходится абсолютно в E_n .

Если H_k — одномерные подпространства, натянутые на элементы $x_k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ ($k = 1, 2, \dots$), то $(H_k)_{k=1}^\infty$ является ИАПСП в E в том и только в том случае, когда $(x_k)_{k=1}^\infty$ образует индуктивно абсолютно представляющую систему (ИАПС) в E . Определение ИАПС было введено Ю. Ф. Коробейником в [2]. Отметим, что ИАПСП — частный случай систем ЛВП, составляющих абсолютные разложения данного ЛВП E (см. [3]).

Целью настоящей заметки является распространение метода ко-эффективных пространств, разработанного Ю. Ф. Коробейником в [2, 4, 5] для изучения АПС и ИАПС, на случай ИАПСП. Основным результатом работы представляет собой прямое обобщение его критерия (см. теорему 7 из [2]) для ИАПС в (DFS)-пространствах и содержится в следующей теореме.

Теорема. Пусть $E = \text{ind } E_n$, где E_n — банаховы пространства с нормами $|\cdot|_n$ и единичными шарами B_n , причем E_n компактно вложено в E_{n+1} ($n = 1, 2, \dots$). Пусть, далее, $\mathcal{H} = (H_k)_{k=1}^\infty$ — последовательность нетривиальных замкнутых в E подпространств, содержащихся в E_1 , и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in H_k} \frac{|x|_{n+1}}{|x|_n} = 0. \quad (2)$$

Для того чтобы $\mathcal{H}$ была ИАПСП в E , необходимо и достаточно, чтобы для любого $n \in \mathbb{N}$ существовали $m \in \mathbb{N}$ и $C_n < \infty$ такие, что

$$\sup_{x \in B_n} |\varphi(x)| \leq C_n \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup \{|\varphi(x)| : x \in B_m \cap H_k\} \quad (\forall \varphi \in E'). \quad (3)$$

Здесь и в последующем через E' обозначается топологически сопряженное к E пространство, а через E'_b — пространство E' , наделенное топологией сильного сопряженного.

2. Пусть $E = \text{ind } E_n$ — внутренний индуктивный предел последовательности ЛВП E_n , топологии в которых задаются наборами преднорм $\mathcal{P}_n$ ($n = 1, 2, \dots$), а H_k ($k = 1, 2, \dots$) — нетривиальные векторные подпространства $\bigcap_{n=1}^\infty E_n$ и $\mathcal{H} = (H_k)_{k=1}^\infty$. Образует по $\mathcal{H}$

следующие векторные подпространства в произведении $\prod_{k=1}^\infty H_k$:

$$A_n(E, \mathcal{H}) := \left\{ X = (x_k)_{k=1}^\infty \in \prod_{k=1}^\infty H_k : \text{ряд } \sum_{k=1}^\infty x_k \text{ сходится в } E \text{ и} \right. \\ \left. q_p(X) := \sum_{k=1}^\infty p(x_k) < \infty \quad (\forall p \in \mathcal{P}_n) \right\} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Каждое $A_n(E, \mathcal{H})$ наделим топологией, задаваемой набором преднорм $\{q_p(\cdot) : p \in \mathcal{P}_n\}$. Заметим, что, если хотя бы одно из

пространств E или E_n полно, то требование сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ в определении $A_n(E, \mathcal{H})$ излишне. Положим $A(E, \mathcal{H}) := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(E, \mathcal{H})$ и введем в рассмотрение оператор представления $L : A(E, \mathcal{H}) \rightarrow E$, действующий по правилу $X = (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto L(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Ясно, что $\mathcal{H}$ — ИАПСП в E в том и только в том случае, когда L сюръективен.

Далее, если $E_n \hookrightarrow E_{n+1}$, где $\hookrightarrow$ — символ непрерывного вложения, то и $A_n(E, \mathcal{H}) \hookrightarrow A_{n+1}(E, \mathcal{H})$. Поэтому при условии, что $E_n \hookrightarrow E_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, пространство $A(E, \mathcal{H})$ будет векторным, и тогда его естественно наделить топологией $\text{ind } A_n(E, \mathcal{H})$ внутреннего индуктивного предела последовательности ЛВП $(A_n(E, \mathcal{H}))_{n=1}^{\infty}$. Если E_n полны, то $L(X) \in E_n$ для любого $X \in A_n(E, \mathcal{H})$. Кроме того, для произвольной преднормы $p \in \mathcal{P}_n$ имеем

$$p(L(X)) = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) = q_p(X) \quad (\forall X \in A_n(E, \mathcal{H})).$$

Поэтому сужения L на $A_n(E, \mathcal{H})$ будут непрерывными операторами из $A_n(E, \mathcal{H})$ в E_n и тем более из $A_n(E, \mathcal{H})$ в E . А значит, и сам оператор $L : A(E, \mathcal{H}) \rightarrow E$ будет непрерывным. Таким образом, с учетом общей теории двойственности (см. следствие 8.6.4 в [6]), мы приходим к следующему результату.

Лемма 1. Пусть $E_n \hookrightarrow E_{n+1}$ и E_n — полные ЛВП ($n = 1, 2, \dots$). Система $\mathcal{H}$ является ИАПСП в E тогда и только тогда, когда оператор представления $L : A(E, \mathcal{H}) \rightarrow E$ — эпиморфизм. Если дополнительно известно, что пространство E отделимо, то $\mathcal{H}$ — ИАПСП в E в том и только в том случае, когда сопряженный оператор L' — слабый изоморфизм из E' в $(A(E, \mathcal{H}))'$.

Для того чтобы воспользоваться двойственной характеристикой ИАПСП, приведенной в лемме 1, нам, в первую очередь, потребуется удобное описание $(A(E, \mathcal{H}))'$. Всюду в последующем мы будем считать, не оговаривая этого, что $E_n \hookrightarrow E_{n+1}$ и что E_n — полные ЛВП ($n = 1, 2, \dots$).

Символом H^* будем обозначать алгебраически сопряженное к

векторному пространству H . Положим

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n(E, \mathcal{H}) := & \left\{ \Phi = (\varphi_k)_{k=1}^\infty \in \prod_{k=1}^\infty H_k^* : (\exists p \in \mathcal{P}_n) \right. \\ & \left. \tilde{p}(\Phi) := \sup_{k \geq 1} \sup \{ |\varphi_k(x)| : x \in H_k, p(x) \leq 1 \} < \infty \right\} \end{aligned}$$

($n = 1, 2, \dots$), и образуем векторное пространство $\tilde{A}(E, \mathcal{H}) := \bigcap_{n=1}^\infty \tilde{A}_n(E, \mathcal{H})$.

Лемма 2. Оператор F , который каждой последовательности $\Phi = (\varphi_k)_{k=1}^\infty \in \tilde{A}(E, \mathcal{H})$ ставит в соответствие функционал

$$F[\Phi](X) := \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(x_k), \quad X = (x_k)_{k=1}^\infty \in A(E, \mathcal{H}),$$

является взаимнооднозначным линейным оператором из $\tilde{A}(E, \mathcal{H})$ на $(A(E, \mathcal{H}))'$.

◁ В самом деле, пусть $\Phi = (\varphi_k)_{k=1}^\infty \in \tilde{A}(E, \mathcal{H})$. По определению $\tilde{A}(E, \mathcal{H})$ для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $p_n \in \mathcal{P}_n$, что $\tilde{p}_n(\Phi) < \infty$. А тогда для любого $X = (x_k)_{k=1}^\infty \in A_n(E, \mathcal{H})$ будет

$$|F[\Phi](X)| \leq \sum_{k=1}^\infty |\varphi_k(x_k)| \leq \tilde{p}_n(\Phi) \sum_{k=1}^\infty p_n(x_k) = \tilde{p}_n(\Phi) q_{p_n}(X). \quad (4)$$

Отсюда следует, что функционал $F[\Phi]$ корректно определен на всем $A(E, \mathcal{H})$. Его линейность очевидна. Из (4) следует, что сужение $F[\Phi]$ на $A_n(E, \mathcal{H})$ — линейный непрерывный функционал на $A_n(E, \mathcal{H})$. В силу произвольности $n \in \mathbb{N}$ отсюда вытекает, что $F[\Phi] \in (A(E, \mathcal{H}))'$. Итак, оператор F действует из $\tilde{A}(E, \mathcal{H})$ в $(A(E, \mathcal{H}))'$. Линейность F непосредственно следует из способа его задания.

Если $F[\Phi] = 0$ для всех $\Phi \in \tilde{A}(E, \mathcal{H})$, то, полагая $X = e_k x$, где e_k — k -ый орт, а $x \in H_k$, получим

$$0 = F[\Phi](e_k x) = \varphi_k(x) \quad (\forall x \in H_k)(\forall k \in \mathbb{N}).$$

Поэтому $\varphi_k = 0$ на H_k при всех $k \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $\Phi = 0$. Таким образом, оператор $F : \tilde{A}(E, \mathcal{H}) \rightarrow (A(E, \mathcal{H}))'$ инъективен.

Далее, если $\varphi \in (A(E, \mathcal{H}))'$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $p_n \in \mathcal{P}_n$ и $C_n < \infty$ такие, что

$$|\varphi(X)| \leq C_n q_{p_n}(X) \quad (\forall X \in A_n(E, \mathcal{H})). \quad (5)$$

Положим $\varphi_k(x) = \varphi(e_k x)$, $x \in H_k$. Ясно, что $\varphi_k \in H_k^*$. В силу (5) $|\varphi_k(x)| \leq C_n p_n(x)$ для любого $x \in H_k$. Отсюда заключаем, что для $\Phi = (\varphi_k)_{k=1}^\infty \in \prod_{k=1}^\infty H_k^*$ имеет место неравенство $\tilde{p}_n(\Phi) \leq C_n < \infty$. Значит, $\Phi \in \tilde{A}(E, \mathcal{H})$. Заметим, что для любого $X \in A(E, \mathcal{H})$ имеется такое $n \in \mathbb{N}$, что $X \in A_n(E, \mathcal{H})$ и что для любой преднормы $p \in \mathcal{P}_n$ выполняется

$$q_p\left(X - \sum_{k=1}^m e_k x_k\right) = \sum_{k=m+1}^\infty p(x_k) \longrightarrow 0 \quad \text{при } m \longrightarrow \infty.$$

Поэтому ряд $\sum_{k=1}^\infty e_k x_k$ сходится к X в $A_n(E, \mathcal{H})$ и тем более в $A(E, \mathcal{H})$. А тогда

$$\varphi(X) = \sum_{k=1}^\infty \varphi(e_k x_k), \quad \varphi \in (A(E, \mathcal{H}))'.$$

Поэтому для любого $X = (x_k)_{k=1}^\infty \in A(E, \mathcal{H})$ имеем

$$F[\Phi](X) = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(x_k) = \sum_{k=1}^\infty \varphi(e_k x_k) = \varphi(X).$$

Значит, оператор $F : \tilde{A}(E, \mathcal{H}) \rightarrow (A(E, \mathcal{H}))'$ сюръективен, и доказательство тем самым завершено. $\triangleright$

Лемма 3. Пусть E_n — банаховы пространства с нормами $|\cdot|_n$, причем E_n компактно вложено в E_{n+1} , и выполнено условие (2). Тогда $A_n(E, \mathcal{H})$ компактно вложено в $A_{n+1}(E, \mathcal{H})$.

$\triangleleft$ Достаточно установить, что единичный шар

$$U_n := \left\{ X = (x_k)_{k=1}^\infty \in A_n(E, \mathcal{H}) : \|X\|_n := \sum_{k=1}^\infty |x_k|_n \leq 1 \right\}$$

пространства $A_n(E, \mathcal{H})$ предкомпактен в $A_{n+1}(E, \mathcal{H})$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Из условия (2) следует, что имеется такое $m \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{k=m+1}^\infty |x_k|_{n+1} < \varepsilon \quad \text{для всех } X \in U_n.$$

Декартову степень E_l^m ($l = n, n+1$) нормируем с помощью нормы

$$|Y|_l^m := \sum_{k=1}^m |y_k|_l, \quad Y = (y_1, \dots, y_m) \in E_l^m.$$

Так как E_n компактно вложено в E_{n+1} , то E_n^m компактно вложено в E_{n+1}^m . Поэтому единичный шар B_n^m пространства E_n^m предкомпактен в E_{n+1}^m . Следовательно, имеется конечный набор $(y_1^{(j)}, \dots, y_m^{(j)})_{j=1}^s$ элементов из B_n^m , образующий ε -сеть B_n^m по норме $|\cdot|_{n+1}^m$. Положим $X^{(j)} := (y_1^{(j)}, \dots, y_m^{(j)}, 0, \dots)$. Ясно, что $X^{(j)} \in U_n$ при всех j и что набор $(X^{(j)})_{j=1}^s$ образует конечную 2ε -сеть шара B_n в $A_{n+1}(E, \mathcal{H})$. $\triangleright$

В случае, когда E_n — нормированные пространства с нормами $|\cdot|_n$, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n(E, \mathcal{H}) = \left\{ \Phi = (\varphi_k)_{k=1}^\infty \in \prod_{k=1}^\infty H_k^* : \right. \\ \left. \|\widetilde{\Phi}\|_n := \sup_{k \geq 1} \sup\{|\varphi_k(x)| : x \in H_k, |x|_n \leq 1\} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

При этом пространства $\tilde{A}_n(E, \mathcal{H})$ мы будем рассматривать с нормами $\|\widetilde{\Phi}\|_n$ ($n = 1, 2, \dots$), а $\tilde{A}(E, \mathcal{H})$ наделять топологией, задаваемой набором норм $\|\widetilde{\Phi}\|_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

По поводу классов (FS)- и (DFS)-пространств, используемых ниже, мы отсылаем читателя к обзору [7].

Лемма 4. Пусть E_n — банаховы пространства с нормами $|\cdot|_n$ и E_n компактно вложено в E_{n+1} ($n = 1, 2, \dots$). Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) При любом $n \in \mathbb{N}$ пространство $\tilde{A}_n(E, \mathcal{H})$ является банаховым относительно нормы $\|\cdot\|_n$.
- 2) $\tilde{A}(E, \mathcal{H})$ — (FS)-пространство.
- 3) Оператор F устанавливает топологический изоморфизм между $\tilde{A}(E, \mathcal{H})$ и $(A(E, \mathcal{H}))'_b$.

$\triangleleft$ Утверждение 1) доказывается стандартными рассуждениями. Далее, из доказательства леммы 2 следует, что F действует взаимнооднозначно из $\tilde{A}(E, \mathcal{H})$ на $(A(E, \mathcal{H}))'$ и что

$$|F[\Phi](X)| \leq \|\widetilde{\Phi}\|_n \|X\|_n, \quad X \in A(E, \mathcal{H}).$$

Поэтому $|F[\Phi]|'_n \leq \|\widetilde{\Phi}\|_n$, где

$$|\varphi|'_n := \sup \{|\varphi(X)| : X \in A_n(E, \mathcal{H}), \|X\|_n \leq 1\}$$

— норма в $(A_n(E, \mathcal{H}))'$, задающая в нем топологию сильного сопряженного. Значит, $F : \tilde{A}_n(E, \mathcal{H}) \rightarrow (A_n(E, \mathcal{H}))'_b$ непрерывен. По теореме Банаха он тогда является изоморфизмом $\tilde{A}_n(E, \mathcal{H})$ на $(A_n(E, \mathcal{H}))'_b$. По лемме 3 $A(E, \mathcal{H}) = \text{ind } A_n(E, \mathcal{H})$ — (DFS)-пространство. Поэтому (см. [7]) $(A(E, \mathcal{H}))'_b = \text{proj}(A_n(E, \mathcal{H}))'_b$, где проективный предел берется относительно отображений сужения функционалов. При этом, $(A(E, \mathcal{H}))'_b$ — (FS)-пространство. Из сказанного непосредственно следует справедливость утверждений 2) и 3) леммы. $\triangleright$

3. Теперь мы готовы провести доказательство теоремы, сформулированной в начале работы. Оно проводится по схеме, предложенной Ю. Ф. Коробейником в [2] и [4] при изучении ИАПС.

$\triangleleft$ По лемме 1 $\mathcal{H}$ — ИАПСП в E в том и только в том случае, когда $L' : E' \rightarrow (A(E, \mathcal{H}))'$ — слабый изоморфизм «в». По условию доказываемой теоремы E — (DFS)-пространство, а по лемме 3 и $A(E, \mathcal{H})$ относится к тому же классу ЛВП. Поэтому в рассматриваемом случае условие слабой изоморфности L' равносильно тому, что изоморфизмом является

$$L' : E'_b \rightarrow \text{proj}(L'(E') \cap (A_n(E, \mathcal{H}))'_b).$$

По определению сопряженного оператора $\langle L'(\varphi), X \rangle = \langle \varphi, L(X) \rangle$ для всех $X \in A(E, \mathcal{H})$ и $\varphi \in E'$. Полагая здесь $X = e_k x$, $x \in H_k$ ($k = 1, 2, \dots$) получим, что $\langle L'(\varphi), e_k x \rangle = \langle \varphi, x \rangle$ для всех $k \in \mathcal{N}$ и $x \in H_k$. Поэтому

$$(F^{-1} \circ L')(\varphi) = \varphi|_{H_k} \quad (\forall \varphi \in E').$$

В силу утверждения 3) леммы 4 отсюда следует, что $\mathcal{H}$ — ИАПСП в E в том и только в том случае, когда

$$F^{-1} \circ L' : \varphi \in E' \mapsto (\varphi|_{H_k})_{k=1}^\infty \in \text{proj}((F^{-1} \circ L')(E') \cap \tilde{A}_n(E, \mathcal{H}))$$

является топологическим изоморфизмом. А это, очевидно, эквивалентно условию (3). $\triangleright$

Литература

1. Коробейник Ю. Ф. О представляющих системах подпространств // Мат. заметки.—1985.—Т. 38, № 5.—С. 741–755.
2. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 1.—С. 73–126.
3. Абанин А. В. О разложении пространств в ряды из подпространств // Актуальные вопросы математического анализа.—Ростов-на-Дону: Изд-во «ГинГо».—2000.—С. 23–27.
4. Коробейник Ю. Ф. Об одной двойственной задаче. I. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше // Мат. сб.—1975.—Т. 97, № 2.—С. 193–229.
5. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1978.—Т. 42, № 2.—С. 325–355.
6. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1071 с.
7. Жаринов В. В. Компактные семейства ЛВП и пространства FG и DFS // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, № 4.—С. 97–131.

Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет;
Лаборатория математических исследований ИПМИ и ЮРГУЭС
E-mail: abanin@math.rsu.ru

ЛЕВЫЙ ОБРАТНЫЙ К ОПЕРАТОРУ СУЖЕНИЯ
НА ВЕСОВЫХ (LV)-ПРОСТРАНСТВАХ
ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

О. А. Иванова, С. Н. Мелихов¹

В настоящей работе решается задача о существовании линейного непрерывного левого обратного (коротко: левого обратного) к оператору сужения на нулевое множество специальной целой функции, определенному на индуктивном пределе E весовых банаховых пространств целых функций, задаваемых радиальными весами. Эта проблема — двойственная к задаче о наличии линейного непрерывного правого обратного к оператору представления аналитических функций рядами экспонент, или, более общим образом, элементов пространства Фреше E' , сильного сопряженного к E , рядами по дельта-функциям (см. [1]). В работе [1] установлены абстрактные критерии существования левого обратного к такому оператору сужения в довольно общей ситуации. Здесь подробно рассмотрен случай весов вида $\exp((1 - \frac{1}{n})W)$, где W — радиальная субгармоническая функция в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая стандартным техническим условиям. Для весов такого типа данная задача была решена ранее в [1] только в случае $W(z) = |z|^\rho$, $\rho \in (0, +\infty)$.

1. Специальные семейства плюрисубгармонических функций

1.1. Основные определения и обозначения. Всюду далее $\mathbb{W} := \{W_n : n \geq 1\}$ — убывающая последовательность положительных непрерывных на $[0, +\infty)$ функций W_n со следующими свойствами:

(1.1) $Y_n(x) := W_n(e^x)$ — возрастающая выпуклая на $[0, +\infty)$ функция;

$$(1.2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Y_n(x)}{x} = +\infty \text{ для любого } n \in \mathbb{N};$$

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Немецкой службы академических обменов (DAAD).

(1.3) для любого n существует k такое, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (W_n(x) - W_k(x)) = +\infty.$$

Положим $W_n(z) := W_n(|z|)$, $z \in \mathbb{C}^N$, $n \in \mathbb{N}$. При этом $|z| := \left(\sum_{j=1}^N |z_j|^2\right)^{1/2}$. Ниже $D(z, r) := \{v \in \mathbb{C}^N : |v - z| < r\}$, $z \in \mathbb{C}^N$, $r > 0$.

Как обычно, $\text{PSH}(\mathbb{C}^N)$ обозначает семейство всех плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^N$ функций.

Аналог определяемого ниже условия для индуктивных (возрастающих) последовательностей $\mathbb{W}$ подробно исследован Лангенбрухом [2]. Оно играет существенную роль в проблемах существования линейных непрерывных правых обратных к $\bar{\partial}$ -оператору в весовых L^2 -комплексах (см. [2]) и к операторам свертки в пространствах ростков аналитических функций (см. [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что последовательность $\mathbb{W}$ удовлетворяет условию (*), если для любого $t \in \mathbb{C}^N$ найдется функция $\Psi_t \in \text{PSH}(\mathbb{C}^N)$ такая, что для каждого $n \geq 1$ существуют $I(n) \geq n$ и $A(n) \geq 0$ такие, что

$$(\forall t)(\forall z \in \mathbb{C}^N) \quad \Psi_t(t) \geq 0, \quad \Psi_t(z) \leq W_n(z) - W_{I(n)}(t) + A(n).$$

Далее Y_n^* обозначает функцию, сопряженную по Юнгу к функции Y_n :

$$Y_n^*(t) := \sup_{x \geq 0} (xt - Y_n(x)), \quad t \geq 0.$$

Справедлив

Критерий 1.1. Следующие условия равносильны:

- (1) последовательность $\mathbb{W}$ удовлетворяет условию (*);
- (2) существует $a_t > 0$ такое, что для любых $n \geq 1$ и $t \geq 0$ справедливо следующее неравенство

$$a_t t \geq Y_n^*(a_t) + Y_{I(n)}(t) - A(n).$$

(Здесь и в условии (*) $I(n)$ одно и то же.)

◁ Мы следуем схеме доказательства теоремы [2, 2.1, с. 565].

(1) $\Rightarrow$ (2): Пусть последовательность $\mathbb{W}$ удовлетворяет условию (*). Введем функцию $g_t(z) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\xi \in D(z, \varepsilon)} \Psi_t(\xi)$, $z \in \mathbb{C}^N$ — верхнюю регуляризацию функции Ψ_t , $t \in \mathbb{C}^N$. Функция g_t для любого $t \in \mathbb{C}^N$ является плюрисубгармонической в $\mathbb{C}^N$, так как $\Psi_t \in \text{PSH}(\mathbb{C}^N)$ [4, следствие 3.2.19, теорема 4.1.13].

Так как последовательность $\mathbb{W}$ удовлетворяет условию (*), то

$$\begin{aligned} g_t(z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\xi \in D(z, \varepsilon)} \left(W_n(\xi) - W_{I(n)}(t) + A(n) \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\xi \in D(z, \varepsilon)} W_n(\xi) - W_{I(n)}(t) + A(n). \end{aligned}$$

В силу того, что функции W_n , $n \geq 1$, непрерывны,

$$g_t(z) \leq W_n(z) - W_{I(n)}(t) + A(n) \quad (\forall t \in \mathbb{C}^N).$$

Введем функцию $\psi_t := g_{\exp(t)} \circ \exp$, $t \in \mathbb{R}$. Функция ψ_t является возрастающей выпуклой функцией (см. [4, следствие 3.2.19, теорема 4.1.13]).

Вследствие условия (*) $\psi_t(x) \leq W_n(e^x) - W_{I(n)}(e^t) + A(n)$, т. е.

$$(\forall t \geq 0) \quad \psi_t(x) \leq Y_n(x) - Y_{I(n)}(t) + A(n) \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Пусть $a_t := \inf_{\tau > 0} \frac{\psi_t(t + \tau) - \psi_t(t)}{\tau}$. Тогда

$$a_t \tau \leq \psi_t(t + \tau) - \psi_t(t) \quad (\forall \tau > 0).$$

и для любых $x, t \geq 0$ выполняется неравенство

$$a_t(x - t) \leq Y_n(x) - Y_{I(n)}(t) + A(n).$$

Поэтому выполняется условие (2) данного критерия. Необходимость доказана.

(2) $\Rightarrow$ (1): Пусть выполняется условие (2). Тогда, очевидно, выполняется предыдущее неравенство, т. е. существует $a_t > 0$ такое, что для любых $n \geq 1, x, t \geq 0$

$$a_t(x - t) \leq Y_n(x) - Y_{I(n)}(t) + A(n).$$

Введем функции $\psi_t(x) := a_t(x - t)$ для неотрицательных x, t . Тогда $\psi_t(x) \leq Y_n(x) - Y_{I(n)}(t) + A(n)$. Кроме того, функции $\psi_t(x)$ являются возрастающими, выпуклыми функциями на $[0, +\infty)$. Достаточность доказана. $\triangleright$

Теорема 1.1. *Если последовательность $\mathbb{W}$ удовлетворяет условию (*), то для любых n, k найдутся $I(n), I(k)$ такие, что выполняется следующее асимптотическое неравенство:*

$$\sup_{0 < \eta \leq t} \left(\frac{Y_{I(n)}(t) - Y_n(t - \eta)}{\eta} \right) \leq a_t \leq \inf_{\tau > 0} \left(\frac{Y_k(t + \tau) - Y_{I(k)}(t)}{\tau} \right)$$

(I выбирается из (1.3)).

$\triangleleft$ Докажем правое неравенство. По доказанному критерию 1.1 будет

$$a_t(x - t) \leq Y_n(x) - Y_{I(n)}(t) + A(n) \quad \forall x, t \geq 0.$$

Выбираем любое $\tau > 0$ и полагаем $x := t + \tau$. Следовательно,

$$a_t \tau \leq Y_n(t + \tau) - Y_{I(n)}(t) + A(n) \quad \forall t \geq 0, \forall \tau > 0.$$

По условию (1.3) для любого $I(n)$ существует $S(n)$ такое, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (Y_{I(n)}(t) - Y_{S(n)}(t)) = \infty,$$

т. е. существует $t_0 > 0$ такое, что

$$Y_{I(n)}(t) \geq Y_{S(n)}(t) + A(n) \quad (\forall t \geq t_0).$$

Итак,

$$a_t \tau \leq Y_n(t + \tau) - Y_{S(n)}(t) \quad (\forall \tau > 0, \forall t \geq t_0).$$

Тогда

$$a_t \leq \inf_{\tau > 0} \frac{Y_n(t + \tau) - Y_{S(n)}(t)}{\tau}.$$

Далее выбираем $I'(n) := \max\{S(n), I(n)\}$.

Левое неравенство доказывается аналогично, только в качестве x выбираем $t - \tau > 0$. $\triangleright$

1.2. Достаточные условия для условия (*). Приведем одно достаточное условие для условия (*). Пусть y_n — правосторонняя

производная функции Y_n . Без ограничения общности можно считать, что $Y_n := W_n \circ \exp \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$.

Далее, пусть для больших аргументов $\{y_n := Y'_n, n \in \mathbb{N}\}$ — убывающая последовательность положительных функций. Считаем, что $Y_n(0) := y_n(0) := 0$.

Для доказательства основного результата этого параграфа — теоремы 1.2 — нам понадобится

Лемма 1.1. *Если функция $f(x)$ является строго возрастающей, положительной на $[0, +\infty)$, причем $f(0) = 0$, то*

$$\int_0^x f^{-1}(t) dt = - \int_0^{f^{-1}(x)} f(y) dy + x f^{-1}(x).$$

◁ Доказательство состоит в следующих выкладках:

$$\begin{aligned} \int_0^x f^{-1}(t) dt &= \left\{ y = f^{-1}(t), dt = f'(y) dy \right\} = \int_0^{f^{-1}(x)} y f'(y) dy = \\ &= y f(y) \Big|_0^{f^{-1}(x)} - \int_0^{f^{-1}(x)} f(y) dy = f^{-1}(x)x - \int_0^{f^{-1}(x)} f(y) dy. \triangleright \end{aligned}$$

Справедлива следующая

Теорема 1.2. *Пусть $\mathbb{W}$ — то же, что и выше. Условие (*) выполняется, если существуют $t_0 \geq 0$, $k \geq 1$ такие, что для любых $n \geq 1$ и $t \geq t_0$*

$$Y_n \circ y_n^{-1}(t) - Y_k \circ y_n^{-1}(t) \geq Y_{I(n)} \circ y_k^{-1}(t) - Y_k \circ y_k^{-1}(t).$$

◁ Мы следуем схеме доказательства теоремы 2.7 из [2, с. 569].

1) Заметим, что $Y_k^*(x) = x y_k^{-1}(x) - Y_k \circ y_k^{-1}(x)$ для любого $k \geq 1$. Поэтому

$$(Y_k^*(x))' = y_k^{-1}(x) + x(y_k^{-1}(x))' - y_k \circ y_k^{-1}(x)(y_k^{-1}(x))' - y_k^{-1}(x).$$

Следовательно, $Y_k^*(x) - Y_n^*(x) = \int_0^x (y_k^{-1}(t) - y_n^{-1}(t)) dt$ для любого

$k \geq 1$.

2) Учитывая предыдущую лемму, получаем:

$$\begin{aligned} Y_k^*(x) - Y_n^*(x) &= (y_k^{-1}(x) - y_n^{-1}(x))x + \int_0^{y_n^{-1}(x)} y_n(v) dv - \int_0^{y_k^{-1}(x)} y_k(v) dv = \\ &= \int_0^{y_n^{-1}(x)} (y_n(v) - y_k(v)) dv + (y_k^{-1}(x) - y_n^{-1}(x))x + \int_{y_k^{-1}(x)}^{y_n^{-1}(x)} y_k(v) dv. \end{aligned}$$

Возможны две ситуации: $n \geq k$ и $k > n$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1. Пусть $n > k$. Тогда, так как $y_k^{-1}(x) \leq y_n^{-1}(x)$ для любого неотрицательного x , то

$$\int_{y_k^{-1}(x)}^{y_n^{-1}(x)} y_k(v) dv \geq y_k(y_k^{-1}(x))[y_n^{-1}(x) - y_k^{-1}(x)].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Y_k^*(x) - Y_n^*(x) &\geq \int_0^{y_n^{-1}(x)} (y_n(v) - y_k(v)) dv = \\ &= Y_n(y_n^{-1}(x)) - Y_k(y_n^{-1}(x)) \geq Y_{I(n)}(y_k^{-1}(x)) - Y_k(y_k^{-1}(x)). \end{aligned}$$

2. Пусть $n < k$. Тогда, так как $y_k^{-1}(x) \geq y_n^{-1}(x)$, для любого неотрицательного x , то

$$\int_{y_n^{-1}(x)}^{y_k^{-1}(x)} y_k(v) dv \leq y_k(y_k^{-1}(x))[y_k^{-1}(x) - y_n^{-1}(x)] = x(y_k^{-1}(x) - y_n^{-1}(x)).$$

Следовательно, и в этом случае

$$Y_k^*(x) - Y_n^*(x) \geq \int_0^{y_n^{-1}(x)} (y_n(v) - y_k(v)) dv.$$

Итак, для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$Y_k^*(x) - Y_n^*(x) \geq Y_{I(n)}(y_k^{-1}(x)) - Y_k(y_k^{-1}(x)).$$

3) Таким образом, нами доказано следующее неравенство:

$$(\forall n \geq 1)(\forall t \geq t_0) \quad Y_k^*(t) - Y_n^*(t) \geq Y_{I(n)} \circ y_k^{-1}(t) - Y_k \circ y_k^{-1}(t).$$

Для $\tau := y_k(t)$ имеем

$$Y_k^*(\tau) - Y_n^*(\tau) \geq Y_{I(n)}(y_k^{-1}(\tau)) - Y_k(y_k^{-1}(\tau)).$$

Так как $Y_k^*(x) = xy_k^{-1}(x) - Y_k(y_k^{-1}(x))$ для любых $x \in [0, +\infty)$, $k \geq 1$, то выполнено следующее неравенство:

$$\tau y_k^{-1}(\tau) \geq Y_n^*(\tau) + Y_{I(n)} \circ y_k^{-1}(\tau).$$

Для $a_t := \tau$ получим

$$a_t t \geq Y_n^*(a_t) + Y_{I(n)}(t),$$

т. е. выполнено условие 2) критерия 1.1.

Итак, теорема полностью доказана. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Для систем $\mathbb{W}$, которые ограничены снизу некоторой логарифмически выпуклой функцией W , часто оказывается полезным следующее утверждение:

Пусть $\mathbb{W}$ — система, как выше, и существует логарифмически выпуклая функция $W := Y \circ \ln$ такая, что $Y(t)$ — возрастающая функция на $[0, +\infty)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t)/t = +\infty$ и для любого n , для больших аргументов $W_n(t) \geq W(t)$. Тогда условие (*) выполняется для последовательности $\mathbb{W}$, если выполнено следующее условие: для любого $n \geq 1$ существует $I(n)$ такой, что для больших аргументов

$$Y \circ y^{-1}(t) - Y_{I(n)} \circ y^{-1}(t) \geq Y \circ y_n^{-1}(t) - Y_n \circ y_n^{-1}(t).$$

$\triangleleft$ Доказательство этого факта аналогично доказательству предыдущей теоремы. $\triangleright$

1.3. Примеры. Несмотря на громоздкость критерия 1.1 и теоремы 1.1, они оказываются полезными при изучении конкретных

последовательностей $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$. С помощью них можно легко показать, что для функций W_n из примеров 1.1–1.4 условие (*) не выполняется, а — из примеров 1.5–1.6 выполняется.

ПРИМЕР 1.1. $W_n(x) := (\ln x)^{\rho_n}$, где $\rho_n = \rho + \frac{1}{n}$, $\rho \geq 1$.

ПРИМЕР 1.2. $W_n(x) := \Psi^{\rho_n}(x)$, $\rho_n = \rho + \frac{1}{n}$, $\rho \geq 0$, а функция $\Psi(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\Psi(x) \neq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}),$$

$$(\exists x_0 \in \mathbb{R})(\exists C > 1)(\forall x \geq x_0) \quad \Psi(ex) \leq C\Psi(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \Psi(x)}{\ln \ln x} = +\infty,$$

предположим также, что функция $\Psi(x)$ является выпуклой возрастающей функцией на $[0, +\infty)$.

Пример 1.2 можно обобщить в следующем смысле:

ПРИМЕР 1.3. В качестве последовательности $\{W_n : n \geq 1\}$ возьмем

$$W_n(x) := \Psi_n^{\rho_n}(x), \quad \rho_n = \rho + \frac{1}{n}, \quad \rho \geq 0,$$

где $\{\Psi_n : n \geq 1\}$ убывающая последовательность функций $\Psi_n(x)$, удовлетворяющих всем условиям, которым удовлетворяла функция $\Psi(x)$ в предыдущем примере.

ПРИМЕР 1.4. $W_n(x) := \frac{1}{n}x^\alpha$, $\alpha > 0$,

ПРИМЕР 1.5. $W_n(x) := \rho_n x^\alpha$, $\rho_n = \rho + \frac{1}{n}$, $\rho > 0$, $\alpha > 0$.

ПРИМЕР 1.6. Пусть $\mathbb{T} := \{(1 + \frac{1}{n})W(|z|) : n \geq 1\}$, где $Y := W \circ \exp \in C^1(\mathbb{R}^+)$, является выпуклой возрастающей на $[0, +\infty)$ функцией и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Y(x)}{x} = +\infty$, $w = W'$. Следующие условия равносильны:

(1) последовательность $\mathbb{T}$ удовлетворяет условию (*);

(2) последовательность $\mathbb{T}$ удовлетворяет условию (*) с $I(n) = \gamma n$

для некоторого $\gamma > 1$;

(3) существует $C > 1$ такое, что выполняется следующее асимптотическое неравенство

$$2y \circ Y^{-1}(t) \leq y \circ Y^{-1}(Ct);$$

(4) существует $C > 1$ такое, что выполняется следующее асимптотическое неравенство

$$2w \circ W^{-1}(t) \cdot W^{-1}(t) \leq w \circ W^{-1}(Ct) \cdot W^{-1}(Ct).$$

◁ Доказательство этого результата почти дословно повторяет доказательство [2, теорема 3.6, с. 574]. ▷

2. Применение к задаче о левом обратном к оператору сужения

Применим результаты предыдущего параграфа к задаче о существовании линейного непрерывного левого обратного (коротко: левого обратного) к оператору сужения на нулевое множество специальной целой функции, определенному на некотором весовом (LB)-пространстве E , как ниже.

Зафиксируем $\rho \geq 0$. Введем последовательность $W_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)W$, $n \geq 1$, где функция W удовлетворяет следующим условиям:

(W1) W непрерывно возрастает на $[0, +\infty)$, $W(x) \geq 0$, $x \in [0, +\infty)$;

(W2) функция $Y := W \circ \exp$ непрерывно дифференцируема и выпукла на $[0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Y(x)}{x} = +\infty$;

(W3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{W(x + \max(1; dx^{1-\rho}))}{W(x)} = 1$ для любого $d > 0$;

(W4) $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln W(x)}{\ln x} = \rho$.

Далее $W(z) := W(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Функция W — субгармоническая в $\mathbb{C}$. Зафиксируем $\kappa \geq 0$. Согласно [5, теорема 4] найдется целая функция L , имеющая простые нули в точках λ_n , $n \in \mathbb{N}$, такая, что

1. круги $D_n := D(\lambda_n, d|\lambda_n|^{1-\rho})$ попарно не пересекаются;
2. вне множества $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ выполняется следующее неравенство:

$$|(1 + \kappa)W(z) - \ln |L(z)|| \leq C \ln |z| \text{ для больших } |z|.$$

Лемма 2.1. Упомянутая выше функция L удовлетворяет следующим условиям (L1)–(L3):

(L1) для любого n существует $C \geq 0$ такое, что

$$|L(z)| \leq C \exp((1 + 1/n + \kappa)W(z)), \quad z \in \mathbb{C};$$

(L2) существует неограниченная последовательность контуров $\gamma_s > 0$, $s \in \mathbb{N}$, содержащих внутри себя начало координат и такая, что

$$r_s := \inf_{t \in \gamma_s} |t| \rightarrow +\infty; \quad \sup_{s \in \mathbb{N}} \frac{l(\gamma_s)}{r_s} < +\infty;$$

$$(\forall m \in \mathbb{N}) \quad \inf_{s \in \mathbb{N}} \inf_{z \in \gamma_s} |L(z)| e^{-(1-1/m+\kappa)W(z)} > 0,$$

где $l(\gamma_s)$ — длина контура γ_s , $s \in \mathbb{N}$;

(L3) $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность всех (различных) нулей функции L , причем $|\lambda_j| \leq |\lambda_{j+1}|$, $j \in \mathbb{N}$, каждый из нулей λ_j простой и

$$(\forall m \in \mathbb{N}) \quad \inf_{j \in \mathbb{N}} |L'(\lambda_j)| e^{-(1-1/m+\kappa)W(\lambda_j)} > 0.$$

Лемма доказывается стандартным образом (с помощью принципа максимума модуля и свойств (W1)–(W3) функции W).

Введем теперь основное весовое (LB) -пространство E целых функций и соответствующий последовательности $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ оператор сужения R , определенный на пространстве E .

Для $n \in \mathbb{N}$ определим банахово пространство

$$E_n := \left\{ f \in A(\mathbb{C}) : \|f\|_n := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \exp(-W_n(z)) < +\infty \right\}$$

и положим $E := \lim \text{ind}_{n \rightarrow} E_n$. Введем ассоциированные пространства числовых последовательностей:

$$K_{\infty, n} := \left\{ c = (c_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : |c|_n := \sup_{j \in \mathbb{N}} |c_j| \exp(-W_n(\lambda_j)) < +\infty \right\},$$

$$K_{\infty} := \lim \text{ind}_{n \rightarrow} K_{\infty, n}.$$

При этом $A(\mathbb{C})$ обозначает пространство всех целых в $\mathbb{C}$ функций.

На E зададим оператор сужения $R(f) := (f(\lambda_j))_{j \in \mathbb{N}}$, линейно и непрерывно отображающий E в K_{∞} .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Последовательность $\mathbb{W}$ удовлетворяет предположениям 1.1 (а) статьи [1] и условию (ω) из замечания 1.10 [1].

Ниже мы используем следующие утверждения.

Лемма 2.2 [1, теорема 1.14]. Следующие утверждения равносильны:

- (i) оператор сужения $R : E \rightarrow K_\infty$ имеет левый обратный;
- (ii) выполняются условия:

(SH_i) существуют субгармонические в $\mathbb{C}$ функции $v_t, t \in \mathbb{C}$, такие, что для любого n существуют k и C такие, что $v_t \geq 0, t \in \mathbb{C}$, и

$$v_t(z) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)W(z) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)W(t) \quad (\forall t, z \in \mathbb{C});$$

(SH_{ii}) существуют субгармонические в $\mathbb{C}$ функции $v_t, t \in \mathbb{C}$, такие, что $(\forall n)(\exists k)(\exists C) \quad v_t \geq 0, t \in \mathbb{C}$, и

$$v_t(z) \leq \left(\kappa + \frac{1}{n}\right)W(z) - \left(\kappa + \frac{1}{k}\right)W(t) \quad (\forall t, z \in \mathbb{C}).$$

Далее $y := Y'$.

Лемма 2.3 [2, теорема 3.6]. Следующие условия равносильны:

- (i) выполняется условие (SH_i) ;
- (LEV) существует $C > 1$ такое, что $2y \circ Y^{-1}(t) \leq y \circ Y^{-1}(Ct)$ для больших аргументов $t \geq 0$.

Основным результатом данной статьи является

Критерий 2.1. Пусть функция W удовлетворяет условиям (W1)–(W4), $\kappa \geq 0$, функция L такая же как выше. Следующие условия равносильны:

- (1) оператор $R : E \rightarrow K_\infty$ имеет линейный непрерывный левый обратный;
- (2) $\kappa > 0$ и $(\exists C > 1) \quad 2y \circ Y^{-1}(t) \leq y \circ Y^{-1}(Ct)$ для больших аргументов $t \geq 0$.

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть выполнено условие (1). По лемме 2.2 выполняется условие (SH_i) , а по лемме 2.3 имеет место условие (LEV).

(2) $\Rightarrow$ (1): Пусть выполняется условие (LEV). По лемме 2.3 справедливо свойство (SH_i) . Вследствие примера 1.6 имеет место (SH_{ii}) . По [1, следствие 1.18] при $\kappa = 0$ оператор $R : E \rightarrow K_\infty$ не имеет левого обратного. Значит, $\kappa > 0$. Критерий доказан. $\triangleright$

Приведем примеры функций W , удовлетворяющих условию (LEV).

ПРИМЕР 2.1. $W(x) := x^\rho - \mu x^\alpha$ ($\alpha \in (0, \rho)$, $\rho \in (0, +\infty)$, $\mu \geq 0$) для больших аргументов x .

ПРИМЕР 2.2. $W(x) := x^{\rho(x)}$, где $\rho(x)$ — сильный уточненный порядок для порядка $\rho > 0$, т. е. $\rho(r)$ дважды непрерывно дифференцируема при $r > 0$ и $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho''(r)r^2 \ln r = 0$.

3. Примеры функций W , для которых оператор R не имеет левого обратного

Приведем примеры функций W , для которых не выполняется условие (LEV) (см. лемму 2.3), а значит, по критерию 2.1 соответствующий оператор сужения R не имеет левого обратного.

3.1. Пусть $\rho > 0$ и

$$Y_1(x) = k(n)x + b(n), \quad x \in [2^n, 2^{n+1}], \quad n \in \mathbb{N},$$

где $k(n) = 2e^{\rho 2^{n+1}} - e^{\rho 2^n}$, $b(n) = 2^{n+1}e^{\rho 2^n}(1 - e^{\rho 2^n})$. На отрезке $[0, 2]$ положим $Y_1(x) := (2e^{2\rho} - e^\rho)x + 2e^\rho - 2e^{2\rho}$.

Заметим, что $Y_1(2^n) = e^{\rho 2^n} \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Функция $Y_1(x)$ является кусочно линейной, выпукла, возрастает и не является непрерывно дифференцируемой всюду на $[0, +\infty)$. «Подправим» Y_1 следующим образом: для любого $n \in \mathbb{N}$ можно выбрать точки $x_{i,n}$, $x_{i,n} \in (2^{n+i-1}, 2^{n+i})$, $i = 1, 2$, так, чтобы расстояния от точки $(x_{1,n}, Y_1(x_{1,n}))$ до $(2^{n+1}, Y_1(2^{n+1}))$ и от точки $(x_{2,n}, Y_1(x_{2,n}))$ до $(2^{n+1}, Y_1(2^{n+1}))$ совпадали и были меньше 1. Пусть $B = (x_{1,n}, Y_1(x_{1,n}))$, $A = (2^{n+1}, Y_1(2^{n+1}))$, $C = (x_{2,n}, Y_1(x_{2,n}))$, $n \in \mathbb{N}$. В угол $\angle BAC$ впишем параболу так, чтобы она касалась его в точках B и C . На отрезке $[x_{1,n}, x_{2,n}]$ график функции Y_1 заменим этой параболой. На отрезке $[0, 3]$ сглаживаем Y_1 аналогичным образом.

Нетрудно видеть, что для так построенной функции Y функция $W := Y \circ \ln$ удовлетворяет условиям (W1)–(W4).

Покажем, что функция Y не удовлетворяет условию (LEV). Возьмем возрастающую последовательность $(t_n)_{n=1}^\infty$, $t_n = 2^{n+1} \cdot e^{\rho 2^n}$, и докажем, что

$$2Y^{-1}(2^{n+1} \cdot e^{\rho 2^n}) > Y^{-1}(2^n \cdot 2^{n+1} \cdot e^{\rho 2^n}) = Y^{-1}(2^{2n+1} \cdot e^{\rho 2^n}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} 2Y^{-1}(2^{n+1} \cdot e^{\rho \cdot 2^n}) &> 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} = \\ &= Y^{-1}(2^{n+1} \cdot e^{\rho \cdot 2^{n+1}}) > Y^{-1}(2^{2n+1} \cdot e^{\rho \cdot 2^n}), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(Отметим, что если $\rho = 0$, то $Y_1(x) = x$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Y(x)}{x} \neq +\infty$.)

3.2. При $\rho = 0$ функция W , не удовлетворяющая условию (LEV), строится аналогично. Нужно только положить $Y(2^n) := n^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Литература

1. Мелихов С. Н. О левом обратном к оператору сужения на весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2002.—Т. 14, № 1.—С. 99–133.
2. Langenbruch M. The splitting condition for the weighted $\bar{\partial}$ -complex // Results in Mathematics.—1992.—V. 22.—P. 560–597.
3. Мелихов С. Н. Правые обратные к операторам представления рядами экспонент и свертки: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук.—Уфа, 2003.—33 с.
4. Hörmander L. Notions of convexity // Progress in Mathematics 127, MA.—Boston: Birkhäuser Boston, Inc., 1994.
5. Юлмухаметов Р. С. Приближение субгармонических функций // Мат. сборник.—1984.—Т. 124 (166), № 3 (7).—С. 393–415.

Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет
E-mail: ivolga1981@list.ru

Владикавказ, Институт прикладной математики и информатики ВЦ РАН
E-mail: melih@ms.math.rsu.ru

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ВЕСОВОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА БЕСОВА НА ЕДИНИЧНОМ ДИСКЕ

А. Н. Карапетянц, Ф. Д. Кодзоева¹

1. Введение

Пусть $\mathbb{D}$ — единичный диск в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Для $-1 < \lambda < \infty$ весовое пространство Бесова $B_p^\lambda(\mathbb{D})$, $1 < p < \infty$, на $\mathbb{D}$ состоит из функций f , аналитических на $\mathbb{D}$ таких, что

$$\int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{p-2} |f'(z)|^p d\mu_\lambda(z) < \infty,$$

где обозначено

$$d\mu_\lambda(z) = (\lambda + 1)(1 - |z|^2)^\lambda d\mu(z), \quad d\mu(z) = \frac{1}{\pi} dx dy.$$

Безвесовое пространство Бесова на $\mathbb{D}$ ($B_p(\mathbb{D}) = B_p^0(\mathbb{D})$) описано в работе [1]. Далее, результаты упомянутой работы были перенесены на случай ограниченной симметричной области в [2, 3]. Характеризация функций из пространств Бесова приводится в различных терминах, включая осцилляцию функции в метрике Бергмана, проектор Бергмана, и пр. В работах [2, 3] используется весовой проектор Бергмана и также некоторые аналоги оператора дробного дифференцирования.

В настоящей работе описываются весовые пространства Бесова. Основные результаты приводятся в теоремах 3.3, 3.5. Идеи доказательств результатов настоящей работы взяты из [1], тем не менее эти результаты не могут быть получены непосредственным обобщением безвесового случая. Отметим также, что выбор веса вида $(1 - |z|^2)^\lambda$ в определении пространств не случаен. Такой выбор является естественным в силу непосредственной связи с порождающим

¹Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 06-01-00297-а.

ядром для весового пространства Бергмана. Кроме того, во многих вопросах теории операторов на пространствах такого типа интерес представляет характеристика поведения функции при приближении к границе диска.

2. Вспомогательные сведения

Формулы и утверждения, приведенные ниже, взяты из [4]. Будем использовать преобразование Мебиуса $\alpha_z(w) = \frac{z-w}{1-\bar{z}w}$, переводящее точку $w = 0$ в точку $w = z$. Метрика Бергмана на $\mathbb{D}$ задается следующим образом:

$$\beta(z, w) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |\alpha_z(w)|}{1 - |\alpha_z(w)|} = \frac{1}{2} \ln \frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|}, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Для $z \in \mathbb{D}$ и $r > 0$ обозначим через $D(z, r) = \{w \in \mathbb{D} : \beta(z, w) < r\}$ — диск в гиперболической метрике Бергмана с гиперболическим центром в точке z и радиусом r . Учитывая, что $|\alpha_z(w)| = \operatorname{th} \beta(z, w)$, можно записать: $D(z, r) = \{w \in \mathbb{D} : |\alpha_z(w)| < \operatorname{th} r\}$. Из последнего соотношения можно вывести, что диск $D(z, r)$ имеет евклидов центр в точке $\frac{(1 - \operatorname{th}^2 r)z}{(1 - z \operatorname{th}^2 r)}$ и евклидов радиус $\frac{(1 - |z|^2) \operatorname{th} r}{1 - |z|^2 \operatorname{th}^2 r}$. Обозначим далее $|D(z, r)|_\lambda = \int_{D(z, r)} d\mu_\lambda(w)$. Тогда известно, что $|D(z, r)|_\lambda \approx$

$|D(z, r)|_0^{1 + \frac{\lambda}{2}}$, где согласно сказанному выше,

$$|D(z, r)|_0 = \int_{D(z, r)} d\mu(w) = \left(\frac{(1 - |z|^2) \operatorname{th} r}{1 - |z|^2 \operatorname{th}^2 r} \right)^2.$$

Для локально суммируемой на $\mathbb{D}$ функции f определим осцилляцию в метрике Бергмана следующим образом

$$\omega_r(f)(z) = \sup \{|f(z) - f(w)| : w \in D(z, r)\}.$$

Пусть также

$$\hat{f}_{r, \lambda}(z) = \frac{1}{|D(z, r)|_\lambda} \int_{D(z, r)} f(w) d\mu_\lambda(w).$$

Средняя осцилляция функции f в метрике Бергмана определяется равенством

$$\text{MO}_{r,\lambda}(f)(z) = \frac{1}{|D(z,r)|_\lambda} \int_{D(z,r)} |f(w) - \widehat{f}_{r,\lambda}(z)| d\mu_\lambda(w).$$

Обозначим $L^p(\mathbb{D}, d\mu) = \{f : \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p d\mu(z) < \infty\}$. Пусть $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ обозначает весовое пространство Бергмана на $\mathbb{D}$, состоящее из аналитических на $\mathbb{D}$ функций, принадлежащих весовому пространству $L^2(\mathbb{D}, d\mu_\lambda)$, $-1 < \lambda < \infty$. Пусть далее $\{e_n^\lambda(z)\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$. Весовое ядро Бергмана имеет вид $K_\lambda(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n^\lambda(z) \overline{e_n^\lambda(w)}$, $z, w \in \mathbb{D}$, причем $K_\lambda(z, w)$ не зависит от выбора ортонормированного базиса. Выбрав стандартный базис в $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$: $e_n^\lambda(z) = d_{n,\lambda} z^n$, где

$$d_{n,\lambda} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda+1)B(n+1, \lambda+1)}} = \sqrt{\frac{\Gamma(n+\lambda+2)}{\Gamma(\lambda+2)n!}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

можно получить явное выражение для весового ядра Бергмана:

$$K_\lambda(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{m,\lambda}^2 z^m \overline{w}^m = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^{2+\lambda}}. \quad (2.1)$$

Весовой (ортогональный) проектор Бергмана $P_\mathbb{D}^\lambda : L^2(\mathbb{D}, d\mu_\lambda) \rightarrow \mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ определяется следующим образом:

$$P_\mathbb{D}^\lambda f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w) K_\lambda(z, w) d\mu_\lambda(w).$$

Таким образом, для функции $f \in \mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ имеем

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\lambda}} d\mu_\lambda(w). \quad (2.2)$$

Кроме того, в силу плотности $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ в пространстве аналитических суммируемых функций (обозначим через $\mathcal{A}_\lambda^1(\mathbb{D})$), формула (2.2) имеет место и для $f \in \mathcal{A}_\lambda^1(\mathbb{D})$.

Нормированное когерентное состояние (см. [4]) для весового пространства Бергмана имеет вид

$$\begin{aligned} k_z^\lambda(w) &= \frac{\overline{K^\lambda(z, w)}}{\|K^\lambda(z, \cdot)\|_{\mathcal{H}_\lambda^2(\mathbb{D})}} = \frac{(1 - |z|^2)^{1+\lambda/2}}{(1 - \bar{z}w)^{2+\lambda}} = \\ &= (1 - |z|^2)^{1+\lambda/2} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n^\lambda(z)} e_n^\lambda(w). \end{aligned}$$

Заметим, что $k_z^\lambda(w) = [k_z(w)]^{1+\frac{\lambda}{2}}$, где $k_z(w) = \frac{1-|z|^2}{(1-\bar{z}w)^2}$ — нормированное когерентное состояние для безвесового пространства Бергмана ($\lambda = 0$). Покажем, что для любой суммируемой функции f выполняется:

$$\int_{\mathbb{D}} f \circ \alpha_z(w) d\mu_\lambda(w) = \int_{\mathbb{D}} f(u) |k_z^\lambda(u)|^2 d\mu_\lambda(u).$$

Действительно, осуществляя замену $\alpha_z(w) = u$ и учитывая, что вещественный Якобиан замены равен $\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\bar{z}w|^4}$, получим

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{D}} f \circ \alpha_z(w) d\mu_\lambda(w) = \\ &= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} f(u) (1 - |\alpha_z(u)|^2)^\lambda \frac{1 - |z|^2}{|1 - \bar{z}u|^2} \frac{1 - |z|^2}{|1 - \bar{z}u|^2} d\mu(u) = \\ &= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} f(u) \left[\frac{(1 - |z|^2)(1 - |u|^2)}{|1 - \bar{z}u|^2} \right]^\lambda \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - \bar{z}u|^4} d\mu(u) = \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(u) \left[\frac{(1 - |z|^2)^{1+\frac{\lambda}{2}}}{|1 - \bar{z}u|^{\lambda+2}} \right]^2 d\mu_\lambda(u) = \int_{\mathbb{D}} f(u) |k_z^\lambda(u)|^2 d\mu_\lambda(u). \end{aligned}$$

Для аналитической функции f существует $C > 0$ ($C = C(r)$) такое, что

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|D(z, r)|_\lambda} \int_{D(z, r)} |f(w)| d\mu_\lambda(w). \quad (2.3)$$

Далее, для всех $w \in D(z, r)$ справедливо

$$C^{-1} \leq |k_z^\lambda(w)|^2 |D(z, r)|_\lambda \leq C$$

с постоянной C , зависящей только от r .

Для дальнейшего удобно ввести следующие обозначения:

$$d\nu(z) = \frac{d\mu(z)}{(1-|z|^2)^2}, \quad d\nu_\lambda(z) = (\lambda+1)(1-|z|^2)^\lambda d\nu(z).$$

Заметим, что мера $d\nu(z)$ инвариантна относительно преобразования Мёбиуса, и, кроме того, соответствующая мера гиперболических дисков $D(z, r)$ с одинаковым радиусом r не зависит от точки $z \in \mathbb{D}$. В этих обозначениях

$$f \in B_p^\lambda(\mathbb{D}) \iff (1-|z|^2)f'(z) \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda).$$

Обозначим

$$I_\alpha^\lambda f(z) = (1-|z|^2)^\alpha \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\bar{w})^{\alpha+\lambda+2}} d\mu_\lambda(w). \quad (2.4)$$

Лемма 2.1 ([4, теорема 1.9]). *Оператор $I_\alpha^{\lambda_1}$ ограничен в $L^p(\mathbb{D}, d\mu_{\lambda_2})$ если и только если $-p\alpha < \lambda_2 + 1 < p(\lambda_1 + 1)$.*

3. Характеризация функций из пространства $B_p^\lambda(\mathbb{D})$

Сначала приведем два вспомогательных утверждения.

Лемма 3.1. *Если f — многочлен степени n , то $f \in P_{\mathbb{D}}^\lambda L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$ для всех $-1 < \lambda < \infty$, $1 \leq p < \infty$.*

◁ Для $n \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{D}$ покажем, что $P_{\mathbb{D}}^\lambda(1-|z|^2)^2 z^n = C_{n,\lambda} z^n$. Действительно, непосредственные вычисления с учетом (2.1) дают

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{D}}^\lambda(1-|z|^2)^2 z^n &= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^2 w^n}{(1-z\bar{w})^{2+\lambda}} d\mu_\lambda(w) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+2+\lambda)}{m!\Gamma(2+\lambda)} z^m \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^2 w^n \bar{w}^m d\mu_\lambda(w) = \\ &= \frac{\Gamma(n+2+\lambda)}{n!\Gamma(2+\lambda)} z^n \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^2 |w|^{2n} d\mu_\lambda(w) = C_{n,\lambda} z^n, \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} C_{n,\lambda} &= \frac{\Gamma(n+2+\lambda)}{n!\Gamma(2+\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(3+\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+4+\lambda)}(\lambda+1) = \\ &= \frac{\Gamma(n+2+\lambda)(2+\lambda)\Gamma(2+\lambda)n!(\lambda+1)}{n!\Gamma(2+\lambda)(n+3+\lambda)(n+2+\lambda)\Gamma(n+2+\lambda)} = \\ &= \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{(n+3+\lambda)(n+2+\lambda)}. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу линейности пространства $P_{\mathbb{D}}^{\lambda}L^p(\mathbb{D}, d\nu_{\lambda})$ следует, что любой многочлен принадлежит $P_{\mathbb{D}}^{\lambda}L^p(\mathbb{D}, d\nu_{\lambda})$. $\triangleright$

Лемма 3.2. Пусть $m \geq 1$, $-1 < \lambda < \infty$, функция $f \in L^1(\mathbb{D}, d\mu_{\lambda})$ аналитична на $\mathbb{D}$ и $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(2m)}(0) = 0$, тогда

$$f(z) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+m+1)} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^m f^{(m)}(w)}{\bar{w}^m (1-z\bar{w})^{2+\lambda}} d\mu_{\lambda}(w).$$

$\triangleleft$ Очевидно, что интеграл

$$g(z) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+m+1)} \int_D \frac{(1-|w|^2)^m f^{(m)}(w)}{\bar{w}^m (1-z\bar{w})^{2+\lambda}} d\mu_{\lambda}(w)$$

сходится при всех $z \in \mathbb{D}$ и определяет аналитическую на $\mathbb{D}$ функцию g . Продифференцировав m раз под знаком интеграла и учитывая (2.2), получим

$$\begin{aligned} g^{(m)}(z) &= \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\lambda+m+2)}{\Gamma(\lambda+m+1)\Gamma(\lambda+2)} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^m f^{(m)}(w)}{(1-z\bar{w})^{m+\lambda+2}} d\mu_{\lambda}(w) = \\ &= \frac{\lambda+m+1}{\lambda+1} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^m f^{(m)}(w)}{(1-z\bar{w})^{m+\lambda+2}} d\mu_{\lambda}(w) = \\ &= \frac{(\lambda+m+1)(\lambda+1)}{(\lambda+1)(\lambda+m+1)} \int_{\mathbb{D}} \frac{f^{(m)}(w)}{(1-z\bar{w})^{m+\lambda+2}} d\mu_{\lambda+m}(w) = f^{(m)}(z). \end{aligned}$$

Таким образом, функции f и g совпадают с точностью до многочлена степени не выше $m-1$. Дифференцируя k раз функцию g , получим

$$g^{(k)}(0) = \frac{\Gamma(\lambda+k+2)}{(\lambda+1)\Gamma(\lambda+m+1)} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^m f^{(m)}(w)}{\bar{w}^{m-k}} d\mu_{\lambda}(w) = 0$$

при всех $0 \leq k \leq m-1$. В силу того, что $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ для всех $0 \leq k \leq m-1$ и $g^{(m)}(z) = f^{(m)}(z)$, $z \in \mathbb{D}$, получаем $f(z) = g(z)$ для всех $z \in \mathbb{D}$. $\triangleright$

Теперь докажем теорему, характеризующую функции из $B_p^\lambda(\mathbb{D})$ в терминах, связанных с весовым проектором Бергмана.

Теорема 3.3. Пусть $1 < p < \infty$, $m \geq 2$, $-1 < \lambda < \infty$ и f — аналитическая на $\mathbb{D}$ функция. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $f \in B_p^\lambda(\mathbb{D})$;
- (2) $f \in P_{\mathbb{D}}^\lambda L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$;
- (3) $(1 - |z|^2)^m f^{(m)} \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$;
- (4) $J_f^{\lambda,p} = \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z) - f(w)|^p (1 - |z|^2)^\lambda}{|1 - \bar{z}w|^{4+2\lambda}} d\mu_\lambda(z) d\mu_\lambda(w) < \infty$.

$\triangleleft$ Проведем доказательство по схеме: (1) $\Leftrightarrow$ (2), (2) $\Leftrightarrow$ (3), (1) $\Leftrightarrow$ (4).

Пусть $f \in B_p^\lambda(\mathbb{D})$, покажем, что $f \in P_{\mathbb{D}}^\lambda L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$. С учетом леммы 3.1 можем считать, что $f(0) = f'(0) = 0$. Согласно лемме 3.2 имеем $f = P_{\mathbb{D}}^\lambda \varphi$, где $\varphi(z) = \frac{(1 - |z|^2)}{\bar{z}} f'(z)$, $z \in \mathbb{D}$. Если $1 < p < \infty$ и $f \in B_p^\lambda(\mathbb{D})$, то $\varphi \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$ в силу того, что интеграл

$$\int_{\mathbb{D}} |\varphi(z)|^p d\nu_\lambda(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^{p-2} |f'(z)|^p}{|\bar{z}|^p} d\mu_\lambda(z)$$

сходится при всех $z \in \mathbb{D}$. Таким образом, $f \in P_{\mathbb{D}}^\lambda L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$, т. е. (1) $\Rightarrow$ (2).

С другой стороны, при $\varphi \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$ и $f = P_{\mathbb{D}}^\lambda \varphi$ для любого $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w)}{(1 - z\bar{w})^{2+\lambda}} d\mu_\lambda(w). \quad (3.1)$$

Дифференцируя под знаком интеграла и умножая результат на $(1 - |z|^2)$, получим:

$$\begin{aligned} (1 - |z|^2) f'(z) &= (2 + \lambda)(1 - |z|^2) \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w) \bar{w}}{(1 - z\bar{w})^{3+\lambda}} d\mu_\lambda(w) = \\ &= (2 + \lambda)(I_1^\lambda \varphi(w) \bar{w})(z). \end{aligned}$$

Имеет место неравенство ([4, теорема 1.9]):

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^{b+qs} d\mu(w)}{|1 - z\overline{w}|^{2+b+a}} \leq \frac{C}{(1 - |z|^2)^{a-qs}},$$

с учетом которого для ограниченной на $\mathbb{D}$ функции φ имеем:

$$|(I_1^\lambda \varphi(w)\overline{w})(z)| < C(1 - |z|^2) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^\lambda}{|1 - z\overline{w}|^{3+\lambda}} d\mu(w) \leq C.$$

Следовательно, $(1 - |z|^2)f'(z) \in L^\infty(\mathbb{D})$. Далее, для $\varphi \in L^1(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$ имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} |(I_1^\lambda \varphi(u)\overline{u})(z)| d\nu_\lambda(z) \leq \\ & \leq C_1(\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} |\varphi(w)| |\overline{w}| d\mu_\lambda(w) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^{-1+\lambda}}{(1 - |z|^2)^{3+\lambda}} d\mu(z) \leq \\ & \leq C_2 \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi(w)|}{(1 - |w|^2)^2} d\mu_\lambda(w) = C_2 \int_{\mathbb{D}} |\varphi(w)| d\nu_\lambda(w), \end{aligned}$$

следовательно, $(1 - |z|^2)f'(z) \in L^1(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$. Окончательно, применяя интерполяционное неравенство, получим:

$$\|(1 - |z|^2)f'(z)\|_{L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)} < \infty.$$

Таким образом, $f \in B_p^\lambda(\mathbb{D})$ для всех $1 < p < \infty$, т. е. (2) $\Rightarrow$ (1).

Далее, докажем, что $f \in P_{\mathbb{D}}^\lambda L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$ тогда и только тогда, когда $(1 - |z|^2)^m f^{(m)}(z) \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$. С учетом леммы 3.1 считаем, что $f'(0) = \dots = f^{(m)}(0) = 0$. Применяя лемму 3.2, имеем:

$$f(z) = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + m + 1)} \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\lambda}} d\mu_\lambda(w),$$

где обозначено $\varphi(w) = \frac{(1 - |w|^2)^m f^{(m)}(w)}{\overline{w}^m}$. Заметим, что $\varphi \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$ и тогда $f \in P_{\mathbb{D}}^\lambda L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$, т. е. (3) $\Rightarrow$ (2). Покажем, что (2) $\Rightarrow$ (3). Для $f \in P_{\mathbb{D}}^\lambda L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$ имеет место равенство (3.1) с $\varphi \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$.

Дифференцируя (3.1) под знаком интеграла m раз и умножая на $(1 - |z|^2)^m$, получим

$$(1 - |z|^2)^m f^{(m)}(z) = \frac{\Gamma(\lambda + 2)}{\Gamma(\lambda + m + 1)} (1 - |z|^2)^m \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{w}^m \varphi(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+m+\lambda}} d\mu_\lambda(w).$$

Тогда $(1 - |z|^2)^m f^{(m)}(z) \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$ в силу леммы 2.1, т. е. (2) $\Rightarrow$ (3).

Далее докажем, что если $1 < p < \infty$, $-1 < \lambda < \infty$ и f аналитична на $\mathbb{D}$, то $f \in B_p^\lambda(\mathbb{D})$ тогда и только тогда, когда $J_f^{\lambda,p} < \infty$. Действительно, если $g \in L^1(\mathbb{D}, d\mu_\lambda)$ аналитична, то

$$g(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\lambda}} d\mu_\lambda(w).$$

Поскольку $g'(0) = (2 + \lambda) \int_{\mathbb{D}} \overline{w}g(w) d\mu_\lambda(w)$ и $\int_{\mathbb{D}} \overline{w}g(0) d\mu_\lambda(w) = 0$, то

$$|g'(0)|^p \leq (2 + \lambda)^p \int_{\mathbb{D}} |g(w) - g(0)|^p d\mu_\lambda(w).$$

Заменяя g на $f \circ \alpha_z$, получим

$$(1 - |z|^2)^p |f'(z)|^p \leq (2 + \lambda)^p \int_{\mathbb{D}} |f \circ \alpha_z(w) - f(z)|^p d\mu_\lambda(w).$$

Используя теорему Фубини, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{p-2} |f'(z)|^p d\mu_\lambda(z) \leq \\ & \leq (2 + \lambda)^p \int_{\mathbb{D}} d\nu_\lambda(z) \int_{\mathbb{D}} |f \circ \alpha_z(w) - f(z)|^p d\mu_\lambda(w) = \\ & = (2 + \lambda)^p \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z) - f(w)|^p (1 - |z|^2)^\lambda}{|1 - \overline{z}w|^{4+2\lambda}} d\mu_\lambda(z) d\mu_\lambda(w). \end{aligned}$$

Это объясняет необходимость условия $J_f^{\lambda,p} < \infty$. С другой стороны, $(1 - |z|^2)f'(z) \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$ (см. [4, теорема 1.11]) и поэтому суще-

ствуует постоянная $C_p > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} J_f^{\lambda,p} &= \int_{\mathbb{D}} d\nu_\lambda(z) \int_{\mathbb{D}} |f \circ \alpha_z(w) - f(z)|^p d\mu_\lambda(w) \leq \\ &\leq C_p \int_{\mathbb{D}} d\nu_\lambda(z) \int_{\mathbb{D}} (1 - |w|^2)^p |(f \circ \alpha_z)'(w)|^p d\mu_\lambda(w). \end{aligned}$$

Так как $(f \circ \alpha_z)'(w) = f'(\alpha_z(w))\alpha'_z(w)$ и $(1 - |w|^2)|\alpha'_z(w)| = 1 - |\alpha_z(w)|^2$, будем иметь

$$\begin{aligned} J_f^{\lambda,p} &\leq C_p \int_{\mathbb{D}} d\nu_\lambda(z) \int_{\mathbb{D}} (1 - |\alpha_z(w)|^2)^p |f'(\alpha_z(w))|^p d\mu_\lambda(w) = \\ &= C_p \int_{\mathbb{D}} d\nu_\lambda(z) \int_{\mathbb{D}} (1 - |w|^2)^p |f'(w)|^p |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w) = \\ &= C_p \int_{\mathbb{D}} (1 - |w|^2)^p |f'(w)|^p d\mu_\lambda(w) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^\lambda}{|1 - \bar{z}w|^{4+2\lambda}} d\mu_\lambda(z). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^\lambda}{|1 - \bar{z}w|^{4+2\lambda}} d\mu_\lambda(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^\lambda}{(1 - z\bar{w})^{2+\lambda}} \frac{1}{(1 - \bar{z}w)^{2+\lambda}} d\mu_\lambda(z) = \\ &= \frac{(1 - |z|^2)^\lambda}{(1 - \bar{z}w)^{2+\lambda}} \Big|_{z=w} = \frac{1}{(1 - |w|^2)^2}, \end{aligned}$$

то окончательно получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z) - f(w)|^p}{|1 - \bar{z}w|^{4+2\lambda}} (1 - |z|^2)^\lambda d\mu_\lambda(z) d\mu_\lambda(w) &\leq \\ &\leq C \int_{\mathbb{D}} (1 - |w|^2)^{p-2} |f'(w)|^p d\mu_\lambda(w) < \infty, \end{aligned}$$

таким образом, условие $J_f^{\lambda,p} < \infty$ влечет $f \in B_p^\lambda(\mathbb{D})$. $\triangleright$

Теперь приведем характеризацию функций из $B_p^\lambda(\mathbb{D})$ в терминах осцилляции в метрике Бергмана.

Теорема 3.4. Если $r > 0$, $-1 < \lambda < \infty$, $1 < p < \infty$ и f аналитична на $\mathbb{D}$, то следующие условия эквивалентны:

- (1) $f \in B_p^\lambda(\mathbb{D})$;
- (2) $\text{MO}_{r,\lambda}(f) \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$;
- (3) $\omega_r(f) \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$;
- (4) $|D(z, r)|_\lambda^{-1} \int_{D(z, r)} |f(w) - f(z)| d\mu_\lambda(w) \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$.

◁ Проведем доказательство по схеме: (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). Для функции f , аналитической на $\mathbb{D}$, заменив f на $f - f(w)$ в неравенстве (2.3), получим:

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{C_1}{|D(z, r)|_\lambda} \int_{D(z, r)} |f(w) - f(u)| d\mu_\lambda(u)$$

для всех аналитических на $\mathbb{D}$ функций f и всех $z, w \in \mathbb{D}$. Если $z \in D(w, r)$, то $D(z, r) \subset D(w, 2r)$ и существует постоянная $C_2 > 0$ такая, что

$$\frac{C_1}{|D(z, r)|_\lambda} \leq \frac{C_2}{|D(w, 2r)|_\lambda}.$$

Отсюда следует, что

$$\omega_r(f)(w) \leq \frac{C_2}{|D(w, 2r)|_\lambda} \int_{D(w, 2r)} |f(w) - f(z)| d\mu_\lambda(z)$$

для всех $w \in \mathbb{D}$. Выберем $C > 0$ так, чтобы $C_2 \leq C|k_w^\lambda(z)|^2|D(w, 2r)|_\lambda$ для всех $w \in \mathbb{D}$ и $z \in D(w, 2r)$. Так как при каждом $w \in \mathbb{D}$ выражение $|k_w^\lambda(z)|^2 d\mu_\lambda(z)$ есть вероятностная мера, то

$$\begin{aligned} \omega_r(f)(w) &\leq C \int_{\mathbb{D}} |f(w) - f(z)| |k_w^\lambda(z)|^2 d\mu_\lambda(z) \leq \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{D}} |f(w) - f(z)|^p |k_w^\lambda(z)|^2 d\mu_\lambda(z) \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= C \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{|f(w) - f(z)|^p (1 - |w|^2)^{2+\lambda}}{|1 - \bar{w}z|^{4+2\lambda}} d\mu_\lambda(z) \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

что на основании теоремы 3.3 влечет $\omega_r(f) \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$, т. е. (1) $\Rightarrow$ (3).

Так как

$$\frac{1}{|D(z, r)|_\lambda} \int_{D(z, r)} |f(z) - f(w)| d\mu_\lambda(w) \leq \omega_r(f)(z),$$

то, очевидно, (3) $\Rightarrow$ (4).

То, что (4) $\Rightarrow$ (2), доказывается непосредственными оценками:

$$\begin{aligned} \text{MO}_{r, \lambda}(f)(z) &= \frac{1}{|D(z, r)|_\lambda} \int_{D(z, r)} \left| f(w) - \frac{1}{|D(z, r)|_\lambda} \int_{D(z, r)} f(u) d\mu_\lambda(u) \right| \times \\ &\times d\mu_\lambda(w) \leq \frac{1}{|D(z, r)|_\lambda^2} \int_{D(z, r)} \int_{D(z, r)} |f(w) - f(u)| d\mu_\lambda(w) d\mu_\lambda(u) \leq \\ &\leq \frac{1}{|D(z, r)|_\lambda^2} \int_{D(z, r)} \int_{D(z, r)} (|f(w) - f(z)| + |f(z) - f(u)|) d\mu_\lambda(w) d\mu_\lambda(u) = \\ &= \frac{2}{|D(z, r)|_\lambda} \int_{D(z, r)} |f(z) - f(w)| d\mu_\lambda(w). \end{aligned}$$

Докажем теперь, что (2) $\Rightarrow$ (1). Если g аналитична на $\mathbb{D}$, то $g'(0) = C \int_{D(0, r)} \bar{z} g(z) d\mu_\lambda(z)$ и для любого δ имеем

$$|g'(0)| \leq C \int_{D(0, r)} |g(w) - \delta| d\mu_\lambda(w).$$

Заменим в последнем неравенстве g на $f \circ \alpha_z$ и δ на $\widehat{f}_{r, \lambda}(z)$. Тогда

$$(1 - |z|^2) |f'(z)| \leq C \int_{D(0, r)} |f \circ \alpha_z(w) - \widehat{f}_{r, \lambda}(z)| d\mu_\lambda(w).$$

Осуществляя замену переменной с учетом $\alpha_z(D(0, r)) = D(z, r)$, получим:

$$(1 - |z|^2) |f'(z)| \leq C \int_{D(z, r)} |f(w) - \widehat{f}_{r, \lambda}(z)| |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w).$$

Выберем постоянную $C' > 0$ такую, что $C|k_z^\lambda(w)|^2|D(z, r)| \leq C'$ для $w \in D(z, r)$, тогда

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq C' \text{MO}_{r,\lambda}(f)(z)$$

для всех аналитических на $\mathbb{D}$ функций f и любого $z \in \mathbb{D}$.

Таким образом, если $\text{MO}_{r,\lambda}(f)(z) \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$, то $(1 - |z|^2)|f'(z)| \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$, что по теореме 3.3 означает, что $f \in B_p^\lambda(\mathbb{D})$, т. е. (2) $\Rightarrow$ (1). $\triangleright$

Следующая теорема характеризует поведение коэффициентов Тейлора функций из $B_p^\lambda(\mathbb{D})$.

Теорема 3.5. Пусть $f \in B_p^\lambda(\mathbb{D})$, $-1 < \lambda < \infty$, тогда для всех $1 < p < \infty$ существует постоянная C_p такая, что

$$|a_n| \leq C_p(\lambda + 1)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{B_p^\lambda(\mathbb{D})} n^{\frac{\lambda}{p} - \frac{1}{p}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.2)$$

где a_n — коэффициенты разложения в ряд Тейлора функции f .

$\triangleleft$ Используя формулу

$$a_n = (n + 1) \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2) f'(z) \bar{z}^{n-1} d\mu(z)$$

и неравенство Гёльдера, получим:

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq (n + 1) \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2) |f'(z)| |\bar{z}|^{n-1} d\mu(z) = \\ &= \frac{n + 1}{\lambda + 1} \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2) |f'(z)| |\bar{z}|^{n-1} (1 - |z|^2)^{2-\lambda} d\nu_\lambda(z) \leq \\ &\leq \frac{n + 1}{\lambda + 1} \left[\int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^p |f'(z)|^p d\nu_\lambda(z) \right]^{\frac{1}{p}} \times \\ &\times \left[\int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{(2-\lambda)q} |z|^{(n-1)q} d\nu_\lambda(z) \right]^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq \frac{n + 1}{\lambda + 1} \|f\|_{B_p^\lambda(\mathbb{D})} (\lambda + 1)^{\frac{1}{q}} \int_{\mathbb{D}} |z|^{(n-1)+q} (1 - |z|^2)^{(2-\lambda)q+\lambda-2} d\mu(z). \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} |z|^{(n-1)q} (1 - |z|)^{(2-\lambda)q + \lambda - 2} d\mu(z) = \\ & = \frac{\Gamma((n-1)q + 2) \Gamma((2-\lambda)q + \lambda - 1)}{\Gamma((n-\lambda+1)q + \lambda + 1)}. \end{aligned}$$

С учетом формулы Стирлинга имеем:

$$\frac{\Gamma((n-1)q + 2)}{\Gamma((n-\lambda+1)q + \lambda + 1)} \sim \frac{1}{n^{(2-\lambda)q + \lambda - 1}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, существует постоянная $C_p > 0$ такая, что

$$|a_n| \leq C_p (\lambda + 1)^{-\frac{1}{p}} (n + 1) \|f\|_{B_p^\lambda(\mathbb{D})} \left(\frac{1}{n^{(2-\lambda)q + \lambda - 1}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Так как $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $2 - \lambda + \frac{1}{q}(\lambda - 1) = \frac{1}{p} - \frac{\lambda}{p} + 1$ и, следовательно, (3.2) имеет место. $\triangleright$

4. Дальнейшие свойства пространств $B_p^\lambda(\mathbb{D})$

В заключение приведем результаты о двойственности и интерполяции пространств $B_p^\lambda(\mathbb{D})$. Поскольку доказательства соответствующих теорем аналогичны безвесовому случаю (см. [4]), мы их опускаем.

Теорема 4.1. Пусть $1 < p < \infty$, $-1 < \lambda < \infty$,

$$\langle f, g \rangle_\lambda = \int_{\mathbb{D}} f'(z) \overline{g'(z)} d\mu_\lambda(z),$$

тогда $(B_p^\lambda(\mathbb{D}))^* \cong B_q^\lambda(\mathbb{D})$ при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Приведенная выше формула является наиболее естественной для пространства Бесова. Тем не менее, используя оператор I_2^λ вида (2.4) можно привести другую формулу, порождающую ту же самую двойственность.

Теорема 4.2. Пусть $1 < p < \infty$, $-1 < \lambda < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и

$$\langle f, g \rangle_\lambda^\# = \int_{\mathbb{D}} I_2^\lambda f(z) \overline{I_2^\lambda g(z)} d\nu_\lambda(z).$$

Тогда $(B_p^\lambda(\mathbb{D}))^* \cong B_q^\lambda(\mathbb{D})$ с точностью до эквивалентности норм.

Пусть, как обычно, $[B_{p_0}^\lambda(\mathbb{D}), B_{p_1}^\lambda(\mathbb{D})]_\theta$ обозначает интерполяционное пространство, полученное методом комплексной интерполяции.

Теорема 4.3. Пусть $1 < p_0, p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$ и $-1 < \lambda < \infty$. Тогда

$$[B_{p_0}^\lambda(D), B_{p_1}^\lambda(D)]_\theta = B_q^\lambda(\mathbb{D}), \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

с точностью до эквивалентности норм.

Литература

1. Zhu K. Analytic Besov spaces // J. of Math. Analysis and Applications.—1991.—V. 157.—P. 318–336.
2. Zhu K. Holomorphic Besov spaces on bounded symmetric domains // Quarterly J. Math. Oxford (2).—1995.—V. 46.—P. 239–256.
3. Zhu K. Holomorphic Besov spaces on bounded symmetric domains, II // Indiana University Mathematics Journal.—1995.—V. 44. № 4.—P. 1017–1031.
4. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. Theory of Bergman spaces // New York: Springer-Verlag, 2000.
5. Zhu K. Spaces of holomorphic functions in the unit ball // Graduate texts in Mathematics. Springer, 2004.

Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет
E-mail: alexeyk@aaanet.ru

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ КЛАССОВ ХАРДИ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. Б. Климентов

1. Введение. Формулировка основных результатов

В предлагаемой статье, развивающей результаты автора [1, 2] по аналогам классов Харди обобщенных аналитических функций, доказывается аналог для обобщенных аналитических функций классической теоремы двойственности для голоморфных функций [3, с. 241–249].

Обозначим $D = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z -плоскости, $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга D ; $\overline{D} = D \cup \Gamma$; $A(z), B(z) \in L_s(\overline{D})$, $s > 2$ (используются обозначения книги [4]), — заданные комплексные функции.

Рассмотрим в $\overline{D}$ каноническую эллиптическую систему в комплексной записи

$$\partial_{\bar{z}} w + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0, \quad (1)$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, u и v — ее действительная и мнимая части, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{i\partial}{\partial y} \right)$ — производная в смысле Соболева.

Решение $w(z)$ системы (1) называют *обобщенной аналитической функцией* [4, с. 148].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Следуя [1], будем говорить, что решение системы (1) принадлежит классу $H_p(A, B)$, $p > 0$, если оно для некоторой положительной постоянной $M_p(w) < +\infty$ удовлетворяет условию

$$\mu(\rho, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |w(\rho e^{i\sigma})|^p d\sigma \leq M_p(w)$$

для любого ρ такого, что $0 \leq \rho < 1$, $\rho e^{i\sigma} = z \in D$. При $A = B \equiv 0$ имеем обычный класс Харди H_p голоморфных функций [3, с. 57].

Множество ограниченных в $\overline{D}$ решений системы (1) будем обозначать $H_\infty(A, B)$.

Теорема 1 (см. [2]). Множество $H_p(A, B)$, $p \geq 1$ ($H_\infty(A, B)$), с нормой

$$\|w\|_{H_p} = \left\{ \int_{\Gamma} |w(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} \quad \left(\|w\|_{H_\infty} = \sup_{z \in D} |w(z)| \right)$$

является действительным банаховым пространством. Здесь $w(e^{i\theta})$ — некасательные предельные значения $w(z)$ на Γ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что функция $w(z) \in H_p^0(A, B)$, $1 \leq p \leq \infty$, если $w(z)/z \in H_p(A, B)$.

Уравнением, сопряженным к (1), называется уравнение [4, с. 179]

$$\partial_{\bar{z}} w' - A(z)w' - \overline{B(z)} \bar{w}' = 0. \quad (2)$$

Везде далее при $t \in \Gamma$ запись $w(t) \in H_p(A, B)$ будет означать некасательные предельные значения на Γ функции $w(z) \in H_p(A, B)$.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 2. При билинейном спаривании

$$(f, g) = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) d\theta, \quad t = e^{i\theta}, \quad (3)$$

пространством, сопряженным вещественному банахову пространству $H_p(A, B)$, $1 \leq p < \infty$, является фактор-пространство $L_q(\Gamma)/H_q^0(-A, -\overline{B})$, $1/p + 1/q = 1$ (при $p = 1$, $q = \infty$), где $L_q(\Gamma)$ — вещественное банахово пространство комплексных функций на Γ , суммируемых с показателем q по мере $d\theta$. В формуле (3) $f \in H_p(A, B)$, $g \equiv g(t) + H_q^0(-A, -\overline{B})$ — класс смежности в фактор-пространстве $L_q(\Gamma)/H_q^0(-A, -\overline{B})$.

При $p > 1$ имеет место изоморфизм

$$L_q(\Gamma)/H_q^0(-A, -\overline{B}) \approx \overline{H_q(-A, -\overline{B})} \quad (4)$$

(справа пространство функций, комплексно сопряженных функциям из $H_q(-A, -\overline{B})$).

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, получим некоторые вспомогательные результаты.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1 (см. [2]). Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $p \geq 1$, а $w'(z) \in H_q(-A, -\overline{B})$, $1/p + 1/q = 1$ (при $p = 1$, $q = \infty$) — решение уравнения (2), то имеет место соотношение (тождество Грина)

$$\operatorname{Im} \left(\int_{\Gamma} w(z) w'(z) dz \right) = 0. \quad (5)$$

Лемма 2. Для того, чтобы функция $\varphi(\zeta) \in L_q(\Gamma)$, $q \geq 1$, была некасательными граничными значениями функции $w'(z) \in H_q(-A, -\overline{B})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\varphi(\zeta) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(t, \zeta) \varphi(t) dt - \overline{\Omega_2(t, \zeta)} \overline{\varphi(t)} d\bar{t} = 0, \quad (6)$$

где $\Omega_1(t, \zeta)$, $\Omega_2(t, \zeta)$ — обобщенные ядра Коши уравнения (1) [4, с. 179].

◁ Рассуждения полностью аналогичны доказательству соответствующей формулы для граничных значений функции класса $H_p(A, B)$ [1], только вместо представления $w'(z) \in H_q(-A, -\overline{B})$ через ядра уравнения (2) нужно использовать представление через ядра уравнения (1) [4, с. 186]. ▷

Лемма 3. Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $p > 1$, то $w(z) \in L_m(\overline{D})$ для любого m такого, что $0 < m < 2p$, и имеет место неравенство

$$\|w\|_{L_m(\overline{D})} \leq C_m \|w\|_{H_p}, \quad (7)$$

где константа C_m зависит от m , а от w не зависит.

◁ Первая часть леммы доказана в [1, лемма 5]. Докажем оценку (7).

Для функции $w(z) \in H_p(A, B)$ имеет место представление [1]

$$w(z) = \Phi(z) \omega(z), \quad \omega(z) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \right\}, \quad (8)$$

где

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad g(z) = \begin{cases} A(z) + B(z) \frac{\overline{w}}{w}, & \text{если } w \neq 0, \\ 0, & \text{если } w = 0, \end{cases}$$

$\Phi(z) \in H_p$ — голоморфная в D функция, однозначно определяемая функцией $w(z)$, причем $\omega(z) \in C_\alpha(\overline{D})$, $\alpha = (s-2)/s$ и $|\omega(z)| \leq \text{const}$, где константа не зависит от w . Далее из (8) имеем

$$\|w\|_{L_m(\overline{D})} \leq \text{const} \|\Phi\|_{L_m(\overline{D})},$$

где константа от w не зависит. Вместе с тем $\|\Phi\|_{L_m(\overline{D})} \leq \text{const} \|\Phi\|_{H_p}$, где константа зависит от m , но не зависит от Φ [5, с. 96]. Из (8) очевидно, что $\|\Phi\|_{H_p} \leq \text{const} \|w\|_{H_p}$, откуда получаем (7). $\triangleright$

Рассмотрим оператор

$$P_\varkappa f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z^{2\varkappa+1} \overline{f(\zeta)}}{1 - \overline{\zeta}z} \right) d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad \varkappa \in \mathbb{Z}_+,$$

используемый при исследовании канонической краевой задачи Римана — Гильберта

$$\text{Re} \{ z^{-\varkappa} w(t) \} = \gamma(t), \quad t \in \Gamma, \quad (9)$$

для уравнения (1) [4, с. 293]. В (9) $w(z)$ — искомое решение уравнения (1), $\gamma(t)$ — заданная на Γ функция.

Имеет место утверждение [6].

Теорема 3. Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $p > 1$, то имеет место соотношение

$$w(z) + P_\varkappa(Aw + B\overline{w}) = \Phi(z), \quad (10)$$

где $\Phi(z) \in H_p$ и

$$\text{Re} \{ t^{-\varkappa} w(t) \} = \text{Re} \{ t^{-\varkappa} \Phi(t) \}, \quad t \in \Gamma. \quad (11)$$

Обратно, если $\Phi(z) \in H_p$, $p > 1$, то соотношением (10) однозначно определяется функция $w(z) \in H_p(A, B)$, удовлетворяющая на Γ условию (11).

Замечание 1. В [6] имеется дополнительное условие $p > \frac{s}{2(s-1)}$, но оно лишнее, поскольку при фиксированном $p > 1$ всегда можно считать показатель суммируемости коэффициентов $A(z)$, $B(z)$ уравнения (1) настолько близким к двум, что это условие будет выполнено.

Наша ближайшая цель — доказать, что линейный оператор $(I + P_{\varkappa}) : H_p(A, B) \rightarrow H_p$ непрерывен и имеет ограниченный обратный, т. е., что из (10) следует

$$\|w\|_{H_p} \leq \text{const} \|\Phi\|_{H_p}, \quad (12)$$

где константа от w не зависит.

Итак, пусть $w(z) \in H_p(A, B)$, $p > 1$. Пусть r удовлетворяет неравенствам $0 < r \leq 1$ и $\Gamma_r = \{z : |z| = r\}$. Очевидно неравенство

$$\|w + P_{\varkappa}[Aw + B\bar{w}]\|_{L_{\gamma}(\Gamma_r)} \leq \|w\|_{L_{\gamma}(\Gamma_r)} + \|P_{\varkappa}[Aw + B\bar{w}]\|_{L_{\gamma}(\Gamma_r)}, \quad (13)$$

где $\gamma > 1$ — некоторое число, значение которого уточним ниже.

