

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И
НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЮЖНО-РОССИЙСКИЙ ГОСУНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИКИ И СЕРВИСА
ВОЛГОДОНСКИЙ ИНСТИТУТ СЕРВИСА

Исследования по
дифференциальным
уравнениям
и математическому
моделированию

Владикавказ
2008

ББК 22.193.я5
УДК 517 + 519
М34

Ответственные редакторы:

доктор физико-математических наук А. О. Ватульян,
кандидат технических наук Е. С. Каменецкий,
доктор физико-математических наук Ш. С. Хубежты

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 08-01-06061.

Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию / отв. ред. А. О. Ватульян, Е. С. Каменецкий, Ш. С. Хубежты. — Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008. — 376 с.

Настоящий сборник представляет собой доклады VI Международной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (Владикавказ, 29 июня — 4 июля 2008 года), посвященные дифференциальным уравнениям, численным методам их решения и математическому моделированию.

© Южный математический
институт ВНЦ РАН, 2008
© Южный Федеральный
университет, 2008
© Южно-Российский
государственный университет
экономики и сервиса, 2008

ISBN 978-5-93000-055-9

Оглавление

Аджи́ев А. Х., Аджи́ева А. А., Ашабокова Ф. М., Созаева Л. Т. Модель прогнозирования электрической активности атмосферы	7
Аджи́ева О. А., Бжекшиев С. Л., Машуков И. Х., Машуков Х. Х. Статистическое исследование влияния изменений электрического поля атмосферы у земли на метеотропные реакции кардиологических и гипертонических больных ..	15
Алиханов А. А. Априорная оценка решения нелокальной краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности	18
Аркасова М. Т. К вопросу разрешимости первой краевой задачи для уравнения четвертого порядка	23
Атаева О. М. Онтологический подход к моделированию потоков работ в задаче приведения данных к каноническому виду ...	26
Баззаев А. К. Численное решение третьей краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка методом суммарной аппроксимации	37
Бахвалов Ю. А., Князев С. Ю. Моделирование плоскомеридианных потенциальных полей методом интегрированных фундаментальных решений	48
Бештоков М. Х. Локально-одномерная схема для псевдопараболического уравнения третьего порядка с краевыми условиями третьего рода	53
Ватульян А. О. Операторные уравнения в обратных коэффициентных задачах и их исследование	65

Гречихин В. В. Математическое моделирование магнито-электрических систем с постоянными магнитами методом интегральных уравнений	72
Дзарахохов А. В. Нелокальная краевая задача типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа третьего порядка с оператором Кароля	78
Езаова А. Г. Общая нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка	83
Завгородний М. Г., Майорова С. П. Об одном уравнении математической физики четвертого порядка на графе	88
Калинина Т. И., Наседкин А. В. Фундаментальные решения антиплоской задачи электроупругости при движущемся осциллирующем источнике	103
Канчукоев В. З., Лесев В. Н. Математическая модель растекания капли по нагретой твердой поверхности	114
Князев С. Ю. Численное решение уравнений параболического типа с помощью метода интегрированных источников поля	119
Кочубей Т. В., Шапошников К. С. Расчет трехмерного магнитного поля в присутствии искривленных поверхностей с идеальными магнитными или электрическими свойствами	124
Кулаев Р. Ч. О характеристическом определителе краевой задачи на графе	134
Лосанова Ф. М. Об одной нелокальной краевой задаче с оператором Капуто в условии смещения	145
Мамчуев М. О. Нелокальная краевая задача для диффузионно-волнового уравнения	150
Музаев И. Д. Развитие математической теории сейсмогидродинамических процессов в гидротехнических сооружениях ..	155
Надолин К. А. Математическое моделирование пассивного массопереноса в русловых потоках	163
Науменко Я. А. Некоторые аспекты численного моделирования вихревых токов в проводящих оболочках	172
Никольская Т. А. Математическое моделирование «конусообразования» в кусочно-неоднородном грунте	183

Никольский Д. Н. Математические модели трехмерной и двумерной эволюции границы раздела различных жидкостей ...	190
Нурмагомедов А. А. Асимптотика многочленов $\hat{p}_n^{\alpha, \beta}(t)$, ортогональных на произвольных сетках	200
Пивень В. Ф. Исследование плоскопараллельных граничных задач стационарной фильтрации в анизотропном грунте	212
Плиева Л. Ю. О квадратурных формулах для некоторых несобственных интегралов	227
Псху А. В. Первая краевая задача для диффузионно-волнового уравнения дробного порядка	235
Радионов А. А. Обзор математических моделей магматического расплава и его подъема по каналу вулкана	243
Рузиев М. Х. Задача с двумя нелокальными краевыми условиями для вырождающегося уравнения эллиптического типа с сингулярным коэффициентом	257
Сапогин В. Г. Канонический формализм одномерной динамической системы гравитирующих частиц	261
Седов А. В. Разновидности и особенности применения декомпозиционных подходов при моделировании процессов в сложных системах	270
Ташпулатов С. М. О существенном и дискретном спектре оператора энергии двухмагнетных систем в трехмерной изотропной примесной ферромагнетной модели Гейзенберга с взаимодействием ближайших соседей	279
Тедеев Т. Р. Решение контактной задачи методом конечных элементов	290
Туаева Ж. Д. Многомерная математическая модель сейсмички с памятью	297
Устинов Ю. А. Математическая модель пульсового движения крови в артериальном сосуде с учетом винтовой анизотропии его стенки	307
Федяев Ю. С. Математическое моделирование эволюции границы раздела жидкостей в кусочно-неоднородном слое грунта	321
Хубиев К. У. Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения смешанного типа	331

Хубежты Ш. С. Об аппроксимации некоторых сингулярных операторов и приближенном решении сингулярных интегральных уравнений	336
Циунчик С. А. Разностная схема для одного класса нелинейных параболических задач	349
Цопанов И. Д. О численном решении одной несамосопряженной задачи	354
Чупин А. В. Расчет импульсного режима вентиляции тупиковой выработки	364
Эфендиев Б. И. О разрешимости задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной	371

МОДЕЛЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ АТМОСФЕРЫ**А. Х. Аджиев, А. А. Аджиева,
Ф. М. Ашабокова, Л. Т. Созаева**

Для анализа и прогноза параметров временных рядов используются стохастические модели, которые позволяют исследовать как стационарные ряды, так и нестационарные после приведения к стационарному виду. Используя модель ARIMA (по методологии Бокса–Дженкинса), проведен анализ и прогноз значений числа дней с грозой и средней продолжительности гроз по многолетним данным метеостанции в г. Сочи. Построена стохастическая модель, удовлетворительно описывающая изменение параметров грозоразрядной деятельности, приведены точность метода и прогнозные значения параметров числа дней с грозой и средней продолжительности гроз.

Обычно на практике для анализа и прогноза параметров временных рядов используются стохастические модели, которые позволяют исследовать как стационарные ряды, так и нестационарные после приведения к стационарному виду. Наиболее распространенные модели стационарных рядов — модели авторегрессии и модели скользящего среднего.

Авторегрессионная модель p -го порядка $AR(p)$ имеет вид:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \dots + \beta_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ — некоторые константы; ε_t — ряд возмущений.

Она описывает изучаемый процесс в момент времени t в зависимости от его значений в предыдущие моменты $t-1, t-2, \dots, t-p$.

Если исследуемый процесс y_t в момент времени t определяется его значением только в предшествующий момент $t-1$, то рассматривают авторегрессионную модель 1-го порядка ($p = 1$):

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2)$$

Модель скользящей средней q -го порядка $MA(q)$, в которой моделируемая величина задается линейной функцией от возмущений (ошибок) ε_t в предыдущие моменты времени, имеет вид:

$$y_t = \varepsilon_t + \gamma_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \gamma_q \varepsilon_{t-q} \quad (t = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$ — некоторые константы.

Также можно использовать смешанные модели $ARIMA(p, d, q)$ — модели авторегрессии — проинтегрированного скользящего среднего, где p — порядок авторегрессии, q — порядок скользящей средней, d — порядок разности.

В этих моделях в качестве независимой переменной выступает не время, а лаговые переменные, влияние которых характеризуется некоторым запаздыванием. Для выбора модели временного ряда проводится анализ автокорреляционной (АКФ) и частной автокорреляционной (ЧАКФ) функций ряда.

Используя модель $ARIMA$ (по методологии Бокса–Дженкинса), нами проведен анализ и прогноз значений числа дней с грозой и средней продолжительности гроз по многолетним данным метеостанции в г. Сочи (рис. 3–6) [1, 2].

1. Проверка временного ряда на стационарность

При тестировании исходных данных на стационарность прежде всего используется визуальный анализ графика. На рис. 1а, 1б представлены АКФ дней с грозой и продолжительности гроз, визуальный анализ которых свидетельствует о нестационарном характере динамики исходного ряда (наблюдается тренд и периодичность).

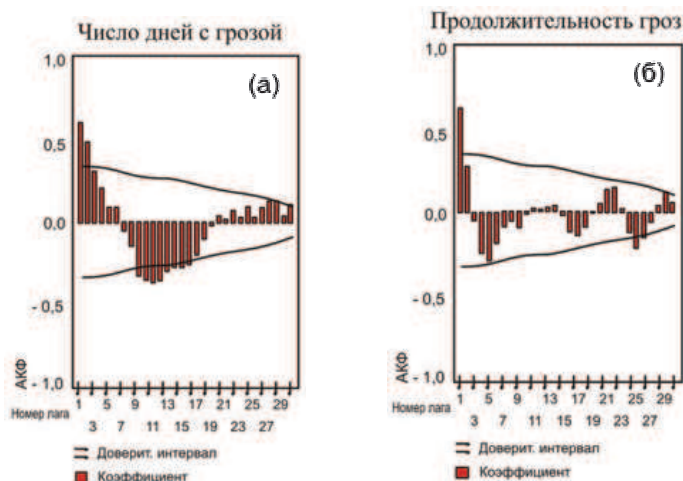


Рис. 1. Автокорреляционные функции числа дней с грозой (а), среднегодовой продолжительности гроз (б).

Значения АКФ медленно затухают, коэффициент автокорреляции первого порядка для рассматриваемых рядов равен 0,684, что характерно для ряда с четко выраженной тенденцией (наличие тренда и периодических колебаний). АКФ показывает, что в ряду числа дней с грозой имеются периодические колебания, равные 11 годам, а в ряду продолжительности гроз — 5–6 лет.

Наличие тренда в рассматриваемых рядах подтверждает критерий «восходящих и нисходящих» серий.

2. Переход к стационарному ряду

Для перехода к стационарному ряду традиционно применяют оператор взятия последовательных разностей первого или второго порядка (процедуру дискретного дифференцирования). Для определения значения параметра d (порядка разности) может быть использован эвристический критерий. Также о том, что необходимая степень разности достигнута, будет свидетельствовать быстрое затухание АКФ. В практических исследованиях d не превышает 2.

Исследования показали, что для рассматриваемых рядов числа дней с грозой и ряда продолжительности гроз $d = 1$.

3. Выбор и идентификация модели

Для временного ряда модель $ARIMA(p, d, q)$ подбирается методом элементарного подбора.

Если все значения выборочной частной автокорреляционной функции порядка выше p незначительно отличаются от нуля, то временной ряд следует идентифицировать с помощью модели, порядок авторегрессии которой не выше p .

Если все значения выборочной автокорреляционной функции порядка выше q незначительно отличаются от нуля, то временной ряд следует идентифицировать с помощью модели скользящей средней, порядок которой не выше q .

4. Оценка параметров модели

После идентификации моделей необходимо оценить их параметры. Для этого используются метод наименьших квадратов без дополнительных условий и метод наименьших квадратов с условием.

5. Проверка модели на адекватность

Для проверки каждой пробной модели анализируется ряд остатков параметров временного ряда. У адекватной модели остатки должны быть похожими на белый шум, т. е. выборочные автокорреляции не должны существенно отличаться от нуля (рис. 2а, рис. 2б).

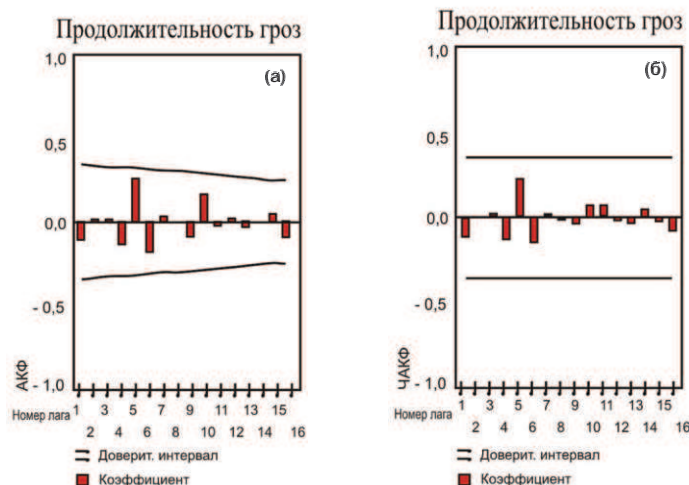


Рис. 2. АКФ (а) и ЧАКФ (б) остатков ряда среднегодовой продолжительности гроз.

Для выбора адекватной модели следует учесть два требования: повышение точности и уменьшение числа параметров модели. Вместе эти требования сведены в информационном критерии Акайка (AIC). Аналогичный характер имеет критерий Шварца (SIK). Очевидно, что выбор следует сделать в пользу модели с меньшим значением AIC и SIK.

Кроме того, при выборе адекватной модели следует провести анализ стандартной ошибки, t -статистики, коэффициента модели и его уровня значимости [3, 4].

6. Прогнозирование числа дней с грозой и продолжительности гроз

Мощный аппарат модели ARIMA (p, d, q) позволяет сделать краткосрочный прогноз (5 лет), используя методологию Бокса–Джексона.

Для оценки точности прогноза необходимо провести тестовые расчеты на ретроспективном участке исследуемых рядов. В этом случае имеющаяся информация делится на две части: по первой оцениваются параметры модели, а данные второй части рассматриваются в качестве фактических. Ошибки прогнозов, полученные на втором участке, характеризуют точность применяемой модели.

На практике широко используется средняя относительная ошибка по модулю, выраженная в процентах относительно фактического значения показателя:

$$\delta = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{\hat{y}_t - y_t}{y_t} \right| 100\%, \quad (4)$$

где $\hat{y}_t$ — прогнозные значения показателя; y_t — фактическое значение; n — число уровней временного ряда, для которых определялось прогнозное значение.

При этом в литературе встречается указание на то, что значение $\delta < 10\%$ свидетельствует о высокой точности модели, при значениях этой характеристики в диапазоне 10–20% точность можно признать хорошей, при $20\% < \delta < 50\%$ — удовлетворительной.

Для оценки точности модели были исследованы число дней с грозой и продолжительность гроз по станции г. Сочи (рис. 3, 4).

В таблице 1 приведены прогнозные и фактические значения числа дней с грозой, а также относительные ошибки прогноза по модулю.

В таблице 2 приведены прогнозные и фактические значения, а также относительные ошибки прогноза продолжительности гроз по модулю.

Из таблиц 1 и 2 видно, что относительная ошибка прогноза изменяется в пределах от 0,5% до 19%, а среднее значение ошибки равно 6%, что свидетельствует о хорошей точности модели.

Таким образом, анализ рядов грозовой активности на ретроспективном ряде показал, что предлагаемый нами подход можно использовать для краткосрочного прогноза значений числа дней с грозой и среднегодовой продолжительности гроз.

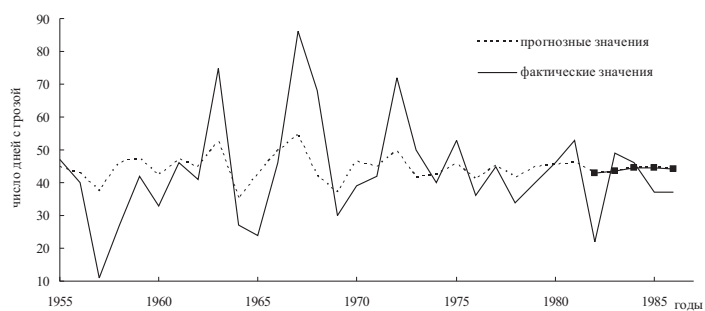


Рис. 3. Фактические и прогнозные значения числа дней с грозой на ретроспективном участке.

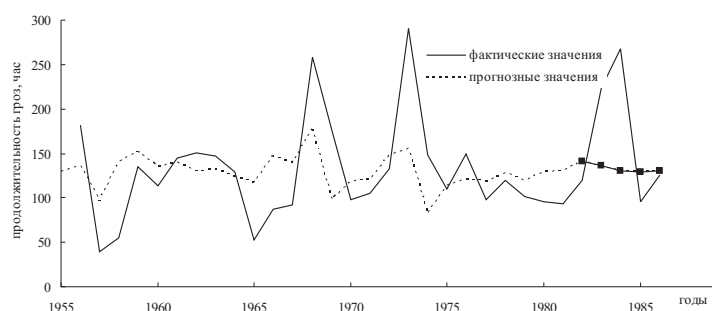


Рис. 4. Фактические и прогнозные значения продолжительности гроз на ретроспективном участке.

Таблица 1

Оценка точности прогноза числа дней с грозой

Годы	Фактические значения, дни	Прогнозные значения, дни	Относительная ошибка по модулю, %
1982	22	43,06	19
1983	49	43,55	2,2
1984	46	44,46	0,66
1985	37	44,53	4
1986	37	44,08	3,8
Средняя относительная ошибка по модулю			6

Таблица 2

Оценка точности прогноза продолжительности гроз

Годы	Фактические значения, час	Прогнозные значения, час	Относительная ошибка по модулю, %
1982	223	141,5	7,3
1983	268	135,78	9,8
1984	95,6	130,17	7,2
1985	125	128,64	0,58
1986	114	129,87	2,78
Средняя относительная ошибка по модулю			5,56

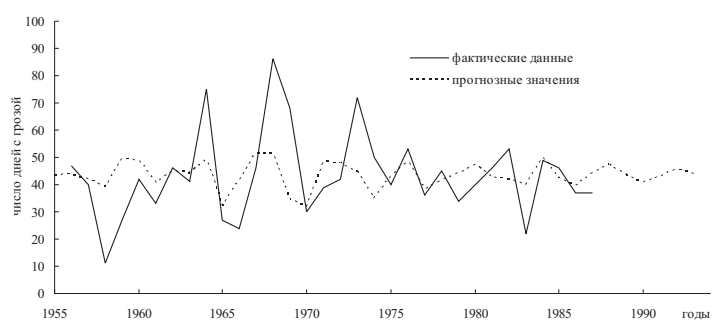


Рис. 5. Фактические и прогнозные значения числа дней с грозой.

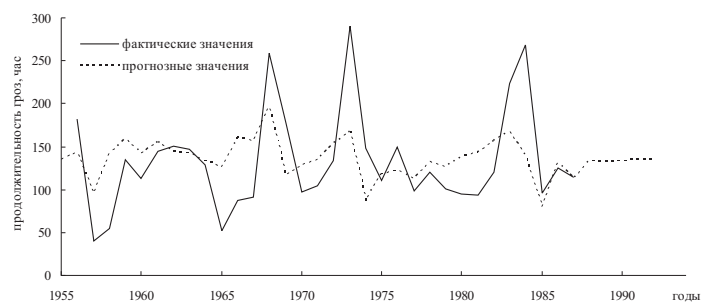


Рис. 6. Фактические и прогнозные значения продолжительности гроз.

В качестве адекватных моделей при прогнозе числа дней с грозой нами выбраны модели $ARIMA(2,1,0)$, $ARIMA(2,1,1)$, $ARIMA(2,1,2)$. При прогнозировании продолжительности гроз использовали модели $ARIMA(0,1,2)$, $ARIMA(2,1,0)$, $ARIMA(2,1,1)$, $ARIMA(2,1,2)$. Число дней с грозой и продолжительность гроз достаточно хорошо анализируются и прогнозируются моделями как авторегрессии, так и скользящей средней.

Стандартные ошибки рассмотренных моделей соответствуют $SEB=0,2$, что свидетельствует о правильном выборе модели.

На рис. 5, 6 приведены фактические и прогнозные значения параметров грозоразрядной деятельности, из которых видно, что прогноз числа дней с грозой меняется в пределах 40–47, а продолжительности гроз — 132–135. Изменение числа дней с грозой носит нестабильный характер, а изменение продолжительности гроз — относительно стабильный характер.

Таким образом, по изложенной выше методике построена стохастическая модель, которая удовлетворительно описывает изменение параметров грозоразрядной деятельности, приведены точность метода и прогнозные значения параметров числа дней с грозой и средней продолжительности гроз.

Литература

1. Бокс Жд., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1.—М.: Мир, 1974.—197 с.
2. Бокс Жд., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 2.—М.: Мир, 1974.—406 с.
3. Дубова Т. А. Статистические методы прогнозирования.—М.: Юнити, 2003.—206 с.
4. Елисеева И. И. Статистика.—М.: ТК Велби, 2004.—448 с.

Аджиев Анатолий Хабасович,
Аджиева Аида Анатольевна,
Ашабокова Фатима Мухамедовна,
Созаева Лежинка Танашевна

ГУ «Высокогорный геофизический институт»
Россия, КБР, 360030, г. Нальчик, пр. Ленина, 2
E-mail: adessa@kbrnet.ru

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ
ИЗМЕНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ
АТМОСФЕРЫ У ЗЕМЛИ НА МЕТЕОТРОПНЫЕ
РЕАКЦИИ КАРДИОЛОГИЧЕСКИХ И
ГИПЕРТОНИЧЕСКИХ БОЛЬНЫХ

**О. А. Аджиева, С. Л. Бжекшиев,
И. Х. Машуков, Х. Х. Машуков**

Работа посвящена исследованию влияния вариаций электрического поля атмосферы у поверхности земли на самочувствие кардиологических и гипертонических больных. Методами математической статистики анализировались данные о количестве обращений больных на станцию скорой помощи г. Нальчика и выявлялись корреляционные связи числа обращений с вариациями электрического поля у земли. Показано, что между значительными изменениями E , с одной стороны, и самочувствием кардиологических и гипертонических больных, с другой стороны, существует достаточно надежная и хорошо выраженная связь.