Отправным моментом в оценке второго слагаемого в (13) будет служить следующее утверждение [6].

Лемма 4. Если $f \in L_q(\overline{D})$, $1 < q \leq 2$, то $P_{\varkappa}f \in L_{\gamma}(\Gamma_r)$ для любого $r \in (0, 1]$, где γ — произвольное число, такое, что $1 < \gamma < \frac{q}{q-2}$, а также имеет место оценка

$$\|P_{\varkappa}f\|_{L_{\gamma}(\Gamma_r)} \leq M_{q,\gamma} \|f\|_{L_q(\overline{D})},$$

где константа $M_{q,\gamma}$ от f и r не зависит.

◁ Зафиксируем q так, чтобы $\frac{1}{q} = \frac{1}{m} + \frac{1}{s}$, $2 < m < 2p$. Поскольку $s > 2$ и $m > 2$, можно m зафиксировать таким, что $1 < q \leq 2$, причем аналогично тому, как в замечании 1, мы можем считать $s > 2$ сколь угодно близким к двум. За счет этого мы можем m выбирать сколь угодно близким к $2p$. Убедимся, что при этом можно добиться выполнения неравенства $q/(q-2) > p$. Это неравенство эквивалентно неравенству $\frac{1}{p} + 1 > 2(\frac{1}{s} + \frac{1}{m})$. Но при $s > 2$ близком к двум и m близком к $2p$ это неравенство становится очевидным.

Итак, зафиксируем q таким, чтобы $1 < q \leq 2$, $1 < p < \frac{q}{q-2}$. По лемме 4, из неравенства Гёльдера и (7) будем иметь

$$\|P_{\varkappa}[Aw + B\bar{w}]\|_{L_p(\Gamma_r)} \leq \text{const} \|w\|_{L_m(\overline{D})} \leq \text{const} \|w\|_{H_p}.$$

Сопоставляя полученную оценку и (13), имеем непрерывность оператора $(I + P_{\varkappa})$ на $H_p(A, B)$:

$$\|(I + P_{\varkappa})w\|_{H_p} \leq \text{const} \|w\|_{H_p}. \quad (14)$$

Оценка (12) непосредственное следствие теоремы 3, (14) и теоремы Банаха. $\triangleright$

Рассмотрим частный случай краевой задачи (1), (9) при $\varkappa = 0$ (обобщенная задача Шварца). Будем считать $\gamma(t) \in L_p(\Gamma)$.

В (10) (при $\varkappa = 0$) положим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \gamma(t) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t}. \quad (15)$$

Функция $\Phi(z)$ в (15) принадлежит классу H_p и является решением задачи Шварца

$$\operatorname{Re} \{\Phi(t)\} = \gamma(t), \quad t \in \Gamma,$$

нормированным условием $\operatorname{Im} \Phi(0) = 0$ [7], причем

$$\|\Phi\|_{H_p} \leq \operatorname{const} \|\gamma\|_{L_p(\Gamma)}, \quad (16)$$

где константа от γ не зависит.

Из теоремы 3 следует, что для $\Phi(z)$ из (15) уравнение (10) имеет единственное решение

$$w(z) = (I + P_0)^{-1} \Phi(z) \equiv S\gamma(z), \quad (17)$$

причем, в силу (12) и (16) имеем

$$\|w\|_{H_p} \leq \operatorname{const} \|\gamma\|_{L_p(\Gamma)}, \quad (18)$$

и $\operatorname{Re}\{w(t)\} = \gamma(t), t \in \Gamma$.

Оператор S в (17), следуя [4, с. 310], будем называть *обобщенным оператором Шварца для уравнения (1)*. Из (18) имеем следующее утверждение.

Лемма 5. *Обобщенный оператор Шварца $S : L_p(\Gamma) \rightarrow H_p(A, B)$, $p > 1$, непрерывен, т. е.*

$$\|S\gamma\|_{H_p} \leq \operatorname{const} \|\gamma\|_{L_p(\Gamma)}, \quad (19)$$

где константа от γ не зависит.

Замечание 2. В силу теоремы 3 общее решение $w(z) \in H_p(A, B)$, $p > 1$, обобщенной задачи Шварца имеет вид

$$w(z) = S\gamma(z) + (I + P_0)^{-1}(iC), \quad (20)$$

где C — произвольная вещественная постоянная.

Уточним зависимость константы C в (20) от $w(z)$. Применяя к (20) $(I + P_0)$ и полагая $z = 0$, получим

$$w(0) - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{A(\zeta)w(\zeta) + B(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{\zeta} d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\gamma(t)}{t} dt + iC. \quad (21)$$

Вместе с тем имеет место соотношение [1]:

$$w(0) - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{A(\zeta)w(\zeta) + B(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{\zeta} d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t} dt. \quad (22)$$

Из (21) и (22) получаем $C = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Im} w(t)}{t} dt$.

Таким образом, справедлива

Теорема 4. Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $p > 1$, то имеет место однозначное представление

$$w(z) = S\{\operatorname{Re} w\}(z) + (I + P_0)^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Im} w(t)}{t} dt \right\}.$$

Рассмотрим оператор

$$\tilde{P}_0 f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{z\overline{f(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}z} \right] d\xi d\eta.$$

Очевидно, что $\operatorname{Im} \tilde{P}_0 f(t) = 0$, $t \in \Gamma$. Дословным повторением соответствующих рассуждений, приведенных выше и в работе [7], касающихся уравнения (10), устанавливаются следующие утверждения.

Теорема 5. Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $p > 1$, то имеет место соотношение

$$w(z) + \tilde{P}_0(Aw + B\overline{w}) = \Phi(z), \quad (23)$$

где $\Phi(z) \in H_p$ и

$$\operatorname{Im} \{w(t)\} = \operatorname{Im} \{\Phi(t)\}, \quad t \in \Gamma. \quad (24)$$

Обратно, если $\Phi(z) \in H_p$, $p > 1$, то соотношением (23) однозначно определяется функция $w(z) \in H_p(A, B)$, удовлетворяющая на Γ условию (24).

Обозначим $w(z) = \tilde{S}\gamma(z) = (I + \tilde{P}_0)^{-1}\Phi(z)$, где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \gamma(t) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t},$$

$\gamma(t) \in L_p(\Gamma)$, $p > 1$. Очевидно, $\operatorname{Im}\{\Phi(t)\} = \operatorname{Im}\{w(t)\} = \gamma(t)$, $t \in \Gamma$.

Лемма 6. Оператор $\tilde{S} : L_p(\Gamma) \rightarrow H_p(A, B)$, $p > 1$, непрерывен, т. е.

$$\|\tilde{S}\gamma\|_{H_p} \leq \operatorname{const} \|\gamma\|_{L_p(\Gamma)},$$

где константа от $\gamma(t)$ не зависит.

Аналогично теореме 4 доказывается следующее утверждение.

Теорема 6. Общее решение краевой задачи $\operatorname{Im}\{w(t)\} = \gamma(t) \in L_p(\Gamma)$, $p > 1$, для уравнения (1) имеет вид

$$w(z) = \tilde{S}\gamma(z) + (I + \tilde{P}_0)^{-1}\{C\},$$

где C — произвольная вещественная постоянная.

Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $p > 1$, то имеет место однозначное представление

$$w(z) = \tilde{S}\{\operatorname{Im} w\}(z) + (I + \tilde{P}_0)^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Re} w(t)}{t} dt\right\}.$$

3. Доказательство теоремы 2

Лемма 7. Пусть $1 \leq p < \infty$, $q = p/(p-1)$ (при $p = 1$, $q = \infty$) и пусть $g(t) \in L_q(\Gamma)$. Для того, чтобы функция $g(t)$ была некасательными предельными значениями на Γ функции $g(z) \in H_q^0(-A, -\overline{B})$, необходимо и достаточно, чтобы для некасательных предельных значений $f(t)$ на Γ произвольной функции $f(z) \in H_p(A, B)$ выполнялось соотношение

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} f(t)g(t) d\theta = 0, \quad t = e^{i\theta}. \quad (25)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $A = B \equiv 0$ получается вещественный вариант хорошо известного утверждения о голоморфных функциях [3, с. 241].

◁ *Необходимость* — непосредственное следствие тождества Грина (5).

Достаточность. Пусть $X_k(t, z)$, $k = 1, 2$, — элементарные решения уравнения (1) [4, с. 177–178]. Если зафиксировано z с модулем $|z| > 1$ и $t \in \overline{D}$, то $X_k(t, z) \in H_p(A, B)$ для любого p как функция переменной t [1] и из формулы (25) имеем

$$\int_{\Gamma} X_k(t, z) g_*(t) dt - \overline{X_k(t, z)} \overline{g_*(t)} d\bar{t} = 0, \quad k = 1, 2,$$

где $g_*(t) = g(t)/t$. Умножив второе из этих соотношений ($k = 2$) на i и сложив с первым, получим [4, с. 179]

$$\int_{\Gamma} \Omega_1(t, z) g_*(t) dt - \overline{\Omega_2(t, z)} \overline{g_*(t)} d\bar{t} = 0,$$

где $\Omega_k(t, z)$, $k = 1, 2$, — обобщенные ядра Коши уравнения (1) [4, с. 179]. Переходя здесь к пределу при $z \rightarrow \Gamma$, в силу обобщенных формул Сохоцкого [1] будем иметь

$$g_*(\zeta) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(t, \zeta) g_*(t) dt - \overline{\Omega_2(t, \zeta)} \overline{g_*(t)} d\bar{t} = 0,$$

откуда, в силу (6), $g(t) \in H_q^0(-A, -\overline{B})$. $\triangleright$

Лемма 7 и теорема Хана — Банаха дают

$$[H_p(A, B)]^* = L_q(\Gamma)/H_q^0(-A, -\overline{B}), \quad 1 \leq p < \infty,$$

где билинейное спаривание осуществляется по формуле (3).

Докажем изоморфизм (4). Для функций $\lambda = f + ig \in L_q(\Gamma)$ определим (вещественно) линейный оператор, положив $f_*(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}$; $g_*(t) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{g(t)}{t} \right\}$:

$$\begin{aligned} \Lambda(f + ig) = f_* + ig_* - i \operatorname{Im} \left\{ S(f_*) + (I + P_0)^{-1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{g_*}{t} dt \right] \right\} - \\ - \operatorname{Re} \left\{ \tilde{S}(g_*) + (I + \tilde{P}_0)^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_*}{t} dt \right] \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

операторы S и $\tilde{S}$ составлены для уравнения (2). В силу (19), (12), теоремы 4, леммы 6, теорем 5 и 6 имеем ограниченность оператора

$\Lambda : L_q(\Gamma) \rightarrow L_q(\Gamma)$, $q > 1$. Из теорем 4 и 6 получаем, что ядро оператора Λ есть $H_q^0(-A, -\overline{B})$.

В силу (20) и теоремы 6 образ оператора Λ лежит в $\overline{H_q(-A, -\overline{B})} \equiv H$. Покажем, что образ оператора Λ есть все H .

Разложим пространство $L_q(\Gamma)$ в прямую сумму:

$$L_q(\Gamma) = L^r \oplus L^i \oplus L^c,$$

где

$$\begin{aligned} \lambda \in L^r &\Leftrightarrow \operatorname{Im} \lambda = 0, \quad \int_0^{2\pi} \lambda d\theta = 0; \\ \lambda \in L^i &\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda = 0, \quad \int_0^{2\pi} \lambda d\theta = 0; \end{aligned}$$

L^c — пространство комплексных констант. Очевидно, достаточно рассматривать образ оператора $\Lambda_*(f_* + ig_*)$, определенного правой частью соотношения (26), $f_* + ig_* \in L_q(\Gamma)$.

В силу (20) в образ $\Lambda_*(L^r) \equiv H^r \subset H$ не входят функции $\overline{w(t)}$ такие, что $w(z) = (I + P_0)^{-1}(C' + iC)$, где C' и C — произвольные вещественные постоянные. Перепишем это соотношение в виде $w(z) = C'w_1(z) + Cw_2(z)$, где $\operatorname{Re}\{w_1(t)\} = 1$, $\operatorname{Re}\{w_2(t)\} = 0$, $t \in \Gamma$. Очевидно, функции из одномерных пространств H^{r1} и H^{r2} , порождаемых функциями $\overline{w_1(t)}$ и $\overline{w_2(t)}$ (по одной функции из каждого пространства) линейно независимы в вещественном смысле и $H = H^r \oplus H^{r1} \oplus H^{r2}$ — прямая сумма.

Аналогично, в $\Lambda_*(L^i) \equiv H^i \subset H$ не входят функции $\overline{w(t)}$ такие, что $w(z) = (I + \tilde{P}_0)^{-1}(K' + iK)$, где K' и K — произвольные вещественные постоянные, или $w(z) = K'\tilde{w}_1(z) + K\tilde{w}_2(z)$, где $\operatorname{Im}\{\tilde{w}_1(t)\} = 0$, $\operatorname{Im}\{\tilde{w}_2(t)\} = 1$, $t \in \Gamma$. $H = H^i \oplus H^{i1} \oplus H^{i2}$ — прямая сумма, где одномерные пространства H^{i1} и H^{i2} порождаются функциями $\overline{\tilde{w}_1(t)}$, $\overline{\tilde{w}_2(t)}$.

Далее заметим, что из теорем 4 и 5 следует, что

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Im}\{w_1(t)\} d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\{\tilde{w}_2(t)\} d\theta = 0,$$

т. е. $\overline{w_1(t)} \in H^i$, а $\overline{\tilde{w}_2(t)} \in H^r$. Следовательно, $H^{r1} \subset H^i$, $H^{i2} \subset H^r$.

Вместе с тем $\Lambda_*(C') = \overline{C'w_1(t)} - C'\overline{\tilde{w}_1(t)}$, т. е. $H^{i1} \subset \Lambda_*(\operatorname{Re} L^c)$. Аналогично $\Lambda_*(iK) = -K\overline{\tilde{w}_2(t)} + K\overline{w_2(t)}$, т. е. $H^{r2} \subset \Lambda_*(i \operatorname{Im} L^c)$.

Сопоставляя все это, получаем, что $\Lambda_*(L_q(\Gamma)) = \Lambda(L_q(\Gamma)) = \overline{H_q(-A, -\overline{B})}$. Из того, что оператор Λ непрерывен и из теоремы об открытом отображении получаем (4).

Теорема 2 доказана полностью.

Литература

1. Климентов С. Б. Классы Харди обобщенных аналитических функций // Изв. вузов, Сев.-Кав. регион. Сер. Ест. науки.—2003.—№ 3.—С. 6–10.
2. Климентов С. Б. Классы ВМО обобщенных аналитических функций // Владикавк. мат. журн.—2006.—Т. 7, № 1.
3. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции.—М.: Мир, 1984.—469 с.
4. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—628 с.
5. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений.—Новосибирск: Наука, 1977.—424 с.
6. Климентов С. Б. Краевая задача Римана — Гильберта в классах Харди для обобщенных аналитических функций // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Сер. Ест. науки.—2004.—№ 4.—С. 3–5.
7. Климентов С. Б. Стохастическая краевая задача Римана — Гильберта в конформных мартингалных классах // В кн.: Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2004.—С. 75–89.

Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет;
Лаборатория математических исследований ИПМИ и ЮРГУЭС
E-mail: lucu@jeo.ru

ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА БЕСКОНЕЧНО
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ
ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ю. Ф. Коробейник

В работе вводятся и изучаются, пожалуй, наиболее общие из известных к настоящему времени пространств функций, бесконечно дифференцируемых в открытом множестве $\mathcal{G}$ из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Эти пространства определяются с помощью двух весовых функций, характеризующих рост модулей $|y^{(\alpha)}(x)|$ всех производных функций из рассматриваемых пространств, в зависимости от мультииндекса $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ (порядка частного дифференцирования) и от точки x из $\mathcal{G}$. Указываются условия, при которых в этих пространствах содержатся многочлены и экспоненты, а также условия, обеспечивающие непрерывность операторов частного дифференцирования и умножения на функцию. Находятся критерии абсолютной сходимости в данных пространствах рядов из экспонент с мнимыми показателями и описывается свойство определенной «заразительности» поведения таких рядов.

1. Основные пространства и некоторые их свойства

1.1. Пусть всюду в дальнейшем $p \geq 1$ и $\mathcal{G}$ — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^p$. Пусть, далее, $C^\infty(\mathcal{G})$ — пространство всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых в $\mathcal{G}$ функций с топологией, заданной системой преднорм

$$|y|_m := \sup \left[|y^{(\alpha)}(x)| : \alpha \in \mathbb{N}_0^p, |\alpha|_p \leq m, x \in \mathcal{G}_m \right] \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Здесь $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, $|\alpha|_p = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_p|$; $\mathcal{G}_m$ — непустое открытое множество в $\mathcal{G}$ такое, что $(\forall m \geq 1) \overline{\mathcal{G}_m} \subset \mathcal{G}_{m+1} \subset \mathcal{G} = \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{G}_k$. Как известно, $C^\infty(\mathcal{G})$ — ядерное пространство Фреше (NF -пространство) (см., например, [1]).

Исследуемые в данной работе пространства бесконечно дифференцируемых функций определяются с помощью двух отображений:

1) $\varphi(\alpha, h)$ — отображение из $\mathbb{N}_0^p \times [0, +\infty)$ в $(0, +\infty)$ такое, что для любых $h_2 \in (0, +\infty)$ и $h_1 \in [h_2, +\infty)$ существует $M < +\infty$ такое, что

$$(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^p) \quad M\varphi(\alpha, h_1) \geq \varphi(\alpha, h_2);$$

2) $g(s, x)$ — отображение из $\mathbb{N}_0 \times \mathcal{G}$ в $(0, +\infty)$ со свойствами:

(a) $(\forall m \in \mathbb{N}_0)(\forall x \in \mathcal{G}) \quad g(m+1, x) \geq g(m, x);$

(b) для любого компакта T из G и произвольного $s \in \mathbb{N}_0$

$$0 < \inf[g(s, x) : x \in T] \leq \sup[g(s, x) : x \in T] < +\infty.$$

По произвольным $m \in \mathbb{N}_0$, $h \in (0, +\infty)$ образуем линейное нормированное пространство

$$\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G}) := \left\{ y \in C^\infty(\mathcal{G}) : \right. \\ \left. \|y\|_h^m := \sup \left[\frac{|y^{(\alpha)}(x)|g(m, x)}{\varphi(\alpha, h)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p, x \in \mathcal{G} \right] < +\infty \right\}.$$

Как легко проверить, $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$ полно и, следовательно, является банаховым (B-)пространством. При этом из 1) вытекает, что $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_2, m}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_1, m}(\mathcal{G})$, если $h_2 \in (0, +\infty)$, $h_1 \in [h_2, +\infty)$, а из 2) — что $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m+1}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$ для любых $m \in \mathbb{N}_0$ и $h \in (0, +\infty)$.

Положим $\mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G}) = \text{proj}_{m \uparrow \infty} \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$ для любого h из $(0, +\infty)$.

Счетно-нормированное пространство $\mathcal{E}_{\varphi, h}^h(\mathcal{G})$ с набором норм $\|\cdot\|_h^m$, $m = 0, 1, \dots$, полно (см., например, [2, гл. XI, п. 5.4]), т. е. является пространством Фреше (F -пространством).

Пусть теперь $d \in [0, +\infty)$. Положим $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G}) = \text{proj}_{h > d} \mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G})$.

Нетрудно проверить, что если $d < h_{k+1} < h_k < +\infty$ и $\lim_{k \rightarrow +\infty} h_k = d$, то

$$\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G}) = \text{proj}_{h_k \downarrow d} \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_k}(\mathcal{G}) = \text{proj}_{h_k \downarrow d, m_k \uparrow \infty} \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_k, m_k}(\mathcal{G}),$$

где $\{m_k\}$ — произвольная монотонно и неограниченно возрастающая последовательность натуральных чисел. Докажем, например, второе

из этих равенств, положив $\mathcal{E}_1 := \text{proj } \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_k}(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}_2 := \text{proj } \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_k, m_k}(\mathcal{G})$.

Так как

$$(\forall k \geq 1)(\forall m_k \geq 1) \quad \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_k}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_k, m_k}(\mathcal{G}),$$

то $\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}_2$. Зафиксируем теперь любое $\ell \geq 1$. Имеем $\forall k \geq \ell$ $\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_k, m_k}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_\ell, m_k}(\mathcal{G})$, откуда

$$\text{proj}_{k \geq \ell} \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_k, m_k}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \text{proj}_{k \geq \ell} \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_\ell, m_k}(\mathcal{G}),$$

т. е. $\mathcal{E}_2 \hookrightarrow \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_\ell}(\mathcal{G})$ для любого $\ell \geq 1$. Но тогда $\mathcal{E}_2 \hookrightarrow \mathcal{E}_1$, и равенство доказано. Очевидно, что $\mathcal{E}_{(\varphi,g)}^d(\mathcal{G})$ — F -пространство.

Пусть, наконец, $d \in (0, +\infty]$ и

$$\mathcal{E}_{\{\varphi,g\}}^d(\mathcal{G}) := \text{ind}_{0 < h < d} \mathcal{E}_{\varphi,g}^h(\mathcal{G}) = \text{ind}_{0 < h_n \uparrow d} \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_n}(\mathcal{G}).$$

Так как все пространства $\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h,m}(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}_{\varphi,g}^h(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}_{(\varphi,g)}^d(\mathcal{G})$ ($0 \leq d < +\infty$) и $\mathcal{E}_{\{\varphi,g\}}^d(\mathcal{G})$ ($0 < d \leq +\infty$) являются векторными подпространствами NF -пространства $C^\infty(\mathcal{G})$ и непрерывно в него вложены, то все они — отделимые локально выпуклые пространства (ЛВП), ядерные в топологии, индуцированной из $C^\infty(\mathcal{G})$ ([1]). При этом $\mathcal{E}_{\{\varphi,g\}}^d(\mathcal{G})$ — LF -пространство в терминологии ([3, § 4]), т. е. отделимый внутренний индуктивный предел последовательности F -пространств, каждое из которых непрерывно вложено в последующее.

В дальнейшем все введенные пространства будем называть весовыми пространствами бесконечно дифференцируемых функций (сокращенно ВПБДФ).

1.2. Описание свойств ВПБДФ начнем с одного вспомогательного результата.

Лемма 1.1. Пусть $h \in (0, +\infty)$, $m \in N_0$, $d \in [0, +\infty)$ и E — любое из пространств $\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h,m}(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}_{\varphi,g}^h(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}_{(\varphi,g)}^d(\mathcal{G})$. Пусть, далее, последовательность функций $V = \{v_n\}_{n=1}^\infty$ из E ограничена в топологии E и сходится в $C^\infty(\mathcal{G})$ к некоторой функции v . Тогда $v \in E$.

◁ 1. Доказательство леммы начнем со случая, когда $E = \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h,m}(\mathcal{G})$. Из ограниченности V в E следует существование $B < +\infty$

такого, что

$$(\forall n \geq 1)(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^p)(\forall x \in \mathcal{G}) \quad \frac{|v_n^{(\alpha)}(x)|g(m, x)}{\varphi(\alpha, h)} \leq B. \quad (1)$$

Зафиксируем какие-либо $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ и $x \in \mathcal{G}$. Так как $v_n \rightarrow v$ в $C^\infty(\mathcal{G})$, то $v \in C^\infty(\mathcal{G})$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} v^{(\alpha)}(x) = v^{(\alpha)}(x)$. Подавно $\lim_{n \rightarrow \infty} |v_n^{(\alpha)}(x)| = |v^{(\alpha)}(x)|$. Устремляя в неравенстве (1) m к $+\infty$, получаем, что существует $B < +\infty$ такое, что для любых $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ и $x \in \mathcal{G}$ верно

$$\frac{|v_n^{(\alpha)}(x)|g(m, x)}{\varphi(\alpha, h)} \leq B.$$

Отсюда, $\|v\|_h^m \leq B < +\infty$ и $v \in \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$.

2. Пусть теперь $E = \mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G}) = \text{proj}_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, k}(\mathcal{G})$. Ограниченная в E последовательность будет ограничена в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$ при любом $m \geq 1$. По доказанному, $v \in \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$ для любого $m \geq 1$, откуда $v \in \mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G})$.

3. Пусть, наконец, $E = \mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G}) = \text{proj}_{h_k \downarrow d} \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_k}(\mathcal{G})$. Тогда при любом $k \geq 1$ последовательность $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ ограничена в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_k}(\mathcal{G})$ и, как только что доказано, $v \in \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_k}(\mathcal{G})$. Следовательно, $v \in \mathcal{E}_{\varphi, g}^d(\mathcal{G})$. $\triangleright$

Почти непосредственным следствием этой леммы является

Предложение 1.2. Пусть E — любое из пространств $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G})$, где $m \in \mathbb{N}_0$, $h \in (0, +\infty)$, $d \in [0, +\infty)$. Пусть, далее, Φ — ограниченное в E множество. Тогда из Φ можно извлечь последовательность, сходящуюся в $C^\infty(\mathcal{G})$ к некоторой функции из E .

$\triangleleft$ Так как $E \hookrightarrow C^\infty(\mathcal{G})$ и пространство $C^\infty(\mathcal{G})$ ядерно, то из ограниченного в $C^\infty(\mathcal{G})$ множества Φ можно извлечь последовательность, сходящуюся в $C^\infty(\mathcal{G})$ к некоторой функции из $C^\infty(\mathcal{G})$. Остается сослаться на лемму 1.1. $\triangleright$

Замечание. Лемма 1.1 и предложение 1.2 справедливы и для пространства $\mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G}) := \text{ind}_{h_n \downarrow d} \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_n}(\mathcal{G})$ ($0 < d \leq \infty$), если это пространство — регулярный индуктивный предел последовательности F -пространств $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_n}(\mathcal{G})$, т. е. если каждое ограниченное в $\mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G})$ множество Q содержится в некотором $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_n}(\mathcal{G})$ ($n = n(Q)$) и ограничено в нем. Доказательство проводится совершенно аналогично вышеприведенному.

1.3. Для того, чтобы получить дополнительную информацию о свойствах ВПБДФ, нам придется наложить некоторые ограничения на функции φ и g .

1. Будем говорить, что для пары чисел (h_1, h_2) такой, что $h_2 \in (0, +\infty)$, $h_1 \in (h_2, +\infty)$, выполняется условие $\mathcal{K}_1$, если

$$\lim_{|\alpha|_p \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\alpha, h_2)}{\varphi(\alpha, h_1)} = 0. \quad (2)$$

Если условие $\mathcal{K}_1$ выполняется для любой подобной пары, то скажем, что функция φ обладает свойством $\mathcal{K}_1$.

2. Будем также говорить, что функция $g(m, x)$ обладает свойством $\mathcal{K}_2$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется компакт Q_ε открытого множества $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\sup \left[\frac{g(m, x)}{g(m+1, x)} : x \in \mathcal{G} \setminus Q_\varepsilon \right] < \varepsilon. \quad (3)$$

Предложение 1.3. Пусть $m \in \mathbb{N}_0$, $h_2 \in (0, +\infty)$, $h_1 \in (h_2, +\infty)$. Пусть, далее, пара (h_1, h_2) удовлетворяет условию $\mathcal{K}_1$, а функция $g(m, x)$ обладает свойством $\mathcal{K}_2$. Тогда $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_2, m+1}$ компактно вложено в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_1, m}(\mathcal{G})$.

◁ Пусть F — ограниченное в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_2, m+1}$ множество. По предложению 1.2 из F можно извлечь последовательность функций $\{f_\ell(x)\}_{\ell=1}^\infty$, сходящуюся в $C^\infty(\mathcal{G})$ к некоторой функции f из $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_2, m+1}(\mathcal{G})$. Подавно $f \in \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_1, m}(\mathcal{G})$. Покажем, что $f_\ell \rightarrow f$ в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_1, m}(\mathcal{G})$. С этой целью по произвольно зафиксированному $\varepsilon > 0$ найдем компакт Q_ε множества $\mathcal{G}$ такой, что для него выполнено соотношение (3). Положим $M_0 := \sup_{\ell \geq 1} \|f_\ell\|_{h_2}^{m+1}$. По исходному предположению

$M_0 < +\infty$. Кроме того, из доказательства леммы 1.1 следует, что $\|f\|_{h_2}^{m+1} \leq M_0$.

Оценим теперь величину $\delta_N := \sup_{\ell \geq N} \|f_\ell - f\|_{h_1}^m$ при любом $N \geq 1$.

Имеем при (пока) произвольных N_1 и N из $\mathbb{N}_0$:

$$\delta_N \leq \sup_{\ell \geq N} \sup \left[\frac{|f_\ell^{(\alpha)}(x)|g(m, x)}{\varphi(\alpha, h_1)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p, x \in \mathcal{G} \setminus Q_\varepsilon \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \sup \left[\frac{|f^{(\alpha)}(x)|g(m, x)}{\varphi(\alpha, h_1)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p, x \in \mathcal{G} \setminus Q_\varepsilon \right] + \\
& + \sup_{\ell \geq N} \sup \left[\frac{|f_\ell^{(\alpha)}(x) - f^{(\alpha)}(x)|g(m, x)}{\varphi(\alpha, h_1)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p, x \in Q_\varepsilon \right] \leq \\
& \leq \sup_{\ell \geq N} \sup \left[\frac{|f_\ell^{(\alpha)}(x)|g(m+1, x)}{\varphi(\alpha, h_2)} \frac{g(m, x)}{g(m+1, x)} \frac{\varphi(\alpha, h_2)}{\varphi(\alpha, h_1)} : \right. \\
& \left. \alpha \in \mathbb{N}_0^p, x \in \mathcal{G} \setminus Q_\varepsilon \right] + \sup_{\ell \geq N} \sup \left[\frac{|f_\ell^{(\alpha)}(x) - f^{(\alpha)}(x)|g(m+1, x)}{\varphi(\alpha, h_2)} \times \right. \\
& \times \frac{g(m, x)}{g(m+1, x)} \frac{\varphi(\alpha, h_2)}{\varphi(\alpha, h_1)} : |\alpha|_p \leq N_1, x \in Q_\varepsilon \left. \right] + \\
& + \sup_{\ell \geq N} \sup \left[\frac{|f_\ell^{(\alpha)}(x) - f^{(\alpha)}(x)|g(m+1, x)}{\varphi(\alpha, h_2)} \frac{g(m, x)}{g(m+1, x)} \frac{\varphi(\alpha, h_2)}{\varphi(\alpha, h_1)} : \right. \\
& \left. |\alpha|_p > N_1, x \in \mathcal{G} \right] + \\
& + \sup_{\ell \geq N} \sup \left[\frac{|f^{(\alpha)}(x)|g(m+1, x)}{\varphi(\alpha, h_2)} \frac{g(m, x)}{g(m+1, x)} \frac{\varphi(\alpha, h_2)}{\varphi(\alpha, h_1)} : \right. \\
& \left. \alpha \in \mathbb{N}_0^p, x \in \mathcal{G} \setminus Q_\varepsilon \right] \leq 2\varepsilon M M_0 + \\
& + \sup_{\ell \geq N} \sup \left[\frac{|f_\ell^{(\alpha)}(x) - f^{(\alpha)}(x)|g(m+1, x)}{\varphi(\alpha, h_2)} \frac{g(m, x)}{g(m+1, x)} \frac{\varphi(\alpha, h_2)}{\varphi(\alpha, h_1)} : \right. \\
& \left. |\alpha|_p \leq N_1, x \in Q_\varepsilon \right] + \sup_{\ell \geq N} \sup \left[\frac{|f_\ell^{(\alpha)}(x) - f^{(\alpha)}(x)|g(m+1, x)}{\varphi(\alpha, h_2)} \times \right. \\
& \times \frac{g(m, x)}{g(m+1, x)} \frac{\varphi(\alpha, h_2)}{\varphi(\alpha, h_1)} : |\alpha|_p > N_1, x \in \mathcal{G} \left. \right].
\end{aligned}$$

В этих оценках M — число из условия 1) на функцию φ в п. 1.1. Выберем теперь номер N_1 так, чтобы $\varphi(\alpha, h_2) < \varepsilon \varphi(\alpha, h_1)$, когда

$|\alpha|_p \geq N_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta_N &\leq 2\varepsilon M M_0 + 2M_0\varepsilon + \\ &+ \sup_{\ell \leq N} \sup \left[\frac{|f_\ell^{(\alpha)}(x) - f^{(\alpha)}(x)|}{\varphi(\alpha, h_2)} g(m+1, x) : |\alpha|_p \leq N_1, x \in Q_\varepsilon \right]. \end{aligned}$$

Так как $f_\varepsilon \rightarrow f$ в $C^\infty(\mathcal{G})$, то при зафиксированных $\varepsilon > 0$, N_1 и Q_ε номер N можно взять настолько большим, что

$$\sup_{\ell \geq N} \sup \left[|f_\ell^{(\alpha)}(x) - f^{(\alpha)}(x)| : x \in Q_\varepsilon \right] < \varepsilon \frac{\eta_1}{\gamma_1},$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= \sup \left[g(m+1, x) : x \in Q_\varepsilon \right], \\ \eta_1 &:= \min \left[\varphi(\alpha, h_2) : \alpha \in \mathbb{N}_0^p, |\alpha|_p \leq N_1 \right]. \end{aligned}$$

При таком выборе номера N получаем в итоге оценку $\delta_N \leq 2\varepsilon M_0(M+1) + \varepsilon M$. Следовательно, $\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N = 0$, чем и завершается доказательство. $\triangleright$

Предложение 1.4. Пусть $h_2 \in (0, +\infty)$, $h_1 \in (h_2, +\infty)$ и пара чисел (h_1, h_2) удовлетворяет условию $\mathcal{K}_1$. Пусть далее, каждая функция $g(m, x)$, $m \in \mathbb{N}_0$, обладает свойством $\mathcal{K}_2$. Тогда $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_2}(\mathcal{G})$ компактно вложено в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_1}(\mathcal{G})$.

$\triangleleft$ Этот результат следует непосредственно из предыдущего, если воспользоваться представлениями

$$\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_2}(\mathcal{G}) = \text{proj}_{m \geq 0} \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_2, m+1}(\mathcal{G}),$$

$$\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_1}(\mathcal{G}) = \text{proj}_{m \geq 0} \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_1, m}(\mathcal{G}),$$

а также тем, что $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_2, m+1}(\mathcal{G})$ компактно вложено в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_1, m}(\mathcal{G})$ ($m = 0, 1, \dots$). $\triangleright$

Учитывая еще, что $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G}) = \text{proj}_{h_k \downarrow d} \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_k}(\mathcal{G})$ для любого $d \in [0, +\infty)$, получаем такое следствие из предложения 1.4

Теорема 1.5. Пусть $d \in [0, +\infty)$, функция φ обладает свойством $\mathcal{K}_1$, а каждая функция $g(m, x)$, $m \in \mathbb{N}_0$, — свойством $\mathcal{K}_2$. Тогда $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G})$ — M^* -пространство.

Напомним, что, следуя Себастьяну-и-Силве, M^* -пространством называют [2, гл. XI] любой проективный предел последовательности B -пространств, каждое из которых вложено вполне непрерывно в предыдущее. Как показал Д. А. Райков [4], M^* -пространством является также любой проективный предел последовательности пространств Фреше, каждое из которых вложено вполне непрерывно в предыдущее. Отметим еще [5, с. 103, предложение 1.8], что каждое такое пространство является так называемым пространством Шварца (определение последнего можно найти, например, на с. 100 обзорной статьи [5]). Наконец, из предложения 1.4, представления $\mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G}) = \varinjlim_{0 < h_n \uparrow d} \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_n}(\mathcal{G})$ и приведенных в [5, с. 108–110] сведений об индуктивных пределах последовательности локально выпуклых пространств без труда выводится

Теорема 1.6. Пусть $d \in (0, +\infty]$, а весовые функции φ и g — такие же, как и в теореме 1.5. Тогда $\mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G})$ — LN^* -пространство в терминологии Себастьяна-и-Силвы (см. [2, гл. XI]), а также DFS -пространство, т. е. сильное сопряженное к пространству Фреше — Шварца.

Следствие. В предположениях теорем 1.5 и 1.6 пространства $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G})$ ($0 \leq d < +\infty$) и $\mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G})$ ($0 < d \leq +\infty$) рефлексивны и, более того, монтелиевы.

1.4. В связи с изложенными в предыдущем пункте результатами возникает необходимость выразить условие $\mathcal{K}_2$ в более простой и обозримой форме. Приведем соответствующие формулировки для некоторых частных случаев. Предварительно установим два результата общего характера.

Лемма 1.7. Пусть $\mathcal{G}$ — непустое ограниченное множество в $\mathbb{R}^p$ и ψ — отображение $\mathcal{G}$ в $(0, +\infty)$. Следующие утверждения равносильны:

а) $\lim_{x \in \mathcal{G}, x \rightarrow \partial \mathcal{G}} \psi(x) = 0$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ найдется компакт T_ε множества $\mathcal{G}$ такой, что $\sup[\psi(x) : x \in \mathcal{G} \setminus T_\varepsilon] < \varepsilon$.

$\Leftarrow$ а) $\Rightarrow$ б): Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\psi(x) < \varepsilon$, если $x \in \mathcal{G}$ и $\rho(x, \partial \mathcal{G}) < \delta$. Положим $T_\varepsilon := \{x \in \mathcal{G} : \rho(x, \partial \mathcal{G}) \geq \delta\}$.

Покажем, что T_ε — компакт. Для этого достаточно установить замкнутость T_ε . Пусть t — любая точка $\partial\mathcal{G}$ и пусть $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность точек из T_ε , сходящаяся к некоторой точке y из $\overline{\mathcal{G}}$. Имеем $\rho(x_k, t) \geq \rho(x_k, \partial\mathcal{G}) \geq \delta$ для любого $k \geq 1$. Но тогда $\rho(y, t) \geq \rho(x_k, t) - \rho(x_k, y)$. Устремляя k к $+\infty$, находим: $\rho(y, t) \geq \delta$. Так как t — произвольная точка $\partial\mathcal{G}$, то $\rho(y, \partial\mathcal{G}) \geq \delta$. Ясно, что $y \notin \partial\mathcal{G}$ и, следовательно, $y \in \mathcal{G}$. Но тогда $y \in T_\varepsilon$. Таким образом, T_ε — компакт $\mathcal{G}$ такой, что $\psi(x) < \varepsilon$, когда $x \in \mathcal{G} \setminus T_\varepsilon$. Итак, из а) следует б).

б) $\Rightarrow$ а): Допустим теперь, рассуждая от противного, что утверждение б) справедливо, а а) — нет. Тогда найдутся число $\delta > 0$ и последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ из $\mathcal{G}$ такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y \in \partial\mathcal{G}$ и $\psi(x_n) \geq \delta$ для любого $n \geq 1$. По числу $\varepsilon = \delta/2$ найдем компакт $T_{\delta/2}$, для которого $\sup[\psi(x) : x \in \mathcal{G} \setminus T_{\delta/2}] < \delta/2$. Очевидно, что $x_n \in T_{\delta/2}$ для любого $n \geq 1$. Но тогда и $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in T_{\delta/2}$, что невозможно. $\triangleright$

Лемма 1.8. Пусть ψ — отображение $\mathbb{R}^n$ в $(0, +\infty)$. Тогда равенство $\lim_{|x|_p \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$ имеет место в том и только в том случае, когда ψ обладает свойством б) из леммы 1.7 с $\mathcal{G} = \mathbb{R}^p$.

$\triangleleft$ Действительно, $\lim_{|x|_p \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$ тогда и только тогда, когда для любого ε существует $N < +\infty$ такое, что $\psi(x) < \varepsilon$, если $|x|_p > N$. Остается учесть, что множество $T_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^p : |x|_p \leq N\}$ — компакт в $\mathbb{R}^p$. $\triangleright$

Непосредственными следствиями этих лемм и теорем 1.5, 1.6 являются такие результаты

Теорема 1.10. Пусть $\mathcal{G}$ — непустое ограниченное множество в $\mathbb{R}^p$, функция φ обладает свойством $\mathcal{K}_1$, а функция $g(m, x)$ при любом m из $\mathbb{N}_0$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x \in \mathcal{G}, x \rightarrow \partial\mathcal{G}} \frac{g(m, x)}{g(m+1, x)} = 0. \quad (4)$$

Тогда, $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G})$ — (M^*) - и FS -пространство для всех d из $[0, +\infty)$, а $\mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}(\mathcal{G})$ — (LN^*) - и DFS -пространство при $d \in (0, +\infty]$.

Теорема 1.11. Пусть функция $\varphi(\alpha, h)$ обладает свойством $\mathcal{K}_1$, а функция $g(m, x)$ при любом m из $\mathbb{N}_0$ отображает $\mathbb{R}^p$ в $(0, +\infty)$,

обладает свойствами (а) и (б) из п. 1.1 с $\mathcal{G} = \mathbb{R}^p$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{|x|_p \rightarrow \infty} \frac{g(m, x)}{g(m+1, x)} = 0 \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (5)$$

Тогда, $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathbb{R}^p)$ — (M^*) - и FS -пространство для всех d из $[0, +\infty)$, а $\mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}(\mathbb{R}^p)$ — (LN^*) - и DFS -пространство при $d \in (0, +\infty]$.

На наш взгляд, определенный интерес представляет дальнейшее изучение свойств ВПБДФ и, в частности, определение критериев квазианалитичности этих пространств. При этом квазианалитичность ВПБДФ в открытом множестве $\mathcal{G}$ из $\mathbb{R}^p$ может пониматься двояким образом.

1. ВПБДФ E квазианалитично в $\mathcal{G}$, если для любой функции $f \in E$ и любой точки $x_0 \in \mathcal{G}$ из соотношений $f^{(\alpha)}(x_0) = 0$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ следует, что $f(x) \equiv 0$ в связной компоненте $\mathcal{G}_0$ множества $\mathcal{G}$, содержащей точку x_0 .

2. ВПБДФ E квазианалитично в $\mathcal{G}$, если любая функция y из E , равная тождественно нулю в некоторой окрестности какой-либо точки x_0 из $\mathcal{G}$, обращается в тождественный нуль в той связной компоненте множества $\mathcal{G}$, которая содержит точку x_0 . Ясно, что если E квазианалитично в $\mathcal{G}$ в смысле первого определения, то оно по-прежнему квазианалитично по второму определению.

2. Многочлены и экспоненты в ВПБДФ

2.1. Всюду в этом параграфе $p, \mathcal{G}, \varphi$ и g — те же, что и в п. 1.1. Обозначим далее символом S_p совокупность всех многочленов от p вещественных переменных $x_1, \dots, x_p$ с произвольными комплексными коэффициентами. Нетрудно установить, что для любых $h \in (0, +\infty)$ и $m \in \mathbb{N}_0$ вложение $S_p \subset \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sup[(|x|_p)^k g(m, x) : x \in \mathcal{G}] < +\infty \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (6)$$

Далее,

$$\begin{aligned} S_p \subset \mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G}) &\Leftrightarrow S_p \subset \mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G}) \quad (0 \leq d < +\infty) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow S_p \subset \mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G}) \quad (0 < d \leq +\infty) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ условие (6) выполняется при всех m из $\mathbb{N}_0$.

Было бы интересно найти (при выполнении (6) для всех k и m из $\mathbb{N}_0$) критерий плотности S_p в введенных ранее ВПБДФ.

2.2. Положим теперь для любых a из $\mathbb{C}^p$ и x из $\mathbb{R}^p$

$$e_a(x) := \exp\langle a, x \rangle_p,$$

где $a = (a_1, \dots, a_p)$, $x = (x_1, \dots, x_p)$, $a_k \in \mathbb{C}$, $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, p$,
 $\langle a, x \rangle_p = \sum_{k=1}^p a_k x_k$. Очевидно, что $e_a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$. Далее, для любых $m \in \mathbb{N}_0$ и $h \in (0, +\infty)$ верно $e_a(x) \in \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\sup \left[\frac{|a_1|^{\alpha_1} \dots |a_p|^{\alpha_p}}{\varphi(\alpha, h)} g(m, x) e^{\operatorname{Re}\langle a, x \rangle_p} : \right. \\ \left. x \in \mathcal{G}, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}_0^p \right] < +\infty. \quad (7)$$

В свою очередь условие (7) равносильно двум следующим:

$$\sup \left[\frac{|a_1|^{\alpha_1} \dots |a_p|^{\alpha_p}}{\varphi(\alpha, h)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] < +\infty; \quad (8)$$

$$\sup [g(m, x) e^{\operatorname{Re}\langle a, x \rangle_p} : x \in \mathcal{G}] < +\infty. \quad (9)$$

Отсюда легко вывести следующие результаты.

1. Для любого h из $(0, +\infty)$ $e_a(x) \in \mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ выполнено условие (8) и при всех $m \in \mathbb{N}_0$ — условие (9).

2. При любом d из $[0, +\infty)$ $e_a(x) \in \mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ условие (8) выполнено при всех $h > d$, а условие (9) — при всех $m \in \mathbb{N}_0$.

3. Для любого d из $(0, +\infty]$ $e_a(x) \in \mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ условие (8) выполнено при некотором h из $(0, d)$, а условие (9) — при всех m из $\mathbb{N}_0$.

Обозначим символом Ehr линейную оболочку элементов $\{e_a(x) : a \in \mathbb{C}^p\}$. Без особого труда можно убедиться в том, что для любых $h \in (0, +\infty)$ и $m \in \mathbb{N}_0$ $\operatorname{Ehr} \subset \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$ в том и только в том случае, когда при всех a из $\mathbb{C}^p$ выполнено неравенство (9), а также соотношение

$$\lim_{|\alpha|_p \rightarrow \infty} [\varphi(\alpha, h)]^{1/|\alpha|_p} = +\infty. \quad (10)$$

В свою очередь отсюда следуют такие результаты.

1. Если $h \in (0, +\infty)$, то $\text{Ехр} \subset \mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (10), а также — при всех a из $\mathbb{C}^p$ и m из $\mathbb{N}_0$ — условие (9).

2. При любом d из $[0, +\infty)$ $\text{Ехр} \subset \mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ условие (10) выполнено при всех $h > d$, а условие (9) — при всех $m \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{C}^p$.

3. Если $d \in (0, +\infty]$, то $\text{Ехр} \subset \mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G})$ тогда и только тогда, когда условие (9) выполнено при всех m из $\mathbb{N}_0$ и, кроме того,

$$\lim_{h \uparrow d} \lim_{|\alpha|_p \rightarrow \infty} [\varphi(\alpha, h)]^{1/|\alpha|_p} = +\infty. \quad (11)$$

◁ В доказательстве утверждений 1–3, пожалуй, относительно нетривиально доказательство необходимости соотношения (11) для включения $\text{Ехр} \subset \mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G})$. Рассуждая от противного, допустим, что последнее включение имеет место и, в то же время,

$$L := \lim_{h \uparrow d} \lim_{|\alpha|_p \rightarrow \infty} [\varphi(\alpha, h)]^{1/|\alpha|_p} < +\infty.$$

Тогда для любых $\ell > L$ и $h > d - \eta(\ell)$

$$\sup \left[\frac{\ell^{|\alpha|_p}}{\varphi(\alpha, h)} : \alpha \in \mathbb{N}_0 \right] = +\infty.$$

Отсюда следует, что функция $\text{ехр} \langle \ell^{(p)}, x \rangle_p$, где $\ell^{(p)} := (\ell, \ell, \dots, \ell)$, не может принадлежать любому пространству $\mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G})$, если $h > d - \eta$, $\eta = \eta(\ell) > 0$. Это означает, что

$$e_{\ell^{(p)}}(x) \notin \bigcup_{d-\eta < h < d} \mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G}) = \bigcup_{0 < h < d} \mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G}) \text{ и } e_{\ell^{(p)}} \notin \mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G}). \quad \triangleright$$

И здесь, на наш взгляд, было бы интересно найти критерий плотности Ехр в рассматриваемых пространствах.

2.3. Остановимся отдельно на одном подмножестве Ехр , которое будет часто встречаться в дальнейшем. Положим $e_{i\mu}(x) := \text{ехр} i \langle \mu, x \rangle_p$ для каждого $\mu \in \mathbb{R}^p$ и $\text{Ехр}(i) := \{e_{i\mu}(x) : \mu \in \mathbb{R}^p\}$. Экспоненты $e_{i\mu}(x)$ отличаются той важной особенностью, что $|e_{i\mu}(x)| = 1$ для любых $\mu \in \mathbb{R}^p$ и $x \in \mathbb{R}^p$. Отсюда следует, что при любых h из

$(0, +\infty)$ и m из $\mathbb{N}_0$ $e_{i\mu}(x) \in \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия (в которых $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$, $\mu_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, p$):

$$\sup \left[\frac{|\mu_1|^{\alpha_1} \dots |\mu_p|^{\alpha_p}}{\varphi(\alpha, h)} : \alpha \in \mathbb{N}_0 \right] < +\infty, \quad (12)$$

$$\sup[g(m, x) : x \in \mathcal{G}] < +\infty. \quad (13)$$

Как и в предыдущем пункте, без особого труда получаем отсюда такие результаты.

1₁. Для любого $h \in (0, +\infty)$ $e_{i\mu}(x) \in \mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ выполнено условие (12) и при всех m из $\mathbb{N}_0$ — условие (13).

2₁. Для любого $d \in [0, +\infty)$ $e_{i\mu}(x) \in \mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ условие (12) выполняется при всех $h > d$, а условие (13) — при всех m из $\mathbb{N}_0$.

3₁. Для любого $d \in (0, +\infty]$ $e_{i\mu}(x) \in \mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ условие (12) выполняется хотя бы при одном $h < d$, а условие (13) — при всех m из $\mathbb{N}_0$.

Далее, для любых $h \in (0, +\infty)$ и $m \in \mathbb{N}_0$ $\text{Exp} \subset \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ выполнены условия (10) и (13). Как и в 2.2, из последнего результата нетрудно получить такие.

1₁) Для любого $h \in (0, +\infty)$ $\text{Exp}(i) \subset \mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ выполнены условия (10) и при всех m из $\mathbb{N}_0$ — условие (13).

2₁) Для любого $d \in [0, +\infty)$ $\text{Exp}(i) \subset \mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ условие (10) выполняется при всех $h > d$, а условие (13) — при всех m из $\mathbb{N}_0$.

3₁) Для любого $d \in (0, +\infty]$ $\text{Exp}(i) \subset \mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ выполнено условие (11) при всех m из $\mathbb{N}_0$.

Заметим, что формулировки утверждений 1₁)–3₁) не зависят от того, ограничено ли множество $\mathcal{G}$ или нет. Кроме того, если $\mathcal{G}$ — ограниченное множество в $\mathbb{R}^p$, то условие (9) при любом a из $\mathbb{C}^p$ равносильно неравенству (13). Это дает возможность дополнить утверждения 2) и 3) из 2.2 таким результатом.

Предложение 2.1. Пусть $p \geq 1$, $\mathcal{G}$ — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^p$ и функции φ, g — те же, что и в п. 1.1. Тогда справедливы следующие утверждения:

i₂) для любого $d \in [0, +\infty)$ $\text{Exp} \subset \mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ условие (10) выполнено при всех $h > d$, а условие (13) — при всех m из $\mathbb{N}_0$;

i₃) для любого $d \in (0, +\infty]$ $\text{Exp} \subset \mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ выполнено условие (11) и при всех m из $\mathbb{N}_0$ — условие (13).

3. Абсолютная сходимость в ВПБДФ рядов из экспонент с мнимыми показателями

В этом параграфе выясняются условия абсолютной сходимости в рассматриваемых пространствах рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_{i\mu_k}(x), \quad (14)$$

в которых для любого $k \geq 1$ $b_k \in \mathbb{C}$, $\mu_k = (\mu_{1,k}, \dots, \mu_{p,k}) \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$.

3.1. Пусть, как раньше, $\mathcal{G}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^p$, $h \in (0, +\infty)$, $m \in \mathbb{N}_0$ и φ, g — функции, описанные в п. 1.1. Назовем функцию $g(m, x)$ m -ограниченной в $\mathcal{G}$, если для любого m из $\mathbb{N}_0$ функция $g(m, x)$ удовлетворяет условию (13).

Предположим, что функция φ обладает свойством (10), а g m -ограничена в $\mathcal{G}$. В этом случае, согласно утверждению 1₁) из п. 2.3 $\text{Exp}(i) \subset \mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G})$ и подавно $\text{Exp}(i) \subset \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$ для любого $m \in \mathbb{N}_0$. Так как $|e_{i\mu}(x)| = 1$ для любых $x \in \mathcal{G}$ и $\mu \in \mathbb{R}^p$, то следующий результат почти очевиден.

Теорема 3.1. *При сделанных предположениях равносильны такие утверждения:*

- 1) ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m_0}(\mathcal{G})$ при некотором m_0 из $\mathbb{N}_0$;
- 2) ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$ при любом m из $\mathbb{N}_0$;
- 3) ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G})$;
- 4) $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \sup \left[\frac{|\mu_{1,k}|^{\alpha_1} \dots |\mu_{p,k}|^{\alpha_p}}{\varphi(\alpha, h)} : \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}_0^p \right] < +\infty$.

◁ Доказательство этой теоремы весьма просто. Прежде всего, очевидны импликации 4) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть теперь ряд (14) при некотором m_0 абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m_0}(\mathcal{G})$, т. е.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \sup \left[\frac{|\mu_{1,k}|^{\alpha_1} \dots |\mu_{p,k}|^{\alpha_p}}{\varphi(\alpha, h)} g(m_0, x) : x \in \mathcal{G}, \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \sup \left[\frac{|\mu_{1,k}|^{\alpha_1} \dots |\mu_{p,k}|^{\alpha_p}}{\varphi(\alpha, h)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] \times \\ \times \sup [g(m_0, x) : x \in \mathcal{G}] < +\infty. \end{aligned}$$

Так как функция $g(m_0, x)$ отображает $\mathcal{G}$ в $(0, +\infty)$, то $\sup[g(m_0, x) : x \in \mathcal{G}] > 0$. С другой стороны, из m -ограниченности g в $\mathcal{G}$ следует, что $\sup[g(m_0, x) : x \in \mathcal{G}] < +\infty$. Но тогда ряд (14) сходится абсолютно в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m_0}(\mathcal{G})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие 4). Таким образом $1) \Leftrightarrow 4)$, чем завершается доказательство теоремы. $\triangleright$

Заметим еще, что критерий абсолютной сходимости ряда (14) в любом из пространств $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m_0}(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G})$, взятый в виде условия 4), не зависит от $\mathcal{G}$. Поэтому, если функция $g(m, x)$ отображает $\mathbb{N}_0^p \times \mathbb{R}^p$ в $(0, +\infty)$, m -ограничена в $\mathbb{R}^p$ и обладает свойствами (а), (б) из п. 1.1 с $\mathcal{G} = \mathbb{R}^p$, то любое из утверждений 1)–3) теоремы 3.1 можно заменить парой равносильных ему (и друг другу) утверждений. Мы приведем здесь соответствующую пару для утверждения 1), предоставив формулировку остальных двух пар читателю:

$i_1)$ для некоторого открытого множества $\mathcal{G}_0$ в $\mathbb{R}^p$ ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m_0}(\mathcal{G}_0)$;

$i_2)$ для любого открытого множества $\mathcal{G}$ в $\mathbb{R}^p$ (и, в частности, для $\mathcal{G} = \mathbb{R}^p$) ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m_0}(\mathcal{G})$.

Аналогично (и тоже весьма просто) доказывается

Теорема 3.2. Пусть $p \geq 1$, $\mathcal{G}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^p$ и $d \in [0, +\infty)$. Пусть, далее, $\varphi(\alpha, h)$ — отображение $\mathbb{N}_0^p \times (0, +\infty)$ в $(0, +\infty)$, обладающее свойством 1) из п. 1.1 и свойством (10) (при всех $h > d$), а $g(m, x)$ — отображение $\mathbb{N}_0 \times \mathcal{G}$ в $(0, +\infty)$, не убывающее по m (при любом фиксированном x из $\mathcal{G}$), m -ограниченное в $\mathcal{G}$ и такое, что для любых компакта F из $\mathcal{G}$ и числа s из $\mathbb{N}_0$ $\inf[g(s, x) : x \in \mathcal{G}] > 0$. Тогда равносильны следующие утверждения:

$\widehat{1})$ ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G})$;

$\widehat{2})$ для любого $h > d$ выполняется условие 4) теоремы 3.1.

Следствие. Пусть $d \in [0, +\infty)$ и функция $\varphi(\alpha, g)$ удовлетворяет предположениям теоремы 3.2. Пусть, далее, $g(m, x)$ — отображение $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^p$ в $(0, +\infty)$ со свойствами (а) и (б) из 1.1, в которых $\mathcal{G} = \mathbb{R}^p$. Пусть, наконец, g m -ограничена в $\mathbb{R}^p$. Тогда утверждение $\widehat{2})$ теоремы 3.2 равносильно любому из таких двух:

$\widehat{1}_1)$ для некоторого открытого множества $\mathcal{G}_0$ в $\mathbb{R}^p$ ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G}_0)$;

$\widehat{2}_1)$ для любого открытого множества $\mathcal{G}$ в $\mathbb{R}^p$ ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{(\varphi,g)}^{h,m_0}(\mathcal{G})$.

3.2. Переходя к критериям абсолютной сходимости ряда (14) в пространстве $\mathcal{E}_{\{\varphi,g\}}^d(\mathcal{G})$, где $d \in (0, +\infty]$, а φ, g — функции с указанными в 1.1 свойствами, приведем вначале необходимые для дальнейшего определения и результаты. Пусть $H = \operatorname{ind}_n H_n$ — внутренний индуктивный предел последовательности ЛВП H_n таких, что $H_n \hookrightarrow H_{n+1}$ для любого $n \geq 1$ (подобный индуктивный предел называется далее каноническим индуктивным пределом, или, сокращенно, КИП). Следуя [3, с. 203], будем говорить, что КИП $H = \operatorname{ind}_n H_n$ обладает свойством (Y_0) , если для любого абсолютно сходящегося в H ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, где $v_k \in H$ для любого $k \geq 1$, найдется номер N та-

кой, что $v_k \in H_N, k = 1, 2, \dots$, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится абсолютно в H_N .

Различные условия, обеспечивающие наличие у КИП свойства (Y_0) , были получены последовательно Ю. Ф. Коробейником, А. В. Абаниным, С. Н. Мелиховым. В частности, А. В. Абанин, усилив один результат Ю. Ф. Коробейника из [3], доказал [6], что свойством (Y_0) обладает любое ядерное LN^* -пространство. Используя тот же метод, который был применен при доказательстве теорем 3.1–3.2, нетрудно получить такой результат.

Теорема 3.3. Пусть $p \geq 1, d \in (0, +\infty)$, функция g m -ограничена в непустом открытом множестве $\mathcal{G}$ из $\mathbb{R}^p$, а функция φ удовлетворяет условию (11). Пусть, далее, $\mathcal{E}_{\{\varphi,g\}}^d(\mathcal{G}) = \operatorname{ind}_{h_n \uparrow d} \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_n}(\mathcal{G})$ — ядерное LN^* -пространство. Тогда равносильны следующие утверждения:

- $A_1)$ ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{\{\varphi,g\}}^d(\mathcal{G})$;
- $A_2)$ ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{\{\varphi,g\}}^{h_n}(\mathcal{G})$ для каждого $n \geq n_0$;
- $A_3)$ условие 4) теоремы 3.1 выполнено для всех h из (h_{n_0}, d) .

Замечание 1. Достаточные условия, при выполнении которых $\mathcal{E}_{\{\varphi,g\}}^d(\mathcal{G})$ — LN^* -пространство, указаны в теореме 1.6. Что же касается сравнительно простых условий ядерности пространства $\mathcal{E}_{\{\varphi,g\}}^d(\mathcal{G})$, то нам они не известны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ниже, с помощью одного результата С. Н. Мелихова, будет показано, что пространство $\mathcal{E}_{\{\varphi,1\}}^d(\mathcal{G})$ обладает свойством (Y_0) .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $p, d, \mathcal{G}$ и $\mathcal{E}_{\{\varphi,g\}}^d(\mathcal{G})$ — те же, что и в теореме 3.3, и пусть $g(m, x)$ — отображение $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^p$ в $(0, +\infty)$, m -ограниченное в $\mathcal{G}$. Тогда утверждение $A_1)$ теоремы 3.3 равносильно любому из следующих двух:

$A_1^{(1)})$ для некоторого непустого открытого множества $\mathcal{G}_0$ в $\mathbb{R}^p$ ряд (14) сходится абсолютно в $\mathcal{E}_{\{\varphi,g\}}^d(\mathcal{G}_0)$;

$A_1^{(2)})$ для любого открытого множества $\mathcal{G}$ в $\mathbb{R}^p$ ряд (14) сходится абсолютно в $\mathcal{E}_{\{\varphi,g\}}^d(\mathcal{G})$. Аналогично (при тех же исходных предположениях) формулируется пара утверждений, каждое из которых равносильно утверждению $A_2)$ теоремы 3.3.

3.3. Пусть, как в [7, с. 91], $B^\infty(\mathcal{G})$ — пространство Фреше всех бесконечно дифференцируемых в $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^p$ функций, равномерно ограниченных в $\mathcal{G}$ вместе с любой частной производной. Топология Фреше в $B^\infty(\mathcal{G})$ задается набором норм

$$\|y\|_m := \sup [|y^{(\alpha)}(x)| : x \in \mathcal{G}, \alpha \in \mathbb{N}_0^p, |\alpha|_p \leq m] \quad (m = 0, 1, \dots).$$

Пусть, далее, $BC^\infty(\mathcal{G})$ — подпространство $B^\infty(\mathcal{G})$, состоящее из всех функций, равномерно непрерывных в $\mathcal{G}$ вместе с любой своей частной производной. Как отмечено без доказательства в [7, с. 91] и [8, с. 41], $BC^\infty(\mathcal{G})$ — замкнутое подпространство $B^\infty(\mathcal{G})$. Для полноты изложения приведем соответствующее доказательство. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность функций из $BC^\infty(\mathcal{G})$, сходящаяся по топологии $B^\infty(\mathcal{G})$ к некоторой функции f . В силу полноты $B^\infty(\mathcal{G})$ $f \in B^\infty(\mathcal{G})$. Покажем, что $f \in BC^\infty(\mathcal{G})$. По произвольно заданным $\varepsilon > 0$ и $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ выберем номер N так, чтобы $\|f_n - f\|_{m_0} < \varepsilon/3$ для любого $n > N$, где $m_0 = |\alpha|_p + 1$. В частности, $\|f_{N+1} - f\|_{m_0} < \varepsilon/3$, откуда $\sup [|f_{N+1}^{(\alpha)}(x) - f^{(\alpha)}(x)| : x \in \mathcal{G}] < \varepsilon/3$. Так как $f_{N+1} \in BC^\infty(\mathcal{G})$, то существует $\delta > 0$ такое, что $|f_{N+1}^{(\alpha)}(x) - f_{N+1}^{(\alpha)}(y)| < \varepsilon/3$, если $|x - y|_p < \delta$. Отсюда для тех же x и y

$$\begin{aligned} |f^{(\alpha)}(x) - f^{(\alpha)}(y)| &\leq |f^{(\alpha)}(x) - f_{N+1}^{(\alpha)}(x)| + \\ &+ |f_{N+1}^{(\alpha)}(x) - f_{N+1}^{(\alpha)}(y)| + |f_{N+1}^{(\alpha)}(y) - f^{(\alpha)}(y)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Отметим еще, что ряд условий, при которых $BC^\infty(\mathcal{G})$ совпадает с $B^\infty(\mathcal{G})$, приведен в [8]. В частности, согласно [8], так будет, если $\mathcal{G}$ — выпуклая область в $\mathbb{R}^p$ (и, следовательно, если $\mathcal{G} = \mathbb{R}^p$). В этой же работе на с. 44 показано, что $e_{i\mu}(x) \in BC^\infty(\mathbb{R}^p)$ для любого $\mu \in \mathbb{R}^p$. Впрочем, совсем простое доказательство этого факта следует из того, что $e_{i\mu}(x) \in B^\infty(\mathbb{R}^p) = BC^\infty(\mathbb{R}^p)$.

Пусть $h \in (0, +\infty)$, а $\varphi(\alpha, h)$ — введенное в 1.1 отображение $\mathbb{N}_0^p \times (0, +\infty)$ в $(0, +\infty)$. Положим, как в [7, с. 135]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G}) &:= \left\{ y \in C^\infty(\mathcal{G}) : \right. \\ &\quad \left. \|y\|_h^{(\varphi)} := \sup \left[\frac{|y^{(\alpha)}(x)|}{\varphi(\alpha, h)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p, x \in \mathcal{G} \right] < +\infty \right\}; \\ \mathcal{E}_{(\varphi)}^d(\mathcal{G}) &:= \text{proj}_{h>d} \mathcal{E}_{h_n}^\varphi(\mathcal{G}) \quad (0 \leq d < +\infty); \\ \mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G}) &:= \text{ind}_{0<h<d} \mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G}) = \text{ind}_{0<h_n \uparrow d} \mathcal{E}_{h_n}^\varphi(\mathcal{G}) \quad (0 < d \leq +\infty); \\ \mathcal{E}_{h,b}^\varphi(\mathcal{G}) &:= \{ y \in B^\infty(\mathcal{G}) : \|y\|_h^{(\varphi)} < +\infty \}; \\ \mathcal{E}_{(\varphi)}^{d,b}(\mathcal{G}) &:= \text{proj}_{h>d} \mathcal{E}_{h,b}^\varphi(\mathcal{G}) \quad (0 \leq d < +\infty); \\ \mathcal{E}_{\{\varphi\}}^{d,b}(\mathcal{G}) &:= \text{ind}_{0<h<d} \mathcal{E}_{h,b}^\varphi(\mathcal{G}) \quad (0 < d \leq +\infty); \\ \mathcal{E}_{h,c}^\varphi(\mathcal{G}) &:= \{ y \in BC^\infty(\mathcal{G}) : \|y\|_h^{(\varphi)} < +\infty \}; \\ \mathcal{E}_{(\varphi)}^{d,c}(\mathcal{G}) &:= \text{proj}_{h>d} \mathcal{E}_{h,c}^\varphi(\mathcal{G}) \quad (0 \leq d < +\infty); \\ \mathcal{E}_{\{\varphi\}}^{d,c}(\mathcal{G}) &:= \text{ind}_{0<h<d} \mathcal{E}_{h,c}^\varphi(\mathcal{G}) \quad (0 < d \leq +\infty). \end{aligned}$$

В силу того, что $e_{i\mu}(x) \in BC^\infty(\mathbb{R}^n)$ для любого $\mu \in \mathbb{R}^p$, причем $|e_{i\mu}(x)| = 1$ для каждого $x \in \mathbb{R}^p$, неравенство 4) теоремы 3.1 равносильно утверждению об абсолютной сходимости ряда (14) в $\mathcal{E}_{h,c}^\varphi(\mathbb{R}^p)$, а следовательно, и в $\mathcal{E}_{h,c}^\varphi(\mathcal{G}_1)$, каково бы ни было открытое множество $\mathcal{G}_1$ из $\mathbb{R}^p$. Отсюда уже нетрудно вывести, что в предположениях теоремы 3.1 любое из ее утверждений 1)–4) равносильно тому, что ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{h,c}^\varphi(\mathcal{G})$ (и тогда его сумма принадлежит $\mathcal{E}_{h,c}^\varphi(\mathcal{G})$). Далее, если функция $g(m, x)$ определена на $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^p$,

не убывает по m , положительна и m -ограничена в $\mathbb{R}^n$, то любое из утверждений 1)–4) теорем 3.1 равносильно тому, что ряд (14) абсолютно сходится в пространстве $\mathcal{E}_{h,c}^\varphi(\mathbb{R}^p) = \mathcal{E}_{h,b}^\varphi(\mathbb{R}^p)$ и его сумма принадлежит этому пространству. Точно так же, если функции φ, g — такие же, как в следствии теоремы 3.2, то утверждение 2) этой теоремы равносильно абсолютной сходимости ряда (14) в $\mathcal{E}_{(\varphi)}^{d,c}(\mathbb{R}^p)$, а следовательно, и в $\mathcal{E}_{(\varphi)}^{d,c}(\mathbb{R}^p)$, каково бы ни было открытое множество $\mathcal{G}$ в $\mathbb{R}^p$.

Наконец, если выполнены предположения, указанные в замечании 3 к теореме 3.3, то из утверждения A_3) этой теоремы следует, что ряд (14) сходится абсолютно в $\mathcal{E}_{\{\varphi\}}^{d,c}(\mathbb{R}^p)$. Обратный факт будет доказан ниже при менее жестких ограничениях, обеспечивающих наличие свойства (Y_0) у пространства $\mathcal{E}_{\{\varphi\}}^{d,c}(\mathbb{R}^p)$.

3.4. Изложенные в 3.3 результаты показывают, что ряд (14) обладает определенным свойством «заразительности», которое в общих чертах можно описать следующим образом. Допустим, что этот ряд абсолютно сходится в некотором непустом открытом множестве $\mathcal{G}$ по топологии какого-либо из пространств $\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h,m}(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}_{\varphi,g}^h(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}_{(\varphi,g)}^d(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}_{\{\varphi,g\}}^d(\mathcal{G})$, т. е. по определенной топологии, характеризующей рост модулей производных $|y^{(\alpha)}(x)|$ в $\mathbb{N}_0^p \times \mathcal{G}$ с помощью функций $\varphi(\alpha, h)$ и $g(m, x)$. Тогда при сравнительно мягких ограничениях на g этот ряд сходится абсолютно в соответствующем пространстве бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций, рост модулей производных которых удовлетворяет ограничениям того же характера, но уже на более «широком» множестве $\mathbb{N}_0^p \times \mathbb{R}^p$.

Проиллюстрируем это общее замечание конкретным примером, показывающим, что такое свойство «заразительности» может появляться у ряда (14) и при более слабых ограничениях на φ и g , чем те, которые были использованы в 3.3.

Пусть $h_0 \in (0, +\infty)$, $m_0 \in \mathbb{N}_0$, $\varphi(\alpha, h)$ — отображение $\mathbb{N}_0$ в $(0, +\infty)$ и $g(m_0, x)$ — отображение $\mathcal{G}_0$ в $(0, +\infty)$, где $\mathcal{G}_0$ — некоторое непустое открытое множество в $\mathbb{R}^p$. Допустим, что ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_0,m_0}(\mathcal{G}_0)$. Тогда для любого x_0 из $\mathcal{G}_0$ имеем

$$+\infty > \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \sup \left[\frac{|\mu_{1,k}|^{\alpha_1}, \dots, |\mu_{p,k}|^{\alpha_p}}{\varphi(\alpha, h_0)} g(m_0, x) : x \in \mathcal{G}_0, \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \left(|b_k| \sup \left[\frac{|\mu_{1,k}|^{\alpha_1}, \dots, |\mu_{p,k}|^{\alpha_p}}{\varphi(\alpha, h_0)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] g(m_0, x_0) \right) = \\
&= g(m_0, x_0) \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \sup \left[\frac{|\mu_{1,k}|^{\alpha_1}, \dots, |\mu_{p,k}|^{\alpha_p}}{\varphi(\alpha, h_0)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right].
\end{aligned}$$

Так как $0 < g(m_0, x_0) < +\infty$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \sup \left[\frac{|\mu_{1,k}|^{\alpha_1}, \dots, |\mu_{p,k}|^{\alpha_p}}{\varphi(\alpha, h_0)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] < +\infty.$$

Последнее неравенство означает, что ряд (14) сходится в пространстве $\mathcal{E}_{h_0,c}^{\varphi}(\mathbb{R}^p) = \mathcal{E}_{h_0,b}^{\varphi}(\mathbb{R}^p)$. Но тогда и сумма ряда (14) принадлежит этому же пространству. Если еще функция $g(m, x)$ отображает $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^n$ в $(0, +\infty)$ и m -ограничена, то ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_0}(\mathbb{R}^p)$ и его сумма принадлежит $\mathcal{E}_{h,c}^{\varphi}(\mathbb{R}^p) \cap \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_0}(\mathbb{R}^p) \subset BC^{\infty}(\mathbb{R}^p \cap \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_0}(\mathbb{R}^p))$.

3.5. Результаты, подробно описанные в 3.3 и 3.4, можно применить к абсолютно представляющим системам (АПС) экспонент с мнимыми показателями в ВПБДФ. Предварительно напомним [3], что последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов полного отделимого локально выпуклого пространства (ЛВП) H называется АПС в H , если любой элемент y из H можно представить (не обязательно единственным образом) в виде суммы ряда по системе $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} d_k x_k, \quad d_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

абсолютно сходящегося в H .

Пусть $h_0 \in (0, +\infty)$, $\mathcal{G}$ — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, φ, g — отображения с указанными в 1.1 свойствами. Допустим, что в $\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_0}(\mathcal{G})$ имеется хотя бы одна АПС экспонент с чисто мнимыми показателями $\mathcal{E}_{i\mu} := (e_{i\mu_k})_{k=1}^{\infty}$, $\mu_k \in \mathbb{R}^p$ ($k = 1, 2, \dots$). Тогда любой элемент y из $\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_0}(\mathcal{G})$ можно представить в виде ряда $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_{i\mu_k}$, где для любого $m \geq 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \|e_{i\mu_k}\|_{h_0}^m < +\infty$. Согласно результатам пункта 3.4 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} y_k e_{i\mu_k}$ абсолютно сходится

в $\mathcal{E}_{h_0}^\varphi(\mathbb{R}^p)$. Введем пространство числовых последовательностей

$$A_2(\mathcal{E}_{i\mu}, \mathbb{R}^p) := \left\{ b = (b_k)_{k=1}^\infty : \right. \\ \left. |\widehat{b}|_{h_0} := \sum_{k=1}^\infty |b_k| \sup \left[\frac{|\mu_{1,k}|^{\alpha_1}, \dots, |\mu_{p,k}|^{\alpha_p}}{\varphi(\alpha, h_0)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] < +\infty \right\}.$$

Это пространство с нормой $|\widehat{\cdot}|$ — банахово [3, 9], причем оператор представления [3]

$$L : (\mathcal{E}_{i\mu}, \mathbb{R}^p) \mapsto Lb = \sum_{k=1}^\infty b_k e_{i\mu_k} \quad (\forall b \in A_2)$$

является эпиморфизмом $A_2(\mathcal{E}_{i\mu}, \mathbb{R}^p)$ на $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_0}(\mathcal{G})$.

Положим еще

$$A_2^0 := L^{-1}(0) = \left\{ d = (d_k)_{k=1}^\infty \in A_2(\mathcal{E}_{i\mu}, \mathbb{R}^p) : \sum_{k=1}^\infty d_k e_{i\mu_k} = 0 \right\}.$$

Тогда A_2^0 — замкнутое подпространство B -пространства $A_2(\mathcal{E}_{i\mu}, \mathbb{R}^p)$, и L — топологический изоморфизм фактор-пространства $A_2(\mathcal{E}_{i\mu}, \mathbb{R}^p)/A_2^0$ с соответствующей фактор-топологией, на пространство $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_0}(\mathcal{G})$. Следовательно, $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_0}(\mathcal{G})$ — тоже B -пространство, что по критерию А. Н. Колмогорова (см., например, [9, с. 126–127]) возможно тогда и только тогда, когда в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_0}(\mathcal{G})$ имеется ограниченная окрестность нуля, т. е. множество вида $\{v \in \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_0}(\mathcal{G}) : \|v\|_{h_0}^{m_1} < \gamma\}$.

Как мы только что убедились, если в пространстве Фреше $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_0}(\mathcal{G})$ имеется хотя бы одна АПС экспонент с мнимыми показателями, то $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_0}(\mathcal{G})$ — B -пространство.

Неясно, справедливо ли обратное утверждение. Заметим еще, что из рассуждений, проведенных в конце 3.4, следует, что только что полученное прямое утверждение можно установить при менее жестких предположениях. Именно, достаточно считать, что $\varphi(\alpha, h_0)$ отображает $\mathbb{N}_0^p$ в $(0, +\infty)$, а $g(m, x)$ — не убывающее по m отображение $\mathbb{N}_0 \times \mathcal{G}$ в $(0, +\infty)$.

4. О непрерывности некоторых операторов в ВПБДФ

4.1. Пусть $p \geq 1$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{N}_0^p$ и D^β — оператор частного дифференцирования: $(D^\beta y)(x) = y^{(\beta)}(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^p$. Всяду в этом параграфе φ, g — отображения, описанные в 1.1. Будем говорить, что пара чисел (h, h_1) , где $h \in (0, +\infty)$, $h_1 \in [h, +\infty)$ обладает свойством (β) , если

$$A_\beta(h, h_1) := \sup \left[\frac{\varphi(\alpha + \beta, h)}{\varphi(\alpha, h_1)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] < +\infty. \quad (15)$$

Предложение 4.1. При сделанных предположениях D^β непрерывен из $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_1, m}(\mathcal{G})$ при любом $m \in \mathbb{N}_0$, если пара (h, h_1) обладает свойством (β) .

◁ Для любых $y \in \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$ и $m \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$\begin{aligned} \|D^\beta y\|_{h_1}^m &= \sup \left[\frac{|y^{(\alpha+\beta)}(x)|g(m, x)}{\varphi(\alpha, h_1)} : x \in \mathcal{G}, \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] = \\ &= \sup \left[\frac{|y^{(\alpha+\beta)}(x)|g(m, x)}{\varphi(\alpha + \beta, h)} \cdot \frac{\varphi(\alpha + \beta, h)}{\varphi(\alpha, h_1)} : x \in \mathcal{G}, \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] = \\ &= A_\beta(h, h_1) \sup \left[\frac{|y^{(\lambda)}(x)|g(m, x)}{\varphi(\lambda, h)} : x \in \mathcal{G}, \lambda \in \mathbb{N}_0^p \right] = \\ &= A_\beta(h, h_1) \|y\|_h^m. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Предложение 4.2. В предположениях предложения 4.1 D^β непрерывен из $\mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_1}(\mathcal{G})$.

◁ Имеем

$$\mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G}) = \text{proj}_m \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G}); \quad \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_1}(\mathcal{G}) = \text{proj}_m \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_1, m}(\mathcal{G}).$$

По предложению 4.1 для любого $m \in \mathbb{N}_0$ оператор D^β непрерывен из $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_1, m}(\mathcal{G})$ и, подавно, из $\mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_1}(\mathcal{G})$. Но тогда по предложению 12 гл. 5 книги [10] оператор D^β непрерывен из $\mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_1}(\mathcal{G})$. ◻

Предложение 4.3. Пусть $d \in [0, +\infty)$ и для любого h из $(d, +\infty)$ найдется число $\tilde{h} \in (d, h]$ такое, что пара $(\tilde{h}, h)$ обладает свойством (β) . Тогда D^β непрерывен из $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G})$.

◁ Возьмем произвольную последовательность $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ из $(d, +\infty)$ такую, что $h_n \downarrow d$ и для любого n выберем число $\tilde{h}_n$ из $(d, h_n]$ так, что пара $(\tilde{h}_n, h_n)$ обладает свойством (β) . Ясно, что $\lim_n \tilde{h}_n = d$, откуда

$$\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G}) = \operatorname{proj}_n \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_n}(\mathcal{G}) = \operatorname{proj}_n \mathcal{E}_{\varphi, g}^{\tilde{h}_n}(\mathcal{G}).$$

По предложению 4.2 оператор D^β непрерывен из $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{\tilde{h}_n}(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_n}(\mathcal{G})$ и, подавно, из $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_n}(\mathcal{G})$. Отсюда, как в конце доказательства предложения 4.2, следует непрерывность из $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G}) = \operatorname{proj}_n \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_n}(\mathcal{G})$. ▷

Предложение 4.4. Пусть $d \in (0, +\infty]$ и для любого h из $(0, d)$ найдется число $\hat{h}$ из $[h, d)$ такое, что пара $(h, \hat{h})$ обладает свойством (β) . Тогда оператор D^β непрерывен в $\mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G})$.

◁ Выберем числовую последовательность $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ из $(0, d)$ так, чтобы $h_n \uparrow d$, и для любого h_n найдем число $\hat{h}_n$ из $[h_n, d)$ такое, что пара $(h_n, \hat{h}_n)$ обладает свойством (β) . Очевидно, что $\lim_n \hat{h}_n = d$ и поэтому $\mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G}) = \operatorname{ind}_n \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_n}(\mathcal{G}) = \operatorname{ind}_n \mathcal{E}_{\varphi, g}^{\hat{h}_n}(\mathcal{G})$. По предложению 4.2 D^β непрерывен из $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_n}(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{\hat{h}_n}(\mathcal{G})$ при всех $n \geq 1$ и, подавно, из $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_n}(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G})$ для любого $n \geq 1$. По предложению 5 гл. 5 из [10] оператор D^β непрерывен из $\mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G})$. ▷

Отметим некоторые следствия доказанных результатов.

Следствие 1. Пусть для любых $\beta \in \mathbb{N}_0^p$ и $h \in (0, +\infty)$ существует $h_1 \in [h, +\infty)$ такое, что выполнено условие (15). Тогда любой линейный оператор $L_{(p)}$ конечного порядка в частных производных с постоянными коэффициентами непрерывен из $\mathcal{E}_{\varphi, g}^h(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_1}(\mathcal{G})$.

Следствие 2. Пусть $d \in [0, +\infty)$ и для любых $\beta \in \mathbb{N}_0^p$ и h_1 из $(0, +\infty)$ найдется число $h \in (d, h_1]$ такое, что справедливо неравенство (15). Тогда любой оператор $L_{(p)}$ непрерывен из $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G})$.

Следствие 3. Пусть $d \in (0, +\infty]$ и для произвольных β из $\mathbb{N}_0^p$ и h из $(0, d)$ найдется в $[h, d]$ число h_1 такое, что имеет место неравенство (15). Тогда любой оператор $L_{(p)}$ непрерывен из $\mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G})$.

Как и в [6], можно указать достаточные условия при которых в рассматриваемых ВПБДФ будет непрерывен любой линейный оператор бесконечного порядка в частных производных с постоянными коэффициентами, но мы уже не будем останавливаться здесь на этом.

4.2. Рассмотрим теперь в тех же ВПБДФ оператор $(V_\mu y)(x) := \mu(x) \cdot y(x)$ умножения на функцию μ из $C^\infty(\mathcal{G})$, где по-прежнему $\mathcal{G}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^p$ и $p \geq 1$. Если $y \in C^\infty(\mathcal{G})$, то по формуле (36₂) гл. 3 из книги [11] имеем для любого мультииндекса α из $\mathbb{N}_0^p$

$$(V_\mu y)^{(\alpha)} = (\mu(x)y(x))^{(\alpha)} = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta y^{(\beta)}(x) \mu^{(\alpha-\beta)}(x),$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{N}_0^p$, $\beta_j \leq \alpha_j$, $j = 1, \dots, p$; $C_\alpha^\beta := C_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots C_{\alpha_p}^{\beta_p}$.

Пусть $h \in (0, +\infty)$, $h_1 \in [h, +\infty)$, $h_2 \in (0, h]$, $\beta \in \mathbb{N}_0^p$. Будем говорить, что тройка чисел $(h; h_1, h_2)$ обладает свойством (Q_0) , если

$$M(h; h_1, h_2) := \sup \left[\sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \frac{\varphi(\alpha - \beta, h_2) \varphi(\beta, h)}{\varphi(\alpha, h_1)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] < +\infty. \quad (16)$$

Возьмем любую тройку чисел $(h; h_1, h_2)$ со свойством (Q_0) и произвольную функцию $\mu(x)$ из пространства $\mathcal{E}_{h_2}^\varphi(\mathcal{G})$, введенного в конце 3.3. Для любого $y \in \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h, m}(\mathcal{G})$, $m \in \mathbb{N}_0$, имеем

$$\begin{aligned} \|V_\mu y\|_{h_1}^m &= \sup \left[\frac{|\mu(x)y^{(\alpha)}(x)|}{\varphi(\alpha, h_1)} \cdot g(m, x) : x \in \mathcal{G}, \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] \leq \\ &\leq \sup \left[\sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \frac{|y^{(\beta)}(x)|}{\varphi(\beta, h)} \cdot g(m, x) \cdot \frac{|\mu^{(\alpha-\beta)}(x)|}{\varphi(\alpha - \beta, h_2)} \cdot \frac{\varphi(\alpha - \beta, h_2) \varphi(\beta, h)}{\varphi(\alpha, h_1)} : \right. \\ &\quad \left. x \in \mathcal{G}, \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] \leq M(h; h_1, h_2) \|\mu\|_{h_2}^{(\varphi)} \cdot \|y\|_h^m, \end{aligned}$$

где, как и в 3.3, $\|\mu\|_{h_2}^{(\varphi)} := \sup \left[\frac{|\mu^{(\alpha)}(x)|}{\varphi(\alpha, h_2)} : x \in \mathcal{G}, \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right]$.

Из этих оценок следует, что оператор V_μ непрерывен из $\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h,m}(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_1,m}(\mathcal{G})$ для любого $m \geq 1$. Но тогда, согласно [10, гл. 5], V_μ непрерывен из $\mathcal{E}_{\varphi,g}^h(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_1}(\mathcal{G})$.

Пусть теперь $d \in [0, +\infty)$ и для любого h_1 из $(d, +\infty)$ найдутся числа h из $(d, h_1]$ и h_2 из $[0, h]$ такие, что тройка $(h; h_1, h_2)$ обладает свойством (Q_0) . Положим $E_0 := \bigcap_{h_1 > d} \mathcal{E}_{h_2}^\varphi(\mathcal{G})$. Множество E_0 непусто, так как всегда содержит $C_0 := \{\mu(x) \equiv d, d \in \mathbb{C}\}$. Выберем последовательность $h_{1,n}$ так, чтобы $h_{1,n} \downarrow d$, а для каждого номера $n \geq 1$ подберем такие числа h_n из $[h_{1,n}, d)$ и $h_{2,n}$ из $[0, h_n]$, чтобы каждая тройка $(h_n; h_{1,n}, h_{2,n})$ обладала свойством (Q_0) . Заметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = d$. Так как $h_{1,n} \downarrow d$ и $h_n \in [h_{1,n}, d)$, то, заменяя последовательность h_n в случае необходимости некоторой ее подпоследовательностью h_{n_k} , можно всегда добиться того, что $h_{n_k} \downarrow d$. Отсюда

$$\mathcal{E}_{(\varphi,g)}^d(\mathcal{G}) = \text{proj}_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_{n_k}}(\mathcal{G}) = \text{proj}_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_{n_k},1}(\mathcal{G}).$$

Для любого $k \geq 1$ оператор V_μ с μ из E_0 непрерывен из $\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_{n_k}}(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_{n_k},1}(\mathcal{G})$ и, подавно, из $\mathcal{E}_{(\varphi,g)}^d(\mathcal{G}) = \text{proj}_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_{n_k}}(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_{n_k},1}(\mathcal{G})$. Согласно [10, гл. 5], V_μ непрерывен из $\mathcal{E}_{(\varphi,g)}^d(\mathcal{G})$ в $\mathcal{E}_{(\varphi,g)}^d(\mathcal{G}) = \text{proj}_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_{n_k},1}(\mathcal{G})$. Мы пришли к такому результату.

Предложение 4.5. Пусть $d \in [0, +\infty)$ и для любого $h_1 \in (d, +\infty)$ существуют $h \in (d, h_1]$ и $h_2 \in [0, h]$ такие, что тройка чисел $(h; h_1, h_2)$ обладает свойством (Q_0) . Пусть, далее, $\mu \in E_0$. Тогда оператор V_μ непрерывен в $\mathcal{E}_{(\varphi,g)}^d(\mathcal{G})$.

Пусть, наконец, $d \in (0, +\infty]$. Тогда аналогичными рассуждениями получаем такой результат.

Предложение 4.6. Пусть $p \geq 1$, $\mathcal{G}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^p$; φ, g — функции с описанными в 1.1 свойствами. Пусть, далее, $d \in (0, +\infty]$ и для любого h из $(0, d)$ найдутся числа h_1 из $[h, d)$ и h_2 из $(0, h]$ такие, что тройка $(h; h_1, h_2)$ обладает свойством (Q_0) . Тогда оператор V_μ умножения на функцию μ из пространства $E_1 := \bigcap_{0 < h < d} \mathcal{E}_{h_2}^\varphi(\mathcal{G})$ непрерывен в $\mathcal{E}_{\{\varphi,g\}}^d(\mathcal{G})$.

4.3. Объединяя условия непрерывности оператора дифференцирования D^β при всех β из $\mathbb{N}_0^p$ и оператора V_μ , нетрудно получить достаточные условия непрерывности в различных ВПБДФ линейного оператора конечного порядка в частных производных с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Ограничимся здесь формулировкой лишь одного подобного результата, вытекающего непосредственно из следствия 2 предложений 4.2–4.4 и предложения 4.5.

Предложение 4.7. Пусть $p \geq 1$, $\mathcal{G}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^p$; φ, g — функции с описанными в п. 1.1 свойствами. Пусть, далее, выполняются следующие условия:

А) для любых β из $\mathbb{N}_0^p$ и h_1 из $(d, +\infty)$ найдется число $h \in (d, h_1]$ такое, что справедливо неравенство (15);

Б) для любого h_1 из $(d, +\infty)$ найдутся числа $h \in (d, h_1]$ и $h_2 \in [0, h]$ такие, что тройка $(h; h_1, h_2)$ обладает свойством (Q_0) .

Тогда в пространстве $\mathcal{E}_{(\varphi, g)}^d(\mathcal{G})$ непрерывен любой линейный оператор конечного порядка в частных производных с коэффициентами из E_0 .

5. Примеры

5.1. Простейшим и, пожалуй, важнейшим примером ВПБДФ являются пространства с весовой функцией $g(m, x) \equiv 1$, которые уже рассматривались в 3.3. Используя введенные там обозначения, имеем

$$\mathcal{E}_{\varphi, 1}^h(\mathcal{G}) = \mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G}); \quad \mathcal{E}_{\varphi, 1}^{h, m}(\mathcal{G}) = \mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G}) \quad (m \geq 1, 0 < h < +\infty).$$

Далее, если $0 \leq d < +\infty$, то

$$\mathcal{E}_{(\varphi, 1)}^d(\mathcal{G}) = \mathcal{E}_{(\varphi)}^d(\mathcal{G}) = \operatorname{proj}_{h_n \downarrow d} \mathcal{E}_{h_n}^\varphi(\mathcal{G}),$$

а если $0 < d \leq +\infty$, то

$$\mathcal{E}_{\{\varphi, 1\}}^d(\mathcal{G}) = \mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G}) = \operatorname{ind}_{h_n \downarrow d} \mathcal{E}_{h_n}^\varphi(\mathcal{G}).$$

При этом $\mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G})$ — B -пространство, а $\mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G})$ — канонический индуктивный предел (КИП) B -пространств $\mathcal{E}_{h_n}^\varphi(\mathcal{G})$, т. е. внутренний индуктивный предел последовательности B -пространств, каждое из которых вложено непрерывно в последующее.