Известно, что при смене погодных условий у некоторых групп людей возникают так называемые метеотропные реакции, выражающиеся в ухудшении самочувствия. Причем глубина этих реакций может быть весьма значительной, вплоть до появления инфарктов и инсультов. Изучению этих реакций посвящено значительное количество работ. Актуальность данной проблемы подтверждена Международным конгрессом «Биометеорология человека», состоявшимся в г. Санкт-Петербурге 18–22 сентября 2000 г. [1].

Данная работа является развитием этих исследований и посвящена исследованию влияния изменения некоторых метеорологических параметров на реакцию гипертонических и кардиологических больных.

Нами проанализированы корреляционные связи между количеством обращений кардиологических и гипертонических больных к врачам в г. Нальчик в декабре 2005 г. и градиентом потенциала электрического поля у земли. Это сделано не случайно. Этот месяц характеризовался минимальным количеством дней с осадками. Это позволяет исключить влияние осадков на измерительную систему.

При анализе были использованы данные станции скорой медицинской помощи и других лечебных учреждений г. Нальчик. Было проанализировано состояние больных в периоды значительных изменений напряженности электрического поля (E , В/м).

На рис. 1 представлен ход среднесуточных значений $E_{\max}$ и $E_{\min}$ в течение месяца (а) и количество обращений на станцию скорой помощи (б) по случаям обострений гипертонической болезни (ГБ) и ишемической болезни сердца (ИБС).

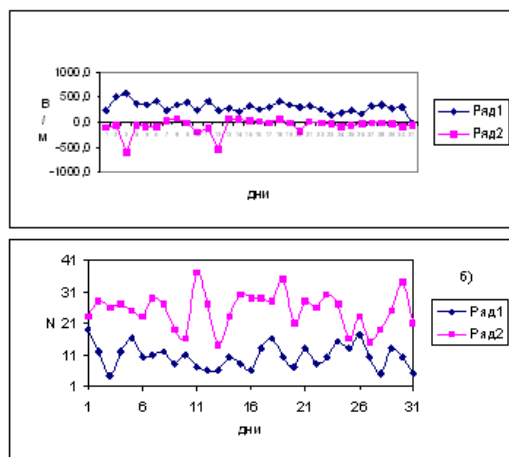


Рис. 1. а) ход среднесуточных значений напряженности $E_{\max}$ (ряд 1) и $E_{\min}$ (ряд 2) в декабре 2005 г. б) количество обострений ГБ (ряд 1) и ИБС (ряд 2) в декабре 2005 г.

При помощи стандартной статистической программы SPSS [2] был проведен корреляционный анализ между независимыми величинами (метеопараметры атмосферы) и зависимыми величинами (количество вызовов по ГБ и ИБС) в течение месяца. Выявлены следующие зависимости и закономерности.

Зависимость ГБ от $E_{\max}$ — прямая, коэффициент корреляции $r=0,215$, а от $E_{\min}$ — обратная, $r = -0,245$, т. е. с увеличением $E_{\max}$ растет число вызовов, а с увеличением $E_{\min}$, т. е. при стремлении величины напряженности электрического поля к нулевому значению, число вызовов уменьшается.

Таким образом, чем ближе напряженность электрического поля к нулевому значению, тем меньше число вызовов по случаям обострения ГБ.

Зависимость обострений ИБС от $E_{\max}$ обратная и слабо выражена ($r = -0,068$), но при этом прослеживается прямая зависимость от изменений $E_{\min}$ и коэффициент корреляции значительно больше ($r = 0,297$). Зависимость обострений ГБ и ИБС сильнее связана с минимальными значениями напряженности электрического поля ($r_{\text{ГБ}} = -0,245$, $r_{\text{ИБС}} = 0,297$).

При рассмотрении зависимости обострений ГБ и ИБС от отрицательных значений $E_{\min}(-)$ корреляционные связи возрастают и принимают соответственно значения $r_{\text{ГБ}} = 0,365$ и $r_{\text{ИБС}} = -0,422$.

Таким образом, между значительными изменениями напряженности электрического поля E , с одной стороны, и самочувствием кардиологических и гипертонических больных, с другой стороны, существует хорошо выраженная зависимость, требующая дальнейшего изучения.

Литература

1. Биометеорология человека. Тезисы Международного Конгресса 18–22 сентября 2000 г., Санкт-Петербург.— СПб.: Гидрометеиздат, 2000.—187 с.
2. Бююль А., Цефель П. Анализ статистических данных и восстановление скрытых закономерностей.—СПб.: ООО «ДиаСофтЮП», 2001.—608 с.

Аджиева Оксана Анатольевна

Республиканская детская клиническая больница

Россия, КБР, 360029, Нальчик, ул. Шогенова, 4

Бжекшиев Сураждин Лолович,

Машуков Идар Хазраталиевич

Базовый республиканский детский

реабилитационный центр «Радуга»

Россия, КБР, 360002, Нальчик, Долинск, ул. Школьная, 4

Машуков Хазратали Хамидович

ГУ «Высокогорный геофизический институт»

Россия, КБР, 360030, Нальчик, пр. Ленина, 2

E-mail: adessa@kbrnet.ru

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. А. Алиханов

В настоящей работе методом энергетических неравенств получена априорная оценка для решения нагруженного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами и нелокальным краевым условием второго рода. Нелокальные краевые задачи исследованы в работах [1–9].

В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) u_x(x_0, t) -$$

$$-q(x, t) u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = \alpha(t) u_x(0, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где $0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2$, $q(x, t) \geq 0$, $|k_x(x, t)|$, $|k_t(x, t)|$, $|r(x, t)|$, $q(x, t) \leq c_3$ всюду на $\bar{Q}_T$, $|\alpha(t)| \leq \alpha_0$.

В дальнейшем будем предполагать существование регулярного решения задачи (1)–(3).

Докажем следующее утверждение:

Лемма. Для любой функции $u(x) \in W_2^1[0, l]$ справедливы неравенства:

$$u^2(\xi) \leq \varepsilon \|pu_x\|_0^2 + \bar{c}_1(\varepsilon, \xi) \|pu\|_0^2, \quad (4)$$

$$\|u\|_0^2 \leq \varepsilon \|pu_x\|_0^2 + \bar{c}_2(\varepsilon) \|pu\|_0^2, \quad (5)$$

где ε — произвольное положительное число, $p(x) = \sqrt{l-x}$, $\|u\|_0^2 = \int_0^l u^2(x) dx$, $\xi \in [0, l]$.

◁ Из теоремы вложения [10, с. 76] при $\xi \leq x \leq l$ следует неравенство

$$(x - \xi) u^2(\xi) \leq \varepsilon (l - \xi) \int_{\xi}^x u_s^2(s) ds + \left(\frac{l - \xi}{\varepsilon} + 1 \right) \int_{\xi}^x u^2(s) ds. \quad (6)$$

Проинтегрировав неравенство (6) по x от ξ до l , приходим к неравенству

$$\frac{(l-\xi)^2}{2} u^2(\xi) \leq \varepsilon(l-\xi) \|pu_x\|_{L_2(\xi,l)}^2 + \left(\frac{l-\xi}{\varepsilon} + 1 \right) \|pu\|_{L_2(\xi,l)}^2. \quad (7)$$

Из неравенства (7) при $\varepsilon = \bar{\varepsilon}(l-\xi)/2$ следует неравенство (4), где $\bar{c}_1(\varepsilon, \xi) = \left(\frac{2}{\varepsilon} + 1 \right) \frac{2}{(l-\xi)^2}$.

Проинтегрировав очевидное неравенство

$$u^2(x) \leq \varepsilon \int_0^x u_s^2(s) ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x u^2(s) ds + u^2(0)$$

по x от 0 до l и учитывая неравенство (4) при $\xi = 0$, приходим к неравенству (5), где $\bar{c}_2(\varepsilon) = \frac{(l+1)(l+4)}{l\varepsilon} + \frac{2}{l}$.

Для того, чтобы получить априорную оценку для решения задачи (1)–(3), умножим уравнение (1) на $(k(x, t)u_x)_x$ и проинтегрируем по s от 0 до x :

$$\begin{aligned} & - \int_0^x u_t(s, t)(k(s, t)u_s)_s ds + \int_0^x (k(s, t)u_s(s, t))_s^2 ds + \\ & + u_x(x_0, t) \int_0^x r(s, t)(k(s, t)u_s(s, t))_s ds = \\ & = \int_0^x q(s, t)u(s, t)(k(s, t)u_s(s, t))_s ds - \int_0^x f(s, t)(k(s, t)u_s(s, t))_s ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Преобразуем слагаемые, входящие в тождество (8):

$$\begin{aligned} & - \int_0^x u_t(s, t)(k(s, t)u_s)_s ds = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (k^2(x, t)u_x^2(x, t)) - \\ & - k(x, t)r(x, t)u_x(x_0, t)u_x(x, t) + k(x, t)q(x, t)u(x, t)u_x(x, t) - \\ & - f(x, t)k(x, t)u_x(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x k(s, t)u_s^2(x, t) ds - \frac{1}{2} \int_0^x k_t(s, t)u_s^2(s, t) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^x k(s, t) k_s(x, t) u_s(s, t) u_{ss}(s, t) ds \right| \leq \\
& \leq \varepsilon \int_0^x u_{ss}^2(s, t) ds + \frac{c_2^2 c_3^2}{4\varepsilon} \int_0^x u_s^2(s, t) ds, \\
& \left| \int_0^x q(s, t) u(s, t) (k(s, t) u_s(s, t))_s ds \right| \leq \\
& \leq \varepsilon \int_0^x u_{ss}^2(s, t) ds + \frac{c_3^2}{2} \int_0^x u_s^2(s, t) ds + \left(\frac{c_2^2 c_3^2}{4\varepsilon} + \frac{c_3^2}{2} \right) \int_0^x u^2(s, t) ds, \\
& \left| u_x(x_0, t) \int_0^x r(s, t) (k(s, t) u_s(s, t))_s ds \right| \leq \\
& \leq \varepsilon \int_0^x u_{ss}^2(s, t) ds + \frac{c_3^2}{2} \int_0^x u_s^2(s, t) ds + \left(\frac{c_2^2 c_3^2}{4\varepsilon} + \frac{c_3^2}{2} \right) u_x^2(x_0, t), \\
& \left| \int_0^x f(s, t) (k(s, t) u_s(s, t))_s ds \right| \leq \\
& \leq \varepsilon \int_0^x u_{ss}^2(s, t) ds + \frac{1}{2} \int_0^x u_s^2(s, t) ds + \left(\frac{c_2^2}{4\varepsilon} + \frac{c_3^2}{2} \right) \int_0^x f^2(s, t) ds.
\end{aligned} \tag{9}$$

Подставляя (9) в тождество (8), приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x k(s, t) u_s^2(s, t) ds + c_1^2 \int_0^x u_{ss}^2(s, t) ds \leq \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (k^2(x, t) u_x^2(x, t)) + \\
& + 5\varepsilon \int_0^x u_{ss}^2(s, t) ds + M_1 (u^2(x, t) + u_x^2(x_0, t) + u_x^2(x, t) + \\
& + f^2(x, t) + \int_0^x u^2(s, t) ds + \int_0^x u_s^2(s, t) ds + \int_0^x f^2(s, t) ds),
\end{aligned} \tag{10}$$

где $M_1 > 0$ — известное число.

Полагая $\varepsilon = \frac{c_1^2}{10}$ и интегрируя неравенство (10) по x от 0 до l , находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l (l-x)k(x,t)u_x^2(x,t) dx + \frac{c_1^2}{2} \|pu_{xx}\|_0^2 \leq \frac{1}{2} (k^2(l,t)\alpha^2(t) - \\ - k^2(0,t)) u_x^2(0,t) + M_2(u_x^2(x_0,t) + \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|f\|_0^2), \end{aligned} \quad (11)$$

Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} u_x^2(\xi,t) \leq \varepsilon_1 \|pu_{xx}\|_0^2 + \bar{c}_1(\varepsilon_1, \xi) \|pu_x\|_0^2, \\ \|u_x\|_0^2 \leq \varepsilon_1 \|pu_{xx}\|_0^2 + \bar{c}_2(\varepsilon_1) \|pu_x\|_0^2, \quad \|u\|_0^2 \leq l \|pu_x\|_0^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\varepsilon_1 = \frac{c_1^2}{2c_2^2\alpha_0^2 + 8M_2}$. Из (11) и (12) следует неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l (l-x)k(x,t)u_x^2(x,t) dx + \frac{c_1^2}{4} \|pu_{xx}\|_0^2 \leq M_3(\|pu_x\|_0^2 + \|f\|_0^2), \quad (13)$$

где $M_3 > 0$ — известное число.

Проинтегрировав неравенство (13) по τ от 0 до t , получим неравенство

$$\|pu_x\|_0^2 + \int_0^t \|pu_{xx}\|_0^2 d\tau \leq M_4 \left(\int_0^t \|pu_x\|_0^2 d\tau + \int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u'_0(x)\|_0^2 \right), \quad (14)$$

где $M_4 > 0$ — известное число.

На основании леммы 5.5 [10, с. 112]) из (14) следует неравенство

$$\|pu_x\|_0^2 + \int_0^t \|pu_{xx}\|_0^2 d\tau \leq M_5 \left(\int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2 \right), \quad (15)$$

где $M_5 > 0$ — известное число.

Из неравенств (12) и (15) следует априорная оценка

$$\|u\|_0^2 + \|u_x\|_{2,Q_t}^2 \leq M_6 \left(\|f\|_{2,Q_t}^2 + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2 \right). \quad (16)$$

Из априорной оценки (16) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1)–(3) от входных данных.

Можно получить априорную оценку, аналогичную (16), в случае нелокального условия $u_x(l, t) = \alpha(t)u_x(\xi, t)$, где $\xi \in (0, l)$ — фиксированное число. Для чего нужно неравенство (10) проинтегрировать по x от ξ до l и воспользоваться неравенствами, аналогичными неравенствам (12) при $x \in [\xi, l]$. $\triangleright$

Литература

1. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР.—1969.—Т. 185, № 4.—С. 739–740.
2. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальная задача для оператора Штурма–Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // Докл. АН СССР.—1986.—Т. 291, № 3.—С. 534–540.
3. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальная краевая задача второго рода для оператора Штурма–Лиувилля // Дифференц. уравнения.—1987.—Т. 23, № 8.—С. 1422–1431.
4. Шхануков М. Х. Об устойчивости разностных схем, аппроксимирующих нелокальные задачи типа Бицадзе–Самарского // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. АН.—1994.—Т. 1, № 1.—С. 38–42.
5. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения.—1977.—Т. 13, № 2.—С. 294–304.
6. Гулин А. В., Морозова В. А. Об устойчивости нелокальной разностной краевой задачи // Дифференц. уравнения.—2003.—Т. 39, № 7.—С. 912–917.
7. Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В. А. Исследование нормы в задачах об устойчивости нелокальных разностных схем // Дифференц. уравнения.—2006.—Т. 42, № 7.—С. 914–923.
8. Удовиченко Н. С. Об одном нелокальном разностном операторе // Тихонов и современная математика: Тез. докл. секции «Вычислительная математика и информатика». Москва, 19–25 июня 2006 г.—М.: 2006.—С. 122–123.
9. Гулин А. В., Удовиченко Н. С. Нелокальный разностный оператор с комплексным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения.—2007.—Т. 43, № 7.—С. 923–928.
10. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.—М.: Наука, 1967.—736 с.

Алиханов Анатолий Алиевич
 Кабардино-Балкарский государственный
 университет им. Х. М. Бербекова
 Россия, КБР, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
 E-mail: alikhanov-tom@yandex.ru

К ВОПРОСУ РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

М. Т. Аркасова

В работе исследован вопрос разрешимости локальной краевой задачи для уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами. Методом конечных интегральных преобразований доказана возможность редукции исследуемой задачи к последовательности задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = f \quad (1)$$

в области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < \ell, 0 < t < T\}$ евклидовой плоскости переменных x, t , ограниченной отрезками AB, BC, CO и OA прямых $x = \ell, t = T, x = 0, t = 0$ соответственно, где $\ell, T = \text{const} > 0$, $L = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \beta \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \sigma$, а $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t), \varepsilon(t), \sigma(t), f(x, t)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\delta(t) \neq 0$.

Для уравнения (1) в области Ω исследована следующая

ЗАДАЧА. Найти регулярное решение $u(x, t)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\bar{\Omega} \setminus BC) \cap C^2(\Omega \cup \overline{OA}) \cap C^3(\Omega \cup \overline{AB} \cup \overline{OC})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_x(0, t) = \varphi_1(t), \quad u_x(\ell, t) = \varphi_2(t), \quad (2)$$

$$u_{xxx}(0, t) = \varphi_3(t), \quad u_{xxx}(\ell, t) = \varphi_4(t), \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \psi_2(x), \quad u_{tt}(x, 0) = \psi_3(x), \quad (4)$$

где $\varphi_i(t), \psi_j(x), i = \overline{1, 4}, j = \overline{1, 3}$ — заданные достаточно гладкие функции.

Решение задачи будем искать в виде

$$u(x, t) = U(x, t) + V(x, t). \quad (5)$$

С учетом (5), выбирая функцию $U(x, t)$ соответствующим образом, редуцируем задачу (1)–(4) к задаче относительно функции $V(x, t)$:

$$V_{xxxx} + \alpha V_{ttt} + \beta V_{xxt} + \gamma V_{xx} + \delta V_{tt} + \varepsilon V_t + \sigma V = F, \quad (6)$$

$$V_x(0, t) = V_x(\ell, t) = V_{xxx}(0, t) = V_{xxx}(\ell, t) = 0, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = \bar{\psi}_1(x), \quad u_t(x, 0) = \bar{\psi}_2(x), \quad u_{tt}(x, 0) = \bar{\psi}_3(x), \quad (8)$$

где

$$F(x, t) = f - U_{xxxx} - \alpha U_{ttt} - \beta U_{xxt} - \gamma U_{xx} - \delta U_{tt} - \varepsilon U_t - \sigma U,$$

$$\bar{\psi}_1(x) = \psi_1(x) - U(x, 0), \quad \bar{\psi}_2(x) = \psi_2(x) - U_t(x, 0),$$

$$\bar{\psi}_3(x) = \psi_3(x) - U_{tt}(x, 0), \quad LU = f, \quad U_x(0, t) = \varphi_1(t),$$

$$U_x(\ell, t) = \varphi_2(t), \quad U_{xxx}(0, t) = \varphi_3(t), \quad U_{xxx}(\ell, t) = \varphi_4(t).$$

Применяя к уравнению (6) конечное косинус-преобразование Фурье [1] по переменной x , будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha(t) \frac{d^3}{dt^3} \bar{V}_n(t) - \beta(t) \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 \frac{d}{dt} \bar{V}_n(t) - \gamma(t) \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 \bar{V}_n(t) + \\ + \delta(t) \frac{d^2}{dt^2} \bar{V}_n(t) + \varepsilon(t) \frac{d}{dt} \bar{V}_n(t) + \sigma(t) \bar{V}_n(t) = \bar{F}_n(t), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\bar{V}_n(t)$, $\bar{F}_n(t)$ — результат преобразования функций $V(x, t)$, $F(x, t)$ соответственно. В (9) уже учтены условия (7). Используя обозначения

$$\lambda(t) = \varepsilon(t) - \beta(t) \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2, \quad \mu(t) = \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^4 - \gamma(t) \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 + \sigma(t),$$

и опуская аргументы, перепишем (9) в виде:

$$\alpha \frac{d^3}{dt^3} \bar{V}_n + \delta \frac{d^2}{dt^2} \bar{V}_n + \lambda \frac{d}{dt} \bar{V}_n + \mu \bar{V}_n = \bar{F}_n. \quad (10)$$

Полученное равенство представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка относительно $\bar{V}_n(t)$.

Если $\alpha(t) \equiv 0$, то (10) принимает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{V}_n + \tilde{\lambda} \frac{d}{dt} \bar{V}_n + \tilde{\mu} \bar{V}_n = \tilde{\bar{F}}_n, \quad (11)$$

где $\tilde{\lambda} = \lambda/\delta$, $\tilde{\mu} = \mu/\delta$, $\tilde{\bar{F}}_n = \bar{F}_n/\delta$, т. е. получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. В этом случае для корректности задачи достаточны только первые два условия из (8). Применяя к ним конечное косинус-преобразование Фурье, получим

$$\bar{V}_n(0) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \bar{\psi}_1(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx, \quad \left. \frac{d\bar{V}_n}{dt} \right|_{t=0} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \bar{\psi}_2(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx. \quad (12)$$

Если $\alpha(t) \neq 0$, то, применяя к последнему из условий (8) конечное косинус-преобразование Фурье, будем иметь

$$\left. \frac{d^2 \bar{V}_n}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \bar{\psi}_3(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx. \quad (13)$$

По известной теореме [2], полученные задачи Коши (11), (12) и (10), (12), (13) имеют единственное решение.

Таким образом, вопрос разрешимости задачи (6)–(8) редуцирован к вопросу разрешимости последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\bar{V}_n(t)$. Применяя обратное конечное косинус-преобразование, получаем решение задачи (6)–(8) в виде соответствующего ряда Фурье, а решение задачи (1)–(4) — в виде (5).

Литература

1. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров.—М.: Мир, 1985.—384 с.
2. Эльсгольд Л. Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.—М.: Наука, 1969.—424 с.

АРКАСОВА МАРЬЯНА ТИМУРОВНА
Кабардино-Балкарский государственный
университет им. Х. М. Бербекова
Россия, КБР, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: mt-arkasova@yandex.ru

ОНТОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПОТОКОВ РАБОТ В ЗАДАЧЕ ПРИВЕДЕНИЯ ДАННЫХ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

О. М. Атаева

Процесс приведения данных как часть процесса ETL является одним из основных процессов в технологии хранилищ данных. Несмотря на обилие различных алгоритмов, реализующих различные аспекты процесса приведения данных, и существование множества различных приложений, каждое из этих решений эффективно только в конкретной системе. Все имеющиеся решения специализированы, и практически каждый раз приходится начинать с нуля. В качестве общего подхода для решения задач подобного типа в данной работе предлагается описание создания онтологии задачи приведения данных, не зависящей от конкретной среды и способов реализации. Рассматривается определение качества данных и общая классификация возникающих ошибок. На основе этой онтологии становится возможным эффективное моделирование потоков работ в задачах приведения данных.