Для данной функции справедливы лемма 1.1 и предложение 1.2, в которых E — одно из пространств $\mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G})$ и $\mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G})$. Как отмечено в замечании после предложения 1.2, и лемма 1.1, и предложение 1.2 справедливы для пространства $\mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G}) = \lim_{h_n \uparrow d} \mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_n}(\mathcal{G})$, в случае, когда последнее является регулярным индуктивным пределом, т. е. когда каждое ограниченное в $\mathcal{E}_{\{\varphi, g\}}^d(\mathcal{G})$ множество T содержится в некотором $\mathcal{E}_{\varphi, g}^{h_n}(\mathcal{G})$ ($n = n(T)$) и ограничено в нем. Покажем, что $\mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G})$ — регулярный индуктивный предел последовательности нормированных пространств $\mathcal{E}_{h_n}^\varphi(\mathcal{G})$. Предварительно напомним, что, согласно Б. М. Макарову [12, 13], КИП $H = \text{ind } H_n$ нормированных пространств H_n обладает свойством (F_1) , если для любого $n \geq 1$ единичный замкнутый шар $\tilde{S}_n$ в H_n замкнут в H . Как доказано в [12, 13], КИП последовательности нормированных пространств, обладающий свойством (F_1) , является регулярным индуктивным пределом.

Предложение 5.1. Пусть $\mathcal{G}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$ и функция $\varphi(\alpha, h) : \mathbb{N}_0^p \times (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ удовлетворяет условиям 1.1. Пусть, далее, $0 < d \leq +\infty$. Тогда КИП $\mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G}) = \lim_{h_n \uparrow d} \mathcal{E}_{h_n}^\varphi(\mathcal{G})$ обладает свойством (F_1) .

◁ Зафиксируем номер $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим замкнутый единичный шар $\tilde{S}_n$ в $\mathcal{E}_{h_n}^\varphi(\mathcal{G})$:

$$\tilde{S}_n := \{y \in \mathcal{E}_{h_n}^\varphi(\mathcal{G}) : \|y\|_{h_n}^{(\varphi)} \leq 1\}.$$

Пусть сеть $\{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ функций из $\tilde{S}_n$ сходится к y_0 в $\mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G})$. Так как пространство $\mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G})$ непрерывно вложено в $C^\infty(\mathcal{G})$, то для всех $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ и $x \in \mathcal{G}$

$$y_\gamma^{(\alpha)}(x) \rightarrow y_0^{(\alpha)}(x).$$

Зафиксировав произвольные $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ и $x \in \mathcal{G}$ в неравенстве

$$\frac{|y_\gamma^{(\alpha)}(x)|}{\varphi(\alpha, h_n)} \leq \|y_\gamma\|_{h_n}^{(\varphi)} \leq 1$$

и перейдя в нем к пределу по γ , получим, что $|y_0^{(\alpha)}(x)| \leq \varphi(\alpha, h_n)$ при любых $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ и $x \in \mathcal{G}$. Следовательно, $y_0 \in \tilde{S}_n$. ▷

Следствие 1. В предположениях предложения 5.1 $\mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G})$ — регулярный индуктивный предел.

Следствие 2. При тех же предположениях лемма 1.1 и предположение 1.2 справедливы для $\mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G})$.

5.2. Переходя далее к результатам о топологических свойствах ВПБДФ, полученным в 3.1 при дополнительных предположениях о том, что φ обладает свойством $\mathcal{K}_1$, а g — свойством $\mathcal{K}_2$, отметим прежде всего то, что функция $g(m, x) \equiv 1$ свойством $\mathcal{K}_2$ не обладает. Однако в ходе проведения приведенных в п. 3.1 доказательств в случае $g(m, x) \equiv 1$ надобность в свойстве $\mathcal{K}_2$ просто отпадает. Учитывая еще, что при $g(m, x) \equiv 1$ выполняется равенство $\mathcal{E}_{\varphi,1}^{h,m}(\mathcal{G}) = \mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G})$ для любого $m \geq 1$, получаем без труда, что предложения 1.3 и 1.4 и теоремы 1.5–1.7 в рассматриваемом частном случае принимают такой вид.

Предложение 5.2. Пусть $\mathcal{G}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$. Пусть, далее, функция φ такая, как в п. 1.1, а некоторая пара чисел (h_1, h_2) , где $h_2 \in (0, +\infty)$, $h_1 \in (h_2, +\infty)$, обладает свойством $\mathcal{K}_1$. Тогда $\mathcal{E}_{h_2}^\varphi$ компактно вложено в $\mathcal{E}_{h_1}^\varphi$.

Теорема 5.3. Пусть $d \in [0, +\infty)$ и функция φ обладает свойством $\mathcal{K}_1$. Тогда $\mathcal{E}_{(\varphi)}^d(\mathcal{G})$ — $\mathcal{M}^*$ -пространство (и FS -пространство).

Теорема 5.4. Пусть $d \in (0, +\infty]$, а весовая функция φ — такая же, как в теореме 5.3. Тогда $\mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G})$ — LN^* -пространство (и DFS -пространство).

5.3. Переходя к содержанию § 2 применительно к рассматриваемому частному случаю, отметим прежде всего, что $(\forall h \in (0, +\infty))(\forall m \geq 1) 1 \in \mathcal{E}_{\varphi,1}^{h,m}(\mathcal{G})$ для любого открытого множества $\mathcal{G}$ в $\mathbb{R}^p$ и, следовательно, $1 \in \mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G})$ для каждого такого множества. С другой стороны, если, как раньше, S_p — множество всех многочленов от p вещественных переменных с комплексными коэффициентами, то для любых $h \in (0, +\infty)$ и $m \geq 1$ $S_p \subseteq \mathcal{E}_{\varphi,1}^{h,m}(\mathcal{G}) \Leftrightarrow \mathcal{G}$ ограничено в $\mathbb{R}^p$. Отсюда для любого $h \in (0, +\infty)$ $S_p \subseteq \mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ открытое множество $\mathcal{G}$ ограничено в $\mathbb{R}^p$.

Обращаясь к экспоненте $e_a(x) := \exp\langle a, x \rangle_p$, замечаем, что

$$(\forall h \in (0, +\infty)) \quad e_a(x) \in \mathcal{E}_{\varphi,1}^{h,m}(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$$

$$\sup \left[\frac{|a_1|^{\alpha_1} \dots |a_p|^{\alpha_p}}{\varphi(\alpha, h)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] < +\infty, \quad (17)$$

$$\sup [\operatorname{Re}\langle a, x \rangle_p : x \in \mathcal{G}] < +\infty. \quad (18)$$

Так как условия (17) и (18) от m не зависят, то их выполнение необходимо и достаточно для включения $e_a(x) \in \mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G})$, каково бы ни было фиксированное h из $(0, +\infty)$. В частности, если открытое множество $\mathcal{G}$ ограничено в $\mathbb{R}^p$ и $a \in \mathbb{C}^p$, то $e_a(x) \in \mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G})$ в том и только в том случае, если выполнено условие (17). Далее, $e_a(x) \in \mathcal{E}_{(\varphi)}^d(\mathcal{G})$ если и только если при всех $h > d$ выполнены условия (17) и (18) (в случае ограниченности множества $\mathcal{G}$ второе условие отпадает).

Положим, как выше, $\operatorname{Exp} := \operatorname{span}\{e^{\langle a, x \rangle_p} : a \in \mathbb{C}^p\}$. Из результатов § 2 непосредственно следует, что при любом фиксированном $h \in (0, +\infty)$ $\operatorname{Exp} \subseteq \mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (10) и при всех a из $\mathbb{C}^p$ — условие (18), которое отпадает, если $\mathcal{G}$ ограничено.

Далее, при $0 \leq d < +\infty$ будет $\operatorname{Exp} \subseteq \mathcal{E}_{(\varphi)}^d(\mathcal{G})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (10) при всех $h > d$, а также (18) — при всех a из $\mathbb{C}^p$ (и здесь условие (18) излишне, если множество $\mathcal{G}$ ограничено).

Наконец, при $0 < d \leq +\infty$ верно $\operatorname{Exp} \subseteq \mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G})$ в том и только том случае, когда выполнено условие (11) и при всех $a \in \mathbb{C}^p$ — условие (18), которое отпадает в случае ограниченного множества $\mathcal{G}$.

Рассмотрим еще экспоненты $e_{i\mu}(x)$ с мнимыми показателями, считая, по-прежнему, что $\mathcal{G}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^p$ и $\mu \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$. Из результатов п. 2.3 прямо следуют также утверждения для $g(m, x) \equiv 1$:

1) $(\forall h \in (0, +\infty))(\forall m \geq 1) \quad e_{i\mu}(x) \in \mathcal{E}_{\varphi,1}^{h,m}(\mathcal{G}) \Leftrightarrow e_{i\mu}(x) \in \mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$
выполнено условие (12);

2) $(\forall d \in [0, +\infty)) \quad e_{i\mu}(x) \in \mathcal{E}_{(\varphi)}^d(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ условие (12) выполнено для всех $h > d$;

3) $(\forall d \in (0, +\infty]) \quad e_{i\mu}(x) \in \mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ условие (12) выполнено хотя бы при одном $h \in (0, d)$.

Далее, если, как выше, $\text{Exp}(i) := \text{span}\{e^{i\langle \mu, x \rangle_p} : \mu \in \mathbb{R}^p\}$, то справедлива

Теорема 5.5.

- I. $(\forall h \in (0, +\infty))(\forall m \geq 1) \text{Exp}(i) \subseteq \mathcal{E}_{\varphi,1}^{h,m}(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$
 $(\forall h \in (0, +\infty)) \text{Exp}(i) \subseteq \mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ выполняется условие (10);
- II. $(\forall d \in [0, +\infty)) \text{Exp}(i) \subseteq \mathcal{E}_{(\varphi)}^d(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$
 условие (10) выполняется при всех $h > d$;
- III. $(\forall d \in (0, +\infty]) \text{Exp}(i) \subseteq \mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G}) \Leftrightarrow$ выполнено условие (11).

5.4. Приведем теперь результаты из § 3 об условиях абсолютной сходимости ряда (14), относящиеся к случаю $g(m, x) \equiv 1$. Начнем с результата, вытекающего из теоремы 3.1.

Теорема 5.6. Пусть отображение $\varphi(\alpha, h) : \mathbb{N}_0^p \times (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ обладает указанным в п. 1.1 свойствами и удовлетворяет условию (10). Тогда при любом h из $(0, +\infty)$ равносильны такие утверждения:

- 1) для некоторого открытого множества $\mathcal{G}_0$ в $\mathbb{R}^p$ ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{\varphi,1}^{h,m}(\mathcal{G}_0)$ при некотором m (или, что все равно, при всех $m \geq 1$);
- 2) для любого открытого множества $\mathcal{G}$ в $\mathbb{R}^p$ ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{\varphi,1}^{h,m}(\mathcal{G})$ при всех (некотором) $m \geq 1$;
- 3) для некоторого открытого множества $\mathcal{G}_0$ в $\mathbb{R}^p$ ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G}_0)$;
- 4) для любого открытого множества $\mathcal{G}$ в $\mathbb{R}^p$ (и, в частности, для $\mathcal{G} = \mathbb{R}^p$) ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G})$;
- 5) выполняется соотношение 4) теоремы 3.1.

Напоминаем, что $(\forall m \geq 1) \mathcal{E}_{\varphi,1}^{h,m}(\mathcal{G}) = \mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G})$ и, таким образом, F -пространство $\mathcal{E}_{\varphi,1}^h(\mathcal{G})$ вырождается в B -пространство. Аналогично, теорема 3.2 в рассматриваемом случае принимает такой вид.

Теорема 5.7. Пусть $d \in [0, +\infty)$, а φ обладает свойством 1) из п. 1.1 и свойством (10). Тогда равносильны такие утверждения:

- 1) ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{(\varphi)}^d(\mathcal{G})$ для любого открытого множества $\mathcal{G}$ в $\mathbb{R}^p$ (и, в частности, для $\mathcal{G} = \mathbb{R}^p$);
- 2) ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{(\varphi)}^d(\mathcal{G}_0)$ для некоторого непустого открытого множества $\mathcal{G}_0$ в $\mathbb{R}^p$;
- 3) выполняется соотношение $\hat{2}$) из теоремы 3.2.

Перед тем, как изложить результаты об абсолютной сходимости ряда (14) в $\mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G})$, напомним один результат С. Н. Мелихова (см. [14, с. 120, следствие 4 теоремы 3.2.1], а также [15]), согласно которому любой КИП нормированных ЛВП, обладающий свойством (F_1) , обладает и свойством (Y_0) . Это дает возможность вывести из теоремы 3.3 такой результат.

Теорема 5.8. Пусть $d \in (0, +\infty]$, функция φ удовлетворяет предположениям п. 1.1 и условию (11). Тогда для любой числовой последовательности $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ такой, что $0 < h_n \uparrow d$, равносильны следующие утверждения:

- 1) ряд (14) сходится абсолютно в $\mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G}) = \text{ind}_{h_n \uparrow d} \mathcal{E}_{h_n}^\varphi(\mathcal{G})$ для любого (некоторого) открытого множества $\mathcal{G}$ в $\mathbb{R}^p$;
- 2) ряд (14) абсолютно сходится в $\mathcal{E}_{h_n}^\varphi(\mathcal{G})$ при $n \geq n_0$ для любого (некоторого) открытого множества $\mathcal{G}$ в $\mathbb{R}^p$;
- 3) условие 4) теоремы 3.1 выполнено при всех h из (h_{n_0}, d) .

Дальнейшие сведения о свойствах ВПБДФ с $g \equiv 1$ можно найти в § 9 работы [7]. В частности, в этой статье изучена связь между возможностью продолжения по Уитни всех функций из какого-либо ВПБДФ типа $\mathcal{E}_h^\varphi(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}_{(\varphi)}^d(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}_{\{\varphi\}}^d(\mathcal{G})$ из $\mathcal{G}$ в $\mathbb{R}^p$ с сохранением класса (типа) пространства и наличием в этом пространстве хотя бы одной АПС экспонент с чисто мнимыми показателями.

5.5. Остановимся вкратце еще на одном примере весовой функции g : $g(m, x) = g_b^H(m, x) := (b(x))^m H(x)$, $m \in \mathbb{N}_0$, $b(x) : \mathcal{G} \rightarrow [1, +\infty)$, $H(x) : \mathcal{G} \rightarrow (0, +\infty)$. Ясно, что для каждого $m \in \mathbb{N}_0$ $1 \in \mathcal{E}_{\varphi, g_b^H}^{h, m}(\mathcal{G}) \Leftrightarrow \sup[H(x) : x \in \mathcal{G}] < +\infty$ и (при $m \geq 1$) $\sup[b(x) : x \in \mathcal{G}] < +\infty$. Положим $\mathcal{G} = \mathbb{R}^p$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}_0$ будет

$$\begin{aligned} S_p \subseteq \mathcal{E}_{\varphi, g_b^H}^{h, m}(\mathbb{R}^p) &\Leftrightarrow \lim_{|x|_p \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln H(x)}{\ln |x|_p} + m \frac{\ln b(x)}{|x|_p} \right] = -\infty \\ &\Rightarrow \lim_{|x|_p \rightarrow \infty} \frac{\ln H(x)}{|x|_p} = -\infty. \end{aligned}$$

Далее, для любого $h \in (0, +\infty)$ имеем

$$S_p \subseteq \mathcal{E}_{\varphi, g_b^H}^h(\mathbb{R}^p) \Leftarrow \lim_{|x|_p \rightarrow \infty} \frac{\ln H(x)}{\ln |x|_p} = -\infty;$$

$$\overline{\lim}_{|x|_p \rightarrow \infty} \frac{\ln b(x)}{\ln |x|_p} < +\infty.$$

Как и в случае $g(m, x) \equiv 1$, можно указать критерии того, что $e_a(x)$, $e_{i\mu}(x)$, Exp , $\text{Exp}(i)$ принадлежат тому или иному ВПБДФ при $g = g_b^H$, но мы уже не будем останавливаться здесь на этом. Отметим лишь, что условие (5) выполняется тогда и только тогда, когда $\lim_{|x|_p \rightarrow \infty} b(x) = +\infty$. Согласно теореме 1.11 отсюда следует, что если функция φ обладает свойством $\mathcal{K}_1$, функции b и H отображают $\mathbb{R}^p$ в $(0, +\infty)$ так, что $(\forall R \in (0, +\infty)) \sup[b(x) : |x|_p \leq R] < +\infty$; $0 < \inf[H(x) : |x|_p \leq R]$; $\sup[H(x) : |x|_p \leq R] < +\infty$ и $\lim_{|x|_p \rightarrow \infty} b(x) = \infty$, то $\mathcal{E}_{(\varphi, g_b^H)}^d(\mathbb{R}^p) = M^*$ - (и FS -)пространство при $d \in [0, +\infty)$, а $\mathcal{E}_{\{\varphi, g_b^H\}}^d(\mathbb{R}^p) = LN^*$ - (и DFS -)пространство при $d \in (0, +\infty]$.

5.6. Можно рассмотреть также ВПБДФ, порожденные различными весовыми функциями $\varphi(\alpha, h)$. Положим, например, $\varphi(\alpha, h) = \varphi_h^M(\alpha) := M_\alpha(h)^{|\alpha|_p}$, где $M_\alpha > 0$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ и $h \in (0, +\infty)$. Такая функция удовлетворяет условию 1) из п. 1.1 и обладает свойством $\mathcal{K}_1$. Далее, условие (10) выполняется тогда и только тогда, когда $\lim_{|\alpha|_p \rightarrow \infty} (M_\alpha)^{\frac{1}{|\alpha|_p}} = +\infty$, а условие (11) — тогда и только тогда, когда $\lim_{|\alpha|_p \rightarrow \infty} (M_\alpha)^{\frac{1}{|\alpha|_p}} > 0$ при $d = +\infty$ и $\lim_{|\alpha|_p \rightarrow \infty} (M_\alpha)^{\frac{1}{|\alpha|_p}} = +\infty$ при $d \in (0, +\infty)$. Для того, чтобы пара чисел (h, h_1) , где $h \in (0, +\infty)$, $h_1 \in [h, +\infty)$, обладала свойством (β) при каком-либо β из $\mathbb{N}_0^p$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{A}_\beta(h, h_1) := \sup \left[\frac{M_{\alpha+\beta}}{M_\alpha} \left(\frac{h}{h_1} \right)^{|\alpha|_p} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] < +\infty.$$

Читатель без труда выпишет, как будут выглядеть в данном конкретном случае все остальные условия на $\varphi(\alpha, h)$ (типа (16), (17) и др.), которые встречались в настоящей статье.

6. Заключительные замечания

6.1. В данной работе изложен ряд результатов о свойствах ВПБДФ определенной структуры, а также некоторых операторов

в них. Вместе с тем остались нерешенными многие (частично упоминавшиеся в тексте) задачи теории этих пространств, из которых наиболее важной является, пожалуй, задача о реализации сильных сопряженных к вышерассмотренным ВПБДФ. Например, если $\mathcal{G}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^p, p \geq 1$, и $H = \mathcal{E}_{\varphi,g}^{m,h}(\mathcal{G})$, где $m \in \mathbb{N}_0, h \in (0, +\infty)$, а функции φ, g удовлетворяют предположениям п. 1.1, то существует B -пространство H'_β линейных непрерывных на H функционалов с нормой $\|y\|_{m,h} := \sup[|y(v)| : y \in H', \|v\|_h^m \leq 1]$. Далее, если $H = \mathcal{E}_{\varphi,g}^h(\mathcal{G}) = \text{proj}_{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h,m}(\mathcal{G})$, то H — полное отделимое счетно-нормированное пространство, и согласно [2, гл. XI], $H'_\beta = \text{ind}_{m \rightarrow \infty} (\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h,m}(\mathcal{G}))'_\beta$. Аналогично, если $d \in [0, +\infty)$, то $(\mathcal{E}_{\varphi,g}^d(\mathcal{G}))'_\beta = \text{ind}_{h_n \uparrow d} (\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_n}(\mathcal{G}))'_\beta$. Наконец, если $d \in (0, +\infty]$, то в предположениях п. 1.1

$$\mathcal{E}_{\{\varphi,g\}}^d(\mathcal{G}) = \text{ind}_{0 < h_n \uparrow d} \mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_n}(\mathcal{G}),$$

$$(\mathcal{E}_{\{\varphi,g\}}^d(\mathcal{G}))'_\beta = \text{proj}_{0 < h_n \uparrow d} (\mathcal{E}_{\varphi,g}^{h_n}(\mathcal{G}))'_\beta.$$

Однако эти представления H'_β не слишком обозримы и поэтому мало пригодны для исследования разрешимости в ВПБДФ различных линейных функциональных уравнений и прежде всего уравнений свертки и типа свертки, а также систем таких уравнений. В этих вопросах очень полезной оказывается реализация пространства H'_β посредством преобразования Бореля — Лапласа:

$$y \in H' \rightarrow y(\exp i\langle \mu, x \rangle_p), \quad \mu \in \mathbb{R}^p,$$

в виде пространства целых функций p комплексных переменных, с определенной (индуцированной из H') топологией. Однако обоснование такой реализации является, как правило, весьма трудоемким и занимает довольно много места, и мы уже не можем остановиться здесь на этом, рассчитывая в будущем посвятить этой тематике отдельную статью.

6.2. В заключение приведем некоторые замеченные в статье [7] опечатки, которые могут затруднить ее чтение.

1. В доказательстве леммы 1.2 (с. 95, 10-я строка снизу) вместо f_{h_s} должно быть f_{ℓ_s} .

2. На с. 121, 13-я сверху строка, вместо ссылки на статью Ю. Ф. Коробейника, которая помещена в списке литературы под номером 10 и которая используется в других местах этой работы, должна быть ссылка на известный учебник Л. Шварца [Лоран Шварц. Анализ. Том I.—М.: Мир. 1972. 824 с.]. Эта книга в списке литературы к [7] по недосмотру отсутствует, но используется именно ее формула (36₂) из § 6 гл. 3.

3. На с. 122, 4-я строка сверху, вместо (23) должно быть (22).

4. На с. 122, 7-я строка сверху, в условии (24) вместо $(\forall h_1 > d)(\exists h \in (d, h_1))$ должно быть $(\forall h_1 > 0)(\exists h \in (0, h_1))$.

5. В следствии на с. 128 (4-я строка снизу, утверждение 1) вместо $A_2(\mathcal{E}_1; \mathcal{E}_{(M)}^d(G))$ должно быть $A_2(T\mathcal{E}_1; \mathcal{E}_{(M)}^d(G))$.

6. На с. 133, 9-я строка снизу, вместо [12, 13] должно быть [13, 14].

7. В свойстве в) на с. 134, 5-я снизу строка, вместо $(\forall h_1 \in (0, +\infty))$ должно быть $(\forall h_1 \in [h_2, +\infty))$.

Литература

1. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства.—М.: Мир.—1967.—256 с.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах.—М.: ГИФМЛ.—1959.—684 с.
3. Коробейник Ю. Ф. Об одной двойственной задаче. I. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше // Мат. сборник.—1975.—Т. 97, № 2.—С. 193–229.
4. Райков Д. А. О двух классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Тр. семинара по функц. анализу.—Воронеж, 1957.—Вып. 5.—С. 22–34.
5. Жаринов В. В. Компактные семейства ЛВП в пространствах FS и DFS // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, вып. 4.—С. 97–131.
6. Абанин А. В. О свойстве (Y_0) // Изв. СКНЦВШ Естеств. науки.—1981.—№ 4.—С. 31–32.
7. Коробейник Ю. Ф. О некоторых общих классах бесконечно дифференцируемых функций многих вещественных переменных // В сб.: Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2004.—С. 90–140.
8. Коробейник Ю. Ф. О некоторых пространствах функций, бесконечно дифференцируемых в открытом множестве из $\mathbb{R}^p$ // Изв. вузов. Математика.—2005.—№ 3.—С. 31–41.
9. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1071 с.
10. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—257 с.

11. Шварц Л. Анализ. Том I.—М.: Мир, 1972.—824 с.
12. Макаров Б. М. Об индуктивных пределах нормированных пространств. // Докл. АН СССР.—1958.—Т. 119, № 6.—С. 1092–1094.
13. Макаров Б. М. Об индуктивных пределах нормированных пространств. // Вестник ЛГУ.—1965.—Т. 13, вып. 3.—С. 171–178.
14. Мелихов С. Н. Некоторые вопросы теории линейных операторов в пространствах числовых последовательностей: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, 1986.—138 с.
15. Мелихов С. Н. Об абсолютно сходящихся рядах в канонических индуктивных пределах // Мат. заметки.—1986.—Т. 39, вып. 6.—С. 877–886.

Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет;
Владикавказ, Институт прикладной математики и информатики ВЦ РАН
E-mail: kor@math.rsu.ru

О БАЗИСАХ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Ф. И. Никишин

Проблема существования базисов в различных функциональных пространствах привлекала внимание математиков в течение всего XX-го столетия. Одной из работ, освещающей ряд аспектов данной тематики является известная статья Б. С. Митягина [1], в которой, в числе многих других результатов, была доказана базисность различных систем специальных функций в классических пространствах $C^\infty[-1; 1]$, $C_0^\infty[-1; 1]$, S и $C^\infty(\mathbb{R})$. Цель данной работы — найти достаточные условия на вес, при выполнении которых аналоги этих результатов сохраняются в случае весовых пространств ультрадифференцируемых функций.

Пусть $\omega : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ — непрерывная неубывающая функция, удовлетворяющая условиям:

(α) существует $K \geq 1$ такое, что $\omega(2t) \leq K(1 + \omega(t))$, $t \geq 0$;

(β) $\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2} dt < \infty$;

(γ) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+t)}{\omega(t)} = 0$;

(δ) $\varphi_\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\varphi_\omega(t) = \omega(e^t)$ — выпуклая функция.

Такая функция ω называется весовой в смысле Брауна — Майзе — Тейлора, или просто Б.-М.-Т.-весом. Примеры Б.-М.-Т.-весов можно найти в [2].

Набор Б.-М.-Т.-весов $\Omega = \{\omega_p\}_{p=1}^\infty$ будем называть весовой последовательностью, если выполняется условие:

$$(\forall p \in \mathbb{N})(\exists C_p \geq 0) \quad \omega_{p+1}(x) \geq \omega_p(x) + \ln(1+x) + C_p, \quad x \geq 0. \quad (1)$$

Для каждой функции $\varphi_p(x) = \omega_p(e^x)$ определим ее сопряженную по Юнгу $\varphi_p^* : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_p^*(x) = \sup_{t \geq 0} (xt - \varphi_p(t))$. Отметим, что φ_p^* не убывает на $[0; +\infty)$ и справедливо равенство $\varphi_p^{**}(x) = \varphi_p(x)$.

Далее будем рассматривать следующие пространства ультрадифференцируемых функций:

$$\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1] = \left\{ f \in C^\infty[-1; 1] : \right. \\ \left. (\forall p \in \mathbb{N}) \|f\|_p = \sup_{j \geq 0} \sup_{|x| \leq 1} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{\varphi_p^*(j)}} < \infty \right\};$$

$$\mathcal{D}_{(\Omega)}[-1; 1] = \left\{ f \in C^\infty[-1; 1] : \right. \\ \left. \text{supp } f \subset [-1; 1], (\forall p \in \mathbb{N}) \|f\|_p < \infty \right\};$$

$$S_{(\Omega)} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \right. \\ \left. (\forall p \in \mathbb{N}) |f|_p = \sup_{j \geq 0} \sup_{0 \leq k \leq j} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{(1 + |x|)^j |f^{(k)}(x)|}{e^{\varphi_p^*(j)}} < \infty \right\};$$

$$\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : (\forall p \in \mathbb{N}) \|f\|_p' = \sup_{j \geq 0} \sup_{|x| \leq p} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{\varphi_p^*(j)}} < \infty \right\}.$$

Естественная топология пространства Фреше в каждом из них задается соответствующим набором преднорм: $\|\cdot\|_p$, $|\cdot|_p$ или $\|\cdot\|_p'$ ($p \in \mathbb{N}$).

Аналогично вводятся пространства $\mathcal{E}_{(\Omega)}[a; b]$ и $\mathcal{D}_{(\Omega)}[a; b]$ на любом отрезке $[a; b]$.

Основной результат данной работы состоит в следующем.

Теорема 1. Пусть весовая последовательность $\Omega = \{\omega_p\}_{p=1}^\infty$ удовлетворяет условию

$$(\forall p \in \mathbb{N})(\exists q \in \mathbb{N})(\exists C_p \geq 0) \quad \omega_p(x^2) \leq \omega_q(x) + C_p, \quad x \geq 0. \quad (2)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) система полиномов Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $n \geq 0$, образует базис в пространстве $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$;

2) система функций Эрмита $h_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot (e^{-x^2})^{(n)}$, $n \geq 0$, образует базис в пространстве $S_{(\Omega)}$;

- 3) пространства $S_{(\Omega)}$ и $\mathcal{D}_{(\Omega)}[-1; 1]$ изоморфны;
 4) существует линейный непрерывный оператор продолжения из $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$ в $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-2; 2]$;
 5) в пространстве $\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R})$ существует базис, который можно выписать в явном виде.

◁ Подробные обоснования утверждений 1)–5) весьма громоздки, поэтому мы опустим ряд технических деталей и сосредоточимся на общей схеме. Отметим лишь, что в приведенных ниже рассуждениях важную роль играют следующие соотношения. Во-первых, из условия (β) в определении весовой функции вытекает, что для любого Б.-М.-Т.-веса ω найдется постоянная $C_\omega > 0$ такая, что

$$x \ln \frac{x}{e} \leq \varphi_\omega^*(x) + C_\omega, \quad x \geq 1. \quad (3)$$

Во-вторых, условие (2) можно записать в эквивалентной форме:

$$(\forall p \in \mathbb{N})(\exists q \in \mathbb{N})(\exists C_p \geq 0) \quad \varphi_p^*(x) \geq \varphi_q^*(2x) - C_p, \quad x \geq 0.$$

Наконец, в-третьих, при выполнении условия (2) в пространстве $S_{(\Omega)}$ можно ввести новую систему преднорм

$$|f|_p = \sup_{j \geq 0} \sup_{0 \leq k, l \leq j} \left(\int_{\mathbb{R}} |x^l f^{(k)}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\varphi_p^*(j)}, \quad p \geq 1,$$

эквивалентную исходному набору.

Перейдем теперь непосредственно к схеме обоснования утверждений 1)–5).

1): Доказательство базисности полиномов Чебышева в пространстве $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$ сводится к проверке условий теоремы Дынина — Митягина (см. [1]) для элементов предполагаемого базиса $T_n(x)$ и коэффициентов функционалов

$$\xi_n : \mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad n \geq 0.$$

Ясно, что при каждом $n \geq 0$ функционал ξ_n линеен и непрерывен. Элементарные вычисления показывают, что $\xi_n(T_n) = 1$ при всех

$n \geq 0$ и $\xi_n(T_k) = 0$ при $n \neq k$. Кроме того, последовательность $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ тотальна: если $\xi_n(f) = 0$ при всех $n \geq 0$, то $f = 0$. Последнее вытекает из критерия полноты Банаха и того факта, что система полиномов Чебышева полна в весовом пространстве $L_2^h[-1; 1]$, где $h(x) = \frac{2}{\pi}(1 - x^2)^{-1/2}$.

Получим оценку сверху для сопряженных норм функционалов

$$|\xi_n|_{-s} = \sup\{ |\xi_n(f)| : \|f\|_s \leq 1 \}, \quad s \geq 1.$$

Многократное применение формулы интегрирования по частям для $\xi_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos x) \cos nx \, dx$ дает оценку

$$|\xi_n(f)| \leq \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^m} \int_0^{\pi} \left| \frac{d^m}{dx^m} (f(\cos x)) \right| dx,$$

верную при всех $m \geq 0$. Оценивая с помощью формулы Фа-ди-Бруно и обобщенной формулы бинома Ньютона (см. [3]) подынтегральное выражение, приходим к неравенству

$$|\xi_n(f)| \leq 2e^e \frac{1}{n^m} m! e^{\varphi_s^*(m)} \|f\|_s,$$

справедливому при всех $m \geq 0$ и $s \geq 1$. Отсюда

$$|\xi_n|_{-s} \leq \inf_{m \geq 0} \left(2e^e \frac{1}{n^m} m! e^{\varphi_s^*(m)} \right), \quad s \geq 1.$$

Оценив $m!$ с помощью (3) и выбрав подходящую постоянную $A_s > 0$, последнее неравенство можно продолжить:

$$|\xi_n|_{-s} \leq A_s \exp \left\{ -2\omega_s \left(\sqrt{\frac{n}{e}} \right) + 2 \ln \sqrt{\frac{n}{e}} \right\}, \quad s \geq 1. \quad (4)$$

Теперь не составляет труда убедиться в выполнении основного условия Дынина — Митягина:

$$(\forall p \in \mathbb{N})(\exists s \in \mathbb{N})(\exists C > 0) \quad \|T_n\|_p \cdot |\xi_n|_{-s} \leq C, \quad n \geq 0.$$

В самом деле, из неравенства Маркова для алгебраических полиномов (см. [4]) вытекает, что

$$(\forall p \in \mathbb{N}) \quad \|T_n\|_p \leq e^{\omega_p(n^2)}, \quad n \geq 0. \quad (5)$$

Тогда из (4) и (5) получаем оценку:

$$\|T_n\|_p \cdot |\xi_n|_{-s} \leq A_s \exp \left\{ \omega_p(n^2) - 2\omega_s\left(\sqrt{\frac{n}{e}}\right) + 2 \ln \sqrt{\frac{n}{e}} \right\}.$$

Из (2) следует существование таких $q \in \mathbb{N}$ и $C_p \geq 0$, что

$$\|T_n\|_p \cdot |\xi_n|_{-s} \leq A_s \exp \left\{ \omega_q(n) + C_p - 2\omega_s\left(\sqrt{\frac{n}{e}}\right) + 2 \ln \sqrt{\frac{n}{e}} \right\}.$$

Возьмем $s = q + 1$. Тогда, применяя (1) и учитывая неубывание на $[0; +\infty)$ Б.-М.-Т.-весов ω , получаем требуемое.

Итак, все условия теоремы Дынина — Митягина выполнены, а значит, базисность полиномов Чебышева в $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$ доказана.

2): Базисность функций Эрмита $h_n(x)$, $n \geq 0$, в пространстве $S_{(\Omega)}$ доказывается аналогично. Получение оценок сверху норм элементов предполагаемого базиса и сопряженных норм коэффициентных функционалов $\varphi_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)h_n(x) dx$ основано на следующих рекуррентных соотношениях (см. [4]):

$$\begin{aligned} h'_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}h_{n-1}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n+1}h_{n+1}(x), \quad n \geq 1; \\ xh_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}h_{n-1}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n+1}h_{n+1}(x), \quad n \geq 1; \\ H'_n(x) &= 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

где $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$ — многочлен Эрмита.

3): Топологический изоморфизм пространств $S_{(\Omega)}$ и $\mathcal{D}_{(\Omega)}[-1; 1]$ реализуется оператором

$$T : \mathcal{D}_{(\Omega)}[-1; 1] \rightarrow S_{(\Omega)}, \quad (Tf)(x) = f\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right).$$

Строгое обоснование этого факта заключается в воспроизведении доказательства изоморфизма классических пространств $C_0^\infty[-1; 1]$ и S с учетом специфики ультрадифференцируемого случая.

Отметим, что изоморфизм $S_{(\Omega)} \simeq \mathcal{D}_{(\Omega)}[-1; 1]$ и базисность $h_n(x)$, $n \geq 0$, в $S_{(\Omega)}$ обеспечивают базисность в $D_{(\Omega)}[-1; 1]$ системы функций $h_n(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}x)$, $n \geq 0$.

4): Укажем способ конструктивного построения линейного непрерывного оператора продолжения $M : \mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1] \rightarrow \mathcal{E}_{(\Omega)}[-2; 2]$ реализуя идею, предложенную авторами [5]. Основным инструментом решения этой задачи являются специальные функции с компактными носителями из $\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R})$.

Используя соображения изложенные в [6], можно показать, что для каждой весовой последовательности Ω существует отличная от тождественного нуля функция $h \in \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R})$, носитель которой $\operatorname{supp} h$ содержится в отрезке $[-1; 1]$ и $\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = 1$. С помощью h для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать функцию $g_\varepsilon \in \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R})$ такую, что $g_\varepsilon(x) = 1$ на $[-1; 1]$ и $g_\varepsilon(x) = 0$, если $|x| > 1 + \varepsilon$. (Достаточно положить $g_\varepsilon(x) = (h_\delta * \chi_a)(x)$, где $a > 0$ и $\delta > 0$ — числа, определяемые заданным ε , $h_\delta(x) = \frac{1}{\delta} h(\frac{x}{\delta})$, $\chi_a(x)$ — характеристическая функция сегмента $[-a; a]$.) Введем специальную последовательность $\{\tilde{g}_n(x)\}_{n=1}^\infty$, где $\tilde{g}_n(x) = g_{\frac{1}{n^2}}(x)$. Ясно, что $\tilde{g}_n(x) = 1$ на $[-1; 1]$ и $\operatorname{supp} \tilde{g}_n \subset [-1 - \frac{1}{n^2}; 1 + \frac{1}{n^2}]$. Теперь все готово для построения оператора продолжения.

Поскольку выполнение условия (2) гарантирует базисность полиномов Чебышева в $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$, каждая функция $f \in \mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$ представима в виде сходящегося по топологии $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$ ряда:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(f) \cdot T_n(x).$$

Оператор $M : \mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1] \rightarrow \mathcal{E}_{(\Omega)}[-2; 2]$ определим следующим образом: $(Mf)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(f) \cdot \tilde{T}_n(x)$, $x \in [-2; 2]$, где $\tilde{T}_0(x) = T_0(x)$, $\tilde{T}_n(x) = T_n(x) \cdot \tilde{g}_n(x)$, $n \geq 1$. Корректность такого определения, как и непрерывность оператора M , вытекают из свойств функций $\tilde{g}_n(x)$,

неравенства Маркова и известной оценки полиномов Чебышева вне сегмента $[-1; 1]$ (см. [4]):

$$|T_n(x)| \leq \left(|x| + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n, \quad |x| \geq 1, \quad n \geq 0.$$

Из свойств функций $\tilde{g}_n(x)$ также вытекает, что $\tilde{T}_n(x) = T_n(x)$ на $[-1; 1]$. Следовательно, M действительно является оператором продолжения.

5): Для доказательства существования базиса в $\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R})$ достаточно воспроизвести схему Митягина (см. [1]), заменяя всюду классические пространства $C^\infty[-1; 1]$, $C_0^\infty[-1; 1]$, S и $C^\infty(\mathbb{R})$ на их ультрадифференцируемые аналоги.

Пусть $l_0(x) \in \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R})$ — функция с носителем в $[-1 - \frac{1}{4}; 1 + \frac{1}{4}]$ такая, что $l_0(x) = 1$ на $[-1; 1]$, а M — построенный в предыдущем пункте оператор продолжения на отрезок $[-2; 2]$. Введем оператор

$$\widehat{M} : \mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1] \rightarrow \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}),$$

$$(\widehat{M}f)(x) = \begin{cases} (Mf)(x)l_0(x), & x \in [-2; 2], \\ 0, & x \notin [-2; 2], \end{cases}$$

продолжающий функции из $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$ на всю вещественную ось. Далее, для целых чисел k, l, n и вещественного числа b определим операторы:

$$F_k : \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}_{(\Omega)}[2k - 1; 2k + 1], \quad f \mapsto f|_{[2k-1; 2k+1]} \text{ — сужение};$$

$$U_b : \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}), \quad (U_b f)(x) = f(x - b) \text{ — сдвиг};$$

$$M_n : \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}), \quad M_n = U_{4n} \widehat{M} F_0 U_{-4n};$$

$$P : \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}), \quad Pf = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} M_n f;$$

$$Q : \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}), \quad Qf = f - Pf;$$

$$N_l : \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}),$$

$$(N_l f)(x) = \begin{cases} (F_{2l-1} Qf)(x), & x \in [4l - 3; 4l - 1], \\ 0, & x \notin [4l - 3; 4l - 1]. \end{cases}$$

Все эти отображения определены корректно, линейны и непрерывны. Учитывая закон действия операторов M_n и N_l , легко проверить, что образ каждого M_n изоморфен $\mathcal{E}_{(\Omega)}[4n-1; 4n+1]$, а образ каждого N_l совпадает с $\mathcal{D}_{(\Omega)}[4l-3; 4l-1]$. Кроме того, для любой функции $f \in \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R})$ имеет место разложение:

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} M_n f + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} N_l f.$$

Последнее означает, что пространство $\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R})$ изоморфно прямому произведению следующих пространств:

$$\dots \times \mathcal{D}_{(\Omega)}[-3; -1] \times \mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1] \times \mathcal{D}_{(\Omega)}[1, 3] \times \dots,$$

каждое из которых имеет базис. А значит, базисом обладает и пространство $\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R})$. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В частном случае, когда весовая последовательность Ω состоит из функций $\omega_p(x) = p\omega(x)$, $p \geq 1$, где ω — некоторый Б.-М.-Т.-вес, пространства $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$, $\mathcal{D}_{(\Omega)}[-1; 1]$ и $\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R})$ представляют собой обычные пространства ультрадифференцируемых функций типа Берлинга, изучавшиеся в [2] и [7]. Условие (2) при этом принимает вид:

$$(\exists A > 0) \quad \omega(x^2) \leq A(\omega(x) + 1), \quad x \geq 0, \quad (6)$$

что согласуется с результатами работы [7]. Отметим, что известны примеры Б.-М.-Т.-весов как подчиненных условию (6) ($\omega(x) = \ln^\beta(1+x)$, $\beta > 1$), так и не удовлетворяющих ему ($\omega(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$).

Литература

1. Митягин Б. С. Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах // Успехи мат. наук.—1961.—Т. XVI, вып. 4 (100).—С. 63–132.
2. Braun R. W., Meise R., Taylor B. A. Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Result. Math.—1990.—V. 17.—P. 206–237.
3. Зобин Н. М., Крейн С. Г. Математический анализ гладких функций.—Воронеж: Изд-во ВГУ, 1978.—143 с.

4. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены.—М.: Наука, 1979.—416 с.
5. Kondakov V. P., Zaharjuta V. P. On bases in spaces of infinitely differentiable functions on special domains with cusp // *Note di Matematica*.—1992.—V. XII.—P. 99–106.
6. Абанин А. В. Банаховы пространства пробных функций в обобщенном подходе Берлинга — Бьорка // В сб.: Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2004.—С. 15–32.
7. Абанин А. В., Никишин Ф. И. Базисы в пространствах ультрадифференцируемых функций типа Берлинга // Тр. участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова, Абрау-Дюрсо, 5–11 сентября 2004 г.—Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2004.—С. 75–76.

Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет
E-mail: filipp_nikishin@mail.ru

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ
ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ВЫМЕТАНИЕБ. Н. Хабибуллин¹

Введение

Данная статья представляет собой изложение подготовленного для Международной конференции «Теория операторов. Комплексный анализ. Математическое моделирование» (Волгодонск, 5–9 сентября 2005) фрагмента доклада. В докладе в сжатой форме в терминах выметания линейных функционалов и двойственного представления суперлинейных функционалов на проективном пределе векторных решеток была дана абстрактная трактовка ряда задач теории функций комплексных переменных (см. [1–4]), включающих в себя описание множеств (не)единственности и нулевых множеств в весовых пространствах голоморфных функций. Там же предполагалось, но не удалось изложить в полном объеме движение в обратном направлении: абстрактной постановке упомянутых задач придать форму, более тесно и явно связанную с их теоретико-функциональной природой. За этой общей схемой закреплялось название *метода выметания*.

Здесь излагается только «легкая» часть метода выметания, позволяющая находить для конкретных весовых пространств голоморфных функций бесконечные наборы достаточных условий для множеств единственности и необходимых условий для нулевых множеств. Применения к значительно более трудным, как правило, задачам получения нетривиальных необходимых условий для множеств единственности или достаточных условий для нулевых множеств здесь не затрагиваются, поскольку их изложение потребовало бы весьма существенного увеличения объема статьи. По той же причине

¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 03-01-00033, и государственной программы РФ «Поддержка ведущих научных школ», грант НШ-1528.2003.1.

в данной работе не рассматриваются задачи представления мероморфных функций как частного голоморфных функций из определенных весовых пространств, несмотря на то, что метод выметания хорошо зарекомендовал себя при решении таких задач (см. обзор [5]).

1. Основные понятия, постановки задач и выметание

Далее $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — классы всех натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел или их геометрические интерпретации.

Пусть Ω — область в n -мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Через $\text{Hol}(\Omega)$ обозначаем векторное пространство над $\mathbb{C}$ всех голоморфных в Ω функций. Пусть $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ — расширенная вещественная ось с естественной упорядоченностью и очевидными алгебраическими операциями при неопределенности для $(+\infty) - (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, но при соглашении $0 \cdot (\pm\infty) = 0$. По функции $M: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ введем класс

$$\text{Hol}(\Omega, M) := \left\{ f \in \text{Hol}(\Omega) : \sup_{z \in \Omega} |f(z)| \exp(-M(z)) < +\infty \right\}. \quad (1)$$

Положительным дивизором на Ω (см. [6; гл. IV]) называем функцию $\Lambda: \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ с носителем $\text{supp } \Lambda$, являющимся аналитическим множеством чистой коразмерности 1, непрерывную на множестве всех регулярных точек из $\text{supp } \Lambda$. Для $f \in \text{Hol}(\Omega)$ функция $\text{Zero}_f: \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, равная кратности нуля функции f в каждой точке из Ω , — *дивизор нулей* функции f на Ω . Если вторая проблема Кузена разрешима в области Ω , то для любого положительного дивизора Λ (пишем $\Lambda \geq 0$) найдется функция $f_\Lambda \in \text{Hol}(\Omega)$ с дивизором нулей $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$. Всякую такую функцию f_Λ будем называть *определяющей функцией дивизора* Λ . Если для дивизора $\Lambda \geq 0$ на Ω в некотором классе $L \subset \text{Hol}(\Omega)$ найдется определяющая функция дивизора Λ , то Λ — *дивизор нулей для* L . При дополнительном условии замкнутости L относительно вычитания дивизор $\Lambda \geq 0$ на Ω называем *дивизором неединственности для* L , если существует ненулевая функция $f \in L$ с дивизором нулей $\text{Zero}_f \geq \Lambda$ на Ω ; в противном случае Λ — *дивизор единственности для* L .

В случае $n = 1$, т. е. на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, вторая проблема Кузена разрешима в любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, а аналитические

множества в Ω — это дискретные множества без предельных точек в Ω . Поэтому каждому положительному дивизору Λ можно сопоставить последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ из Ω , в которой каждая точка $\lambda \in \Omega$ встречается ровно $\Lambda(\lambda)$ раз. Такую последовательность обозначаем тем же символом Λ , что и дивизор. Обратно, по каждой последовательности точек $\Lambda = \{\lambda_k\}$ без точек сгущения в Ω однозначно строится положительный дивизор Λ , равный в каждой точке $\lambda \in \Omega$ числу повторений этой точки λ в последовательности Λ . Для взаимно однозначного соответствия между дивизорами и последовательностями, отходя от традиционного понимания последовательности как функции натурального или целого аргумента, две последовательности считаются равными, если тождественно равны соответствующие им дивизоры. Естественно, в случае $n = 1$ вместо дивизора нулей и дивизора (не)единственности будем вести речь о последовательности нулей и последовательности (не)единственности.

Рассматриваются следующие две задачи:

Задача 1 (о нулевых дивизорах). *При каких условиях дивизор $\Lambda \geq 0$ на области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ — дивизор нулей для $\text{Hol}(\Omega, M)$ из (1)?*

Задача 2 (о дивизорах неединственности). *При каких условиях дивизор $\Lambda \geq 0$ на Ω — дивизор неединственности для $\text{Hol}(\Omega, M)$?*

В терминах определяющей дивизор Λ функции f_Λ этим двум задачам можно придать единую трактовку: *при каких условиях найдется функция-мультипликатор $g_0 \in \text{Hol}(\Omega)$, без нулей в Ω для задачи 1 и ненулевая для задачи 2, с которой $f_\Lambda g_0 \in \text{Hol}(\Omega, M)$?* По определению (1) пространства $\text{Hol}(\Omega, M)$ существование требуемой функции-мультипликатора g_0 означает выполнение неравенства $\log |f_\Lambda| + \log |g_0| \leq M + C$ на Ω , где C — постоянная. Постоянную C всегда можно «внести» в функцию g_0 , если перейти к неравенству

$$\log |f_\Lambda| + \log |g| \leq M, \quad (2)$$

где $g := g_0 e^{-C}$ по-прежнему не имеет нулей в Ω для задачи 1 и ненулевая для задачи 2. Поскольку в данной статье будет рассматриваться только более легкая проблема поиска необходимых условий по задачам 1 и 2, то допустимо ослаблять условия на искомую функцию g , но не слишком сильно, чтобы не скатиться до тривиальности. Так, требование отсутствия нулей у функции g можно осла-

бить до условия плюригармоничности и даже гармоничности функции $h := \log |g|$ на Ω по задаче 1 (при $n = 1$ плюригармоничность = гармоничность) или соответственно плюрисубгармоничности и даже просто субгармоничности для h на Ω по задаче 2 (при $n = 1$ плюрисубгармоничность = субгармоничность). Обобщенной форме задач 1 и 2 можно придать, несколько ослабляя требования, абстрактную трактовку, если неравенство (2) переписать в виде

$$h := \log |g| \leq M - \log |f_\Lambda| =: x. \quad (3)$$

Здесь можно считать, что x — это элемент упорядоченного множества X с отношением порядка $\leq$, а выясняются условия существования элемента $h \leq x$ из некоторого заранее оговоренного подмножества $H \subset X$. Для фиксированного функционала $\delta: H \rightarrow \mathbb{R}$ рассмотрим величину $\sup\{\delta(h): h \leq x, h \in H\}$ (ср. с [7; III.1.3. V–VI]). Тогда существование элемента $h \in H$, для которого, как в (3), $h \leq x$, эквивалентно условию $-\infty < \sup\{\delta(h): h \leq x, h \in H\}$, поскольку для пустого подмножества $\emptyset \subset \mathbb{R}_\infty$ имеем $\sup \emptyset := -\infty$, $\inf \emptyset := \infty$. Для двойственной интерпретации последней трактовки дадим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $(X, \leq)$ — упорядоченное множество с отношением порядка $\leq$, $x \in X$, $H \subset X$ и $\delta: H \rightarrow \mathbb{R}$ — функционал на H . Возрастающий функционал μ на упорядоченном множестве $H \cup \{x\}$ с индуцированным из X отношением порядка $\leq$ и со значениями в $\mathbb{R}_\infty$ называем *выметанием функционала δ относительно H и x* , если $\delta(h) \leq \mu(h)$ для любого $h \in H$. Обозначаем это как $\delta \prec_H^x \mu$.

Определение выметания функционала здесь отличается от определения в [7; III.2.1. V] (ср. с понятием положительного роста) и близко к определению из [8; гл. XI, § 3, O41]. Основой применения выметания к получению необходимых условий в задачах 1 и 2 является следующее элементарное

Предложение 1. Пусть $(X, \leq)$ — упорядоченное множество, $H \subset X$, $x \in X$ и $\delta: H \rightarrow \mathbb{R}$ — функционал на H . Тогда

$$\sup\{\delta(h): h \leq x, h \in H\} \leq \inf\{\mu(x): \delta \prec_H^x \mu\}. \quad (4)$$

В частности, для существования $h \in H$, удовлетворяющего неравен-

ству $h \leq x$, необходимо, чтобы для любого фиксированного функционала $\delta: H \rightarrow \mathbb{R}$ выполнялось соотношение $\inf\{\mu(x): \delta \prec_H^x \mu\} > -\infty$.

◁ Если левая часть в (4) равна $-\infty$, то неравенство (4) очевидно. Если же она конечна, то существуют элемент $h \in H$, удовлетворяющий неравенству $h \leq x$. Действуя на $h \in H$ произвольным выметанием μ функционала δ относительно H и x , получаем $\delta(h) \leq \mu(h)$, а затем, в силу возрастания μ , $\mu(h) \leq \mu(x)$. Отсюда правая часть в (4) не меньше $\delta(h)$ при $h \leq x$, и (4) доказано.

Заключительное утверждение — очевидное следствие (4). ▷

ЗАМЕЧАНИЕ. По поводу возможности поставить знак равенства в (4) можно обратиться, например, к [7; III.1.3. VII], [1; теоремы 2, 3], [9; Введение, 2°, теорема Хёрмандера], [3; теоремы 5.1, 6.1], [8; гл. XI, § 3, T46], но здесь эти результаты нам не потребуются.

В следующем параграфе адаптируем предложение 1 для прямого применения к задачам 1 и 2.

2. Возвращение к дивизорам нулей и дивизорам неединственности

Пусть $S \subset \mathbb{C}^n$, а $\mathbb{R}_\infty^S$ — множество всех функций на S со значениями в $\mathbb{R}_\infty$ и отношением порядка $(f \leq g) \iff (f(z) \leq g(z) \text{ во всех точках } z \in S)$. Через $\mathcal{M}(S)$ обозначаем множество всех вещественных борелевских регулярных мер на борелевском множестве S ; $\mathcal{M}^+(S)$ — подконус в $\mathcal{M}(S)$, состоящий из положительных мер; $\mathcal{M}_c^+(S)$ — подконус в $\mathcal{M}^+(S)$ из мер с компактным носителем в S .

Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^n$. Не умаляя общности, всюду далее будем считать, что область Ω содержит начало координат, т. е. $0 \in \Omega$.

Через $\text{sh}(\Omega)$ обозначаем выпуклый конус всех субгармонических функций на Ω , а $\text{h}(\Omega) \subset \text{sh}(\Omega)$ — пространство всех гармонических функций в Ω . Через $\text{psh}(\Omega)$ обозначаем выпуклый конус всех плюри-субгармонических функций на Ω , а $\text{ph}(\Omega) \subset \text{psh}(\Omega)$ — пространство всех плюригармонических функций в Ω .

В качестве упорядоченного множества X из § 1 выберем $\mathbb{R}_\infty^\Omega$. В роли $H \subset \mathbb{R}_\infty^\Omega$ рассматриваем пространства $\text{ph}(\Omega)$ или $\text{h}(\Omega)$ по задаче 1, а также выпуклые конусы $\text{psh}_0(\Omega) := \{h \in \text{psh}(\Omega): h(0) \neq -\infty\}$ или $\text{sh}_0(\Omega) := \{h \in \text{sh}(\Omega): h(0) \neq -\infty\}$ по задаче 2. Функционалом δ

в определении 1 назовем меру Дирака δ_0 , т. е. вероятностную меру с носителем в нуле, которую можно трактовать как функционал на

$$\begin{array}{ccc} \text{sh}_0(\Omega) & \supset & \text{h}(\Omega) \\ \cup & & \cup \\ \text{psh}_0(\Omega) & \supset & \text{ph}(\Omega), \end{array} \quad (5)$$

действующий по правилу $\delta_0(h) = h(0) = \int h d\delta_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 ([10–12]). Мера $\mu \in \mathcal{M}_c^+(\Omega)$ называется *мерой* (соответственно *плюримерой*) *Аренса — Зингера* в области Ω для точки 0, если

$$h(0) \leq \int h d\mu \quad (6)$$

для каждой функции $h \in \text{h}(\Omega)$ (соответственно $h \in \text{ph}(\Omega)$). Если (6) выполнено для всех $h \in \text{sh}_0(\Omega)$ (соответственно $h \in \text{psh}_0(\Omega)$), то μ — *мера* (соответственно *плюримера*) *Йенсена* в области Ω для точки 0.

Через $\mathcal{AS}(\Omega)$ и $\mathcal{J}(\Omega)$ (соответственно $\mathcal{PAS}(\Omega)$ и $\mathcal{PJ}(\Omega)$) обозначаем класс всех мер (соответственно плюример) Аренса — Зингера и Йенсена в Ω для нуля.

В силу (5) очевидны включения

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{PAS}(\Omega) & \supset & \mathcal{AS}(\Omega) \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{PJ}(\Omega) & \supset & \mathcal{J}(\Omega) \end{array}$$

— всегда строгие за исключением верхней и нижней строк, где при $n = 1$ и только в этом случае имеют место равенства.

Для $\mu \in \mathcal{M}_c^+(\Omega)$ отображение $F \mapsto \int_* F d\mu \in \mathbb{R}_\infty$, где $F \in \mathbb{R}_\infty^\Omega$ и $\int_*$ — нижний интеграл, задает возрастающий функционал на $\mathbb{R}_\infty^\Omega$ (см. [13; § 2.4]). Пусть теперь в роли элементов $x \in X$ из предыдущего параграфа выступают функции $F \in \mathbb{R}_\infty^\Omega$. (Плюри)меры Аренса — Зингера и Йенсена — частный случай выметания из определения 1, если рассматривать нижние интегралы по ним как функционалы на $\mathbb{R}_\infty^\Omega$. Так, если $\mu \in \mathcal{AS}(\Omega)$ (соответственно $\mu \in \mathcal{J}(\Omega)$, $\mu \in \mathcal{PAS}(\Omega)$, $\mu \in \mathcal{PJ}(\Omega)$), то $\delta_0 \prec_H^F \mu$ для любой функции $F \in \mathbb{R}_\infty^\Omega$, где $H = \text{h}(\Omega)$ (соответственно $H = \text{sh}_0(\Omega)$, $H = \text{ph}_0(\Omega)$, $H = \text{psh}_0(\Omega)$). В связи с задачами 1 и 2 наибольший интерес здесь представляют функции F , заданные в виде (см. (2))

$$F := M - u, \quad M: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad u \in \text{sh}(\Omega). \quad (7)$$

В этих соглашениях заключительная часть предложения 1 дает

Предложение 2. Если для функций M и u из (7) при некоторой функции $h \in \mathbf{h}(\Omega)$ (соответственно $h \in \mathbf{sh}_0(\Omega)$, $h \in \mathbf{ph}(\Omega)$, $h \in \mathbf{psh}_0(\Omega)$) выполнено $u + h \leq M$ в $\mathbb{R}_\infty^\Omega$, то найдется постоянная $C \in \mathbb{R}$, с которой

$$\int u \, d\mu \leq \int_* M \, d\mu + C$$

для всех $\mu \in \mathcal{AS}(\Omega)$ (соответственно $\mu \in \mathcal{J}(\Omega)$, $\mu \in \mathcal{PAS}(\Omega)$, $\mu \in \mathcal{PJ}(\Omega)$).

Следствие 1 (о нулевых дивизорах). Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ — область, в которой разрешима вторая проблема Кузена, а $f_\Lambda \in \mathbf{Hol}(\Omega)$ — определяющая функция дивизора $\Lambda \geq 0$ на Ω , т. е. $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$. Если Λ — дивизор нулей для пространства $\mathbf{Hol}(\Omega, M)$, где M из (7), то найдется постоянная $C \in \mathbb{R}$, с которой неравенство

$$\int \log |f_\Lambda| \, d\mu \leq \int_* M \, d\mu + C \quad (8)$$

выполнено для всех мер $\mu \in \mathcal{PAS}(\Omega) \supset \mathcal{AS}(\Omega)$.

Пусть $\mathbb{B}$ — открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$ (единичного радиуса с центром в нуле), $\overline{\mathbb{B}}$ — его замыкание. Для числа $\varepsilon > 0$ по определению меры $m^{(\varepsilon)}$ получена сужением меры Лебега m на шар $\varepsilon\mathbb{B}$ с последующей нормировкой $m^{(\varepsilon)}(\varepsilon\mathbb{B}) = 1$ за счет числового множителя. При $\varepsilon\overline{\mathbb{B}} \subset \Omega$ меру $\mu \in \mathcal{M}_c^+(\Omega)$ называем *выметанием меры* $m^{(\varepsilon)}$ (относительно конуса $\mathbf{psh}(\Omega)$ в области Ω) и пишем $\mu \succ_{\mathbf{psh}} m^{(\varepsilon)}$, если

$$\int h \, dm^{(\varepsilon)} \leq \int h \, d\mu \quad (\forall h \in \mathbf{psh}(\Omega)). \quad (9)$$

Следствие 2 (о дивизорах неединственности). Если Λ — дивизор неединственности для $\mathbf{Hol}(\Omega, M)$ в условиях следствия 1 и, кроме того, функция M ограничена снизу в некоторой окрестности шара $\varepsilon\overline{\mathbb{B}} \subset \Omega$, то найдется постоянная C , с которой неравенство (8) выполнено для всех мер $\mu \in \mathcal{J}(\Omega)$ и для всех выметаний $\mu \succ_{\mathbf{psh}} m^{(\varepsilon)}$.

Это следствие при рассмотрении выметаний $\mu \succ_{\mathbf{psh}} m^{(\varepsilon)}$ требует некоторых дополнительных рассуждений. Но здесь на них не останавливаемся, поскольку в следующем параграфе эксплуатируются

только субгармонические версии следствий 1 и 2. Отметим лишь, что использование выметания (9) обусловлено особенностями случая $h(0) = 0$, обойти который в классе $\text{psh}(\Omega)$ часто затруднительно и требует применения в каждом отдельном случае специальных приемов. В классе же $\text{sh}(\Omega)$ это удастся за счет ограниченности снизу функции M в окрестности некоторого шара $\varepsilon\mathbb{B}$ с помощью гармонического продолжения функции h в шар $\varepsilon\mathbb{B}$ с последующим вычитанием из нее достаточно большой постоянной. Поэтому неравенство (8) выполняется для всех мер Йенсена.

3. Субгармонические двойственные версии следствий 1 и 2

Выпишем сначала некоторые определения и результаты из [14].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [14]. Функция $V : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \rightarrow [-\infty, +\infty)$ называется *функцией Аренса — Зингера* (для точки $0 \in \Omega$) на Ω , если выполнены следующие три условия:

- 1) существует компакт K в Ω такой, что и $V \equiv 0$ вне K ;
- 2) функция V субгармоническая в $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$;
- 3) выполнено соотношение

$$V(z) \leq \begin{cases} -\log |z| + O(1), & z \rightarrow 0 \quad \text{при } n = 1, \\ |z|^{2-2n} + O(1), & z \rightarrow 0 \quad \text{при } n > 1. \end{cases}$$

Если функция Аренса — Зингера на Ω неотрицательна всюду на $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, то называем ее *функцией Йенсена* (для точки $0 \in \Omega$) на Ω .

Класс всех функций Йенсена (соответственно Аренса — Зингера) на Ω обозначаем $P_J(\Omega)$ (соответственно $P_{AS}(\Omega)$).

Двойственность между классами функций Аренса — Зингера (соответственно Йенсена) и классами мер Аренса — Зингера (соответственно Йенсена) определяют следующие положения:

а) для

$$h_n(z) := \begin{cases} \log |z|, & n = 1, \\ -|z|^{2-2n}, & n > 1, \end{cases}$$

отображение

$$\mu \mapsto \int_{\Omega \setminus \{0\}} (h_n(z-w) - h_n(z)) d\mu(w) =: V_\mu(z), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

— аффинная биекция класса $\mathcal{AS}(\Omega)$ на класс $P_{AS}(\Omega)$ (соответственно класса $\mathcal{J}(\Omega)$ на класс $P_J(\Omega)$);

б) для каждой функции $u \in \text{sh}_0(\Omega)$ с мерой Рисса ν_u при любой мере $\mu \in \mathcal{AS}(\Omega)$ справедлива обобщенная формула Пуассона — Йенсена

$$u(0) = \int u d\mu - \int V_\mu d\nu_u.$$

Предположим теперь, что функция M из (7) субгармоническая в области Ω с мерой Рисса ν_M . Используя выписанные выше факты а) и б), соотношение (8) в предположении, что $0 \notin \text{supp } \Lambda$, для любой функции $V \in P_{AS}(\Omega)$ (соответственно для любой функции $V \in P_J(\Omega)$) может быть переписано в виде

$$\int V d\nu_{\log |f_\Lambda|} \leq \int V d\nu_M + C', \quad (10)$$

где $\nu_{\log |f_\Lambda|}$ — мера Рисса функции $\log |f_\Lambda| \in \text{sh}_0(\Omega)$, а $C' := C - \log |f_\Lambda| + M(0)$ — конечная постоянная, не зависящая от $V \in P_{AS}(\Omega)$ (соответственно от $V \in P_J(\Omega)$), если постоянная C в (8) изначально не зависела от мер $\mu \in \mathcal{AS}(\Omega)$ (соответственно от мер $\mu \in \mathcal{J}(\Omega)$).

Естественно попытаться «расшифровать» меру $\nu_{\log |f_\Lambda|}$ так, чтобы она выражалась исключительно через дивизор Λ и не содержала упоминание о неоднозначно определенной функции f_Λ (с точностью до голоморфного множителя, не имеющего нулей). Это позволяет сделать формула Пуанкаре — Лелона [15, 16.3]:

$$\nu_{\log |f_\Lambda|}(S) = c_n \int_{S \cap \text{supp } \Lambda} \Lambda(z) d\mathcal{H}_{2n-2}(z), \quad S \subset \mathbb{C}^n, \quad (11)$$

где $\mathcal{H}_{2n-2}$ — $(2n-2)$ -мера Хаусдорфа (см. [13]), а нормирующий множитель имеет вид

$$c_n := \begin{cases} 1, & n = 1, \\ \frac{(n-2)!}{2\pi^{n-1}}, & n > 1. \end{cases}$$

В частности, в случае $n = 1$, когда дивизор Λ отождествляется с последовательностью Λ как в § 1, в полном соответствии с (11) мера $\nu_{\log |f_\Lambda|}(S)$ равна числу точек из Λ , попавших в множество S .

Исходя из этого неравенство (10) можно записать в виде

$$c_n \int_{\text{supp } \Lambda} V(z) \Lambda(z) d\mathcal{K}_{2n-2}(z) \leq \int V d\nu_M + C, \quad (12)$$

где постоянная C' обозначена как C . В частности, при $n = 1$ неравенство (12) для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}$ имеет вид

$$\sum_k V(\lambda_k) \leq \int V d\nu_M + C. \quad (13)$$

Таким образом, отмеченная двойственность в виде (11)–(13) позволяет переформулировать следствия 1 и 2.

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ — область, в которой разрешима вторая проблема Кузена, $\Lambda \geq 0$ — дивизор на Ω с носителем вне нуля, а $M: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — субгармоническая функция с мерой Рисса ν_M . Если Λ — дивизор нулей для пространства $\text{Hol}(\Omega, M)$, то

$$\sup_{V \in P_{AS}(\Omega)} \left(c_n \int_{\text{supp } \Lambda} V(z) \Lambda(z) d\mathcal{K}_{2n-2}(z) - \int V d\nu_M \right) < +\infty.$$

В частности, если $n = 1$ и $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность нулей для пространства $\text{Hol}(\Omega, M)$, то

$$\sup_{V \in P_{AS}(\Omega)} \left(\sum_k V(\lambda_k) - \int V d\nu_M \right) < +\infty.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Если

$$\sup_{V \in P_J(\Omega)} \left(c_n \int_{\text{supp } \Lambda} V(z) \Lambda(z) d\mathcal{K}_{2n-2}(z) - \int V d\nu_M \right) = +\infty,$$

то Λ — дивизор единственности для пространства $\text{Hol}(\Omega, M)$.

В частности, если $n = 1$ и $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность точек в Ω , то из соотношения

$$\sup_{V \in P_J(\Omega)} \left(\sum_k V(\lambda_k) - \int V d\nu_M \right) = +\infty$$

следует, что Λ — последовательность единственности для $\text{Hol}(\Omega, M)$.

В случае, когда область Ω — это все пространство $\mathbb{C}^n$, в частности, плоскость $\mathbb{C}$, из определения 3 легко видеть, что функции Аренса — Зингера и функции Йенсена остаются таковыми при гомотетии и поворотах. Это применительно к одной функции V дает

Следствие 3. Если в условиях теоремы 1 область Ω — это $\mathbb{C}^n$, а Λ — дивизор нулей для пространства $\text{Hol}(\mathbb{C}^n, M)$, то для любой функции Аренса — Зингера V для $\mathbb{C}^n$ справедливо соотношение

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \left(c_n \int_{\text{supp } \Lambda} V(z/t) \Lambda(z) d\mathcal{K}_{2n-2}(z) - \int V(z/t) d\nu_M(z) \right) < +\infty.$$

Когда $n = 1$, т. е. $\Omega = \mathbb{C}$, а $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность нулей для пространства $\text{Hol}(\mathbb{C}, M)$, то для любой функции Аренса — Зингера V для $\mathbb{C}$ имеет место соотношение

$$\limsup_{w \rightarrow \infty, w \in \mathbb{C}} \left(\sum_k V(\lambda_k/w) - \int V(z/w) d\nu_M(z) \right) < +\infty.$$

Следствие 4. Если в условиях теоремы 1 область Ω — это $\mathbb{C}^n$, а для некоторой функции $V \in P_J(\mathbb{C}^n)$ справедливо соотношение

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \left(c_n \int_{\text{supp } \Lambda} V(z/t) \Lambda(z) d\mathcal{K}_{2n-2}(z) - \int V(z/t) d\nu_M(z) \right) = +\infty,$$

то Λ — дивизор единственности для пространства $\text{Hol}(\mathbb{C}, M)$.

Когда $n = 1$, $\Omega = \mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность точек в $\mathbb{C}$, и для некоторой функции Йенсена V для $\mathbb{C}$ имеет место соотношение

$$\limsup_{w \rightarrow \infty, w \in \mathbb{C}} \left(\sum_k V(\lambda_k/w) - \int V(z/w) d\nu_M(z) \right) = +\infty,$$

то Λ — последовательность единственности для $\text{Hol}(\mathbb{C}, M)$.

Аналогичные следствия нетрудно сформулировать и когда область Ω — это шар $\mathbb{B}$ или единичный круг на плоскости.

Приведенные в этом параграфе утверждения актуализируют задачу конструирования функций Аренса — Зингера и Йенсена, что и будет содержанием последнего параграфа.

4. Построение функций Аренса — Зингера и Йенсена

Инверсия точки $z \in \mathbb{C}^n$ — это точка $z^* := z/|z|^2$, инверсия подмножества $S \subset \mathbb{C}^n$ — это $S^* := \{z^* : z \in S\}$, ∂S — граница S .

За исходный объект построения функции Аренса — Зингера можно взять произвольную субгармоническую функцию $v \not\equiv -\infty$ в $\mathbb{C}^n$. При этом для простоты будем считать функцию v непрерывно дифференцируемой. Пусть K — компакт в области Ω , содержащий точку 0. Дальнейшие возможные шаги при построении следующие:

1. Пусть U — объединение тех открытых компонент связности множества $\{z \in \mathbb{C}^n : v(z) < 0\}$, которые пересекаются с множеством $(\mathbb{C}^n \setminus K)^*$. Полагаем

$$v_1(z) := \begin{cases} v(z) & \text{при } z \notin U, \\ 0 & \text{при } z \in U. \end{cases} \quad (14)$$

По известной теореме о склейке субгармонических функций [16, теорема 2.18] v_1 — субгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$.

2. Следующий шаг — преобразование Кельвина

$$v_1^*(z) := \frac{1}{|z|^{2n-2}} v_1(z/|z|^2), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

функции v_1 относительно единичной сферы $\partial\mathbb{B}$, которое сохраняет субгармоничность [17, лемма 9.13].

3. При $0 < \varepsilon < 1$ и шаре $\varepsilon\overline{\mathbb{B}} \subset \Omega$, используя преобразование Кельвина относительно сферы $\partial(\varepsilon\mathbb{B})$, полагаем

$$V_\varepsilon(z) := \begin{cases} v_1^*(z) & \text{при } |z| > \varepsilon, \\ \frac{\varepsilon^{2n-2}}{|z|^{2n-2}} v_1^*\left(\frac{\varepsilon^2 z}{|z|^2}\right) & \text{при } 0 < |z| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Функция V_ε субгармонична в шаре εB и вне его замыкания. Но субгармоничность может нарушаться на сфере $\partial(\varepsilon\mathbb{B})$.

4. Для того чтобы подправить функцию V_ε при $|z| = \varepsilon$ положим

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(z) &:= \frac{1}{|z|} \left(\left. \frac{dV_\varepsilon(tz)}{dt} \right|_{t=1-0} - \left. \frac{dV_\varepsilon(tz)}{dt} \right|_{t=1+0} \right) \\ &= -\frac{2}{|z|} \left. \frac{dv_1^*(tz)}{dt} \right|_{t=1} - \frac{2n-2}{|z|} v_1^*(z) \end{aligned}$$

— сумма производных по внешней нормали от V_ε соответственно на границах шара $\varepsilon\mathbb{B}$ и дополнения $\mathbb{C}^n \setminus \varepsilon\mathbb{B}$, и пусть $A_\varepsilon := \sup_{|z|=\varepsilon} a_\varepsilon(z)$. Если $A_\varepsilon \leq 0$, то полагаем $V = V_\varepsilon$. В противном случае переходим к

5. В обозначениях $a^+ := \max\{a, 0\}$ и $\log^+ t := \max\{\log t, 0\}$ положим

$$V(z) := \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon A_\varepsilon} V_\varepsilon(z) + \log^+ \frac{\varepsilon}{|z|} & \text{при } n = 1, \\ \frac{2n-2}{\varepsilon^{2n-1} A_\varepsilon} V_\varepsilon(z) + \left(\frac{1}{|z|^{2n-2}} - \frac{1}{\varepsilon^{2n-2}} \right)^+ & \text{при } n > 1. \end{cases} \quad (15)$$

Последняя функция V и есть функция Аренса — Зингера, по построению тождественно равная нулю вне компакта $K \subset \Omega$, т. е. выполнено условие 1) определения 3. Условие 3) того же определения следует из вида функции V . Осталось убедиться в выполнении условия 2) определения 3, т. е. доказать субгармоничность функции V вне нуля. Субгармоничность V вне сферы $\partial(\varepsilon\mathbb{B})$ следует из п. 3 и ввиду гармоничности в шаре $\varepsilon\mathbb{B}$ последнего слагаемого в определении (15) функции V . Для доказательства субгармоничности V в окрестности сферы $\partial(\varepsilon\mathbb{B})$ может быть использована следующая лемма, доказанная в [18, лемма 3.8.1] (см. также [19, лемма 4.1]) и несколько позже в [20, теоремы 3.1–3.3] (см. также [21, теорема Бланше]).

Лемма. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^m$ и гиперповерхность S класса C^1 разделяет Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2 . Пусть непрерывная в Ω функция u дважды непрерывно дифференцируема в $\Omega_1 \cup \Omega_2$, а ее сужения на $\Omega_j \cup S$ принадлежат классу C^1 , $j = 1, 2$. Если

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} + \frac{\partial u}{\partial n_2} \leq 0 \quad \text{на } S, \quad (16)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_j}$ — оператор дифференцирования по внешней нормали к области Ω_j , $j = 1, 2$, то u — субгармоническая в Ω функция.

В (15) добавочные слагаемые подобраны именно так, что при $u := V$, $S := \partial(\varepsilon\mathbb{B})$, $\Omega_1 := \varepsilon\mathbb{B}$ и $\Omega_2 := \mathbb{C}^n \setminus \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ выполнено условие (16) леммы, в чем нетрудно убедиться непосредственными вычислениями. Недостаточная гладкость функции V преодолевается стандартной в теории субгармонических функций аппроксимацией функции V убывающей последовательностью функций, полученных гладкой регуляризацией функции V (см. [7, 16]).

Для построения по схеме пп. 1–5 функции Йенсена необходимо изменить лишь шаг 1 на

1'. В отличие от п. 1 положим функцию

$$v_1 := (v - c)^+ \quad \text{на } \mathbb{C}^n, \quad (17)$$

где постоянная c столь велика, что функция $v_1 \geq 0$ тождественно равна нулю на множестве $(\mathbb{C}^n \setminus K)^*$.

Остальные шаги дословно повторяют пп. 2–5 и в итоге ввиду выбора v_1 дают функцию Аренса — Зингера $V \geq 0$ из (15), которая согласно определению 3 — функция Йенсена.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $n = 1$ возможно и обобщение конструкции пп. 1–5 на пути замены круга радиуса ε с центром в нуле из п. 3 некоторой односвязной областью $D \ni 0$, а преобразования Кельвина (инверсии) $v_1^*(\varepsilon^2/\bar{z})$ в п. 3 — заменой переменной, основанной на конформном отображении $D \setminus \{0\}$ на $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, где $\overline{D}$ — замыкание D .

Применения частных случаев описанной общей схемы к конкретным весовым пространствам голоморфных функций в специальных областях (на плоскости, в круге, в шаре, в $\mathbb{C}^n$) уже давались в [18, 19, 22], а дальнейшие применения общей схемы в конкретных ситуациях предполагается изложить в ином месте.

Литература

1. Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов // В сб.: Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. I.—Уфа: ИМ с ВЦ УНЦ РАН, 1996.—С. 122–131.
2. Khabibullin B. N. Dual approach to certain questions for the weighted spaces of holomorphic functions // Israel Math. Conference Proceedings («Entire Functions in Modern Analysis», Tel-Aviv, 1997).—2001.—V. 15.—P. 207–219.

3. Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I // Изв. РАН. Серия матем.—2001.—Т. 65, № 4.—С. 835–852.
4. Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II // Изв. РАН. Серия матем.—2001.—Т. 65, № 5.—С. 167–190.
5. Khabibullin B. N. The representation of a meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in $\mathbb{C}^n$: survey of some results // Математическая физика, анализ, геометрия.—2002.—Т. 9, № 2.—С. 146–167.
6. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Т. 2.—М.: Наука, 1985.—464 с.
7. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.
8. Мейер П.-А. Вероятность и потенциалы.—М.: Мир, 1973.—328 с.
9. Кутателадзе С. С., Рубинов А. М. Двойственность Минковского и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1976.—256 с.
10. Gamelin T. W. Uniform Algebras and Jensen Measures.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978.—162 p.
11. Ransford T. J. Jensen measures.—Approximation, Complex Analysis and Potential Theory (Montreal, Qc, 2000). NATO Sci. Sér. II. Math-Phys-Chem 37.—Dordrecht: Kluwer, 2001.—P. 221–237.
12. Cole B. J., Ransford T. J. Jensen measures and harmonic measures // J. Reine und Angew. Math.—2001.—V. 541.—P. 29–53.
13. Федерер Г. Геометрическая теория меры.—М.: Наука, 1987.—760 с.
14. Хабибуллин Б. Н. Критерии (суб)гармоничности и продолжение (суб)гармонических функций // Сиб. мат. журн.—2003.—Т. 4, № 4.—С. 905–925.
15. Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества.—М.: Наука, 1985.—272 с.
16. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции.—М.: Мир, 1980.—304 с.
17. Helms L. L. Introduction to potential theory.—N.Y. etc.: Wiley-Interscience, 1969.—282 p.
18. Хабибуллин Б. Н. Распределение нулей целых функций и выметание: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—Харьков: ФТИНТ АН Украины, 1993.—298 с.
19. Хабибуллин Б. Н. Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций // Мат. заметки.—1999.—Т. 66, № 4.—С. 603–616.
20. Blanchet P. On removable singularities of subharmonic and plurisubharmonic functions // Complex Variables.—1995.—Т. 26.—С. 311–322.
21. Riihenta J. Subharmonic functions, mean value inequality, boundary behavior, nonintegrability and exceptional sets // arXiv:math/0312508.—2003.—13 p. (a talk at the Inter. Workshop on Potential Theory and Free Boundary Flows, Kiev, 19–27 August 2003).
22. Хабибуллин Б. Н. Оценки объема нулевых множеств голоморфных функций // Изв. вузов. Математика.—1992.—№ 3 (358)—С. 58–63.

ОБ ОДНОМ ПОДКЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА

В. Б. Шерстюков

1. Введение

В теории полных и представляющих систем экспонент и их обобщений в пространствах аналитических функций важную роль играют целые функции вполне регулярного роста (в.р.р.). Обусловлено это, в первую очередь, обоснованной в исследованиях А. Ф. Леонтьева [1] возможностью выбирать в качестве показателей таких систем нули некоторой целой функции в.р.р. со специальными свойствами. Напомним, что целая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) $\mathcal{L}(\lambda)$ имеет в.р.р. на луче $\arg \lambda = \theta$, если существует

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin E_0}} \frac{\ln |\mathcal{L}(re^{i\theta})|}{r} = h(\mathcal{L}; \theta),$$

где E_0 — некоторое множество нулевой относительной меры, а $h(\mathcal{L}; \theta) := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\mathcal{L}(re^{i\theta})|}{r}$ — индикатрисса роста функции $\mathcal{L}(\lambda)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Функцию, имеющую в.р.р. на каждом луче $\arg \lambda = \theta$, называют функцией в.р.р. (все используемые здесь сведения из теории целых функций содержатся в [1, 2]). Построенная, в основном, усилиями, созданной Ю. Ф. Коробейником, научной школы, теория представляющих систем в локально выпуклых пространствах [3] представила новые общие методы изучения разложений аналитических функций в ряды Дирихле и более общие функциональные ряды. С другой стороны, при описании, например, представляющих систем Миттаг-Леффлера в конкретных пространствах целых или аналитических в области функций естественным образом на первый план выходят вопросы, связанные с регулярностью роста функции на лучах или во всей плоскости; связью между расположением ее нулей и геометрией области аппроксимации; поведением производной функции в нулях самой функции и т. д. [1, 3, 4]. В частности, достаточно

важной в теории представления аналитических в выпуклой области функций рядами экспонент является следующая задача, получившая название проблемы А. Ф. Леонтьева. Пусть $\mathcal{L}(\lambda)$ — ц.ф.э.т. с положительным индикатором, все нули которой просты и образуют последовательность $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$. Влечет ли условие

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} + h(\mathcal{L}; \arg \lambda_k) \right\} \leq 0$$

полную регулярность роста функции $\mathcal{L}(\lambda)$? Ответ пока неизвестен (см. по этому поводу [5–7]). Доказанная в п. 3 настоящей статьи теорема позволяет положительно ответить на поставленный вопрос, если дополнительно известно, что Λ обладает в некотором смысле слабо лакунарной подпоследовательностью.

2. Критерий полной регулярности роста

В этом пункте приводится необходимый в дальнейшем критерий полной регулярности роста ц.ф.э.т. на луче. Предварительно напомним понятие индекса лакунарности последовательности и множества, введенное в [8]. Для возрастающей последовательности положительных чисел $(r_m)_{m=1}^{\infty}$ индекс лакунарности определяется равенством $l(r_m) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{r_{m+1}}{r_m}$. Если E — неограниченное множество в $\mathbb{R}_+$, то его индексом лакунарности называется число $l(E) = \inf\{l(r_m) : r_m \in E, r_m \nearrow \infty\}$. Будем, следуя [8], называть последовательность $(r_m)_{m=1}^{\infty}$ (множество E) слабо лакунарной (слабо лакунарным), если $l(r_m) = 1$ ($l(E) = 1$). Рассматриваемые характеристики оказываются весьма полезными при изучении функций в.р.р. Так, в цитированной выше заметке [8] Г. Г. Брайчев установил (для целой функции конечного типа при уточненном порядке $\rho(r)$) следующую теорему, которую мы сформулируем только для ц.ф.э.т.

Теорема А. Целая функция $f(\lambda)$ экспоненциального типа с индикатором $h(f; \theta)$ имеет в.р.р. на луче $\arg \lambda = \theta$ тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ множества

$$E(\epsilon) = \{r \in \mathbb{R}_+ : \ln |f(re^{i\theta})| > (h(f; \theta) - \epsilon)r\}$$

являются слабо лакунарными.

Придадим теореме А более удобный для наших целей вид. Вначале отметим, что утверждение теоремы 1 (см. ниже) известно и неоднократно использовалось. Например, равносильность условий 1) и 3) легко следует из [9, лемма 11] (см. также библиографию в [9]). Мы даем доказательство теоремы 1, основанное на теореме А, лишь с целью сохранения полноты изложения.

Теорема 1. Для ц.ф.э.т. $f(\lambda)$ с индикатором $h(f; \theta)$ следующие условия эквивалентны:

1) $f(\lambda)$ имеет в.р.р. на луче $\arg \lambda = \theta$;

2) $h(f; \theta) = \sup_E \varliminf_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E}} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r}$, где супремум берется по всем

слабо лакунарным множествам $E \subset \mathbb{R}_+$;

3) $h(f; \theta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(r_m e^{i\theta})|}{r_m}$, где $(r_m)_{m=1}^\infty$ — некоторая слабо лакунарная последовательность.

$\Leftarrow 1) \Rightarrow 2)$: Пусть $f(\lambda)$ — ц.ф.э.т. в.р.р. на луче $\arg \lambda = \theta$. По теореме А $l(E(\epsilon)) = 1$ для любого $\epsilon > 0$. Так как для любого слабо лакунарного множества E

$$\varliminf_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E}} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r} \leq h(f; \theta),$$

то и

$$\sup_E \varliminf_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E}} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r} \leq h(f; \theta).$$

С другой стороны,

$$\sup_E \varliminf_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E}} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r} \geq \varliminf_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E(\epsilon)}} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r} \geq h(f; \theta) - \epsilon.$$

Используя произвол в выборе $\epsilon > 0$, получаем равенство 2).

2) $\Rightarrow$ 1): Пусть значение индикатора функции f в точке θ может быть вычислено по формуле 2). Последнее означает, что для любого $\epsilon > 0$ можно подобрать слабо лакунарное множество E_ϵ так, чтобы

$$\varliminf_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E_\epsilon}} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r} > h(f; \theta) - \frac{\epsilon}{2},$$

а затем взять $\widetilde{E}_\epsilon \subset l(\widetilde{E}_\epsilon) = 1$ и $\ln |f(re^{i\theta})| > (h(f; \theta) - \epsilon)r$ для любого $r \in \widetilde{E}_\epsilon$. Из определения множества $E(\epsilon)$ (см. условие теоремы А) получаем включения $\widetilde{E}_\epsilon \subset E(\epsilon)$, которые влекут слабую лакунарность множеств $E(\epsilon)$ для каждого $\epsilon > 0$. По теореме А это равносильно условию 1).

Покажем эквивалентность условий 2) и 3).

3) $\Rightarrow$ 2): Пусть найдется слабо лакунарная последовательность $(r_m)_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, для которой выполняется

$$h(f; \theta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(r_m e^{i\theta})|}{r_m}.$$

Тогда (верхняя грань взята по всевозможным слабо лакунарным подмножествам $E \subset \mathbb{R}_+$)

$$\sup_E \varliminf_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E}} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r} \geq \varliminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(r_m e^{i\theta})|}{r_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(r_m e^{i\theta})|}{r_m} = h(f; \theta).$$

Отсюда уже вытекает (см. доказательство импликации 1) $\Rightarrow$ 2)) равенство 2).

2) $\Rightarrow$ 3): Пусть

$$h(f; \theta) = \sup_{E-\text{сл.лак.}} \varliminf_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E}} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r}.$$

Выше показано, что тогда f будет функцией в.р.р. на луче $\arg \lambda = \theta$, поэтому

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin E_0}} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r} = h(f; \theta),$$

где E_0 — множество нулевой относительной меры. Ясно, что $E := \mathbb{R} \setminus E_0$ будет слабо лакунарным множеством. Выберем из E слабо лакунарную последовательность $(r_m)_{m=1}^\infty$; для нее $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(r_m e^{i\theta})|}{r_m} = h(f; \theta)$ — это условие 3). Теорема полностью доказана. $\triangleright$

3. Основной результат

Результат этого пункта является центральным в заметке. Прежде, чем его сформулировать, приведем некоторые простые соображения. Если последовательность $(r_m)_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ имеет положительную плотность, т. е. существует $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{r_m} =: \Delta > 0$, то, очевидно, она слабо лакунарна. Далее, для любого числа $l \in [1; \infty]$ найдется $(r_m)_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ нулевой плотности с $l(r_m) = l$. С другой стороны, как показывают простые примеры (некоторые из которых сообщены автору Г. Г. Брайчевым) слабо лакунарная последовательность не обязана иметь плотность, даже если потребовать

$$0 < \underline{\Delta} := \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{r_m} \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{r_m} := \overline{\Delta} < +\infty.$$

Пример слабо лакунарной последовательности с $\overline{\Delta} = +\infty$ дает $r_m = m^\beta$ при $\beta < 1$. Из сказанного выше ясно, что ц.ф.э.т., все нули которой расположены на конечном числе лучей так, что на каждом из них соответствующая подпоследовательность слабо лакунарна, не является, вообще говоря, функцией в.р.р. Отмеченное обстоятельство придает приводимой ниже теореме некоторую дополнительную содержательность.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{L}$ — ц.ф.э.т. с положительным индикатором $h(\mathcal{L}; \theta)$ и простыми (всеми) нулями $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$ такая, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} + h(\mathcal{L}; \arg \lambda_k) \right\} \leq 0.$$

Пусть, далее, найдутся число $m \geq 3$ и подпоследовательности $\Lambda_j \subset \Lambda$ ($j = 1, 2, \dots, m$), обладающие свойствами:

- 1) $\arg \lambda_k = \theta_j$, $\lambda_k \rightarrow \infty$, $\lambda_k \in \Lambda_j$;
- 2) $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_m < 2\pi$, $\theta_{j+1} - \theta_j < \pi$, $\theta_{m+1} := \theta_1 + 2\pi$ (множество направлений $\{\theta_j\}_{j=1}^m$ является 1-допустимым в терминологии [10]);
- 3) $(|\lambda_k|)_{\lambda_k \in \Lambda_j}$ — слабо лакунарные последовательности.

Тогда $\mathcal{L}$ имеет в.р.р. (во всей плоскости).