1. Введение

Ввиду большого спектра проблем, возникающих при переносе данных из одного приложения или системы в другие, проблема приведения данных является одной из основных в технологии хранилищ данных. В процессе работы приложения ETL (от англ.: Extraction, Transformation, Loading — извлечение, преобразование, загрузка) извлекают информацию из исходного источника данных, преобразуют ее в формат, поддерживаемый приемником, а затем загружают в него преобразованную информацию. Цель практически любого ETL-приложения состоит в том, чтобы своевременно предоставить *качественные данные* пользователям.



Приведение данных определяют [1] как трехуровневый процесс, который состоит из следующих этапов, каждый из которых сам по себе представляет собой сложную проблему:

- определение и вычисление проблем в потоке данных, поступающих из источника;
- поиск и идентификация этих проблем в потоке данных;
- устранение выявленных проблем.

Все работы по приведению данных проводятся в тесной связи с попыткой дать ответ на вопрос «Что такое качество данных?» [5, 8–10, 13–15]. Ответ на данный вопрос в каждом конкретном случае определяется текущими требованиями и позволяет оценить эффективность проведенных работ и провести некоторую оптимизацию для достижения наилучшего результата, поэтому определение, используемое в одних системах, может совершенно не подходить в других [16]. Все исследователи сходятся во мнении, что «качество данных» — это многомерное понятие, состоящее из многих характеристик, каждая из которых определяет, удовлетворяют ли данные тому или иному условию. Но даже в определении одинаковых характеристик взгляды различных исследователей расходятся. Определение «качества данных», которое используется нами, охватывает основные характеристики качества на уровне данных, но не является жестким, так как дальнейшее развитие работ может выявить необходимость его расширения или уточнения.

2. Некоторые подходы к приведению данных

Для решения задач приведения данных существует большое количество инструментов и технологий. Основной недостаток этих решений заключается в плохой переносимости на другие системы и падение эффективности этих решений с увеличением количества потоков данных.

Существующие решения демонстрируют разнообразие подходов и показывают эффективную работу только в тех случаях, для которых конкретно они были разработаны [12]. Примерами таких систем являются:

- **AJAX** — декларативная среда для описания процесса приведения как серии преобразований данных, включая удаление дублирующих объектов. Используется декларативный язык, основанный на пяти операциях для трансформации данных. Базируется на SQL

и охватывает все возможные трансформации, описываемые в различной литературе по данной проблематике для реляционных баз данных. Семантика операторов охватывает возможные ошибки, дает возможность пользователю вмешаться в процесс, т. е. поддерживает механизм поэтапного очищения с отслеживанием происхождения новой информации. Разработка стратегии приведения данных делится на два этапа. Первая — разработка потока трансформаций, который получает на вход «грязные данные». Здесь важна сама оценка «качества данных», при достижении которой данные можно назвать «чистыми данными». Вторая задача — определить оценку производительности, которая установит скорость обработки данных, не принося в жертву качество.

- **Potter's Wheel** — интерактивная система приведения данных с жестко фиксированной последовательностью шагов, определяющих трансформацию данных и выявляющих ошибки. Основные компоненты архитектуры — это источник данных, инструмент преобразований, сортировщик для поддержки интерактивного просмотра результатов и инструмент автоматического определения ошибок. Интегрируя определение ошибок и трансформаций, этот инструмент позволяет пользователям поэтапно построить одно комплексное преобразование для приведения данных по мере обнаружения несоответствий.

- **Intelliclean** — это основанная на правилах система с основным акцентом на выявление дубликатов. На этапе предобработки выполняется предварительная обработка данных, далее происходит определение правил приведения, обусловленных состоянием текущих данных, которые определяют дальнейшие действия. Существует четыре класса правил, определяющих основные действия: правила выявления дубликатов, правила, определяющие обработку совпавших объектов, правила обновления (определяют спецификацию ограничений целостности) и предупреждающие правила (определяют условия привлечения эксперта).

Все эти и другие различные методы и инструменты ориентированы на решение текущих проблем в конкретной среде. Существующие решения обладают плохой переносимостью, и на практике в каждом случае приходится приступать к работе с нуля. Для устранения этих проблем необходим подход, который сможет обеспечить возможность общего обзора и управления всеми потоками данных в процессе приведения. Он должен одинаково обеспечивать работу с любыми данными из различных источников.

3. Онтологический подход

Формально онтология представляет собой шестерку $\langle C, A, T, D, R, F \rangle$, где C — множество классов, описывающих понятия задачи очистки данных, A — множество атрибутов, описывающих свойства понятий, T — множество типов значений атрибутов, D — множество доменов, R — множество отношений, заданных на понятиях, F — множество ограничений на значения атрибутов.

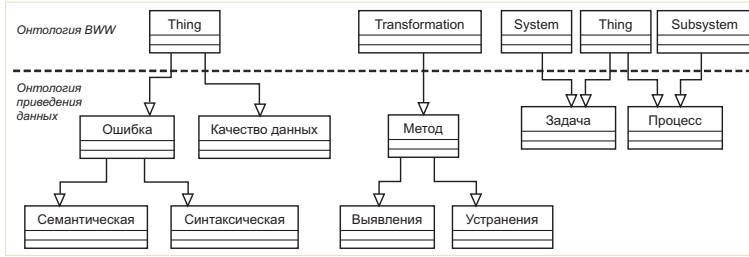
В работе [20] делается попытка создать онтологию задачи приведения данных с целью разработки более эффективного подхода к разработке таких систем, но описанная онтология недостаточно четко описывает различные понятия процесса приведения и связи между ними, что ограничивает возможность моделирования различных задач в рамках этой онтологии. Более естественным решением является рассмотрение базовых понятий информационной системы в целом, а затем их конкретизация и спецификация для рассматриваемой области задач.

Одним из наиболее эффективных подходов к задаче построения общей модели является подход, основанный на онтологии BWB [18, 19] для построения информационных систем. Данная онтология относится к высокоуровневым онтологиям и описывает набор понятий, их связей и характеристик, достаточных для описания структуры и поведения любых информационных систем. Онтология BWB исходит из того, что все методы моделирования информационных систем (Information Systems Analysis and Design — ISAD) должны быть в состоянии описать все понятия «реального мира», которые могут быть интересны пользователям информационных систем; в противном случае методика моделирования является неполной. Если модель неполна, то необходимо соответствующим образом усложнить модель для того, чтобы разработанная на базе нее информационная система адекватно отражала ту часть «реального мира», для автоматизации которой она предназначена.

4. Онтология приведения данных

Онтология приведения данных, представленная ниже, разработана в общем виде без привязки к конкретным методам и способам реализации. На рисунке приведены фрагменты UML-диаграммы классов основных сущностей разработанной онтологической модели.

В верхней части представлены понятия онтологии BWW, нижняя часть представляет их отображение на понятия задачи приведения данных.



Основными классами являются:

Ошибка. Пусть Γ — множество объектов, $A \in H$, $H \subseteq \Gamma$, A состоит из n компонент $a_1, \dots, a_n$, $a_i \in D_i$, где D_i — область определения a_i ; $F(D_i)$, $i \leq n$, — формат значений a_i , которые могут быть представлены в виде последовательности символов из непустого конечного алфавита T , т. е. для D_i существует произвольная грамматика, которая задает синтаксис элементов D_i ; $U = \{u_1, \dots, u_k\}$ — множество условий, накладываемых на объект A , $f_A(u_i)$ — функция, принимающая значения «true» в случае выполнения условия для объекта A и «false» в противном случае; функция $I(H) = \{a_j\}$, $j < n$, определяет подмножество компонент, идентифицирующих объекты из H , $I_A(H)$ — идентифицирующее объект A значение, S — схема приемника данных, S' — схема источника данных.

Будем говорить о наличии на уровне данных [5, 6, 11, 12]

а) *синтаксических ошибок*, если:

- $a_i = \text{null}$, при этом не существуют $u_k(a_j, a_i)$,
- значение $a_i \notin D_i$,
- $F_A(a_i) \neq F(D_i)$;

б) *семантических ошибок*, если:

- $a_i = \text{null}$, $a_i \in D_i$, при этом существуют $u_k(a_j, a_i)$ и $a_j \neq \text{null}$, $a_j \in D_j$, или $a_j = \text{null}$, $a_j \in D_j$, при этом существуют $u_k(a_j, a_i)$ и $a_i \neq \text{null}$, $a_i \in D_i$,
- $f_A(u_i) = \text{false}$,
- $A \in H$, $B \in H$ такие, что $I_A(H) = I_B(H)$;

и о наличии *ошибок на уровне схем данных* [2–4], если $S \neq S'$.

Качество данных. Если данные пригодны для тех целей, для которых они предназначены, то можно сказать, что эти данные качественные [17]. Качество данных определяется связанными характеристиками, каждая из которых определяет наличие тех или иных ошибок во множестве данных. Определим основные характеристики качества уровня данных.

- *Точность.* Точные данные не содержат никаких ошибок, кроме, может быть, дублирования и недостающих значений:

- *синтаксическая точность* (или *согласованность*). Синтаксически точные данные — это данные, для которых значение $a_j \in D_i$ и $F_A(a_i) = F(D_i)$,

- *семантическая точность* (или *достоверность*). Семантически точные данные — это данные, для которых $f_A(a_i) = \text{true}$.

- *Полнота.* Полные данные не содержат недостающих значений и объектов:

- *синтаксическая полнота.* Синтаксически полные данные — это данные, для которых $a_i \neq \text{null}$, при этом не существуют $u_k(a_j, a_i)$,

- *семантическая полнота.* $a_i \neq \text{null}$, $a_i \in D_i$, при этом существуют $u_k(a_j, a_i)$ и $a_j \neq \text{null}$, $a_j \in D_j$, или $a_j \neq \text{null}$, $a_j \in D_j$, при этом существуют $u_k(a_j, a_i)$ и $a_i \neq \text{null}$, $a_i \in D_i$.

- *Уникальность.* Уникальные данные — это такие данные, для которых не существует $A \in H$, $B \in H$ таких, что $I_A(H) = I_B(H)$.

Методы. В процессе приведения данных возникает пять групп основных проблем [5, 12, 17], которые приходится решать на разных этапах приведения на уровне данных:

а) *профайлинг данных* (выявление зависимостей между значениями объектов, выявление дублирующих значений, бессмысленные или неверные значения и т. д.);

б) *вычисление недоверенных объектов* (вычисление расстояний, проверка на соответствие модели, распределение значений и т. д.);

с) *выявление дублирующих объектов*;

д) *стандартизация значений* (преобразование типов, расщепление данных, преобразования, специфичные для рассматриваемой области, и т. д.);

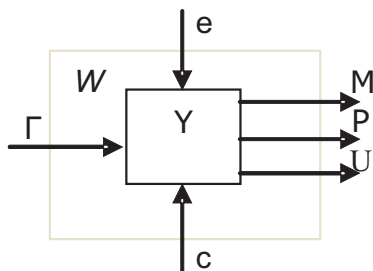
е) *выявление и вычисление недостающих значений* (выявление и определение недостающих значений, вычисление недостающих значений и т. д.).