◁ Выбрав произвольно j от 1 до m , получим из условий теоремы

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |\mathcal{L}'(\lambda_k)| - h(\mathcal{L}; \arg \lambda_k) \right\} \leq \\ &\leq \varliminf_{\substack{\lambda_k \rightarrow \infty \\ \lambda_k \in \Lambda_j}} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |\mathcal{L}'(\lambda_k)| - h(\mathcal{L}; \theta_j) \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$\varliminf_{\substack{\lambda_k \rightarrow \infty \\ \lambda_k \in \Lambda_j}} \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |\mathcal{L}'(\lambda_k)| \geq h(\mathcal{L}; \theta_j).$$

Используя хорошо известные неравенства $h(\mathcal{L}', \theta) \leq h(\mathcal{L}, \theta)$ для любого $\theta \in [0; 2\pi]$ (на самом деле $h(\mathcal{L}', \theta) \equiv h(\mathcal{L}, \theta)$, так как индикатор функции $\mathcal{L}(\lambda)$ положителен), имеем

$$h(\mathcal{L}', \theta_j) := \varliminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\mathcal{L}'(re^{i\theta_j})|}{r} \leq \varliminf_{\substack{\lambda_k \rightarrow \infty \\ \lambda_k \in \Lambda_j}} \frac{\ln |\mathcal{L}'(\lambda_k)|}{|\lambda_k|}.$$

Следовательно, существует

$$\lim_{\substack{\lambda_k \rightarrow \infty \\ \lambda_k \in \Lambda_j}} \frac{\ln |\mathcal{L}'(\lambda_k)|}{|\lambda_k|} = h(\mathcal{L}', \theta_j).$$

Поскольку последовательность $(|\lambda_k|)_{\lambda_k \in \Lambda_j}$ слабо лакуарна, то по теореме 1, примененной к функции $\mathcal{L}'(\lambda)$ и лучу $\arg \lambda = \theta_j$, эта функция имеет в.р.р. на указанном луче. Отсюда заключаем (см. [11] и библиографию в ней), что на каждом луче $\arg \lambda = \theta_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, исходная функция $\mathcal{L}(\lambda)$ будет иметь в.р.р. Следующий этап доказательства теоремы 2 состоит в том, чтобы вывести отсюда полную регулярность роста $\mathcal{L}(\lambda)$ на любом луче. Как известно, сразу для произвольной ц.ф.э.т. этого сделать нельзя, несмотря на то, что направления θ_j подчинены условию Фрагмена — Линделефа 2) (соответствующий пример можно найти в книге [2]). Составим, следуя [7], вспомогательную функцию

$$\varphi(\lambda, z) = \frac{e^{\lambda z}}{\mathcal{L}(\lambda)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k z}}{\mathcal{L}'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}.$$

Условия на функцию $\mathcal{L}$ и ее производную обеспечивают равномерную сходимость последнего ряда при фиксированном $\lambda \notin \Lambda$ внутри выпуклой области G с опорной функцией, тождественно равной $h(\mathcal{L}, -\theta)$, а также тот факт, что $\varphi(\lambda, z)$ — ц.ф.э.т. по λ при фиксированном $z \in G$. Выберем число δ так, чтобы $0 < \delta < \min\{h(\mathcal{L}; \theta) : \theta \in [0; 2\pi)\}$, а затем точку $z_0 \in G$, $0 < |z_0| < \frac{2}{\theta}(\min h(\mathcal{L}; \theta) - \delta)$. Будем писать $\varphi(\lambda)$ вместо $\varphi(\lambda, z_0)$. Оценим сверху $|\varphi(\lambda)|$ на лучах $l_j := \{\arg \lambda = \theta_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m$, вне C_0 -множества кружков $U := \bigcup_{k=1}^{\infty} \{|\lambda - \lambda_k| < e^{-\delta|\lambda_k|}\}$. Для всех $\lambda \in l_j \setminus U$ имеем

$$|\varphi(\lambda)| \leq \frac{e^{|\lambda||z_0|}}{|\mathcal{L}(\lambda)|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{(\delta+|z_0|)|\lambda_k|}}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|}.$$

Но на лучах l_j $\mathcal{L}(\lambda)$ — функция в.р.р., поэтому существует $A > 0$ такое, что при всех $\lambda \in l_j$ и $|\lambda|$, не принадлежащих единому для всех j E_0 -множеству E_1 , $|\mathcal{L}(\lambda)| > \frac{1}{A}e^{(h(\mathcal{L}; \theta_j) - \frac{|z_0|}{2})|\lambda|}$. Поэтому найдутся E_0 -множество E_2 и константа $B > 0$ такие, что для любого $\lambda \in \bigcup_{j=1}^{\infty} l_j$, $|\lambda| \notin E_2$,

$$|\varphi(\lambda)| \leq Ae^{(\frac{3}{2}|z_0| - h(\mathcal{L}; \arg \lambda))|\lambda|} + B \sum_{k=1}^{\infty} e^{(-h(\mathcal{L}; \arg \lambda_k) + \delta + \frac{3}{2}|z_0|)|\lambda_k|}.$$

В силу выбора δ и z_0 из последнего неравенства вытекает ограниченность $\varphi(\lambda)$ на множестве $\{\lambda \in \bigcup_{j=1}^{\infty} l_j, |\lambda| \notin E_2\}$ и, следовательно, неположительность индикатора функции φ в точках θ_j , $j = 1, 2, \dots, m$. Теперь из условия 2) и свойств индикатора ц.ф.э.т. заключаем, что функция $\varphi(\lambda)$ имеет нулевой экспоненциальный тип, т. е. $\varphi \in [1; 0]$. Воспользуемся равенством, вытекающим из определения функции $\varphi(\lambda)$:

$$|\varphi(\lambda)||\mathcal{L}(\lambda)| = \left| e^{\lambda z_0} - \mathcal{L}(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k z_0}}{\mathcal{L}'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} \right|, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Так как $\varphi \in [1; 0]$, то существует $C > 0$ такое, что $|\varphi(\lambda)| \leq Ce^{\frac{|z_0|}{2}|\lambda|}$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Поэтому

$$(\exists D > 0) Ce^{\frac{|z_0|}{2}|\lambda|} |\mathcal{L}(\lambda)| \geq e^{\operatorname{Re}(\lambda z_0)} - D |\mathcal{L}(\lambda)|, \quad \lambda \notin U,$$

откуда

$$(\exists M > 0) e^{\frac{|z_0|}{2}|\lambda|} |\mathcal{L}(\lambda)| \geq M e^{|\lambda||z_0| \cos(\arg \lambda + \arg z_0)}, \quad \lambda \notin U.$$

Итак, на луче $\arg \lambda = -\arg z_0$ $|\mathcal{L}(\lambda)| \geq M e^{\frac{|z_0|}{2}|\lambda|}$, $\lambda \notin U$. Без ограничения общности можно считать этот луч дополнительным к какому-нибудь из лучей l_j , и тогда на прямой, образованной, скажем, лучами $\{\arg \lambda = -\arg z_0\}$ и l_1 , функция $\mathcal{L}(\lambda)$ удовлетворяет условию $\inf_{\lambda \in S} |\mathcal{L}(\lambda)| > 0$, где S — относительно плотное по мере множество на указанной прямой. В заметке [7] показано, что последнее неравенство вкупе с имеющейся оценкой на $\mathcal{L}'(\lambda_k)$ обеспечивают полную регулярность роста функции $\mathcal{L}(\lambda)$. Теорема 2 доказана. $\triangleright$

Полученное утверждение показывает, что если произвольную слабо лакунарную последовательность точек, расположенных на конечной 1-допустимой системе лучей, дополнить каким-либо образом до нулевого множества некоторой ц.ф.э.т. из класса Леонтьева, то полученная функция будет иметь вполне регулярный рост. Аналогичный теореме 2 результат имеет место и в случае $m = 2$, когда последовательность $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ расположена на прямой, проходящей через начало. При этом доказательство, по сравнению с приведенным выше, значительно упростится, так как второй его этап сведется к ссылке на теорему 3 из [7].

Литература

1. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.
2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.
3. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, вып. 1.—С. 73–126.
4. Абанин А. В. Достаточные множества и абсолютно представляющие системы: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 1995.
5. Мельник Ю. И. О представлении регулярных функций рядами типа рядов Дирихле // Исследование по теории приближения функций и их приложения.—Киев, 1978.—С. 132–141.
6. Братищев А. В. Базисы Кёте, целые функции и их приложения: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, 1997.
7. Шерстюков В. Б. Об одной задаче Леонтьева и представляющих системах экспонент // Мат. заметки.—2003.—Т. 74, вып. 2.—С. 301–313.
8. Брайчев Г. Г. Индекс лакулярности // Мат. заметки.—1993.—Т. 53, вып. 6.—С. 3–10.

9. Кривошеев А. С. Критерий аналитического продолжения функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексной плоскости // Изв. РАН. Сер. матем.—2004.—Т. 68, № 1. С. 43–78.
10. Хабибуллин Б. Н. Выметание на систему лучей и целые функции вполне регулярного роста // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1991.—Т. 55, № 1.—С. 184–202.
11. Азарин В. С. Пример целой функции с заданным индикатором и нижним индикатором // Мат. сборник.—1972.—Т. 89 (131), № 4 (12).—С. 541–557.

Реутов, Московский инженерно-физический институт
E-mail: shervb@nm.ru

Часть II

Теория операторов

ЗАМЕЧАНИЕ К ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ПЕЛЧИНСКОГО

М. М. Драгилев

Пусть X — локально выпуклое пространство, имеющее абсолютный шаудеровский базис. Можно предположить, основываясь на большом числе конкретных примеров (см. [1–23]), что в каждом пространстве X все абсолютные базисы квазиэквивалентны. Другими словами: любые два абсолютных базиса, элементы которых упорядочены и нормированы соответствующим образом, эквивалентны в том смысле, что могут быть приведены к совпадению действием линейного автоморфизма пространства. В частности, таким свойством обладают банаховы пространства X : если $\dim X < \infty$, то все (абсолютные) базисы в X эквивалентны, в противном случае X изоморфно пространству ℓ_1 , в котором абсолютные базисы эквивалентны с точностью до нормировки элементов [11]. Примером локально выпуклого пространства с существенно квазиэквивалентными абсолютными базисами может служить пространство A_1 функций, аналитических в открытом единичном круге с естественной (ненормируемой) топологией внутренней равномерной сходимости, а также его сильное сопряженное (неметризуемое) пространство $\bar{A}_1$. Заметим, что высказанная выше гипотеза возникла из цикла работ М. Г. Хапланова, посвященных исследованию этих пространств [24–28] (см. также [29]).

Известно с другой стороны, что не каждое локально выпуклое пространство, в котором имеется безусловный базис, обладает тем свойством, что все его безусловные базисы квазиэквивалентны. Этот факт устанавливает теорема А. Пелчинского [30], согласно которой в банаховом пространстве ℓ_p , $1 < p \neq 2$, существует нормированный безусловный базис, не эквивалентный (и не квазиэквивалентный) базису координатных ортов. Мы покажем здесь, что из теоремы Пелчинского следует аналогичный вывод в отношении неметризуемых локально выпуклых пространств, содержащих абсолютные базисы (в дальнейшем через (X, σ) обозначается произвольное локально выпуклое пространство X с сопряженным X' , наделенное слабой топологией $\sigma = \sigma(X, X')$ [31]; если в (X, σ) существует базис, то его называют слабым базисом пространства X).

Лемма 1. *Безусловный базис $(x_n)_1^\infty$ банахова (бесконечномерного) пространства X является шаудеровским абсолютным базисом в локально выпуклом пространстве (X, σ) и наоборот.*

◁ Как известно [32], базис $(x_n)_1^\infty$ является шаудеровским, т. е. его коэффициентные функционалы x'_n ($n = 1, 2, \dots$) непрерывны. Они непрерывны также в топологии σ , поскольку оба пространства X и (X, σ) , имеют одно и то же сопряженное пространство X' . Следовательно, $(x_n)_1^\infty$ — шаудеровский слабый базис в X , являющийся притом безусловным базисом в (X, σ) . Отсюда заключаем, что все числовые ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x) u(x_n) = u(x),$$

где $u \in X'$ и $x \in X$ произвольные, абсолютно сходятся. Известно [31], что топология σ задается определяющей системой преднорм:

$$|x|_{u_1, u_2, \dots, u_m} = \sup_{1 \leq k \leq m} |u_k(x)|$$

$$(x \in X, u_k \in X', k = 1, 2, \dots, m, m \in \mathbb{N}).$$

Но из предыдущего следует, что

$$\sum_n |x'_n(x)| |x_n|_{u_1, u_2, \dots, u_m} < \infty \quad (x \in X)$$

для всех преднорм определяющей системы. Другими словами, $(x_n)_1^\infty$, есть абсолютный шаудеровский базис в пространстве (X, σ) .

Обратно, если $(x_n)_1^\infty$ — абсолютный (и, следовательно, безусловный) шаудеровский слабый базис в бочечном (и, тем более, в банаховом) пространстве X , то, как вытекает из [33] (см., также [34, с. 621]), он же является шаудеровским безусловным базисом в X . ▷

Лемма 2. *Линейные автоморфизмы банахова пространства X и локально выпуклого пространства (X, σ) совпадают.*

◁ Доказательство непосредственно вытекает из общих свойств линейных операторов, действующих в локально выпуклых пространствах: непрерывное линейное отображение из локально выпуклого пространства X в X непрерывно также в слабой топологии σ [31, с. 62], в то время, как обратное утверждение верно, по крайней мере, в отношении пространств Фреше [31, с. 96]. ▷

Из теоремы Пелчинского с учетом лемм 1 и 2 следует

Теорема 1. *Существует неметризуемое локально выпуклое пространство, содержащее пару не квазиэквивалентных шаудеровских абсолютных базисов.*

◁ Действительно, одним из таких пространств является (ℓ_p, σ) , $1 < p \neq 2$, ибо квазиэквивалентность всех абсолютных базисов в (ℓ_p, σ) означала бы, что все нормированные безусловные базисы в стандартном пространстве ℓ_p эквивалентны. ▷

Неизвестно, распространяется ли теорема 1 на метризуемые локально выпуклые пространства, имеющие абсолютный базис.

Литература

1. Драгилев М. М. Некоторые вопросы теории базиса в пространстве аналитических функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, 1959.
2. Драгилев М. М. Каноническая форма базиса в пространстве аналитических функций // Успехи мат. наук.—1960.—Т. 15, вып. 2.—С. 207–218.
3. Драгилев М. М. О регулярной сходимости базисных разложений аналитических функций (к теории базиса в пространстве A_R) // Исследования по современным проблемам теор. функц. компл. перем.—М., 1961.—С. 187–194.
4. Митягин Б. С. Аппроксимативная размерность и базисы в ядерном пространстве // Успехи мат. наук.—1961.—Т. 16, вып. 4.—С. 63–132.
5. Захарюта В. П. О базисах в пространствах функций, аналитических в замкнутом круге // Докл. АН СССР.—1961.—Т. 141, вып. 5.—С. 1023–1025.
6. Драгилев М. М. О правильных базисах в ядерных пространствах // Мат. сборник—1965.—Т. 68, вып. 2.—С. 153–173.
7. Bessaga Cz. Some remark on Dragilev theorem // St. Math.—1968.—V. 31.—P. 307–318.
8. Драгилев М. М. О специальных размерностях, определенных на некоторых классах пространств Кёте // Мат. сборник.—1969.—Т. 80, вып. 2.—С. 225–240.
9. Драгилев М. М. Классы Рисса и кратно-правильные базисы // Теория функций, функциональный анализ и их приложения.—Харьков, 1972.—Т. 15.—С. 512–525.
10. Zahariuta V. P. On isomorphism of cartesian products of locally convex spaces // St. Math.—1973.—Т. 46.—С. 201–221.
11. Kalton N. J. On absolute bases // Math. An.—1973.—V. 200.—P. 209–225.
12. Кондаков В. П. О квазиэквивалентности правильных базисов в пространствах Кёте // Мат. анализ и его приложения.—Ростов-на-Дону, 1974.—Т. 5.—С. 210–213.
13. Crone L., Robinson N. Every nuclear Frechet spaces with a regular basis has the quasiequivalence property // St. Math.—1974.—V. 52.—P. 203–207.
14. Djakov P. A short proof of theorem on quasiequivalence of regular basis // St. Math.—1975.—V. 55 (3)—P. 269–271.
15. Маркушевич А. И. Избранные главы теории аналитических функций.—М., 1976.

16. Баран В. И., Драгилев М. М. О квазиэквивалентности абсолютных базисов пространств Кёте класса $(f)_\sigma$ // Теория функций, функциональный анализ и их приложения.—Харьков, 1976.—Вып. 25.—С. 15–21.
17. Баран В. И. О квазиэквивалентности абсолютных базисов в обобщенных пространствах степенных рядов // Сиб. мат. журн.—1976.—Т. 17, вып. 3.—С. 673–676.
18. Баран В. И. О квазиэквивалентности абсолютных базисов в декартовом произведении пространств Кёте // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений.—Ярославль, 1977.—Вып. 2.—С. 8–24.
19. Баран В. И., Кондаков В. П. Квазиэквивалентность абсолютных базисов в пространствах (d_1) и (d_2) // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 235, № 4.—С. 724–732.
20. Кондаков В. П. Об упорядочиваемых абсолютных базисах в F -пространствах // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 247, вып. 3.—С. 543–546.
21. Кондаков В. П. Вопросы геометрии ненормируемых пространств.—Ростов-на-Дону, 1983.
22. Басангова Е. О., Драгилев М. М. О пространствах с кратно-правильным базисом // Мат. заметки.—1986.—Т. 39, вып. 5.—С. 727–735.
23. Драгилев М. М. Базисы в пространствах Кёте.—Ростов-на-Дону, 2003.
24. Хапланов М. Г. Некоторые свойства аналитического пространства // Докл. АН СССР.—1951.—Т. 79, вып. 6.—С. 929–932.
25. Хапланов М. Г. Линейные преобразования аналитических пространств // Докл. АН СССР.—1951.—Т. 80, вып. 1.—С. 21–24.
26. Хапланов М. Г. Матричный признак базиса в пространстве аналитических функций // Докл. АН СССР.—1951.—Т. 80, вып. 2.—С. 177–180.
27. Хапланов М. Г. Матричный признак полноты системы аналитических функций // Докл. АН СССР.—1952.—Т. 83, вып. 1.—С. 35–38.
28. Хапланов М. Г. Бесконечные матрицы в аналитическом пространстве // Успехи мат. наук.—1956.—Т. 11, вып. 5.—С. 37–44.
29. Коробейник Ю. Ф. Необходимый и достаточный признак наличия квазистепенного характера у базиса // Сб. студ. работ РГУ.—Ростов-на-Дону, 1957.—Вып. 3.—С. 65–68.
30. Pelczynski A. Projection in certain Banach spaces // St. Math.—1960.—V. 19.—Р. 209–228.
31. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства.—М., 1967.—257 с.
32. Банах С. Курс функционального анализа.—Київ, 1948.
33. Dieudonné J. On biorthogonal systems // Mech. Math. J.—1954.—№ 2.—Р. 7–20.
34. Эдвардс З. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1969.—1071 с.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ РЕШЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**В. Н. Козоброд**

В этой работе содержатся результаты, относящиеся к теории существования случайных периодических и стационарных решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве со случайными периодическими и стационарными возмущениями.

В первом параграфе вводятся понятия случайных периодических и стационарных в различных смыслах процессов: периодически (стационарно) распределенных, с периодическим (стационарным) средним, периодических (стационарных) с вероятностью единица, с периодическими (стационарными) с вероятностью единица реализациями. Строятся банаховы пространства случайных периодических процессов. Стационарным случайным процессам посвящена обширная литература. Укажем, например, [12, 13, 35, 36, 42, 43]. Случайные периодические процессы рассматривались, например, в работах [11, 34, 37, 38, 40]. Введенное нами понятие периодически распределенного случайного процесса в измеримом банаховом пространстве является обобщением с одной стороны стационарного в узком смысле случайного процесса (см. [34]), с другой стороны периодического детерминированного отображения, и для случайных процессов с действительными значениями совпадает с понятием периодического в узком смысле случайного процесса (см. [11]).

Во втором параграфе содержатся результаты, относящиеся к теории существования случайных периодических и стационарных решений обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве со случайными линейными и нелинейными периодическими возмущениями. Мы рассмотрим два вида уравнений. Первый вид уравнений — это уравнения для реализаций случайного процесса. Решениями в этом случае у нас являются случайные процессы, имеющие с вероятностью единица непрерывно-дифференцируемые реализации. Второй вид — это уравнения для самого случайного процесса, производная от случайного процесса в этом случае понимается в среднем смысле, а решениями являются непрерывно-дифференцируемые в среднем смысле случайные процессы.

Линейные дифференциальные уравнения в конечномерном пространстве, возмущенные случайными процессами, рассматривались, например, в работах [32, 35]. Для уравнения в банаховом пространстве со случайными возмущениями отметим монографию [44]. Условия существования случайных стационарных и периодических решений дифференциальных уравнений в конечномерных пространствах со случайной правой частью изучались в работах [7, 11, 29, 30, 40].

Мы рассмотрим в основном случайные возмущения линейных экспоненциально дихотомических дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений в банаховом пространстве. Детерминированные возмущения экспоненциально дихотомических дифференциальных уравнений рассматривались в монографиях [10, 33]. Детерминированные возмущения экспоненциально дихотомических дифференциально-разностных уравнений рассматривались в работах [1–3]. Случайные периодические и стационарные возмущения экспоненциально дихотомических дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений в банаховом пространстве рассматривались в работах [14–28].

В третьем параграфе мы рассмотрим также уравнения с параметром, вопросы продолжимости по параметру и ветвления случайных периодических решений. Задача о ветвлении периодических решений детерминированных систем дифференциальных уравнений описана, например, в работах [4, 9, 41]. Случайные возмущения уравнений с параметром рассматривались, например, в книге [6]. Продолжимость по параметру и ветвление случайных периодических решений рассматривались в работах [17, 20, 22, 24].

Приведенный в конце главы список литературы далеко не претендует на полноту.

1. Периодические случайные процессы

1.1. Основные понятия и обозначения теории случайных процессов. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел. Через (X, U_X) будем обозначать измеримое банахово пространство, где X есть банахово пространство, а U_X является борелевской σ -алгеброй подмножеств из X . Пусть (Ω, U_Ω, P) — полное вероятностное пространство со множеством эле-

ментарных событий Ω , σ -алгеброй U_Ω подмножеств из Ω и полной вероятностной мерой P .

Измеримым отображением называется отображение, для которого прообраз измеримого множества является измеримым, а под сильно измеримым отображением понимается отображение, которое является пределом почти всюду сходящейся последовательности счетнозначных функций.

Случайной величиной называется измеримая функция $\xi = \xi(\omega)$ на вероятностном пространстве (Ω, U_Ω, P) со значениями в измеримом пространстве (X, U_X) , а функция $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ ($t \in \mathbb{R}$) аргумента t , значениями которой являются случайные величины на вероятностном пространстве (Ω, U_Ω, P) в фазовом пространстве (X, U_X) , называется случайным процессом в фазовом пространстве (X, U_X) . Случайный процесс $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ называется измеримым, если отображение $\xi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow X$ является измеримым.

Для любого случайного процесса $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ отображение $\xi(\cdot, \omega) : \mathbb{R} \rightarrow X$ называется реализацией (траекторией) случайного процесса. В дальнейшем реализацию случайного процесса $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ при данном фиксированном ω будем обозначать через $\xi^\omega(t)$.

Математическим ожиданием (средним) случайной величины ξ в фазовом пространстве (X, U_X) называется интеграл Бохнера от переменной ξ по множеству Ω , т. е. $M[\xi] = \int_\Omega \xi(\omega) P(d\omega)$.

Если для случайного процесса $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ при каждом фиксированном t отображение $\xi(t, \cdot) : \Omega \rightarrow X$ имеет математическое ожидание, то будем говорить, что случайный процесс $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ имеет математическое ожидание $M[\xi(t)]$.

Случайный процесс $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ в фазовом банаховом пространстве (X, U_X) назовем непрерывным в среднем, если при каждом t существует математическое ожидание $M[\xi(t)]$ и $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} M[\|\xi(t + \Delta t) - \xi(t)\|_X] = 0$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $L(\Omega \rightarrow X)$ есть банахово пространство функций $\xi : \Omega \rightarrow X$ интегрируемых по Бохнеру с нормой $\|\xi\|_L = \int_\Omega \|\xi(\omega)\|_X P(d\omega)$. Ясно, что если $\xi \in L(\Omega \rightarrow X)$, то ξ является случайной величиной с конечным средним (математическим ожиданием) и $M[\|\xi\|_X] = \|\xi\|_L$.

Через $C(\mathbb{R} \rightarrow X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на всей прямой функций $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ с нормой $\|f\|_C = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|_X$.

Если в пространстве непрерывных и ограниченных на всей прямой функций $C(\mathbb{R} \rightarrow X)$ в качестве банахового пространства X взять банахово пространство $L(\Omega \rightarrow X)$, то получим новое банаховое пространство $C(\mathbb{R} \rightarrow L(\Omega \rightarrow X))$ функций $\xi = \xi(t, \omega)$ с нормой $\|\xi\|_{CL} = \sup_{t \in \mathbb{R}} M[\|\xi(t, \omega)\|_X]$.

Если $\xi(t) \in C(\mathbb{R} \rightarrow L(\Omega \rightarrow X))$, то $\xi(t)$ является непрерывной и ограниченной функцией по норме пространства $L(\Omega \rightarrow X)$, т. е. $\xi(t)$ является непрерывным в среднем случайным процессом.

Аналогично можно построить банахово пространство $L(\Omega \rightarrow C(\mathbb{R} \rightarrow X))$ функций, заданных на Ω со значениями в $C(\mathbb{R} \rightarrow X)$, интегрируемых в смысле Бохнера относительно меры P . Норма на этом пространстве определяется формулой $\|\xi\|_{LC} = M[\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\xi(t, \omega)\|_X]$.

Если $\xi(t) \in L(\Omega \rightarrow C(\mathbb{R} \rightarrow X))$, то $\xi(t)$ является случайным процессом с непрерывными с вероятностью единица реализациями, т. е. существует такое множество $M_0 \in U_\Omega$, что $P(M_0) = 0$ и для любого $\omega \in \Omega \setminus M_0$ отображение $\xi(\cdot, \omega) : \mathbb{R} \rightarrow X$ является непрерывным. Кроме того, для любого $\xi(t) \in L(\Omega \rightarrow C(\mathbb{R} \rightarrow X))$, отображение $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t, \cdot)\|_X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ является случайной величиной и имеет конечное математическое ожидание.

Обозначим через $F_{t_{11}, \dots, t_{kn_k}}(\xi_1, \dots, \xi_k, B_{11}, \dots, B_{kn_k})$ совместные конечномерные распределения вероятностей системы случайных процессов $\xi_i(t) = \xi_i(t, \omega)$ ($i = 1, \dots, k$; $t \in \mathbb{R}$; $\omega \in \Omega$) в фазовых пространствах (X_i, U_{X_i}) соответственно, т. е.

$$F_{t_{11}, \dots, t_{kn_k}}(\xi_1, \dots, \xi_k, B_{11}, \dots, B_{kn_k}) = P\left(\bigcap_{i=1}^k \bigcap_{j=1}^{n_i} \{\omega | \xi_i(t_{ij}) \in B_{ij}\}\right),$$

где $B_{ij} \in U_{X_i}$; $t_{ij} \in \mathbb{R}$; $j = 1, \dots, n_i$, а $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$.

Будем говорить, что система случайных процессов $\xi_i(t)$ в фазовых пространствах (X_i, U_{X_i}) , где i от 1 до k , стохастически эквивалентна в широком смысле системе случайных процессов $\eta_i(t)$ в фазовых пространствах (X_i, U_{X_i}) , если для любых $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, любых $B_{ij} \in U_{X_i}$; $t_{ij} \in (-\infty, \infty)$ ($j = 1, \dots, n_i$) выполняется равенство:

$$\begin{aligned} F_{t_{11}, \dots, t_{kn_k}}(\xi_1, \dots, \xi_k, B_{11}, \dots, B_{kn_k}) &= \\ &= F_{t_{11}, \dots, t_{kn_k}}(\eta_1, \dots, \eta_k, B_{11}, \dots, B_{kn_k}). \end{aligned}$$

1.2. Определения периодических случайных процессов.

Случайный процесс $\xi(t)$ назовем *T -периодически распределенным*, если $\xi(t)$ стохастически эквивалентен в широком смысле случайному процессу $\xi(t+T)$, где T есть константа.

Будем говорить, что случайные процессы $\xi_i(t)$ ($i = 1, \dots, k$) являются *T -периодически связанными*, если система случайных процессов $\xi_i(t)$ ($i = 1, \dots, k$) стохастически эквивалентна в широком смысле системе случайных процессов $\xi_i(t+T)$ ($i = 1, \dots, k$), т. е. функция $\Phi(\theta) = P(\bigcap_{i=1}^k \bigcap_{j=1}^{n_i} \{\omega : \xi_i(t_{ij} + \theta) \in B_{ij}\})$ переменной θ является периодической с периодом T для любых фиксированных $B_{ij} \in U_{X_i}$, $t_{ij} \in (-\infty, \infty)$.

Из T -периодической связанности случайных процессов $\xi_i(t)$ ($i = 1, \dots, k$) следует, что каждый из них является T -периодически распределенным. Очевидно, что любая конечная совокупность периодических отображений из $\mathbb{R}$ в пространство X с периодом T является T -периодически связанной и T -периодически связанной с любым конечным набором T -периодически связанных случайных процессов.

Пусть $\eta(t)$ есть T -периодически распределенный случайный процесс в фазовом пространстве (Y, U_Y) .

Обозначим через $F_s(\eta, X)$ максимальную по включению совокупность непрерывных в среднем случайных процессов $\xi(t)$ из пространства $C(\mathbb{R} \rightarrow L(\Omega \rightarrow X))$ таких, что любая конечная совокупность из них вместе с $\eta(t)$ является T -периодически связанной.

Множество $F_s(\eta, X)$ с нормой $\|\xi\|_{F_s} = \sup_{0 \leq t \leq T} M[\|\xi(t)\|_X]$ является банаховым пространством.

Обозначим через $F_r(\eta, X)$ максимальную по включению совокупность случайных процессов $\xi(t)$ из пространства $L(\Omega \rightarrow C(\mathbb{R} \rightarrow X))$ таких, что любая конечная совокупность из них вместе со случайным процессом $\eta(t)$ является T -периодически связанной.

Множество $F_r(\eta, X)$ с нормой $\|\xi\|_{F_r} = M[\sup_t \|\xi(t, \omega)\|_X]$ является банаховым пространством.

Случайный процесс $\xi(t)$ в фазовом измеримом банаховом пространстве (X, U_X) будем называть *случайным процессом с T -периодическим средним*, если для любого t существует математическое ожидание $M[\xi(t)]$ и оно является периодическим отображением с периодом T .

Если случайный процесс $\xi(t)$ в фазовом измеримом банахо-

вом пространстве (X, U_X) является T -периодически распределенным случайным процессом и при каждом t существует математическое ожидание $M[\xi(t)]$, то случайный процесс $\xi(t)$ является случайным процессом с T -периодическим средним.

Обозначим через $M_s(T, X)$ множество непрерывных в среднем случайных процессов $\xi(t)$ в фазовом измеримом банаховом пространстве (X, U_X) , имеющих ограниченный на всей оси первый момент $M[\|\xi(t)\|_X]$ и T -периодическое среднее.

Множество $M_s(T, X)$ с нормой $\|\xi\|_{M_s} = \sup_{t \in \mathbb{R}} M[\|\xi(t, \omega)\|_X]$ является банаховым пространством.

Обозначим через $M_r(T, X)$ множество измеримых случайных процессов в фазовом банаховом пространстве (X, U_X) , имеющих периодическое среднее с периодом T и принадлежащих пространству $L(\Omega \rightarrow C(\mathbb{R} \rightarrow X))$.

Множество $M_r(T, X)$ с нормой $\|\xi\|_{M_r} = M[\sup_t \|\xi(t, \omega)\|_X]$ является банаховым пространством.

Будем говорить, что случайный процесс $\xi(t)$ в фазовом пространстве (X, U_X) является T -периодическим с вероятностью единица, если случайные процессы $\xi(t)$ и $\xi(t+T)$ являются эквивалентными, т. е. для любого t выполняется равенство $P(\{\omega : \xi(t) = \xi(t+T)\}) = 1$.

Ясно, что всякий T -периодический с вероятностью единица случайный процесс является T -периодически распределенным. Более того, любая конечная совокупность T -периодических с вероятностью единица случайных процессов является T -периодически связанной с любой совокупностью T -периодически связанных случайных процессов.

Обозначим через $P_s(T, X)$ совокупность T -периодических с вероятностью единица непрерывных в среднем случайных процессов $\xi(t)$ в фазовом банаховом пространстве (X, U_X) .

Множество $P_s(T, X)$ с нормой $\|\xi\|_{P_s} = \sup_{t \in [0, T]} M[\|\xi(t, \omega)\|_X]$ является банаховым пространством.

Будем говорить, что случайный процесс $\xi(t)$ в фазовом пространстве (X, U_X) является случайным процессом с T -периодическими с вероятностью единица реализациями, если существует такое множество $N_\xi \subset U_\Omega$, что $P(N_\xi) = 0$ и для всех $\omega \in \Omega \setminus N_\xi$ реализации $\xi^\omega(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ являются периодическими с периодом T .

Очевидно, что всякий случайный процесс с T -периодическими с вероятностью единица реализациями является T -периодическим с вероятностью единица.

Обозначим через $P_r(T, X)$ совокупность случайных процессов $\xi(t)$ в фазовом банаховом пространстве, имеющих T -периодические с вероятностью единица реализации и принадлежащих пространству $L(\Omega \rightarrow C(\mathbb{R} \rightarrow X))$.

Ясно, что $\|\xi\|_{P_r} = M[\sup_{0 \leq t \leq T} \|\xi(t, \omega)\|_X]$ является нормой на $P_r(T, X)$, если элементами пространства $P_r(T, X)$ считать классы случайных процессов, имеющих с вероятностью единица одинаковые реализации, и $P_r(T, X)$ является банаховым пространством.

Случайный процесс $\xi(t)$ назовем *стационарно распределенным*, если для любого $T \in \mathbb{R}$ случайный процесс $\xi(t)$ является T -периодически распределенным.

Аналогично можно дать определения стационарного с вероятностью единица случайного процесса, случайного процесса со стационарными с вероятностью единица реализациями, случайного процесса со стационарным средним и построить для них соответствующие банаховы пространства.

2. Линейные уравнения

2.1. Уравнение для реализаций. Рассмотрим уравнение

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + \eta(t), \quad (1)$$

где $A(t)$ — непрерывное T -периодическое семейство линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X , $\eta(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) — случайный процесс с сильно непрерывными с вероятностью единица реализациями (см. непрерывный случайный процесс в [8]), т. е. для почти всех ω реализации $\eta^\omega(t)$ непрерывны по норме пространства X .

Производная в (1) понимается как предел (при $\Delta t \rightarrow 0$) конечно-разностного отношения $(\xi^\omega(t + \Delta t) - \xi^\omega(t)) / \Delta t$ по норме пространства X при фиксированном ω (т. е. производная от реализаций).

Под случайным решением уравнения (1) будем понимать случайный процесс $\xi(t)$ с сильно непрерывно дифференцируемыми с

вероятностью единица реализациями, если с вероятностью единица выполняется равенство (1), т. е. существует множество N_ξ такое, что $P(N_\xi) = 0$ и для всех $\omega \in \Omega \setminus N_\xi$ выполняется равенство $\dot{\xi}^\omega(t) = A(t)\xi^\omega(t) + \eta^\omega(t)$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим детерминированное уравнение

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad (2)$$

где $x(t) \in X$ при каждом t из $\mathbb{R}$, производная $\dot{x}(t)$ понимается в сильном смысле.

Пусть $U(t)$ оператор Коши уравнения (2), который удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \\ U(0) = I. \end{cases}$$

Будем предполагать, что спектр оператора монодромии $U(T)$ (см. [10]) уравнения (2) не пересекается с единичной окружностью и имеет компоненты, лежащие как внутри, так и вне единичного круга. Так как спектр оператора монодромии допускает разложение, то существуют проекторы P_1, P_2 и функция Грина

$$G(t, \tau) = \begin{cases} U(t)P_1U^{-1}(\tau), & \text{если } t \geq \tau, \\ -U(t)P_2U^{-1}(\tau), & \text{если } t < \tau, \end{cases}$$

действующая из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $[X, X]$ ($[X, Y]$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y).

Теорема 1. Пусть $A(t)$ — непрерывное T -периодическое семейство линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X , $\eta(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) — случайный процесс с сильно непрерывными с вероятностью единица реализациями, спектр оператора монодромии $\sigma(U(T))$ уравнения (2) не пересекается с единичной окружностью и имеет компоненты лежащие как внутри, так и вне единичной окружности и пусть $\eta(t)$ является почти сепарабельнозначным случайным процессом и с вероятностью единица имеет интегрально ограниченные на всей оси реализации, т. е. $\int_t^{t+1} \|\eta^\omega(\tau)\|_X d\tau < K(\omega) < \infty$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Тогда уравнение (1) имеет случайное решение

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau)\eta(\tau) d\tau \quad (3)$$

такое, что $\xi^\omega(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau) \eta^\omega(\tau) d\tau$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Среди всех решений уравнения (1), имеющих ограниченные с вероятностью единица реализации, это решение является единственным в том смысле, что если $\xi(t)$ и $\eta(t)$ два решения, имеющие ограниченные с вероятностью единица реализации, то $P(\{\omega : \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\xi(t) - \eta(t)\|_X = 0\}) = 1$, т. е. $\xi(t)$ и $\eta(t)$ имеют с вероятностью единица одинаковые реализации.

Теорема 2. Пусть $\eta(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) есть T -периодически распределенный случайный процесс и выполняются условия теоремы 1. Тогда случайное решение (3) уравнения (1) T -периодически связано с $\eta(t)$, а, следовательно, и T -периодически распределенное.

Теорема 3. Пусть $\eta(t)$ — измеримый случайный процесс с T -периодическим средним, с вероятностью единица имеет интегрально ограниченные реализации, интегрально ограниченный первый момент, т. е. $\int_t^{t+1} M[\|\eta(\tau)\|_X] d\tau < K$ и выполняются условия теоремы 1. Тогда уравнение (1) имеет решение, которое является случайным процессом с T -периодическим средним.

Теорема 4. Пусть спектр оператора монодромии $U(T)$ уравнения (2) не содержит единицу, а $\eta(t)$ — почти сепарабельнозначный случайный процесс, имеющий T -периодические с вероятностью единица реализации. Тогда уравнение (1) имеет решение с T -периодическими с вероятностью единица реализациями, это решение единственно, т. е. любые два решения с T -периодическими с вероятностью единица реализациями $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ удовлетворяют условию $P(\{\omega : \sup_t \|\xi(t) - \zeta(t)\|_X = 0\}) = 1$. Кроме того, реализации этого процесса имеют вид:

$$\xi^\omega(t) = \int_t^{t+T} U(t)(I - U(T))^{-1} U(T) U^{-1}(s) \eta^\omega(s) ds. \quad (4)$$

Рассмотрим случай когда $A(t)$ постоянный оператор, т. е. рассмотрим уравнение

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + \eta(t), \quad (5)$$

где A — постоянный линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве X .

Пусть спектр оператора A не пересекается с мнимой осью, следовательно, распадается на два спектральных множества, которым

соответствуют инвариантные подпространства оператора A со спектральными проекторами P_+ и P_- .

Через $G_A(t)$ обозначим функцию Грина, определяемую формулой

$$G_A(t) = \begin{cases} e^{At} P_-, & \text{если } t \geq 0, \\ -e^{At} P_+, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Теорема 5. Пусть A есть постоянный линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве X , спектр оператора A не пересекается с мнимой осью, а $\eta(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) — почти сепарабельнозначный случайный процесс и с вероятностью единица имеет сильно непрерывные и интегрально ограниченные на всей оси реализации. Тогда уравнение (5) имеет случайное решение $\xi(t)$ такое, что для почти всех $\omega \in \Omega$

$$\xi^\omega(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_A(t-s) \eta^\omega(s) ds. \quad (6)$$

Среди всех решений, имеющих ограниченные с вероятностью единица реализации, это решение является единственным в том же смысле, что и в теореме 1.

Теорема 6. Пусть $\eta(t)$ есть T -периодически распределенный случайный процесс и выполняются условия теоремы 5. Тогда случайное решение уравнения (5) имеет реализации (6) и T -периодически связано с $\eta(t)$, а если $\eta(t)$ есть стационарно распределенный случайный процесс, то случайное решение уравнения (5) стационарно связано с $\eta(t)$, а следовательно является стационарно распределенным.

Теорема 7. Пусть $\eta(t)$ — измеримый случайный процесс с T -периодическим средним, с вероятностью единица имеет интегрально ограниченные реализации, интегрально ограниченный первый момент и выполняются условия теоремы 5. Тогда уравнение (5) имеет решение с T -периодическим средним, а если $\eta(t)$ случайный процесс со стационарным средним, то уравнение (5) имеет случайное решение со стационарным средним.

Теорема 8. Пусть спектр оператора A не содержит точек мнимой оси $2k\pi i/T$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и случайный процесс $\eta(t)$ имеет непрерывные и T -периодические с вероятностью единица реализации. Тогда уравнение (5) имеет одно и только одно случайное решение с T -периодическими с вероятностью единица реализациями. Это

решение для почти всех ω определяется равенством

$$\xi^\omega(t) = \int_0^T \Gamma_T(t-s) \eta^\omega(s) ds,$$

где $\Gamma_T(t)$ является T -периодической функцией и на $[0, T)$ совпадает с функцией $e^{At}(I - e^{AT})^{-1}$.

2.2. Уравнения с производной в среднем смысле. Рассмотрим уравнение

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + \eta(t), \quad (7)$$

где $A(t) : X \rightarrow X$ ($t \in \mathbb{R}$) — непрерывное T -периодическое семейство линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X , $\eta(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) — непрерывный в среднем случайный процесс в фазовом банаховом пространстве (X, U_X) .

Производная от случайного процесса понимается в среднем смысле, т. е. как предел конечно-разностного отношения $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))/\Delta t$ при $\Delta \rightarrow 0$ по норме $M[\|\cdot\|_X]$ (см. [5]).

Под случайным решением уравнения (7) будем понимать случайный процесс $\xi(t)$, непрерывно дифференцируемый в среднем смысле и удовлетворяющий уравнению (7) при любом t , т. е. при любом t левая и правая части уравнения (7) являются эквивалентными случайными величинами.

Для уравнения (7) можно привести аналоги теорем пункта 2.1. Приведем для примера только две из них.

Теорема 9. Пусть $A(t)$ — непрерывное T -периодическое семейство линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X , $\eta(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) — непрерывный в среднем случайный процесс, имеющий интегрально ограниченный первый момент $(\int_t^{t+1} M[\|\eta(\tau)\|_X] d\tau < K < \infty)$ и пусть спектр оператора монодромии $\sigma(U(T))$ уравнения (8) не пересекается с единичной окружностью и имеет компоненты лежащие как внутри, так и вне единичной окружности. Тогда уравнение (7) имеет случайное решение

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau) \eta(\tau) d\tau, \quad (8)$$

где интеграл в (8) есть интеграл Римана, понимаемый в среднем смысле, т. е. интеграл Римана от функции $G(t, \cdot)\eta(\cdot)$ (при фиксированном t) со значениями в банаховом пространстве $L(\Omega \rightarrow X)$,

а $G(t, \tau)$ есть функция Грина (см. пункт 2.1). Среди всех решений уравнения (7), имеющих ограниченный первый момент, это решение является единственным в том смысле, что любые два решения являются эквивалентными случайными процессами.

Теорема 10. Пусть в предположениях теоремы 9 случайный процесс $\eta(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) является T -периодически распределенным. Тогда случайное решение (8) уравнения (7) T -периодически связано с $\eta(t)$, а, следовательно, и T -периодически распределенное.

2.3. Нелинейные уравнения. Рассмотрим случай с нелинейным возмущением, т. е. уравнение вида

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + \varphi(t, \xi(t - \alpha_1), \dots, \xi(t - \alpha_k), \eta(t)), \quad (9)$$

где $A(t)$ — непрерывное T -периодическое семейство линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X , $\eta(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) — случайный процесс со значениями в измеримом банаховом пространстве (Y, U_Y) , функция $\varphi : \mathbb{R} \times X \times X \times \dots \times X \times Y \rightarrow X$ непрерывная по совокупности переменных, периодическая по первой переменной с периодом T при фиксированных остальных переменных, α_i ($1 \leq i \leq k$) — вещественные константы и для любого t

$$\|\varphi(t, x_1, \dots, x_k, y) - \varphi(t, z_1, \dots, z_k, y)\|_X \leq \sum_{i=1}^k \beta_i \|x_i - z_i\|_X,$$

где β_i являются постоянными.

Теорема 11. Пусть $A(t)$ — непрерывное T -периодическое семейство линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X , спектр оператора монодромии $\sigma(U(T))$ уравнения (2) не пересекается с единичной окружностью и имеет компоненты, лежащие как внутри, так и вне единичной окружности, пусть случайный процесс $\eta(t)$ является T -периодически распределенным, принадлежит пространству $L(\Omega \rightarrow C(\mathbb{R} \rightarrow X))$, $M[\sup_t \|\varphi(t, \theta, \dots, \theta, \eta(t))\|_X] < \infty$ и выполняется неравенство

$$\sup_t \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t, \tau)\|_{[X, X]} d\tau \cdot \sum_{i=1}^k \beta_i < 1. \quad (10)$$

Тогда уравнение (9) с производной от реализаций имеет одно и только одно (в смысле равенства реализаций с вероятностью

единица) T -периодически связанное с $\eta(t)$ и ограниченное по норме $M[\sup_t \|\cdot\|_X]$ случайное решение.

Так как в условиях теоремы 11 операторы

$$(\Phi x)(t) = \varphi(t, x(t - \alpha_1), \dots, x(t - \alpha_k), \eta(t)),$$

$$(G_r x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau) x(\tau) d\tau,$$

где интеграл понимается как интеграл Римана от функции $G(t, \cdot)x(\cdot, \omega) : \mathbb{R} \rightarrow X$, действуют в пространстве $F_r(\eta, X)$ и справедливы оценки:

$$\|G_r\|_{[F_r, F_r]} \leq \sup_t \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t, \tau)\|_{[X, X]} d\tau,$$

$$\|\Phi x\|_{F_r} \leq \sum_{i=1}^k \beta_i \|x\|_{F_r} + \|\varphi(t, \theta, \dots, \theta, \eta(t))\|_{F_r},$$

а из теоремы 2 следует, что уравнение (9) эквивалентно уравнению

$$x(t) = (G_r \Phi x)(t),$$

рассматриваемому в пространстве $F_r(\eta, X)$, то доказательство последней теоремы можно провести с использованием принципа сжимающих отображений.

В наших условиях функция Грина $G(t, \tau)$ удовлетворяет условию

$$\|G(t, \tau)\|_{[X, X]} \leq K e^{-\nu|t-\tau|},$$

где K и ν некоторые положительные постоянные. Тогда неравенство (10) справедливо при $2K \sum_{i=1}^k \beta_i / \nu < 1$.

Опираясь на теоремы второго параграфа можно получить аналогии теоремы 11 как для уравнения (9) с производной в среднем смысле, так для других понятий периодических (с периодическим средним, периодических с вероятностью единица, с периодическими реализациями) и стационарных случайных процессов.

3. Уравнения с параметром

В этом параграфе рассматривается вопрос о существовании случайных периодических решений дифференциальных уравнений с параметром. Приводятся условия продолжимости по параметру периодических случайных решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Рассматриваются уравнения в которых главная линейная часть является как экспоненциально дихотомической при достаточно малом значении параметра, так и уравнения в которых главная линейная часть не является экспоненциально дихотомической при предельном значении параметра.

В первом пункте мы рассматриваем не критический случай, т. е. невозмущенная случайностью часть уравнения при значениях параметра, достаточно «близких» к «предельному», не имеет никаких периодических случайных решений, кроме нулевого.

Во втором пункте рассматривается критический случай, когда невозмущенная случайностью часть может иметь более одного решения.

3.1. Продолжимость решений по параметру. Пусть Λ — топологическое пространство, имеющее предельную точку λ_0 ; X, Y — банаховы пространства, $O(\lambda_0)$ — окрестность точки λ_0 , $\eta(t)$ — заданный T -периодический (в каком-то смысле) случайный процесс в измеримом фазовом банаховом пространстве (Y, U_Y) .

Рассмотрим уравнение

$$\dot{\xi}(t) = A(t, \lambda)\xi(t) + \varphi(t, \xi(t - \alpha_1), \dots, \xi(t - \alpha_{k-1}), \xi(t), \eta(t), \lambda), \quad (11)$$

где $A(t, \lambda)$ — непрерывное (в операторной топологии) семейство линейных ограниченных операторов, действующих в X , и T -периодически зависящее от t .

Пусть отображение $\varphi(\cdot, \dots, \cdot, \lambda) : \mathbb{R} \times X \times \dots \times X \times Y \rightarrow X$ непрерывно по совокупности переменных, T -периодическое по первой переменной при фиксированных остальных.

Предположим, что уравнение (11) при $\lambda = \lambda_0$ имеет T -периодическое в том же смысле, что и $\eta(t)$, случайное решение $\xi_{\lambda_0}(t)$. Если $\eta(t)$ T -периодически распределенный случайный процесс, то будем считать, что $\xi_{\lambda_0}(t)$ и $\eta(t)$ являются T -периодически связанными.

Будем говорить, что T -периодическое случайное решение $\xi_{\lambda_0}(t)$ *продолжимо по параметру λ в среднем смысле*, если для любого

числа $\rho > 0$ существует окрестность $O_\rho(\lambda_0)$ точки λ_0 такая, что при каждом $\lambda_0 \in O_\rho(\lambda_0)$ уравнение (11), с производной в среднем смысле, имеет единственное (любые два случайных решения являются эквивалентными), с ограниченным на всей оси первым моментом, T -периодическое в том же смысле, что и $\eta(t)$, случайное решение $\xi_\lambda(t)$, удовлетворяющее условию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} M[\|\xi_\lambda(t) - \xi_{\lambda_0}(t)\|_X] < \rho$$

для всех $\lambda \in O_\rho(\lambda_0)$. Если $\eta(t)$ является T -периодически распределенным случайным процессом, то будем требовать, чтобы система случайных процессов $\xi_{\lambda_1}(t), \dots, \xi_{\lambda_k}(t), \eta(t)$ была T -периодически связанной для любого целого k и любых $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in O_\rho(\lambda_0)$.

Будем говорить, что T -периодическое случайное решение $\xi_{\lambda_0}(t)$ *продолжимо по параметру λ в смысле реализаций*, если для любого числа $\rho > 0$ существует окрестность $O_\rho(\lambda_0)$ точки λ_0 такая, что при каждом $\lambda_0 \in O_\rho(\lambda_0)$ уравнение (11), с производной для реализаций, имеет единственное (в смысле равенства реализаций с вероятностью единица), T -периодическое в том же смысле, что и $\eta(t)$, ограниченное по норме $M[\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\cdot\|_X]$ случайное решение $\xi_\lambda(t)$, удовлетворяющее условию

$$M[\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\xi_\lambda(t) - \xi_{\lambda_0}(t)\|_X] < \rho$$

для всех $\lambda \in O_\rho(\lambda_0)$. Если $\eta(t)$ является T -периодически распределенным случайным процессом, то будем требовать, чтобы система случайных процессов $\xi_{\lambda_1}(t), \dots, \xi_{\lambda_k}(t), \eta(t)$ была T -периодически связанной для любого целого k и любых $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in O_\rho(\lambda_0)$.

Нас будут интересовать условия, при выполнении которых T -периодическое случайное решение $\xi_{\lambda_0}(t)$ уравнения (11) при $\lambda = \lambda_0$ продолжимо по параметру λ в среднем смысле или в смысле реализаций.

Мы будем считать, что $\xi_{\lambda_0}(t)$ является случайным нулевым решением, в противном случае можно сделать замену $\xi(t) = \zeta(t) + \xi_{\lambda_0}(t)$.

Для дифференциальных уравнений с производной в среднем смысле это значит, что

$$P(\omega | \xi_{\lambda_0} = \theta) = 1$$

и

$$P(\omega : \|\varphi(t, \theta, \dots, \theta, \eta(t), \lambda_0)\|_X = 0) = 1,$$

а для дифференциальных уравнений для реализаций

$$P(\omega : \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\xi_{\lambda_0}\|_X = 0) = 1,$$

$$P(\omega : \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varphi(t, \theta, \dots, \theta, \eta(t), \lambda_0)\|_X = 0) = 1,$$

где θ есть нуль пространства X .

В наших предположениях справедлива следующая теорема.

Теорема 12. Пусть $\varphi_\lambda(t, \cdot, \dots, \cdot, \eta(t)) = \varphi(t, \cdot, \dots, \cdot, \eta(t), \lambda)$ для любого $\lambda \in O_{\lambda_0}$, $A(t, \lambda_0)$ и $\eta(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 11, причем β_i не зависят от λ . Пусть также функция $M[\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varphi(t, \theta, \dots, \theta, \eta(t), \lambda)\|_X]$ непрерывна по λ . Тогда нулевое T -периодически распределенное случайное решение уравнения (11) с производной от реализаций продолжимо по параметру λ в смысле реализаций.

Аналогично теореме 12 можно сформулировать теоремы продолжимости по параметру периодических (стационарных) в различных смыслах случайных решений дифференциальных уравнений как с производной в среднем смысле, так и производной от реализаций.

Рассмотрим теперь уравнение вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (\varepsilon A_1(t) + \dots + \varepsilon^n A_n(t))x(t) + \\ & + \varepsilon^{n+1} \psi_1(t, x(t), x(t - \alpha_1), \dots, x(t - \alpha_{k-1}), \eta(t), \varepsilon), \end{aligned} \quad (12)$$

где $A_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) — непрерывное T -периодическое семейство линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X ; ε — положительный параметр.

Уравнение (12) можно заменой переменной (см. [31])

$$x(t) = (I + \varepsilon Y_1(t) + \varepsilon^2 Y_2(t) + \dots + \varepsilon^n Y_n(t))y(t),$$

где $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$ — T -периодические непрерывные семейства линейных ограниченных операторов, привести к уравнению со стационарной главной линейной частью

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & \varepsilon B_1 y(t) + \dots + \varepsilon^n B_n y(t) + \\ & + \varepsilon^{n+1} \varphi_1(t, y(t), y(t - \alpha_1), \dots, y(t - \alpha_{k-1}), \eta(t), \varepsilon) + \\ & + \varphi_2(t, \eta(t), \varepsilon), \end{aligned} \quad (13)$$

где $B_1, \dots, B_n$ — постоянные операторы.

Поскольку уравнения (12) и (13) эквивалентны, т. е. решение первого является решением второго и наоборот, то мы будем интересоваться условиями существования и продолжимости по параметру решений уравнения (13).

Будем считать, что у B_1 есть изолированное простое нулевое собственное значение, а остальные точки спектра лежат в левой полуплоскости.

В наших предположениях у оператора $B_\varepsilon = B_1 + \varepsilon B_2 + \dots + \varepsilon^{n-1} B_n$ при малых ε существует простое собственное значение $\lambda(\varepsilon)$, которое можно представить рядом $\lambda(\varepsilon) = \lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \varepsilon^2 + \dots + \lambda_i \varepsilon^i + \dots$, а остальные собственные значения оператора B_ε при малых ε будут по-прежнему лежать в левой полуплоскости. Собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda(\varepsilon)$, можно представить рядом $e(\varepsilon) = e_0 + \varepsilon e_1 + \dots + \varepsilon^i e_i + \dots$. Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ и вектора $e_1, e_2, \dots$ можно определить из равенства $B(\varepsilon)e(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)e(\varepsilon)$.

Нас будет интересовать лишь первый отличный от нуля коэффициент $\operatorname{Re} \lambda_{j_0}$, номер которого мы обозначили через j_0 . Будем предполагать, что $j_0 \leq n - 1$.

Теорема 13. Пусть для достаточно малого ε функция φ_1 и случайный процесс $\eta(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 11, причем коэффициенты β_i не зависят от ε . Пусть

$$\varphi_2(t, \eta(t), \varepsilon) \in F_r(\eta, X)$$

для достаточно малого ε . Тогда при достаточно малом ε у уравнения (13) с производной от реализаций существует случайное решение T -периодически связанное с $\eta(t)$. А если $\varphi_1(t, \theta, \dots, \theta, \eta(t), \varepsilon)$ ограничена по норме пространства $F_r(\eta, X)$ равномерно по ε из $[0, \varepsilon_0]$, а $\varphi_2(t, \eta(t), \varepsilon) \equiv \theta$, то нулевое T -периодически распределенное случайное решение уравнения (13) продолжимо по параметру ε .

Аналогично теореме 13 можно сформулировать теоремы продолжимости по параметру периодических (стационарных) в различных смыслах случайных решений дифференциальных уравнений как с производной в среднем смысле, так и производной от реализаций.

3.2. Ветвление периодических случайных решений. В заключение рассмотрим случай, когда невозмущенная случайностью часть уравнения может иметь более одного решения. Мы будем исследовать вопрос существования малых ненулевых случайных пери-

одических решений при малых значениях параметра ε . В рассматриваемом ниже случае, в отличие от предыдущих, малое решение обязано быть ненулевым и имеет место неединственность решений.

Пусть X есть банахово пространство и пусть для $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ отображение $\Phi(\varepsilon, \cdot, \dots, \cdot) : X \times \dots \times X \rightarrow X$ является линейным по каждой из m переменных и ограничено, т. е. существуют постоянные $K_\varepsilon < \infty$ такие, что

$$\|\Phi(\varepsilon, \cdot, \dots, \cdot)\| = \sup_{\|x_1\|=1, \dots, \|x_m\|=1} \|\Phi(\varepsilon, x_1, \dots, x_m)\|_X \leq K_\varepsilon. \quad (14)$$

Рассмотрим отображения $\Phi(\varepsilon, \cdot^m) = \Phi(\varepsilon, \cdot, \dots, \cdot) : X \rightarrow X$ такие, т. е. $\Phi(\varepsilon, x^m) = \Phi(\varepsilon, x, \dots, x)$, которые называются m -степенными (см. [39, с. 378]). Можно считать, что степень $\Phi(\varepsilon, \cdot^m)$ порождена симметричным оператором, т. е. оператором не меняющим значения при любой перестановке его аргументов. Действительно,

$$F_\varepsilon(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum \Phi(\varepsilon, x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_m}),$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам $(\nu_1, \dots, \nu_m)$, симметричен и $\Phi(\varepsilon, \cdot^m) = F_\varepsilon(x, \dots, x)$. Будем считать, что степени $\Phi(\varepsilon, x^m)$ порождены симметричными операторами и тем самым определены операторы $\Phi(\varepsilon, \cdot^s, \cdot^{m-s}) : X \times X \rightarrow X$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в банаховом пространстве со случайным возмущением и запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (\varepsilon A_1(t) + \dots + \varepsilon^n A_n(t))x(t) + \varepsilon \Phi(\varepsilon, x^m(t)) + \\ & + \varepsilon^{n+1} \psi(t, x(t), x(t - \alpha_1), \dots, x(t - \alpha_{k-1}), \eta(t), \varepsilon), \end{aligned} \quad (15)$$

где $A_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) — непрерывное периодическое (с периодом T) семейство линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X ; ε — положительный параметр; $\Phi(\varepsilon, \cdot^m)$ — непрерывное (по норме (14)) семейство степенных операторов, действующих в банаховом пространстве X , $m > 2$; $\eta(t)$ — T -периодически распределенный случайный процесс в фазовом банаховом пространстве (Y, U_Y) ; $\psi : \mathbb{R} \times X \times \dots \times X \times Y \times \mathbb{R} \rightarrow X$ есть периодическое (с периодом T) по первой переменной и непрерывное по совокупности переменных отображение. Предположим, что у

уравнения (15) при всех значениях параметра есть нулевое случайное решение, т. е. будем считать $P(\omega : \psi(t, \theta, \dots, \theta, \eta(t), \varepsilon) = \theta)$ равна единице, если производная в (15) понимается в среднем смысле, и $P(\omega : \sup_t \|\psi(t, \theta, \dots, \theta, \eta(t), \varepsilon)\|_X = 0)$ равна единице, если производная в (15) есть производная от реализаций.

После замены, описанной в предыдущем пункте, уравнение (15) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & \varepsilon B_1 y(t) + \dots + \varepsilon^n B_n y(t) + \varepsilon \Phi(\varepsilon, y^m) + \\ & + \varepsilon^2 \sum_{s=0}^{m-1} C_m^s \varepsilon^{m-s-1} \Phi(\varepsilon, y^s (\sum_{i=1}^n \varepsilon^{i-1} Y_i(t) y(t))^{m-s}) + \\ & + \varepsilon^{n+1} \varphi(t, y(t), y(t - \alpha_1), \dots, y(t - \alpha_{k-1}), \eta(t), \varepsilon), \end{aligned}$$

где $B_1, \dots, B_n$ — постоянные операторы.

Вопрос о существовании T -периодически связанного с $\eta(t)$ случайного решения уравнения (15) эквивалентен при малых ε вопросу о существовании $T\varepsilon$ -периодически связанного с $\eta(\frac{t}{\varepsilon})$ случайного решения уравнения

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & (B_1 + \varepsilon B_2 + \dots + \varepsilon^{n-1} B_n) z(t) + \\ & + \varepsilon^n \varphi(t/\varepsilon, z(t), z(t - \alpha_1 \varepsilon), \dots, z(t - \alpha_{k-1} \varepsilon), \eta(t/\varepsilon), \varepsilon) + \Phi(\varepsilon, z^m(t)) + \\ & + \varepsilon \sum_{s=0}^{m-1} C_m^s \varepsilon^{m-s-1} \Phi \left(\varepsilon, z^s(t) \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon^{i-1} Y_i(t) z(t) \right)^{m-s} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

которое получается заменой $z(t) = y(t/\varepsilon)$.

Мы опять ограничимся анализом того случая, когда у оператора B_1 простое нулевое собственное значение, причем оно является изолированной точкой спектра и остальная часть спектра лежит в левой полуплоскости. Тогда можно найти собственное значение $\lambda(\varepsilon) = \lambda_{j_0} \varepsilon^{j_0} + o(\varepsilon^{j_0})$ оператора $B(\varepsilon) = B_1 + \varepsilon B_2 + \dots + \varepsilon^{n-1} B_n$, где λ_{j_0} — отличный от нуля коэффициент.

Будем считать, что $j_0 \leq n-1$, $\operatorname{Re} \lambda_{j_0} \neq 0$. Через e_0 и g_0 будем обозначать собственные векторы соответственно операторов B_1 и его сопряженного B_1^* , отвечающие нулевому собственному значению и удовлетворяющие условию $g_0(e_0) = 1$. В дальнейшем будем считать,

что $\overline{\alpha_0} = g_0(\Phi(0, e_0^m)) \neq 0$ и для достаточно малого ε отображение φ удовлетворяет условию Липшица:

$$\|\varphi(t, x_1, \dots, x_k, y, \varepsilon) - \varphi(t, y_1, \dots, y_k, y, \varepsilon)\|_X \leq \sum_{i=1}^k \beta_i \|x_i - y_i\|_X,$$

где β_i постоянны и пусть $\eta(t) \in C(\mathbb{R} \rightarrow L_\infty(\Omega \rightarrow Y))$.

Теорема 14. Пусть X является комплексным банаховым пространством, тогда в наших предположениях существует ε^* такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ уравнение (16) с производной в среднем смысле имеет, по крайней мере, $(m-1)$ ненулевых случайных решений

$$x_1(t, \varepsilon), \dots, x_{m-1}(t, \varepsilon),$$

каждое из которых является T -периодически связанным с $\eta(t)$.

Теорема 15. Пусть X — вещественное гильбертово пространство и операторы $B_1, \dots, B_n$ являются самосопряженными, тогда в условиях этого пункта существует ε^* такое, что

1. Если m четное, то при $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ уравнение (16) с производной в среднем смысле имеет, по крайней мере, одно случайное ненулевое решение, T -периодически связанное с $\eta(\frac{t}{\varepsilon})$.

2. Если m нечетное и $\alpha_0 \lambda_{j_0} < 0$, то при $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ уравнение (16) с производной в среднем смысле имеет, по крайней мере, два случайных ненулевых решения, T -периодически связанных с $\eta(\frac{t}{\varepsilon})$.

Если уравнение (16) рассматривать как уравнение в банаховом пространстве $L_\infty(\Omega \rightarrow X)$, то утверждения теорем 14 и 15 остаются справедливыми.

Для уравнения (16) с производной от реализаций можно привести аналоги теорем 14 и 15, а также можно получить теоремы о ветвлении стационарно связанных с $\eta(t)$ случайных решений, если $\eta(t)$ стационарно распределенный случайный процесс.

Литература

1. Баскаков А. Г., Чан Хыу Бонг, Субботин В. Ф. Об ограниченных решениях дифференциально-разностных уравнений в банаховом пространстве // Тр. матем. факультета.—Воронеж: ВГУ, 1972.—Т. 7.
2. Баскаков А. Г., Чан Хыу Бонг, Субботин В. Ф. Об ограниченных решениях линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве // Тр. НИИМ.—Воронеж: ВГУ, 1973.—Т. 7.

3. Бурд В. Ш., Колесов Ю. Г. О дихотомии решений функционально-разностных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР.—1970.—Т. 195, вып. 6.
4. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений.—М.: Наука, 1969.
5. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов.—М.: Наука, 1969.
6. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.—М.: Наука, 1979.
7. Ворович И. И. Об устойчивости движения при случайных возмущениях // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1956.—Т. 20, вып. 1.
8. Гихман И. И., Скороход Л. В. Теория случайных процессов. Т. 1.—М.: Наука, 1971.
9. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем.—М.: Наука, 1979.
10. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.—М.: Наука, 1970.
11. Дороговцев А. Я. Некоторые замечания о случайных процессах, возмущаемых периодическими случайными процессами // Украинский мат. журн.—1962.—Т. 14, № 2.
12. Дуб Дж. Вероятностные процессы.—М.: ИЛ, 1956.
13. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины.—М.: Наука, 1965.
14. Илолов М., Козоброд В. Н. Периодические случайные возмущения дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Докл. АН ТаджССР.—1983.—Т. 26, вып. 7.
15. Илолов М., Козоброд В. Н. Периодические случайные решения дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа.—Минск, 1984. Деп. в ВИНТИ 09.01.84, № 241–84.
16. Илолов М., Козоброд В. Н. Периодические случайные решения дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Диф. уравнения.—1985.—Т. 21, вып. 5.
17. Илолов М., Козоброд В. Н. Периодические случайные возмущения дифференциальных уравнений с параметром // Докл. АН ТаджССР.—1988.—Т. 31, вып. 3.
18. Козоброд В. Н. Периодические случайные решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.—Воронеж, 1979. Деп. в ВИНТИ 30.01.80, № 402-80.
19. Козоброд В. Н. Периодические случайные решения нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.—Воронеж, 1979. Деп. в ВИНТИ 8.04.80, № 1345-80.
20. Козоброд В. Н. Бифуркация T -периодически распределенных решений // XV Воронеж. зимняя матем. шк. (Материалы конф.).—Воронеж: Воронежский ун-т, 1981. Деп. в ВИНТИ 16.12.81, № 5691-81.
21. Козоброд В. Н. О случайных периодически распределенных решениях дифференциальных уравнений // Докл. АН ТаджССР.—1982.—Т. 25, вып. 7.
22. Козоброд В. Н. Случайные периодические возмущения дифференциальных уравнений с параметром // В сб.: Информационные технологии в науке и образовании.—Шахты: ЮРГУЭС, 2001.
23. Козоброд В. Н. Методы функционального анализа в теории случайных пе-

- риодических процессов // В сб.: Информационные технологии в науке и образовании.—Шахты: ЮРГУЭС, 2002.
24. Козоброд В. Н. Периодические случайные возмущения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Воронеж, 1981.
 25. Козоброд В. Н., Сабиров Т. С. О продолжимости по параметру периодически распределенных решении дифференциальных уравнений в банаховых пространствах со случайными коэффициентами // Функциональный анализ: Межвузовский сборник. Т. 12.—Ульяновск, 1979.
 26. Козоброд В. Н., Субботин В. Ф. Периодические случайные решения дифференциально-разностных уравнений в банаховом пространстве.—Воронеж, 1979. Деп. в ВИНТИ 12.02.80, № 402-80.
 27. Козоброд В. Н., Субботин В. Ф. Периодические случайные решения нелинейных дифференциально-разностных уравнений в банаховом пространстве.—Воронеж, 1980. Деп. в ВИНТИ, № 512-81.
 28. Козоброд В. Н., Субботин В. Ф. Периодически распределенные случайные решения дифференциально-разностных уравнений в банаховом пространстве // XV Воронеж. зимняя матем. школа.—Воронеж, 1981. Деп. в ВИНТИ 16.12.81, № 5691-81.
 29. Колмановский В. Б. Стационарные решения уравнений с запаздыванием // Проблемы передачи информации.—1967.—Т. 3, вып. 1.
 30. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.—М.: Наука, 1981.
 31. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания.—М.: Наука, 1970.
 32. Лэнинг Дж. Х., Беттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления.—М.: ИЛ, 1958.
 33. Массера Х. Л., Шеффер Х. Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.—М.: Мир, 1970.
 34. Прохоров Ю. В., Розанов Р. А. Теория вероятностей.—М.: Наука, 1967.
 35. Пугачев В. С. Теория случайных процессов.—М.: Физматгиз, 1962.
 36. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы.—М.: Физматгиз, 1963.
 37. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1.—М.: Наука, 1976.
 38. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.—М.: Сов. радио, 1961.
 39. Треногин В. А. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1980.
 40. Хасьминский Р. З. Устойчивость системы дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.—М.: Наука, 1969.
 41. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах.—М.: Мир, 1966.
 42. Хинчин А. Я. Теория корреляции стационарных случайных процессов // Успехи мат. наук.—1938.—Т. 5.
 43. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций // Успехи мат. наук.—1952.—Т. 7, вып. 5.
 44. Bharuch-Reid A. T. Random Integral Equations // Mathematics in Science and Engineering (N. Y.).—1972.—V. 96.

Волгодонск, Волгодонский институт сервиса ЮРГУЭС;
 Лаборатория математических исследований ИПМИ и ЮРГУЭС
 E-mail: kvn06@mail.ru

АНАЛИЗ, АЛГЕБРА И ЛОГИКА
В ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ

А. Г. Кусраев

Введение

В последнее десятилетие стандартный анализ претерпевает качественные изменения: все больше внимания уделяется синтетическим стандартным и нестандартным методам, характеризующимся комбинированием разных идей и технических средств из анализа, алгебры и математической логики. Некоторые достижения в этом направлении отражены в монографиях [7, 10, 14, 15]. Цель настоящей работы — продемонстрировать такой подход на примере одной проблемы из теории операторов в векторных решетках.

В работе Э. В. Викстеда (Wickstead A. W.) [25] 1977 года был поставлен вопрос о том, всякий ли нерасширяющий (= коммутирующий с порядковыми проекторами) линейный оператор в расширенном пространстве Канторовича автоматически порядково ограничен.¹ Вскоре (в 1978 г.) Ю. А. Абрамович, А. И. Векслер и А. В. Колдунов [1] анонсировали первый пример неограниченного нерасширяющего линейного оператора. Кроме того, выяснилось, что ответ на вопрос Викстеда зависит от пространства, в котором действуют операторы. В работах упомянутых трех авторов [1, 2] и П. Макполина и А. В. Викстеда [23] были найдены классы векторных решеток, в которых нерасширяющий линейный оператор автоматически порядково ограничен. В этих же работах [2, 23] было установлено, что вопрос Викстеда имеет положительный ответ тогда и только тогда, когда рассматриваемое K -пространство локально одномерно. Тем самым, обсуждаемая задача свелась к строению локально одномерных K -пространств.

В 1980-х годах была выдвинута гипотеза о том, что для K -пространства свойства локальной одномерности и дискретности равносильны. Ошибочные доказательства справедливости этой гипотезы

¹Как сообщил автору А. И. Векслер, ранее аналогичный вопрос формулировал Г. Я. Лозановский на петербургских математических семинарах.

и ее отрицания были опубликованы соответственно в [1] и [23]. В 1993 г. А. В. Викстед [18] зафиксировал вопрос о справедливости этой гипотезы как открытый.

Кроме того, в булевозначном анализе хорошо известно, что локальная одномерность расширенного K -пространства связана со строением поля действительных чисел $\mathcal{R}$ внутри булевозначной модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Точнее говоря (см. [10, 14]), расширенное K -пространство в соответствии с теоремой Гордона [14, теорема 10.3.4] можно представить как спуск $\mathcal{R} \downarrow$ булевозначного поля действительных чисел $\mathcal{R}$, а образом стандартного поля действительных чисел $\mathbb{R}$ (при каноническом вложении стандартного универсума $\mathbb{V}$ в булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$) служит подполе $\mathbb{R}^\wedge$ поля $\mathcal{R}$. При этом несложно убедиться (и это хорошо было известно в других терминах), что $\mathcal{R} \downarrow$ локально одномерно в том и только в том случае, если $\mathbb{R}^\wedge = \mathcal{R}$. Здесь также сложилось убеждение, что равенство $\mathbb{R}^\wedge = \mathcal{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ связано с дискретностью K -пространства $\mathcal{R} \downarrow$ или, что тоже самое, с дискретностью булевой алгебры $\mathbb{B}$.

В 1995 г. А. Е. Гутман в работе [21] установил, что существует непрерывное (безатомное) локально одномерное K -пространство (см. также [6, 22]). В этой же работе он получил описание баз расширенных локально одномерных K -пространств: ими оказались в точности σ -дистрибутивные полные булевы алгебры.

В 2004 г. в работе А. Г. Кусраева [11] был предложен булевозначный подход к изучению нерасширяющих операторов. При этом были обнаружены новые взаимосвязи. Так, например, построение нерегулярного нерасширяющего оператора можно провести внутри подходящего булевозначного универсума с помощью базиса Гамеля поля вещественных чисел, рассматриваемого как векторное пространство над некоторым его подполем, см. [10, 14]. Разумеется, некоторые важные свойства K -пространства $\mathcal{R} \downarrow$ связаны со строением поля вещественных чисел $\mathcal{R}$, рассматриваемого как векторное пространство над $\mathbb{R}^\wedge$. В частности, используя базис Гамеля, можно построить разрывную $\mathbb{R}^\wedge$ -линейную функцию в $\mathcal{R}$, которая и дает нерегулярный линейный нерасширяющий оператор в $\mathcal{R} \downarrow$.

Развивая булевозначный подход, в [12] проведены аналогичные построения, но привлекая *базис трансцендентности* вместо базиса Гамеля, и получены новые характеристики K -пространств с σ -дис-

трибутивной базой в терминах более узкого класса нерасширяющих линейных операторов.

Текст статьи организован следующим образом. В первом параграфе представлен необходимый минимум сведений о вещественных и комплексных пространствах Канторовича и порядково ограниченных операторах в них. Во втором параграфе дается формулировка проблемы Викстеда. Третий параграф показывает, как строить нерегулярные решения функционального уравнения Коши с помощью базиса Гамеля. Четвертый параграф содержит элементы теории расширения полей. Здесь основное внимание уделено продолжению автоморфизмов и дифференцирований полей, причем роль базиса Гамеля играет базис трансцендентности. Пятый параграф посвящен эскизному изложению булевозначных моделей теории множеств. В нем сформулированы основные принципы переноса, перемешивания и максимума. В шестом параграфе развиты основные технические средства булевозначного анализа — операции канонического вложения, спуска и подъема, а также даны седьмой параграф ключевой: здесь формулируется теорема Гордона о том, что интерпретация поля действительных (комплексных чисел) в булевозначной модели представляет собой расширенное вещественное (комплексное) пространство Канторовича. Оказывается, что в силу этого факта проблема Викстеда — всего лишь новая форма вопроса о регулярности всех решений функционального уравнения Коши при некотором дополнительном условии однородности. Наконец, восьмой параграф содержит результаты о нерасширяющих операторах, полученные вследствие такого синтеза. В частности, показано, что в расширенном комплексном K -пространстве с фиксированной мультипликативной структурой σ -дистрибутивность базы равносильна каждому из следующих утверждений: (1) любой нерасширяющий линейный оператор порядково ограничен; (2) нет ненулевых дифференцирований; (3) любой нерасширяющий эндоморфизм является порядковым проектором; (4) нет нетривиальных нерасширяющих автоморфизмов.

Необходимые сведения из теории векторных решеток содержатся в [10, 19, 24], из булевозначного анализа — в [14, 15, 20], из теории полей — в [4, 5, 9].

1. Анализ: Пространство Канторовича

Здесь мы коротко рассмотрим порядково полные векторные решетки. Необходимые сведения имеются в пределах [10, 19, 24].

1.1. Пусть $\mathbb{F}$ — линейно упорядоченное поле. *Упорядоченное векторное пространство* над $\mathbb{F}$ — пара $(E, \leq)$, где E — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, а $\leq$ — *векторный порядок* в E , т. е. отношение порядка в E , согласованное со структурой векторного пространства. Последнее означает, что неравенства в E можно складывать и умножать на положительные элементы поля $\mathbb{F}$. Задание векторного порядка в векторном пространстве E над полем $\mathbb{F}$ равносильно также указанию множества — *положительного конуса* $E^+ \subset E$ со свойствами: $E^+ + E^+ \subset E^+$; $\lambda E^+ \subset E^+$ ($0 \leq \lambda \in \mathbb{F}$); $E^+ \cap E^+ = \{0\}$. При этом порядок $\leq$ и конус E^+ связаны соотношением

$$x \leq y \leftrightarrow y - x \in E^+ \quad (x, y \in E).$$

Упорядоченное векторное пространство, являющееся решеткой, называют *векторной решеткой*¹. Для элементов x, y векторной решетки E и приняты обозначения: $x \vee y := \sup\{x, y\}$, $x \wedge y := \inf\{x, y\}$, $|x| := \sup\{x, -x\}$, $x^+ := \sup\{x, 0\}$, $x^- := (-x)^+$.

Пространством Канторовича, или, короче, *K-пространством*, называют такую векторную решетку, в которой всякое порядково ограниченное множество имеет точные границы. Порядковая ограниченность множества означает, что оно содержится в каком-нибудь порядковом интервале $[a, b] := \{x \in E : a \leq x \leq b\}$ ($a, b \in E, a \leq b$).

1.2. Элементы $x, y \in E$ называют *дизъюнктивными* и пишут $x \perp y$, если $|x| \wedge |y| = 0$. *Компонентой* (или *полосой*) векторной решетки E — называют множество вида $M^\perp := \{x \in E : (\forall y \in M) x \perp y\}$, где $M \subset E$, $M \neq \emptyset$. Совокупность всех полос E , упорядоченная по включению, образует полную булеву алгебру $\mathfrak{B}(E)$, в которой булевы операции выглядят так:

$$L \wedge K = L \cap K, \quad L \vee K = (L \cup K)^{\perp\perp}, \quad L^* = L^\perp \quad (L, K \in \mathfrak{B}(E)).$$

Алгебра $\mathfrak{B}(E)$ носит название *базы* E .

¹В западной литературе векторные решетки принято называть *пространствами Рисса*.

Элемент $1 \in E$ — называют (*слабой порядковой*) *единицей*, если в E нет ненулевых элементов, дизъюнктивных 1 , т. е. если $\{1\}^\perp = \{0\}$ или, что то же самое $\{1\}^{\perp\perp} = E$. Элемент $e \in E$ называют *единичным* относительно 1 или *осколком единицы* 1 , если $e \wedge (1 - e) = 0$. Множество $\mathfrak{E}(E) := \mathfrak{E}(1)$ всех единичных элементов снабжают индуцированным из E порядком. Упорядоченное множество $\mathfrak{E}(E)$ является булевой алгеброй, в которой булево дополнение имеет вид: $e^* := 1 - e$ ($e \in \mathfrak{E}(1)$).

1.3. Для каждой полосы K в K -пространстве E имеет место разложение в прямую сумму $E = K \oplus K^\perp$. Тем самым однозначно определен оператор проектирования $[K]$ на подпространство K параллельно $K^\perp$, называемый *порядковым проектором* (или просто проектором, если контекст исключает путаницу). При этом выполняются неравенства $0 \leq [K]x \leq x$ для всех $0 \leq x \in E$. Наоборот, если линейный проектор π в E удовлетворяет неравенствам $0 \leq \pi x \leq x$ ($0 \leq x \in E$), то $K := \pi(E)$ является компонентой, причем $\pi = [K]$. В множестве всех порядковых проекторов $\mathfrak{P}(E)$ вводят порядок, полагая $\rho \leq \pi$ в том и только том случае, когда $\text{im } \rho \subset \text{im } \pi$. Полезно иметь в виду равносильное определение $\rho \leq \pi \leftrightarrow \rho\pi = \pi\rho = \rho$. Упорядоченное множество $\mathfrak{P}(E)$ является полной булевой алгеброй, в которой булевы операции имеют вид:

$$\begin{aligned}\pi \wedge \rho &= \pi\rho = \rho\pi, \quad \pi \vee \rho = \pi + \rho - \pi\rho, \\ \pi^* &= I_E - \pi \quad (\pi, \rho \in \mathfrak{P}(E)).\end{aligned}$$

1.4. Теорема. Пусть E — произвольное K -пространство. Отображение $K \mapsto [K]$ есть изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{B}(E)$ и $\mathfrak{P}(E)$. Если же в E имеется порядковая единица, то отображения $\pi \mapsto \pi 1$ из $\mathfrak{P}(E)$ в $\mathfrak{E}(E)$ и $e \mapsto \{e\}^{\perp\perp}$ из $\mathfrak{E}(E)$ в $\mathfrak{B}(E)$ также являются изоморфизмами булевых алгебр.

1.5. Пусть E и F — векторные решетки. Линейный оператор $T : E \rightarrow F$ называют *положительным*, если $Tx \geq 0$ для каждого $0 \leq x \in E$, и *регулярным*, если $T = T_1 - T_2$ для некоторых положительных операторов $T_1, T_2 : E \rightarrow F$. Говорят, что оператор T *порядково ограничен* (или *о-ограничен*), если $T(M)$ — порядково ограниченное множество в F для любого порядково ограниченного $M \subset E$. Если F — это K -пространство, то классы регулярных и

порядково ограниченных операторов совпадают. Более того, справедливо следующее утверждение.

1.6. Теорема Рисса — Канторовича. Если E — векторная решетка и F — произвольное K -пространство, то пространство $L^\sim(E, F)$ всех регулярных операторов из E в F само является K -пространством.

1.7. Напомним, что комплексной векторной решеткой принято называть комплексификацию $E_{\mathbb{C}} := E \oplus iE$ вещественной векторной решетки E при условии, что существует модуль $|z|$ каждого элемента $z \in E_{\mathbb{C}}$, определяемый формулой

$$|z| := \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} |(\cos \theta)x + (\sin \theta)y| \quad (z := x + iy \in E_{\mathbb{C}}).$$

В случае K -пространства последнее условие выполняется автоматически. Дизъюнктность элементов $z := x + iy$ и $z' := x' + iy'$ из $E_{\mathbb{C}}$ вводится, как обычно, формулой $z \perp z' \leftrightarrow |z| \wedge |z'| = 0$ и равносильна соотношению $\{x, y\} \perp \{x', y'\}$. Полоса J в $E_{\mathbb{C}}$ определяется как комплексификация $J_0 \oplus iJ_0$ полосы $J_0 \subset E$. Как и в вещественном случае, всякая полоса в $E_{\mathbb{C}}$ допускает представление в виде $\{z \in E_{\mathbb{C}} : (\forall v \in V) z \perp v\}$, где V — непустое подмножество $E_{\mathbb{C}}$.

1.8. Рассмотрим вещественные векторные решетки E и F . Пространство $\mathbb{C}$ -линейных операторов $L(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$ изоморфно комплексификации вещественного пространства $\mathbb{R}$ -линейных операторов $L(E, F)$. Оператор $T \in L(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$ допускает и притом единственное представление в виде $T = T_1 + iT_2$, где $T_1, T_2 \in L(E, F)$ и произвольный оператор $S \in L(E, F)$ отождествляется со своим каноническим продолжением $\tilde{S} \in L(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$, определяемым формулой $\tilde{S}z := Sx + iSy$, $z = x + iy$. В частности, если E и F рассматривать как вещественные подпространства $E_{\mathbb{C}}$ и $F_{\mathbb{C}}$ соответственно, то пространство $L(E, F)$ можно мыслить как вещественное подпространство $L(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$.

Оператор $T = T_1 + iT_2$ называют положительным, если $T_1 \geq 0$ и $T_2 = 0$. Если $E_{\mathbb{C}} = J \oplus J^\perp$ для некоторого идеала $J \subset E_{\mathbb{C}}$, то существует проектор $P : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ с ядром $J^\perp$ и образом J . Ограничение P на E будет порядковым проектором в E и, в частности, P — положительный оператор.

2. Операторы: Проблема Викстеда

В этом параграфе введем класс нерасширяющих операторов и приведем формулировку проблемы Викстеда.

2.1. Пусть E — произвольное K -пространство. Для линейного оператора $T : E \rightarrow E$ равносильны следующие условия:

- (1) $Te \in \{e\}^{\perp\perp} \quad (e \in E)$;
- (2) $e \perp f \rightarrow Te \perp f \quad (e, f \in E)$;
- (3) $T(K) \subset K \quad (K \in \mathfrak{B}(E))$,
- (4) $\pi \circ T = T \circ \pi \quad (\pi \in \mathfrak{P}(E))$.

2.2. Говорят, что оператор T *сохраняет полосы* или является *нерасширяющим*, если имеет место одно (а тогда и любое) из указанных условий (1)–(4). Скажем, что оператор $T := T_1 + iT_2 : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ сохраняет полосы если таковыми являются вещественные линейные операторы T_1 и T_2 . Нетрудно показать, что если E — K -пространство, то оператор T сохраняет полосы в том и только в том случае, когда $\pi T = T\pi$ для всех $\pi \in \mathfrak{B}(E)$.

2.3. Пространство Канторовича E называют *расширенным*, если в нем любое непустое множество попарно дизъюнктивных положительных элементов имеет супремум.

В расширенном K -пространстве существует порядковая единица. Более того, если в расширенном K -пространстве E фиксировать порядковую единицу $\mathbb{1}$, то в E можно и притом единственным способом определить структуру коммутативного кольца так, что выполнены условия:

- (1) для положительного $a \in E$ оператор умножения $x \mapsto ax$ положителен и сохраняет полосы;
- (2) $\mathbb{1}$ служит кольцевой единицей.

Если векторная решетка E является одновременно кольцом (алгеброй) и выполнено условие (1), то E принято называть f -кольцом (f -алгеброй). Таким образом, в расширенном K -пространстве выбор порядковой единицы однозначно определяет структуру f -алгебры.

Комплексную f -алгебру $E_{\mathbb{C}}$ определим как комплексификацию вещественной f -алгебры E при условии, что существует модуль любого элемента (см. определение 2.1). Умножение в E естественно

продолжается до умножения в $E_{\mathbb{C}}$ по формуле $(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$. При этом $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ($z_1, z_2 \in E_{\mathbb{C}}$).

2.4. Перечислим важнейшие примеры расширенных K -пространств. В 2.1 (1)–(3) отношение порядка вводится поточечно, т. е. $f \leq g$ означает, что $f(t) \leq g(t)$ для всех t из общей области определения f и g .

(1) Расширенным K -пространством является пространство $L^0(\Omega, \Sigma, \mu) := L^0_{\mathbb{R}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ классов эквивалентности почти всюду конечных измеримых функций на Ω , где (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, причем μ σ -конечна (или, более общо, обладает свойством прямой суммы, см. [10, 1.1.8]). Комплексификация этого пространства $L^0_{\mathbb{C}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ — комплексное расширенное K -пространство состоит из классов эквивалентности почти всюду определенных комплексных измеримых функций на Ω . База K -пространства $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ изоморфна булевой фактор-алгебре $\Sigma/\mu^{-1}(0)$ — булевой алгебре измеримых множеств по модулю множеств нулевой меры. Порядковый проектор в $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ представляет собой оператор умножения на характеристическую функцию измеримого множества.

(2) Пространство $C_{\infty}(Q)$ непрерывных функций, определенных на экстремально несвязном компакте Q , со значениями в расширенной числовой прямой и принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотном множестве [10, 1.4.2]. Комплексификация этого пространства $C_{\infty}(Q, \mathbb{C})$ состоит из классов эквивалентности непрерывных комплекснозначных функций, определенных на открытых плотных подмножествах Q ; эквивалентными считаются функции, совпадающие на пересечении своих областей определения. База этого K -пространства изоморфна булевой алгебре открыто-замкнутых подмножеств компакта Q . Порядковый проектор в $C_{\infty}(Q)$ — оператор умножения на характеристическую функцию открыто-замкнутого множества.

(3) Пространство $\text{Bor}(Q)$ классов эквивалентности борелевских функций, определенных на топологическом пространстве Q . Две функции *эквивалентны*, если они совпадают на дополнении к множеству первой категории. База K -пространства $\text{Bor}(Q)$ изоморфна булевой алгебре борелевских подмножеств Q по модулю множеств первой категории. Комплексификация $\text{Bor}(Q, \mathbb{C})$ пространства

$\text{Bor}(Q)$ состоит из классов эквивалентности комплекснозначных борелевских функций, определенных на Q .

(4) Пространство $\overline{\mathfrak{A}}$ самосопряженных (не обязательно ограниченных) операторов в гильбертовом пространстве, присоединенных к коммутативной алгебре фон Неймана $\mathfrak{A}$. База K -пространства изоморфна булевой алгебре всех ортогональных проекторов, входящих в $\mathfrak{A}$.

2.5. Проблема Викстеда. Описать расширенные K -пространства, в которых все линейные нерасширяющие операторы порядково ограничены.

2.6. В связи с проблемой Викстеда возникло следующее понятие. Рассмотрим расширенное K -пространство G с единицей 1 . Множество $\mathcal{E} \subset G$ называют *локально линейно независимым*, если для любых элементов $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{E}$, ненулевых чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и порядкового проектора π в G равенство $\sum_{k=1}^n \lambda_k \pi e_k = 0$ влечет $\pi e_k = 0$ при $k := 1, \dots, n$. Одноточечное множество $\{1\}$ локально линейно независимо. Максимальное локально линейно независимое множество в G называют *локальным базисом Гамеля* G . Из леммы Куратовского — Цорна следует, что в каждом расширенном K -пространстве существует локальный базис Гамеля. Кроме того, локально линейно независимое множество $\mathcal{E} \subset G$ будет локальным базисом Гамеля для G , если и только если для каждого $x \in G$ найдется разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в $\mathfrak{B}(G)$ такое, что для любого индекса $\xi \in \Xi$ существуют конечные множества элементов $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{E}$ и ненулевых чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, для которых $\pi_\xi x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \pi_k e_k$ при всех $(\xi \in \Xi)$.

2.7. Элемент $e \in G_+$ именуют *локально постоянным относительно* $f \in G_+$, если $e = \sup_{\xi \in \Xi} \lambda_\xi \pi_\xi f$ для некоторого числового семейства $(\lambda_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и семейства $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ попарно дизъюнктивных порядковых проекторов.

Для произвольного расширенного K -пространства G равносильны следующие утверждения:

(1) все элементы G_+ являются локально постоянными относительно 1 ;

(2) все элементы G_+ являются локально постоянными относительно произвольной порядковой единицы $e \in G$;

(3) $\{1\}$ — локальный базис Гамеля для G ;

(4) каждый локальный базис Гамеля для G состоит из попарно дизъюнктивных элементов.

2.8. Расширенное K -пространство G называют *локально одномерным*, если G удовлетворяет одному (а тогда и всем) из эквивалентных условий (1)–(4) установленного предложения.

2.9. Теорема. Пусть G — расширенное K -пространство. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) G локально одномерно;

(2) всякий нерасширяющий линейный оператор $T : G \rightarrow G$ порядково ограничен.

◁ Этот результат установлен в [2, теорема 2.1] и [23, теорема 3.2]. ▷

3. Анализ: Функциональное уравнение Коши

В этом параграфе коротко рассмотрим хорошо известный объект классического математического анализа, вынесенный в название. В дальнейшем (см. § 6) мы обнаружим, что нерасширяющие операторы в пространствах Канторовича — решения функционального уравнения Коши в новом обличии, а проблема Викстеда равнозначна вопросу о регулярности всех решений этого уравнения при дополнительном условии типа однородности.

3.1. Символом $\mathbb{F}$ будем обозначать числовое поле, совпадающее с $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Функциональное уравнение Коши с неизвестной функцией $f : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ имеет вид

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{F}).$$

Нетрудно видеть, что решение этого уравнения автоматически оказывается $\mathbb{Q}$ -однородным, т. е. удовлетворяет еще одному функциональному уравнению:

$$f(qx) = qf(x) \quad (q \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{F}).$$

В дальнейшем нас интересует более общая ситуация. А именно, будем рассматривать систему функциональных уравнений

$$\begin{cases} f(x + y) = f(x) + f(y) & (x, y \in \mathbb{F}), \\ f(px) = pf(x) & (p \in \mathbb{P}, x \in \mathbb{F}), \end{cases} \quad (L)$$

где $\mathbb{P}$ — подполе поля $\mathbb{F}$, содержащее $\mathbb{Q}$. Обозначим символом $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ поле $\mathbb{F}$, рассматриваемое как векторное пространство над полем $\mathbb{P}$. Как видно, решение системы (L) — суть $\mathbb{P}$ -линейные функции из $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ в $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$.

3.2. Теорема. Пусть $\mathcal{E}$ — базис Гамеля векторного пространства $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$, а $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathbb{F})$ — пространство всех функций из $\mathcal{E}$ в $\mathbb{F}$. Множество всех решений системы (L) представляет собой векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, изоморфное $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathbb{F})$. Изоморфизм осуществляется сопоставлением решению f его ограничения $f|_{\mathcal{E}}$ на $\mathcal{E}$.

◁ Множество всех решений системы (L) совпадает с множеством $L_{\mathbb{P}}(\mathbb{F})$ всех $\mathbb{P}$ -линейных операторов, действующих в векторном пространстве $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$. Поэтому достаточно заметить, что векторные пространства $L_{\mathbb{P}}(\mathbb{F})$ и $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathbb{F})$ изоморфны.

Пусть $\mathcal{F}_0(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ — множество всех финитных функций, т. е. таких $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{P}$, что множество $\{e \in \mathcal{E} : \varphi(e) \neq 0\}$ конечно. Тогда $\mathcal{F}_0(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ — векторное пространство над $\mathbb{P}$, изоморфное $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$. Изоморфизм устанавливается сопоставлением функции $\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ элемента $x_{\varphi} := \sum_{e \in \mathcal{E}} \varphi(e)e$. Для произвольной функции $\psi \in \mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathbb{F})$ положим

$$f_{\psi}(x_{\varphi}) := \sum_{e \in \mathcal{E}} \varphi(e)\psi(e) \quad (\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{E}, \mathbb{P})).$$

Тем самым определяется изоморфизм между векторными пространствами $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathbb{F})$ и $L_{\mathbb{P}}(\mathbb{F})$. ▷

3.3. Теорема. Произвольное решение системы уравнений (L) либо $\mathbb{F}$ -линейно, либо имеет график, всюду плотный в пространстве $\mathbb{F}^2 := \mathbb{F} \times \mathbb{F}$.

◁ Если решение f системы (L) $\mathbb{F}$ -линейно, то оно имеет представление $f(x) = cx$ ($x \in \mathbb{F}$), где $c := f(1)$. В противном случае найдутся ненулевые элементы $x_1, x_2 \in \mathbb{F}$, для которых $f(x_1)/x_1 \neq f(x_2)/x_2$. Отсюда вытекает линейная независимость векторов $v_1 := (x_1, f(x_1))$ и $v_2 := (x_2, f(x_2))$ из $\mathbb{F}^2$ над полем $\mathbb{F}$. Действительно, если $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$, то $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ и $\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) = 0$, причем система из последних двух уравнений имеет лишь тривиальное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, так как ее определитель $x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1) \neq 0$ по предположению. Итак всякую пару $(x, y) \in \mathbb{F}^2$ можно представить в виде $(x, y) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$. Так как $\mathbb{P}$ плотно в $\mathbb{F}$, в любой окрестности пары

(x, y) можно найти вектор вида $p_1v_1 + p_2v_2$, где $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$. Тем самым множество $\{p_1v_1 + p_2v_2 : p_1, p_2 \in \mathbb{P}\}$ плотно в $\mathbb{F}^2$. В то же время это множество содержится в графике функции f , так как с учетом $\mathbb{P}$ -линейности f справедливы равенства

$$\begin{aligned} p_1v_1 + p_2v_2 &= (p_1x_1 + p_2x_2, p_1f(x_1) + p_2f(x_2)) = \\ &= (p_1x_1 + p_2x_2, f(p_1x_1 + p_2x_2)) \end{aligned}$$

при любых $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$. $\triangleright$

3.4. Для того чтобы решение f системы (L) допускало представление $f(x) = cx$ ($x \in \mathbb{F}$) нужно потребовать какое-нибудь дополнительное условие регулярности. Таким очевидным условием является непрерывность, так как в силу $\mathbb{P}$ -линейности f будет $f(p) = pf(1)$ и, воспользовавшись плотностью $\mathbb{P}$ в $\mathbb{F}$, получим требуемое представление. Приведем несколько других условий регулярности. Аддитивную функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *порядково ограниченной*, если она ограничена на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Решение f системы (L) при $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ допускает представление $f(x) = cx$ ($x \in \mathbb{R}$) в том и только в том случае, когда выполнено любое из следующих условий (см. [3, § 2.1]):

- (1) f непрерывна в некоторой точке;
- (2) f монотонно убывает или монотонно возрастает;
- (3) f порядково ограничена;
- (4) f ограничена сверху или снизу на некотором измеримом множестве положительной лебеговой меры;
- (5) f измеримо по Лебегу.

3.5. Рассмотрим теперь $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ и пусть $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0 + i\mathbb{P}_0$ для некоторого подполя $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{R}$. Тогда пространство решений системы (L) — комплексификация пространства решений той же системы при $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0$. Точнее, если $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — $\mathbb{P}_0$ -линейная функция, то существует единственная $\mathbb{P}$ -линейная функция $\tilde{g} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, определяемая формулой

$$\tilde{g}(z) = g(x) + ig(y) \quad (z = x + iy \in \mathbb{C}).$$

Наоборот, если $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — $\mathbb{P}$ -линейная функция, то существует единственная пара $\mathbb{P}_0$ -линейных функций $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $f(z) = \tilde{g}_1(z) + i\tilde{g}_2(z)$ ($z \in \mathbb{C}$). Таким образом, любое решение f системы (L) имеет вид $f = f_1 + if_2$, где $f_1, f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{P}_0$ -линейны и

$f_i(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$). Будем говорить, что f монотонна или ограничена, если таковы функции f_1 и f_2 . Легко можно убедиться в справедливости следующих утверждений.

(1) График f плотен в $\mathbb{C}^2$ в том и только в том случае, когда график каждой из функций f_1 и f_2 плотен в $\mathbb{R}^2$.

(2) Решение f системы (L) при $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ и $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0 + i\mathbb{P}_0$, $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{R}$ допускает представление $f(x) = cx$ ($x \in \mathbb{C}$) для некоторого $c \in \mathbb{C}$ в том и только в том случае, если выполнено любое из условий 3.4. (1)–(5).

3.6. Теорема. Пусть $\mathbb{P}$ плотное подполе поля $\mathbb{F}$, причем $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0 + i\mathbb{P}_0$ для некоторого подполя $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{R}$, если $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Равносильны утверждения:

(1) $\mathbb{F} = \mathbb{P}$;

(2) любое решение системы (L) порядково ограничено.

◁ Импликация (1) $\rightarrow$ (2) тривиальна. Противоположную импликацию докажем от противного. Предположение $\mathbb{F} \neq \mathbb{P}$ означает, что базис Гамеля векторного пространства $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ содержит по крайней мере два ненулевых несовпадающих элемента $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$. Определим функцию $\psi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{F}$ так, чтобы $\psi(e_1)/e_1 \neq \psi(e_2)/e_2$. Тогда $\mathbb{P}$ -линейная функция $f = f_\psi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, совпадающая с ψ на $\mathcal{E}$, имеет плотный в $\mathbb{F}^2$ график согласно 3.4. Следовательно, f_ψ не может быть порядково ограниченным, см. 3.4, 3.5. ▷

3.7. Рассмотрим еще две системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & (x, y \in \mathbb{F}), \\ f(px) = pf(x) & (p \in \mathbb{P}, x \in \mathbb{F}), \\ f(xy) = f(x)f(y) & (x, y \in \mathbb{F}), \end{cases} \quad (A)$$

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & (x, y \in \mathbb{F}), \\ f(px) = pf(x) & (p \in \mathbb{P}, x \in \mathbb{F}), \\ f(xy) = f(x)y + xf(y) & (x, y \in \mathbb{F}). \end{cases} \quad (D)$$

Ненулевые решения системы (A) называют $\mathbb{P}$ -автоморфизмами поля $\mathbb{F}$, а решения системы D — $\mathbb{P}$ -дифференцированиями поля $\mathbb{F}$. Тожественный автоморфизм и нулевое дифференцирование принято называть тривиальными. Вопрос о существовании нетривиальных решений систем (A) и (D) требует привлечения более тонких результатов из теории полей, излагаемых в следующем параграфе.

4. Алгебра: Расширения полей

В этом параграфе собраны некоторые сведения из теории полей, необходимые для дальнейшего анализа систем (A) и (D) .

4.1. Рассмотрим два поля K и L . Если K — подполе поля L , то говорят также, что L — *расширение поля K* . Расширение L поля K называют *алгебраическим*, если каждый элемент из L служит корнем ненулевого многочлена (от одной переменной) с коэффициентами из поля K . Другими словами расширение L поля K именуют алгебраическим, если всякий элемент $x \in L$ алгебраичен над K ; последнее же означает существование конечного числа элементов $a_0, \dots, a_n \in K$, $n \geq 1$, не равных нулю одновременно, для которых $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$. Расширение L поля K , не являющееся алгебраическим, называют *трансцендентным* (над K).

Напомним, что поле K алгебраически замкнуто, если всякий непостоянный многочлен с коэффициентами из K имеет хотя бы один корень в K . Эквивалентное условие состоит в том, что всякое алгебраическое расширение поля K совпадает с K .

Алгебраическим замыканием поля K называют такое его расширение, которое алгебраично над K и алгебраически замкнуто. В теории полей доказывается, что всякое поле K имеет единственное с точностью до K -изоморфизма алгебраическое расширение, см. [4, 5].

4.2. Пусть L — расширение поля K . Попарно различные элементы $x_1, \dots, x_n \in L$ называют *алгебраически независимыми* над K , если для любого многочлена P от n переменных с коэффициентами из поля K равенство $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ влечет $P \equiv 0$, т. е. все коэффициенты P равны нулю.

Как видно из этого определения, алгебраическая независимость элементов $x_1, \dots, x_n$ равносильна линейной независимости над K множества всех одночленов вида $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$, где $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$.

Множество $\mathcal{E} \subset L$ назовем алгебраически независимым, если всякое конечное его подмножество алгебраически независимо. Пустое множество считают алгебраически независимым. Максимальное по включению алгебраически независимое над K множество $\mathcal{E} \subset L$ называют *алгебраическим базисом* (или *базисом трансцендентности*) L . Символом $K(\mathcal{E})$ обозначают наименьшее подполе поля L , содер-

жащее K и множество $\mathcal{E} \subset L$ и при этом говорят, что $K(\mathcal{E})$ получается из K присоединением множества $\mathcal{E}$. Если $L = K(\mathcal{E})$ и $\mathcal{E}$ алгебраически независимо, то L принято называть *чистым расширением* поля K , а $\mathcal{E}$ — *чистым базисом* L над K .

4.3. Теорема Штейница. Всякое расширение L поля K допускает алгебраический базис $\mathcal{E}$ над K . При этом L служит алгебраическим расширением чистого расширения $K(\mathcal{E})$.

4.4. Теорема о продолжении изоморфизмов. Пусть L — расширение поля K и $\mathcal{E}$ — алгебраический базис L над K . Пусть i — изоморфизм K на некоторое поле K' и L' — алгебраически замкнутое расширение поля K' . Для любого алгебраически независимого семейства $(l_e)_{e \in \mathcal{E}}$ элементов расширения L' существует изоморфизм i' из L в L' , продолжающий i и удовлетворяющий условию $i'(e) = l_e$ для всех $e \in \mathcal{E}$.

4.5. Отображение $d : K \rightarrow L$ называют *дифференцированием подполя* $K \subset L$ в поле L , если $d(x+y) = d(x)+d(y)$ и $d(xy) = d(x)y+xd(y)$ для любых $x, y \in K$. Общий результат о продолжении дифференцирований, сформулированный в следующем пункте, использует понятие *сепарабельного расширения*. Для наших дальнейших целей нет необходимости углубляться в свойства сепарабельных расширений; детали можно найти в [4, 5, 9]. Здесь нам достаточно отметить, что если поле K — алгебраически замкнуто или имеет характеристику нуль, то любое расширение K будет сепарабельным.

4.6. Теорема о продолжении дифференцирований. Пусть k — подполе поля L , K — расширение поля k , содержащееся в L и d — дифференцирование поля k в L .

(1) Если K — сепарабельное алгебраическое расширение поля k , то d однозначно продолжается до дифференцирования D поля K в L .

(2) Если K — сепарабельное алгебраическое расширение поля k с чистым алгебраическим базисом $\mathcal{E} \subset K$ над k , то для любого семейства $(l_e)_{e \in \mathcal{E}}$ элементов L существует и притом единственное дифференцирование D поля K в L , продолжающее d и удовлетворяющее условию $De = l_e$ для всех $e \in \mathcal{E}$.

4.7. Пусть $\mathbb{C}$ служит трансцендентным расширением поля $\mathbb{P}$. Тогда в $\mathbb{C}$ существует нетривиальный $\mathbb{P}$ -автоморфизм.

◁ Пусть $\mathcal{E}$ — базис трансцендентности расширения $\mathbb{C}$ над $\mathbb{P}$. Так как $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое расширение поля $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, то любой $\mathbb{P}$ -автоморфизм ϕ поля $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ продолжается до $\mathbb{P}$ -автоморфизма Φ поля $\mathbb{C}$, см. 4.4.

Для построения нетривиального $\mathbb{P}$ -автоморфизма в $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{E}$ содержит лишь один элемент e , т. е. когда $\mathbb{C}$ — алгебраическое расширение простого трансцендентного расширения $\mathbb{P}(e)$. Возьмем элементы $a, b, c, d \in \mathbb{P}$, для которых $ad - bc \neq 0$. Тогда $e' = (ae + b)/(ce + d)$ — порождающий элемент поля $\mathbb{P}(e)$, отличный от e . Поле $\mathbb{P}(e) = \mathbb{P}(e')$ изоморфно полю рациональных дробей от одной переменной t , следовательно, дробно-линейная подстановка $t \mapsto (at + b)/(ct + d)$ определяет $\mathbb{P}$ -автоморфизм ϕ поля $\mathbb{P}(e)$, переводящий e в e' , см. [14, § 39].

Допустим теперь, что $\mathcal{E}$ содержит по меньшей мере два разных элемента e_1 и e_2 , и возьмем произвольное биективное отображение $\phi_0 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, для которого $\phi_0(e_1) \neq e_2$. Вновь используя то обстоятельство, что $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое расширение поля $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, можно построить $\mathbb{P}$ -автоморфизм ϕ поля $\mathbb{C}$, для которого $\phi_0(e) = \phi(e)$ при всех $e \in \mathcal{E}$, см. 4.4. Как видно, ϕ нетривиален. ▷

4.8. Пусть $\mathbb{C}$ служит трансцендентным расширением поля $\mathbb{P}$. Тогда в $\mathbb{C}$ существуют нетривиальное $\mathbb{P}$ -дифференцирование.

◁ Воспользуемся вновь базисом трансцендентности $\mathcal{E}$ расширения $\mathbb{C}$ над $\mathbb{P}$. Известно, что любое дифференцирование поля $\mathbb{P}$ продолжается на чисто трансцендентное расширение, причем такое продолжение однозначно определяется заданием произвольных значений на базисе трансцендентности, см. 4.6 (2). Таким образом, для любого отображения $d : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ существует единственное дифференцирование $D : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{C}$, для которого $D(e) = d(e)$ при всех $e \in \mathcal{E}$ и $D(x) = 0$ при $x \in \mathbb{P}$. Далее, $\mathbb{C}$ служит сепарабельным алгебраическим расширением поля $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, следовательно, D допускает и притом единственное дифференцирование $D : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{C}$, для которого $D(e) = d(e)$ при всех $e \in \mathcal{E}$ и $D(x) = 0$ при $x \in \mathbb{P}$. Далее, $\mathbb{C}$ служит сепарабельным алгебраическим расширением поля $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, следовательно, D допускает и притом единственное продолжение до дифференцирования $\bar{D} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, см. 4.6 (1). Очевидно, что свобода в выборе d гарантирует нетривиальность $\bar{D}$. ▷

4.9. Теорема. Пусть $\mathbb{C}$ служит расширением некоторого алгебраически замкнутого поля $\mathbb{P}$. Равносильны утверждения:

- (1) $\mathbb{C} = \mathbb{P}$;
- (2) в $\mathbb{C}$ нет нетривиальных $\mathbb{P}$ -автоморфизмов;
- (3) в $\mathbb{C}$ нет нетривиальных $\mathbb{P}$ -дифференцирований.

◁ Если $\mathbb{C} \neq \mathbb{P}$, то $\mathbb{C}$ — трансцендентное расширение поля $\mathbb{P}$, поэтому (2) $\rightarrow$ (1) и (3) $\rightarrow$ (1) вытекают из 4.7 и 4.8 соответственно. Противоположные импликации очевидны. ▷

5. Логика: Булевозначное моделирование

Здесь коротко представлена необходимая информация о булевозначных моделях теории множеств. Подробное изложение имеется в книгах [14, 20].

Подчеркнем, что в контексте настоящей статьи формальная теория множеств и ее модели используются как техническое средство для исследования конкретных функционально-аналитических объектов и нет прямой связи наших рассуждений с основаниями математики. Поэтому придерживаемся принятого в функциональном анализе уровня строгости.

5.1. Теория множество Цермело — Френкеля с аксиомой выбора обозначается символом ZFC. Язык теории множеств ZFC использует следующие символы (совокупность которых называют *алфавитом* ZFC): символы переменных $x, y, z, x_1, x_2, \dots$; скобки $(,)$; пропозициональные связки (т. е. знаки алгебры высказываний) $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$; кванторы $\forall, \exists$; знак равенства $=$; символ специального двухместного предиката $\in$. Из символов алфавита составляются слова, т. е. конечные последовательности символов из алфавита ZFC. Правильно составленные слова называют *формулами*. Точнее, формулы теории ZFC определяются обычной рекурсивной процедурой из атомарных формул вида $x = y$ и $x \in y$, с помощью разумной расстановки скобок, кванторов и пропозициональных связок.

При этом теория ZFC — это наименьшее множество формул, содержащее аксиомы ZFC и замкнутое относительно правил вывода (см. [8]). Формулы теории называют также теоремами этой теории. Теория ZFC включает обычные аксиомы и правила вывода теорий

первого порядка с равенством, которые можно найти в любом университетском курсе математической логики, см. например, [8, 17]. Помимо этого принимаются *специальные* аксиомы — аксиомы *объёмности, объединения, степени, подстановки, регулярности, бесконечности* и *выбора*.

Естественный смысл вкладывается в термины *свободная переменная* и *связанная переменная*, а также в понятие *область действия квантора*. Так, например, в формуле $(\forall x)(x \in y)$ переменная x связана (входит в область действия квантора $\forall$), а переменная y свободна. При желании подчеркнуть, что в формуле φ свободными являются переменные $x_1, \dots, x_n$ и только они, пишут $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

5.2. Содержательно область изменения переменных ZFC мыслят как мир множеств — универсум множеств. Иначе говоря, область изменения переменных содержит только множества. Вместо $\in (x, y)$ пишут $x \in y$ и говорят, что « x — элемент множества y », или « x принадлежит (содержится в, входит в) y ».

Точное представление о классе всех множеств складывается на основе аксиоматики ZFC. Этот класс принято обозначать символом $\mathbb{V}$ и называть *универсумом фон Неймана*. В качестве исходного объекта этой конструкции принимается пустое множество. Элементарные шаги конструирования новых множеств из уже имеющихся — формирование множества подмножеств и объединения. Трансфинитное повторение этих шагов исчерпывает класс всех множеств $\mathbb{V}$. Точнее, полагают

$$\mathbb{V} := \bigcup_{\alpha \in \text{On}} \mathbb{V}_\alpha,$$

где On — класс всех ординалов и

$$\mathbb{V}_0 := \emptyset,$$

$$\mathbb{V}_{\alpha+1} := \mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha) \quad (\alpha \in \text{On}),$$

$$\mathbb{V}_\beta := \bigcup_{\alpha < \beta} \mathbb{V}_\alpha \quad (\beta \text{ — предельный ординал}).$$

Класс $\mathbb{V}$ представляет собой стандартную модель теории ZFC. Это означает, что любая теорема φ теории ZFC будет истинным теоретико-множественным утверждением, если переменные φ трак-

товать, как элементы универсума $\mathbb{V}$, а предикат $\in$ понимать как отношение «быть элементом» в $\mathbb{V}$.

5.3. Рассмотрим теперь конструкцию булевозначного универсума. Пусть $\mathbb{B}$ — фиксированная полная булева алгебра. Для произвольного ординала α положим

$$\mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})} := \left\{ x : \text{Funct}(x) \wedge (\exists \beta) (\beta < \alpha \wedge \text{dom}(x) \subset \mathbb{V}_\beta^{(\mathbb{B})} \wedge \text{im}(x) \subset \mathbb{B}) \right\}.$$

Итак, в более подробной записи имеем:

$$\mathbb{V}_0^{(\mathbb{B})} := \emptyset,$$

$$\mathbb{V}_{\alpha+1}^{(\mathbb{B})} := \{ x : X \rightarrow \mathbb{B} : X \subset \mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})} \};$$

$$\mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})} := \bigcup_{\beta < \alpha} \mathbb{V}_\beta^{(\mathbb{B})} \quad (\beta — \text{предельный ординал}).$$

Класс

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} := \bigcup_{\alpha \in \text{On}} \mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})}$$

называют *булевозначным универсумом*. Элементы класса $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ принято называть *$\mathbb{B}$ -значными множествами*.

5.4. Возьмем произвольную формулу $\varphi = \varphi(u_1, \dots, u_n)$ теории ZFC. Если заменить переменные $u_1, \dots, u_n$ элементами $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, то получим некоторое утверждение об объектах $x_1, \dots, x_n$. Вводится новый способ проверка истинности таких утверждений, отличный от способа, принятого в $\mathbb{V}$. Для этой цели указанному утверждению сопоставляют некоторую *оценку истинности* $\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket$, служащую элементом булевой алгебры $\mathbb{B}$. Тогда мы получаем возможность придать смысл формальным выражениям типа $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, где $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и φ — формула ZFC, т. е. определить, в каком точном смысле для элементов $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ выполнено теоретико-множественное высказывание $\varphi(u_1, \dots, u_n)$. Именно, будем говорить, что формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *истинна внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$* или *элементы $x_1, \dots, x_n$ удовлетворяют условию φ* , если $\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket = 1$. При этом пишут $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Несложно убедиться, что аксиомы и теоремы исчисления предикатов первого порядка с равенством верны внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Приписывание булевых оценок истинности проводится двойной индукцией, учитывая как характер построения формул из атомарных, так и задавая оценки атомарных формул $x \in y$ и $x = y$, где $x, y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, на основе конструкции $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Подробности этого определения можно найти в [14, 20].

5.5. В булевозначном универсуме $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ соотношение $\llbracket x = y \rrbracket = 1$ не влечет, вообще говоря, что $\mathbb{B}$ -значные функции x и y (рассматриваемые как элементы $\mathbb{V}$) совпадают. Это обстоятельство затрудняет некоторые конструкции. В этой связи переходят от $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ к *отделимому булевозначному универсуму* $\overline{\mathbb{V}}^{(\mathbb{B})}$. Для определения последнего рассмотрим отношение $\{(x, y) : \llbracket x = y \rrbracket = 1\}$ в классе $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, представляющее собой, как очевидно, отношение эквивалентности. Выбирая элемент (представитель наименьшего ранга) в каждом классе эквивалентности, приходим к отделимому булевозначному универсуму $\overline{\mathbb{V}}^{(\mathbb{B})}$. Для обозначения последнего будем использовать тот же самый символ $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. полагаем $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} := \overline{\mathbb{V}}^{(\mathbb{B})}$. Для любой формулы φ теории ZF и произвольных элементов x и y из $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ выполняется

$$\llbracket x = y \rrbracket = 1 \implies \llbracket \varphi(x) \rrbracket = \llbracket \varphi(y) \rrbracket.$$

Поэтому при вычислении булевых оценок истинности в отделимом универсуме можно использовать любые представители классов эквивалентности.

Важнейшие свойства булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ формулируются в виде трех принципов.

5.6. Принцип переноса. Все теоремы ZFC истинны внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, символически

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \text{теорема ZFC}.$$

Иными словами, если теоретико-множественная формула φ выражает доказуемое в ZFC утверждение, то $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi$. Иногда принцип переноса выражается словами: « $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — булевозначная модель теории ZFC».

5.7. Принцип максимума. Для каждой формулы $\varphi(x)$ теории ZFC существует элемент $x_0 \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которого

$$\llbracket (\exists x) \varphi(x) \rrbracket = \llbracket \varphi(x_0) \rrbracket.$$

Иными словами, принцип максимума утверждает, что для любой формулы φ теории ZFC выполняется

$$\left(\exists x_0 \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}\right) \llbracket \varphi(x_0) \rrbracket = \bigvee_{x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}} \llbracket \varphi(x) \rrbracket.$$

В частности, если внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ истинно утверждение «выполняется $\varphi(x)$ для некоторого x », то существует элемент x_0 в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ (в смысле универсума фон Неймана $\mathbb{V}$), для которого $\llbracket \varphi(x_0) \rrbracket = 1$. Символически,

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models (\exists x) \varphi(x) \rightarrow (\exists x_0) \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_0).$$

5.8. Принцип перемешивания. Пусть $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение единицы в B . Для любого семейства $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов универсума $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ существует единственный элемент $x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ такой, что $b_\xi \leq \llbracket x = x_\xi \rrbracket$ для всех $\xi \in \Xi$. Элемент x называют *перемешиванием* семейства (x_ξ) относительно (b_ξ) . Перемешивание обозначается

$$x = \text{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi x_\xi) = \text{mix}\{b_\xi x_\xi : \xi \in \Xi\}.$$

6. Логика: Правила Эшера

Сравнительный анализ миров (универсумов) $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ предполагает их тесную взаимосвязь. Иначе говоря, необходим математический аппарат, позволяющий узнавать как связаны между собой интерпретации одного и того же факта в указанных выше двух моделях $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Основу такого аппарата составляют операции канонического вложения, спуска и подъема, представленные ниже.

6.1. Начнем с канонического вложения универсума фон Неймана в булевозначный универсум. Для $x \in \mathbb{V}$ обозначим символом $x^\wedge$ *стандартное имя* x в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. элемент, определяемый следующей схемой рекурсии:

$$\emptyset^\wedge := \emptyset, \quad \text{dom}(x^\wedge) := \{y^\wedge : y \in x\}, \quad \text{im}(x^\wedge) := \{1\}.$$

Работая с отделимым булевозначным универсумом $\overline{\mathbb{V}}^{(\mathbb{B})}$, мы сохраняем символ $x^\wedge$ для обозначения выделенного элемента из соответствующего класса эквивалентности. Рассмотрим одно важное свойство отображения $x \mapsto x^\wedge$.

Формула называется *ограниченной*, если все содержащиеся в ней связанные переменные входят в нее под знаками ограниченных кванторов, т. е. кванторов, область действия которых ограничена каким-либо множеством. Последнее означает, что любая связанная переменная x встречается в виде $(\forall x \in y)$ или $(\exists x \in y)$ для некоторого y .

6.2. Ограниченный принцип переноса. Для каждой ограниченной формулы φ теории ZFC и любого набора $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ имеет место эквивалентность:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge).$$

6.3. Для произвольного элемента x из (отделимого) булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ определяется класс $x \downarrow$ формулой

$$x \downarrow := \{y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} : \llbracket y \in x \rrbracket = 1\}.$$

Этот класс называют *спуском* элемента x . При этом класс $x \downarrow$ является множеством, т. е. $x \downarrow \in \mathbb{V}$ для любого $x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Если $\llbracket x \neq \emptyset \rrbracket = 1$, то $x \downarrow$ — непустое множество.

6.4. Пусть f — отображение из X в Y внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Это означает, что f , X и Y — элементы $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, причем $\llbracket f : X \rightarrow Y \rrbracket = 1$. Существует единственное отображение $f \downarrow$ из $X \downarrow$ в $Y \downarrow$ такое, что

$$\llbracket f \downarrow(x) = f(x) \rrbracket = 1 \quad (x \in X \downarrow).$$

При этом для любого непустого подмножества A множества X внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ (т. е. $\llbracket A \subset X \rrbracket = 1$) выполняется $f \downarrow(A \downarrow) = f(A) \downarrow$. Отображение $f \downarrow$ из $X \downarrow$ в $Y \downarrow$ называют *спуском* f из $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Отображение $f \downarrow$ обладает следующим свойством *экстенциональности*:

$$\llbracket x = x' \rrbracket \leq \llbracket f \downarrow(x) = f \downarrow(x') \rrbracket \quad (x, x' \in X \downarrow).$$

Для спусков композиции отображений $g \circ f$, обратного отображения f^{-1} и тождественного отображения I_X имеют место следующие правила:

$$(g \circ f) \downarrow = g \downarrow \circ f \downarrow, \quad (f^{-1}) \downarrow = (f \downarrow)^{-1}, \quad (I_X) \downarrow = I_{X \downarrow}.$$

В силу этих правил можно рассматривать операцию спуска как ковариантный функтор из категории $\mathbb{B}$ -значных множеств и отображений в категорию обычных (т. е. в смысле $\mathbb{V}$) множеств и отображений.

6.5. Для $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ обозначим символом $(x_1, \dots, x_n)^{\mathbb{B}}$ упорядоченную n -ку внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Предположим что P — это n -местное отношение на X внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. $X, P \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и $\llbracket P \subset X^{n^{\wedge}} \rrbracket = 1$ ($n \in \omega$). Тогда существует n -местное отношение P' на $X \downarrow$ такое, что

$$(x_1, \dots, x_n) \in P' \leftrightarrow \llbracket (x_1, \dots, x_n)^B \in P \rrbracket = 1.$$

Допуская некоторую вольность, отношение P' обозначают тем же символом $P \downarrow$ и называют его *спуском* отношения P .

6.6. Пусть $x \in \mathbb{V}$ и $x \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. x — множество, составленное из B -значных множеств или, в символической записи, $x \in \mathcal{P}(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})})$. Положим $\emptyset \uparrow := \emptyset$ и

$$\text{dom}(x \uparrow) = x, \quad \text{im}(x \uparrow) = \{1\},$$

если $x \neq \emptyset$. Элемент $x \uparrow$ неотделимого универсума (т. е. выделенный представитель класса $\{y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} : \llbracket y = x \uparrow \rrbracket = 1\}$) называют *подъемом* множества x . Для соответствующего элемента отделимого универсума $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ сохраняют те же название и обозначение.

6.7. Пусть $X, Y, f \in \mathcal{P}(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})})$ и Φ — соответствие из X в Y . Для существования соответствия $f \uparrow$ из $X \uparrow$ в $Y \uparrow$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, удовлетворяющего условию

$$\llbracket f \uparrow(x) = f(x) \rrbracket = 1 \quad (x \in X),$$

необходимо и достаточно, чтобы f было *экстенционально*, т. е. чтобы для любых $x, x' \in X$ выполнялось соотношение

$$\llbracket x = x' \rrbracket \leq \llbracket f(x) = f(x') \rrbracket \quad (x, x' \in X).$$

Отображение f с указанным свойством единственно и удовлетворяет соотношению $f \uparrow(A \uparrow) = f(A) \uparrow$ ($A \subset X$).

Композиция экстенциональных отображений экстенциональна. При этом подъем композиции отображений равен композиции (внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$) подъемов этих соответствий:

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models (g \circ f) \uparrow = g \uparrow \circ f \uparrow.$$

Отметим также, что если f и f^{-1} экстенциональны, то $(f \uparrow)^{-1} = (f^{-1}) \uparrow$.

6.8. Возьмем непустое множество X , т. е. $X \in \mathbb{V}$ и $X \neq \emptyset$. Пусть буква $\iota := \iota_X$ обозначает ограничение на X канонического вложения: $\iota : x \mapsto x^\wedge$ ($x \in X$). Тогда $\iota(X)^\uparrow = X^\wedge$ и $X = \iota^{-1}(X^\wedge \downarrow)$. Рассмотрим произвольный элемент $Y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающий непустое множество. Используя указанные соотношения можно распространить операцию подъема на отображения f из X в $Y \downarrow$ и операцию спуска на соответствия g из $X^\wedge$ в Y внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Именно, положим $f\uparrow := (f \circ \iota)^\uparrow$ и $g\downarrow := g \downarrow \circ \iota$. Отображения $f\uparrow$ и $g\downarrow$ называют *модифицированным подъемом* f и *модифицированным спуском* g . (Если контекст исключает путаницу, то говорят по-прежнему о спусках и подъемах и используют простые стрелки.) Легко видеть, что $g\uparrow$ — единственное отображение из $X^\wedge$ в Y внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, удовлетворяющее условию

$$\llbracket f\uparrow(x^\wedge) = f(x)^\uparrow \rrbracket = \mathbf{1} \quad (x \in X).$$

Аналогично, $g\downarrow$ — единственное отображение из X в $Y \downarrow$, удовлетворяющее равенству

$$g\downarrow(x) = g(x^\wedge) \downarrow \quad (x \in X).$$

6.9. Для данного множества $X \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ обозначим символом $\text{mix } X := \text{mix}(X)$ множество всех перемешиваний вида $\text{mix}(b_\xi x_\xi)$, где $(x_\xi) \subset X$ и (b_ξ) — произвольное разбиение единицы в $\mathbb{B}$. Имеют место следующие *правила сокращения стрелок* или, как еще говорят, *правила Эшера*.

Пусть X и X' — подмножества $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и $f : X \rightarrow X'$ — экстенсionalное отображение. Предположим, что элементы $Y, Y', g \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ таковы, что $\llbracket Y \neq \emptyset \rrbracket = \llbracket g : Y \rightarrow Y' \rrbracket = \mathbf{1}$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$X\uparrow\downarrow = \text{mix } X, \quad Y\downarrow\uparrow = Y; \quad f\uparrow\downarrow = f, \quad g\downarrow\uparrow = g.$$

Имеются и другие правила сокращения стрелок но они нам не понадобятся.

7. Синтез: Булевозначные числа

Булевозначная интерпретация поля комплексных чисел представляет собой расширенное комплексное K -пространство, причем

нерасширяющий оператор в этом пространстве — интерпретация линейного отображения в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемого как векторное пространство над подполем $\mathbb{C}^\wedge$. Тем самым возникает возможность изучения некоторых классов операторов как функционалов.

7.1. Всюду ниже $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра, а $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — соответствующий булевозначный универсум. В силу принципа максимума существует элемент $\mathcal{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которого $\llbracket \mathcal{R} \text{ — поле действительных чисел} \rrbracket = 1$. Если формула $\varphi(x)$ представляет собой формальную запись аксиом архимедова упорядоченного поля (для x), то она эквивалентна ограниченной формуле. Так как для поля действительных чисел формула $\varphi(\mathbb{R})$ истинна, то согласно ограниченному принципу переноса 6.2 будет $\llbracket \varphi(\mathbb{R}^\wedge) \rrbracket = 1$, т. е. $\llbracket \mathbb{R}^\wedge \text{ — архимедово упорядоченное поле} \rrbracket = 1$. Можно считать при этом, что $\mathbb{R}^\wedge$ — плотное подполе поля $\mathcal{R}$ в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

7.2. Пусть $\mathbf{R}$ — несущее множество поля $\mathcal{R}$, на котором заданы алгебраические операции и порядок, обозначаемые символами $\oplus$, $\otimes$, $\otimes$ соответственно. Тогда $\mathcal{R}$ представляет собой упорядоченную пятерку $(\mathbf{R}, \oplus, \otimes, \otimes, 0^\wedge, 1^\wedge)$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$; символически, $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathcal{R} = (\mathbf{R}, \oplus, \otimes, \otimes, 0^\wedge, 1^\wedge)$.

Спуском поля $\mathcal{R}$ назовем множество $\mathbf{R}\downarrow$ на котором определены операции $\oplus\downarrow$, $\otimes\downarrow$ и предикат $\otimes\downarrow$, а также имеются два выделенных элемента $0^\wedge$ и $1^\wedge$; символически, $\mathcal{R}\downarrow = (\mathbf{R}\downarrow, \oplus\downarrow, \otimes\downarrow, \otimes\downarrow, 0^\wedge, 1^\wedge)$.

Если алгебраические операции и порядок в $\mathcal{R}\downarrow$ обозначить символами $+$, $\times$, $\leq$, то определение сложения, умножения и отношения порядка на множестве $\mathbf{R}\downarrow$ в более подробной записи выглядят так:

$$\begin{aligned} z = x + y &\leftrightarrow \llbracket z = x \oplus y \rrbracket = 1, \\ z = x \times y &\leftrightarrow \llbracket z = x \otimes y \rrbracket = 1, \\ x \leq y &\leftrightarrow \llbracket x \otimes y \rrbracket = 1 \\ &(x, y, z \in \mathbf{R}\downarrow). \end{aligned}$$

Можно показать, что $\mathcal{R}\downarrow$ служит коммутативным упорядоченным кольцом. Более того, $\mathcal{R}\downarrow$ будет упорядоченной алгеброй, если умножение элементов $\mathcal{R}\downarrow$ на действительные числа определить правилом:

$$y = \lambda x \leftrightarrow y = \lambda^\wedge \times x \leftrightarrow \llbracket y = \lambda^\wedge \otimes x \rrbracket = 1 \quad (x, y \in \mathcal{R}\downarrow, \lambda \in \mathbb{R}).$$

7.3. Теорема Гордона. Пусть $\mathcal{R}$ — поле действительных чисел в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Тогда $\mathcal{R}\downarrow$ (со спущенными операциями и порядком) представляет собой расширенное K -пространство с порядковой единицей $1 = 1^\wedge$. Более того, существует булев изоморфизм χ булевой алгебры $\mathbb{B}$ на базу $\mathfrak{P}(\mathcal{R}\downarrow)$ такой, что для любых $x, y \in \mathcal{R}\downarrow$ и $b \in \mathbb{B}$ справедливы эквивалентности:

$$\begin{aligned}\chi(b)x &= \chi(b)y \leftrightarrow b \leq [x = y], \\ \chi(b)x &\leq \chi(b)y \leftrightarrow b \leq [x \leq y].\end{aligned}$$

7.4. В силу принципа максимума 5.9 существует элемент $\mathcal{C} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которого $[\mathcal{C} \text{ — поле комплексных чисел}] = 1$. Так как равенство $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ выражается ограниченной теоретико-множественной формулой, то согласно ограниченному принципу переноса 6.2 будет $[\mathbb{C}^\wedge = \mathbb{R}^\wedge \oplus i^\wedge \mathbb{R}^\wedge] = 1$. Кроме того, $\mathbb{R}^\wedge$ считают плотным подполем поля $\mathcal{R}$, поэтому можно считать также, что $\mathbb{C}^\wedge$ — плотное подполе поля $\mathcal{C}$. Если 1 — единица поля $\mathbb{C}$, то $1^\wedge$ — единица поля $\mathcal{C}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Будем писать i вместо $i^\wedge$ и 1 вместо $1^\wedge$.

7.5. Пусть $\mathbf{C}$ — несущее множество поля $\mathcal{C}$, а алгебраические операции обозначаем так же, как и в 7.2. Тогда $(\mathbf{C}, \oplus, \otimes, 0^\wedge, 1^\wedge)$ — упорядоченная пятерка внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Спуском поля будет множество $\mathbf{C}\downarrow$ на котором определены операции $\oplus\downarrow, \otimes\downarrow$ и имеются два выделенных элемента $0^\wedge$ и $1^\wedge$. При этом $\mathcal{C}\downarrow$ будет комплексным коммутативным кольцом. Кроме того, $\mathcal{C}\downarrow = \mathcal{R}\downarrow \oplus i\mathcal{R}\downarrow$, следовательно, в силу теоремы Гордона 7.3 $\mathcal{C}\downarrow$ — расширенное комплексное K -пространство и комплексная f -алгебра одновременно, причем $1^\wedge$ — порядковая и кольцевая единица в $\mathcal{C}\downarrow$. Пространство $\mathcal{C}\downarrow$ зависит только от $\mathbb{B}$ и $\mathbf{C}$, поэтому будем использовать также обозначение $\mathbb{B}(\mathbf{C}) := \mathcal{C}\downarrow$.

7.6. Пусть $\text{End}_N(G_{\mathbf{C}})$ — множество всех нерасширяющих линейных операторов в $G_{\mathbf{C}}$, где $G := \mathcal{R}\downarrow$. Ясно, что $\text{End}_N(G_{\mathbf{C}})$ — комплексное векторное пространство. Более того, $\text{End}_N(G_{\mathbf{C}})$ будет точным унитарным модулем над кольцом $G_{\mathbf{C}}$, если определить оператор gT формулой $gT : x \mapsto g \cdot Tx$ ($x \in G_{\mathbf{C}}$). Это следует из того, что умножение на элемент $G_{\mathbf{C}}$ представляет собой нерасширяющий оператор и композиция нерасширяющих операторов есть нерасширяющий оператор.

7.7. Обозначим символом $\text{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})$ элемент $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающий пространство всех $\mathbb{C}^\wedge$ -линейных отображений из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}$. Тогда $\text{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})$ — векторное пространство над полем $\mathbb{C}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, а $\text{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})\downarrow$ — точный унитарный модуль над $G_{\mathbb{C}}$.

7.8. *Линейный оператор в K -пространстве G или $G_{\mathbb{C}}$ будет нерасширяющим в том и только в том случае, когда он экстенционален.*

◁ Как видно из теоремы Гордона 7.3, для произвольного линейного оператора $T : G \rightarrow G$ условие экстенциональности $\llbracket x = y \rrbracket \leq \llbracket Tx = Ty \rrbracket$ ($x, y \in G = \mathcal{R}\downarrow$) означает, что для любых $x, y \in G$ и $\pi \in \mathfrak{P}(G)$ из равенства $\pi x = \pi y$ следует $\pi Tx = \pi Ty$. Ввиду линейности T последнее равносильно условию $\pi x = 0 \rightarrow \pi Tx = 0$ ($x \in G, \pi \in \mathfrak{P}(G)$). Если взять $y := \pi^\perp x$, то получим $\pi T \pi^\perp = 0$ или, что то же, $\pi T = \pi T \pi$. Согласно 2.1 последнее представляет собой одно из эквивалентных определений нерасширяющего оператора. В случае комплексного пространства $G_{\mathbb{C}}$ следует привлечь 2.2. ▷

7.8. Теорема. *Модули $\text{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ и $\text{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})\downarrow$ изоморфны. Изоморфизм устанавливается путем сопоставления нерасширяющему оператору его подъема.*

◁ Так как экстенциональные отображения допускают подъем, то каждый оператор $T \in \text{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ имеет подъем $\tau := T\uparrow$, который представляет собой единственную функцию из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}$, удовлетворяющую условию $\llbracket \tau(x) = Tx \rrbracket = 1$ ($x \in G_{\mathbb{C}}$), см. 6.6. Нетрудно проверить, что отображение $T \mapsto \tau$ является изоморфизмом модулей, причем обратным изоморфизмом служит отображение, сопоставляющее элементу $\tau \in \text{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})\downarrow$ его спуск $\tau\downarrow$. ▷

Теорема 7.8 сводит изучение нерасширяющих операторов в расширенном пространстве Канторовича к изучению решений функционального уравнения Коши с дополнительным условием однородности.

8. Операторы: Результаты

В этом заключительном параграфе сформулируем несколько результатов о наличии или отсутствии нерасширяющих линейных операторов в расширенных K -пространствах, которые можно получить, используя возможности открываемые теоремой 7.8.

8.1. Напомним еще несколько определений, необходимых для формулировки основных результатов. Булеву σ -алгебру $\mathbb{B}$ называют σ -дистрибутивной, если для любой двойной последовательности $(b_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ в $\mathbb{B}$ выполнено условие:

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} b_{n,m} = \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} b_{n,\varphi(n)}.$$

Другие эквивалентные определения имеются в книге [16]. Примером σ -дистрибутивной булевой алгебры служит полная атомная булева алгебра, т. е. алгебра всех подмножеств непустого множества. Важно подчеркнуть, что существуют и безатомные σ -дистрибутивные полные булевы алгебры (см. [10, 5.1.8]).

8.2. Пусть дана алгебра A подалгебра A_0 . Линейный оператор D в A называют *дифференцированием*, если выполнено условие

$$D(uv) = D(u)v + uD(v) \quad (u, v \in A).$$

Ядро дифференцирования представляет собой подалгебру. Ненулевое дифференцирование называют *нетривиальным*.

Пусть $D \in L(E_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{C}})$ и $D = D_1 + iD_2$. Оператор D будет комплексным дифференцированием в том и только в том случае, если D_1 и D_2 представляют собой вещественные дифференцирования из E в G .

◁ Нужно лишь в равенстве $D(uv) = D(u)v + uD(v)$ подставить $D := D_1 + iD_2$, вещественные $u := x \in E$ и $v := y \in E$, а затем приравнять вещественные и мнимые части полученного соотношения. ▷

Эндоморфизмом алгебры называют линейный мультипликативный оператор в ней. Биективный эндоморфизм называют *автоморфизмом*. Тожественный автоморфизм принято называть *тривиальным*.

Если данные выше определения автоморфизма и дифференцирования относятся к алгебре над полем $\mathbb{P}$, то говорят также о $\mathbb{P}$ -автоморфизмах и $\mathbb{P}$ -дифференцированиях соответственно.

8.3. Если $E^{\perp\perp} = G$, то любое дифференцирование из $E_{\mathbb{C}}$ в $G_{\mathbb{C}}$ является нерасширяющим оператором.

◁ В силу 2.2 и 8.2 нужно лишь установить, что любое вещественное дифференцирование является нерасширяющим оператором.

ром. Пусть $D : G \rightarrow G$ — вещественное дифференцирование. Возьмем дизъюнкты $x, y \in G$. Так как в f -алгебре соотношение $x \perp y$ влечет $xy = 0$, то $0 = D(xy) = D(x)y + xD(y)$. Но элементы $D(x)y$ и $xD(y)$ также дизъюнкты по определению f -алгебры, поэтому $D(x)y = 0$ и $xD(y) = 0$. Отсюда в силу точности f -алгебры E получаем $D(x) \perp y$ и $x \perp D(y)$. Рассмотрим теперь дизъюнкты $x \in E$ и $g \in G$. По условию идеал I , порожденный множеством $\{x\}^\perp$ и точкой x , будет фундаментом в G , поэтому можем предположить, не ограничивая общности, что $g \in I$. В то же время, $|g| \leq y$ для некоторого $y \in E_+$, следовательно, $D(x) \perp g$ в силу доказанного выше. $\triangleright$

8.4. Пусть $\mathcal{D}(\mathcal{C}\downarrow)$ — множество всех дифференцирований, а $\mathcal{M}_N(\mathcal{C}\downarrow)$ — множество всех нерасширяющих автоморфизмов в f -алгебре $\mathcal{C}\downarrow$. Пусть $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})$ и $\mathcal{M}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})$ — элементы $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающие множества всех $\mathbb{C}^\wedge$ -дифференцирований и всех $\mathbb{C}^\wedge$ -автоморфизмов в $\mathcal{C}$. Как видно, $\mathcal{D}(\mathcal{C}\downarrow)$ — модуль над кольцом $\mathcal{C}\downarrow$ и $\llbracket \mathcal{D}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C}) \rrbracket$ — комплексное векторное пространство $\llbracket 1 \rrbracket$.

Операции спуска и подъема осуществляют изоморфизм модулей $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})\downarrow$ и $\mathcal{D}(\mathcal{C}\downarrow)$, а также биекцию множеств $\mathcal{M}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})\downarrow$ и $\mathcal{M}_N(\mathcal{C}\downarrow)$.

$\triangleleft$ Следует из 7.8. Нужно лишь заметить, что оператор $T \in \text{End}_N(\mathcal{C}\downarrow)$ будет дифференцированием (автоморфизмом) тогда и только тогда, когда $\llbracket \tau := T\uparrow \rrbracket$ — дифференцирование (автоморфизм) $\llbracket 1 \rrbracket$. $\triangleright$

8.5. Порядково ограниченное дифференцирование и порядково ограниченный нерасширяющий автоморфизм расширенного f -кольца $G_{\mathbb{C}}$ тривиальны.

$\triangleleft$ Можно считать $G_{\mathbb{C}} = \mathcal{C}\downarrow$. Если T — дифференцирование (нерасширяющий автоморфизм) f -кольца $G_{\mathbb{C}}$, то $\llbracket \tau := T\uparrow \rrbracket$ — $\mathbb{C}^\wedge$ -дифференцирование ($\mathbb{C}^\wedge$ -автоморфизм) поля $\mathcal{C}$ $\llbracket 1 \rrbracket$. Более того, T порядково ограничен тогда и только тогда, когда $\llbracket \tau \rrbracket$ порядково ограничен в $\mathcal{C}$ $\llbracket 1 \rrbracket$. Однако в поле $\mathcal{C}$ любое порядково ограниченное $\mathbb{C}^\wedge$ -дифференцирование является нулевым и любой порядково ограниченный $\mathbb{C}^\wedge$ -автоморфизм тождественен. В первом случае $T = 0$, а во втором $T = I$. $\triangleright$

8.6. Если $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{C}^\wedge \neq \mathcal{C}$, то в комплексной расширенной f -алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{C}) = \mathcal{C}\downarrow$ существуют нетривиальное дифференцирование и нетривиальный нерасширяющий автоморфизм.

◁ Можно показать, что в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ имеет место утверждение: поле $\mathbb{C}^\wedge$ алгебраически замкнуто в $\mathcal{C}$, см. [12]. Но тогда условие $\mathbb{C}^\wedge \neq \mathcal{C}$ влечет за собой, что $\mathcal{C}$ служит трансцендентным расширением подполя $\mathbb{C}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Согласно 4.9 существуют нетривиальное $\mathbb{C}^\wedge$ -дифференцирование $\delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ и нетривиальный $\mathbb{C}^\wedge$ -автоморфизм $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. Если $D := \delta \downarrow$ и $A := \alpha \downarrow$, то в соответствии с 5.6 D — нетривиальное дифференцирование, а A — нетривиальный нерасширяющий автоморфизм f -алгебры $\mathcal{C} \downarrow$. ▷

8.7. Теорема. Для произвольной полной булевой алгебры $\mathbb{B}$ равносильны следующие утверждения:

- (1) $\mathbb{B}$ является σ -дистрибутивной;
- (2) $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathcal{C} = \mathbb{C}^\wedge$;
- (3) комплексное K -пространство $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathcal{C} \downarrow$ локально одномерно;
- (4) в комплексном K -пространстве $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathcal{C} \downarrow$ все нерасширяющие линейные операторы порядково ограничены;
- (5) в комплексной f -алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathcal{C} \downarrow$ нет ненулевых дифференцирований;
- (6) в комплексной f -алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathcal{C} \downarrow$ всякий нерасширяющий эндоморфизм является порядковым проектором;
- (7) в комплексной f -алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathcal{C} \downarrow$ нет нетривиальных нерасширяющих автоморфизмов.

◁ (1) $\rightarrow$ (2): Известно [14, 10.7.6], что если булева алгебра $\mathbb{B}$ σ -дистрибутивна, то $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{R}^\wedge = \mathcal{R}$. Отсюда, используя принцип ограниченного переноса 6.2, выводим: $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathcal{C} = \mathcal{R} \oplus i\mathcal{R} = \mathbb{R}^\wedge \oplus i\mathbb{R}^\wedge = \mathbb{C}^\wedge$.

(2) $\rightarrow$ (3): Если $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{C}^\wedge = \mathcal{C}$, то внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ множество $\text{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})$ состоит из функций $\tau : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ вида $\tau(z) = cz$, где $c \in \mathcal{C}$. Но тогда оператор $T := \tau \downarrow$ из $\mathcal{C} \downarrow$ в $\mathcal{C} \downarrow$ также имеет вид $T(u) = gu$ для некоторого $g \in \mathcal{C} \downarrow$.

(3) $\rightarrow$ (1): Из (3) следует, что в K -пространстве $\mathcal{R} \downarrow$ все нерасширяющие линейные операторы порядково ограничены. Но тогда $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{R}^\wedge = \mathcal{R}$ (см. [14, теорема 10.7.6]), стало быть, $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathcal{C} = \mathbb{C}^\wedge$.

(3) $\rightarrow$ (4): Следует из 8.3 и 8.5.

(3) $\rightarrow$ (5): Нерасширяющий эндоморфизм $T : \mathcal{C} \downarrow \rightarrow \mathcal{C} \downarrow$ допускает представление $T = T_1 + iT_2$, где T_1, T_2 — нерасширяющие линейные

операторы в вещественном K -пространстве $\mathcal{R}\downarrow$, см. 2.2. В силу (3) T_1 и T_2 порядково ограничены, следовательно, $T_1x = c_1x$ ($x \in \mathcal{R}\downarrow$) для некоторых констант $c_1, c_2 \in \mathcal{R}\downarrow$. Как видно, $Tz = c \cdot z$ ($z \in \mathcal{C}\downarrow$), где $c := c_1 + ic_2$. Мультипликативность оператора T влечет $c^2 = c$, поэтому выполнены равенства $c_1^2 - c_2^2 = c_1$ и $2c_1c_2 = c_2$. Если $\pi := [c_2]$ — порядковый проектор в $\mathcal{R}\downarrow$ на полосу $\{c_2\}^{\perp\perp}$, то из второго равенства выводим $\pi c_1 = (1/2)\pi(1)$, а из первого вытекает $-\pi(c_2^2) = (1/4)\pi(1)$. Последнее возможно только при $\pi = 0$, значит $c_2 = 0$ и $0 \leq c_1^2 = c_1$. Но верно также $0 \leq (1 - c_1)^2 = 1 - c_1$, значит, $c_1 \leq 1$. Теперь видно, что оператор $x \mapsto T_1x = c_1x$ служит порядковым проектором в $\mathcal{R}\downarrow$ и, так как $T_2 = 0$, то его каноническое продолжение на $\mathcal{C}\downarrow$ совпадает с T .

(5) $\rightarrow$ (6): Очевидно.

Нужные для завершения доказательства импликации (4) $\rightarrow$ (2) и (6) $\rightarrow$ (2) вытекают из 4.9 и 8.6.

(4) $\rightarrow$ (2): Если в модели $\mathbb{V}(\mathbb{B})$ не выполняется равенство $\mathcal{C} = \mathbb{C}^\wedge$, то $b := \llbracket \mathcal{C} = \mathbb{C}^\wedge \rrbracket < 1$. Но тогда $b^* = \llbracket \mathcal{C} \neq \mathbb{C}^\wedge \rrbracket \neq 0$. В булевозначной модели $\mathbb{V}(\mathbb{B}_0)$ над булевой алгеброй $\mathbb{B}_0 := [0, b^*]$ имеет место равенство $\mathcal{C} \neq \mathbb{C}^\wedge$. В силу утверждения 8.6 существует ненулевое дифференцирование D в полосе $b^*\mathcal{C}\downarrow$. Единственное продолжение $D \oplus 0$ оператора D , совпадающее с нулем на полосе $b\mathcal{C}\downarrow$, также будет ненулевым дифференцированием в $\mathcal{C}\downarrow$.

(6) $\rightarrow$ (2): Аналогичным образом, используя утверждение 8.6, для того же $b \in \mathbb{B}$ можно найти нетривиальный автоморфизм A^* в полосе $b^*\mathcal{C}\downarrow$. Если A — тождественное отображение в полосе $b\mathcal{C}\downarrow$, то $A^* \oplus A$ — нетривиальный автоморфизм в $\mathcal{C}\downarrow$. $\triangleright$

8.8. Следствие. Для расширенного вещественного K -пространства G с фиксированной структурой f -алгебры равносильны утверждения:

- (1) $\mathbb{V}(\mathbb{B}) \models \mathcal{R} = \mathbb{R}^\wedge$;
- (2) булева алгебра $\mathbb{B} := \mathfrak{P}(G)$ σ -дистрибутивна;
- (3) K -пространство $\mathbb{B}(\mathbb{R}) := \mathcal{R}\downarrow$ локально одномерно;
- (4) в K -пространстве $\mathbb{B}(\mathbb{R}) := \mathcal{R}\downarrow$ все нерасширяющие линейные операторы порядково ограничены;
- (5) в f -алгебре $G_{\mathbb{R}}$ нет нетривиальных дифференцирований;
- (6) в комплексной f -алгебре $G_{\mathbb{C}}$ нет нетривиальных нерасширяющих автоморфизмов.

8.9. Рассмотрим теперь вопрос о том, когда в пространстве измеримых функций существуют нетривиальные дифференцирования и автоморфизмы. Говорят, что пространство с мерой (Ω, Σ, μ) *локально сепарабельно*, если Σ содержит семейство $(\Omega_\xi)_{\xi \in \Xi}$ попарно непересекающихся множеств конечной меры, удовлетворяющих следующим двум требованиям:

(1) для каждого измеримого подмножества $A \in \Sigma$ конечной меры существуют счетное множество индексов $\Theta \subset \Xi$ и множество нулевой меры $A_0 \in \mathcal{N}$ такие, что

$$A = A_0 \cup \left(\bigcup_{\xi \in \Theta} (A \cap \Omega_\xi) \right).$$

(2) для каждого индекса $\xi \in \Xi$ пространство с мерой $\mathbb{B}_\xi := \mathbb{B}(\Omega_\xi, \Sigma_\xi, \mu_\xi)$, где $\Sigma_\xi := \{A \cap \Omega_\xi : A \in \Sigma\}$ и μ_ξ — ограничение μ на Ω_ξ , сепарабельно.

Если выполнено только условие (1), то говорят что (Ω, Σ, μ) обладает свойством прямой суммы, и в этом случае $\mathbb{B}$ является полной булевой алгеброй.

Ненулевое дифференцирование, а также отличный от тождественного отображения автоморфизм принято называть нетривиальным. Дифференцирование (автоморфизм) S в L назовем *существенно нетривиальным*, если для любого порядкового проектора $\pi \in \mathfrak{P}(L)$ из $\pi S = 0$ (соответственно $\pi S = \pi I_L$) следует $\pi = 0$.

8.10. Теорема. Пусть (Ω, Σ, μ) — локально сепарабельное пространство с безатомной мерой. Тогда справедливы утверждения:

(1) в $L_{\mathbb{R}}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ имеются существенно нетривиальные дифференцирования;

(2) в $L_{\mathbb{C}}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ имеются существенно нетривиальные дифференцирования;

(3) в $L_{\mathbb{R}}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ имеется единственный нерасширяющие автоморфизмы — тождественное отображение;

(4) в $L_{\mathbb{C}}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ имеются существенно нетривиальные нерасширяющие автоморфизмы.

◁ Доказательство приводится в заметке [13]. ▷

8.6. Эквивалентности $8.7(1) \leftrightarrow 8.7(2) \leftrightarrow 8.7(3)$ установлены А. Е. Гутманом в [21] для вещественного K -пространства

$\mathbb{B}(\mathbb{R}) := \mathcal{R} \downarrow$, содержат решение проблемы Викстеда. Эквивалентность 8.7 (3) $\leftrightarrow$ 8.7 (4) ранее была установлена в работах Ю. А. Абрамовича, А. И. Векслера, А. В. Колдунова [1] и П. Макполлина, А. В. Викстеда [23]. Оставшаяся часть теоремы 8.7 получена А. Г. Кусраевым [12]. Булевозначный подход к этому кругу вопросов развит в [11].

Литература

1. Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В. Операторы, сохраняющие дизъюнктивность // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 248, № 5.—С. 1033–1036.
2. Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В. Операторы, сохраняющие дизъюнктивность, их непрерывность и мультипликативное представление // В кн.: Линейные операторы и их приложения. Межвузовский сборник научных трудов.—Л.: ЛГПИ, 1981.—С. 3–34.
3. Ацел Я., Домбр Ж. Функциональные уравнения с несколькими переменными.—М.: Физматлит, 2003.—432 с.
4. Бурбаки Н. Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы.—М.: Наука, 1965.—300 с.
5. Ван ден Варден Б. Л. Алгебра.—М.: Наука, 1976.—648 с.
6. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // В кн.: Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 63–211.
7. Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Малюгин С. А. Нестандартный анализ и векторные решетки.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2005.—399 с.
8. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика.—М.: Наука, 1987.—320 с.
9. Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра.—М.: ИЛ, 1963.—373 с.
10. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
11. Кусраев А. Г. О нерасширяющих операторах // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, № 3.—С. 48–58.
12. Кусраев А. Г. Автоморфизмы и дифференцирования в расширенной комплексной алгебре // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 1.—С. 97–107.
13. Кусраев А. Г. Дифференцирования и автоморфизмы в алгебре измеримых комплекснозначных функций // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 3.—С. 45–49.
14. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.—525 с.
15. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.—344 с.
16. Сикорский Р. Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.—375 с.
17. Шенфильд Дж. Р. Математическая логика.—М.: Наука, 1975.—520 с.
18. Abramovich Yu. A., Wickstead A. W. The regularity of order bounded operators into $C(K)$. II // Quart. J. Math. Oxford Ser. 2.—1993.—V. 44.—P. 257–270.
19. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.—New York: Academic Press, 1985.—xvi+367 p.

20. Bell J. L. Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—New York etc.: Clarendon Press, 1985.—xx+165 p.
21. Gutman A. E. Locally one-dimensional K -spaces and σ -distributive Boolean algebras // Siberian Adv. Math.—1995.—V. 5, № 2.—P. 99–121.
22. Gutman A. E. Disjointness preserving operators // In: Vector Lattices and Integral Operators (Ed. S. S. Kutateladze).—Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1996.—P. 361–454.
23. McPolin P. T. N., Wickstead A.W. The order boundedness of band preserving operators on uniformly complete vector lattices // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.—1985.—V. 97, № 3.—P. 481–487.
24. Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—xi+376 p.
25. Wickstead A. W. Representation and duality of multiplication operators on Archimedean Riesz spaces // Compositio Math.—1977.—V. 35, № 3.—P. 225–238.

Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНИЦ РАН
E-mail: kusraev@alanianet.ru

ДВУМЕРНЫЙ ДИСКРЕТНЫЙ ОПЕРАТОР
ВИНЕРА — ХОПФА С МЕРОМОРФНЫМ СИМВОЛОМ

А. Э. Пасенчук, А. Н. Кабельков

Введение

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Z}_+ = \{k \in \mathbb{Z} : k \geq 0\}$, $\mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+$; $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, $\Gamma_\alpha = \{\xi \in \mathbb{C} : \|\xi\| = \alpha\}$, $\alpha \in (0, \infty)$. Для $\mathfrak{Y} \subseteq \mathbb{Z}$ через $l_2^\alpha(\mathfrak{Y})$ обозначим банахово пространство последовательностей $l_2^\alpha(\mathfrak{Y}) = \left\{ \varphi = \{\varphi_j\}_{j \in \mathfrak{Y}} \in l_2(\mathfrak{Y}) \right\}$ с покомпонентными линейными операциями и нормой

$$\|\varphi\|_\alpha = \left(\sum_{j \in \mathfrak{Y}} |\alpha^{-j} \varphi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ясно, что $l_2^1(\mathfrak{Y})$ — стандартное гильбертово пространство последовательностей, суммируемых на $\mathfrak{Y}$ с квадратом. Двумерные аналоги введенных объектов будем обозначать соответственно $T_{\alpha\beta} = \Gamma_\alpha \times \Gamma_\beta$, $l_2^{\alpha\beta}(\mathfrak{Y}^2)$, где $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2 \subseteq \mathbb{Z}$. Запись $l_2^{\alpha\beta}(\mathfrak{Y} \times \mathfrak{Y})$ условимся сокращать до $l_2^{\alpha\beta}(\mathfrak{Y}^2)$. Через $W(\Gamma_\alpha)$, $W(T_{\alpha\beta})$ будем обозначать коммутативные банаховы алгебры Винера на Γ_α , $T_{\alpha\beta}$ соответственно, а через $W^\pm(\Gamma_\alpha)$, $W^{\pm\pm}(T_{\alpha\beta})$ — стандартные подалгебры этих алгебр. Коммутативные банаховы алгебры непрерывных на Γ_α , $T_{\alpha\beta}$ функций будут обозначаться $C(\Gamma_\alpha)$ и $C(T_{\alpha\beta})$ соответственно.

Будем говорить, что функция $a(\xi, \eta) \in C(T_{\alpha\beta})$ допускает мероморфное продолжение в окрестность начала координат, если $a(\xi, \eta) = \frac{\phi(\xi, \eta)}{\theta(\xi, \eta)}$, $(\xi, \eta) \in T_{\alpha\beta}$, где $\phi(\xi, \eta)$, $\theta(\xi, \eta)$, — голоморфные в окрестности начала координат функции двух комплексных переменных. Ясно, что мероморфные функции двух комплексных переменных допускают мероморфные продолжения в окрестность любой точки и, в частности, начала координат. Кроме того, очевидно, что если мероморфная функция не имеет полюсов на $T_{\alpha\beta}$, то она является элементом $W(T_{\alpha\beta})$.

Пусть $\alpha, \beta \in (0, \infty)$. В пространстве $l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2)$ изучается оператор

$$(A\varphi)_{i,j} = \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}_+^2} a_{i-k,j-l} \varphi_{kl}, \quad (1)$$

$$(i,j) \in \mathbb{Z}_+^2, \quad \varphi = \{\varphi_{kl}\}_{(kl) \in \mathbb{Z}_+^2}$$

в предположении, что его символ

$$a(\xi, \eta) = \sum_{(i,j)} a_{ij} \xi^i \eta^j$$

является мероморфной функцией, не имеющей полюсов на торе $T_{\alpha\beta}$.

Обозначим через $V_{\alpha\beta}$ оператор, действующий из $l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2)$ в $l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$ по формуле $(V_{\alpha\beta}\varphi) = \alpha^{-i}\beta^{-j}\varphi_{ij}$, где $\varphi = \{\varphi_{ij}\} \in l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2)$. Очевидно, $V_{\alpha\beta}$ — изометрический, обратимый оператор, при этом обратный оператор $V_{\alpha\beta}^{-1} : l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2) \rightarrow l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2)$ действует по формуле $(V_{\alpha\beta}^{-1}\varphi)_{ij} = \alpha^i\beta^j\varphi_{ij}$, $\varphi = \{\varphi_{ij}\} \in l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$, и также является изометрическим. С другой стороны, нетрудно видеть, что для оператора (1) имеет место соотношение $A = V_{\alpha\beta}^{-1}A_{\alpha\beta}V_{\alpha\beta}$, где через $A_{\alpha\beta}$ обозначен оператор вида (1) с символом $a(\alpha\xi, \beta\eta)$, $(\xi, \eta) \in T_{11}$, рассматриваемый в пространстве $l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$. Таким образом, оператор (1) подобен двумерному дискретному оператору Винера — Хопфа в пространстве $l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$. В силу результата И. Б. Симоненко [1] получаем следующее утверждение. Оператор (1) фредгольмов в пространстве $l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1) $a(\xi, \eta) \neq 0, (\xi, \eta) \in T_{\alpha\beta}$,
- 2) $\text{ind}_{\xi \in \Gamma_\alpha} a(\xi, \eta) = \text{ind}_{\eta \in \Gamma_\beta} a(\xi, \eta) = 0$.

Для одномерного аналога оператора (1) было показано, что замкнутость образа отвечает невырожденность символа (см. [2]). С другой стороны Л. И. Сазонов [3] обнаружил, что среди операторов вида (1) имеются операторы, с символами, не обращающимися в нуль на $T_{\alpha\beta}$, но имеющие незамкнутые образы. В работах [4–6] было показано, что для одномерного аналога оператора (1) с достаточно «хорошим» символом, имеющего незамкнутый образ в стандартных банаховых пространствах последовательностей (типа пространства l_p), может быть построена теория односторонней обратимости в пространствах последовательностей со счетно-нормированной топологией, убывающих на бесконечности быстрее любой степени. При

этом во множество односторонне обратимых операторов в указанных счетно-нормированных пространствах попадали и те операторы, которые имели аннулирующиеся символы и, следовательно, незамкнутые образы в указанных банаховых пространствах. Оказалось, что для двумерных операторов Винера — Хопфа ситуация принципиально отличается от одномерной. Точнее говоря, имеются операторы вида (1), у которых образ не замкнут одновременно и в пространстве $l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$ и в любом счетно-нормированном пространстве последовательностей со степенным характером поведения на бесконечности. Такими свойствами, как оказалось, обладают операторы вида (1) с незамкнутыми образами, символы которых удовлетворяют условию 1). В связи с этим актуальной представляется задача о построении таких пространств последовательностей, в которых операторы вида (1), не являющиеся фредгольмовыми в $l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$, нормально разрешимы. Для некоторых частных символов ниже предлагается один из вариантов решения этой задачи. Кроме того, в качестве следствия, мы описываем образы операторов рассматриваемого класса в пространстве $l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$ и указываем достаточные условия существования решения уравнения, порождаемого оператором (1) в этом пространстве.

1. Классы корректности

Одним из основных результатов настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $a(\xi, \eta)$ — мероморфная функция двух комплексных переменных, тогда для оператора вида (1) найдутся $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ так, что оператор (1), рассматриваемый в пространстве $l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2)$, имеет замкнутый образ и, более того, является односторонне обратимым.

Доказательству этого утверждения предположим некоторые вспомогательные утверждения и построения.

Лемма 1. Пусть $a(\xi, \eta) = \frac{\phi(\xi, \eta)}{\theta(\xi, \eta)}$, где $\phi(\xi, \eta), \theta(\xi, \eta)$ — голоморфные в окрестности начала координат функции двух комплексных переменных. Тогда найдутся $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ такие, что функция $a(\xi, \eta)$ допускает следующее представление

$$a(\xi, \eta) = a_0(\xi, \eta)(1 + \mu(\xi, \eta))\eta^m, \quad (2)$$

где $a_0(\xi, \eta) \in GW^{++}(T_{\alpha\beta})$, $\mu(\xi, \eta) \in W(T_{\alpha\beta})$, $\|\mu(\eta, \xi)\|_{c(T_{\alpha\beta})} < \rho$, а $m \in \mathbb{Z}$. При этом $\rho = \rho(\alpha, \beta)$ и может быть выбрано сколь угодно малым для достаточно малых α, β .

◁ В силу подготовительной теоремы Вейерштрасса каждая из функций $\phi(\xi, \eta), \theta(\xi, \eta)$ в окрестности начала координат допускает следующее представление

$$\phi(\xi, \eta) = \left(\eta^p + \sum_{k=0}^{p-1} \delta_k(\xi) \eta^k \right) \phi_0(\xi, \eta),$$

$$\theta(\xi, \eta) = \left(\eta^r + \sum_{l=0}^{r-1} \gamma_l(\xi) \eta^l \right) \theta_0(\xi, \eta),$$

где $\phi_0(\xi, \eta), \theta_0(\xi, \eta)$ голоморфны и не обращаются в нуль в области $\{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 : |\xi| < a, |\eta| < b\}$ для некоторых $a, b \in (0, \infty)$, а функции $\delta_k(\xi), \gamma_l(\xi)$ голоморфны в некоторых окрестностях точки $\xi = 0$ и $\delta_k(0) = 0, \gamma_l(0) = 0$. Для определенности будем считать, что $p \leq r$. Положим $a_0(\xi, \eta) = \frac{\phi_0(\xi, \eta)}{\theta_0(\xi, \eta)}, m = p - r$,

$$\mu(\xi, \eta) = \eta^{-m} \left(\eta^p + \sum_{l=0}^{r-1} \gamma_l(\xi) \eta^l \right)^{-1} - 1.$$

Нетрудно видеть, что для определенных таким образом функций действительно имеет место представление (2). При этом, очевидно, $a_0(\xi, \eta) \in GW^{++}(T_{\alpha\beta})$ для достаточно малых α, β , а $\mu(\xi, \eta) \rightarrow 0, (\xi, \eta) \rightarrow 0$. Выбрав α, β так, чтобы множество $\{(\xi, \eta) \in C^2 : |\xi| \leq \alpha, |\eta| \leq \beta\}$ лежало в области голоморфности функции $a_0(\xi, \eta) \neq 0$ на этом множестве и чтобы функция $\mu(\xi, \eta)$ была достаточно малой, приходим к утверждению леммы. Случай $p > r$ рассматривается аналогично. ▷

Лемма 2. Пусть $a(\xi, \eta) \in C(T_{\alpha\beta})$, тогда оператор (1) ограничен в пространстве $l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2)$ и для его нормы имеет место следующее равенство

$$\|A\| = \max_{(\xi, \eta) \in T_{\alpha\beta}} |a(\xi, \eta)|.$$

◁ Воспользуемся тем, что оператор $A : l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2) \rightarrow l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2)$ подобен оператору $A_{\alpha\beta} : l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2) \rightarrow l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$. Поскольку

$$\|A_{\alpha\beta}\| = \max_{(\xi, \eta) \in T_{11}} |a(\alpha\xi, \beta\eta)| = \max_{(\xi, \eta) \in T_{\alpha\beta}} |a(\xi, \eta)|$$

(см. [7]), то

$$\|A\| = \|V_{\alpha\beta}^{-1}A_{\alpha\beta}V_{\alpha\beta}\| \leq \max_{(\xi,\eta) \in T_{\alpha\beta}} |a(\xi,\eta)|.$$

С другой стороны, по любому сколь угодно малому $\varepsilon > 0$ в силу равенства

$$\|A_{\alpha\beta}\| = \max_{(\xi,\eta) \in T_{\alpha\beta}} |a(\xi,\eta)|$$

найдется $\varphi_\varepsilon \in l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$, $\|\varphi_\varepsilon\| = 1$, такой, что

$$A_{\alpha\beta}\varphi_\varepsilon > \max_{(\xi,\eta) \in T_{\alpha\beta}} |a(\xi,\eta)|.$$

Положим $\psi_\varepsilon = V_{\alpha\beta}^{-1}\varphi_\varepsilon$. Ясно, что $\psi_\varepsilon \in l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2)$ и $\|\psi_\varepsilon\| = 1$. Тогда в силу изометричности операторов $V_{\alpha\beta}^{-1}$ и $V_{\alpha\beta}$ имеем

$$\|A\psi_\varepsilon\| = \|V_{\alpha\beta}^{-1}A_{\alpha\beta}V_{\alpha\beta}V_{\alpha\beta}^{-1}\varphi_\varepsilon\| = \|A_{\alpha\beta}\varphi_\varepsilon\| > \max_{(\xi,\eta) \in T_{\alpha\beta}} |a(\xi,\eta)| - \varepsilon. \triangleright$$

Лемма 3. Пусть X, Y, Z, W — банаховы пространства, а $B : X \rightarrow Y$, $C : Y \rightarrow Z$, $D : Z \rightarrow W$ — линейные ограниченные операторы. Тогда, если любые два из этих операторов обратимы, а третий имеет замкнутый образ, то и композиция $B \cdot C \cdot D : X \rightarrow W$ также имеет замкнутый образ.

◁ Проверка утверждения леммы труда не представляет. Обратим, однако, внимание на то, что композиция операторов, имеющих замкнутые образы, вообще говоря, не является оператором с замкнутым образом. Более того, композиция односторонне обратимых операторов (разного характера обратимости) может оказаться не нормально разрешимым оператором. В самом деле, оператор A вида (1) с символом $a(\xi,\eta) = \xi^{-1}\eta - \delta$, где $\delta \in C$, $|\delta| < 1$, рассматриваемый в пространстве $l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$, имеет незамкнутый образ (см. [3]). С другой стороны, в силу того, что $a(\xi,\eta) = \xi^{-1}(1 - \delta\xi\eta^{-1})\eta$ и в силу свойства частичной мультипликативности [7], для оператора имеет место представление $A = B \cdot C$. В этом представлении операторы B и C являются операторами вида (1) с символами ξ^{-1} и $(1 - \delta\xi\eta^{-1})\eta$ соответственно. Хорошо известно, что оператор B обратим справа, а оператор C обратим слева. ▷

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $a(\xi, \eta)$ мероморфная функция, тогда для нее в силу леммы 1 имеет место представление (2). Выберем и зафиксируем α, β так, чтобы

$$\max_{(\xi, \eta) \in T(\alpha\beta)} |\mu(\xi, \eta)| < 1,$$

тогда в силу леммы 2 оператор вида (1) с символом $1 + \mu(\xi, \eta)$ обратим в пространстве $l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2)$, а обратный к нему оператор может быть реализован в виде ряда Неймана. Если в представлении (2) $m \geq 0$, то в силу свойства частичной мультипликативности для оператора A имеет место разложение в композицию $A = B \cdot C \cdot D$, в которой B, C, D — операторы вида (1), действующие в пространстве $l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2)$, с символами $1 + \mu(\xi, \eta)$, $a_0(\xi, \eta)$, η^m соответственно. Операторы B и C обратимы, а оператор D обратим слева, поэтому оператор A в рассматриваемом случае обратим слева и, в частности, имеет замкнутый образ. Если же $m < 0$, то в силу свойства частичной мультипликативности для оператора A имеет место представление $A = B \cdot C \cdot D$, где операторы B и C по-прежнему обратимы, а оператор D обратим справа. Но тогда и оператор A обратим справа и, в частности, имеет замкнутый образ. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ. Фактически в теореме доказано больше, чем утверждалось. Именно, показано, что для оператора вида (1), символ которого допускает мероморфное продолжение в некоторую окрестность начала координат, найдутся $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ такие, что оператор A с таким символом односторонне обратим в пространстве $l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2)$. При этом характер обратимости этого оператора определяется соотношением между порядками многочленов Вейерштрасса числителя и знаменателя, представляющих символ. В частности отметим, что если порядки многочленов Вейерштрасса числителя и знаменателя, представляющих символ, одинаковы, то в представлении (2) $m = 0$ и, следовательно, оператор $A : l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2) \rightarrow l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2)$ обратим.

2. Описание образа двумерного дискретного оператора Винера — Хопфа с мероморфным символом

Рассмотрим, оператор вида (1) $A : l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2) \rightarrow l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$, предполагая, что символ этого оператора допускает мероморфное продолжение в некоторую окрестность начала координат. В этом пункте

нас будет интересовать вопрос о разрешимости уравнения $A\varphi = f$ с оператором A .

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения:

Лемма 4. Пусть $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ — действительные положительные числа и $\alpha \leq \alpha_1, \beta \leq \beta_1$. Тогда имеет место вложение $l_2^{\alpha_1\beta_1}(\mathbb{Z}_+^2) \subseteq l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2)$ и при этом $\|\varphi\|_{\alpha_1\beta_1} \leq \|\varphi\|_{\alpha\beta}$.

◁ В самом деле, пусть $\varphi = \{\varphi_{i,j}\} \in l_2^{\alpha_1\beta_1}(\mathbb{Z}_+^2)$. Тогда, очевидно, имеет место следующая оценка

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\alpha_1\beta_1} &= \left(\sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}_+^2} \alpha_1^{-2i} \beta_1^{-2j} \|\varphi_{ij}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}_+^2} \alpha^{-2i} \beta^{-2j} \|\varphi_{ij}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\varphi\|_{\alpha\beta}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Следствие. Если $\alpha \in (0, 1), \beta \in (0, 1)$, то $l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2) \subseteq l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2)$.

Лемма 5. Пусть $\alpha \in (0, 1), \beta \in (0, 1)$ и $\varphi \in l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$. Тогда имеет место следующее равенство

$$V_{\alpha\beta}^{-1} A\varphi = A_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}^{-1} \varphi.$$

◁ Действительно, пусть $\varphi = \{\varphi_{ij}\} \in l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$. Тогда

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta}^{-1} A\varphi &= \left\{ \alpha^i \beta^j \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}_+^2} a_{i-l, j-k} \varphi_{lk} \right\}_{(i,l) \in \mathbb{Z}_+^2} = \\ &= \left\{ \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}_+^2} \alpha^{i-j} \beta^{j-j} a_{i-l, j-k} \alpha^l \beta^k \varphi_{lk} \right\}_{(i,l) \in \mathbb{Z}_+^2} = A_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}^{-1} \varphi. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь уравнение $A\varphi = f$ в пространстве $l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$. Подействовав на обе его части оператором $V_{\alpha\beta}$, получим в силу леммы 5 следующее уравнение $A_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}^{-1} \varphi = V_{\alpha\beta}^{-1} f$. Ясно, что это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $V_{\alpha\beta}^{-1} f \in \text{im } A_{\alpha\beta}$ и найдется такой прообраз $A_{\alpha\beta}^{-1} V_{\alpha\beta}^{-1} f$ элемента $V_{\alpha\beta}^{-1} f \in l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$, что

$V_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}^{-1}V_{\alpha\beta}^{-1}f \in l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$. Поскольку, в силу теоремы 1, при достаточно малых α, β оператор $A_{\alpha\beta}$ имеет достаточно простую структуру, то приведенное описание образа позволяет в ряде случаев эффективно находить решения уравнений, порожаемых операторами вида (1). Например, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть функция $a(\xi, \eta)$ допускает мероморфное продолжение в некоторую окрестность начала координат и $a(\xi, \eta) = \frac{\phi(\xi, \eta)}{\theta(\xi, \eta)}$, где $\phi(\xi, \eta), \theta(\xi, \eta)$ — голоморфные в окрестности начала координат функции двух комплексных переменных. Тогда, если хотя бы по одной из переменных многочлены Вейерштрасса функций $\phi(\xi, \eta)$ и $\theta(\xi, \eta)$ имеют одинаковую степень, то уравнение $A\varphi = f$, где A — оператор вида (1) с символом $a(\xi, \eta)$, имеет хотя бы одно решение в пространстве $l_2^{11}(\mathbb{Z}_+^2)$, если f — финитная последовательность.

◁ Пусть выполнены условия теоремы, например, по переменной η , тогда имеет место представление (2), в котором $m = 0$. Это означает, что числа $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ могут быть выбраны так, чтобы оператор $A_{\alpha\beta}$ был обратим. Поскольку последовательность f финитна, то

$$f \in \bigcap_{(\delta, \gamma)} l_2^{\delta\gamma}(\mathbb{Z}_+^2),$$

поэтому в силу обратимости оператора $A_{\alpha\beta}$, получаем, что $A_{\alpha\beta}^{-1}V_{\alpha\beta}^{-1}f \in l_2^{\alpha\beta}(\mathbb{Z}_+^2)$. Но тогда, очевидно, является решением уравнения $A\varphi = f$. ▷

Литература

1. Симоненко И. Б. О многомерных дискретных свертках // Матем. исследования.—Кишинев: Штиинца, 1968.—Вып. 3.—С. 298–313.
2. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.—Кишинев: Штиинца, 1973.—426 с.
3. Сазонов Л. И. О нормальной разрешимости двумерных операторов Теплица // Мат. заметки.—1981.—Т. 30, № 2.—С. 261–268.
4. Дыбин В. Б., Карапетянц Н. К. Применение метода нормализации к одному классу бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.—Изв. вузов. Математика.—1967.—№ 10.—С. 39–49.
5. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений.—М.: Мир, 1979.—С. 493.
6. Зильберманн Б. О сингулярных интегральных операторах в пространствах бесконечно дифференцируемых и обобщенных функций // Матем. исследования.—Кишинев: Штиинца, 1971.—Вып. 3.—С. 168–179.

7. Сазонов Л. И. Непрерывные функции двух изометрических операторов: нётеровость и обратимость // Матем. исследования.— Кишинев: Штиинца, 1974.— Вып. 2.— С. 126–138.

Новочеркасск, Южно-Российский государственный
технический университет (НПИ)
E-mail: pasenchuk@mail.ru

СТРОГО СИНГУЛЯРНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ

Е. М. Семенов

1. Введение

Линейный оператор A , действующий из банахова пространства E в банахово пространство F , называется строго сингулярным (или оператором Като), если сужение A на любое бесконечномерное подпространство E не является изоморфизмом. Хорошо известно, что множество строго сингулярных операторов SS есть замкнутый идеал. Более подробно о свойствах этого идеала см. [10, с. 2].

Для банаховых решеток более слабое понятие было введено в [5]. Линейный оператор A , действующий из банаховой решетки E в банахово пространство F , называется дизъюнктно строго сингулярным (обозначается $A \in DSS$), если не существует бесконечной последовательности ненулевых дизъюнктных элементов $x_k \in E$ таких, что сужение A на $[x_k]$ есть изоморфизм. В этом обзоре мы ограничимся простейшим и наиболее важным случаем, когда A есть тождественный оператор. Тогда $E \subset F$ и это вложение называется строго сингулярным (дизъюнктно строго сингулярным), если из эквивалентности норм E и F на некотором подпространстве (подпространстве, порожденной дизъюнктной системой элементов из E) вытекает, что это подпространство конечномерно.

Строго сингулярные и дизъюнктно строго сингулярные вложения мы будем в основном изучать в классе перестановочно-инвариантных пространств. Приведем необходимые определения и примеры.

Банахово пространство E измеримых функций на I , где $I = [0, 1]$ или $[0, \infty)$, называется перестановочно-инвариантным (г. и.) или симметричным, если

- 1) $|x(t)| \leq |y(t)|$, $t \in I$, $y \in E \Rightarrow x \in E$, $\|x\|_E \leq \|y\|_E$;
- 2) из равноизмеримости функций $x(t)$, $y(t)$ и $y \in E$ следует $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$ [11, 2.а.1], [9, 2.4.1].

Следуя [11], мы будем предполагать, что E сепарабельно или сопряжено к сепарабельному пространству. В классе г. и. пространств

есть максимальный и минимальный элементы относительно вложений. Если $I = [0, 1]$, то

$$L_\infty \subset E \subset L_1, \quad (1)$$

если $I = [0, \infty)$, то

$$L_1 \cap L_\infty \subset E \subset L_1 + L_\infty. \quad (2)$$

Для измеримого подмножества $e \subset [0, 1]$ обозначим через $\chi_e(t)$ характеристическую функцию e . Мы будем предполагать, что $\|\chi_{[0,1]}\|_E = 1$. Тогда нормы вложений в (1) и (2) равны 1. Функция $\varphi_E(s)$, определенная на $[0, 1]$ в случае $I = [0, 1]$ или на $[0, \infty)$ в случае $I = [0, \infty)$ равенством $\|\chi_e\|_E = \varphi_E(\text{mes } e)$ называется фундаментальной функцией г. и. пространства E .

Равенство двух г. и. пространств означает совпадение их как множеств. Тогда по теореме о замкнутом графике их нормы эквивалентны.

Если E — г. и. пространство, то через E' обозначается множество таких измеримых функций на I , для которых

$$\|x\|_{E'} = \sup_{\|y\|_E \leq 1} \int_I x(t)y(t) dt < \infty.$$

Приведем наиболее важные примеры г. и. пространств. Если $M(u)$ — возрастающая выпуклая на $[0, \infty)$ функция, $M(0) = 0$, то $M(u)$ называется функцией Орлича, а через L_M обозначается пространство Орлича с нормой

$$\|x\|_{L_M} = \inf \left\{ \lambda : \lambda > 0, \int_I M(|x(t)|/\lambda) dt \leq 1 \right\}.$$

Среди пространств Орлича особую роль играет пространство, порожденное функцией $M(u) = e^{u^2} - 1$. Это пространство несепарабельно. Если $I = [0, 1]$, то сепарабельная часть этого пространства, т. е. замыкание L_∞ в L_M , обозначается через G . Функция $M(u) = e^{u^p} - 1$ выпукла на $[0, \infty)$ при $p \geq 1$ и эквивалентна выпуклой при $0 < p < 1$. Через $\exp L_p$ ($0 < p < \infty$) обозначается пространство Орлича, соответствующее этой функции. Координатные пространства Орлича l_M определяются аналогичным образом. Функция Орлича M удовлетворяет Δ_2 -условию в 0 (∞), если существует такая

константа $C > 0$, что $M(2u) \leq CM(u)$ для всех достаточно малых (больших) $u > 0$. Сепарабельность пространства Орлича L_M (l_M) эквивалентна Δ_2 -условию функции M в ∞ (0).

Если г. i. пространство E несепарабельно, то замыкание L_∞ ($I = [0, 1]$) или $L_1 \cap L_\infty$ ($I = [0, \infty)$) в E обозначается через E° .

Пусть Ω есть множество возрастающих вогнутых на $[0, 1]$ функций $\varphi(t)$ таких, что $\varphi(0) = 0$. Всякая $\varphi \in \Omega$ порождает пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ и Марцинкевича $M(\varphi)$ с нормами

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^1 x^*(t) d\varphi(t),$$

$$\|x\|_{M(\varphi)} = \sup_{0 < s \leq 1} \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s x^*(t) dt,$$

где $x^*(t)$ — перестановка функции $|x(t)|$ в убывающем порядке. Если $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, то пространство Лоренца $L_{p,q}$ определяется как множество функций, для которых

$$\|x\|_{L_{p,q}} = \begin{cases} \left(\frac{q}{p} \int_0^1 \left(x^*(t) t^{1/p} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & q < \infty, \\ \sup_{0 < t \leq 1} x^*(t) t^{1/p}, & q = \infty \end{cases}$$

конечна. Заметим, неравенство треугольника для $\|\cdot\|_{L_{p,q}}$ выполнено лишь для $q \leq p$. Однако для $q > p$ на $L_{p,q}$ можно определить норму эквивалентную $\|\cdot\|_{L_{p,q}}$. Для случая $I = [0, \infty)$ пространства Орлича, Лоренца, Марцинкевича определяются аналогичным образом.