Для решения этих проблем используются различные методы: статистические, кластерные, методы на шаблонах, ассоциативные правила. Все используемые методы делятся на два типа — методы выявления ошибок и методы устранения. Основным отличием этих методов является то, что методы выявления никак не меняют физической структуры обрабатываемых данных, тогда как методы устранения ошибок их изменяют.

Методы выявления. Для определения методов выявления введем обозначения:

- Γ — поток данных с ошибками;
- Y — модуль выявления ошибок;
- $\Gamma = M \cup U \cup P$, $M \cap U = \emptyset$, $P \cap U = \emptyset$,
 - M — множество ошибок,
 - P — подозрительное на наличие ошибок множество,
 - U — множество без ошибок;
- e — тип ошибки;
- c — условия.

Тогда метод выявления W соответствует определенному типу ошибок и выполняется при определенном условии, накладываемом на поток данных. Результатом работы является разбиение потока данных на три подмножества M , P , U .

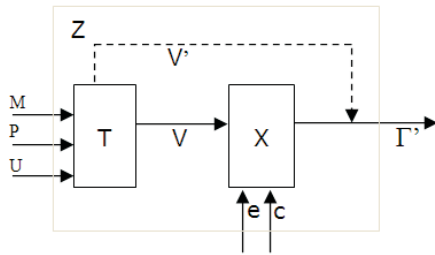


Метод выявления ошибок условно делит входящий поток данных на три множества в зависимости от оценки наличия ошибки и заданного на входе условия, также каждый метод определен для конкретного типа ошибок.

Методы устранения. Для определения методов устранения введем обозначения:

- X — модуль исправления ошибок;
- Γ' — преобразованный поток данных без ошибок;

- T — модуль принятия решений, который формирует поток входных данных для X , $T(M, P, T) = (V, V')$:
 - если $V = M \cup P$, то $V' = U$,
 - если $V = M$, то $V' = U \cup P$.



Метод устранения ошибок Z формирует поток выходных данных Γ' , в котором преобразованию подверглись только те данные, которые модуль T направил на вход X , остальные данные из V' остаются без изменений. Таким образом, метод устранения ошибок Z представляется в виде суперпозиции $Z = X(T) = X(V, V') = X(V) + V'$.

Процесс. Процесс состоит из набора методов, предназначенных для решения проблем, связанных с наличием одной конкретной ошибки. В одном процессе может использоваться не более трех методов. Введем следующие обозначения:

- P — процесс,
- W — метод выявления,
- Z — метод устранения.

$P = Z(Y)$ определяет полный процесс выявления и удаления ошибки, $P = Y(Z(Y))$ определяет полный процесс выявления и удаления ошибки с проведением проверки результатов.

Операция. Операции могут при необходимости использоваться в условиях, определенных для методов, это могут быть логические операции, операции сравнения строк и т. д.

Например, в методах выявления дубликатов для сравнения значений объектов $A \in H$ и $B \in H$ условие может быть определено как $c = a_1 \text{ equal } b_1 \text{ AND } a_2 \text{ equal } b_2$, где «equal» — операция, проверяющая значения компонентов на полное совпадение, а «AND» — логическая операция.

Задача. Определяется для выявления и удаления одной или нескольких ошибок, т. е. состоит из нескольких процессов. Обозна-

чим через P_1 процессы, ответственные за синтаксическую точность, P_2 — процессы, отвечающие за семантическую точность, P_3 — процессы, отвечающие за ошибки связанные с полнотой данных, P_4 — процессы, определяющие уникальность, тогда задача выявления и устранения нескольких ошибок различных типов может быть сформулирована как $Q = P_4(P_3(P_2(P_1(\Gamma))))$. Утверждается, что выявление и устранение ошибок именно в таком порядке приводит к наилучшим результатам.

5. Спецификация потока работ

Онтология, основные понятия которой были описаны выше, позволяет формировать потоки работ, так как определяет ключевые моменты, необходимые при их спецификации, а именно:

- потоки управления,
- потоки данных,
- управляющие механизмы,
- необходимые ресурсы.

Определены все основные сущности, необходимые для формирования потоков работ на основе онтологии BWV: состояния, действия, события, поток, вложенный поток работ.

6. Заключение

На основе анализа различных методов, типов задач и процессов приведения данных выявлены основные понятия, используемые в задачах приведения данных, построена онтология задачи приведения. Применение онтологии в реализации системы формирования потоков работ при приведении данных позволяет расширять перечень обрабатываемых ошибок, добавлять новые методы обнаружения и устранения, обеспечивает их взаимосвязи в процессе построения потоков работ при приведении данных. Расширение характеристик качества данных, которые могут быть необходимы при обработке новых источников информации или при обработке источников с часто меняющейся схемой данных, что неизбежно отражается возрастающим разнообразием ошибок, позволяет расширять круг решаемых задач. При этом общий механизм формирования потока работ приведения не претерпит никаких изменений. На данный момент существует реализация системы приведения данных на основе предло-

женного подхода, которая позволяет пользователям, не вдаваясь в детали алгоритмов обработки данных, формировать для широкого круга источников потоки работ приведения данных для различных задач.

Литература

1. *Maletic J. I., Marcus A.* Data Cleansing: Beyond Integrity Analysis // In The Conference on Information Quality.—Boston, 2000.—P. 200–209.
2. *Rahm E., Bernstein P. A.* A Survey of Approaches to Automatic Schema Matching // VLDB J.—2001.—V. 10, № 4.—P. 334–350.
3. Брюхов Д. О. Конструирование информационных систем на основе интероперабельных сред информационных ресурсов: Дис. ... канд. тех. наук.—М.: ИПИ РАН, 2003.—158 с.
4. *Maier A., Aguado J., Bernaras A., Laresgoiti I., Pedinaci C., Pena N., Smithers T.* Integration with Ontologies // Conference Paper WM2003.—Luzern, 2003.
5. *Müller H., Freytag J.-C.* Problems, Methods and Challenges in Comprehensive Data Cleansing.—Berlin, 2003.
6. *Kim W., Choi B.-J., Hong E.-K., Kim S.-K., Lee D.* A Taxonomy of Dirty Data // Data Mining and Knowledge Discovery.—2003.—V. 7, № 1.—P. 81–99.
7. *Pottinger R. A., Bernstein Ph. A.* Merging Models Based on Given Correspondences // In Proceedings of 29th International Conference on Very Large Data Bases (VLDB'03).—2003.—P. 862–873.
8. *Gertz M., Ozsu T., Saake G., Sattler K.-U.* Data Quality on the Web // ACM SIGMOD Record.—2004.—V. 33, № 1.—P. 126–132.
9. *Diane M. Strong, Yang W. Lee, Richard Y. Wang* Data Quality in Context // CACM.—1997.—V. 40, № 5.—P. 103–110.
10. *Batini C., Catarci T., Scannapieco M.* A Survey of Data Quality Issues in Cooperative Information Systems // Pre-conference ER tutorial.—2004.
11. *Desarkar M. S.* Data Profiling for ETL Processes.—2004.
12. *Rahm E., Do H. H.* Data Cleaning: Problems and Current Approaches // IEEE Bulletin on Data Engineering.—2000.—V. 23, № 4.—P. 3–13.
13. *Pipino L. L., Lee Y. W., Wang R. Y.* Data Quality Assessment // Communications of the ACM.—2002.—V. 45, № 4.—P. 211–218.
14. *Wand Y., Wang R. Y.* Anchoring Data Quality Dimensions Ontological Foundations // Communications of the ACM.—1996.—V. 39, № 11.—P. 86–95.
15. *Garvin D. A.* Completing on the Eighth Dimensions of Quality // Harvard Business Review.—1987.—V. 65, № 6.—P. 101–109.
16. *Wang R., Strong D.* Beyond Accuracy: What Data Quality Means to Data Consumers // J. of Management Information Systems.—1996.—V. 12, № 4.—P. 5–34.
17. *Galhardas H., Florescu D., Shasha D., Simon E., Saita C.* Declarative Data Cleaning: Language, Models and Algorithms // In Proceedings of the 27th International Conf. on VLDB.—2001.—P. 371–380.
18. *Weber R.* Ontological Foundations of Information Systems // Coopers & Lybrand and the Accounting Association of Australia and New Zealand.—Melbourne, 1997.—№ 4.

19. *Wang Y., Weber R.* An ontological model of an information system // IEEE Transactions on Software Engineering J.—1990.—V. 16, № 11.—P. 1281–1291.
20. *Wang X., Hamilton H. J., Bither Y.* An Ontology-Based Approach to Data Cleanning.—University of Regina, 2004.—15 p.

АТАЕВА ОЛЬГА МУРАТОВНА
Вычислительный центр РАН
Россия, 119333, Москва, ул. Вавилова, 40
E-mail: ataevaoli@inbox.ru

МЕТОД СУММАРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А. К. Баззаев

Работа посвящена рассмотрению локально-одномерной схемы (ЛОС) для уравнения диффузии дробного порядка в многомерной области. Получена априорная оценка для решения ЛОС. Доказаны устойчивость и сходимость ЛОС для рассматриваемого уравнения.

1. Постановка задачи. В цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leq T]$, основанием которого является p -мерный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_k < l_k, k = 1, 2, \dots, p\}$ с границей Γ , $\overline{G} = G + \Gamma$, рассмотрим третью краевую задачу для уравнения диффузии дробного порядка:

$$D_{0t}^\alpha u = Lu + f(x, t), \quad L = \sum_{k=1}^p L_k, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_k} \right|_{x_k=0} &= \beta u(x, t)|_{x_k=0} - \mu|_{x_k=0}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \overline{G}, \\ - \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_k} \right|_{x_k=l_k} &= \gamma u(x, t)|_{x_k=l_k} - \lambda|_{x_k=l_k}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \overline{G}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad L_k u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

где [4] $D_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{u}(x, \eta)}{(t-\eta)^\alpha} d\eta$, $0 < \alpha < 1$, — регуляризованная дробная производная Римана-Лиувилля, $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $\beta = \beta(x, t) > 0$, $\gamma = \gamma(x, t) > 0$.

2. Локально-одномерная разностная схема (ЛОС). На отрезке $[0, T]$ введем сетку

$$\overline{\omega}_\tau = \left\{ 0, t_{j+\frac{k}{p}} = \left(j + \frac{k}{p} \right) \tau, \quad j = 0, 1, \dots, J-1; \quad k = 1, 2, \dots, p \right\},$$

содержащую как узлы $t_j = j\tau$, так и фиктивные узлы $t_{j+\frac{k}{p}}$, $k = 1, 2, \dots, p-1$; ω_τ — множество узлов сетки $\bar{\omega}_\tau$, для которых $t > 0$.