Важную роль в теории г. i. пространств играет система функций Радемахера

$$r_k(t) = \text{sign} \sin 2^k \pi t, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Классическое неравенство Хинчина [10, 2.b.3] говорит о том, что стандартный базис l_2 и система Радемахера в L_p эквивалентны для $1 \leq p < \infty$. Справедливо более общее утверждение. Стандартный базис l_2 и система Радемахера в г. i. пространстве E эквивалентны тогда и только тогда, когда $G \subset E$ [16], [11, 2.b.4].

Изложению теории г. i. пространств посвящены монографии [9, 11].

2. Экстремальные вложения

Очевидно, всякое строго сингулярное вложение дизъюнктно строго сингулярно. Обратное утверждение не справедливо. Действительно, если $1 \leq p < q < \infty$, то вложение $L_q[0, 1] \subset L_p[0, 1]$ DSS, так как для любой системы функций $x_k \in L_q$ с дизъюнктными носителями

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|_{L_q} = \left(\sum |c_k|^q \|x_k\|_{L_q}^q \right)^{1/q}$$

и пространства l_q и l_p неизоморфны. Как отмечалось ранее, на линейной оболочке системы Радемахера нормы L_p и L_q эквивалентны. Следовательно, вложение $L_q[0, 1] \subset L_p[0, 1]$ не строго сингулярно.

Один из первых содержательных примеров строго сингулярного вложения был найден Гротендиком [15, 5.2], который доказал, что вложение $L_\infty[0, 1] \subset L_p[0, 1]$ строго сингулярно при $p < \infty$. Обобщение этого результата было получено в [13]: вложение $L_\infty \subset E$ строго сингулярно для любого г. и. пространства E на $[0, 1]$, $E \neq L_\infty$. В [1] было показано, что для любого г. и. пространства E на $[0, 1]$, $E \neq L_1$, вложение $E \subset L_1$ дизъюнктно строго сингулярно.

Как отмечалось выше, вложение $E \subset L_1$ не SS, если $G \subset E$. Действительно, нормы E и L_1 эквивалентны на $[r_k]$. Обратное утверждение было доказано не сразу. Предварительные результаты были получены в [12, 13, 18]. А в [6] был доказан окончательный результат. Для того, чтобы вложение г. и. пространства E в L_1 было строго сингулярным необходимо и достаточно, чтобы $G \not\subset E$. Этим был полностью решен вопрос о том, когда вложение (1) SS или DSS.

Используя развитую технику, в [6] был получен критерий строгой сингулярности вложения. Пусть E, F — г. и. пространства на $[0, 1]$, $E \subset F$ и E сепарабельно. Для того чтобы вложение $E \subset F$ было SS необходимо и достаточно, чтобы это вложение было DSS и нормы E, F были не эквивалентны на $[r_k]$. Таким образом при условии неэквивалентности норм E, F на $[r_k]$ понятия SS и DSS совпадают. Из этой теоремы вытекает следующее следствие. Пусть $0 < p < q < \infty$. Для того, чтобы вложение $\exp L_q \subset \exp L_p$ было SS, необходимо и достаточно, чтобы $q > 2$. Отсюда вытекает, что из строгой сингулярности вложения $E \subset F$ не следует, вообще говоря, строгая сингулярность вложения $F' \subset E'$.

В случае $I = [0, \infty)$ вопрос о том, когда левое вложение (2) является SS или DSS, был решен в [7]. Там была доказана эквивалентность следующих условий:

- (i) вложение $L_1 \cap L_\infty \subset E$ DSS,
- (ii) вложение $L_1 \cap L_\infty \subset E$ SS,
- (iii) вложение $L_1 \cap L_\infty \subset E$ слабо компактно,
- (iv) $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_E(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_E(t)}{t} = 0$.

Вопрос о том, когда в случае $I = [0, \infty)$ правое вложение (2) является DSS, оказался более сложным. Частично он был решен в [7] и полностью в [17]. Там было установлено, что вложение $E \subset L_1 + L_\infty$ DSS тогда и только тогда, когда пространство W_p не вложено в E для всех $p \in [1, \infty]$, где $W_1 = L_1$, $W_p = L_{p,\infty}^0$ для $p \in (1, \infty)$ и W_∞ есть замыкание $L_1 \cap L_\infty$ в L_∞ . Более того, если вложение $E \subset L_1 + L_\infty$ не DSS, то существуют $p \in [1, \infty]$ и подпространство $Q \subset E$, порожденное последовательностью функций с дизъюнктными носителями, такие, что оба подпространства $E|_Q$ и $(L_1 + L_\infty)|_Q$ совпадают с l_p с точностью до эквивалентности норм. В частности, вложение $L_{p,q} \subset L_1 + L_\infty$ DSS тогда и только тогда, когда $q < \infty$.

Развитая техника позволила решить вопрос о строгой сингулярности вложения г. и. пространства E на $[0, \infty)$ в $L_1 + L_\infty$. Обозначим через $E(0, 1)$ сужение E на $[0, 1]$. Пусть E — сепарабельное г. и. пространство на $[0, \infty)$. Вложение $E \subset L_1 + L_\infty$ SS тогда и только тогда, когда E не содержит W_p для всех $p \in [1, \infty)$ и $E(0, 1)$ не содержит G .

3. Вложение конкретных классов г. и. пространств

Давно известно, что вложение $l_p \subset l_q$ при $1 \leq p < q \leq \infty$ строго сингулярно [10, 2.а.2]. Важный результат о строгой сингулярности вложения двух координатных пространств Орлича был получен Н. Кэлтоном [8] (или [11, 4.а.10]). Пусть M и N — две функции Орлича, удовлетворяющие Δ_2 -условию в 0 и $l_M \subset l_N$. Для того, чтобы это вложение было строго сингулярно, необходимо и достаточно, чтобы для любого $A > 0$ нашлось такое конечное множество $\{\tau_i\}_{i=1}^m \subset (0, 1]$, что

$$\sum_{i=1}^m M(\tau_i t) \geq A \sum_{i=1}^m N(\tau_i t)$$

для всех $t \in [0, 1]$. Эта теорема для частного случая $N(u) = u^p$ может быть сформулирована в более простой форме. Пусть функция Орлича $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию в 0 и $l_M \subset l_p$, $1 \leq p < \infty$. Для того, чтобы вложение $l_M \subset l_p$ было строго сингулярно необходимо и достаточно, чтобы

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{0 < s \leq 1} \frac{1}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \int_{\varepsilon}^1 \frac{M(st)}{s^p t^{p+1}} dt = \infty.$$

Следующий шаг в этом направлении был сделан в [5]. Там была доказана следующая теорема. Пусть L_M и L_N — пространства Орлича на $[0, 1]$ и $L_M \subset L_N$. Для того чтобы вложение $L_M \subset L_N$ было DSS необходимо и достаточно, чтобы для любого $A > 0$ нашлись такие $u_i \geq 1$ и $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, что

$$\sum_{i=1}^n a_i N(tu_i) \leq A \sum_{i=1}^n a_i M(tu_i) \quad (3)$$

для всех $t \geq 1$. В частности, условие $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{N^{-1}(u)}{M^{-1}(u)} = \infty$ достаточно для выполнения условия (3), однако оно не является необходимым.

Для пространств Лоренца и Орлича решение аналогичного вопроса оказалось более простым. Пусть $\varphi, \psi \in \Omega$ и $\varphi(t) \leq C\psi(t)$ для некоторого $C > 0$ и всех $t \in [0, 1]$. Тогда, как нетрудно проверить, $\Lambda(\psi) \subset \Lambda(\varphi)$ и $M(\varphi) \subset M(\psi)$. В [1] была доказана эквивалентность следующих условий:

- (i) вложение $\Lambda(\psi) \subset \Lambda(\varphi)$ DSS,
- (ii) вложение $M(\varphi) \subset M(\psi)$ DSS,
- (iii) вложение $M^\circ(\varphi) \subset M^\circ(\psi)$ DSS,
- (iv) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = 0$.

Там же был приведен пример, показывающий, что условие $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_F(t)}{\varphi_E(t)} = 0$ не является достаточным для того, чтобы вложение $E \subset F$ было DSS. Достаточное условие в терминах фундаментальных функций пространств для того, чтобы вложение г. и. пространств $E \subset F$ было DSS было найдено в [4]. Если E, F — г. и.

пространства на $[0, 1]$ и

$$\int_0^1 (t/\varphi_E(t))' \varphi_F'(t) dt < \infty, \quad (4)$$

то $E \subset F$ и это вложение DSS. Разумеется, это условие не является необходимым. Например, пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q < r \leq \infty$ и $E = L_{p,q}$, $F = L_{p,r}$. Тогда вложение $L_{p,q} \subset L_{p,r}$ DSS. Однако $\varphi_E(t) = \varphi_F(t) = t^{1/p}$ и условие (4) не выполнено. Если рассмотреть все г. и. пространства с заданными фундаментальными функциями, то оно становится и необходимым.

Пусть L_M — пространство Орлича на $[0, 1]$. Положим $\varphi(t) = \frac{1}{M^{-1}(1/t)}$ и $\psi(t) = tM^{-1}(1/t)$. С точностью до 2 функция $\varphi(t)$ вогнута. Поэтому без ограничения общности можно считать что $\varphi(t)$ вогнута. Тогда $\Lambda(\varphi) \subset L_M \subset M(\psi)$. В [4] доказано, что 1) вложение $\Lambda(\varphi) \subset L_M$ DSS тогда и только тогда, когда M удовлетворяет Δ_2 -условию; 2) вложение $L_M \subset M(\psi)$ DSS тогда и только тогда, когда дополнительная к M функция удовлетворяет Δ_2 -условию. Поэтому оба вложения $\Lambda(\varphi) \subset L_M \subset M(\psi)$ DSS тогда и только тогда, когда пространство L_M рефлексивно.

Как отмечалось в § 1, для любого г. и. пространства E на $[0, 1]$ оба вложения $L_\infty \subset E \subset L_1$ DSS. Это свойство характеризует пространства L_∞ и L_1 . В [4] было доказано следующее утверждение. Пусть E_1, E_2 — г. и. пространства на $[0, 1]$ и $L_\infty \neq E_1 \subset E_2 \neq L_1$. Существует такое г. и. пространство E_3 на $[0, 1]$, что $E_1 \subset E_3 \subset E_2$ и оба эти вложения не DSS.

Применению интерполяционных конструкций для изучения строго сингулярных и дизъюнктно строго сингулярных операторов посвящены работы [2, 3] и другие.

Литература

1. Асташкин С. В. Дизъюнктная строгая сингулярность вложения симметричных пространств // Мат. заметки.—1999.—Т. 65.—С. 3–12.
2. Cobos F., Manzano A., Martinez A., Matos P. On interpolation of strictly singular operators, strictly co-singular operators and related operator ideals // Proc. Royal Soc. Edinburg Sec. A.—2000.—V. 130.—P. 971–989.
3. Garcia del Amo A., Hernandez F. L., Ruiz C. Disjointly strictly singular operators and interpolation // Proc. Royal Soc. Edinburg Sec. A.—1996.—V. 126.—P. 1011–1026.

4. Garcia del Amo A., Hernandez F. L., Sanchez V. M., Semenov E. M. Disjointly strictly singular inclusions between rearrangement invariant spaces // J. London Math. Soc.—2000.—V. 62.—P. 239–252.
5. Hernandez F. L., Rodriguez-Salinas B. On l^p -complemented copies in Orlicz spaces // Israel J. Math.—1989.—V. 68.—P. 27–55.
6. Hernandez F. L., Novikov S. Ya., Semenov E. M. Strictly Singular Embeddings Between Rearrangement Invariant Spaces // Positivity.—2003.—V. 7.—P. 119–124.
7. Hernander F. L., Sanchez V. M., Semenov E. M. Disjoint strict singularity of inclusions between rearrangement invariant spaces // Studia Math.—2001.—V. 144.—P. 209–226.
8. Kalton N. J. Orlicz sequences spaces without local convexity // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.—1977.—V. 81.—P. 253–277.
9. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1978.
10. Lindenstrauss J., Trafriri L. Classical Banach Spaces. I. Sequence Spaces.—Berlin: Springer, 1977.
11. Lindenstrauss J., Trafriri L. Classical Banach Spaces. II. Function Spaces.—Berlin: Springer, 1979.
12. Montgomery-Smith S., Semenov E. M. Embeddings of rearrangement invariant spaces that are not strictly singular // Positivity.—2000.—V. 4.—P. 397–402.
13. Novikov S. Ya. Boundary spaces for inclusion map between rearrangement invariant spaces // Collect. Math.—1993.—V. 44.—P. 211–215.
14. Новиков С. Я. Сингулярность оператора вложения для симметричных пространств на $[0, 1]$ // Мат. заметки.—1977.—Т. 62.—С. 549–563.
15. Рудин У. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1975.
16. Rodin V. A., Semyonov E. M. Rademacher series in symmetric spaces // Anal. Math.—1975.—V. 1.—P. 207–222.
17. Санчес В. М., Семенов Е. М., Эрнандес Ф. Л. Строго сингулярные вложения в $L_1 + L_\infty$ // Докл. АН России.—2005.—Т. 402, № 3.—С. 313–315.
18. Токарев Е. В. Подпространства симметричных функциональных пространств // Функци. анализ и его прил.—1979.—Т. 13.—С. 152–153.

Воронеж, Воронежский государственный университет
 E-mail: root@funk.vsu.ru

L -ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ СУПЕРПОЗИЦИИ НЕМЫЦКОГО

В. Г. Фетисов

Введение

В работе [1] впервые был поставлен вопрос об L -характеристиках операторов, действующих в банаховых функциональных пространствах Лебега $L^p(\Omega)$, и далее, в монографии [2] в том числе и для произвольного случая $p \geq 0$ были рассмотрены их основные свойства (экстраполяционности, действия суммы, произведения операторов и др.)

Идея распространения L -характеристик операторов на случай локально ограниченных пространств (ЛОП) измеримых по Лебегу функций, занимающих определенное место в теории линейных топологических пространств, к настоящему времени все еще не реализована; в этом направлении имеются лишь отдельные публикации.

В данной работе рассматривается строение L -характеристик нелинейных операторов суперпозиции Немыцкого в локально ограниченных лебеговых пространствах измеримых функций со смешанной F -квазинормой на модельных примерах обобщенных пространств Лебега — Рисса $L_{(\alpha)}(\Omega)$ и Орлича $L^{*\varphi}(\Omega)$, определяемых седловыми φ -функциями.

1. Вспомогательные сведения

Сначала кратко введем необходимый аппарат обозначений, определений и вспомогательных предложений, являющийся базовым для дальнейших построений.

1.1. Пусть $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1), (\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2), \dots, (\Omega_n, \Sigma_n, \mu_n)$ — пространства с неотрицательными σ -конечными, полными, неатомическими мерами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, (Ω, Σ, μ) — их прямое произведение.

Через $M(\Omega, \Sigma, \mu)$, или просто M , обозначим множество всех μ -измеримых почти всюду (п.в.) конечных на (Ω, Σ, μ) функций с

действительными или комплексными значениями и обычным отождествлением эквивалентных функций.

Если $\|\cdot\|$ — некоторая F -квазинорма на M , а $E(\Omega, \Sigma, \mu)$ — множество тех элементов $u \in M$, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\frac{u}{n}\| = 0$, то $E(\Omega, \Sigma, \mu)$ есть F -квазинормированное метризуемое риссовское пространство (являющееся локально ограниченным пространством).

Приведем ряд модельных примеров локально ограниченных пространств измеримых по Лебегу функций.

ПРИМЕР 1. Обобщенное пространство Лебега — Рисса $L_{(\alpha)}(\Omega)$, состоящее из тех μ -измеримых по Лебегу функций $u(s) = u(s_1, s_2, \dots, s_n)$, для которых конечна смешанная F -квазинорма

$$\|u; L_{(\alpha)}(\Omega)\| = \left(\int_{\Omega_n} \dots \left(\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |u(s_1, s_2, \dots, s_n)|^{\frac{1}{\alpha_1}} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times ds_1 \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} ds_2 \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}} \dots ds_n \right)^{\alpha_n} < +\infty. \quad (1)$$

ПРИМЕР 2. Обобщенное пространство Лебега — Рисса $L_{(\bar{\alpha})}(\Omega)$, состоящее из тех μ -измеримых по Лебегу функций

$$u(s) = u(s_1, s_2, \dots, s_n),$$

для которых конечна смешанная F -квазинорма

$$\|u; L_{(\bar{\alpha})}(\Omega)\| = \left(\int_{\Omega_1} \dots \left(\int_{\Omega_{n-1}} \left(\int_{\Omega_n} |u(s_1, s_2, \dots, s_n)|^{\frac{1}{\alpha_n}} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times ds_n \right)^{\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}} ds_{n-1} \right)^{\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}}} \dots ds_1 \right)^{\alpha_1} < +\infty. \quad (2)$$

Здесь $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $(\bar{\alpha}) = (\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1)$, $\alpha_i > 0$ при каждом $i = 1, \dots, n$. В общем случае $L_{(\alpha)}(\Omega) \neq L_{(\bar{\alpha})}(\Omega)$.

Определим теперь модулярные пространства Орлича.

Пусть $\varphi(u, v) \in \tilde{\Phi}$ — произвольная седловая вогнуто-выпуклая функция двух переменных (все дальнейшие рассуждения аналогичны и для выпукло-вогнутой седловой функции $\varphi(u, v) \in \tilde{\Phi}$).

Обозначим через $\Gamma_{\varphi}(u, v)$ интегральный модуляр вида:

$$\Gamma_{\varphi}(u, v) = \int_{\Omega} \varphi[u(s), v(s)] ds, \quad (\Omega \subset \mathbb{R}^n, \mu(\Omega) < \infty). \quad (3)$$

По заданной седловой вогнуто-выпуклой функции $\varphi(u, v) \in \tilde{\Phi}$ и множеству Ω определим классы:

$$L^{\varphi(u,v)}(\Omega) = \{(u, v) \in M : \Gamma_{\varphi}(u, v) < \infty\} \quad (4)$$

и

$$L^{*\varphi}(\Omega) = \bigcup_{\alpha, \beta > 0} \{(u, v) \in M : (\alpha u, \beta v) \in L^{\varphi(u,v)}(\Omega)\}, \quad (5)$$

где числа α и β , вообще говоря, зависят от выбора элементов $u(s)$ и $v(s)$ соответственно. Функциональный класс (4) есть выпуклое множество, а класс (5) есть пополненный по линейности класс (4).

В классе (5) можно ввести смешанную норму (F -квазинорму) с помощью формулы:

$$\|(u, v); L^{*\varphi}\| = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \Gamma_{\varphi} \left(\frac{u}{\varepsilon}, \frac{v}{\varepsilon} \right) \leq \varepsilon \right\}. \quad (6)$$

Обозначим через $L^{*\varphi}(\Omega)$ совокупность всех измеримых на Ω функций $u(s)$ и $v(s)$, принадлежащих классу (5), для которых конечна смешанная норма (F -квазинорма), определенная формулой (6). Тогда $L^{*\varphi}(\Omega)$ представляет собой модулярное F -квазинормированное пространство Орлича, порожденное вогнуто-выпуклой седловой функцией $\varphi(u, v) \in \tilde{\Phi}$, где F -квазинорма задана формулой (6).

Пусть $L(\Omega)$ — совокупность всех суммируемых на Ω функций $u(s), v(s) \in M(\Omega)$. Если, в частности, седловая функция $\varphi(u, v) \in \tilde{\Phi}$, является N -функцией по u (по v), то $L^{\varphi}(\Omega) \subset L(\Omega)$ вследствие условия $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u, \cdot)}{u} = \infty$. В общем же случае включение $L^{\varphi(u,v)}(\Omega) \subset L(\Omega)$ нарушается.

В частности, если $\varphi(u, v) \equiv M(x)$ есть некоторая N -функция, то получим банахово пространство Орлича $L_M^*(\Omega)$.

В частности, если $\varphi(u, v) = |u(s)|^{v(s)}$ (где $v(s) > 1$), некоторые структурные свойства соответствующего функционального класса изучались нами ранее для случая $\varphi(u, p) = |u(s)|^{p(s)}$ (где $0 < p(s) < 1$).

Можно показать, что если седловая функция $\varphi(u, v) \in \tilde{\Phi}$ подчиняется Δ_2 -условию, то $L^{\varphi(u,v)}(\Omega) = L^{*\varphi}(\Omega)$, а $E^{\varphi}(\Omega) = L^{*\varphi}(\Omega)$, где $E^{\varphi}(\Omega)$ — замыкание множества всех конечных элементов в метрике модулярного пространства Орлича $L^{*\varphi(u,v)}(\Omega)$.

1.2. Из нелинейных операторов, действующих в ЛОП, наибольшее применение при решении интегральных уравнений, различных краевых задач, проблем физики, механики, радиоэлектроники и других областей науки получили: оператор суперпозиции (детально изученный впервые В. В. Немыцким в начале 30-х годов прошлого века)

$$Hu(s) := f[s, u(s)] \quad (s \in \Omega, -\infty < u < +\infty), \quad (7)$$

и оператор Гаммерштейна:

$$\Gamma u(s) := \int_{\Omega} K(s, \tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau, \quad (8)$$

где сложная функция f (называемая характеристикой оператора) подчинялась так называемым условиям Каратеодори (см., например, [2]).

Операторы (7) и (8) рассматривались детально в работах В. В. Немыцкого, К. Каратеодори, М. М. Вайнберга, М. А. Красносельского, Л. А. Ладыженского, П. П. Забрейко, А. И. Поволоцкого, И. В. Шрагина и автора этих строк, в основном, при доказательстве теорем о разрешимости нелинейных операторных уравнений и систем уравнений. Вопрос же о строении L -характеристик вышеуказанных операторов, как отмечалось, изучен недостаточно.

2. Оператор суперпозиции в пространствах Лебега — Рисса

2.1. Классифицируем далее оператор суперпозиции Немыцкого вида (7) по поведению его характеристики $f(s, u)$. Обозначим через Y сепарабельное метрическое пространство.

Назовем функцию $f : \Omega \times E \rightarrow Y$ функцией Каратеодори, если она подчиняется условиям:

(K1) при любом $u \in E$ «образ» $f(\cdot, u)$ принадлежит множеству $M(Y)$ всех μ -измеримых функций, определенных на Ω и принимающих свои значения в пространстве Y ;

(K2) почти при всех значениях $s \in \Omega$ функция $f(s, \cdot)$ непрерывна на E .

Следуя [2], назовем функцию $f : \Omega \times E \rightarrow Y$ суперпозиционно измеримой, если для любой функции $u(s) \in M(E)$ суперпозиция $f[\cdot, u(\cdot)]$ принадлежит пространству $M(Y)$.

Наконец, функцию $f : \Omega \times B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (B — борелевское подмножество в $\mathbb{R}^n$) назовем нормальным интегрантом, если:

(H1) для почти всех значений $s \in \Omega$ функция $f(s, \cdot)$ полунепрерывна снизу на B ;

(H2) существует борелевская функция $\varphi : \Omega \times B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, такая что $\varphi(s, \cdot)$ совпадает с функцией $f(s, \cdot)$ почти всюду на Ω .

Лемма 1. *Справедливы утверждения:*

1) *Нормальный интегрант есть суперпозиционно измеримая функция;*

2) *Всякая каратеодориева функция есть нормальный интегрант.*

< Доказательство леммы 1 аналогично доказательству предложения 1.1 из [3, гл. 8, § 1.3]. >

2.2. В работе [2] было введено понятие L -характеристики оператора A , действующего в семействе лебеговых пространств $L_\alpha(\Omega)$ ($0 \leq \alpha < \infty$), как множество $L(A; \text{действ.})$ всех тех неотрицательных значений α, β , для которых оператор A действует из $L_\alpha(\Omega)$ в $L_\beta(\Omega)$. Очевидно, что (см. [2]), например, для линейного оператора A множество $L(A; \text{действ.})$ представляет собой множество всех таких точек I-го квадранта $\alpha, \beta \geq 0$, для которых $0 \leq \alpha \leq 1, \beta \geq \alpha \geq 0$, так как не существует нетривиальных линейных операторов, действующих из $L_\alpha(\Omega)$ в $L_\beta(\Omega)$ при условии, что $0 \leq \alpha \leq 1, \beta < \alpha$.

Можно видеть, что если оператор A действует из пространства $L_{(\alpha_0)}(\Omega)$ в пространство $L_{(\beta_0)}(\Omega)$, то он будет действовать из «более узкого» пространства $L_{(\alpha)} \subseteq L_{(\alpha_0)}$ в «более широкое» пространство $L_{(\beta)} \supseteq L_{(\beta_0)}$ (т. е. при условии, что $(\alpha) \leq (\alpha_0)$, а $(\beta) \leq (\beta_0)$). Достаточно использовать обобщенное неравенство Гёльдера.

В работе [4] была доказана

Теорема 1. *Оператор суперпозиции Немыцкого f действует из пространства $L_{(\alpha)}(\Omega)$ в пространство $L_{(\beta)}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда его характеристика $f(s, u)$ удовлетворяет условию:*

$$|f(s, u)| \leq a(s) + b \cdot |u|^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}, \quad (9)$$

где $a(s) \in L_{(\beta)}(\Omega)$ — неотрицательная функция, $b > 0$ — некоторая постоянная.

Аналогично [2], определим L -характеристику произвольного оператора A , действующего в обобщенных пространствах Лебега — Рисса, как множество $L(A; \text{действ.})$ всех тех точек $\{(\alpha), (\beta)\}$ (где мультииндексы $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$) гиперквадранта $(\alpha), (\beta) > 0$, для которых оператор A действует из $L_{(\alpha)}(\Omega)$ в $L_{(\beta)}(\Omega)$.

Для оператора суперпозиции Немыцкого f справедлива

Лемма 2. Пусть точка $\{(\alpha_0), (\beta_0)\}$ принадлежит L -характеристике $L(f; \text{непр.})$, тогда все точки гиперконуса $\{(\lambda\alpha_0), (\lambda\beta_0)\}$ (при всех $\lambda_i \geq 1$, $i = 1, \dots, n$) также принадлежат L -характеристике $L(f; \text{непр.})$.

◁ Справедливость леммы 2 вытекает из неравенства (9) теоремы 1 и из непрерывности вложения обобщенного пространства Лебега — Рисса $L_{(\beta)}(\Omega)$ в $L_{(\gamma)}(\Omega)$ при каждом $0 < \beta_i \leq \gamma_i$, $i = 1, \dots, n$, где постоянная вложения

$$C = \prod_{i=1}^n (\text{mes } \Omega_i)^{\gamma_i - \beta_i}, \quad \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n. \quad \triangleright$$

Будем говорить, что множество (D) , принадлежащее гиперквадранту $(\alpha), (\beta) > 0$, обладает свойством нуль-вогнутости, если оно вместе с каждой точкой $\{(\alpha_0), (\beta_0)\}$ содержит все точки гиперконуса $\{(\lambda\alpha_0), (\lambda\beta_0)\}$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \geq 1$, $i = 1, \dots, n$.

Из леммы 2 непосредственно вытекает

Теорема 2. L -характеристика $L(f; \text{непр.})$ обладает свойством нуль-вогнутости.

3. Оператор суперпозиции в модулярных пространствах Орлича

В этом параграфе рассматриваются функции $f(s, x)$, не удовлетворяющие условиям Каратеодори, а также нелинейный функциональный оператор суперпозиции

$$f[s, u(s), w(s)] = fx(s) = f[s, x(s)], \quad (u, w) \sim x, \quad (10)$$

в модулярных пространствах Орлича $L^{\varphi(u, w)}$.

Будем говорить, что функция $f(s, x)$ суперпозиционно измерима, если оператор суперпозиции (10) преобразует каждую измеримую функцию в измеримую, т. е. суперпозиция $f[s, x(s)]$ измерима для каждой измеримой функции $x(s) \in M(\Omega)$.

К суперпозиционно измеримым функциям относятся не только функции, подчиняющиеся условиям Каратеодори. Нетрудно видеть, например, что функция $f(s, x) = f_0(x)$ суперпозиционно измерима, если $f_0(x)$ измерима по Борелю.

Непосредственно из определения суперпозиционной измеримости вытекает, что функция $f(s, x)$ суперпозиционно измерима, если почти при всех $s \in \Omega$ и всех x она представима в виде:

$$f(s, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s, x), \quad (11)$$

где $f_n(s, x)$ — суперпозиционно измеримые функции.

Лемма 3. Оператор суперпозиции (10) действует из класса $L^{\varphi(u, w)}$ в класс $L^{\psi(u, w)}$ (где $\varphi(u, v) \in \tilde{\Phi}$ и $\psi(u, v) \in \tilde{\Phi}$ — некоторые седловые функции, $\varphi \nearrow$) в том и только в том случае, если

$$\psi[f(s, x)] \leq a(s) + b \cdot \varphi(x), \quad s \in \Omega, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

где $a(s) \in L(\Omega)$, $b \geq 0$.

◁ Пусть известно, что оператор суперпозиции (10) действует из модулярного класса Орлича $L^{\varphi(u, w)}$ в $L^{\psi(u, w)}$ (а, значит, из пространства $L^{*\varphi(u, w)}$ в $L^{*\psi(u, w)}$).

Обозначим через g вспомогательный оператор суперпозиции $gz(s) = \psi\{f[\varphi^{-1}(z(s))]\}$. Можно заметить, что оператор g действует из пространства $L(\Omega)$ суммируемых функций снова в $L(\Omega)$.

Получим, что

$$\psi\{f[s, \varphi^{-1}(|z|)]\} \leq a(s) + b \cdot |z|, \quad (13)$$

где $a(s) \in L(\Omega)$, $b \geq 0$. Полагая в (13) $z = \varphi(x)$, окончательно имеем (12), т. е. необходимость доказана. Достаточность условия (12) очевидна. ▷

Отметим, что утверждение, аналогичное лемме 3, было доказано нами ранее, но лишь для пространств Орлича, определяемых φ -функциями $\varphi(u)$. Пусть выполнено (12) и $\psi(u, w)$ — супераддитивная

седловая функция из $\tilde{\Phi}$. Тогда справедливо неравенство

$$|f(s, y)| \leq c(s) + b_1 \cdot \psi^{-1}[\varphi(y)], \quad (14)$$

где функция $c(s) = \psi^{-1}[|a(s)|]$ принадлежит классу $L^{\psi(u, w)}$, $b_1 \geq 0$.

Таким образом, условие (14) необходимо для того, чтобы оператор суперпозиции (10) действовал из модулярного пространства Орлича $L^{*\varphi(u, w)}$ в $L^{*\psi(u, w)}$. Если же $\psi(u, w) \in \tilde{\Phi}$ — функция, подчиняющаяся Δ_2 -условию при всех u (аналогично при всех w), то условие (14) одновременно является и достаточным, так как в этом случае из неравенства (14) вытекает неравенство (12).

Как известно, носителем функции $x(s)$ называется множество тех значений аргумента s , при которых $x(s) \neq 0$. При изучении оператора суперпозиции (10) в некоторых случаях используется его «частичная аддитивность», которая выражается в том, что для функций $x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)$ с непересекающимися носителями справедливо равенство

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = fx_1 + fx_2 + \dots + fx_n - (n-1)f\Theta, \quad (15)$$

где $\Theta = \Theta(s)$ — функция, тождественно равная нулю.

Лемма 4. Пусть выполняется (14) и $\psi \in \tilde{\Phi}$ — супераддитивная седловая функция, подчиняющаяся Δ_2 -условию при всех $u(w)$.

Тогда для каждого абсолютно ограниченного множества W из $L^{*\varphi(u, w)}$ «образ» $fW \in L^{*\psi(u, w)}$ есть также абсолютно ограниченное множество.

◁ Из условия леммы следует, что оператор суперпозиции (10) действует из модулярного пространства Орлича $L^{*\varphi(u, w)}$ в $L^{*\psi(u, w)}$. Требуется доказать, что для каждого множества W функция из модулярного пространства Орлича $L_0^{*\varphi(u, w)}$ с равностепенно абсолютно непрерывными квазинормами (B -нормами) и для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что из неравенства $\mu D < \delta$ вытекает неравенство $\|P_D f[s, x(s)]; \psi\| < \varepsilon$, где $x(s) \in W$.

Предположим, что квазинормы (B -нормы) функций из fW не обладают свойством равностепенной абсолютной непрерывности. Это значит, что найдутся последовательность функций $y_k(s) \in W$ и последовательность множеств $F_k \subset \Omega$ такие, что $\mu F_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и $\|P_{F_k} f[s, y_k(s)]; \psi\| > a$ ($k = 1, 2, \dots$).

При этом можно без ограничения общности считать, что $\sum_{k=1}^{\infty} \mu F_k < \infty$. Введем обозначение $D_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} F_i$ ($k = 1, 2, \dots$). Так как $\mu D_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то существует такая целочисленная функция $\eta(k)$ ($k = 1, 2, \dots$), что $\eta(k) > k$ и выполняется

$$\|P_{D_k} f_{D_{\eta(k)}}[s, y_k(s)]; \psi\| > a \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Положим

$$k_1 = 1, \quad k_2 = \eta(k_1), \dots, \quad k_n = \eta(k_{n-1}), \dots$$

Меры множеств

$$S_n = D_{k_n} \setminus D_{k_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Эти множества очевидным образом не пересекаются друг с другом. Можно заметить, что функции $x_n(s) = y_{k_n}(s)$ ($n = 1, 2, \dots$) подчиняются неравенствам $\|P_{S_n} f[s, x_n(s)]; \psi\| > a$ ($n = 1, 2, \dots$). Функции $x_n(s)$ имеют равномерно абсолютно непрерывные квазинормы (B -нормы), поэтому без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|P_{S_n} x_n; \varphi\| < \infty.$$

Определим далее функцию $\tilde{u}(s) \in L^{*\varphi(u,w)}$ равенством: $\tilde{u}(s) = x_n(s)$, если $s \notin S_n$; $\tilde{u}(s) = 0$, если $s \in \bigcup_n S_n$.

Из свойства частичной аддитивности оператора суперпозиции (15) вытекает, что

$$f\tilde{u}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{S_n} f x_n(s) + P_{S_0} f \Theta(s),$$

где $S_0 = \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

Учитывая последнее равенство, окончательно получим, что

$$\|f[s, \tilde{u}(s)]; \psi\| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \|P_{S_n} f[s, x_n(s)]; \psi\| > \sum_{n=1}^{\infty} a = \infty.$$

Таким образом, построена функция $\tilde{u}(s) \in L^{*\varphi(u,w)}$, для которой $f\tilde{u}(s)$ не принадлежит модулярному пространству $L^{*\psi(u,w)}$. Это противоречит условию леммы 4. $\triangleright$

Как известно, если функция $f(s, x)$ суперпозиционно измерима, а функция $x_0(s)$ измерима, то оператор (10) непрерывен по мере в точке $x_0(s)$ в том и только в том случае, если при произвольном $h > 0$ выполняется

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \mu \left\{ s \in \Omega : |f[s, x_0(s) + \tilde{u}] - f[s, x_0(s)]| \geq h \right\} = 0. \quad (16)$$

Из леммы 4 и последнего утверждения вытекает

Теорема 3. Пусть выполняется (14), где $L^{*\psi(u,w)} = L_0^{*\psi(u,w)}$.

Тогда оператор суперпозиции (10) непрерывен в точке $x_0(s)$ из $L^{*\varphi(u,w)} = L_0^{*\varphi(u,w)}$ в том и только том случае, если имеет место условие (16).

Литература

1. Забрейко П. П., Красносельский М. А. Об L -характеристиках операторов // Успехи мат. наук.—1964.—Т. 19, вып. 1.—С. 187–189.
2. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.—М.: Наука, 1966.—500 с.
3. Экланд И., Тетам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы.—М.: Мир, 1980.—412 с.
4. Фетисов В. Г. Операторы и уравнения в F -квазинормированных пространствах: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—Новосибирск: ИМ СО РАН, 1996.—250 с.

Шахты, Южно-Российский госуниверситет экономики и сервиса;
Лаборатория математических исследований ИПМИ и ЮРГУЭС
E-mail: fetisov_vg@sssu.ru

СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ
КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

В. И. Филиппенко

Пусть $\mathbf{F} = (f_{ij})$ — $(n \times n)$ -матрица, составленная из комплекснозначных функций, определенных на интервале (a, b) и удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $f_{ij} = 0$ в интервале I для индексов, удовлетворяющих неравенствам $2 \leq i + 1 < j \leq n$;
- 2) f_{ij} — локально суммируемы, т. е. $f_{ij} \in L_{\text{loc}}(I)$ для $1 \leq i, j \leq n$;
- 3) $f_{i, i+1} \neq 0$ в I для $1 \leq i \leq n - 1$.

Определим квазипроизводные $y^{[k]}$ следующим образом:

$$y^{[0]} = y, \quad y^{[i]} = f_{i, i+1}^{-1} \left[(y^{[i-1]})' - \sum_{j=1}^i f_{ij} y^{[j-1]} \right], \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Пусть $AC(I)$ — множество функций абсолютно непрерывных на любом компактном подынтервале промежутка I . В дальнейшем предполагаем, что функции y и их квазипроизводные до $(n-1)$ -го порядка включительно принадлежат множеству $AC(I)$.

Квазидифференциальное выражение γ определим формулой

$$\gamma[y] = (y^{[n-1]})' - \sum_{i=1}^n f_{ni} y^{[i-1]}$$

для y таких, что $y^{[i-1]} \in AC(I)$, $i = 1, \dots, n-1$.

Естественно считать, что скалярное квазидифференциальное выражение γ порождается матрицей $\mathbf{F}$, поэтому уместно обозначение $\gamma = \gamma_{\mathbf{F}}(y)$. Поскольку в дальнейшем будем рассматривать только симметрические квазидифференциальные выражения, то предположим, что матрица $\mathbf{F}$, кроме требований 1)–3), удовлетворяет также условию симметричности

$$\mathbf{F} = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}^* \mathbf{J},$$

где $\mathbf{F}^*$ — матрица, сопряженная матрице $\mathbf{F}$, т. е. $\mathbf{F}^* = (\overline{f_{ji}})$ и $\mathbf{J}$ — числовая $(n \times n)$ -матрица

$$\mathbf{J} = ((-1)^i \delta_{i, n+1-j}), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

где $\delta_{i, n+1-j}$ — символ Кронекера. В этой заметке рассматриваются спектральные функции и спектральные разложения по обобщенным собственным функциям некоторых операторов, порожденных квазидифференциальной операцией $\gamma[y]$, и близких к ним по своим спектральным свойствам.

1. Положим $l = \gamma$, если n четно, и $l = \pm i\gamma$, если n нечетно. Пусть L, L_0 — соответственно максимальный и минимальный квазидифференциальные операторы, действующие в пространстве $\mathcal{L}^2(a, b)$ и порожденные квазидифференциальным выражением $l[y]$. В работе [1] доказано, что задача Коши для уравнения $l[y] - \lambda y = f$ в случае произвольного $f \in \mathcal{L}^2(a, b)$ и произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел) имеет единственное решение; операторы L и L_0 — взаимно сопряженные; следовательно, L_0 — симметрический оператор. Кроме того, предположим дополнительно, что оператор L_0 имеет равные дефектные числа $(m; m)$; следовательно, существуют самосопряженные расширения этого оператора.

Пусть $y, z \in D(L)$ ($D(L)$ — область определения оператора L). Положим

$$\{y, z\} := (Ly; z) - (y, Lz)$$

и рассмотрим в пространстве $\mathcal{L}^2(a, b)$ самосопряженный оператор T , определяемый соотношениями

$$D(T) = \left\{ y \in D(L) : \{y, w_j\} = (y, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, r; \right. \\ \left. \{y, w_j\} = 0, \quad j = r+1, \dots, m \right\},$$

$$Ty = t[y] \equiv l[y] + \sum_{j=1}^p \{y, w_{m+j}\} \varphi_j + \sum_{q=1}^p (y, \chi_q) \psi_q, \quad y \in D(T),$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi_1, \dots, \psi_p, \chi_1, \dots, \chi_p \in \mathcal{L}^2(a, b)$, причем $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ — линейно независимы, а ядро $K(x, \xi) = \sum_{q=1}^p \psi_q(x) \overline{\chi_q(\xi)}$ симметрическое, т. е. $K(x, \xi) = \overline{K(\xi, x)}$, элементы $w_1, \dots, w_{m+r} \in D(L)$ и линейно

независимы по модулю $D(L_0)$, а $(\cdot, \cdot)$ — знак скалярного произведения в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2(a, b)$.

Представляет интерес изучение разложения по (обобщенным) собственным функциям оператора T . Для этого целесообразно применить методику, развитую в работах М. А. Наймарка [2], Н. Данфорда и Дж. Шварца [3], Ю. М. Березанского [4]. В некоторых случаях обобщенные собственные функции оператора T являются решениями уравнения $t[y] = \lambda y$.

Теорема 1. При любом не вещественном λ резольвента $(T - \lambda E)^{-1}$ оператора T является интегральным оператором с ядром Карлемана.

◁ Действительно, пусть L_u — произвольное самосопряженное расширение оператора L_0 . Хорошо известно [2, 3], что при рассматриваемых λ оператор $(L_u - \lambda E)^{-1}$ — интегральный с ядром Карлемана. Теорема следует непосредственно из того факта, что $(T - \lambda E)^{-1} - (L_u - \lambda E)^{-1}$ — конечномерный оператор. ▷

Теорема 1 и результаты Ю. М. Березанского [4] позволяют утверждать, что существуют спектральное ядро $\Omega(x, t, \lambda)$ и неотрицательная мера $\rho(\lambda)$ такие, что

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} (P(\lambda)f, g) d\rho(\lambda), \quad f, g \in H_+,$$

$$(Tf, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda (P(\lambda)f, g) d\rho(\lambda), \quad f \in H_+, g \in H_+ \cap D(T),$$

где H_+ — некоторое плотное в $\mathcal{L}^2(a, b)$ линейное многообразие,

$$(P(\lambda)f, g) := \int_a^b \int_a^b \Omega(x, t, \lambda) f(t) \overline{g(x)} dx dt,$$

причем имеет место разложение спектрального ядра по обобщенным собственным функциям оператора T :

$$\Omega(x, t, \lambda) = \sum_{k=1}^{N_\lambda} \omega_k(x, \lambda) \overline{\omega_k(t, \lambda)}, \quad x, t \in (a, b).$$

2. Пусть квазидифференциальная операция $l[y]$ не является ни регулярной, ни квазирегулярной на промежутке (a, b) . Замкнутый

симметрический оператор L_0 с минимальной областью определения, порожденный в $\mathcal{L}^2(a, b)$ операцией $l[y]$ допускает спектральное разложение, содержащее спектральную матрицу-функцию распределения Υ размерности $n \times n$. A — самосопряженное расширение оператора L_0 . В некоторых случаях ранг матрицы Υ оказывается меньше, чем n . Это позволяет исследовать кратность спектра оператора A на отрезке $[\alpha, \beta]$ λ -оси. Каждой функции $y(x)$, для которой $l[y]$ имеет смысл, поставим в соответствие вектор-функцию $\tilde{y}(x) = (y^{[0]}(x), y^{[1]}(x), \dots, y^{[n-1]}(x))$, которую будем рассматривать как матрицу-столбец.

Теорема 2. Пусть при любом вещественном $\lambda \in [\alpha, \beta]$ уравнение $l[y] = \lambda y$ имеет $m = m' + m''$ линейно независимых решений $v_1(x; \lambda), v_2(x; \lambda), \dots, v_m(x; \lambda)$ таких, что:

- 1) для каждого из m' первых решений:
 - а) $v_k(x; \lambda) \in \mathcal{L}^2(a, c)$, $k = 1, 2, \dots, m'$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow a} f^*(x) \mathbf{J} \tilde{v}_k(x, \lambda) = 0$, какова бы ни была вектор-функция $f(x) \in D(A)$;

2) в точке b промежутка (a, b) выполняются аналогичные условия для m'' последних решений;

3) каждая функция $v_k(x; \lambda)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) при фиксированном $x \in (a, b)$ удовлетворяют условию Липшица по λ на сегменте $[\alpha, \beta]$.

Тогда ранг матрицы Υ на сегменте $[\alpha, \beta]$ не превосходит $n - m$.

Следствие. Если условия теоремы 2 выполняются, то кратность спектра оператора A на промежутке $[\alpha, \beta]$ не превосходит $n - m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогичные утверждения имеют место для случая формально самосопряженной квазидифференциальной операции, заданной в пространстве вектор-функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Методика Э. Коддингтона [5], позволяет построить спектральную матрицу-функцию распределения Υ неплотно заданного симметрического оператора, порожденного квазидифференциальной операцией $l[y]$ и некоторым набором интегральных условий вида $(y(x), \nu_i(x)) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, где $\nu_1(x), \nu_2(x), \dots, \nu_k(x)$ — линейно независимые элементы гильбертова пространства $\mathcal{L}^2(a, b)$.

Литература

1. Филиппенко В. И. Резольвенты линейного оператора, порожденного обобщенным квазидифференциальным выражением // В сб.: Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2004.—С. 304–322.
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы.—М.: Наука, 1969.—528 с.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.—М.: Мир, 1966.—1063 с.
4. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.—Киев: Наукова думка, 1965.—800 с.
5. Coddington E. A. Self-adjoint subspace extensions of nondensely symmetric operators // Advances in Math.—1974.—Т. 14.—С. 309–332.

Шахты, Южно-Российский госуниверситет экономики и сервиса;
Лаборатория математических исследований ИПМИ и ЮРГУЭС
E-mail: vifilippenko@yandex.ru

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ π -СВЕРТКИ

А. Б. Шипкин

Предположим, что $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ — выпуклая область, H — пространство функций голоморфных в Ω с топологией компактной сходимости; H^* — сильное сопряженное пространство к H . Любой функционал $S \in H^*$ порождает оператор свертки на H :

$$(S * f)(h) := \langle S, f(z + h) \rangle = \int_{\Omega} f(z + h) d\mu,$$

где μ — некоторая σ -аддитивная комплекснозначная мера с компактным в Ω носителем, определяющая функционал S . Рассмотрим однородное уравнение свертки

$$S * f = 0, \quad f \in H.$$

Множество решений этого уравнения может быть описано так

$$\{f \in H : \langle S, D_i^q f \rangle = 0, i = 1, \dots, n, q = 0, 1, \dots\},$$

где $D_1, \dots, D_n$ — операторы частного дифференцирования, действующие в H .

Экспоненциальные полиномы вида

$$p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle,$$

где $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяющие этому уравнению принято называть его элементарными решениями. Возникает вопрос: каждое ли решение уравнения свертки можно аппроксимировать в топологии H линейными комбинациями элементарных решений? Утвердительный ответ на этот вопрос в случае $n = 1$ получен И. Ф. Красичковым-Терновским в 1972 г. (случай $\Omega = \mathbb{C}$ принадлежит Л. Шварцу, 1947 г.), а в случае $n > 1$ Р. С. Юлмухаметовым, 1991 г. (случаи больших и трубчатых областей принадлежат В. В. Напалкову).

Пусть π — отображение из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$, осуществляемое фиксированным n -многочленом

$$(\pi_1(z_1), \dots, \pi_n(z_n));$$

$\pi(D) = \{\pi_1(D_1), \dots, \pi_n(D_n)\}$ — соответствующая система дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Для любого функционала $S \in H^*$ и для всех h из некоторой окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$ имеет смысл действие функционала S на сдвиг $f(z+h)$ функции f на шаг h . Это справедливо и по отношению к так называемому π -сдвигу $f(z, h)$ функции f на шаг h , исследованному ранее в работах И. Ф. Красичкова-Терновского в случае одной переменной. Подействуем функционалом S на π -сдвиг $f(z, h)$

$$(S \otimes f)(h) := \langle S, f(z, h) \rangle.$$

Выражение $S \otimes f$ представляет собой функцию h , голоморфную в некоторой окрестности начала координат, и называется π -сверткой функционала S и функции f . Рассмотрим однородное уравнение π -свертки

$$S \otimes f = 0, \quad f \in H.$$

Множество решений этого уравнения может быть описано так

$$\{f \in H : \langle S, \pi_i^q(D_i)f \rangle = 0, i = 1, \dots, n, q = 0, 1, \dots\}.$$

Элементарные решения являются линейными комбинациями экспоненциальных одночленов вида

$$z^\alpha \exp\langle \omega, z \rangle, \quad \omega \in \pi^{-1}(\pi(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}^n, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n.$$

Основной результат: каждое решение уравнения π -свертки можно аппроксимировать в топологии H линейными комбинациями элементарных решений этого уравнения.

Доказательство теоремы опирается на теорему двойственности, доказанную автором ранее (1998 г.). С помощью этой теоремы доказываемое утверждение сводится к двойственному утверждению, которое формулируется в виде специального аналитического факта. Доказательство последнего опирается на аппроксимационную теорему из статьи В. В. Напалкова и А. С. Кривошеева (1992 г.).

В рассуждениях Р. С. Юлмухаметова существенную роль играет следующий факт: для любого $\varepsilon > 0$ и любых целых функций f и F , удовлетворяющих условиям

$$c(z) := \frac{F(z)}{f(z)} \text{ — целая функция,}$$

$$\ln |f(z)|, \ln |F(z)| \leq H_K(z) + \varepsilon|z| + \text{const}, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где $H_K(z)$ — опорная функция некоторого компакта $K \Subset \Omega$, найдется неотрицательная плюрисубгармоническая функция ψ , удовлетворяющая условиям

$$|c(z)| \exp \varepsilon|z| \leq \exp \psi(z), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (1)$$

$$\psi(z) + \ln |f(z)| \leq H_K(z) + \text{const}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (2)$$

$$|\psi(z) - \psi(z')| \leq \text{const} |z - z'|, \quad z, z' \in \mathbb{C}^n. \quad (3)$$

Опираясь на этот факт и теорему Н. Сибони (1976 г.) Р. С. Юлмухаметов строит последовательность целых функций вида $f_n := p_n f$, где p_n — многочлены, сходящуюся равномерно на компактах к функции F и удовлетворяющую оценкам

$$\ln |f_n(z)| \leq H_K(z) + \varepsilon|z| + \text{const}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

В общем случае целая функция c предполагается π -симметричной $c = C \circ \pi$, где C — целая функция; π -симметричными должны быть и многочлены $p_n = P_n \circ \pi$, где P_n — многочлены. Переход к общему случаю требует наложения на плюрисубгармоническую функцию ψ дополнительного условия

$$|\psi(\omega) - \psi(\omega')| \leq \varepsilon|z| + \text{const}, \quad \omega, \omega' \in \pi^{-1}(\pi(z)). \quad (4)$$

Воспользоваться рассуждениями Р. С. Юлмухаметова не удастся, так как они не являются конструктивными. Им лишь доказано существование плюрисубгармонической функции, удовлетворяющей условиям (1)–(3), но не показано как ее построить.

Достижением автора является конструктивное построение указанной функции, позволившее ему показать, что: по выбранному

$\varepsilon > 0$ можно подобрать $\mu > 0$ так, что всем условиям (1)–(4) удовлетворяет функция

$$\psi(z) = \max\{\psi_1(z), \dots, \psi_n(z)\},$$

где

$$\psi_i(z) = \int_{|\zeta| \leq 1} \ln^+ |c(z + \mu z_i \zeta)| \alpha(\zeta) dw_\zeta,$$

$$\alpha(r) = \begin{cases} M \exp \left\{ -\frac{1}{1-r^2} \right\}, & |r| < 1, \\ 0, & |r| \geq 1, \end{cases}$$

M — нормировочная постоянная, обеспечивающая выполнимость равенства $\int_n \alpha(|\zeta|) dw_\zeta = 1$.

Литература

1. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Мат. сборник.—1972.—Т. 88 (130), № 1.—С. 3–30.
2. Schwartz L. Theorie generale des fonctions moyenne-periodique // Ann. Math.—1947.—V. 48, № 4.—Р. 857–929.
3. Юлмухаметов Р. С. Однородные уравнения свертки // Докл. РАН.—1991.—Т. 316, № 2.—С. 312–315.
4. Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах.—М.: Наука,—1982.—240 с.
5. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. IV. Синтез // Мат. сборник.—1992.—Т. 183, № 8.—С. 23–46.
6. Кривошеев А. С., Напалков В. В. Комплексный анализ и операторы свертки // Успехи мат. наук.—1992.—Т. 47, вып. 6 (288).—С. 3–58.
7. Sibony N. Approximation polinomiale ponderee dans un domalne d'holomorphie de C^n // Ann. Inst. Fourier. Grenoble.—1976.—V. 26, № 2.—Р. 77–99.

Славянск-на-Кубани, Славянский-на-Кубани
государственный педагогический институт
E-mail: Shishkin-home@mail.ru

Часть III

Математическое моделирование

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА В ПАРАХ ПРОСТРАНСТВ НА ПОВЕРХНОСТЯХ С КРАЕМ

В. И. Астахов, Я. А. Науменко

Исследуются скалярные и векторные уравнения первого рода теории потенциала на кусочно-гладких липшицевых поверхностях с краем. Вариационным методом обосновываются корректность и эффективный метод их решения в естественных для задач электротехники и электроэнергетики парах функциональных пространств, а также находятся неравенства и оценки, имеющие прикладное значение. Результаты иллюстрируются примерами расчетов.

Рассматриваются уравнения (в классическом представлении) вида:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\sigma(Q)}{r_{QM}} dS_Q = f_\sigma(M), \quad M \in S'; \quad (1)$$

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \iint_S \tau(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{1}{r_{QM}} dS_Q = f_\tau(M), \quad M \rightarrow S'; \quad (2)$$

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\vec{\delta}(Q)}{r_{QM}} dS_Q = \vec{f}_\delta(M), \quad M \in S', \quad (3)$$

где S' — объединение конечного числа p замкнутых и разомкнутых односвязных и многосвязных двусторонних кусочно-гладких липшицевых поверхностей $\{S'_k\}_{k=1}^p$; S — объединение замкнутых поверхностей $\{S_k\}_{k=1}^p$, содержащее S' , т. е. $S = S' \cup S'' \cup l$, причем S'' — дополнение S' до $S \setminus l$, l — смежная граница (край) для S' и S'' ; r_{QM} — расстояние между точками Q и M ; σ , τ и $\vec{\delta}$ — скалярные и векторная плотности поверхностных потенциалов, являющиеся искомыми функциями; f_σ , f_τ и $\vec{f}_\delta$ — свободные члены, имеющие в зависимости от постановки задачи разные представления, требующие привлечения дополнительных условий.

К (1)–(3) приводят, например, задачи расчета электрического поля в присутствии проводящих тел или оболочек, магнитного поля в присутствии идеальных магнетиков или идеальных проводников,

а также поля токов, обтекающих диэлектрические включения, или идеальной жидкости, в потоке которой присутствуют гладкие непроницаемые поверхности. Традиционно эти уравнения относят к некорректным и разными способами подвергают регуляризации. В частности, к (1) применяют стабилизирующие алгоритмы или дифференцированием вдоль S' превращают (1) в сингулярное уравнение, наконец, преобразуют его в эквивалентное уравнение второго рода. В то же время, известно много примеров решения (1) без регуляризации, когда ожидаемая неустойчивость не наблюдалась. Данные факты принято объяснять проявлением, так называемой, саморегуляризации. Содержательной же теории, в рамках которой уравнение (1) представлялось бы корректным, а применяемые численные методы — обоснованными, насколько известно авторам, в настоящее время нет. А так как исключительная простота и универсальность уравнения (1) привлекают к нему все больше пользователей, актуальность упомянутой теории возрастает.

Применительно к уравнениям (2) и (3), напротив, внимание в научной литературе видится недостаточным. Вероятно, их практическое использование ограничивает то обстоятельство, что оператор в (2) — суперсингулярный, а искомая функция в (3) — векторная.

В данной работе для уравнений (1)–(3), нагруженных традиционными используемыми дополнительными условиями, вариационным методом устанавливается корректность в естественных для задач электромагнитного поля парах функциональных пространств, обосновывается эффективный метод преобразования (1)–(3) к СЛАУ, а также находятся неравенства и оценки, имеющие прикладное значение.

Предполагается, что S делит трехмерное физическое пространство Ω на две части Ω^+ и Ω^- (знаки соотнесены направлению внешней нормали $\vec{n}$ к S) и уместается в шаре Ω_R конечного радиуса R с границей S_R , а также используются:

$H(\Omega)$ — гильбертово пространство всех комплексно-значных функций, определенных в Ω , суммируемых с квадратом в Ω_R , гармонических вне Ω_R , имеющих конечный интеграл Дирихле по Ω , нулевые средние значения на S_R и исчезающих в бесконечно-удаленной точке;

$H_\sigma^0(\Omega)$ — подпространство в $H(\Omega)$, состоящее из элементов $\{\varphi_\sigma^0\}$,

гармонических вне S и подчиняющихся условию $\oint_{\Sigma} \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} dS = 0$ на любой замкнутой поверхности Σ , отстоящей от S на положительное расстояние;

$H_{\varphi}^0(\Omega)$ — гильбертово пространство гармонических вне S функций, обладающих свойством продолжимости из Ω^+ , Ω^- в Ω элементами $H_{\sigma}^0(\Omega)$;

$H_{\tau}^0(\Omega)$ — подпространство в $H_{\varphi}^0(\Omega)$, определенное как ортогональное дополнение $H_{\sigma}^0(\Omega)$, т. е. $H_{\varphi}^0(\Omega) = H_{\sigma}^0(\Omega) \oplus H_{\tau}^0(\Omega)$. Скалярные произведения и нормы в $H(\Omega)$, $H_{\varphi}^0(\Omega)$ имеют вид:

$$(\xi, \psi)_H = \iiint_{\Omega} \operatorname{grad} \xi \operatorname{grad} \check{\psi} d\Omega + \iint_{S_R} \xi dS \iint_{S_R} \check{\psi} dS, \quad \|\xi\|_H = (\xi, \xi)_H^{\frac{1}{2}};$$

$$(\xi, \psi)_{H_{\varphi}^0} = \iiint_{\Omega \setminus S} \operatorname{grad} \xi \operatorname{grad} \check{\psi} d\Omega + \iint_{S_R} \xi dS \iint_{S_R} \check{\psi} dS, \quad \|\xi\|_{H_{\varphi}^0} = (\xi, \xi)_{H_{\varphi}^0}^{\frac{1}{2}},$$

причем производные обобщаются в смысле Соболева, интегралы — в смысле Лебега, « $\check{}$ » — знак комплексного сопряжения, а интегралы по S_R равны нулю, поэтому их можно опустить.

В $H_{\varphi}^0(\Omega)$ рассматриваются операторы K_{σ} , K_{τ} , определенные равенствами

$$K_{\sigma} = P_{\sigma} R, \quad K_{\tau} = P_{\tau} R,$$

где $R\xi = \pm \xi$ в $\Omega^{\pm}$, а P_{σ} и P_{τ} — ортопроекторы, осуществляющие проектирование $H_{\varphi}^0(\Omega)$, соответственно, в $H_{\sigma}^0(\Omega)$ и $H_{\tau}^0(\Omega)$. Операторы K_{σ} , K_{τ} и пространства $H_{\sigma}^0(\Omega)$, $H_{\tau}^0(\Omega)$ подробно изучены в [1], где для элементов последних $\{\varphi_{\sigma}^0\}$, $\{\varphi_{\tau}^0\}$ с помощью функционалов на основе первого тождества Грина введены понятия плотностей $\{\sigma^0\}$, $\{\tau^0\}$, а с помощью некоторых предельных соотношений установлено, что $\varphi_{\sigma}^0 \in H_{\sigma}^0(\Omega)$ и $\varphi_{\tau}^0 \in H_{\tau}^0(\Omega)$ являются пределами последовательностей потенциалов, соответственно, простого и двойного слоев с гладкими носителями плотностей, а σ^0 и τ^0 — пределами последовательностей, соответственно, кусочно-непрерывных и непрерывных и кусочно-непрерывно дифференцируемых на S функций (разрывы — на ребрах поверхностей). В свою очередь, операторы K_{σ} , K_{τ} — суть пределы последовательностей аналогичных операторов, определенных на потенциалах с гладкими носителями плотностей, причем их

сужения K_σ в $H_\sigma^0(\Omega) \rightarrow H_\sigma^0(\Omega)$ и K_τ в $H_\tau^0(\Omega) \rightarrow H_\tau^0(\Omega)$ являются сжимающими, самосопряженными и вполне непрерывными операторами.

Далее вводятся пространства $H_\sigma^0(S)$, $H_\tau^0(S)$ плотностей, в которых значения скалярных произведений и норм совпадают с аналогичными значениями для соответствующих потенциалов в $H_\varphi^0(\Omega)$, а также операторы $K_{\sigma\tau}$, $K_{\sigma\sigma}$, $K_{\tau\sigma}$, $K_{\tau\tau}$, соответствующие различным сужениям операторов K_σ , K_τ и обладающие свойствами последних. А именно,

$$K_{\sigma\tau}\sigma(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\sigma(Q)}{r_{QM}} dS_Q,$$

$$K_{\sigma\sigma}\sigma(M) = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \sigma(Q) \frac{\partial}{\partial n_M} \frac{1}{r_{QM}} dS_Q, \quad M \in S;$$

$$K_{\tau\sigma}\tau(M) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \iint_S \tau(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{1}{r_{QM}} dS_Q, \quad M \rightarrow S,$$

$$K_{\tau\tau}\sigma(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \tau(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{1}{r_{QM}} dS_Q, \quad M \in S,$$

где $K_{\sigma\sigma}$ и $K_{\tau\tau}$ — сжимающие, самосопряженные и вполне непрерывные операторы соответственно в $H_\sigma^0(S)$ и $H_\tau^0(S)$, а $K_{\sigma\tau}$ и $K_{\tau\sigma}$ в парах пространств соответственно $H_\sigma^0(S) \rightarrow H_\tau^0(S)$ и $H_\tau^0(S) \rightarrow H_\sigma^0(S)$ являются ограниченными (норма не превышает единицы) и положительно определенными операторами. Причем очевидное свойство $R^2\xi = \xi$ в терминах указанных операторов выражается тождествами

$$\sigma = K_{\sigma\sigma}^2\sigma + K_{\tau\sigma}K_{\sigma\tau}\sigma, \quad \tau = K_{\tau\tau}^2\tau + K_{\sigma\tau}K_{\tau\sigma}\tau,$$

$$K_{\tau\tau}K_{\sigma\tau}\sigma = -K_{\sigma\tau}K_{\sigma\sigma}\sigma, \quad K_{\sigma\sigma}K_{\tau\sigma}\tau = -K_{\tau\sigma}K_{\tau\tau}\tau$$

при любых $\sigma \in H_\sigma^0(S)$ и $\tau \in H_\tau^0(S)$, которые, вообще говоря, сохраняют силу и в расширенных пространствах $H_\tau(S)$ и $H_\sigma(S)$, получаемых в [1] добавлением к $H_\tau^0(S)$ и $H_\sigma^0(S)$ конечномерных базисов, состоящих соответственно из констант и решений задачи Робена на $\{S_k\}$.

Существенно, что $H_\sigma(S) \supset L_2(S)$, $H_\tau(S) \supset W_2^1(S)$ и указанные вложения компактны. А поскольку $H_\sigma(S)$ и $L_2(S)$, $H_\tau(S)$ и $W_2^1(S)$ содержат в себе одинаковые плотные множества, то $H_\sigma(S)$ и $H_\tau(S)$

могут также рассматриваться как замыкания $L_2(S)$ и $W_2^1(S)$ по соответствующим нормам (см. [1]).

При рассмотрении уравнений (1)–(3) на поверхностях с краем, плотности σ и $\bar{\delta}$ продолжаются на S путем доопределения нулем на S'' , а для свободных членов лишь допускается возможность подходящего продолжения в рамках традиционно используемых дополнительных условий. Указанное допущение, фактически, означает, что первичное поле или ему эквивалентное (в смысле значений на S') обладает конечной энергией. Распирение же уравнений на S позволяет при исследовании (1)–(3) и их решении опираться на результаты [1].

Например, для уравнения (1) в постановке, при которой

$$f_\sigma = -\varphi^0 + C_k \quad \text{на } S'_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (4)$$

φ^0 задан, а значения констант $\{C_k\}_{k=1}^p$ калибруются условием

$$\iint_{S'_k} \sigma dS = q_k \quad (q_k \text{ — задано при всех } k \in \{1, 2, \dots, p\}), \quad (5)$$

сначала применяется редукция

$$\sigma = \sigma^0 + \frac{q_k}{\text{mes}(S'_k)} \quad \text{на } S'_k \quad (6)$$

и продолжение σ^0 на S путем доопределения нулем на S'' , а затем с помощью оператора P' , определенного равенствами

$$P'\xi(M) = \xi - \frac{\iint_{S'_k} \xi dS}{\text{mes}(S'_k)}, \quad M \in S'_k;$$

$$P'\xi(M) = 0, \quad M \in S''_k, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

уравнение (1) преобразуется к виду

$$A'_\sigma \sigma^0 = f_\sigma^0, \quad (7)$$

где

$$A'_\sigma = \frac{1}{2} P' K_{\sigma\tau}, \quad f_\sigma^0 = -P' \left(\varphi^0(M) + \sum_{k=1}^p \frac{q_k}{\text{mes}(S'_k)} \iint_{S'} \frac{dS_Q}{4\pi r_{QM}} \right)$$

и предполагается, что для φ^0 существует продолжение на S в классе следов элементов соболевского пространства $W_2^1(\Omega_R)$. Это, например, выполнится, если первичное поле с потенциалом φ^0 или ему эквивалентное определено в Ω_R и его интеграл Дирихле по Ω_R конечен.

Далее на основе свойств оператора $K_{\sigma\tau}$, а также вариационного принципа и теоремы Рисса, аналогично [2] устанавливается, что уравнение (4) корректно в паре пространств $\dot{H}_\sigma^0(S) \rightarrow H_\tau^0(S)$, причем к $H_\tau^0(S)$ отнесено продолжение φ^0 на S , а $\dot{H}_\sigma^0(S)$ — подпространство в $H_\sigma^0(S)$, образованное элементами с нулевым значением на S'' . Подстановка (6) в (1) при выполнении (4) показывает, что это решение уравнения (1) в условиях калибровки (5) и притом единственное. А сравнение решений σ^0 , σ_+^0 , σ_-^0 уравнения (4) для поверхностей S' , S'_+ , S'_- соответственно, одна из которых (S'_+) включает в себя S' , другая (S'_-), напротив, сама содержится в S' , дает

$$\|\sigma_-^0\|_{H_\sigma^0} \leq \|\sigma^0\|_{H_\sigma^0} \leq \|\sigma_+^0\|_{H_\sigma^0}.$$

Это означает, что энергия поля электрической реакции проводящей поверхности с краем или совокупности таких поверхностей не возрастет, если фрагмент поверхности вырезать и исключить или целиком вынести какую-нибудь поверхность, входящую в S' , из области, занятой полем. А с учетом ортогональности поля реакции и результирующего поля [1], энергия последнего в тех же условиях, напротив, не уменьшится.

Аналогичное сравнение решений σ , σ_+ , σ_- уравнения (1) в отсутствии первичного поля показало, что для емкостей C , C_+ и C_- поверхностей S' , S'_+ и S'_- справедливы неравенства

$$C_- \leq C \leq C_+. \quad (8)$$

Например, для плоской фигуры это означает, что величина ее емкости заключена между величинами емкостей для вписанного и описанного кругов. Неравенства (8) сохраняют силу и для одноименных частичных емкостей.

Находятся оценки возмущения решения, обусловленные неточным заданием или аппроксимацией на S' первичного поля. А имен-

но,

$$\|\sigma_\varepsilon\|_{H_\sigma^0} \leq \left(\iiint_{\Omega} |\overline{D_\varepsilon^0}|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\sigma_\varepsilon\|_{H_\sigma^0} \leq 2\beta \left| \iint_S \iint_S \frac{[\overline{D_\varepsilon^0}(Q)\overline{n_Q}]}{r_{QM}} dS_Q [\overline{D_\varepsilon^0}(M)\overline{n_M}] dS_M \right|^{\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

где σ_ε и $\overline{D_\varepsilon^0}$ — возмущения, соответственно, решения σ и первичного поля $\overline{D^0} = -\text{grad } \varphi^0$, $\beta = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 1}$, λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое число оператора $K_{\sigma\sigma}$ в $H_\sigma^0(S)$, причем оценка (9) приведена здесь в удобном для пользования виде, соответствующем случаю, когда возмущение первичного поля обладает определенной гладкостью.

Согласно первому неравенству погрешность энергии (интеграла Дирихле) поля реакции не превышает погрешности, возникающей в энергии первичного поля. Согласно второму — требования к точности задания первичного поля могут существенно возрасти при наличии узких зазоров ($|\lambda_1|$ здесь приближается к единице, см. табл. в [3]).

Приближенное решение уравнения (4) определяется как элемент последовательности Ритца, минимизирующей функционал эквивалентной уравнению (4) вариационной задачи [2], т. е. $\sigma^0(M) \simeq \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} \sigma_i(M)$, где $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ — вещественные базисные функции из $\tilde{H}_\sigma^0(S)$, $\{C_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ — решение СЛАУ

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^{(n)} \\ C_2^{(n)} \\ \dots \\ C_n^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

с симметричной матрицей, причем

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \iint_{S'} \frac{\sigma_i(Q)}{r_{QM}} dS_Q \sigma_j(M) dS_M, \quad \beta_i = \iint_{S'} f_\sigma^0 \sigma_i dS,$$

а в качестве базисных могут использоваться, например, кусочно-постоянные функции, равные нулю на S'' и имеющие нулевое среднее значение на S'_k , $k = 1, 2, \dots, p$.

Уравнение (2) рассматривается в постановках с условиями

$$\tau = C_{kj} \text{ на } S''_{kj}, \quad C_{kj} = \text{const};$$

$$\frac{1}{2} \iint_{S''_{kj}} K_{\tau\sigma} \tau dS = \Theta_{kj}, \quad \Theta_{kj} = \text{const}, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, \gamma_k,$$

где заданными являются либо $\{C_{kj} - C_{k0} = i_{kj}\}_{j=1}^{\gamma_k}$, либо $\{\Theta_{kj}\}_{j=1}^{\gamma_k}$ при всех $k = 1, 2, \dots, p$, а константы C_{k0} и Θ_{k0} калибруются условиями

$$\oiint_{S_k} \tau dS = 0 \text{ и } \oiint_{S_k} f_{\tau}^0 dS = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (11)$$

соответственно, причем $f_{\tau}^0 = f_{\tau}$ на S' , $f_{\tau}^0 = \frac{\Theta_{kj}}{\text{mes}(S''_{kj})}$ на S'' , $k = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, \gamma_k$.

В физической интерпретации S' как совокупности идеально-проводящих поверхностей $\{S'_k\}_{k=1}^p$ в присутствии первичного магнитного поля напряженности $\overline{H^0}$

$$f_{\tau} = -\overline{H^0} \overline{n}, \quad \Theta_{kj} = - \iint_{S''_{kj}} \overline{H^0} \overline{dS} + \Phi_{kj},$$

$$\Phi_{kj} = \text{const}, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, \gamma_k.$$

Здесь Φ_{kj} — так называемый «замороженный поток» напряженности собственного магнитного поля поверхности S'_k через отверстие S''_{kj} при $j \neq 0$, а $\Phi_{k0} = - \sum_{j=1}^{\gamma_k} \Phi_{kj}$.

Для задачи, в которой заданными являются $\{\Theta_{kj}\}$ и f_{τ} , с помощью оператора P'' , определенного равенствами $P''\xi = \xi$ на S' ,

$$P''\xi = \frac{\iint_{S''_{kj}} \xi dS}{\text{mes}(S''_{kj})} \text{ на } S''_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, \gamma_k,$$

уравнение (2) преобразуется к виду

$$A'_{\tau} \tau^0 = f_{\tau}^0, \quad (12)$$

где $A'_\tau = \frac{1}{2}P''K_{\tau\sigma}$. Далее, аналогично уравнению (4) на основе свойств оператора $K_{\tau\sigma}$ устанавливается, что уравнение (12) корректно в паре пространств $\tilde{H}_\tau^0(S) \rightarrow H_\sigma^0(S)$, причем к $H_\sigma^0(S)$ отнесен продолженный на S любым¹ допустимым способом f_τ , а $\tilde{H}_\tau^0(S)$ — подпространство в $H_\tau(S)$ (см. [1]), образованное элементами с постоянными значениями на $\{S''_{kj}\}_{j=0}^{\gamma_k}$, $k = 1, 2, \dots, p$, и нулевыми средними значениями на $\{S_k\}_{k=1}^p$.

Приближенное решение уравнения (12) определяется как элемент минимизирующей последовательности Ритца, т. е.

$$\tau(M) \simeq \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} \tau_i(M),$$

где $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ — вещественные базисные функции из $\tilde{H}_\tau^0(S)$; $\{C_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ — решения СЛАУ (10) с симметричной матрицей, причем, если в качестве базисных используются непрерывные и кусочно-непрерывно дифференцируемые функции, то

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \iint_{S'} \frac{\bar{\sigma}_i(Q)}{r_{QM}} dS_Q \bar{\sigma}_j(M) dS_M, \\ \beta_i &= \iint_{S'} (\bar{A}^* - \bar{A}^0) \bar{\sigma}_i dS; \quad \bar{\sigma}_{i(j)} = [\bar{n} \operatorname{grad} \tau_{i(j)}]; \end{aligned} \quad (13)$$

$\bar{A}^0$ — векторный потенциал поля $\bar{H}^0$ ($\bar{H}^0 = \operatorname{rot} \bar{A}^0$);

$$\bar{A}^*(M) = \sum_{j=1}^{\gamma_k} \frac{\Phi_{kj}}{4\pi} \operatorname{rot} \oint_{L_{kj}} \frac{d\bar{l}_N}{r_{NM}}, \quad M \in S'_k, \quad k = 1, 2, \dots, p; \quad (14)$$

L_{kj} — контур, пересекающийся с S_k только в двух точках, одна из которых лежит на S''_{k0} , другая — на S''_{kj} , и ориентированный в направлении нормали $\bar{n}$ к S''_{kj} , $j \neq 0$.

Задача, в которой заданными являются $\{i_{kj}\}$ и f_τ , с помощью редукции $\tau = \tau^0 + \tau^*$, где τ^* — непрерывная и кусочно-непрерывно дифференцируемая на S функция, принимающая на $\{S''_{kj}\}_{j=0}^{\gamma_k}$, $k =$

¹Значение f_τ на S'' при расчетах не используется.

$1, 2, \dots, p$, постоянные значения, отвечающие калибровке

$$\tau^*(M) - \tau^*(N) = i_{kj}, \quad M \in S_{kj}, \quad N \in S_k'' \setminus S_{kj},$$

$$k = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, \gamma_k,$$

сводится относительно τ^0 к уравнению (12), для которого все изложенное выше сохранит силу, если под $\tilde{H}_\tau^0(S)$ понимать сужение прежнего пространства, состоящее из элементов, принимающих на внутренних и внешних отверстиях отдельной S_k' одинаковые значения, а $\overline{A^*}$ определить равенством

$$\overline{A^*} = \text{rot} \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\tau^*(Q) \overline{dS}_Q}{r_{QM}}, \quad M \in S'.$$

Причем подбор τ^* выполняется элементарно, а отсутствие информации о $\{\Theta_{kj}\}$ не играет роли. Важно лишь, что благодаря калибровке (11) для f_τ имеет место

$$\sum_{j=0}^{\gamma_k} \Theta_{kj} = - \iint_{S_k'} f_\tau dS, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Применительно к уравнению (12) также находятся оценки возмущения τ_ε решения, а именно,

$$\|\tau_\varepsilon\|_{H_\tau^0} \leq \left(\iiint_\Omega |\overline{H_\varepsilon^0}|^2 d\Omega \right)^{1/2},$$

$$\|\tau_\varepsilon\|_{H_\tau^0} \leq 2\beta \left| \iint_S \iint_S \frac{\overline{H_\varepsilon^0}(Q) \overline{n}_Q}{r_{QM}} dS_Q \overline{H_\varepsilon^0}^\vee(M) \overline{n}_M dS_M \right|^{1/2},$$

где $\overline{H_\varepsilon^0}$ — возмущение первичного поля. Проводятся сравнение решений для S' , S'_+ , S'_- в отсутствии «замороженных потоков» и интерпретация результатов в терминах энергии магнитных полей, которые аналогичны рассмотренным для уравнения (4). Однако неравенства для индуктивностей и модулей одноименных взаимоиנדуктивностей, соответствующие (5), выглядят как

$$L_+ \leq L \leq L_-$$

и относятся к многосвязным поверхностям, содержащимся в S' , с учетом того, что трех- и более связным поверхностям отвечает несколько индуктивностей (по числу внутренних отверстий) и собственных взаимоиндуктивностей.

Уравнение (3) рассматривается в постановке, при которой

$$\overline{f_\delta} = -\overline{A^0} + \overline{C}; \quad (15)$$

$$\operatorname{div} \overline{\delta} = 0, \quad \overline{\delta} \overline{n} = 0 \text{ на } S'; \quad \overline{\delta} \overline{\nu} = 0 \text{ на } l, \quad \overline{\delta} = 0 \text{ на } S'', \quad (16)$$

где $\overline{\nu}$ — единичный вектор нормали к l (лежит в касательной плоскости к S); $\overline{C}$ — неизвестное векторное поле на S' , обладающее свойствами

$$\operatorname{rot}_n \overline{C} = 0 \text{ на } S', \quad \oint_{l_{kj}} \overline{C} d\overline{l} = \Phi_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, \gamma_k, \quad (17)$$

l_{kj} — часть края поверхности S' , ограничивающая отверстие S''_{kj} , ориентированная по правилу правого винта относительно $\overline{n}$ на S''_{kj} .

Далее результаты [4], полученные для уравнения (3) на плоской односвязной поверхности S' , обобщаются на задачу (3), (15)–(17). При этом существенно используются ортогональные разложения Фридрихса [5] векторных полей на многосвязных римановых поверхностях, а также полученные в [1] применительно к кусочно-гладкой S предельные соотношения для потенциалов и операторов теории потенциала, согласно которым последние являются пределами сходящихся в определенном смысле последовательностей, соответственно, потенциалов и операторов при гладких, следовательно, римановых поверхностях.

В итоге, операторное уравнение первого рода, эквивалентное задаче (3), (15)–(17), сводится к СЛАУ (10), в которой $\{\alpha_{ij}\}$, $\{\beta_i\}$ определены равенствами (13), (14), а приближенное решение имеет вид $\overline{\delta}(M) \simeq \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} \overline{\sigma}_i(M)$. При этом сходимость последовательности Ритца обеспечивается в смысле метрики $\tilde{H}_\sigma^0(S)$ для каждой из декартовых координат δ_x , δ_y , δ_z .

В заключение отметим, что численные представления задач для скалярного уравнения (2) и векторного уравнения (3) идентичны лишь в случае, когда реакция поверхности потенциальна вне S . Это

может нарушиться, например, если S — поверхность тора. Чтобы воспользоваться скалярным уравнением, здесь потребуется дополнительная редукция. В случае векторного уравнения достаточно лишь предусмотреть базисные векторы, имеющие на S циклы. И, наконец, укажем, что все изложенное выше распространено на соответствующие (1)–(3) одномерные уравнения теории логарифмических потенциалов, а устойчивость решения рассмотренных СЛАУ и повышение точности с ростом числа используемых базисных функций подтверждены разнообразными примерами практических расчетов.

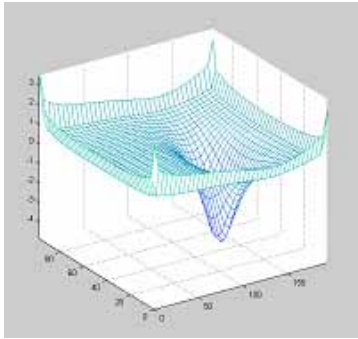


Рис. 1.

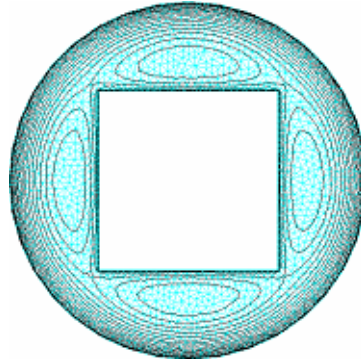


Рис. 2.

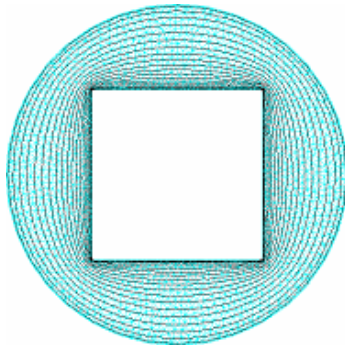


Рис. 3.

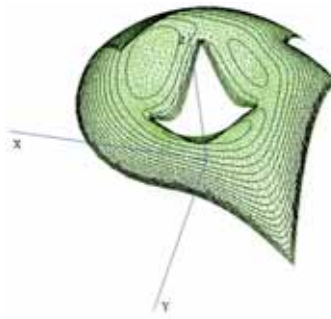


Рис. 4.

Некоторые из них иллюстрируются на рис. 1–4. На рис. 1 изображен трехмерный график распределения плотности электрического заряда прямоугольной проводящей пластины, индуцированного внешним точечным зарядом, расположенным сверху с незначительным отклонением от одной из плоскостей симметрии пластины. На рис. 2 приведен пример расчета плотности вихревых токов в многосвязной идеально-проводящей пластине, помещенной в однородное поперечное магнитное поле. На рис. 3 показан расчет для той же пластины в отсутствие невозмущенного магнитного поля, но при наличии замороженного магнитного потока через отверстие. На рис. 4 представлена картина поля токов на искривленной поверхности, помещенной в однородное магнитное поле.

Литература

1. Астахов В. И. Поверхностные потенциалы, операторы и уравнения теории потенциала в энергетических пространствах // Мат. методы в физике, технике, экономике: Юбил. сб. науч. ст. кафедры прикладной математики ЮРГТУ(НПИ) / Южно-Российский гос. техн. ун-т.—Новочеркасск: Ред. журн. Изв. вузов. Электромеханика, 2001.—С. 5–34.
2. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных.—М.: Высшая школа, 1977.—431 с.
3. Астахов В. И., Бахвалов Ю. А., Косиченко М. Ю. О сходимости итерационного метода в задачах дифракции для стационарных полей. Математические методы в физике, технике и экономике / Южно-Российский гос. техн. ун-т.—Новочеркасск: Ред. журн. Изв. вузов. Электромеханика, 2004.—С. 3–22.
4. Науменко Я. А., Астахов В. И. Математическое моделирование магнитного поля в присутствии идеально-проводящей пластины с краем // Изв. вузов. Электромеханика.—2003.—№ 5.—С. 11–16.
5. Friedrichs K. O. Differential forms on Riemannian manifolds // Comm. on Pure and Appl. Math.—1955.—V. 8.—С. 551–590.

Новочеркасск, Южный научный центр РАН
E-mail: V.Astakhov@mail.ru, jan@novoch.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

В. А. Богачев, Т. В. Богачев

Предлагаемая ниже маркетинговая миниатюра дает представление об использовании специализированных компьютерных программ при изучении, например, курса аналитической геометрии.

Рассмотрим два предприятия A и B , выпускающих одну и ту же продукцию. Пусть расстояние между ними равно L (км) и отпускная цена продукции на A равна p_1 (у. е.), на B — p_2 (у. е.). Спрашивается, как будет разделен рынок сбыта продукции между предприятиями A и B , если транспортные расходы на перевозку ее единицы для этих предприятий соответственно равны q_1 (у. е./км) и q_2 (у. е./км)?

Введем на плоской географической карте декартову систему координат так, чтобы A и B оказались расположенными на оси абсцисс в точках, симметричных относительно начала. Если за единицу длины принять 1 км, то получим: $A(-\frac{L}{2}, 0)$, $B(\frac{L}{2}, 0)$. Рассмотрим потребителя, находящегося в произвольной точке $M(x, y)$ плоскости. Цена продукции, доставляемой с A и B в M , соответственно составит $p_1 + q_1 r_1$ (у. е.) и $p_2 + q_2 r_2$ (у. е.). Здесь $r_1 = \sqrt{(x + \frac{L}{2})^2 + y^2}$ и $r_2 = \sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + y^2}$ — расстояния от M до A и B .

Расходы потребителя окажутся одинаковыми в точках, для которых выполняется равенство

$$q_1 \sqrt{\left(x + \frac{L}{2}\right)^2 + y^2} = p + q_2 \sqrt{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + y^2}. \quad (1)$$

При этом, не теряя общности, мы полагаем, что $p = p_2 - p_1 \geq 0$. В результате стандартных преобразований (1) приходим к уравнению

$$pq_2 \sqrt{4x^2 - 4Lx + 4y^2 + L^2} = q_1^2 x^2 + q_1^2 Lx + \\ + \frac{q_1^2 L^2}{4} + q_1^2 y^2 - p^2 - q_2^2 x^2 + q_2^2 Lx - \frac{q_2^2 L^2}{4} - q_2^2 y^2. \quad (2)$$

Обозначим s_1 правую часть уравнения (2) и заметим, что при дальнейших преобразованиях мы будем переходить к уравнениям, эквивалентным (1), если потребовать выполнения неравенства

$$s_1 \geq 0. \quad (3)$$

Приведем преобразования уравнения (3), выполненные в среде **Maple**:

```
> eq2:=p*q2*(4*x^2-4*x*L+L^2+4*y^2)^(1/2) =
q1^2*x^2+q1^2*x*L+1/4*q1^2*L^2+q1^2*y^2-p^2-q2^2*x^2+
q2^2*x*L-1/4*q2^2*L^2-q2^2*y^2;
```

$$eq2 := pq2\sqrt{4x^2 - 4Lx + 4y^2 + L^2} = q1^2x^2 + q1^2Lx + \\ + \frac{q1^2L^2}{4} + q1^2y^2 - p^2 - q2^2x^2 + q2^2Lx - \frac{q2^2L^2}{4} - q2^2y^2.$$

```
> s1:=collect(rhs(eq2),{x,y},distributed);
```

$$s1 = -p^2 + \frac{q1^2L^2}{4} - \frac{q1^2L^2}{4} + \\ + (q1^2L + q2^2L)x + (q1^2 - q2^2)x^2 + (q1^2 - q2^2)y^2.$$

Далее будем иметь:

```
> eq3:=lhs(eq2)^2-rhs(eq2)^2=0;
eq4:=collect(eq3,{x,y},distributed);
```

$$eq3 := p^2q2^2(4x^2 - 4Lx + 4y^2 + L^2) - \left(q1^2x^2 + q1^2Lx + \right. \\ \left. + \frac{q1^2L^2}{4} + q1^2y^2 - p^2 - q2^2x^2q2^2Lx - \frac{q2^2L^2}{4} - q2^2y^2 \right)^2 = 0.$$

$$eq4 := -(q1^2 - q2^2)^2x^4 - 2(q1^2L + q2^2L)(q1^2 - q2^2)^2x^3 - \\ - 2(q1^2 - q2^2)^2x^2y^2 + \left(4p^2q2^2 - 2\left(-p^2 + \frac{q1^2L^2}{4} - \frac{q2^2L^2}{4} \right) \times \right. \\ \left. \times (q1^2 - q2^2) - (q1^2L - q2^2L)^2 \right)x^2 - 2(q1^2L + q2^2L)(q1^2 - q2^2)xy^2 + \\ + \left(-4p^2q2^2 - 2\left(-p^2 + \frac{q1^2L^2}{4} - \frac{q2^2L^2}{4} \right)(q1^2L - q2^2L) \right)x -$$

$$-(q_1^2 - q_2^2)^2 y^4 + \left(4p^2 q_2^2 - 2 \left(-p^2 + \frac{q_1^2 L^2}{4} - \frac{q_2^2 L^2}{4} \right) \times \right. \\ \left. \times (q_1^2 - q_2^2) \right) y^2 + p^2 q_2^2 L^2 - \left(-p^2 + \frac{q_1^2 L^2}{4} - \frac{q_2^2 L^2}{4} \right)^2 = 0.$$

Таким образом, множество точек плоскости, в которых цены продукции, доставленной с предприятий A и B , окажутся одинаковыми, есть часть линии (напоминаем о том дополнительном условии, что должно выполняться неравенство (3)), задаваемой уравнением

$$(q_1^2 - q_2^2)^2 x^4 + 2(q_1^2 L + q_2^2 L)(q_1^2 - q_2^2)x^3 + 2(q_1^2 - q_2^2)^2 x^2 y^2 - \\ - 2 \left(2q_2^2 p^2 - \left(\frac{q_1^2 L^2}{4} - \frac{q_2^2 L^2}{4} - p^2 \right) (q_1^2 - q_2^2) - (q_1^2 L + q_2^2 L)^2 \right) x^2 + \\ + 2(q_1^2 L + q_2^2 L)(q_1^2 - q_2^2)xy^2 + 2 \left(2q_2^2 Lp^2 + \left(\frac{q_1^2 L^2}{4} - \frac{q_2^2 L^2}{4} - p^2 \right) \times \right. \\ \left. \times (q_1^2 L + q_2^2 L) \right) x + (q_1^2 - q_2^2)^2 y^4 - 2 \left(2q_2^2 p^2 - \left(\frac{q_1^2 L^2}{4} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{q_2^2 L^2}{4} - p^2 \right) (q_1^2 - q_2^2) \right) y^2 - q_2^2 p^2 L^2 + \left(\frac{q_1^2 L^2}{4} - \frac{q_2^2 L^2}{4} - p^2 \right)^2 = 0. \quad (4)$$

Линия (4) является, вообще говоря, алгебраической линией 4-го порядка. Выделим несколько, на наш взгляд, характерных частных случаев.

I. Пусть $p = 0$ (при этом естественно предполагать, что $q_1 \neq q_2$). Тогда уравнение (4) становится принципиально проще.

```
> eq5:=subs(p=0,eq4);
factor(-lhs(eq5));
```

$$eq5 := -(q_1^2 - q_2^2)^2 x^4 - 2(q_1^2 L + q_2^2 L)(q_1^2 - q_2^2)x^3 - \\ - 2(q_1^2 - q_2^2)^2 x^2 y^2 + \left(- 2 \left(\frac{1}{4} q_1^2 L^2 - \frac{1}{4} q_2^2 L^2 \right) (q_1^2 - q_2^2) - \right. \\ \left. - (q_1^2 L + q_2^2 L)^2 \right) x^2 - 2(q_1^2 L + q_2^2 L)(q_1^2 - q_2^2)xy^2 -$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{4} q_1^2 L^2 - \frac{1}{4} q_2^2 L^2 \right) (q_1^2 L + q_2^2 L) x - (q_1^2 - q_2^2)^2 y^4 - \\
& - \left(\frac{1}{4} q_1^2 L^2 - \frac{1}{4} q_2^2 L^2 \right) (q_1^2 - q_2^2) y^2 - \left(\frac{1}{4} q_1^2 L^2 - \frac{1}{4} q_2^2 L^2 \right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

$$\frac{(-4q_1^2 x^2 - 4q_1^2 y^2 - 4q_1^2 Lx - q_1^2 L^2 + 4q_2^2 x^2 + 4q_2^2 y^2 - 4q_2^2 Lx + q_2^2 L^2)^2}{16}$$

```

> eq6:=collect(-4*q2^2*x^2+4*q2^2*x*L-q2^2*L^2-
4*q2^2*y^2+4*q1^2*x^2+4*q1^2*x*L+
q1^2*L^2+4*q1^2*y^2=0,{x,y},distributed);

```

$$\begin{aligned}
eq6 := & -q_2^2 L^2 + q_1^2 L^2 + (4q_1^2 L + 4q_2^2 L)x + \\
& + (4q_1^2 - 4q_2^2)x^2 + (4q_1^2 - 4q_2^2)y^2 = 0.
\end{aligned}$$

```

> eq7:=collect(eq6/(-4*q2^2+4*q1^2),{x,y},distributed);

```

$$eq7 := x^2 + \frac{(4q_1^2 L + 4q_2^2 L)x}{4q_1^2 - 4q_2^2} + y^2 + \frac{-q_2^2 L^2 + q_1^2 L^2}{4q_1^2 - 4q_2^2} = 0.$$

```

> c1:=simplify(coeff(lhs(eq7),x));
c2:=simplify(1/(-4*q2^2+4*q1^2)*(-q2^2*L^2+q1^2*L^2));

```

$$c1 := -\frac{L(q_1^2 - q_2^2)}{-q_1^2 + q_2^2},$$

$$c2 := \frac{L^2}{4}.$$

```

> eq8:=x^2+c1*x+y^2+c2 = 0;

```

$$eq8 := x^2 - \frac{L(q_1^2 - q_2^2)}{-q_1^2 + q_2^2} x + y^2 + \frac{L^2}{4} = 0.$$

```

> eq9:=taylor(lhs(eq8),x=-c1/2)=0;

```

$$eq9 := \left(-\frac{L^2(q_1^2 + q_2^2)^2}{4(-q_1^2 + q_2^2)^2} + y^2 + \frac{L^2}{4} \right) + \left(x - \frac{L(q_1^2 + q_2^2)}{2(-q_1^2 + q_2^2)} \right)^2 = 0.$$

```
> r:=1/4*L^2*(q2^2+q1^2)^2/(q1^2-q2^2)^2-1/4*L^2;
simplify(r);
```

$$r = \frac{L^2(q_1^2 + q_2^2)^2}{4(q_1^2 - q_2^2)^2} - \frac{L^2}{4},$$

$$\frac{q_1^2 L^2 q_2^2}{(-q_1^2 + q_2^2)^2}.$$

Получаем уравнение

$$\left(x - \frac{L(q_2^2 + q_1^2)}{2(q_2^2 - q_1^2)}\right)^2 + y^2 = \frac{q_1^2 q_2^2 L^2}{(q_1^2 - q_2^2)^2}. \quad (5)$$

Таким образом, алгебраическая линия 4-го порядка (4) в рассматриваемом случае вырождается, и рынок сбыта продукции оказывается разделенным окружностью (5) (заметим, что если $p = 0$ и $q_1 \neq q_2$, то неравенство (3) выполняется для всех точек плоскости). Соответствующий пример, когда $q_1 = 9$, $q_2 = 3$ и $L = 100$, рассмотрен в [1] без использования программных средств.

II. Пусть $q_1 = q_2$ (при этом естественно предполагать, что $p > 0$). В этом случае линия (4) также вырождается. Оказывается, что она является либо правой ветвью гиперболы $\frac{4q_2^2 x^2}{p^2} - \frac{4q_2^2 y^2}{q_2^2 L^2 - p^2} = 1$ (если $p < L q_2$), либо лучом $y = 0$, $x \geq \frac{L}{2}$ (если $p = L q_2$). Если $p > L q_2$, то линия оказывается пустым множеством, и вся плоскость является рынком сбыта предприятия A (этот результат вполне очевиден). Проиллюстрируем сказанное при $q_1 = q_2 = 1$ и $L = 2$. На рис. 1 изображены случаи, когда $p = 1.9$, 1.99 и 2 .

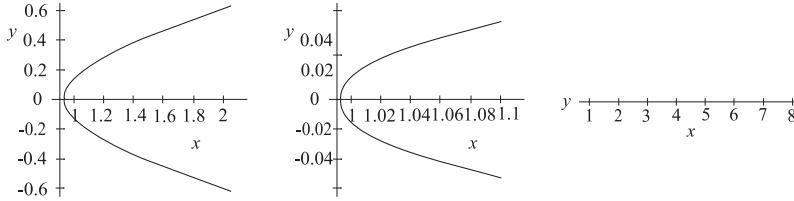


Рис. 1.

III. Пусть $p > 0$ и $q_1 \neq q_2$. Например, $L = 2$, $p = 1$, $q_1 = 1$.

1. Полагая $q_2 = 0$, получим вполне очевидное решение в виде окружности (рис. 2) (ср. со случаем I).

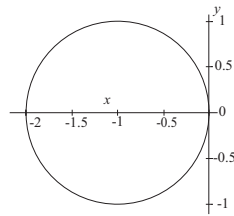


Рис. 2.

2. Последовательно полагая $q_2 = 0.1, 0.7, 0.99$, будем получать линии 4-го порядка, по форме близкие к окружности (рис. 3).

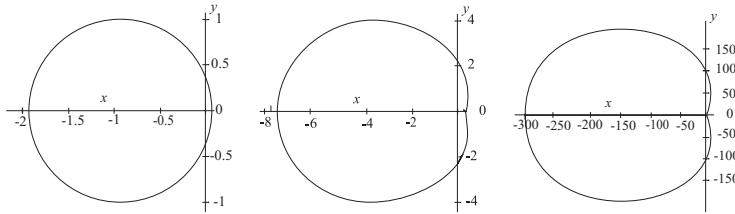


Рис. 3.

3. При переходе к значению $q_2 = 1$ происходит принципиальный скачок — рассматриваемая линия оказывается правой ветвью гиперболы $12x^2 - 4y^2 = 3$ (рис. 4) (ср. со случаем II). Действительно,

```
> with(plots):
> implicitplot(sqrt((x+1)^2+y^2)=
  1+sqrt((x-1)^2+y^2), x=0..200, y=-300..300);
```

4. При переходе к значениям $q_2 > 1$ также наблюдается метаморфоза принципиального характера. Теперь уже становятся ограниченными возможности для сбыта продукции, выпускаемой предприятием B . Полагая последовательно $q_2 = 1.01, 1.4, 10$, будем получать следующие линии 4-го порядка (рис. 5).

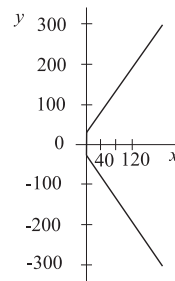


Рис. 4.

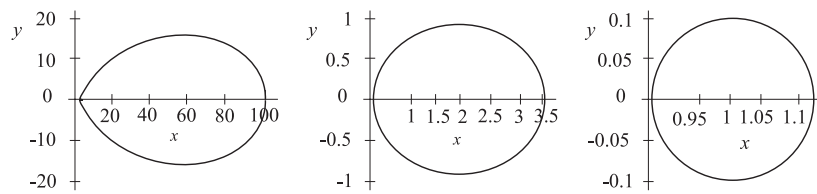


Рис. 5.

Литература

1. Крынский Х. Э. Математика для экономистов.—М.: Статистика, 1970.

Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет путей сообщения
E-mail: bogacheva@yandex.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОТОКОВ НА ГРАФАХ

А. П. Буслаев, А. Г. Таташев, М. В. Яшина

Введение

Рассматриваются задачи устойчивости потоков частиц (автомобилей) на сетях. Сеть представляет собой ориентированный граф, ребра которого соответствуют перегонам дорог, а вершины — перекресткам. Состояние потока определяется вектор-функцией $\rho(t) = \{\rho_i(t)\}$ его плотностей, зависимость координат которой от времени моделируется системой дифференциальных уравнений и отражает следующий физический принцип: *скорость изменения плотности потока на ребре пропорциональна разности интенсивностей суммарных потоков, поступающих и покидающих это ребро*. Интенсивность $q_i(t)$ потока на i -ребре связана с плотностью $\rho_i(t)$ основной диаграммой $q_i(t) = \lambda_i \rho_i(t)(\rho_i^* - \rho_i(t))$, где ρ_i^* — максимальное значение плотности. Тогда $q_i^* = \lambda_i (\rho_i^*)^2 / 4$ — максимальное значение интенсивности (так называемая *пропускная способность*). Наконец, если l_i — длина i -ребра, то $C_i^* = l_i \rho_i^*$ — *емкость ребра* и $C^* = \sum_i C_i^*$ — *емкость сети*.

Режим движения $\bar{\rho} = \bar{\rho}(t)$ в момент времени t_0 называется *критическим*, если существует i -ребро такое, что $\rho_i(t_0) = \rho_i^*$. Согласно физическому принципу рассматриваемой модели движение будет критическим и при $t \geq t_0$, так как $q_i(t) \equiv 0, t \geq t_0$. Поток называется *T -критическим*, если при $t \geq T$ режим движения критичен, в противном случае поток *T -некритичен*. При этом состояние потока $\bar{\rho}(t)$ называется соответственно *T -критической* (*T -некритической*) *точкой*. Через $T_*(\bar{\rho}(0))$ обозначим $\min\{\tau \geq 0\}$ таких, что поток критичен при $t \geq \tau$.

Точка $\bar{\rho}(0)$ называется *устойчивой T -некритической точкой*, если все точки некоторой окрестности $\bar{\rho}(0)$, рассматриваемые как начальные состояния, будут T -некритическими. В противном случае T -некритическая точка называется *неустойчивой T -некритической точкой*.

Пусть $\bar{\rho}(0)$ — *стационарная некритическая точка потока*, т. е. некритическое состояние потока, которое не меняется со временем.

Тогда $\bar{\rho}(0)$ — ∞ -некритическая точка, так как $T_*(\bar{\rho}(0)) = \infty$. Некритическое состояние потока $\bar{\rho}(0)$ локально устойчиво, если при малых изменениях этого состояния поток возвращается к $\bar{\rho}(0)$ при $t \rightarrow \infty$. Ясно, что $\bar{\rho}(0)$ является стационарной точкой. Рассматриваются замкнутые и открытые сети. На замкнутой сети масса потока C , т. е. суммарное количество частиц, постоянна. В случае открытой сети частицы могут поступать в сеть и покидать ее и, таким образом, $C = C(t)$. Очевидно, что открытая сеть может рассматриваться как фрагмент более сложной замкнутой.

1. Замкнутые сети

1.1. Поток на кольце из двух одинаковых участков. Рассмотрим движение в одном направлении по кольцу, состоящему из двух одинаковых участков (рис. 1).

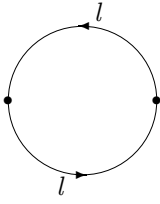


Рис. 1. Кольцо из двух одинаковых участков.

Пусть $l = l_1 = l_2$ — длины участков, $\rho^* = \rho_1^* = \rho_2^*$ — максимальные плотности, $C_1^* = C_2^* = \rho^* l$ — емкости участков и $C^* = 2\rho^* l$ — емкость сети. В диапазоне возможных значений $\rho \in [0, \rho^*]$ зависимость интенсивности от плотности имеет вид $\lambda\rho(\rho^* - \rho)$. В рассматриваемом случае может быть найдено явное выражение для зависимостей плотностей потоков на участках. Плотности потоков на участках удовлетворяют системе из

двух дифференциальных уравнений и условию нормировки, выражающему постоянство массы потока. Будет ли движение некритическим, $T_*(\bar{\rho}(0)) = \infty$, зависит только от соотношения емкости кольца C^* и массы потока C . А именно: если масса потока меньше половины емкости кольца, $C < C^*/2$, то движение является устойчивым ∞ -некритическим. При этом состояние потока стремится с ростом t к стационарному $\rho_1 = \rho_2 = C/2$ и

$$\left| \rho_i(t) - \frac{C}{2} \right| \searrow 0, \quad i = 1, 2.$$

Если $C > C^*/2$, $\rho_1(0) \neq \rho_2(0)$, то движение критическое для

любых допустимых начальных условий, причем:

$$T_*(\rho_0) \leq \frac{l}{2\lambda\rho^* \left(\frac{2C}{C^*} - 1\right)} \ln \frac{\left(\rho^* - \frac{C\rho^*}{C^*}\right)}{\left(\rho_0 - \frac{C\rho^*}{C^*}\right)},$$

где $\rho_0 = \rho_1(0)$.

Действительно, так как в случае одинаковых участков $\rho_1(0) + \rho_2(0) = C/l$, то либо $\rho_1(0) = \rho_2(0) = C/2l$, либо на одном из участков начальная плотность превышает $C/2l$. В первом случае поток неустойчивый некритический (стационарная точка). Во втором случае поток критический. Найдем время достижения критического режима. Пусть $\rho_0 = \rho_1(0) > C/2l > \rho_2(0)$. Зависимость плотности потока на первом участке до момента достижения критического режима имеет вид:

$$\rho(t) = \frac{C}{2l} + \left(\rho_0 - \frac{C}{2l}\right) e^{\frac{2\lambda}{l} \left(\frac{C}{l} - \rho^*\right) t}.$$

Для времени $T_*(\rho_0)$ достижения критического режима имеем

$$\frac{C}{2l} + \left(\rho_0 - \frac{C}{2l}\right) e^{\frac{2\lambda}{l} \left(\frac{C}{l} - \rho^*\right) T_*} = \rho^*,$$

т. е.

$$e^{\frac{2\lambda}{l} \left(\frac{C}{l} - \rho^*\right) T_*} = \frac{\left(\rho^* - \frac{C}{2l}\right)}{\left(\rho_0 - \frac{C}{2l}\right)},$$

$$\frac{2\lambda}{l} \left(\frac{C}{l} - \rho^*\right) T_* = \ln \frac{\left(\rho^* - \frac{C}{2l}\right)}{\left(\rho_0 - \frac{C}{2l}\right)},$$

откуда

$$T_*(\rho_0) = \frac{l}{2\lambda\rho^* \left(\frac{2C}{C^*} - 1\right)} \ln \frac{\left(\rho^* - \frac{C\rho^*}{C^*}\right)}{\left(\rho_0 - \frac{C\rho^*}{C^*}\right)}.$$

Если $C = C^*/2$, то состояние стационарно и неустойчиво при любых начальных условиях $l(\rho_1(0) + \rho_2(0)) = C$.

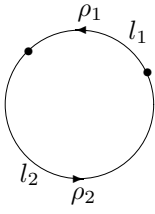


Рис. 2. Кольцо из двух неодинаковых участков.

1.2. Кольцо из двух неодинаковых участков. Рассмотрим одностороннее движение по кольцу из двух участков ($i = 1, 2$) длиной l_i , максимальными значениями плотности ρ_i^* и интенсивностями движения $q_i = \lambda_i \rho_i (\rho_i^* - \rho_i)$ (рис. 2).

Система дифференциальных уравнений, описывающих поток, имеет вид

$$\begin{cases} l_1 \frac{d\rho_1}{dt} = -\lambda_1 \rho_1 (\rho_1^* - \rho_1) + \lambda_2 \rho_2 (\rho_2^* - \rho_2), \\ l_2 \frac{d\rho_2}{dt} = \lambda_1 \rho_1 (\rho_1^* - \rho_1) - \lambda_2 \rho_2 (\rho_2^* - \rho_2). \end{cases} \quad (1)$$

Условие постоянства массы потока

$$l_1 \rho_1 + l_2 \rho_2 = C \quad (2)$$

и множество допустимых значений $\mathcal{D}$:

$$0 \leq \rho_1 \leq \rho_1^*, \quad 0 \leq \rho_2 \leq \rho_2^*. \quad (3)$$

Стационарные точки являются решениями уравнения

$$-\lambda_1 \rho_1 (\rho_1^* - \rho_1) + \lambda_2 \rho_2 (\rho_2^* - \rho_2) = 0. \quad (4)$$

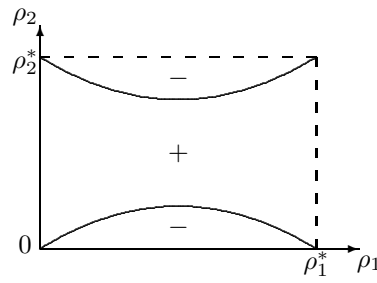
Если положить $x = \rho_1 - \rho_1^*/2$, $y = \rho_2 - \rho_2^*/2$, то (4) запишется в виде

$$\lambda_1 (x^2 - (\rho_1^*)^2/4) - \lambda_2 (y^2 - (\rho_2^*)^2/4) = 0$$

или

$$-\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = -\lambda_1 (\rho_1^*)^2/4 + \lambda_2 (\rho_2^*)^2/4 = -q_1^* + q_2^*. \quad (5)$$

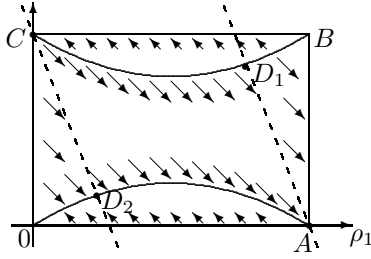
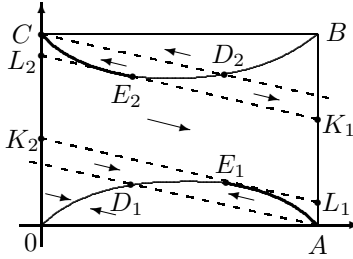
Предположим, что $q_2^* > q_1^*$, т. е. пропускная способность второго участка больше. Тогда (5) представляет собой гиперболу с фокусами на оси y , т. е. в исходных координатах на $\mathcal{D}$, рис. 3.

Рис. 3. Знаки $\dot{\rho}_1$.

Векторное поле скоростей $(\dot{\rho}_1, \dot{\rho}_2)$ параллельно линии $l_1\rho_1 + l_2\rho_2 = C$ и направление определяется знаком $\dot{\rho}_1$, см. рис. 3. В точке $(\rho_1^*, 0)$ нормаль к линии (4) имеет вид $(\lambda_1\rho_1^*, \lambda_2\rho_2^*)$ и в точке $(0, \rho_2^*)$ — симметрична $(-\lambda_1\rho_1^*, -\lambda_2\rho_2^*)$. Предположим, что

$$\frac{\lambda_2\rho_2^*}{\lambda_1\rho_1^*} > \frac{l_2}{l_1}, \quad (6)$$

т. е. тангенс угла наклона нормали к гиперболе в точке $(\rho_1^*, 0)$ больше тангенса угла наклона нормали к (2). Тогда при изменении C линия (2) не может дважды пересекать одну из ветвей гиперболы (4). Имеет место следующая качественная картина, см. рис. 4.

Рис. 4. Случай $v_2^* > v_1^*$.Рис. 5. Случай $v_2^* < v_1^*$.

Условие (6) эквивалентно следующему:

$$v_2^* = \frac{\lambda_2\rho_2^*}{l_2} > \frac{\lambda_1\rho_1^*}{l_1} = v_1^*. \quad (7)$$

Условие (7) означает, что скорость изменения плотности на втором участке в окрестности границ $[0, \rho_2^*]$ больше соответствующей для первого участка. Если выполнено обратное к (7) неравенство, то имеем рис. 5.

Отличительной особенностью этого случая (рис. 5) является наличие на каждой ветке стационарных точек устойчивых и неустойчивых фрагментов, тогда как при $v_2^* > v_1^*$, рис. 4, верхняя ветвь является неустойчивой, а нижняя — устойчивой.

Предположим теперь, что $q_1^* = q_2^*$, т. е. $\lambda_1(\rho_1^*)^2 = \lambda_2(\rho_2^*)^2$. Гипербола (4) вырождается в пару прямых $\lambda_1(\rho_1 - \rho_1^*/2)^2 = \lambda_2(\rho_2 - \rho_2^*/2)^2$, что эквивалентно

$$\sqrt{\lambda_1} \left| \rho_1 - \frac{\rho_1^*}{2} \right| = \sqrt{\lambda_2} \left| \rho_2 - \frac{\rho_2^*}{2} \right|. \quad (8)$$

Эти прямые проходят через противоположные вершины прямоугольника $\mathcal{D}$, рис. 6.

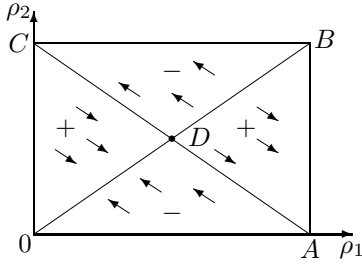


Рис. 6. Вырождение, $q_1^* = q_2^*$.

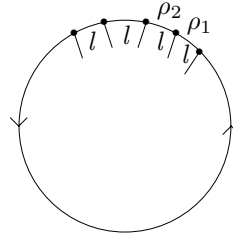


Рис. 7. Кольцо из n одинаковых участков.

В зависимости от соотношения скоростей v_1^* и v_2^* , (7), неустойчивыми являются либо верхняя ветвь CDB , либо правая стационарная ветвь ADB и, соответственно, дополнения устойчивы.

1.3. Кольцо из n одинаковых звеньев. Рассмотрим одностороннее движение по кольцу из n звеньев, $n > 2$, с одинаковыми характеристиками; l — длина звена, ρ^* — максимальная плотность, $C^* = l\rho^*$ — емкость звена, $q(\rho) = \lambda\rho(\rho^* - \rho)$ — основная диаграмма (рис. 7).

Имеют место следующие утверждения.

1.3.1. Если $\max_{1 \leq i \leq n} \rho_i(0) < \rho^*/2$, то поток $\bar{\rho}(t)$ сходится к стационарному состоянию

$$\frac{1}{n} \|\bar{\rho}(0)\|_{l_1}(1, \dots, 1).$$

Функция $\min_{1 \leq i \leq n} \rho_i(t)$ не убывает, а $\max_{1 \leq i \leq n} \rho_i(t)$ не возрастает. Значит, существуют

$$a = \lim_{t \rightarrow \infty} \min_{1 \leq i \leq n} \rho_i(t), \quad b = \lim_{t \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} \rho_i(t),$$

причем $a \leq b$. Фиксируем i , $1 \leq i \leq n$. Если $\rho_i(t_0) < \rho_{i+1}(t_0)$, то $(\rho_{i+1}(t) - \rho_i(t)) \searrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ ($t > t_0$); если же $\rho_i(t_0) > \rho_{i+1}(t_0)$, то $(\rho_{i+1}(t) - \rho_i(t)) \nearrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ ($t > t_0$). Значит, $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_i(t) = \text{const}$, $1 \leq i \leq n$.

1.3.2. Пусть $n = 2m$, $\rho_{2i-1}(0) = \rho_1$, $\rho_{2i}(0) = \rho_2$, $i = 1, \dots, n$. Значит, начальные условия периодичны и в силу решения задачи Коши внутри области $\bar{\rho}[0, \rho^*]^n$ вектор $\bar{\rho}(t)$ будет периодичен. Таким образом, поток на графе с $2m$ звеньями будет эквивалентен потоку из m колец с двумя звеньями. Следовательно, при $l(\rho_1 + \rho_2) < C^* = l\rho^*$ движение не критично и сходится к стационарному состоянию, а при $l(\rho_1 + \rho_2) > C^*$, $\rho_1 \neq \rho_2$ критическое.

1.3.3. Рассмотрим локальное достаточное условие критичности. Пусть $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t)$ — плотности потоков на двух соседних участках соответственно по направлению движения. Предположим, что при некотором t_0

$$\rho_2(t_0) > \rho_1(t_0) > \rho^*/2 \quad (9)$$

и

$$\min \left(\frac{\rho_1(t_0) - 2\rho^* + \rho_2(t_0)}{2q^*}, \frac{\rho_2(t_0) - \rho_1(t_0)}{2\delta_1} \right) > \frac{\rho^* - \rho_2}{\delta_2}, \quad (10)$$

где $q^* = f(\rho^*/2)$ — пропускная способность участков, $\delta_1 = q^* - f(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2})$, $\delta_2 = f(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}) - f(\rho_2)$. Неравенство (10) будет, в частности, справедливо если $\rho_2 \sim \rho^*$, т. е. если ρ_2 находится в окрестности ρ^* . В момент времени t_0 интенсивность поступающего на второй участок потока превышает интенсивность выходящего, рис. 8. Если

$$\rho_1(t) \in I = \left(\rho^* - \frac{\rho_1(t_0) + \rho_2(t_0)}{2}, \frac{\rho_1(t_0) + \rho_2(t_0)}{2} \right), \quad (11)$$

то плотность потока $\rho_2(t)$ возрастает со скоростью, превышающей δ_2/l . При этом $\rho_1(t)$ либо убывает со скоростью, не превышающей δ_0/l , либо возрастает со скоростью, не превышающей δ_1/l .

Плотность потока на первом участке $\rho_1(t)$ не может выйти из интервала I ранее, чем через время

$$l \min \left(\frac{\rho_1(t_0) - 2\rho^* + \rho_2(t_0)}{2q^*}, \frac{\rho_2(t_0) - \rho_1(t_0)}{2\delta_2} \right).$$

С другой стороны, если (11) имеет место, то не позднее, чем через $\frac{l(\rho^* - \rho_2(t_0))}{\delta_2}$ единиц времени, плотность потока на втором участке станет равной ρ^* , т. е. движение перейдет в критический режим.

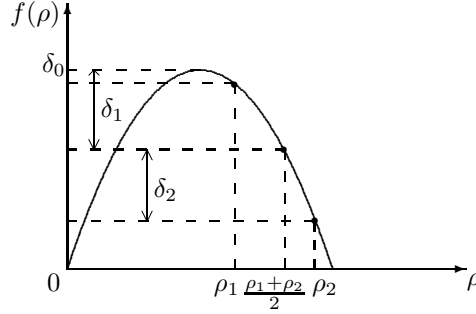


Рис. 8. Выполнение условий критичности режима.

1.3.4. Основная проблема, имеющая отношение к рассматриваемому случаю — кольцо из n звеньев, состоит в следующем: найти необходимое и достаточное условие на вектор $\bar{\rho}(0)$, при котором движение по кольцу будет критическим (некритическим), устойчивым (неустойчивым). Практическая польза этих условий, например для автотранспортных потоков, состоит в определении мест наблюдения за состоянием движения с целью своевременного предупреждения критических режимов.

2. Открытые системы

2.1. Открытое одностороннее ребро. Рассмотрим ребро длиной l , на которое поступает поток постоянной интенсивности q , рис. 9.

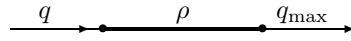


Рис. 9. Элементарный открытый участок.

Поскольку ребро, как правило в сети не является «слепым», т. е. имеет выход, то задано ограничение на интенсивность покидающего этот участок потока. Таким образом, имеем

$$l \frac{d\rho}{dt} = \Theta(\rho_{\max} - \rho) q - \min(q_{\max}, f(\rho)), \quad (12)$$

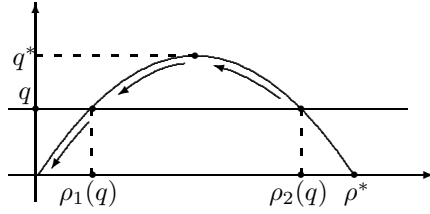
где $\Theta(\rho) = 1$, если $\rho > 0$, и $\Theta(\rho) = 0$, если $\rho \leq 0$, $f(\rho) = \lambda\rho(\rho^* - \rho)$, $0 \leq \rho \leq \rho^*$.

Ясно, что если $q > \min(q_{\max}, q^*)$, то поток критичен и

$$T_*(\rho(0)) \leq \frac{l(\rho^* - \rho)}{q - \min(q_{\max}, q^*)}, \quad (13)$$

здесь $q^* = \frac{\lambda(\rho^*)^2}{4}$ — пропускная способность ребра.

Предположим далее $q \leq \min(q_{\max}, q^*)$. Пусть сначала $q^* \leq q_{\max}$. Тогда $\min(q_{\max}, f(\rho)) = f(\rho)$, и уравнение (13) имеет вид $l \frac{d\rho}{dt} = q - f(\rho)$.

Рис. 10. $q \leq q^* \leq q_{\max}$.

Очевидно, что точка $(\rho_1(q), q)$, рис. 10, является устойчивой стационарной точкой, точка $(\rho_2(q), q)$ — неустойчивая стационарная и $\rho(0) \in (\rho_2(q), \rho^*)$ — множество критических точек. При этом

$$l \int_{\rho(0)}^{\rho^*} \frac{d\rho}{q - f(\rho)} = \int_0^{T_*(\rho(0))} dt = T_*(\rho(0)). \quad (14)$$

Рассмотрим оставшийся случай $q_{\max} < q^*$, т. е. $q < q_{\max} < q^*$.

Качественно поведение потока аналогично предыдущему случаю с учетом того, что вместо $f(\rho)$ рассматривается $\min(f(\rho), q_{\max})$, рис. 11.

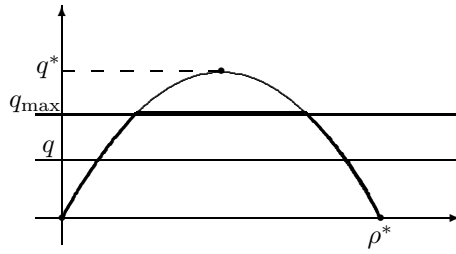


Рис. 11. $q \leq q_{\max} \leq q^*$.

2.2. Перекресток. Рассмотрим следующую модель, рис. 12.

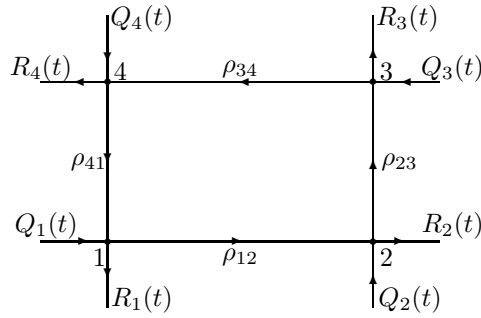


Рис. 12. Перекресток без перемешивания.

Предположим, что ребра и основные диаграммы графа одинаковы. На вход поступают потоки интенсивностью $Q_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$. В узлах 1–4 введены булевы функции управления $U_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, $U_i(t) = 0$, если открыто движение в горизонтальном направлении, и $U_i(t) = 1$ — в вертикальном, рис. 12. Задача состоит в описании методов управления, обеспечивающих не критические режимы и интенсивности выходящих потоков $R_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$.

3. Кольцо с управлением

3.1. Кольцо из двух звеньев с управлением. Другим обобщением модели кольца из двух звеньев является одностороннее движение по кольцу из двух звеньев «со светофором», рис. 13.

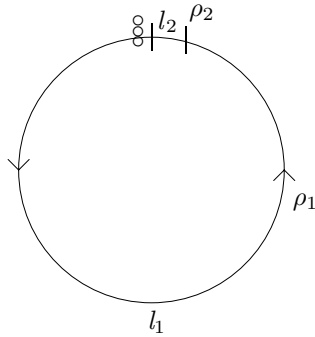


Рис. 13. Модель кольцевого движения со светофором.

Предположим, что плотности потоков $\rho_1(t)$, $\rho_2(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} l_1 \frac{d\rho_1}{dt} = f_2(\rho_2, t) - f_1(\rho_1, t), \\ l_2 \frac{d\rho_2}{dt} = f_1(\rho_1, t) - f_2(\rho_2, t), \end{cases} \quad (15)$$

где $(i = 1, 2)$

$$f_i(\rho_i) = \begin{cases} \lambda_i(t) \rho_i (\rho_{\max_i} - \rho_i), & 0 \leq \rho_i \leq \rho_{\max_i}; \\ 0, & \rho_i > \rho_{\max_i}; \end{cases}$$

и

$$\lambda_1(t) \equiv \lambda;$$

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} \lambda, & k(T_1 + T_2) \leq t < k(T_1 + T_2) + T_1, \\ 0, & k(T_1 + T_2) + T_1 \leq t < (k+1)(T_1 + T_2); \end{cases}$$

$\lambda > 0$, $T_1 > 0$, $T_2 > 0$, $k = 0, 1, \dots$. На кольце, по которому осуществляется движение, имеется светофор. Участок длиной l_2 — это участок, находящийся непосредственно перед светофором. Длительность фазы, во время которой движение на этом участке разрешено,

равна T_1 , а фаза, на которой движение запрещено, имеет длительность T_2 . По-прежнему, считаем, что выполняется условие

$$l_1\rho_1 + l_2\rho_2 = C. \quad (16)$$

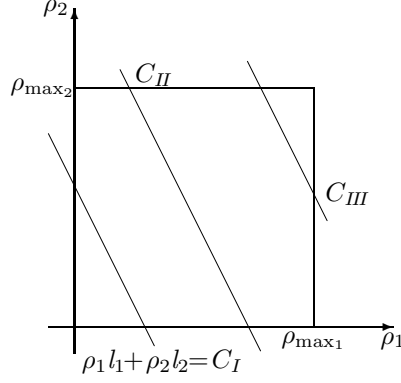


Рис. 14. Область определения ρ .

Пусть $\rho(t) = \rho_1(t)$,

$$r_{\max} = \min\left(\frac{C}{l_1}, \rho_{\max_1}\right), \quad (17)$$

$$r_{\min} = \max\left(0, \frac{1}{l_1}(C - l_2\rho_{\max_2})\right). \quad (18)$$

Система дифференциальных уравнений (15) с условием (16) сводится к дифференциальному уравнению

$$l_1 \frac{d\rho}{dt} = \begin{cases} \lambda \frac{1}{t_2}(C - l_1\rho)(\rho_{\max_2} - \frac{1}{t_2}(C - l_1\rho)) - \lambda\rho(\rho_{\max_1} - \rho), \\ r_{\min} < \rho < r_{\max}, \quad k(T_1 + T_2) \leq t < k(T_1 + T_2) + T_1; \\ -\lambda\rho(\rho_{\max_1} - \rho), \\ r_{\min} < \rho < r_{\max}, \quad k(T_1 + T_2) + T_1 \leq t < (k+1)(T_1 + T_2); \\ 0, \quad \rho \in (-\infty, r_{\min}] \cup [r_{\max}, +\infty). \end{cases} \quad (19)$$

Таким образом, если выполняются условия

$$r_{\min} < \rho < r_{\max}, \quad k(T_1 + T_2) \leq t < k(T_1 + T_2) + T_1, \quad k = 0, 1, \dots,$$

то уравнение (19) принимает вид

$$\frac{d\rho}{dt} = a_1\rho^2 - b_1\rho + c_1 := \varphi_1(\rho),$$

где

$$a_1 = \lambda l_1 \left(\frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2} \right); \quad b_1 = \lambda \left(\frac{\rho_{\max_1}}{l_1} + \frac{\rho_{\max_2}}{l_2} \right) - \frac{2\lambda C}{l_2^2};$$

$$c_1 = \frac{\lambda}{l_1 l_2} C \left(\rho_{\max_2} - \frac{C}{l_2} \right).$$

Предположим, что $l_1 \gg l_2$. Тогда $a_1 < 0$. При выполнении условий

$$r_{\min} < \rho < r_{\max}, \quad k(T_1 + T_2) + T_1 \leq t < (k+1)(T_1 + T_2), \quad k = 0, 1, \dots,$$

уравнение (19) принимает вид $\frac{d\rho}{dt} = a_2\rho^2 - b_2\rho + c_2 := \varphi_2(\rho)$, где $a_2 = \frac{\lambda}{l_1^2}$; $b_2 = \frac{\lambda\rho_{\max_1}}{l_1}$; $c_2 = 0$. Рассмотрим уравнение (19) с начальным условием

$$\rho(0) = \rho_0. \quad (20)$$

Для заданного ρ_0 назовем движение *некритическим устойчивым*, если для решения (19), (20) $\rho(t)$ при некотором $\delta > 0$ выполняется следующее условие: для любого $\rho(0) \in (\rho_0 - \delta, \rho_0 + \delta)$

$$r_{\min} < \rho(t) < r_{\max}, \quad 0 < t < +\infty,$$

и при этом существует функция $\tilde{\rho}(t)$ с периодом $T = T_1 + T_2$ такая, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\rho(t) - \tilde{\rho}(t)\|_{C[t, \infty)} = 0.$$

В противном случае движение называется *критическим*. Пусть $i = 1, 2$, $D_i = (b_i^2 - 4a_i c_i)/(4a_i^2) \geq 0$; $\hat{\rho}_1(i) = \frac{b_i}{2a_i} - \sqrt{D_i}$; $\hat{\rho}_2(i) = \frac{b_i}{2a_i} + \sqrt{D_i}$. Рассмотрим уравнение ($T = T_1 + T_2$)

$$\frac{d\rho}{dt} = \begin{cases} \varphi_1(\rho), & Tk < t < Tk + T_1, \\ \varphi_2(\rho), & Tk + T_1 < t < T(k+1) \end{cases} \quad (21)$$

при условиях (20) и

$$0 \leq r_{\min} \leq \rho \leq r_{\max} \leq \rho_{\max_1}. \quad (22)$$

Имеют место соотношения

$$\int_{\rho_0}^{\rho_{01}=\rho(T_1)} \frac{d\rho}{\varphi_1(\rho)} = \int_0^{T_1} dt = T_1 \quad (23)$$

и

$$\int_{\rho(T_1)}^{\rho_{02}=\rho(T_1+T_2)} \frac{d\rho}{\varphi_2(\rho)} = \int_{T_1}^{T_1+T_2} dt = T_2. \quad (24)$$

Если решения, задаваемые соотношениями (23), (24), не выходят на границу (22), то ($k = 1, \dots$)

$$\int_{\rho_{k-12}=\rho(Tk)}^{\rho_{k1}=\rho(T_1+Tk)} \frac{d\rho}{\varphi_1(\rho)} = \int_0^{T_1} dt = T_1 \quad (25)$$

и

$$\int_{\rho_{k1}=\rho(T_1+Tk)}^{\rho_{k2}=\rho(T(k+1))} \frac{d\rho}{\varphi_2(\rho)} = \int_{Tk+T_1}^{T(k+1)} dt = T_2. \quad (26)$$

В соответствии с рис. 14 рассмотрим

Случай 1. Пусть $C \leq l_2 \rho_{\max_2}$. Тогда $r_{\min} = 0, r_{\max} = \frac{C}{l_1}$.

Случай 2. Имеем $l_2 \rho_{\max_2} \leq C \leq l_1 \rho_{\max_1}$. Тогда

$$r_{\min} = \frac{C - l_2 \rho_{\max_2}}{l_1}, \quad r_{\max} = \frac{C}{l_1}.$$

Случай 3. $l_1 \rho_{\max_1} \leq C \leq l_1 \rho_{\max_1} + l_2 \rho_{\max_2}$. Справедливо

$$r_{\min} = \frac{C - l_2 \rho_{\max_2}}{l_1}, \quad r_{\max} = \rho_{\max_1}.$$

Предположим, что $r_{\min} < \rho(0) = \rho_0 < r_{\max}$. Опишем граничные режимы (рис. 15).

Случай 1. а) $\rho = r_{\min} = 0, 0 < \rho_2 < \rho_{\max_2}$. В этом случае $c_1 > 0$ и система в «зеленой» части цикла уходит из граничного состояния. б) $\rho = r_{\max} = C/l_1, \rho_2 = 0$, возвращается в общее положение по аналогичной причине.

Случай 2. а) $\rho = r_{\min} = (C - l_2 \rho_{\max_2})/l_1, \rho_2 = \rho_{\max_2}$. Система «замораживается» из-за стопора предсветофорного буфера, скорость оттока массы на котором равна нулю. б) $\rho = r_{\max} = C/l_1, \rho_2 = 0$, возвращается в общее положение по очевидным соображениям.

Случай 3. а) $\rho = r_{\min} = (C - l_2 \rho_{\max_2})/l_1$, $\rho_2 = \rho_{\max_2}$. Система «замораживается» из-за стопора предсветофорного буфера, скорость оттока массы на котором равна нулю. б) $\rho = r_{\max} = \rho_{\max_1}$, $\rho_2 = (C - l_1 \rho_{\max_1})/l_2$, стопор основной компоненты потока.

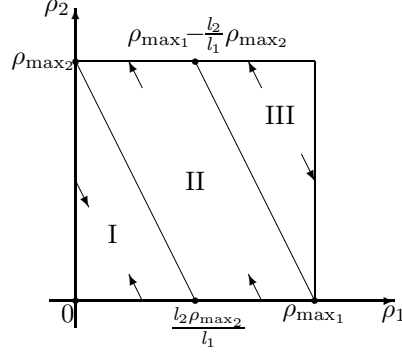


Рис. 15. Граничные режимы.

Функция

$$\varphi_1(\rho) = \lambda \left(\frac{1}{l_2} (C - l_1 \rho) \left(\rho_{\max_2} - \frac{1}{l_2} (C - l_1 \rho) \right) \right) - \lambda \rho (\rho_{\max_1} - \rho) \quad (27)$$

определена при $r_{\min} \leq \rho \leq r_{\max}$, т. е. при $0 \leq \rho_1 = \rho \leq \rho_{\max_1}$, $0 \leq \rho_2 = \frac{1}{l_2} (C - l_1 \rho) \leq \rho_{\max_2}$, рис. 14. Рассмотрим сначала случай

$$C < l_2 \rho_{\max_2} < l_1 \rho_{\max_1} \quad (28)$$

(левый нижний угол прямоугольника на рис. 15 — область I).

Лемма 3.1. 1) При любых $\rho \in [r_{\min}, r_{\max}]$ справедливо $\varphi_2(\rho) \leq 0$, причем $\varphi_2(\rho) = 0$ лишь при $\rho = 0$.

2) При любых $\rho \in [r_{\min}, r_{\max}]$ имеет место $\varphi_2(\rho) \leq \varphi_1(\rho)$, причем равенство выполняется при $\rho = C/l_1$.

3) Имеют место соотношения

$$\varphi_1(r_{\min}) = \varphi_1(0) > 0, \quad \varphi_1(r_{\max}) = \varphi_1\left(\frac{C}{l_1}\right) < 0,$$

т. е. на интервале $(r_{\min}, r_{\max})$ имеется единственный нуль функции $\varphi_1(\rho)$.

◁ Утверждения 1) и 2) леммы следуют непосредственно из определения функций $\varphi_1(\rho)$ и $\varphi_2(\rho)$. Равенство $r_{\min} = 0$ следует из (18), (28), а равенство $r_{\max} = \frac{C}{l_1}$ из (17) и (28). Подставляя $\rho = 0$ в (27), получаем

$$\varphi_1(0) = \frac{\lambda C}{l_2} \left(\rho_{\max_2} - \frac{C}{l_2} \right). \quad (29)$$

В силу (28) сомножители в правой части (29) положительны. Таким образом, $\varphi_1(r_{\min}) > 0$. Подставляя теперь в (27) $\rho = \frac{C}{l_1}$, имеем

$$\varphi_1\left(\frac{C}{l_1}\right) = -\frac{\lambda C}{l_1} \left(\rho_{\max_1} - \frac{C}{l_1} \right). \quad (30)$$

Из (28) и (30) следует, что $\varphi_1(\frac{C}{l_1}) < 0$, т. е. $\varphi_1(r_{\max}) < 0$. ▷

Теорема 3.1. Если выполняется условие (28), то движение устойчивое не критическое (рис. 16.)

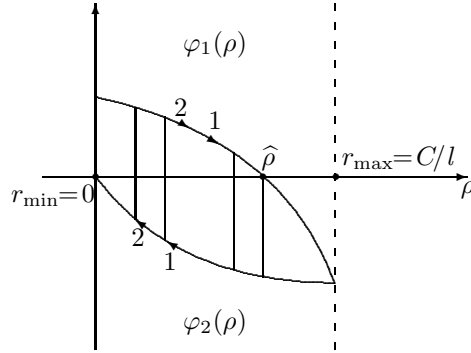


Рис. 16. Устойчивость (1).

◁ В данном случае функция $\varphi_1(\rho)$ имеет на отрезке $[r_{\min}, r_{\max}]$ единственный корень $\hat{\rho}$, рис. 16. Первая фаза «зеленого света» начинается в момент времени $t = 0$. Плотность $\rho(t)$ потока на основном участке на отрезке времени $[0, T_1]$ определяется уравнением

$$\int_{\rho_0}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\varphi_1(\rho)} = t, \quad 0 \leq t \leq T_1. \quad (31)$$

В момент времени T_1 начинается первая фаза «красного света». Плотность потока на отрезке времени $[T_1, T_1 + T_2]$ определяется уравнением

$$\int_{\rho(T_1)}^{\rho(T_1+u)} \frac{d\rho}{\varphi_2(\rho)} = u, \quad 0 \leq u \leq T_2. \quad (32)$$

Предположим, что $0 < \rho_0 < \hat{\rho}$. Так как $\varphi_1(\rho) > 0$, $0 < \rho < \hat{\rho}$, то плотность $\rho(t)$, удовлетворяющая уравнению (21), монотонно возрастает на $[0, T_1]$. Значение $\hat{\rho}$ является простым нулем функции $\varphi_1(\rho)$. Имеем $\lim_{T_1 \rightarrow +\infty} \rho(T_1) = \hat{\rho}$, т. е. при неограниченном продолжении фазы «зеленого света» плотность на основном участке стремилась бы к $\hat{\rho}$. Таким образом, уравнение (21) при любом $t \in [0, T_1]$ имеет решение $\rho(t)$, принадлежащее интервалу $(0, \hat{\rho})$. В частности, $0 < A_1 = \rho(T_1) < \hat{\rho} < r_{\max}$. Функция $\varphi_2(\rho)$ отрицательна при любом $\rho \in (r_{\min}, r_{\max})$. В момент времени T_1 производная функции $\rho(t)$ скачком меняет положительное значение на отрицательное. Функция $\rho(t)$, удовлетворяющая на отрезке времени $[T_1, T_1 + T_2]$ уравнению (21), монотонно убывает, причем при $T_2 \rightarrow \infty$ имеем $\rho(T_1 + T_2) \rightarrow 0$.

Таким образом, при любом $u \in (0, T_2)$ уравнение (21) имеет решение $\rho(u) \in (0, \hat{\rho})$. В частности, имеем $B_1 = \rho(T_1 + T_2) \in (0, \hat{\rho})$ и, следовательно, в момент времени $T_1 + T_2$, в который происходит смена фаз светофора, производная функции $\rho(t)$ меняет отрицательное значение на положительное.

Процесс изменения плотности основного потока на последующих фазах «зеленого» и «красного света» происходит аналогично тому, как происходит изменение плотности на первых фазах, с той разницей, что эти фазы начинаются при новых значениях плотности. Пусть A_k — момент окончания k -й фазы «зеленого» света; B_k — момент окончания k -й фазы «красного света». Если $B_1 > \rho_0$, то последовательности A_k , B_k монотонно возрастают и ограничены сверху. Аналогично, если $B_1 < \rho_0$, то последовательности A_k , B_k монотонно убывают и ограничены снизу. При $B_1 = \rho_0$ имеем $A_1 = \dots = A_k = \dots$; $B_1 = \dots = B_k = \dots$. Во всех случаях последовательности A_k и B_k сходятся, причем их пределы принадлежат промежутку $[0, r_{\max})$. На k -й фазе «зеленого света» решение $\rho(t)$ име-

ет вид

$$\rho(k(T_1 + T_2) + u) = \frac{b_1}{2a_1} + \sqrt{D_1} \operatorname{th} \left(\sqrt{D_1}(-a_1 u + S_k) \right),$$

где $S_k = 1/(2\sqrt{D_1}) \ln(B_k - \hat{\rho}_1(1))/(\hat{\rho}_2(1) - B_k)$. Из сходимости B_k следует сходимость S_k . Учитывая вид функции $\rho(k(T_1 + T_2) + u)$, имеем сходимость этой функции при $k \rightarrow \infty$ для любого u , $0 \leq u \leq T_1$. На k -й фазе «красного света» решение $\rho(t)$ имеет вид

$$\rho(k(T_1 + T_2) + T_1 + u) = \frac{b_2}{2a_2} + \sqrt{D_2} \operatorname{th} \left(\sqrt{D_2}(-a_2 u + P_{k+1}) \right),$$

где $P_{k+1} = a_2/b_2 \ln(A_{k+1}/(b_2/a_2 - A_{k+1}))$. Так же, как и для случая фазы «зеленого света», доказывается сходимость функции $\rho(k(T_1 + T_2) + T_1 + u)$ при $k \rightarrow \infty$ для любых u , $0 \leq u \leq T_2$. Таким образом, движение устойчивое некритическое. Предположим теперь, что $\rho_0 > \hat{\rho}$. В этом случае сначала плотность потока будет убывать как при «зеленом», так и при «красном свете». Пусть впервые после окончания некоторой фазы «красного света» плотность потока на основном участке меньше $\hat{\rho}$. Тогда далее процесс изменения плотности происходит так же, как и в случае $0 < \rho_0 < \hat{\rho}$. Таким образом, движение также устойчивое некритическое. $\triangleright$

Перейдем к рассмотрению случая, когда

$$l_2 \rho_{\max_2} < C < l_1 \rho_{\max_1} \quad (33)$$

(область II, рис. 15).

Лемма 3.2. При выполнении условия (33)

$$\varphi_1(r_{\min}) = \varphi_1 \left(\frac{1}{l_1}(C - l_2 \rho_{\max_2}) \right) < 0; \quad \varphi_1(r_{\max}) = \varphi_1 \left(\frac{C}{l_1} \right) < 0.$$

$\triangleleft$ Равенство $r_{\min} = \frac{1}{l_1}(C - l_2 \rho_{\max_2})$ следует из (18), (33), а равенство $r_{\max} = \frac{C}{l_1}$ из (17), (33). Имеем

$$\varphi_1 \left(\frac{1}{l_1}(C - l_2 \rho_{\max_2}) \right) = -\frac{\lambda}{l_1}(C - l_2 \rho_{\max_2}) \left(\rho_{\max_1} - \frac{1}{l_1}(C - l_2 \rho_{\max_2}) \right). \quad (34)$$

Сомножитель $C - l_2\rho_{\max_2}$ в правой части (34) положителен в силу (33). Положительность последнего сомножителя в правой части (34) равносильна выполнению неравенства $C < l_1\rho_{\max_1} + l_2\rho_{\max_2}$, которое выполняется при всех $\rho < \rho_{\max_1}$, $\rho_2 = \frac{1}{l_2}(C - l_1\rho) < \rho_{\max_2}$. Таким образом, $\varphi_1(r_{\min}) < 0$. Неравенство $\varphi_1(r_{\max}) < 0$ следует из (17) и (33). $\triangleright$

Лемма 3.3. Если выполняется (33) и $D_1 > 0$, то нули функции $\varphi_1(\rho)$ принадлежат интервалу $(r_{\min}, r_{\max})$, рис. 17.

$\triangleleft$ Так как в рассматриваемом случае $-\lambda\rho(\rho_{\max_1} - \rho) < 0$, то равенство $\varphi_1(\rho) = 0$ может выполняться только в случае, если первое слагаемое в правой части (27) больше нуля. Это имеет место, если входящие в это слагаемое сомножители положительны. В рассматриваемом случае сомножитель $C - l_1\rho$ положителен при $\rho < C/l_1 = r_{\max}$, а последний сомножитель при $\rho > \frac{1}{l_1}(C - l_2\rho_{\max_2}) = r_{\min}$, откуда следует утверждение леммы. $\triangleright$

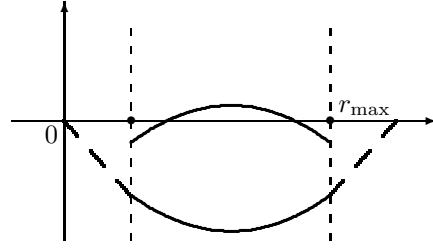


Рис. 17. Зона II ($D > 0$).

Теорема 3.2. а) Если в интервале $r_{\min} < \rho < r_{\max}$ нет корней функции $\varphi_1(\rho)$ или (при равном нулю дискриминанте) имеется только один корень, то движение критическое.

б) Если $r_{\min} < \rho_0 < \hat{\rho}_1 < \hat{\rho}_2 < r_{\max}$, где $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2$ — корни функции $\varphi_1(\rho)$, то движение критическое, рис. 17.

в) Если $r_{\min} < \hat{\rho}_1 < \rho_0 < \hat{\rho}_2 < r_{\max}$ или $r_{\min} < \hat{\rho}_1 < \hat{\rho}_2 < \rho_0 < r_{\max}$, то движение устойчивое не критическое или критическое в зависимости от значений T_1, T_2 , рис. 17.

$\triangleleft$ а): В данном случае плотность на участке перед светофором может только уменьшаться. В некоторый момент времени плотность потока на участке перед светофором принимает значение $\rho_{\max_2}$.

б): Доказывается аналогично.

в): В первом случае при «зеленом свете» плотность потока на основном участке возрастает, не достигая $\hat{\rho}_2$. При «красном свете» плотность на основном участке убывает. Движение будет, в частности, устойчивым, если после первых «зеленой» и «красной» фаз будет выполняться условие $\rho > \rho_0$. Во втором случае при выполнении условий теоремы плотность потока на основном участке сначала убывает как при «красном», так и при «зеленом» свете. Пусть после окончания одной из «красных» фаз впервые выполняется неравенство $\rho < \hat{\rho}_2$. Если при этом оказывается, что $\rho < \hat{\rho}_1$, то движение критическое. Если же после окончания этой фазы имеет место неравенство $\rho \geq \hat{\rho}_1$, то рассмотрение данного случая сводится к рассмотрению первого случая и движение будет устойчивым или критическим в зависимости от значений T_1 и T_2 .

Рассмотрим, наконец, случай, когда

$$l_2\rho_{\max_2} < l_1\rho_{\max_1} < C < l_1\rho_{\max_1} + l_2\rho_{\max_2}. \quad (36)$$

(правый верхний угол прямоугольника на рис. 15 — область III).

Лемма 3.4. *Справедливо*

$$\varphi_1(r_{\min}) = \varphi_1\left(\frac{1}{l_1}(C - l_2\rho_{\max_2})\right) < 0; \quad \varphi_1(r_{\max}) = \varphi_1(\rho_{\max_1}) > 0.$$

◁ Из (18), (36) следует, что $r_{\min} = \frac{1}{l_1}(C - l_2\rho_{\max_2})$, а из (17), (36) равенство $r_{\max} = \rho_{\max_1}$. Неравенство $\varphi_1(r_{\min}) < 0$ доказывается также, как для случая области II. Из (27) следует, что

$$\varphi_1(\rho_{\max_1}) = \frac{\lambda}{l_2}(C - l_1\rho_{\max_1})\left(\rho_{\max_2} - \frac{1}{l_2}(C - l_1\rho_{\max_1})\right). \quad (37)$$

Сомножители в правой части (37) положительны в силу (36). Таким образом, $\varphi_1(r_{\max}) > 0$. ▷

В соответствии с леммой 3.3, в интервале $(r_{\min}, r_{\max})$ имеется нуль функции $\varphi_1(\rho)$, который обозначаем через $\hat{\rho}$.

Теорема 3.3. *Пусть выполнено а) $r_{\min} < \rho_0 < \hat{\rho} < r_{\max}$ или б) $r_{\min} < \hat{\rho} < \rho_0 < r_{\max}$. Тогда движение критическое.*

◁ В случае а) плотность потока на втором участке как на «зеленой», так и на «красной» фазе, будет возрастать. В результате плотность потока на втором участке достигнет значения $\rho_{\max_2}$. В случае

б) если после первых «зеленой» и «красной» фаз плотность потока превышает $\hat{\rho}$, т. е. $\rho(T_1 + T_2) > \hat{\rho}$, то каждая новая «зеленая» фаза будет начинаться при большей плотности на первом участке. При этом, если A_k — момент окончания k -ой «зеленой» фазы ($k = 1, 2, \dots$), то $A_{k+2} - A_{k+1} > A_{k+1} - A_k$. В результате на одной из «зеленых» фаз значение плотности на первом участке достигнет значения $\rho_{\max_1}$. Если после первых «зеленой» и «красной» фаз плотность потока меньше $\hat{\rho}$, т. е. $\rho(T_1 + T_2) < \hat{\rho}$, то каждая новая «зеленая» фаза будет начинаться при меньшей плотности на первом участке. При этом, если A_k — момент окончания k -ой «зеленой» фазы ($k = 1, 2, \dots$), то $A_{k+1} - A_{k+2} > A_k - A_{k+1}$. В результате в конце одной из «зеленых» фаз значение плотности на первом участке будет меньше, чем $\hat{\rho}$. В дальнейшем плотность потока на первом участке будет только убывать, пока плотность потока на втором участке не достигнет значения $\rho_{\max_2}$. Если после первых «зеленой» и «красной» фаз будет выполняться равенство $\rho = \hat{\rho}$, то в окрестности точки ρ_0 существуют начальные значения плотности, при которых после первых «зеленой» и «красной» фаз плотность потока принимает значение, не равное $\hat{\rho}$. $\triangleright$

Литература

1. Буслаев А. П., Новиков А. В., Приходько В. М., Таташев А. Г., Яшина М. В. Вероятностные и имитационные подходы к оптимизации автодорожного движения.—М.: Мир, 2003.—368 с.
2. Buslaev A. P., Prikhodko V. M., Tatashev A. G., Yashina M. V. The deterministic-stochastic flow model. 1–21. arXiv: physics/05 04 139 v. 1. 20 Apr. 2005.
3. Buslaev A. P., Tatashev A. G., Yashina M. V. Traffic flow stochastic model (2 * 2) with discrete set of states and continuous time. (2004) <http://arXiv.org/auth/v.php> № 0405471.
4. Буслаев А. П., Таташев А. Г., Яшина М. В. О свойствах решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений на графах // Влاديавк. мат. журн.—Т. 6, вып. 4.—2004.—С. 4–18.
5. Буслаев А. П., Таташев А. Г., Яшина М. В. О потоках на графах // Abstracts of Int. conf. Extremal Problems and Approximation Dedicated to the 70th birthday of V. M. Tikhomirov. MSU, Moscow, 16–18 December 2004. P. 31–33.
6. Nicaise S. Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impulse transmission // Lecture Notes in Math., № 1171, 1985, Springer-Verlag, 532–541.
7. Покорный Ю. В., Поворотова Е. Н., Пенкин О. М. О спектре некоторых векторных краевых задач. Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений / Под ред. В. М. Матросова.—Новосибирск: Наука, 1988.

8. *Lubashevski I, Mahnke R, Wagner P, Kalenkov S.* Long-lived states in synchronized traffic flow. Empirical prompt and dynamical trap model // *Phys. Rev., E* 66, 016117 (2002).
9. *Lubashevsky I, Wagner P, Mahnke R.* Bounded rational driver models // *Eur. Phys. J.—2003.—B. 32.—P. 243–247.*
10. *Lukanin V. N., Buslaev A. P., Novikov A. V., Yashina M. V.* Traffic Flows Modelling and the Evaluation of Energy-Ecological Parameters. Part I. // *Int. J. of Vehicle Design*, 2001.
11. *Lukanin V. N., Buslaev A. P., Novikov A. V., Yashina M. V.* Traffic Flows Modelling and the Evaluation of Energy-Ecological Parameters. Part II. // *Int. J. of Vehicle Design*, 2001.

Москва, Московский автомобильно-дорожный институт (ГТУ)
E-mail: busl@math.madi.ru

КОГЕРЕНТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ
АТТРАКТОРОВ ДВУМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. Н. Думачев, В. А. Родин

1. Введение

Математическое описание биологических проблем динамики популяций основано на использовании понятия дискретного отображения [1]:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Одной из первых моделей динамики численности вида является модель Ферхюльста — Пирла

$$x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n). \quad (1)$$

Это отображение было введено в 1845 г. для описания эволюции популяции в среде с ограниченным запасом пищи; x_n — значение относительной численности в дискретный момент времени. Ради исторической справедливости стоит отметить, что идея такого рода описания динамики популяций принадлежит Томасу Мальтусу (1766–1834), который для этого использовал выражение $x_{n+1} = R x_n$, где R — параметр, определяющий условия жизни популяции.

Динамика одномерных отображений в настоящее время представлена в многочисленных работах и широко изучена (см., например, [2–4]). Стандартной моделью для описания дискретной динамики в настоящее время считается логистическое отображение

$$y_{n+1} = 1 - \lambda y_n^2, \quad (2)$$

которое эквивалентно (1). Действительно, замена переменных $x = \frac{y+1/2}{\alpha/4+1/2}$ позволяет перейти от (1) к (2) с коэффициентом $\lambda = \alpha(\alpha/4 - 1/2)$.

Интересной особенностью уравнения (1) является появление бифуркации удвоения периода итерационного цикла при $\alpha > 3$. Итерационная последовательность сходится не к одному корню (как при

$\alpha < 3$), а к двум, образуя между ними устойчивый предельный цикл $S = 2^1$. Поскольку, любая итерационная последовательность (начинающаяся как внутри, так и снаружи цикла) притягивается к нему со всех сторон, то такой предельный цикл называется аттрактором (от англ. attract — притягивать). Увеличение параметра α приводит к появлению циклов $S = 2^2, 2^3, \dots, 2^k$. Шарковским в работе [5] было показано существование циклов $S = 3^1, 3^2, \dots, 3^k$ и циклов с любым натуральным основанием $S = N$.

В монографии [6] главы 4–7 посвящены изучению динамики численности конкурирующих видов. Однако общая теория рассматриваемая там, также как и частные случаи, относится к уравнениям другого вида $x_{n+1} = x_n f(x_n, y_n)$, а функция $xf(x, 0)$ связанная с «запасами» должна быть монотонно возрастающей). Динамика численности популяции с признаками каннибализма описывается системой, в которой второе уравнение имеет принципиально другой вид [6, с. 21]. Отметим также работу [7], в которой рассматривались вопросы самоуничтожения одного вида.

Наиболее близкими по тематике к настоящей работе по мнению авторов являются классические работы С. П. Кузнецова [8, 9]. Где изучается трикритическая динамика логистического отображения под периодическим воздействием.

Расширяя модель на случай двух взаимодействующих популяций, рассмотрим систему итерационных уравнений

$$\begin{cases} y_{n+1} = \alpha x_n (1 - x_n), \\ x_{n+1} = \beta y_{n+1} (1 - y_{n+1}). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь x_n — численность одного вида, а y_n — другого в n -ом году. Пусть относительная численность в $n + 1$ году популяции y_{n+1} зависит от численности x_n в n -ом году ($0 \leq x_n, y_n \leq 1$). В свою очередь x_{n+1} зависит от y_{n+1} . Параболы в правой части каждого из уравнений имеют максимум в точке $1/2$, который равен $\alpha/4$ или $\beta/4$ соответственно. Поэтому, в силу нормировки численности, управляющие параметры удовлетворяют неравенствам $0 \leq \alpha, \beta \leq 4$. Поскольку численность вида регулируется исключительно враждующей популяцией — такое взаимодействие мы называем антагонистическим.

2. Управление числом решений системы (3)

Исследование задачи значительно облегчается, если заметить, что разностная система (3) по существу, является простой итерационной схемой отыскания корней системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} y = \alpha x (1 - x), \\ x = \beta y (1 - y) \end{cases} \quad (4)$$

с решением

$$x_1 = 0, \quad x_3 = \frac{2}{3} + \frac{A(-1 + i\sqrt{3})}{12\beta\alpha} - \frac{(\alpha - 3)\beta(1 + i\sqrt{3})}{3A},$$

$$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{A}{6\beta\alpha} + \frac{2(\alpha - 3)\beta}{3A},$$

$$x_4 = \frac{2}{3} - \frac{A(1 + i\sqrt{3})}{12\beta\alpha} + \frac{(\alpha - 3)\beta(-1 + i\sqrt{3})}{3A},$$

где

$$A = \sqrt[3]{(36\alpha\beta - 8\alpha^2\beta - 108 + 12\sqrt{g})\alpha\beta^2},$$

$$g(\alpha, \beta) = 81 - 54\alpha\beta + 12\alpha\beta^2 - 3\alpha^2\beta^2 + 12\alpha^2\beta. \quad (5)$$

Точку $(\bar{x}, \bar{y}) \in [0, 1]^2$, как обычно, будем называть стационарной или точкой положения равновесия, если она удовлетворяет системе (4). В этом пункте мы определим зоны изменения параметров $(\alpha, \beta) \in [0, 4]^2$ точно гарантирующие определенное количество стационарных точек. В зависимости от значений α и β данная система будет иметь от 1 до 4-х вещественных корней. Рассмотрим подробнее вопросы аналитического построения границ областей существования корней системы (4).

Точка $(0, 0)$ — есть положение равновесия. Записывая (4) в виде одного уравнения $x = F(x)$, где

$$F(x) = \alpha\beta x - \alpha\beta(1 + \alpha)x^2 + 2\alpha^2\beta x^3 - \alpha^2\beta x^4, \quad (6)$$

согласно теореме Банаха, получим условие локальной устойчивости этой точки в виде $|F'(0)| < 1$ или $\alpha\beta < 1$. Это неравенство определяет зону существования одного корня $x_1 = 0$ системы (4) и автоматически дает границу области для появления второго корня системы (рис. 1). Если $\alpha\beta = 1$, то $x_1 = 0$ имеет кратность 2, $F'(0) = 1$

и на всей границе $\alpha\beta = 1$ нуль теряет устойчивость. Устойчивым в области двух корней является корень x_2 . Условие положительности выражения (5) под знаком радикала $g \geq 0$, также определяет границу области существования одновременно 3-х или 4-х корней системы.

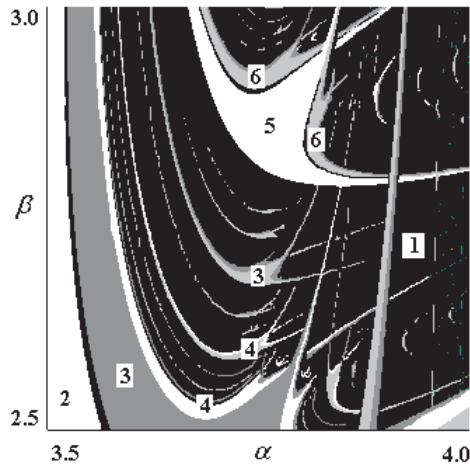


Рис. 1. Области существования корней и карта динамического режима системы (1). 1 — области переброса между циклами и развития динамического хаоса; 2 — область, где появляются циклы $S = 2^1$; 3 — область, где появляются циклы $S = 2^2$; 4 — область, где появляются циклы $S = 2^3$ и более; 5 — область, где появляются циклы $S = 3^1$; 6 — область, где появляются циклы $S = 3^2$ и более.

Для случая $\alpha = \beta$ функция (6) имеет вид

$$F_1(x) = \alpha^2 x(1-x)[1 - \alpha x(1-x)],$$

и является второй итерацией отображения Ферхюльста — Пирла. Эволюция этой функции при увеличении $\alpha \in [0, 4]$, корни уравнения $x = F_1(x)$ и поведение итераций с возникновением циклов хорошо известна (см., например, [1]). Для проверки согласования построения карты динамических режимов в общем случае мы приводим следующие факты. Для $0 \leq \alpha \leq 1$ уравнение $x = F_1(x)$ имеет один нулевой корень $x_1 = 0$, для $1 < \alpha < 3$ нулевой неустойчивый и устойчивый

корень $x_2 = 1 - \frac{1}{\alpha}$, а при $\alpha > 3$ — еще два корня

$$x_{3,4} = \frac{1}{2} + \frac{1 \mp \sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)}}{2\alpha}. \quad (7)$$

До значения $\alpha = 1 + \sqrt{5}$ обе точки (5) устойчивы, при переходе через это значение устойчивость теряется и за бифуркационным значением $1 + \sqrt{6}$ возникает цикл с периодом 2.

Ради полноты изложения покажем, как вычисляется этот результат. Появление цикла характеризуется таким значением параметра $\alpha > 3$, при котором выполняется равенство $F'_1(x_4) = -1$. Так как угловой коэффициент биссектрисы первого координатного угла равен 1, то касательная к F_1 в точке x_4 ортогональна биссектрисе и возникает цикл. Равенство $F'_1(x_4) = -1$ эквивалентно уравнению $\alpha^2(1-2x)(1-2y) = -1$. Вследствие симметрии задачи на диагонали последнее выражение можно переписать в виде $\alpha^2(1-2x)(1-2\bar{x}) = -1$, где x и $\bar{x}$ — сопряженные корни, определяемые выражением (7). В результате получим $\alpha^2 - 2\alpha - 5 = 0$, положительный корень которого равен $1 + \sqrt{6}$.

В области $3 < \alpha, \beta < 1 + \sqrt{6}$ система (4) имеет 4 различных корня, из которых два центральных неустойчивы, а два остальных устойчивы. Область $\alpha > 1 + \sqrt{6}$ является областью образования аттракторов. В зависимости от начальных условий аттракторы могут возникать вокруг любой из двух точек пересечения, расположенных по разную сторону от диагонали.

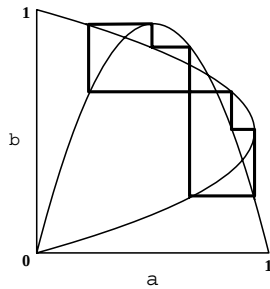


Рис. 2. Пределный цикл $S = 5^1$, образованный когерентным взаимодействием аттракторов.

При увеличении параметров α и β на итерационных диаграммах (или диаграммах Ламерея [8]) будут наблюдаться классические эффекты каскадного размножения корней, усложнения формы аттракторов и развитие динамического хаоса. Особо необходимо подчеркнуть, что данные эффекты проявляются при одновременном увеличении размеров самих аттракторов.

Наиболее сложные явления возникают при таких значениях пара-

метров α и β . Можно утверждать, что при значениях $\alpha, \beta \geq 3.678$ в рассматриваемой системе появляется еще один путь образования динамического хаоса, причиной которого является перекрытие аттракторов. Ширина их увеличивается настолько, что бесконечно повторяющаяся итерационная последовательность (перебрасываясь из зоны действия одного аттрактора в зону действия другого) может принимать практически любые значения, пытаясь равномерно заполнить все пространство состояний. Отметим, что даже в этом случае, возможно такое когерентное взаимодействие аттракторов, которое приводит к существованию простых предельных циклов:

$$S = 3^1 \text{ при } \alpha = \beta = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83187,$$

$$S = 5^1 \text{ при } \alpha = \beta = 3.7389 \text{ (рис. 2.)},$$

$$S = 7^1 \text{ при } \alpha = \beta = 3.702 \text{ и т. д.}$$

На бифуркационных диаграммах такие циклы соответствуют окнам Шарковского. Очевидно, что данные конфигурации тоже допускают свой каскад бифуркаций в полном соответствии с общей теорией дифференцируемых отображений.

3. Заключение

В работе для системы (3) проведен анализ двупараметрической критичности с присущей данной системе структурой пространства параметров вблизи линий критических точек.

Определены области изменения управляющих параметров, гарантирующие реализацию определенной эволюционной ситуации: зоны устойчивых решений, зоны появления бифуркации и циклов, зоны хаоса и неопределенности. Построена полная трехмерная бифуркционная диаграмма двумерного отображения Ферхюльста — Пирла. Сечение полученной диаграммы при $\alpha = \beta$ совпадает с соответствующей одномерной моделью.

Проведен ренормгрупповой анализ системы, показана ее связь с системой логистических уравнений и возможность использования классических результатов к приближенным расчетам критических параметров двумерной модели Ферхюльста — Пирла.

Построение диаграмм Ламерея в виде двух ортогональных парабол позволило привлечь соображения симметрии для получения

новых результатов. Показано, что в данной модели, наряду с классическим переходом к хаосу через субгармонический каскад, существует еще один путь, связанный с процессами переброса итерационной последовательности между аттракторами. Рассчитана константа, определяющая границу возникновения перебрсов в диагональном случае $\alpha = \beta$. При этом получаемые конфигурации также допускают свой каскад бифуркаций Фейгенбаума — Шарковского, в которых окнам бифуркационного дерева соответствует когерентное взаимодействие аттракторов. Сравнивая эволюцию полученной системы с динамикой непрерывных гамильтоновых систем можно провести аналогию между «диффузией Арнольда» (возникновением процессов переброса между стохастическими слоями фазового пространства) и перекрытием аттракторов. Оба эти явления приводят к такой развитой стохастичности движения, которая начинает обладать свойствами «эргодичности», т. е. для любой динамической переменной системы ее среднее по времени сравнивается со средним по совокупности (по фазовому объему).

Литература

1. Компьютеры и нелинейные явления.—М.: Наука, 1988.—214 с.
2. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений.—М.: МЦНМО, 2004.—672 с.
3. Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В. Динамика одномерных отображений.—Киев: Наукова думка, 1989.—216 с.
4. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики.—М.: УРСС, 2000.—336 с.
5. Шарковский А. Н. Существование циклов непрерывного отображения прямой в себя // УМЖ.—1964.—Т. 16, № 1.—С. 61–71.
6. Скалецкая Е. И., Фрисман Е. Я., Шапиро А. П. Дискретные модели динамики численности популяций и оптимизация промысла.—М.: Наука, 1979.—64 с.
7. Шапиро А. П. Об устойчивости популяции каннибалов // Мат. моделирование популяционных экологических процессов.—Владивосток, 1987.—С. 106–112.
8. Кузнецов С. П. Динамика двух однонаправлено-связанных систем Фейгенбаума у порога гиперхаоса. Ренормгрупповой анализ // Изв. вузов. Радиофизика.—1990.—Т. 33, № 7.—С. 788–792.
9. Кузнецов С. П. Динамический хаос.—М.: Физматлит, 2001.—296 с.

Воронеж, Воронежский институт МВД России
E-mail: rodin_v@mail.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ НАЛОГООБЛОЖЕНИЕ
И ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАЛЬНОЙ СИТУАЦИИ УХОДА В
«ТЕНЕВУЮ ЭКОНОМИКУ» ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФИРМЫ

В. С. Жданов, В. А. Родин

В работе рассматривается экономико-математическая модель деятельности производственной фирмы. Изучается объективная возможность получить максимально большую сумму налога путем выбора оптимальных с точки зрения налоговых органов ставок налогов. Задача решается для двух видов налогов: 1) налог на прибыль, 2) акцизный налог. В работе также определяется критическое значение ставки налога, при котором объем производства реально уменьшается на столько, что фирма или перестает работать или вынуждена уйти в теневую экономику. Исследования данной работы находятся в русле принципа «соразмерности» в теории налогообложения — когда интересы государства и налогоплательщиков сбалансированы.

Начало процессу налогообложения положили классики экономической теории (Нейман, Солоу, Аткинсон и др. [1]). Современные исследования интересующего нас в этой работе направления отражены в монографии [2]. В работе [3] отмечено, что экономико-математические категории налогообложения грубы для передачи всех тонкостей налогообложения. Можно сказать и по-другому, налогообложение настолько излишне детализировано, содержит много исключений и по этим причинам трудно ожидать полного адекватного отражения действительности при экономико-математическом моделировании. При этом естественно возможно моделирование с целью первого прогноза, для определения момента изменения политики налогообложения. В настоящей работе приводится принципиальная модель деятельности производственной фирмы. За основу всех исследований мы берем утверждения и задачи работы Малыгина В. И. Но в отличие от указанной работы все утверждения подробно доказываются, а иллюстративные примеры приведены с подробными решениями. Эта работа выполнена в таком стиле для того, чтобы служить определенной моделью для подобных исследований над конкретной фирмой в рамках действий налоговых органов.

В рамках равновесия фирмы, когда размеры фирмы оптимальны, возникают дополнительные условия, связывающие компоненты ее деятельности. В этих рамках задача налоговых органов — оптимизация налоговой ставки с целью сбора наибольшей суммы налогов, математически выглядит как определение условного экстремума для некоторой векторнозначной функции. Эта задача в данной работе для построенной модели решена. Кроме того, изучается возможность для определения критического уровня ставки налога, при превышении которого объем производства в данной фирме реально уменьшается на столько, что фирма или перестает работать или вынуждена будет уйти в теневую экономику. Конкретное, математическое подтверждение данных процессов — важная информация для дальнейших действий налоговой инспекции по проверке условий деятельности любой конкретно изучаемой фирмы. Работа имеет практическую направленность, что подтверждается конкретными примерами, приведенными в конце работы. Примеры взяты из [3], мы даем их подробное решение и графическую иллюстрацию с той целью, что для конкретной проверяемой фирмы предварительные исследования с целью максимизировать суммы собираемых налогов без существенных затруднений для дальнейшей деятельности фирмы, могут быть проведены по схеме данной работы.

1. Принципиальная модель деятельности фирмы

В этом пункте, следуя работе [4], но более подробно, дадим описание модели деятельности фирмы. Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — производственная функция, которая связывает вектор используемых производственной фирмой ресурсов $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ с вектором выпускаемой продукции $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Тогда $y_i = f_i(\mathbf{x})$ — это (i -ая) координата вектор-функции $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Пусть $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ вектор цен на все виды продукции данной фирмы. Пусть $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ вектор цен на ресурсы, живой труд, содержание единицы фондов и т. д. Прибыль фирмы есть сумма прибылей от реализации каждого вида продукции минус затраты на его производство. Обозначим ее

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{y}) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}), \quad (1)$$

где символом $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ обозначается скалярное произведение двух векторов. Выражение (1) — это выручка минус затраты. Будем считать,

что $n = m$, в общем случае можно вместо недостающих координат добавить нули. Рассмотрим функцию $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ как функцию n переменных. Условие неподвижности, или стационарная точка находится из векторного уравнения для производной $\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x})) - \mathbf{p}$. Точка в которой выполняется это равенство, определяет условие состояния равновесия фирмы (см., например, [3]). Равновесие состоит в том, что в зависимости от цен на продукцию, цен на сырье и вид производственной функции для фирмы можно определить оптимальный размер выпускаемой продукции. Как правило, достаточно долго функционирующие фирмы приходят со временем в состояние равновесия. Это равенство перепишем в виде $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x})) = \mathbf{p}$. Заметим, что производная $\mathbf{f}'(x)$, это вектор частных производных $\{\partial_1 \mathbf{f}, \partial_2 \mathbf{f}, \dots, \partial_n \mathbf{f}\}$. Последнее, векторное равенство можно переписать как систему n уравнений:

$$w_i \partial_j f_i = p_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

2. Налог на прибыль

Выпуск продукции оценивается в денежном выражении. Прибыль равна: $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$. Это скалярная функция векторного аргумента. Здесь при ставке налога t ($0 < t < 1$), сумма налога равна: $t \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})$. При фиксированной ставке равновесие не меняется (см. [3]) и математическая постановка задачи, оптимального с точки зрения налоговых органов, сбора налогов имеет вид:

$$\begin{aligned} t \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) &\rightarrow \max, \\ (\mathbf{w} \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x})) &= \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (3)$$

Это условный экстремум функции нескольких переменных. Для упрощения математического обоснования эффектов возникающих при введении налогов различного вида в этой работе рассмотрим случай, когда фирма выпускает один вид продукции. Это значит, что цена w — число. Этот способ описания работы фирмы называется скалярным и, как отмечено в работе [3], он легче поддается исследованиям в теоретическом плане. Вид задачи (3) позволяет сде-

Утверждение 1. При фиксированной ставке налога на прибыль условие равновесия не меняется, оно скажется только на величине доходов и не изменит оптимальную структуру фирмы.

Действительно, доход фирмы после введения налога будет равен $\mathbf{I}(\mathbf{x}) = (1 - t)\mathbf{F}(\mathbf{x})$ и при фиксированном t производная $\mathbf{I}'(\mathbf{x}) = (1 - t)\mathbf{F}'(\mathbf{x})$. Поэтому условия $\mathbf{I}'(\mathbf{x}) = 0$ и $\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = 0$ эквивалентны. Задача (3) равносильна задаче

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &\rightarrow \max, \\ (\mathbf{w} \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x})) &= \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (4)$$

Следствие 1. Утверждение 1 нужно учитывать в работе налоговых органов, так как максимизация налоговой суммы при данном виде налогообложения не зависит от величины ставки налога на прямую. Важно при исследовании фирмы определить — оптимален ли ее «размер». А затем с оптимального состава можно, как показывает теория, собрать оптимальный налог. Как ни странно на этом этапе задачи фирмы и инспекторов совпадают и состоят в определении оптимального «размера» фирмы. Произвольное увеличение налога может привести к изменению политики фирмы связанной с выплатами и инвестициями и даже заставить ее «уйти в тень». А нежелание руководителей фирмы улучшать «размеры» фирмы можно расценивать как косвенное уклонение от полной уплаты налогов и возможно внести рассмотрение этого вопроса для изменения юридического законодательства по налогообложению.

Вектор, определяющий «оптимальные параметры» фирмы будем обозначать $\mathbf{x}^*$. Тогда максимально возможная сумма налога равна

$$\Sigma_1 = t \times [(\mathbf{w} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^*)]. \quad (5)$$

Размер ставки t в данном случае определяется местной стратегией развития бизнеса.

3. Акцизный налог

Рассмотрим сначала общий случай, когда фирма выпускает несколько видов продукции. Акцизный налог, это налог, который взимается с каждой проданной единицы товара и он имеет денежное

выражение, а выпуск продукции исчисляется в натуральной форме. Величина налога равна скалярному произведению вектора $\mathbf{t}$, характеризующего налог, на производственную вектор-функцию $(\mathbf{t} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}))$. Состояние равновесия фирмы после введения налога описывается векторным уравнением $((\mathbf{w} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x})) = \mathbf{p}$. Математическая постановка задачи, оптимального с точки зрения налоговых органов, сбора налогов имеет вид:

$$\begin{aligned} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})) &\rightarrow \max, \\ ((\mathbf{w} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x})) &= \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (6)$$

Это задача определения условного экстремума функции n переменных с n условиями. Определение экстремума в общем случае сложная задача. Далее в работе мы рассмотрим случай, когда фирма выпускает один вид товара (это может быть и суммарная прибыль от всех товаров) и один скалярный налог t . Производственная функция чаще всего это прибыль, выраженная в денежном выражении, поэтому $w = 1$. В этом случае справедливо

Утверждение 2. Векторная задача (6) имеет решение и для его нахождения нужно решить задачу вида:

$$\begin{aligned} t \cdot f(\mathbf{x}) &\rightarrow \max, \\ (1 - t) \cdot f'(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть $\mathbf{x}^0 = \{x_1^0, \dots, x_N^0\}$ — вектор решения оптимальной задачи, а t^0 — оптимальный размер налога. Тогда максимально возможная сумма налога равна

$$\Sigma_2 = t^0 \cdot f(\mathbf{x}^0). \quad (8)$$

Действительно доход фирмы после введения налога равен $I(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) - t \cdot f(\mathbf{x})$. Необходимое условие существования стационарной (равновесной) точки равенство нулю всех частных производных. Имеем

$$\partial_i I = (1 - t) \partial_i f - \partial_i (p_k x_k) = (1 - t) \partial_i f - p_i = 0,$$

для всех индексов, получаем (7).

Следствие 2. Утверждение 2 нужно учитывать в работе налоговых органов, так как максимизация налоговой суммы при данном виде налогообложения на прямую зависит от величины ставки налога. Важно при исследовании фирмы определить — оптимален ли ее «размер» с данной ставкой налога. Необходимо также выяснить не приведет ли увеличение ставки к критическому (убыточному) размеру дохода. Увеличение налога может привести к изменению политики фирмы, связанной с выплатами и инвестициями, и даже заставить ее «уйти в тень». А нежелание руководителей фирмы «улучшать размеры фирмы» и использовать оптимальную ставку акцизного налога можно расценивать как косвенное уклонение от полной уплаты налогов и возможно рекомендовать вынесение на рассмотрение этого вопроса для изменения юридического законодательства по налогообложению.

Вектор, определяющий «оптимальные параметры» фирмы будем обозначать $\mathbf{x}^*$, а оптимальную ставку акцизного налога — t^* . Тогда максимально возможная сумма налога равна

$$\Sigma_1 = t \cdot [f(\mathbf{x}^*) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^*)]. \quad (9)$$

4. Математическое описание особенностей налогообложения

В этом пункте, следуя работе [3], более подробно выясним причину некоторых явлений обусловленных моделью и полностью совпадающих с практически наблюдаемыми процессами. В общем случае, после введения налога доход фирмы уменьшится и станет равным $I(\mathbf{x}) = ((\mathbf{w} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$. Рассмотрим один из видов товара, выпускаемых фирмой, k -ый вид. В векторном условии равновесие $\partial_k I = 0$, имеет вид

$$(w_i - t_i) \partial_k f_i = p_k. \quad (10)$$

Вектор функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ возрастающая выпуклая вверх по каждой координате, поэтому производная $\partial_k f_i$ есть убывающая функция. Первый сомножитель в (10) стал меньше после введения налога $w_k - t_k < w_k$, следовательно, для сохранения равновесия второй сомножитель в (10) — производная $\partial_k f_i$ должен стать больше, или его

нужно брать для меньших x_k . Итак, математически обосновано известное удручающее («антинародное») свойство действия акцизного налога — на конкурентном рынке он уменьшает объем производства.

5. Решение задачи налоговых органов методом множителей Лагранжа

Рассмотрим вспомогательный вектор $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, координаты которого будут множителями Лагранжа в наших решениях задач (4) и (7).

Для решения задачи (4) составим вектор-функцию Лагранжа:

$$L_1(\mathbf{x}, \lambda) = w_i f_i(\mathbf{x}) + \lambda_k (p_k - w_i \partial_k f_i(\mathbf{x})). \quad (11)$$

Для решения задачи (7) составим вектор-функцию Лагранжа:

$$L_2(\mathbf{x}, \lambda, t) = t f(\mathbf{x}) + \lambda_k (p_k - (1 - t) \partial_k f(\mathbf{x})). \quad (12)$$

Сравнение задач (11) и (12) показывает, что это разные задачи. Для практического решения этих задач и построения графиков, имеющих значение для аудиторских инспекций, перепишем векторные уравнения в координатной форме в виде систем:

$$\begin{cases} \partial_m L_1 = w_k \partial_m f_k + \lambda_k (p_k - w_i \partial_{mk}^2 f_i) = 0, \\ \partial_{\lambda_i} L_1 = p_i - w_k \partial_i f_k = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Для задачи (12) координатная форма записи содержит еще производную по времени

$$\begin{cases} \partial_m L_2 = t \partial_m f + \lambda_k (p_k - (1 - t) \partial_{mk}^2 f) = 0, \\ \partial_{\lambda_i} L_2 = p_i - (1 - t) \partial_i f = 0, \\ \partial_t L_2 = f + \lambda_i \partial_i f = 0. \end{cases} \quad (14)$$

6. Примеры решения задач

В заключение приведем примеры с решением задач для налоговых органов по максимальному сбору налогов. Эти примеры без решений и ответов приведены в [3].

Задача 1. Частное автотранспортное предприятие по оказанию услуг населению имеет ежедневную выручку, которая выражается формулой Кобба — Дугласа следующего вида $Z = 900\sqrt{X}\sqrt[4]{Y}$. Здесь X — число автомашин, Y — число обслуживающих рабочих. Амортизационные и другие ежедневные расходы на одну машину равны 400 руб. Ежедневная зарплата рабочего 200 руб. Найти оптимальную численность рабочих и автомашин и при налоге на прибыль 20%, определить какой налог на прибыль должен платить бизнесмен при оптимальной структуре фирмы. Определить также акцизный налог и сравнить налоги.

Решение. А) Налог на прибыль. Воспользуемся формулами (13). Имеем $f(x, y) = 900x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}$, $F(x, y) = 900x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} - 400x - 200y$, частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 450x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 450^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}.$$

Поэтому функция Лагранжа имеет вид

$$L_1(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 900x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + \lambda_1 \left(400 - 450x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} \right) + \\ + \lambda_2 \left(200 - 225x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}} \right).$$

Вычисляя по формулам (13) получаем, что $x = y \approx 1.6$. Так как нас интересуют целые значения этих переменных, то полагаем, что оптимальные размеры фирмы должны состоять из двух машин и двух рабочих. При этом максимальный доход фирмы будет равен $F(2, 2) \approx 314$ рублей в день.

А налоговые органы могут получить максимально $20\% \times F(6, 4) \approx 63$ рубля в день с этой фирмы при налогообложении на доход.

Заметим, что, изменяя оптимальный состав фирмы в момент налогообложения, бизнесмен может избегать уплаты максимальной суммы налога, а затем восстановить оптимальную численность и получать максимальный доход без соответствующего налогообложения.

Вывод: Если находиться в рамках налога на прибыль, то в законодательство по аудиту за фирмами следует внести пункт об обязательной проверке оптимального состава фирмы на момент аудиторской инспекции.

Б) Акцизный налог. Функция Лагранжа имеет вид

$$L_2(x, y, \lambda_1, \lambda_2, t) = 900tx^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + \lambda_1 \left(400 - (1-t)450x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} \right) + \\ + \lambda_2 \left(200 - (1-t)225x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}} \right).$$

Вычисляя по формулам (14) в программной среде «MathCad» получаем, что оптимальная ставка равна $t^0 = 0.25$. Однако при этой ставке, как легко вычислить, число рабочих мест сокращается до одного и машин — до одной, а прибыль, равная 75 руб., меньше, чем налог в день, который равен 150 руб. После введения такого налога фирма или исчезает или «прячется в тень».

Вывод: Если находиться в рамках акцизного налога, то в законодательство по аудиту за фирмами следует внести пункт об обязательной проверке посильности оптимального налога, ввести закон о невозможности снижения числа рабочих мест, вызванном неправильным налогообложением.

Литература

1. Аткинсон Э., Стиглиц Дж. Лекции по экономической теории государственного сектора / Пер. с англ.—М.: Аспект-Пресс, 1995.
2. Ечмаков С. М. Теневая экономика: анализ и моделирование.—М.: «Финансы и статистика», 2004.
3. Малыгин В. И. Экономико-математическое моделирование налогообложения. Уч. пособие.—М.: ИКФ «Каталог», 2003.—90 с.
4. Колемаев В. А. Математическая экономика.—М.: Юнити, 2002.

Воронеж, Воронежский институт МВД России
E-mail: rodin_v@mail.ru

МОДЕЛИ АЭРОДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ
НАД СЛОЖНОЙ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Е. С. Каменецкий

Введение

В случае неоднородно нагретой сложной подстилающей поверхности, покрытой растительностью и застройкой, для определения значений скорости ветра, позволяющих с удовлетворительной точностью описать распространение загрязняющих веществ, необходимо решать трехмерные нестационарные уравнения Рейнольдса.