По аналогии с [1] уравнению (1) поставим в соответствие цепочку «одномерных» уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} D_{0t}^\alpha \vartheta &= L_k \vartheta + f_k, \quad t_{j+\frac{k-1}{p}} < t \leq t_{j+\frac{k}{p}}, \\ k &= 1, 2, \dots, p, \quad x \in G, \quad \sum_{k=1}^p f_k = f. \end{aligned}$$

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\mathcal{P}u = D_{0t}^\alpha u - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^p \mathcal{P}_k u = 0, \quad \mathcal{P}_k u = \frac{1}{p} D_{0t}^\alpha u - L_k u - f_k.$$

На каждом полуинтервале $\Delta_k = \left(t_{j+\frac{k-1}{p}}, t_{j+\frac{k}{p}}\right]$, $k = 1, 2, \dots, p$, будем последовательно решать уравнения

$$\mathcal{P}_k \vartheta_{(k)} = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (3)$$

полагая при этом

$$\vartheta_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}(x, t_j) = \vartheta_{(p)}(x, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, J-1,$$

$$\vartheta_{(k)}(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}) = \vartheta_{(k-1)}(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}), \quad k = 2, 3, \dots, p; \quad j = 0, 1, \dots, J-1,$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \vartheta_{(k)}}{\partial x_k} \right|_{x_k=0} &= \beta(x, t) \vartheta_{(k)}|_{x_k=0} - \mu(x, t)|_{x_k=0}, \quad x \in \bar{G}, \\ - \left. \frac{\partial \vartheta_{(k)}}{\partial x_k} \right|_{x_k=l_k} &= \gamma(x, t) \vartheta_{(k)}|_{x_k=l_k} - \lambda(x, t)|_{x_k=l_k}, \quad x \in \bar{G}. \end{aligned} \quad (4)$$

Найдем дискретный аналог дробной производной порядка α , $0 < \alpha < 1$ [3]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_{j+\frac{k}{p}}} \frac{\dot{u}(x, \eta)}{(t_{j+\frac{k}{p}} - \eta)^\alpha} d\eta &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{\dot{u}(x, \eta)}{(t_{j+\frac{k}{p}} - \eta)^\alpha} d\eta = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\sum_{s=1}^{pj+k} \int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{\dot{u}(x, \eta)}{(t_{j+\frac{k}{p}} - \eta)^\alpha} d\eta + \sum_{s=1}^{pj+k} \int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{\ddot{u}(x, \xi)(\eta - \bar{t})}{(t_{j+\frac{k}{p}} - \eta)^\alpha} d\eta \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\bar{t} = t_{\frac{s}{p} - \frac{1}{2p}}$, $t_{\frac{s-1}{p}} < \xi < \eta$, $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Оценим вторую сумму выражения (5):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{\ddot{u}(x, \xi)(\eta - \bar{t})}{(t_{j+\frac{k}{p}} - \eta)^\alpha} d\eta &\leq \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\tau}{p} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) = \\ &= \frac{M}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\tau}{p} \left(t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} + t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha} + \dots + t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha} \right) = \\ &= \frac{M}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\tau}{p} t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} \leq \frac{M t_0^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\tau}{p} = O\left(\frac{\tau}{p}\right), \quad |\ddot{u}| \leq M. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_{j+\frac{k}{p}}} \frac{\dot{u}(x, \eta)}{(t_{j+\frac{k}{p}} - \eta)^\alpha} d\eta &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) u_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} + O\left(\frac{\tau}{p}\right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $u_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \frac{u^{\frac{s}{p}} - u^{\frac{s-1}{p}}}{\frac{s-1}{p}}$.

Каждое из уравнений (3) заменим разностной схемой

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) y_t^{\frac{s}{p}} = \\ = \Lambda_k \left(\sigma_k y^{j+\frac{k}{p}} - (1-\sigma_k) y^{j+\frac{k-1}{p}} \right) + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, \end{aligned}$$

σ_k — произвольные параметры.

Будем считать $\sigma_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, p$, т. е. ограничимся рассмотрением лишь неявных ЛОС. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) y_t^{\frac{s}{p}} = \Lambda_k y^{j+\frac{k}{p}} + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, \\ x \in \omega_h, \quad k = 1, 2, \dots, p, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{0t}^\alpha y_0^{j+\frac{k}{p}} &= \frac{y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k} - \tilde{\beta}_{k,0}^{j+\frac{k}{p}} y_0^{j+\frac{k}{p}} + \tilde{\mu}_{k,0}^{j+\frac{k}{p}}, \\ \Delta_{0t}^\alpha y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} &= -\frac{y_{x_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k} - \tilde{\gamma}_{k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \tilde{\lambda}_{k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{k,0}^{j+\frac{k}{p}} &= \frac{2}{h_k} \beta_{k,0}^{j+\frac{k}{p}}, \quad \tilde{\mu}_{k,0}^{j+\frac{k}{p}} = \frac{2}{h_k} \mu_{k,0}^{j+\frac{k}{p}} + f_k^{j+\frac{k}{p}}, \\ \tilde{\gamma}_{k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} &= \frac{2}{h_k} \gamma_{k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}, \quad \tilde{\lambda}_{k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} = \frac{2}{h_k} \lambda_{k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} + f_k^{j+\frac{k}{p}}, \\ \beta_{k,0}^{j+\frac{k}{p}} &= \beta \left(x, t_{j+\frac{k}{p}} \right) \Big|_{x_k=0}, \quad \mu_{k,0}^{j+\frac{k}{p}} = \mu \left(x, t_{j+\frac{k}{p}} \right) \Big|_{x_k=0}, \\ \gamma_{k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} &= \gamma \left(x, t_{j+\frac{k}{p}} \right) \Big|_{x_k=N_k}, \quad \lambda_{k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} = \lambda \left(x, t_{j+\frac{k}{p}} \right) \Big|_{x_k=N_k}, \\ \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} &= f_k \left(x, t_{j+\frac{k}{p}} \right), \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ y(x, 0) &= u_0(x), \quad \Lambda_k y = y_{\bar{x}_k, x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, p, \end{aligned}$$

$$x \in \bar{\omega}_h = \left\{ x_i = (i_1 h_1, \dots, i_p h_p) \in \bar{G}, \quad i_k = 0, 1, \dots, N_k, \quad h_k = \frac{l_k}{N_k} \right\},$$

$$\Delta_{0t}^\alpha y = \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) y_t^{\frac{s}{p}}.$$

3. Погрешность аппроксимации ЛОС. Обозначим через $z^{j+\frac{k}{p}} = y^{j+\frac{k}{p}} - u^{j+\frac{k}{p}}$, тогда для погрешности $z^{j+\frac{k}{p}}$ получим задачу

$$\Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^{\alpha} z = \Lambda_k z^{j+\frac{k}{p}} + \psi_k^{j+\frac{k}{p}},$$

$$z^{j+\frac{k}{p}}|_{\gamma_{h,k}} = 0, \quad z(x, 0) = 0,$$

где $\gamma_{h,k}$ — множество граничных по направлению x_k узлов,

$$\psi_k^{j+\frac{k}{p}} = \Lambda_k u^{j+\frac{k}{p}} + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) u_t^{\frac{s}{p}}.$$

Вводя обозначение

$$\overset{\circ}{\psi}_k = \left(L_k u + f_k - \frac{1}{p} D_{0t}^{\alpha} u \right)^{j+\frac{1}{2}}$$

и замечая, что

$$\sum_{k=1}^p \overset{\circ}{\psi}_k = 0$$

при $\sum_{k=1}^p f_k = f$, представим $\psi_k = \psi_k^{j+\frac{k}{p}}$ в виде

$$\psi_k = \overset{\circ}{\psi}_k + \psi_k^*,$$

где

$$\begin{aligned} \psi_k^* = & \left(\Lambda_k u^{j+\frac{k}{p}} - L_k u^{j+\frac{1}{2}} \right) + \left(\varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - f_k^{j+\frac{1}{2}} \right) - \\ & - \left(\Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^{\alpha} u - \frac{1}{p} (D_{0t}^{\alpha} u)^{j+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Тогда $\psi_k^* = O(h_k^2 + \tau)$, так как каждая из схем (7) номера k аппроксимирует соответствующее уравнение (3). Таким образом, ЛОС (7) обладает суммарной аппроксимацией

$$\psi = \sum_{k=1}^p \psi_k = \sum_{k=1}^p (\overset{\circ}{\psi}_k + \psi_k^*) = O(|h|^2 + \tau).$$

Перейдем теперь к изучению погрешности аппроксимации разностных граничных условий. Для $z^{j+\frac{k}{p}} = y^{j+\frac{k}{p}} - u^{j+\frac{k}{p}}$ получим задачу

$$\Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha z_0 = \frac{z_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k} - \tilde{\beta}_{k,0}^{j+\frac{k}{p}} z_0^{j+\frac{k}{p}} + \nu_k^{j+\frac{k}{p}},$$

где

$$\nu_k^{j+\frac{k}{p}} = \frac{u_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k} - \tilde{\beta}_{k,0}^{j+\frac{k}{p}} u_0^{j+\frac{k}{p}} - \Delta_{0t}^\alpha u_0^{j+\frac{k}{p}} + \tilde{\mu}_{k,0}^{j+\frac{k}{p}} + O(\tau + h_k^2),$$

$$u_0 = u(x, t)|_{x_k=0},$$

$$\Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha z_{N_k} = -\frac{z_{x_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k} - \tilde{\gamma}_{k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} z_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \delta_k^{j+\frac{k}{p}},$$

где

$$\delta_k^{j+\frac{k}{p}} = -\frac{u_{x_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k} - \tilde{\gamma}_{k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} u_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} - \Delta_{0t}^\alpha u_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \tilde{\lambda}_{k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} + O(\tau + h_k^2),$$

$$u_{N_k} = u(x, t)|_{x_k=l_k}.$$

4. Устойчивость ЛОС. Решение задачи (7) представим в виде суммы

$$y = \bar{y} + v,$$

где $\bar{y}$ — решение однородных уравнений (7) с краевыми и начальными условиями, а v — решение неоднородных уравнений с однородными краевыми и начальными условиями, т. е.

$$\frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) \bar{y}_t^{\frac{s}{p}} = \Lambda_k \bar{y}^{j+\frac{k}{p}}, \quad (8)$$

$$\Delta_{0t}^\alpha \bar{y}_0^{j+\frac{k}{p}} = \frac{\bar{y}_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k} - \tilde{\beta}_{k,0}^{j+\frac{k}{p}} \bar{y}_0^{j+\frac{k}{p}} + \tilde{\mu}_{k,0}^{j+\frac{k}{p}},$$

$$\Delta_{0t}^\alpha \bar{y}_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} = -\frac{\bar{y}_{x_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k} - \tilde{\gamma}_{k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} \bar{y}_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \tilde{\lambda}_{k,N_k}^{j+\frac{k}{p}},$$

$$\bar{y}(x, 0) = u_0(x),$$

$$\frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) v_{\frac{s}{p}}^{\frac{s}{p}} = \Lambda_k v^{j+\frac{k}{p}} + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad (9)$$

$$\Delta_{0t}^{\alpha} v_0^{j+\frac{k}{p}} = \frac{v_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k} - \tilde{\beta}_{k,0}^{j+\frac{k}{p}} v_0^{j+\frac{k}{p}},$$

$$\Delta_{0t}^{\alpha} v_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} = -\frac{v_{x_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k} - \tilde{\gamma}_{k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} v_{N_k}^{j+\frac{k}{p}},$$

$$v(x, 0) = 0.$$

Приведем уравнение (8) к канонической форме

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^{\alpha}} + \frac{2}{h_k^2} \right] \bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k}{p}} = \frac{1}{h_k^2} \left[\bar{y}_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}} + \bar{y}_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}} \right] + \\ & + \left[\frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^{\alpha}} (2 - 2^{1-\alpha}) \right] \bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}} + \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \times \\ & \times \left[\left(t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} \right) \bar{y}_{i_k}^0 + \left(-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha} \right) \bar{y}_{i_k}^1 + \right. \\ & \left. + \dots + \left(-t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha} \right) \bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Справедливо следующее утверждение [3].