Система уравнений Рейнольдса, описывающая гидротермодинамические процессы в атмосфере, согласно В. В. Пененко и А. Е. Алояну [1] имеет вид:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\rho u \frac{\partial u}{\partial x} - \rho v \frac{\partial u}{\partial y} - \rho w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} + f v + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\rho u \frac{\partial v}{\partial x} - \rho v \frac{\partial v}{\partial y} - \rho w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} - f u + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\rho u \frac{\partial w}{\partial x} - \rho v \frac{\partial w}{\partial y} - \rho w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x} - \frac{\partial \rho v}{\partial y} - \frac{\partial \rho w}{\partial z}, \quad (4)$$

$$p = \rho R T, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -u \frac{\partial \theta}{\partial x} - v \frac{\partial \theta}{\partial y} - w \frac{\partial \theta}{\partial z} + Q_e + Q_r + \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -u \frac{\partial q}{\partial x} - v \frac{\partial q}{\partial y} - w \frac{\partial q}{\partial z} - M + \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_3}{\partial z}. \quad (7)$$

Здесь t — время, x, y, z — координаты, u, v, w — соответствующие проекции скорости ветра, ρ — плотность воздуха, p — давление, f — параметр Кориолиса, τ_{ij} — компоненты тензора напряжения трения, g — ускорение свободного падения, R — газовая постоянная воздуха, θ — потенциальная температура, Q_e — выделение или поглощение

тепла при фазовых переходах, Q_r — радиационный нагрев, H_j — проекции вектора теплового потока, q — концентрация водяного пара, M — скорость конденсации водяного пара, Π_j — проекции вектора потока диффузии водяного пара.

В проекциях уравнения количества движения (1)–(3), уравнениях неразрывности (4), притока тепла (6) и удельной влажности (7) первые члены в правой части описывают конвективный перенос соответствующей величины. Последние члены в этих уравнениях, за исключением уравнения неразрывности, учитывают перенос за счет турбулентных пульсаций. В проекциях уравнения количества движения есть также члены, описывающие влияние сил давления, Кориолиса и тяжести. В уравнении притока тепла учитывается выделение или поглощение тепла при конденсации водяного пара или испарении капель воды и радиационный нагрев или охлаждение. Иногда в систему уравнений включают также уравнение для концентрации жидкой фазы воды.

Решение такой системы уравнений требует наличия очень мощных ЭВМ и, даже на них, время и, соответственно, стоимость решения при более или менее удовлетворительном пространственном разрешении велика. Поэтому в уравнения вносятся разнообразные упрощения. Оценить их допустимость в каждом конкретном случае достаточно сложно. Можно попытаться проанализировать наиболее типичные ситуации.

Чаще всего, при моделировании течений в атмосфере используется приближение пограничного слоя, т. е. не учитывается горизонтальный перенос импульса, энергии и пассивных примесей турбулентной диффузией, а давление принимается не зависящим от высоты, и его влияние выражается через скорость геострофического ветра. Геострофическим ветром называется ветер, возникающий в случае, когда основными силами, действующими в атмосфере, являются силы давления и Кориолиса. Тогда, при градиенте давления, направленном вдоль оси x , и в предположении, что вектор угловой скорости вращения Земли направлен вертикально, скорость геострофического ветра определяется по формуле

$$v_g = \frac{1}{2\rho\Omega \sin \phi} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (8)$$

где Ω — угловая скорость вращения Земли, ϕ — широта.

Для пренебрежения горизонтальной диффузией необходимо, чтобы ν/uh , т. е. величина, обратная числу Рейнольдса, была мала. По оценкам Д. Л. Лайхтмана [2] и Л. Н. Гутмана [3] это условие удовлетворяется уже при толщине пограничного слоя $h > 100$ м, т. е. практически всегда. Однако в случае возникновения отрывных и циркуляционных течений, когда вертикальная составляющая скорости ветра соизмерима с горизонтальной, использовать приближение пограничного слоя нельзя. Если известно, что поток в некоторой области имеет характерное направление, пренебрегать горизонтальным диффузионным переносом перпендикулярным к этому направлению также нельзя. Поскольку атмосферное давление уменьшается с высотой, для пренебрежения этим уменьшением толщина рассматриваемого слоя атмосферы h должна быть не слишком велика $gh/p \ll 1$, т. е. $h < 500$. В противном случае надо использовать гидростатическое приближение, т. е. считать, что давление меняется только с высотой и скорость его изменения зависит только от температуры. В случае же существенного изменения модуля или направления скорости ветра в рассматриваемой области и гидростатическое приближение становится неверным.

Учет влияния стратификации атмосферы, т. е. изменения плотности воздуха с высотой под влиянием отличий вертикального градиента температуры от адиабатического, как правило, осуществляется в приближении Буссинеска. При этом воздух считается несжимаемым, но в уравнении количества движения учитываются силы плавучести. В выражении для этих сил изменение плотности воздуха представляется как результат локального нагрева или охлаждения. Отметим, что адиабатическим градиентом температуры называется такой градиент, при котором подъем некоторой массы воздуха происходит без теплообмена с окружающей атмосферой. В зависимости от концентрации водяного пара в атмосфере этот градиент может быть различным. Поэтому различают сухо- и влажноадиабатический градиенты. Согласно Й. Джалурия [4] это приближение может использоваться, если локальные отклонения температуры много меньше чем ее среднее значение и высота рассматриваемой области $h \ll RT/g$. Первое условие выполняется практически всегда, а второе — для высот порядка нескольких сот метров. Для того, чтобы не учитывать сжимаемость воздуха, необходимо также чтобы скорость ветра U была много меньше скорости звука, что наблюдает-

ся в подавляющем большинстве случаев. Силой Кориолиса можно пренебрегать, если размеры рассматриваемой области сравнительно невелики: $L \ll U/f$, что выполняется если эти размеры не превышают примерно десяти километров. Допущение о стационарности требует, чтобы характерное время процессов было достаточно велико $t \gg L/U$. Радиационный нагрев воздуха пренебрежимо мал практически во всех случаях. За счет радиации могут нагреваться капельки воды, находящиеся в воздухе, что необходимо учитывать, если в модель включены уравнения для концентрации жидкой фазы воды.

Задание граничных условий зависит в основном от имеющейся исходной информации, а в случае ее отсутствия может осуществляться путем решения упрощенных или преобразованных уравнений. Часто на боковых границах расчетной области или на части этих границ и верхней границе задают так называемые мягкие граничные условия, т. е. равенство нулю первых или вторых производных от неизвестных величин. Если шаги разностной сетки вблизи поверхности земли велики, целесообразно использовать пристеночные функции. Но в случае сложных потоков, когда нельзя считать поток зависящим только от высоты на высотах порядка двух шагов сетки, такой подход может привести к существенным ошибкам.

Начальные условия, которые надо задавать при решении нестационарных задач или итерационном решении стационарных, обычно задаются на основании наблюдений или произвольно. В последнем случае следует иметь в виду, что при неудачном задании начальных условий время, необходимое для получения удовлетворительных результатов может быть достаточно велико, а, иногда, решение может оказаться неустойчивым. Если граничные условия на нескольких границах накладываются на производные, то вполне возможно получение разных решений при разных начальных условиях. Если же на всех границах заданы функции, столь сильное влияние начальных условий гораздо менее вероятно.

1. Трехмерные модели

Рассмотрим модели, с помощью которых исследовались процессы, происходящие в атмосфере горных и предгорных районов. Одна

из наиболее полных моделей использовалась в работе [5]. В ней проекции уравнения количества движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = f(v - v_g) + g \frac{\overline{H} - z^*}{\overline{H}} \left(1 - \frac{\theta_{va}}{\theta_v} \right) \frac{\partial z_g}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\overline{H}}{H - z_g} \frac{\partial}{\partial z^*} (-\langle u'v' \rangle), \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = -f(u - u_g) + g \frac{\overline{H} - z^*}{\overline{H}} \left(1 - \frac{\theta_{va}}{\theta_v} \right) \frac{\partial z_g}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\overline{H}}{H - z_g} \frac{\partial}{\partial z^*} (-\langle v'w' \rangle), \quad (10) \end{aligned}$$

где D_{ij} — компоненты тензора коэффициентов диффузии, u', v', w' — пульсационные составляющие скорости ветра, $\langle \rangle$ — осреднение по времени, θ_v — виртуальная потенциальная температура, т. е. потенциальная температура сухого воздуха с теми же самыми давлением и плотностью, θ_{va} — виртуальная потенциальная температура, осредненная по горизонтальной поверхности. При решении этих уравнений расчетная область имеет вид параллелепипеда, что достигается за счет преобразования вертикальной координаты

$$z^* = \overline{H} \frac{z - z_g}{H - z_g}, \quad (11)$$

здесь $\overline{H}$ — верхняя граница расчетной области в преобразованных координатах, H — та же граница в исходных координатах, z_g — высота поверхности земли над уровнем моря.

Уравнение неразрывности в этой работе имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \frac{1}{H - z_g} \left(u \frac{\partial z_g}{\partial x} + v \frac{\partial z_g}{\partial y} \right) = 0. \quad (12)$$

Вертикальная составляющая скорости ветра в преобразованных координатах записывается как

$$w^* = \frac{\overline{H}}{H - z_g} w + \frac{z^* - \overline{H}}{H - z_g} \left(u \frac{\partial z_g}{\partial x} + v \frac{\partial z_g}{\partial y} \right). \quad (13)$$

Уравнения для потенциальной температуры и концентрации водяного пара записаны без учета конвективного переноса, что может привести к существенным ошибкам, если условия в атмосфере далеки от штилевых

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\overline{H}}{H - z_g} \left[\frac{\partial}{\partial z^*} (-\langle w' \theta' \rangle) + \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial R_N}{\partial z^*} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

здесь R_N — тепловой поток за счет длинноволновой радиации, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial q}{\partial y} \right) + \frac{\overline{H}}{H - z_g} \frac{\partial}{\partial z^*} (-\langle w' q' \rangle). \quad (15)$$

Возможная конденсация паров воды не учитывается.

Аналогичные уравнения используются и в работе [6]. Уравнения, не учитывающие влияния влажности, для описания течения воздуха над холмами решались в работе [7]. М. Beniston, J. P. Wolf, M. Beniston-Rebetez, H. J. Kolsch, P. Rairoux, L. Woste [8] и М. Beniston [9] не учитывают силы плавучести и горизонтальную турбулентную диффузию, а давление рассчитывают в гидростатическом приближении

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[c_p \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \right] = -\frac{g}{\theta}, \quad (16)$$

где p_0 — характерное значение давления.

В уравнении неразрывности они учитывают зависимость плотности от вертикальной координаты

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} = 0, \quad (17)$$

что приводит к необходимости использования в качестве замыкающего соотношения уравнения состояния

$$P = \rho R T. \quad (18)$$

Аналогичные уравнения, но в предположении, что воздух является несжимаемой жидкостью, применяются в работах [10] и [11]. Уравнения без учета сил плавучести и сил Кориолиса использовались в работе [12]. Пренебрежение силами Кориолиса не приводит к существенным ошибкам, если рассматриваемая область имеет характерный размер порядка нескольких километров. J. Svoboda [13] выписывает уравнения, в которых, помимо скорости ветра, неизвестными являются отклонения давления и потенциальной температуры от невозмущенных значений, а плотность воздуха считается постоянной. Невозмущенное давление не зависит от высоты над поверхностью земли, а невозмущенная потенциальная температура — от горизонтальных координат. Для уточнения значений давления используется гидростатическое приближение.

Adrian G. и Fiedler F. [14] разделяют давление и потенциальную температуру воздуха на базовые значения, определяемые в синоптическом масштабе, и возмущения, связанные с мезомасштабными особенностями рельефа.

В работах [1, 15, 16] все переменные разделяются на фоновые величины и возмущения. Возмущение давления рассчитывается в гидростатическом приближении с учетом влияния влажности. В уравнении для возмущения потенциальной температуры $\delta\theta$ помимо конвекции и диффузии учитываются радиационный нагрев, влияние фазовых переходов и неоднородность фонового поля температуры

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_0 + \delta\vec{v})\delta\theta + S \cdot \delta w = -\delta u \left(S \frac{\partial z_g}{\partial x} + \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \right) - \\ - \delta v \left(S \frac{\partial z_g}{\partial y} + \frac{\partial \theta_0}{\partial y} \right) + \frac{L_w}{c_p} M + Q_r + \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z}, \end{aligned} \quad (19)$$

где S — параметр температурной стратификации, L_w — скрытая теплота конденсации. В этом уравнении величины с δ представляют собой отклонения от фоновых значений соответствующих величин.

Аналогичное уравнение используется и для определения удельной влажности.

Примерно такие же уравнения с постоянными коэффициентами горизонтального турбулентного обмена рассматривались в работе Г. И. Марчука [17].

Подобная система уравнений, но без гидростатического приближения и с учетом искусственных источников импульса, тепла и влаги применяется в работе А. А. Бакланова [16].

Н. N. Lee, W. S. Kaw [18] рассматривали полную скорость ветра как сумму скоростей воздуха в пограничном слое над сложной подстилающей поверхностью и ветра склонов, который вызывается нагретой или охлажденной по отношению к окружающему воздуху поверхностью земли. Таким образом учитывалось как динамическое так и термическое воздействие подстилающей поверхности, но без их взаимодействия. Уравнения пограничного слоя записывались в виде

$$u_B \frac{\partial u_B}{\partial x} + v_B \frac{\partial u_B}{\partial y} + w_B \frac{\partial u_B}{\partial z} = f(v_B - v_y) + D \frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2}, \quad (20)$$

$$u_B \frac{\partial v_B}{\partial x} + v_B \frac{\partial v_B}{\partial y} + w_B \frac{\partial v_B}{\partial z} = -f(u_B - u_y) + D \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2}, \quad (21)$$

$$w_B = u_B \frac{\partial z_y}{\partial x} + v_B \frac{\partial z_y}{\partial y}. \quad (22)$$

Для определения ветра склонов V_B использовалось аналитическое решение Прандтля:

$$V_B = \delta_0 N / \left[\left(-\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \exp(-\xi) \sin(\xi) \right], \quad (23)$$

где $\xi = (n - z_0)/l$, $l = \sqrt{2D/N \sin \beta}$, β — уклон, D — коэффициент диффузии,

$$N = \sqrt{-\frac{g \frac{\partial \theta}{\partial z}}{(\theta_h - \theta_0)/2 + \delta_0 \exp(-\xi) \cos \xi}}, \quad \delta_0 = (\theta_0 - \theta_h)/2.$$

Здесь n — расстояние по нормали к обтекаемой поверхности, z_0 — высота слоя шероховатости, θ_h и θ_0 — потенциальная температура на уровне геострофического ветра и на поверхности земли соответственно.

Подобные уравнения, но без учета составляющей, обусловленной ветром склонов и с определением вертикальной компоненты скорости ветра из уравнения неразрывности, применялись в работе [19] для определения вертикального движения над крупномасштабными

препятствиями. В ней авторы предполагали, что течение вне пограничного слоя может рассматриваться как потенциальное и стационарное.

Существенно упростить процесс получения решения можно линеаризовав уравнения пограничного слоя для приземной области, т. е. предположив, что возмущения, вносимые в поток воздуха неровной подстилающей поверхностью, достаточно малы для того, чтобы пренебречь произведениями и квадратами этих возмущений. Отметим, что при малости возмущений производные от них также будут малыми. Линеаризованный вариант уравнений пограничного слоя для приземной области предложили D. J. Carruthers, J. C. R. Hunt, R. J. Holroyd [20]

$$u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \quad (24)$$

$$u_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (26)$$

причем

$$\tau_{xz} = 2u_* z \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \tau_{yz} = 2u_* z \frac{\partial v}{\partial z},$$

где u_0 — скорость ветра над горизонтальной поверхностью при отсутствии возмущений, $u_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ — скорость трения, τ_w — напряжение трения на обтекаемой поверхности, u и w — возмущения соответствующих проекций скорости ветра, а координата z отсчитывается от поверхности земли. Над приземным слоем вводится еще два, причем предполагается, что в этих слоях возмущения вносятся только в вертикальную составляющую скорости ветра. Они определяются из следующих уравнений

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{u_0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \cdot w = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left(\frac{N^2}{u_0^2} - \frac{1}{u_0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \right) w = 0, \quad (28)$$

где $N = \sqrt{g(\gamma_0 - \frac{\partial T}{\partial z})/T_0}$ — частота плавучести или частота Брента — Вейселя, γ_0 — градиент температуры в невозмущенной атмосфере.

Первое из них получается из уравнений (24) и (26), если отбросить силы трения и учесть, что давление не меняется по вертикали. Второе получается из линеаризованного уравнения для завихренности в предположении, что на достаточно большой высоте над препятствиями течение можно считать происходящим в плоскости, образованной вектором скорости невозмущенного ветра и вертикальной осью, и, таким образом, от нуля отличается только проекция этого уравнения на нормаль к этой плоскости. Эта проекция имеет вид

$$u_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + w \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - u_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{g}{T_0} \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (29)$$

который с учетом уравнения неразрывности и преобразования

$$\frac{g}{T_0} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{g}{T_0} \frac{w}{u_0} \left(\frac{\partial T}{\partial z} - \gamma_0 \right) = -\frac{w}{u_0} N^2 \quad (30)$$

приводится к уравнению (28).

В работе [21] горизонтальные составляющие скорости ветра определяются по эмпирическим степенным формулам

$$V = V_0 \left(\frac{z - z_g}{z_1} \right)^n, \quad (31)$$

в которых величина коэффициента V_0 зависит от значения скорости ветра на входе в расчетную область и рельефа, характерная высота z_1 — от рельефа, а показатель степени n — от стратификации и наличия застройки или растительности. Часто для определения горизонтальных составляющих скорости ветра используются результаты наблюдений в ограниченном числе точек [22, 23, 24]. Вертикальная составляющая скорости ветра определяется с учетом сохранения массы воздуха и возможной блокировки нижних слоев атмосферы горами в случае устойчивой стратификации.

2. Двумерные модели, не рассматривающие изменение метеозаэлементов с высотой

Поскольку решение трехмерных уравнений требует наличия мощных ЭВМ и не позволяет получать высокое пространственное разрешение из-за увеличения времени счета, в ряде работ для анализа процессов в атмосфере при наличии гор или холмов использовались двумерные уравнения гидротермодинамики. При этом уравнения осреднялись либо по высоте, либо по одной из пространственных координат, направленной вдоль горного хребта или гряды холмов.

Модели, в которых определялись только горизонтальные компоненты скорости ветра без учета их изменения с высотой, использовали А. А. Костриков [25], Г. В. Мостовой [26, 27] и Р. Alpert, В. Getenio [28]. В работе Г. В. Мостового [26] уравнения движения, записанные в сигма-координатах, для уровня подстилающей поверхности имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial z_g}{\partial x} - \\ - g T_g \left[\frac{1}{T_g} \frac{\partial z_g}{\partial y} - \frac{1}{T_\sigma} \frac{\partial z_\sigma}{\partial x} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{T_g}{T_\sigma} \right) \right] - F_x, \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial z_g}{\partial y} - \\ - g T_g \left[\frac{1}{T_g} \frac{\partial z_g}{\partial y} - \frac{1}{T_\sigma} \frac{\partial z_\sigma}{\partial x} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \frac{T_g}{T_\sigma} \right) \right] - F_y, \quad (33) \end{aligned}$$

где $\vec{F}$ — сила приземного трения, индекс σ относится к уровню с определенным давлением, индекс g — к величинам на поверхности земли, γ — вертикальный градиент температуры.

Отметим, что в сигма-системе координат в качестве вертикальной координаты используется отношение давления к приземному давлению. Такая система координат удобна в случае, если применимо гидростатическое приближение. Переход к координате сигма позволяет получить прямоугольную расчетную область, но затрудняет постановку граничных условий.

Если принимается простейшее предположение о линейном изменении температуры с высотой, то из уравнения гидростатики получается следующее выражение для x -компоненты силы горизонтального барического градиента

$$-\frac{\partial}{\partial x} \ln P_g = \frac{g}{R(1-\sigma)} \left[\frac{1}{T_g} \frac{\partial z_g}{\partial x} - \frac{1}{T_\sigma} \frac{\partial z_\sigma}{\partial x} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{T_g}{T_\sigma} \right]. \quad (34)$$

Аналогичное выражение получается и для y -компоненты. Более сложные выражения для членов, учитывающих влияние сил плавучести, получаются в предположении о логарифмической зависимости температуры от высоты вблизи поверхности земли и различных градиентах температуры на малых и больших высотах. Неудобство при использовании таких моделей связано с необходимостью задавать форму поверхности, на которой давление равно заданной величине.

В этих моделях дополнительно решается уравнение для определения температуры вблизи поверхности земли

$$\frac{\partial T_g}{\partial t} = -\vec{v} \vec{\nabla} T_g - \frac{A_2}{A_1} \vec{v} \vec{\nabla} T_H - \frac{A_3}{A_1} \vec{v} \vec{\nabla} T_\sigma + \frac{Q}{A_1 c_p} + \frac{D_T}{A_1} \nabla^2 T_g, \quad (35)$$

где Q — поток энергии излучения. Днем это в основном падающее на землю длинноволновое излучение, а ночью — коротковолновое излучение земли. Изменение этого потока в дневное время происходит приблизительно по синусоидальному закону, а ночью его можно считать постоянным. A_1, A_2, A_3 — коэффициенты, зависящие от температуры на поверхности земли и на уровне с заданным давлением, индекс H относится к высоте слоя топографического влияния.

В модели, которую предложил А. А. Костриков [25], не учитывается неоднородность температуры поверхности земли, но рассчитывается толщина слоя топографического влияния. Выше этого слоя предполагается существование фонового потока, скорость которого задается. Уравнения в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} H) = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\mu \vec{\nabla}(H + z_g) - f(\vec{v} - \vec{v}_g) -$$

$$- \frac{d \vec{v}_0}{dt} - \frac{c_D}{H} \sqrt{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right), \quad (37)$$

где $\mu = g \cdot \delta T / T$, δT — перепад температуры между слоем топографического влияния и вышележащим слоем атмосферы, c_D — коэффициент трения, v_0 — фоновое значение скорости. Коэффициент вязкости принимается пропорциональным модулю градиента завихренности и зависящим от пространственного разрешения конечно-разностной сетки

$$D = k |\vec{\nabla} \vec{\omega}| (\delta x \cdot \delta y)^{3/2}, \quad (38)$$

где δx и δy — шаги сетки вдоль соответствующих осей координат, k — постоянный коэффициент. Рост коэффициента вязкости при увеличении шагов сетки является попыткой учета влияния переноса импульса мелкомасштабными потоками, которые исключаются из решения при данном пространственном разрешении.

3. Двумерные модели, не рассматривающие изменение метеоэлементов вдоль одной из горизонтальных координат

Модели, в которых не учитывается изменение гидротермодинамических величин вдоль одной из горизонтальных координат, более многочисленны. Несмотря на то, что с их помощью можно получить удовлетворительные результаты только для анализа обтекания горных хребтов или гряд холмов, они позволяют понять ряд закономерностей течения при наличии сложной подстилающей поверхности. Модели такого типа часто используются и при анализе ветра склонов. Л. Н. Гутман [3] предложил нестационарный вариант двумерных уравнений, в котором давление определяется в гидростатическом приближении, а силы плавучести учитываются в приближении Буссинеска. В уравнениях не учитывается сила Кориолиса и турбулентный перенос импульса и тепла вдоль направления ветра.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \lambda \delta \theta \sin \alpha, \quad (39)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \lambda \delta \theta \sin \beta, \quad (40)$$

$$\frac{\partial \delta \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \delta \theta}{\partial z} + S u \sin \alpha = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \delta \theta}{\partial z} \right), \quad (41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (42)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial z} = \lambda \delta \theta \cos \alpha \cos \beta, \quad (43)$$

где α, β — углы между горизонтальной плоскостью и осями x, y соответственно. Эта система уравнений записана в криволинейных координатах. Ось x направлена вдоль линии рельефа (т. е. по касательной к поверхности в данном сечении), y — перпендикулярно плоскости сечения, а z — по нормали к поверхности земли вверх. При этом предполагается, что угол α почти постоянен. Величина $\delta \theta$ представляет собой возмущение потенциальной температуры, т. е. отличие ее от фоновых значений.

Аналогичная модель без учета y -компоненты скорости ветра, но включающая дополнительные члены, описывающие влияние изменения давления и перенос импульса и энергии вдоль направления ветра, использовалась в работе Б. Н. Ахмедова [29]. В этой работе вводилась переменная $\eta = z - z_g$, что позволило избавиться от криволинейных координат, но привело к появлению дополнительных членов в уравнениях

$$\frac{d u}{d t} = -\frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial z_g}{\partial x} \frac{\partial \pi}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d w}{d t} + \frac{\partial z_g}{\partial x} u^2 = & - \left(1 - \left(\frac{\partial z_g}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{\partial z_g}{\partial x} \frac{\partial \pi}{\partial x} + \\ & + \lambda \theta + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (46)$$

$$\frac{d \theta}{d t} + S w + S \frac{\partial z_g}{\partial x} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right). \quad (47)$$

Вместо давления в уравнениях используется функция

$$\pi = \frac{c_p \theta_0}{\rho} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{AR}{c_p}}. \quad (48)$$

Стационарный вариант уравнений без гидростатического приближения и с учетом нормальных напряжений, порождаемых турбулентностью, но без влияния сил плавучести использовал Е. Донеv [30]. Аналогичные уравнения применяли W. S. Weng, K. J. Richards, D. J. Caruthers [31] для расчета волн, возникающих при обтекании холмов. В этой работе ось x принималась горизонтальной, а вертикальная координата преобразовывалась дважды. После первого преобразования постоянное значение этой координаты примерно соответствует линиям тока, а второе — логарифмическое позволяет подробнее описать течение вблизи поверхности земли. При описании перетекания воздуха через Аппалачские горы С. Huang, S. Raman [32] учитывали влияние водяного пара и капель воды, а также силу Кориолиса, поскольку размеры расчетной области были велики. Давление определялось в гидростатическом приближении, а в проекции уравнения количества движения на ось, параллельную хребту, учитывалось введением скорости геострофического ветра, направленной поперек горного хребта. В уравнение энергии включалось влияние испарения и конденсации, а также радиационного охлаждения или нагрева. Вертикальная координата в уравнениях записывалась в виде

$$\sigma = \frac{z - z_g}{H - z_g}. \quad (49)$$

В систему уравнений включалось и уравнение для компоненты скорости ветра, направленной вдоль хребта

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & -u \frac{\partial u}{\partial x} - w^* \frac{\partial u}{\partial \sigma} + fv - \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} - g(1 - \sigma) \frac{\partial z_g}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{H - z_g} \frac{\partial}{\partial \sigma} \langle -u'v' \rangle, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = & -u \frac{\partial v}{\partial x} - w^* \frac{\partial v}{\partial \sigma} - fu + fu_g + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{H - z_g} \frac{\partial}{\partial \sigma} \langle -v'w' \rangle, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} = & -u \frac{\partial \theta}{\partial x} - w^* \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{1}{H - z_g} \frac{\partial}{\partial \sigma} \langle -w'\theta' \rangle + Q_c + Q_{RAD} + Q_{EV}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} = & -u \frac{\partial q}{\partial x} - w^* \frac{\partial q}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{1}{H - z_g} \frac{\partial}{\partial \sigma} \langle -w'q' \rangle - M_c + M_E, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_L}{\partial t} = & -u \frac{\partial q_L}{\partial x} - w^* \frac{\partial q_L}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial q_L}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{1}{H - z_g} \frac{\partial}{\partial \sigma} \langle -w'q'_L \rangle - \frac{1}{\rho(H - z_g)} \frac{\partial \rho w_p q_L}{\partial \sigma} + M_c - M_E, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = -\frac{g(H - z_g)}{\theta_0}, \quad (55)$$

$$\frac{\partial \rho u(H - z_g)}{\partial x} + \frac{\partial \rho w^*(H - z_g)}{\partial \sigma} = 0. \quad (56)$$

Здесь

$$W = W^*(H - z_g) - (\sigma - 1)u \frac{\partial z_g}{\partial x}, \quad (57)$$

где Q_c — скорость выделения тепла при конденсации водяного пара, Q_{EV} — скорость поглощения тепла при испарении водяного пара, Q_{RAD} — радиационный нагрев или охлаждение, q_L — концентрация жидкой воды, M_c — скорость конденсации водяного пара, M_E — скорость испарения капель воды. Функция π отличается от функции (48) отсутствием множителя и знаком. Подобные уравнения без

учета горизонтальной диффузии, водяного пара и капель воды и с разделением давления на фоновое, синоптическое, обусловленное крупномасштабными процессами в атмосфере, характерный размер которых много больше, чем характерный размер задачи, и возмущения, связанные с локальной топографией и неоднородным нагревом поверхности земли, использовались для расчетов аэродинамики горного ущелья [33]. Фоновое давление учитывалось заданием скорости геострофического ветра, а возмущение определялось из решения уравнения Пуассона

$$\begin{aligned}
& \Theta \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} + \left(\frac{x}{s - z_g} \right)^2 \Theta \frac{\partial^2 \pi}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\eta - s}{s - z_g} \frac{\partial z_g}{\partial x} \Theta \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial \eta} + \\
& + \frac{s}{s - z_g} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{s - z_g}{s} \Theta \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta - s}{s} \frac{\partial z_g}{\partial x} \Theta \right) \right] \frac{\partial \pi}{\partial x} + \\
& + \frac{s}{s - z_g} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta - s}{s} \frac{\partial z_g}{\partial x} \Theta \right) + \frac{s}{s - z_g} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right] \frac{\partial \pi}{\partial \eta} = \quad (58) \\
& = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 \langle u' u' \rangle}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \langle w' w' \rangle}{\partial \eta^2} - \\
& - 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \langle u' w' \rangle + f \frac{\partial v}{\partial x} - f \frac{\partial z_g}{\partial x} \frac{s - \eta}{s - z_g} \frac{\partial v}{\partial \eta},
\end{aligned}$$

в котором вертикальная координата преобразована по формуле (11), с заменой z^* на η и H на s .

D. C. Bader, T. B. McKee, G. J. Tripoli [34] принимают во внимание силы плавучести в приближении Буссинеска и считают воздух сжимаемой жидкостью, но не учитывают силы Кориолиса, наличия в атмосфере водяного пара и капель жидкости и радиационного нагрева или охлаждения. Уравнение для определения поля давления записывается ими в виде

$$\frac{\partial \langle \pi \rangle}{\partial t} + \frac{R \pi_0}{c_v \rho_0 \theta_0} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 \theta_0 \langle u_j \rangle) = 0. \quad (59)$$

Индекс 0 соответствует невозмущенному потоку, координаты не преобразовывались.

Аналогичные уравнения с учетом силы Кориолиса и гидростатическим приближением для давления решал Т. П. Давиташвили [35].

М. Е. Берлянд, Т. Л. Генихович, И. Г. Грачева, В. Б. Киселев, Л. Т. Хуршудян [36] использовали уравнения, описывающие потенциальное обтекание рельефа, т. е. не учитывали трение и полагали ротор скорости равным нулю. В этом случае можно ввести потенциал скорости и определять проекции скорости как градиент этого потенциала. Уравнение неразрывности приводится к уравнению Лапласа и его решение описывает поле течения вне пограничного слоя. Затем полученные результаты применялись для постановки граничных условий при решении уравнений пограничного слоя в криволинейных координатах, направленных вдоль линий тока и линий постоянного потенциала. Влияние стратификации атмосферы в этой модели не учитывалось. Для того, чтобы не решать уравнение для определения давления, Беляев Н. Н., Клименко И. В. и Хрущ В. Н. [37] решали уравнения в переменных вихрь — функция тока.

Отметим также модель, которую предложили N. S. Sivakumaran, R. F. Dressler [38] для описания течения холодного воздуха над горами. В этой модели предполагается, что плотность холодного воздуха превышает плотность выпележащих слоев на одну и ту же величину во всех точках, и определяются касательная скорость ветра вблизи поверхности земли и толщина холодного слоя

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{u_0}{(1 - kN)^2} \frac{\partial u_0}{\partial s} + \left[\varepsilon g \cos \alpha + \frac{ku_0^2}{(1 - kN)^3} \right] \frac{\partial N}{\partial s} - \\ & - \left[\varepsilon g k \sin \alpha - \frac{k'u_0^2}{(1 - kN)^3} \right] N + \varepsilon g \sin \alpha = - \left(\lambda_\tau + \frac{\lambda_l}{1 - kN} \right) \frac{u_0^2}{N}, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{u_0}{(1 - kN)^2} \frac{\partial N}{\partial s} - \frac{\ln(1 - kN)}{(1 - kN)k} \frac{\partial u_0}{\partial s} + \\ & + \left[\frac{kN}{(1 - kN)^2} + \frac{\ln(1 - kN)}{1 - kN} \right] \frac{k'}{k^2} u_0 = 0, \end{aligned} \quad (61)$$

где ε — относительное превышение плотности нижнего слоя атмосферы над плотностью выпележающего слоя, λ_τ , λ_l — коэффициенты трения на поверхности земли и на верхней границе холодного слоя соответственно, k — кривизна поверхности, s — расстояние, измеряемое вдоль поверхности.

Эта модель описывает течения в атмосфере в ночных условиях, когда температура поверхности земли ниже, чем атмосферы из-за радиационного охлаждения, что и ведет к образованию холодного слоя воздуха вблизи поверхности.

J. C. Doran, T. W. Horst, C. D. Whiteman [39] для расчета течений на склонах ущельев использовали уравнения для несжимаемой жидкости, силы плавучести учитывали в приближении Буссинеска и пренебрегали турбулентным переносом импульса и энергии вдоль потока, а также изменением давления по высоте ущелья

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial W}{\partial n} = 0, \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & -u \frac{\partial u}{\partial s} - W \frac{\partial u}{\partial n} - g \frac{\theta'}{\theta_0} \sin \beta + \\ & + \frac{\partial}{\partial n} \left(K_m \frac{\partial u}{\partial n} \right) + \frac{g}{\theta_0} \cos \beta \frac{\partial}{\partial s} \int_n^h \theta' dn, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -u \frac{\partial \theta}{\partial s} - w \frac{\partial \theta}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n} \left(K_h \frac{\partial \theta}{\partial n} \right). \quad (64)$$

Здесь θ' — отклонение потенциальной температуры от наблюдаемой на той же высоте в центре ущелья (θ_0), h — толщина слоя, в котором потенциальная температура отличается от наблюдаемой в центре ущелья, β — угол наклона стенок ущелья. Составляющая скорости ветра, направленная вдоль ущелья, принимается в этой работе зависящей только от турбулентного трения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial n} \left(K_m \frac{\partial v}{\partial n} \right). \quad (65)$$

Аналогичные уравнения для исследования течений на склонах решал Е. Е. Федорович [40].

Иногда течение в центральной части ущелья рассматривается в двумерном приближении с осреднением по ширине, а восходящие или нисходящие потоки на склонах — в одномерном приближении, т. е. предполагается, что изменение скорости ветра и температуры происходит только по нормали к стенкам ущелья [41]. Толщина слоя, в котором наблюдается восходящий или нисходящий поток, меняется

с высотой. Обмен массой, импульсом и энергией между потоками на стенках и ядром течения задавался эмпирическими соотношениями.

Для исследования основных закономерностей аэродинамики ущелий, заканчивающихся горными долинами, использовались упрощенные уравнения сохранения массы, количества движения и энергии, что позволило получить аналитические решения [42]. Рассматривая баланс массы, энергии и импульса воздуха в контрольных объемах U. Schumann [43] вывел систему алгебраических уравнений, описывающих движение воздуха над горами в свободноконвективном режиме. В. А. Шнайдман, О. Б. Наседкина [44] для определения горизонтальных составляющих скорости ветра над холмистой поверхностью решали одномерные уравнения пограничного слоя, а вертикальную скорость определяли из выражения

$$w = u \frac{\partial z_g}{\partial x} + v \frac{\partial z_g}{\partial y}. \quad (66)$$

4. Граничные условия

Следует отметить важность корректной постановки начальных и граничных условий. Рассмотрим какие условия использовались при исследованиях аэротермодинамики атмосферы в горах и предгорьях. Начальные условия почти всегда задаются по результатам наблюдений с интерполяцией между точками, в которых производятся наблюдения. Реже используют результаты расчетов по упрощенным уравнениям, например, одномерным в двух- или трехмерных моделях. Иногда принимают неизвестные величины в начальный момент равными нулю. В тех случаях, когда объем наблюдений недостаточен или они не используются при постановке начальных условий, считают, что картина течения становится достаточно достоверной после того, как прошло определенное время с начала расчетов. Грубо оценить это время можно как отношение характерного размера области к характерной скорости ветра.

Как правило, уравнения, описанные выше, решаются для определения метеовеличин на высотах больших, чем 50 метров. На меньших высотах обычно используют эмпирические функции. Чаще всего эти функции имеют вид [45]

$$\frac{\kappa h}{u_* \cos \alpha} \frac{\partial u}{\partial z} = \varphi_u(\xi), \quad (67)$$

$$\frac{\kappa h}{u_* \sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial z} = \varphi_v(\xi), \quad (68)$$

$$\frac{\kappa h}{\theta_*} \text{dif} \theta . z = \varphi_\theta(\xi), \quad (69)$$

$$\varphi_v = (1 - 15\xi)^{-1/4} \quad \text{при } \xi < 0,$$

$$\varphi_u = (1 + 4,7\xi) \quad \text{при } \xi > 0,$$

$$\varphi_\theta = 0,74(1 - 9\xi)^{-1/2} \quad \text{при } \xi < 0,$$

$$\varphi_\theta = 0,74 + 4,7\xi \quad \text{при } \xi > 0,$$

где $\theta'_* = \langle w'T' \rangle / u_*$, $\langle w'T' \rangle$ — вертикальный поток тепла в приземном слое атмосферы, $\xi = h/L$, $L = -\frac{\langle T \rangle}{g} \frac{u_*^3}{\langle w'T' \rangle \kappa}$ — масштаб Монина — Обухова. Выражение для концентрации водяного пара аналогично выражению для потенциальной температуры, но в нем вместо потока тепла используется соответствующий поток влаги.

Реже используют расчетные области, нижняя граница которых совпадает с поверхностью земли, поскольку все переменные быстро меняются вблизи этой поверхности и шаги сетки на малых высотах должны быть достаточно мелкими. Скорость ветра на поверхности земли принимают равной нулю, а температуру и влажность либо задают, либо определяют из условий баланса тепла и влаги на поверхности раздела атмосфера — почва. Для того, чтобы уменьшить шаги сетки вблизи поверхности земли, а на большой высоте сохранить их достаточно большими, в работе [5] используют преобразование координат

$$a(1 - z^*)^2 + b(1 - z^*) = \frac{z - H}{z_g - H}. \quad (70)$$

На верхней границе расчетной области обычно предполагается затухание возмущений и горизонтальная скорость ветра принимается равной скорости геострофического ветра, а производные от вертикальной скорости, температуры и влажности считаются равными нулю. В. В. Пененко и А. Е. Алоян [1] в некоторых расчетах считали высоту верхней границы расчетной области величиной переменной и определяли ее при решении уравнений. Если рассматриваются потоки на склонах и вертикальный размер расчетной области невелик, значения переменных на внешней границе задаются, как правило, такими же как в верхних точках входной границы. На боковых

границах чаще всего принимаются равными нулю первые производные по нормали к соответствующей границе или задается постоянная скорость втекающего воздуха и невозмущенный профиль изменения температуры по высоте чаще всего линейный. W. C. Weng, K. J. Richards, D. J. Carruthers [31] использовали на границе, через которую поток вытекает из расчетной области более сложные условия

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u}{\partial z^* / \partial z} \right] = 0, \quad (71)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z^*}{\partial x} \right)}{\partial z^* \partial z} = 0, \quad (72)$$

где $z^* = z - z_g \sin[2\pi(H - z^*)/L] / \sin(2\pi H/L)$, L — горизонтальный размер расчетной области.

Б. Д. Панин, Р. П. Репинская, К. Бузиан, У. Фонлей [46] сглаживали полученные в расчетах значения функций вблизи границ как по времени, так и по пространству. Любая функция на границе расчетной области окончательно определялась по формуле

$$f = bf + (1 - b)(2f_{-1} - f_{-2}). \quad (73)$$

Для уменьшения влияния граничных условий на течение в расчетной области необходимо увеличивать ее размеры, но оценить, на каком расстоянии от границ влияние ошибок в задании граничных условий становится несущественным, трудно.

Заключение

Каждая, из большого числа описанных моделей, позволяет определить характер движения воздуха в атмосфере в определенных условиях. Более сложные модели дают возможность учесть влияние большего числа факторов, но, как правило, ошибки в граничных условиях и константах, которые неизбежны, оказывают в них большее влияние на результат. Кроме того, при реализации этих моделей на ЭВМ вносятся дополнительные ошибки, влияние которых трудно оценить. Отметим также, что в литературе отсутствует систематическое исследование влияния различных факторов на картину течения.

Литература

1. Пененко В. В., Алоян А. Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.
2. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы.—Л.: Гидрометеиздат, 1970.—341 с.
3. Гутман Л. Н. Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов.—Л.: Гидрометеиздат, 1960.—293 с.
4. Джалаурия Й. Естественная конвекция.—М.: Мир, 1983.—399 с.
5. Yamada T., Bunker S. Development of a nested grid, second moment turbulence closure model and application to the 1982 ASOT Brush Creek data simulation // Journal of Applied Meteorology.—1988.—V. 27, № 5.—P. 562–578.
6. Tjernström M., Enger L., Andren A. A three-dimensional numerical model for studies of atmospheric flows on the mesoscale // Journal of Theoretical and Applied Mechanics.—1988.—V. 7, № 2.—P. 167–194.
7. Clerici G., Sandroni S. A wind field model for interpretation of remote sensing data in a complex area // Air pollution Models and its Application. Process 15th NATO/CCMS International Technical Meeting.—New York, London, 1986.—P. 383–400.
8. Beniston M., Wolf J. P., Beniston-Rebetz M., Kolsch H. J., Rairoux P., Woste L. Use of lidar measurements and numerical models in air pollution research // Journal of Geophysical Research.—1990.—V. 95, № D7.—P. 9879–9894.
9. Beniston M. Numerical modeling of regional-scale atmospheric flows with applications to air pollution // Proceedings of the fifth International Symposium of Numerical Methods in Engineering. V. 1.—1989.—P. 627–632.
10. Moore G. E., Daly C., Liu M.-K., Huang S.-J. Modeling of mountain-valley wind fields in the Southern Valley, California // Journal of Climate and Applied Meteorology.—1987.—V. 26, № 9.—P. 1230–1242.
11. Vrhovec T. A cold air lake formation in a basin — a simulation with a mesoscale numerical model // Meteorology and Atmospheric Physics.—1991.—V. 46.—P. 91–99.
12. Raithby G. D., Stubbleby J. D., Taylor P. A. The Ackervein hill project: a finite control volume prediction of three-dimensional flows over the hill // Boundary-Layer Meteorology.—1987.—V. 39, № 3.—P. 247–267.
13. Svoboda J. Numerical modeling of the atmospheric boundary layer over a hilly landscape // Studia geophysica et geodynamica.—1990.—V. 34, № 2.—P. 167–184.
14. Adrian G., Fiedler F. Mesoscale eddies induced by topography analysed with a non hydrostatic model // Air Pollution Modelling and its Application. V NATO Challenges of Modern Society.—New York: Plennar Press, 1986.—V. 10.—P. 663–672.
15. Алоян А. Е., Фалейчик А. А., Фалейчик Л. М. Алгоритм численного решения мезометеорологических задач в случае криволинейной области // Математические модели рационального природопользования.—Новосибирск: Наука, 1989.—С. 14–35.
16. Бакланов А. А. Численное моделирование задач гидродинамики атмосферы в областях сложной формы // Актуальные вопросы теплофизики и физической гидродинамики. Материалы Всесоюзной конференции.—Новосибирск, 1985.—С. 155–161.

17. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.—М.: Наука, 1962.—310 с.
18. Lee H. N., Kaw W. S. Simulation of three-dimensional wind flow over complex terrain in the atmospheric boundary layer // *Boundary-Layer Meteorology*.—1984.—V. 29, № 4.—P. 381–396.
19. Wu R., Blumen W. The Ekman boundary layer over orography: an analysis of vertical motion // *Boundary-Layer Meteorology*.—1991.—V. 54, № 4.—P. 315–326.
20. Carruthers D. J., Hunt J. C. R., Holroyd R. J. Airflow and dispersion over complex terrain // *Air Pollution Modeling and Its Application VII: Proceeding of 17th NATO/CCMS International Technical Meeting*.—1989.—P. 515–529.
21. Erasmus D. A. A model for objective simulation of boundary-layer winds in an area of complex terrain // *Journal of Climate and Applied Meteorology*.—1986.—V. 25, № 12.—P. 1832–1841.
22. Георгиева Е. В., Годов Н. Г. Интерполяция на вятора с отчитане на рельефнаия резултати и проблеми // *Българско геофизично списание*.—1987.—Т. 13, № 3.—С. 30–39.
23. Крамар В. Ф., Менжулина Т. В. Об особенностях использования оптимальной интерполяции для мезомасштабного объективного анализа в области сложного рельефа // *Метеорология и гидрология*.—1991.—№ 12.—С. 20–28.
24. Ludvig F. L., Livingston J. M., Endlich R. M. Use of conservation and critical dividing streamline concepts for efficient objective analysis of winds in complex terrain // *Journal of Applied Meteorology*.—1991.—V. 30, № 11.—P. 1490–1499.
25. Костриков А. А. Использование метода крупных частиц в однослойной модели обтекания рельефа // *Метеорология и гидрология*.—1992.—№ 9.—С. 74–83.
26. Мостовой Г. В. Простая лагранжева модель мезомасштабного переноса примесей в атмосфере // *Метеорология и гидрология*.—1993.—№ 5.—С. 29–35.
27. Мостовой Г. В. Простая гидродинамическая модель для диагноза поля приземного ветра // *Метеорология и гидрология*.—1993.—№ 10.—С. 14–21.
28. Alpert P., Getenio B. One-level diagnostic modeling of mesoscale sinifase winds in complex terrain. Part I: Comparison with three dimensional modeling in Israel // *Monthly Weather Review*.—1988.—V. 116, № 10.—P. 2025–2046.
29. Ахмедов Б. Н. Двумерная численная модель горно-долинной циркуляции // *Проблемы контроля и защиты атмосферы от загрязнения*.—1990.—№ 16.—С. 30–34.
30. Донев Е. Двумерен числен модел на турбулентен граничен слой над повърхност със сложна геометрия // *Годишник на Софийския университет. Физически факултет*.—1983, Т. 77.—С. 60–77.
31. Weng W. S., Richards K. J., Carruthers D. J. Some studies of turbulent wake over hills // *Advances in Turbulence 2: Proceedings of European Turbulence Conference*.—1988–1989.—P. 412–417.
32. Huang C.-Y., Raman S. Numerical simulations of cold air advection over the Appalachian mountains and the Gulf Stream // *Monthly Weather Review*.—1990.—V. 118, № 2.—P. 343–362.
33. Enger L., Koracin D., Yang X. A numerical study of boundary-layer dynamics in a mountain valley // *Boundary-Layer Meteorology*.—1993.—V. 66, № 4.—P. 357–394.
34. Bader D. C., McKee T. B., Tripoli G. J. Mesoscale boundary layer evolution over complex terrain. Part I: numerical simulation of the diurnal cycle // *Journal of the Atmospheric Sciences*.—1987.—V. 44, № 19.—P. 2823–2838.

35. Давиташвили Т. П. Численное моделирование обтекания горного хребта воздушным потоком // Тр. ин-та прикл. мат-ки Тбилисского гос. ун-та.—1990.—№ 40.—С. 34–50.
36. Берлянд М. Е., Генихович Е. Л., Грачева И. Г., Киселев В. Б., Хуршудян Л. Г. Моделирование распространения примеси в условиях сложного рельефа // Метеорологические аспекты загрязнения атмосферы. Т. I.—М.: Гидрометеиздат, 1981.—С. 65–72.
37. Беляев Н. Н., Никулин И. В., Хрущ В. В. Моделирование загрязнения атмосферы от хвостохранилища // Металлургическая и горнорудная промышленность.—1997.—№ 4.—С. 100–102.
38. Sivakumaran N. S., Dressler R. F. Unsteady density-current equations for highly curved terrain // Journal of the Atmospheric Sciences.—1989.—V. 46, № 20.—P. 3192–3201.
39. Doran J. C., Horst T. W., Whiteman C. D. The development and structure of nocturnal slope winds in a simple valley // Boundary-Layer Meteorology.—1990.—V. 52, № 1.—P. 41–68.
40. Федорович Е. Е. Численное моделирование склоновых эффектов в пограничном слое атмосферы // Метеорология и гидрология.—1991.—№ 8.—С. 56–65.
41. Egger J. Thermally induced flow in valleys with tributaries. Part I: Responce to heating // Meteorology and Atmospheric Phyzics.—1992.—V. 42.—P. 113–125.
42. Vergeiner I. An elementary valley wind model // Meteorology and Atmospheric Physics.—1987.—V. 36, № 1–4.—P. 255–263.
43. Schumann U. A simple model of the convective boundary layer over wavy terrain with variable heat flux // Beitrag des Physiks of Atmosphere.—1991.—V. 64, № 8.—P. 169–184.
44. Шнайдман В. А., Наседкина О. Б. Приближенная оценка вертикальных движений над городской застройкой // Метеорология и гидрология.—1990.—№ 5.—С. 55–60.
45. Браун Р. А. Аналитические методы моделирования планетарного пограничного слоя.—Л.: Гидрометеиздат, 1978.—150 с.
46. Панин Б. Д., Репинская Р. П., Бузина К., Фонлей У. Неадиабатическая региональная модель на вложенной сетке // Метеорология и гидрология.—1999.—№ 3.—С. 37–48.

Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНИЦ РАН
E-mail: esk@alanianet.ru

Введение

По-видимому, первым проектом, преследующим и образовательные (термин «образование», в статье применяется только для обозначения процесса приобретения знаний, умений, навыков) цели при использовании компьютера, был проект Алана Кея (1968–1970, MIT) по созданию программного обеспечения с уровнем сложности, присутствующим биологическим объектам, и одновременно достаточно простого, допускающего его использование даже детьми.

К этому времени уже существовали язык программирования Фортран (Fortran IBM, 1956, MIT), созданный для численных расчетов, язык программирования Лисп (Lisp, 1958, Джон Маккарти), который позволял вести обработку символьной информации, язык построения моделей Симула (Simula, 1964, Кристен Нигаард и Оле-Джохан Далу), в котором появились абстрактные типы данных (объекты). Но ни эти языки, ни появившийся в начале 1970-х язык Пролог (Prolog, Алан Кольмероз), как инструмент для программирования логики, не могли помочь в решении поставленной задачи.

Решение было найдено в рамках созданной Аланом Кеем парадигмы объектно-ориентированного программирования, основой которой являются независимые объекты, неделимые, но способные взаимодействовать между собой, и классы, позволяющие строить такие объекты. При таком подходе, программирование превращается в моделирование, а основная задача программиста сводится к представлению (моделированию) мира.

При попытке создания системы объектно-ориентированного программирования возникла концепция полностью программируемого персонального компьютера, основанного на объектах. Эти идеи, идеи Дугласа Ангелбарта, рассматривающего компьютер, как средство увеличения человеческого интеллекта, идеи Сеймура Пайперта и его коллег из MIT, разрабатывавших образовательную программу для детей, привели к созданию в 1970-е годы первого персонального компьютера Dynabook, а в начале 1980-х первого объектно-ориентированного языка программирования Смолток (Smalltalk), одним из основных предназначений которого являлось использование его в обучении программированию.

По многим причинам образовательная составляющая проекта, будучи полностью реализованной в созданной среде, не могла быть тогда использована. Саму же идею объектно-ориентированного программирования попытались привить к уже существующим языкам и создать на ее основе новые. Так в 1988 году возникла новая объектно-ориентированная версия Лиспа (Common Lisp Object System). Разработанный Денисом Ритчи в 1972 году язык Си, усилиями Бьярни Страуструпа получил объектно-ориентированную надстройку и стал языком Си++. Созданный Никлаусом Виртом в середине 1970-х язык для обучения программированию Pascal, приобретя объекты, вырос до системы программирования Delphi.

Но, к сожалению, первоначальная задача Алана Кея по созданию языка и среды, мощной и простой, доступной даже детям, которые могли бы использовать его для обучения, была забыта на десятилетия. Позже, многие из создателей системы Smalltalk возвратились к ней и попытались на уже созданной основе реализовать образовательные программы. Отметим здесь только некоторые из них:

- программа LearningWork Аделии Гольдберг, которая ориентирована в основном на обучение программированию;
- среда Squeak Дэна Ингаллса, в рамках которой математики и программисты университета Буэнос-Айреса предприняли попытку (MathMorph) формирования среды математики, позволяющей строить и динамически управлять математическими сущностями без сложной математической символики;
- сценарий ActiveEssay — новый вид документа, созданный Аланом Кейем и Тодом Кехлером, объединяющий слова, модели и программы, в котором пользователь работает с несколькими представлениями обсуждаемых сущностей, причем несколькими способами, при этом пользователь не только читает исходный текст или наблюдает за результатом его выполнения, но и сам непосредственно действует в рамках данного сценария.

Были реализованы и другие идеи использования компьютеров в образовании, например, в математике через создание мощных пакетов для аналитических вычислений Mathematica, MathCad, MathLab, Maple и др. (основой для создания которых послужил Лисп и первая среда аналитических вычислений Reduce). Уже появились первые вузовские учебные курсы по многим математическим дисциплинам, в которых указанные пакеты используются на лабораторных занятиях и при изложении теории.

Так каковы роль и место компьютера и информационных технологий в образовании вообще и в математическом образовании, в частности? Что реально нового может принести компьютер в образовательный процесс? В статье излагается далеко не бесспорная точка зрения автора, вытекающая из его преподавательского опыта.

1. Предположения о роли компьютеров в образовании

Прежде всего отметим, что персональный компьютер — всего лишь новая среда и, как и в случае любой среды, результаты ее использования зависят от целей и предположений использующих ее людей. Как и любая другая среда, сама по себе, компьютерная среда не может определять то, чему человек будет обучаться.

К сожалению, сегодня школы, вузы и родители покупают компьютеры, основываясь лишь на убеждении, что они, так или иначе, помогут ребенку в процессе обучения. Как результат — впустую потраченное время, которое в детстве полезнее использовать для общения со сверстниками, родителями и учителями. Экстремальное увлечение компьютером может привести и приводит к печальным последствиям. Вспомните детей леса или стай животных! Чем лучше компьютер?

Дети до 13–14 должны иметь дело, в основном, с реальным миром во всех его проявлениях. Дети должны постепенно, по мере своего физического и психологического развития, развивать свой внутренний мир, воображение, навыки логического и абстрактного мышления. Эти задачи успешно решались и без компьютера! Стремясь к более быстрому развитию детей, их теперь слишком рано стараются помещать в мир абстракций, что может стать помехой в развитии мышления и психики и нанести вред, даже когда само содержание кажется полезным. Поэтому работа с компьютером вряд ли должна начинаться не ранее 6–7 класса, и только тогда, когда ум подростка готов четко понимать причинно-следственные связи и он преобрел все основные навыки для общения с реальным миром.

Но как в процессе получения образования подросткам 13–14 лет и старше может помочь компьютер? Укажем только на некоторые типичные утверждения, существующие в вопросе применения компьютера и информационных технологий в образовании:

- компьютеры могут сделать обучение более интересным;
- компьютеры могут сделать обучение более эффективным;

- компьютеры могут сделать обучение более простым;
- компьютеры обеспечивают большой объем информации;
- компьютеры объединяют детей;
- будущее за высокими технологиями, нужно знать их.

Эти утверждения лишь в малой степени соответствуют реальности и совсем не характерны для применения компьютеров. Замените в них слово «компьютер» на слово «книга» и вы получите столь же содержательные утверждения. Сформулированные выше задачи можно решать и с помощью компьютера, но они хорошо могут решаться и без него. Иллюзия, что компьютер, позволяющий многократно повторять алгоритмы, может автоматизировать образование, весьма опасна, поскольку основные процессы обучения происходят внутри ученика, а не в том месте, которое можно автоматизировать.

Компьютер может помочь ученикам преодолеть в процессе обучения ненужные препятствия. Однако удаление всех препятствий невозможно: некоторые вещи трудны сами по себе. Обучение часто и состоит именно в преодолении таких препятствий, требуя для этого времени, терпения, осторожности и последовательности со стороны преподавателя и ученика. Изучение трудных предметов приносит значительную стратегическую пользу: процесс обучения помогает человеку развивать свои способности, учит преодолевать трудности.

Слишком часто люди используют слово *образование* так, как будто оно означает *обеспечение информацией*, а *обучение* связывают с *поглощением информации*. Это не так! Нельзя научить математике, сообщая только факты и алгоритмы решения известных задач, нельзя научить играть на музыкальном инструменте, обладая всей информацией по теории музыки и технике игры. Для детей сбор информации важен, но более важна разработка способов преобразования информации в знание и понимание.

Компьютерные программы могут сыграть значительную роль в обучении, но, их создание требует огромного числа часов подготовки от преподавателя, в десятки раз больше, чем другие формы. Создание таких программ требует работы многопрофильной группы, в состав которой, кроме специалистов в предметной области, должны в обязательном порядке входить психологи, педагоги, специалисты по информатике и дизайнеры. Все это очень дорого и трудоемко. Другие, более простые инструменты, опирающиеся на реальный, а не виртуальный компьютерный мир, содержат в себе нужные составляющие и/или используют другие реальные составляющие, в компь-

терном мире все надо создавать! Дешевле и проще сделать обучение более действенным и эффективным через лучшее понимание самого процесса обучения, характера учеников.

Что касается приобщения к высоким технологиям через компьютер, стоит заметить, что нынешнее поколение специалистов училось использовать компьютеры уже во взрослой жизни и оказались способно к этому. Более того, не обладая навыками приобретения новых знаний, сегодняшний эксперт вряд ли сможет оставаться им и завтра. Наиболее ценные навыки для будущего, лежат все же в области творчества и мышления, в умении использовать новые виды информации, в умении распознавать, что существенно, а что второстепенно. Преимущество будет снова у тех, кто воспитал в себе человеческие качества, навыки и методы, имеющие значение для общения.

2. Возможности компьютера в образовании

И все же компьютеры могут помочь в образовании в следующих двух основных направлениях: в моделировании старых сред и в представлении новых сред, характерных именно для компьютера.

2.1. Моделирование старых сред. Компьютеры позволяют создать модели сред, реальных и воображаемых, которые «существовали» задолго до компьютеров. Можно построить модель любого музыкального инструмента, солнечной системы или муравейника. При этом компьютерные модели могут иметь возможности, недоступные в оригинальной среде. Например, программы моделирования музыки дают возможность пробовать различные оркестровки, изменять темп, тональность, и все сразу же услышать, не используя реальные музыкальные инструменты.

Такие программы позволяют новичкам, многого не зная или плохо зная, решать профессиональные задачи на достаточно высоком уровне! Так, например, программа, имитирующая настольную издательскую систему, позволяет создавать макеты книг, в том числе с математическим содержанием, не требуя от пользователя специализированного оборудования и обширных специальных знаний.

Одна из возможностей компьютеров состоит в том, чтобы сразу же помещать людей в соответствующую среду (лингвистическую, математическую, графическую, художественную, музыкальную...),

со всеми ее возможностями, помогая проще понимать смысл и значение деталей изучаемого материала. Компьютерные модели могли бы помочь большому числу людей развивать математическое мышление, предлагая возможность работать с символами в разных режимах (например, посредством визуализации), беря на себя рутинные и технически сложные расчеты, оставляя людям творческую сторону, или даже обеспечивая возможность работы с математическими объектами, минуя сложную математическую символику.

Но использование компьютерной модели старой среды привносит много проблем. Например, при использовании компьютера для аналитических вычислений, центр внимания должен находиться на правильной постановке задачи, на проверке условий применимости и корректного выполнения аналитических преобразований, а не на приемах работы непосредственно с компьютером и с языком программы. Когда учащийся не добивается результата трудно бывает определить, чего он не знает: программы или самой математики.

Опасна и другая сторона программ, имитирующих реальные среды. Приобретение навыков в компьютерной среде, может вести к потере важных навыков при работе с реальной средой. Создавая музыку на компьютере можно и не научиться работать с реальным музыкальным инструментом, работа с программами аналитических вычислений может вести к потере реальных навыков аналитических преобразований и элементарной зависимости от компьютера даже в простых ситуациях. А заключенные в каждой среде знания и умения, могут ввести в заблуждение учеников относительно их реального уровня знаний и навыков в профессиональной области. Фактически, создание компьютерной модели старой среды содержит в себе тенденцию на уничтожение самой старой среды и создание новой профессии, на основе новых возможностей.

Отсутствие в модели потребности в навыках работы в реальной среде, может порождать страх перед трудной и долгой реальной работой. В конечном счете не станут ли люди вместо овладения игрой на скрипке, изучать компьютерную теорию игры на скрипке, или ограничивать изучение математики командами среды аналитических вычислений?

Итак, компьютерная модель уже существующей среды, не идеальна. Мошь компьютерной модели в ее «нереальности», но в этом и ее слабость. Чрезвычайно важно и то, что результаты зависят не только от навыков пользователя, но также и от предположений, за-

ложенных в программных продуктах, и от целей, которые ставили перед собой разработчики. Важное значение приобретает «представление» реальной среды, ее интерфейс. Даже когда создана очень полезная программа, остается проблема ее взаимодействия с пользователем. Это еще одна глобальная проблема, очень сложная для решения именно в сфере образования. Особенно, если учесть, что в образовании никогда нельзя забывать и о воспитательной роли самого процесса образования.

Не останавливаясь на деталях процесса проектирования интерфейса, предположим, что интерфейс (лучше несколько вариантов) построен. Оценка интерфейса — еще одна сложная задача, при всех методиках привлекающая конечного пользователя. Но пользователи образовательной программы составляют очень неоднородную среду, которую хороший учитель сортирует «на лету», и значит как-то должна учитывать программа. Но не только в предметной области, но еще и области умения использовать компьютер и саму программу. И это далеко не все проблемы интерфейса. Так что в образовании даже программы, моделирующие хорошо знакомые вещи, прежде чем применять, надо тщательно исследовать.

2.2. Компьютер, как новая среда. Компьютеры предлагают две новые возможности: множественность представлений сущности и способность моделировать динамические процессы. Поэтому один из способов разработки новой среды состоит в том, чтобы создать набор примеров, способных показать, что среда может делать, и тем самым, создать почву для обсуждения и вдохновить обучаемого на внесение уточнений и изменений в среду, т. е. новая среда должна развиваться вместе с развитием пользователя! В таких средах могут быть полезны даже плохие примеры, показывая, что плохо или совсем не работает.

Поскольку компьютеры позволяют имитировать другие среды, они могут отражать сущности (образы, концепции, отношения, величины, и т. д.) несколькими способами, помогая человеку лучше узнать реальность. Ученик может исследовать проблему через воздействие на разные органы чувств с помощью разных представлений, что позволяет сделать процесс изучения существенно глубже. Но стоит отметить, что хорошие преподаватели успешно и с давних пор используют множество представлений сущности, обучая разных по способностям учеников, и без компьютеров.

Упомянутые во введении три проекта создания образовательных

сред можно отнести к проектам создания именно новых сред, которые включает модели старых сред для представления объектов и управления ими. Такая среда может иметь те же достоинства и недостатки, о которых говорилось выше, при обсуждении компьютерных моделей старых сред. Но в них уже сделано нечто новое: можно строить и динамически управлять изучаемыми сущностями. Например, можно связать записанные осциллографом образы форм волн с уравнениями, которые их описывают. Изменение одного из связанных между собой представлений изменяет другие.

Среди важных динамических процессов, которые могут включаться в такие среды, стоит отметить сложные системы с многими переменными или со множеством действующих объектов. Компьютерные модели таких процессов очень полезные при попытке понять их поведение. В среде Squeak есть модель, которая демонстрирует, как одна зараженная цветом точка в сложной многоточечной системе может «инфицировать» другие точки новым цветом при столкновении с ними. Как много времени потребуется для заражения всей совокупности точек? Как будет проходить «инфицирование» при других предположениях и правилах? Как поведет себя модель при других начальных условиях? Умная среда даст ответы на эти вопросы или подскажет, о чем стоит подумать!

Но только игра с моделью не гарантирует обучения. Обучение зависит, как всегда, от целей и задач, которые ставятся в процессе обучения. Компьютер пока на это не способен. Сценарии использования компьютерной среды сегодня только-только начинают развиваться. Но уже можно отметить некоторые их общие особенности:

1. Обучение в компьютерных средах связывается с действиями пользователя и результатами его размышлений.

2. Среда должна уметь провести пользователя через последовательность операций и удостовериться, что пользователь сделал все правильно (это проблема в том числе и проектирования интерфейса пользователя среды).

3. Среда должна обладать способностью отслеживать через интерфейс события пользователя и оценивать достигнутые им результаты, чтобы в зависимости от них, предлагать выполнение определенных действий (здесь появляется возможность установления обратной связи!).

4. Среда должна уметь определять уровень конкретного пользователя и то, как он будет взаимодействовать со средой.

Эти среды фактически должны позволять обучаемым настраивать их под себя! Ведь хорошо известно, что начинающий преподаватель, даже с университетским образованием, полностью понимает, то о чем говорит, не ранее третьего повторения (прошу учесть, что я впервые публично говорю на подобные темы!). А компьютерная среда потребует, для того чтобы заставить ее что-то сделать, «рассказывать» ей об одном и том же многократно и разными способами! На этом пути для успешной работы потребуется не только профессионально овладеть предметной областью, но и суметь заключить профессиональные знания в совершенные формы компьютерного представления.

3. Заключение

В рассматриваемой теме пока вопросов больше, чем ответов. Безусловно, сегодня созданы и применяются прекрасные справочные программы, хорошие электронные учебники, модели старых сред (например, пакеты для аналитических вычислений). Но полноценных обучающих программ нет. Компьютер не поддерживает главное в образовании: всеобъемлющую обратную связь с обучаемым и не может пока оценить объем ранее полученных им знаний и навыков, индивидуальные особенности. Все эти программы, вместе взятые, не прививают навыков совместного решения задач, общения при поиске решений в ситуации неопределенности. И уж никакими программами нельзя заменить личность учителя. Она в образовании, как это не прискорбно звучит для нынешних и будущих реформаторов, является определяющей!

Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет
E-mail: jakir@math.rsu.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЭВРИСТИЧЕСКИХ
МЕТОДОВ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИИ
ШИБЕРНОЙ ЗАДВИЖКИ

П. Д. Кравченко, А. Н. Дудченко

Актуальная проблема практического использования эвристических и математических методов [1] при оптимизации машиностроительных конструкций в принципе разрешима.

Приведем практический пример совместного применения эвристических и математических приемов при оптимизации конструктивной схемы и конструкции отдельных элементов шиберной задвижки на магистральном трубопроводе с условным диаметром трубы 800 мм, работающей под давлением 8 МПа.

Рассматриваемые варианты улучшения формы элементов конструкций означают, что оптимизируемые параметры могут быть приняты к конструктивному исполнению.

При создании рабочих чертежей оптимизированных конструкций согласно предложенным схемам возможно обеспечение значительного повышения надежности при снижении затрат на изготовление указанных объектов.

Покажем неиспользованные возможности.

В предлагаемом варианте запорной задвижки (рис. 1) в качестве оптимизируемой функции принимаем объем (вес) эллипсоидной крышки и цилиндрической части корпуса, при этом оптимизируемыми параметрами являются толщина δ , малая полуось по срединной поверхности крышки b и толщина стенки цилиндрического корпуса t . Четвертый параметр — радиус корпуса по срединной поверхности $R_{\text{кор}}$ — выражаем через основные три параметра, диаметр трубы, конструктивные зазоры между корпусом и магистральной трубой, а также корпусом и крышкой в поднятом состоянии.

$$R_{\text{кор}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{2} + b + t + n \right), \quad \text{где } n = \text{const}. \quad (1)$$

Объем цилиндрической части корпуса длиной l

$$V_{\text{кор}} = 2\pi R_{\text{кор}} t l = \pi l t \left(\frac{\delta}{2} + b + t + n \right).$$

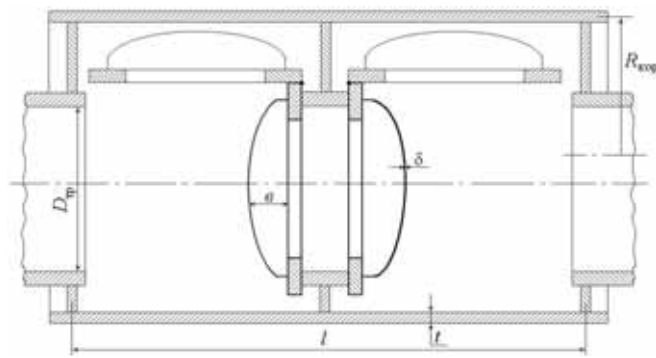


Рис. 1. Расчетная модель двухсторонней задвижки с эллипсоидными несущими поверхностями.

Объем тонкостенной эллипсоидной крышки с большой полуосью по срединной поверхности

$$V_{кр} = \frac{2}{3}\pi \left[\left(a + \frac{\delta}{2} \right)^2 \left(b + \frac{\delta}{2} \right) - \left(a - \frac{\delta}{2} \right)^2 \left(b - \frac{\delta}{2} \right) \right] \cong \frac{2}{3}\pi\delta(2b + a).$$

Объем оптимизируемой части конструкции

$$V = V_{кор} + V_{кр} = \pi l t \left(\frac{\delta}{2} + b + t + n \right) + \frac{2}{3}\pi a \delta (2b + a). \quad (2)$$

Исключим из последнего выражения параметры b и t , воспользовавшись условиями восприятия давления крышкой и корпусом. Эллипсоидная крышка в закрытом состоянии при отсутствии давления в поврежденной части магистральной трубы работает на устойчивость. Формула для критического давления в сплюснутом эллипсоиде имеет вид [2]

$$p = k \frac{E \delta^2 b^2}{a^4},$$

где E — модуль упругости материала оболочки; k — коэффициент устойчивости, зависящий от начальных несовершенств формы. Для идеальных оболочек он равен 1.21, а для качественно изготовленных оболочек определяется по формуле

$$k = \frac{1}{2.36} \sqrt[8]{\left(\frac{100\delta b}{a^2} \right)^3}.$$

Принимая двукратный коэффициент запаса при расчете на устойчивость, получаем гиперболическую зависимость между толщиной крышки и ее малой полуосью

$$b = c/\delta, \quad c = \left(0.84 \frac{p a^{19/4}}{E}\right). \quad (3)$$

Цилиндрический корпус работает на растяжение под действием внутреннего давления p . Условие прочности по безмоментной теории имеет вид

$$\frac{p R_{\text{кор}}}{t} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ — допустимое напряжение материала при растяжении.

Отсюда с учетом формулы (1) получаем зависимость для толщины корпуса

$$t = \frac{p \left(\frac{\delta}{2} + b + n\right)}{2[\sigma] - p}. \quad (4)$$

Подставляя выражения (3) и (4) в формулу (2), получаем после преобразований

$$V = \frac{4\pi a c}{3} + \pi m l (1 + m)(c + n^2) + \pi m l \left(c^2 (1 + m) \frac{1}{\delta^2} + 2cn(1 + m) \frac{1}{\delta} + \left(n(1 + m) + \frac{2}{3} \frac{a^2}{ml} \right) \delta + \frac{1}{4} (1 + m) \delta^2 \right), \quad (5)$$

где $m = p/(2[\sigma] - p)$.

Используем условие существования экстремума функции с одной переменной

$$\frac{dV}{d\delta} = \pi m l \left(-\frac{2c^2(1 + m)}{\delta^3} - \frac{2cn(1 + m)}{\delta^2} + n(1 + m) + \frac{2}{3} \frac{a^2}{ml} + \frac{1}{2} (1 + m) \delta \right) = 0,$$

или

$$\frac{1}{2} (1 + m) \delta^4 + \left(n(1 + m) + \frac{2}{3} \frac{a^2}{ml} \right) \delta^3 - 2cn(1 + m) \delta - 2c^2(1 + m) = 0. \quad (6)$$

Из вида уравнения (6) следует, что согласно правилу Декарта оно имеет один положительный корень, отражающий физический смысл поставленной задачи, и три отрицательных корня, не имеющих физического смысла. Таким образом, решение задачи однозначно.

Рассмотрим конструкцию с параметрами:

$$p = 8 \text{ МПа}; [\sigma] = 160 \text{ МПа}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; a = 430 \text{ мм};$$

$$l = 2200 \text{ мм}; n = 1120 \text{ мм}; m = 0,02564; c = 2417.5 \text{ мм}^2.$$

Уравнение (6) принимает вид

$$0.5128\delta^4 + 3334\delta^3 - 5.554 \cdot 10^6\delta - 11.988 \cdot 10^6 = 0.$$

Решая его методом Ньютона, получаем

$$\delta_1 = 41.72 \text{ мм}; \delta_2 = -2.16 \text{ мм}; \delta_3 = -39.82 \text{ мм}; \delta_4 = -6501.3 \text{ мм};$$

$$b = 57.95 \text{ мм}; t = 30.74 \text{ мм}; R_{\text{кор}} = 614.77 \text{ мм}.$$

Объем оптимизируемой части конструкции $V = 0.282 \text{ м}^3$, а ее вес $Q = V\gamma = 0.282 \cdot 7.85 = 2.21 \text{ т}$.

Принимая условно вес привода равным 0.3–0.5 т, полный вес задвижки шиберной составит менее 3 т.

Отметим, что вес серийно выпускаемой задвижки составляет 9.2 т. Более чем трехкратное снижение веса достигается применением в проектной практике методов эвристического поиска новых технических решений и математической оптимизации.

Обеспечение надежности работы задвижки предлагаемой конструкции достигается упрощением конструктивных элементов, обеспечивающих герметичность стыков и применением схемы привода, обеспечивающей срабатывание (перекрытие трубопровода) с расчетной величиной гидравлического удара, что решается с помощью обычных инженерных методов проектирования.

Рассмотрим случай оптимизации формы серийно выпускаемой задвижки. Задвижка выполнена в виде тонкой и плоской пластины.

Тонкими считаются пластинки, если отношение толщины к наименьшему размеру в плане находится в пределах:

$$\frac{1}{5} \leq \frac{h}{r} \leq \frac{1}{80}.$$

Теорию тонких пластинок можно использовать при $W \leq \frac{1}{4}h$, где h — толщина, W — максимальный прогиб пластинки.

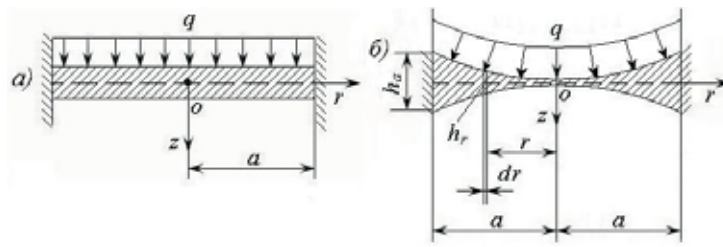


Рис. 2. Тонкие круглые пластинки: а) постоянной толщины; б) — переменной толщины.

Дифференциальное уравнение тонкой круглой пластинки постоянной толщины (рис. 2а)) имеет вид [3]:

$$\frac{d^4 W}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 W}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dW}{dr} = \frac{q}{D}, \quad (7)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость; E — модуль упругости I рода; μ — коэффициент Пуассона.

Общее решение неоднородного уравнения (7) имеет вид

$$W = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + \frac{qr^4}{64D}, \quad (8)$$

в котором произвольные постоянные $C_1, \dots, C_4$ нужно определять из граничных условий в центре пластинки и на ее контуре.

Для пластинки, показанной на рис. 2а), имеем следующие выражения для прогиба и изгибающего момента

$$W = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2, \quad (9)$$

$$M = \frac{q}{16} [a^2(1 + \mu) - r^2(3 + \mu)]. \quad (10)$$

Наибольший момент будет возникать на контуре пластинки

$$M_{\max} = M_{\text{расч}} = -\frac{qa^2}{8}.$$

Перейдем к рассмотрению тонкой пластинки переменной толщины, см. рис. 2б). Здесь получить общий интеграл не удастся. Поэтому

применим один из приближенных методов решения, например, метод коллокаций.

Согласно исследованиям С. П. Тимошенко [3] и других ученых, теорию изгиба балок, в том числе лежащих на упругом основании, можно использовать для балок переменной толщины. Погрешности составляют 2–5% по сравнению с точными решениями. Используем этот подход к расчету пластинок переменной толщины.

Зададимся законом изменения толщины, например, по квадратной параболе:

$$h_r = \frac{r^2}{a^2} h_a,$$

где h_a — толщина пластинки на контуре.

Выразим цилиндрическую жесткость в сечении $r = \text{var}$

$$D_r = \frac{E h_a^3}{12(1 - \mu^2)} \frac{r^6}{a^6} = D_a \frac{r^6}{a^6} \quad (11)$$

и введем ее в качестве весового коэффициента при функции прогиба. Тогда уравнение (7) запишется в виде:

$$\frac{d^4(D_r W)}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3(D_r W)}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2(D_r W)}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d(D_r W)}{dr} = q. \quad (12)$$

Подставляя (11) в (12) и производя дифференцирование, получаем:

$$\frac{d^4(r^6 W)}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3(r^6 W)}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2(r^6 W)}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d(r^6 W)}{dr} = \frac{q a^6}{D_a}$$

или

$$r^6 \frac{d^4 W}{dr^4} + 2r^5 \frac{d^3 W}{dr^3} - r^4 \frac{d^2 W}{dr^2} + r^3 \frac{dW}{dr} + 576r^2 W = \frac{q a^6}{D_a}. \quad (13)$$

Дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами (13) имеет общий интеграл, но запись его громоздка. Решим уравнение приближенным методом. Предположим, что пластинка прогибается по закону (9), удовлетворяющему кинематическим граничным условиям:

$$W = C(a^2 - r^2)^2, \quad (14)$$

где C — постоянный множитель, значение которого найдем, удовлетворив выражением (14) дифференциальному уравнению (13) в сечении $r = 0.5a$.

Вычислим значения функций

$$W = C(a^2 - r^2)^2; \quad W' = -4Cr(a^2 - r^2)^2;$$

$$W'' = -4C(a^2 - 3r^2)^2; \quad W''' = 24Cr; \quad W^{IV} = 16C;$$

при $r = 0.5a$:

$$W = 0.5625Ca^4; \quad W' = -1.5Ca^3;$$

$$W'' = -Ca^2; \quad W''' = 12Ca; \quad W^{IV} = 24C.$$

Подставив в уравнение (13), находим:

$$C = \frac{q}{82D}.$$

Следовательно, выражение прогиба имеет вид:

$$W = C(a^2 - r^2)^2 = \frac{q}{82D}(a^2 - r^2)^2.$$

Чтобы сравнить значения прогибов для пластинок постоянной и переменной толщины, вычислим цилиндрическую жесткость на контуре.

Получим функцию изгибающего момента:

$$M = -\frac{D_a}{a^6} \left[r^6 \frac{d^2 W}{dr^2} + r^2(12 + \mu) \frac{dW}{dr} + 6r^4(5 + \mu)W \right]$$

и вычислим ее значение на контуре, т. е. при $r = a$

$$M(a) = -\frac{8qa^2}{82} \cong -0.1qa^2,$$

что на 25% меньше, чем у пластинок постоянной толщины.

Условие прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{6M(a)}{h_a^2} \leq [\sigma],$$

отсюда $h_a \geq \sqrt{\frac{6M(a)}{[\sigma]}}$.

Замечаем, что толщина на контуре параболической пластинки меньше в $\sqrt{1.25} \approx 1.12$ раза, чем в пластинке постоянной толщины, следовательно, цилиндрические жесткости будут отличаться в

$(1.12)^3 \approx 1.4$ раза, т. е. $D_a = \frac{D}{1.4}$ и значение $C = \frac{q^{1.4}}{82D} = \frac{q}{58.6D}$, что больше, чем у пластинки постоянной толщины на 9%.

Таким образом, пластинка переменной толщины более экономична при ограничении прочности, немного уступая при этом по жесткости.

Рассмотрим конкретный пример:

$$q = 8 \text{ МПа}; r = 400 \text{ мм}; [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Используя решение, находим для параболической пластинки: толщина на контуре — $h_a = 70 \text{ мм}$; прогиб в центре пластинки — $W_0 = 0.4 \text{ мм}$; закон изменения толщины — $h_r = \frac{r^2}{a^2} h_a = \frac{70}{400} r^2 = 0.0004375 r^2$.

В пластинке постоянной толщины $h = 80 \text{ мм}$; $W = 0.36 \text{ мм}$. Объем пластинки постоянной толщины, рис. 2а):

$$V_{\text{const}} = \pi a^2 h = \pi 400^2 80 = 4.02 \cdot 10^7 \text{ мм}^3.$$

Объем пластинки переменной толщины, рис. 2б):

$$\begin{aligned} V_{\text{var}} &= \int_0^a 2\pi r h_r dr = \int_0^a 2\pi r \frac{r^2}{a^2} h_a dr = \frac{2\pi}{a^2} h_a \int_0^a r^3 dr = \\ &= \frac{2\pi}{a^2} h_a \frac{a^4}{4} = \frac{\pi}{2} 400^2 \cdot 70 = 1.76 \cdot 10^7 \text{ мм}^3, \end{aligned}$$

$$\Delta V = \frac{4.02 - 1.76}{4.02} 100 = 56\%.$$

Экономия металла составляет 56 % по несущей части задвижки. Кроме экономии металла, получаем значительное улучшение технологичности задвижки, так как криволинейные поверхности не требуют чистовой механической обработки, а чистовая механическая обработка плоского кольца для обеспечения герметичности стыка не представляет затруднений.

Настоящий пример оптимизации конструкции элементов и узлов задвижки с помощью математических методов показывает неиспользованные возможности; оптимизация других элементов и узлов возможна с использованием общеизвестных инженерных методов проектирования и эвристических приемов поиска лучших технических решений.

Применение такой процедуры при проектировании новых объектов целесообразно и объективно приводит к значительной экономии металла и трудоемкости изготовления и эксплуатации при обеспечении требуемого уровня работоспособности и безопасности объектов.

Литература

1. Кравченко П. Д. Проблема практического использования математических и эвристических методов при оптимизации машиностроительных конструкций / Исследования по математическому анализу, теории операторов и математическому моделированию / Под ред. Ю. Ф. Коробейника и А. Г. Кусраева.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2004.—С. 369–374.
2. Лизин В. Т., Пяткин В. А. Проектирование тонкостенных конструкций.—М.: Машиностроение, 1976.—408 с.
3. Тимошенко С. П. Курс теории упругости.—Киев: Наукова думка, 1972.—501 с.

Волгодонск, Волгодонский институт сервиса ЮРГУЭС,
Волгодонский институт ЮРГТУ (НПИ)
E-mail: krapa@mail.ru

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДИФФУЗИИ В АНАЛИТИЧЕСКОМ
ВИДЕ, ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРАКТИКЕ

Г. В. Филькин

Рассматривается следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1)$$

где $D(x)$ — коэффициент диффузии, $u(x, t)$ — концентрация вещества в точке x в момент времени t . Это уравнение описывает процесс диффузии в трубке.

Как хорошо известно, его фундаментальное решение при постоянном коэффициенте диффузии имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left(-\frac{x^2}{4Dt} \right). \quad (2)$$

С помощью уравнения (2) можно решать многие краевые задачи математической физики. Если коэффициент диффузии является переменным, обычно аналитическое решение получить затруднительно. Можно показать, что в этом случае можно найти выражение аналогичное (2) рассмотрев задачу о блуждании точки на прямой. Это решение определяется на основе схемы Бернулли с помощью локальной теоремы Лапласа и, вообще говоря, является приближенным, но его точность достаточна для решения многих практических задач. В отличие от численных методов решения краевых задач математической физики здесь не стоят вопросы устойчивости и сходимости и решение можно получить достаточно быстро. Кроме того, в случае аналитического решения программу на ПК можно написать достаточно быстро. Фундаментальное решение для уравнения (1) с коэффициентом диффузии, зависящим от x имеет вид

$$u^*(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(x)t}} \cdot \exp \left(-\frac{\left[\int_0^x \sqrt{\frac{D_0}{D(\xi)}} d\xi \right]^2}{4D_0 t} \right), \quad (3)$$

где D_0 — значение коэффициента диффузии при $x = 0$. Непосредственно проверяется, что $u^*(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) с коэффициентом диффузии $D(x)$. Для этого достаточно найти частные производные и подставить в уравнение. Подробный вывод данной формулы и ее проверка приводятся в работе [1]. Зависимость (3) является приближенной, так как в точках разрыва коэффициента диффузии нарушается баланс вещества. Можно доказать [1], что нарушение баланса не превосходит величины

$$\left| \frac{1}{\sqrt{4\pi D_i t}} - \frac{1}{\sqrt{4\pi D_{i-1} t}} \right|,$$

которая убывает с увеличением t , поэтому если точек разрыва мало и скачки небольшие, то зависимость (3) можно применять при решении ряда практических задач. Например, в работе [3] рассматривается именно такая задача. Правда, здесь рассматривается задача теплопроводности. Уравнение теплопроводности имеет такой же вид, что и уравнение (1), поэтому зависимостью (3) можно пользоваться и в этом случае.

В случае непрерывной функции с небольшой по модулю производной также можно применить зависимость (3), приблизив ее кусочно постоянной функцией с требуемой для практики точностью. Рассмотрим уравнение, в котором коэффициент диффузии зависит только от времени, в этом случае уравнение диффузии примет вид

$$D(t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Фундаментальное решение уравнения (4) также можно найти, опираясь на схему Бернулли с помощью локальной теоремы Лапласа. Оно имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \int_0^t D(\tau) d\tau}} \exp \left(-\frac{x^2}{4 \int_0^t D(\tau) d\tau} \right). \quad (5)$$

В отличие от формулы (3) зависимость (5) является точным решением уравнения (4). Для доказательства достаточно найти необходимые частные производные и подставить в уравнение.

Рассмотрим применение фундаментального решения (5) при решении задачи перемешивания сточных вод в водотоке.

Пусть имеется водоток (река, канал) со средней шириной B , средней глубиной H и средней скоростью течения V , ось X направим вниз по течению, ось Y поперек, начало координат расположим на одном из берегов. Пусть в точке с координатами $(0, y_0)$ расположен точечный сброс с интенсивностью $m_0 = c_0 q_0$, где c_0 — концентрация некоторого загрязняющего вещества в сточных водах, q_0 — расход сточных вод. Требуется определить концентрацию этого загрязняющего вещества ниже по течению реки. Если сброс сточных вод стационарный, то можно доказать, что интенсивность диффузии вдоль оси X намного меньше конвективной составляющей и ею можно пренебречь. Это связано с тем, что конвективный перенос с течением времени не уменьшается, он пропорционален скорости потока и времени, а интенсивность диффузионного переноса пропорциональна корню квадратному из времени [1]. Поэтому, начиная с некоторого расстояния от места сброса, можно рассматривать только конвективный перенос вдоль оси X и диффузионный перенос вдоль оси Y . Тогда для решения этой задачи достаточно решать уравнение [1]

$$V \frac{\partial u}{\partial x} = D_y \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}, \quad (6)$$

где D_y — коэффициент турбулентной диффузии в поперечном направлении. Начальное условие имеет вид

$$u(0, y_0) = m_0 \delta(0, y),$$

где $\delta(0, y_0)$ — функция Дирака в соответствующей точке. На границах потока выполняется условие непроницаемости, которое можно записать следующим образом

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = B.$$

Тогда поле концентрации записывается в виде некоторого функционального ряда [1]. Естественно, при практических расчетах рассматривают только несколько первых членов этого ряда. Если ограничиться рассмотрением поля концентрации для 99.7% загрязняющего вещества, то достаточно взять только первые 6 членов, если сброс расположен на границе потока или в его середине, то члены ряда попарно совпадают и в окончательной формуле достаточно

трех слагаемых [1]. Задача решена для того случая, когда коэффициент турбулентной дисперсии в поперечном направлении является константой, однако для рек это неверно, например, при закруглении русла реки этот коэффициент существенно увеличивается. Формула (5) позволяет получить аналитическое решение, учитывающее изменение коэффициента турбулентной дисперсии в поперечном направлении по мере удаления вниз по течению реки. Для простоты ограничимся береговым сбросом в начале координат, предположим также, что фоновая концентрация равна нулю и вещество консервативное. При необходимости эти ограничения легко снимаются [1]. Учитывая связь $x = Vt$ и формулу (5), получим:

$$u(x, y) = \frac{m_0 \sqrt{V}}{H \sqrt{4\pi \int_0^{x/V} D_y(\frac{\zeta}{V}) d\zeta}} \times \\ \times \left[\exp\left(-\frac{y^2 V^2}{4x \int_0^{x/V} D_y(\frac{\zeta}{V}) d\zeta}\right) + \exp\left(-\frac{(2B-y)^2 V^2}{4x \int_0^{x/V} D_y(\frac{\zeta}{V}) d\zeta}\right) + \right. \\ \left. + \exp\left(-\frac{(2B+y)^2 V^2}{4x \int_0^{x/V} D_y(\frac{\zeta}{V}) d\zeta}\right) \right] \quad \left(0 < x < 0.128 \frac{B^2 V}{D_{y,cp}}\right), \\ u(x, y) = \frac{m_0}{BHV} \quad \left(x \geq 0.128 \frac{B^2 V}{D_{y,cp}}\right),$$

где $D_{y,cp}$ — среднее значение коэффициента турбулентной диффузии в поперечном направлении на рассматриваемом участке.

Литература

1. Диффузионный перенос растворимых веществ и процесс теплопереноса в водотоках и водоемах. (Заключительный отчет о НИР).—Новочеркасск, 2003.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1977.
3. Черунова И. В., Филькин Г. В. Использование метода прогонки в решении задачи математического моделирования системы теплообмена «Человек — термозащитная одежда — среда» // Научная мысль Кавказа. Северо-Кавказский научный центр высшей школы. Прил. 11.—2003.—С. 112–116.

Шахты, Южно-Российский госуниверситет экономики и сервиса
E-mail: Nekrushesh@ssu.ru

Научное издание

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ. ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ.
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

под редакцией
Ю. Ф. Коробейника и А. Г. Кусраева

Редактор издательства *Басаева Е. К.*

Подписано в печать 6.03.2006. Формат бумаги $60 \times 84^{1/16}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 20,3. Тираж 200 экз. Заказ №2055.

Издательство Владикавказского научного центра,
362008, г. Владикавказ, пр. Коста, 93.

ОАО «ИПП им. В. А. Гассиева»,
г. Владикавказ, ул. Тельмана, 16.