Если $l = pj + k - 1 \geq 1$, тогда имеет место неравенство

$$-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha} > 0, \quad j = 0, 1, \dots, J-1; \quad k = 2, 3, \dots, p. \quad (11)$$

В [2] доказан принцип максимума и получены априорные оценки для решения сеточного уравнения общего вида

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in \Pi'(P)} B(P, Q)y(Q) + F(P), \quad P \in \Omega,$$

$$y(P) = \mu(P) \quad \text{при} \quad P \in S,$$

где P, Q — узлы сетки $\Omega + S$, $\Pi'(P)$ — окрестность узла P , не содержащая самого узла P . Коэффициенты $A(P)$, $B(P, Q)$ удовлетворяют условиям

$$A(P) > 0, \quad B(P, Q) > 0, \quad D(P) = A(P) - \sum_{Q \in \Pi'} B(P, Q) \geq 0. \quad (12)$$

Обозначим через $P(x, t')$, где $x \in \omega_h$, $t' \in \omega'_\tau$, узел $(p+1)$ -мерной сетки $\Omega = \omega_h \times \omega'_\tau$, через S — границу Ω , состоящую из узлов $P(x, 0)$ при $x \in \bar{\omega}_h$ и узлов $P(x, t_{j+\frac{k}{p}})$ при $t_{j+\frac{k}{p}} \in \omega'_\tau$ и $x \in \gamma_{h,k}$ для всех $k = 1, 2, \dots, p$; $j = 0, 1, \dots, J$.

Согласно утверждению, видим, что коэффициенты уравнения (10) удовлетворяют условиям (12) и $D(P) = 0$.

Из теоремы 4 (см. [2, гл. V]) следует, что для решения задачи (8) верна оценка

$$\begin{aligned} \|\bar{y}^j\|_C &\leq \|u_0\|_C + \max_{0 < t' \leq j\tau} \left(\left\| \frac{\tilde{\mu}(x, t')}{\tilde{\beta}} \right\|_{C_\gamma} + \left\| \frac{\tilde{\lambda}(x, t')}{\tilde{\gamma}} \right\|_{C_\gamma} \right) \leq \\ &\leq \|u_0\|_C + \max_{0 < t' \leq j\tau} \frac{1}{\xi} \left(\|\tilde{\mu}(x, t')\|_{C_\gamma} + \|\tilde{\lambda}(x, t')\|_{C_\gamma} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\xi = \min\{\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}\}, \quad \|y\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y|, \quad \|y\|_{C_\gamma} = \max_{x \in \gamma_h} |y|.$$

Переходим к оценке функции v . Уравнение (9) перепишем в виде

$$\frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{\tau}{p} \right)^{1-\alpha} v_t^{j+\frac{k}{p}} = \Lambda_k v^{j+\frac{k}{p}} + \tilde{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad (14)$$

$$\Delta_{0t}^\alpha v_0^{j+\frac{k}{p}} = \frac{v_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k} - \tilde{\beta}_{k,0}^{j+\frac{k}{p}} v_0^{j+\frac{k}{p}},$$

$$\Delta_{0t}^\alpha v_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} = -\frac{v_{x_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k} - \tilde{\gamma}_{k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} v_{N_k}^{j+\frac{k}{p}},$$

$$v(x, 0) = 0,$$

где

$$\tilde{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}} = \varphi^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k-1} \left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) v_t^{\frac{s}{p}}.$$

Уравнение (14) приведем к каноническому виду

$$\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{2}{h_k^2} \right] v_{i_k}^{j+\frac{k}{p}} = \frac{1}{h_k^2} \left[v_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}} + v_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}} \right] + \Phi \left(P_{j+\frac{k}{p}} \right),$$

где

$$\Phi\left(P_{j+\frac{k}{p}}\right) = \left[\frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^\alpha} (2-2^{1-\alpha})\right] v_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}} + \overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}},$$

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}} &= \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau} \left(t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right) v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} - \\ &\quad - \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{p_{j+k-2}} \left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha}\right) \left(v_{i_k}^{\frac{s}{p}} - v_{i_k}^{\frac{s-1}{p}}\right). \end{aligned}$$

Проверим выполнимость условий теоремы 4 (см. [2, гл. V, дополнение])

$$D(P_{(k)}) = A(P_{(k)}) - \sum_{Q \in \Pi'(P_k)} B(P_{(k)}, Q) = \frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^\alpha} > 0, \quad (15)$$

$$P_{(k)} = P(x, t_{j+\frac{k}{p}}), \quad A(P_{(k)}) > 0, \quad B(P_{(k)}, Q) > 0$$

для всех $Q \in \Pi''_{k-1}$, $Q \in \Pi'_k$,

$$\sum_{Q \in \Pi''_{k-1}} B(P_{(k)}, Q) = \frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^\alpha} (2-2^{1-\alpha}) > 0,$$

$$\frac{1}{D'(P_{(k)})} \sum_{Q \in \Pi''_{k-1}} B(P_{(k)}, Q) = 2-2^{1-\alpha} \leq 1,$$

где $\Pi'_k \left(P\left(x, t_{j+\frac{k}{p}}\right)\right) = \Pi'_k + \Pi''_{k-1}$, Π'_k — множество узлов $Q = Q(\xi, t_k) \in \Pi'_{(P(x, t_k))}$, Π''_{k-1} — множество узлов $Q = Q(\xi, t_{k-1}) \in \Pi'_{(P(x, t_{k-1}))}$.

На основании упомянутой теоремы 4 из [2] в силу (15) получаем оценку

$$\left\|v^{j+\frac{k}{p}}\right\|_C \leq p^{1-\alpha} \Gamma(2-\alpha) \tau^\alpha \left\|\overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\right\|_C + (2-2^{1-\alpha}) \left\|v^{j+\frac{k-1}{p}}\right\|_C. \quad (16)$$

Оценим $\|\overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\|_C$, где

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}} &= \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau} \left(t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha} \right) v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} - \\ &- \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k-2} \left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) v_t^{\frac{s}{p}} = \\ &= \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\left(t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} \right) v_{i_k}^0 + \right. \\ &+ \left(-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha} \right) v_{i_k}^{\frac{1}{p}} + \dots + \\ &\left. + \left(-t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha} \right) v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как, согласно утверждению, выражения, стоящие в круглых скобках, положительны, то из (17) получаем оценку

$$\|\overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\|_C \leq \|\varphi_k^{j+\frac{k}{p}}\|_C + \frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\tau^\alpha} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} (2^{1-\alpha} - 1) \max_{0 \leq s \leq k-2} \|v^{j+\frac{s}{p}}\|_C. \quad (18)$$

С помощью (18) из (16) находим

$$\max_{0 \leq s \leq k} \|v^{j+\frac{s}{p}}\|_C \leq \max_{0 \leq s \leq k-1} \|v^{j+\frac{s}{p}}\|_C + p^{1-\alpha} \tau^\alpha \Gamma(2-\alpha) \max_{0 \leq s \leq k} \|\varphi_k^{j+\frac{s}{p}}\|_C. \quad (19)$$

Суммируя (19) сначала по $k = 1, 2, \dots, p$, затем по $j' = 0, 1, \dots, j$, получаем оценку

$$\|v^{j+1}\|_C \leq \|v^0\|_C + p^{1-\alpha} \Gamma(2-\alpha) \sum_{j'=0}^j \tau^\alpha \sum_{k=1}^p \max_{0 \leq s \leq k} \|\varphi^{j'+\frac{s}{p}}\|_C. \quad (20)$$

Из оценок (13) и (20) следует окончательная оценка

$$\begin{aligned} \|y^{j+1}\|_C &\leq \|u_0\|_C + \max_{0 < t' \leq j\tau} \frac{1}{\xi} \left(\|\tilde{\mu}(x, t')\|_{C_\gamma} + \|\tilde{\lambda}(x, t')\|_{C_\gamma} \right) + \\ &+ p^{1-\alpha} \Gamma(2-\alpha) \sum_{j'=0}^j \tau^\alpha \sum_{k=1}^p \max_{0 \leq s \leq k} \|\varphi^{j'+\frac{s}{p}}\|_C. \end{aligned} \quad (21)$$

Литература

1. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656 с.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—416 с.
3. Лафишева М. М., Шхануков-Лафишев М. Х. Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка // Сб. трудов Международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приближения».—2007.—С. 384–385.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.

Баззаев Александр Казбекович
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова
Россия, 362040, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: aleksandr bazzaev@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКОМЕРИДИАННЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ ИНТЕГРИРОВАННЫХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Ю. А. Бахвалов, С. Ю. Князев

Описан метод численного решения уравнения Лапласа для задач с осевой симметрией, в котором приближенное решение представляется в виде суперпозиции полей, образованных кольцевыми равномерно заряженными источниками. Произведено тестирование метода и показана его эффективность при решении граничных задач для уравнений эллиптического типа.

Одним из эффективных методов решения граничных задач для линейных уравнений эллиптического типа является метод точечных источников поля (МТИ) [1, 2]. При использовании МТИ поле в рассматриваемой области моделируется полем системы точечных зарядов, расположенных на вспомогательной поверхности по периметру области решения на некотором удалении от нее. Численные эксперименты показывают, что при решении граничных задач для областей со сложной конфигурацией МТИ может оказаться более эффективным, чем другие традиционные методы решения подобных задач, например, метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ). Обобщением МТИ является метод интегрированных фундаментальных решений, который можно также назвать методом интегрированных источников поля (МИИ) [1, 2]. В МИИ искомое поле моделируется полем, образуемым системой равномерно или неравномерно заряженных протяженных источников, расположенных на вспомогательной поверхности. Эффективность МИИ значительно повышается при решении граничных задач с осевой симметрией.

Рассмотрим решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области, ограниченной поверхностью S . Направим ось z вдоль оси симметрии поверхности S , на которой заданы граничные условия

$$U(\mathbf{r})|_S = f(z). \quad (1)$$

Заряды, моделирующие искомое поле, располагаем на окружностях L_i , перпендикулярных оси z , радиусы которых R_i , а центры

находятся на оси z в точках с координатами Z_i . Можно показать, что потенциал поля, созданного круговым источником L_i с единичной линейной плотностью заряда в точке $\mathbf{r}$, с цилиндрическими координатами r, z равен

$$\psi_i(r, z) = \int_{L_i} \frac{dl_{R_i}}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{r}|} = \alpha \sqrt{\frac{m}{rR_i}} K(m), \quad (2)$$

где $m = \frac{4rR_i}{(z-Z_i)^2 + r^2 + R_i^2 + 2rR_i}$; $K(m)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода; α — постоянная величина, значение которой не влияет на конечный результат.

Функции $\psi_i(r, z)$ являются интегрированными фундаментальными решениями для рассматриваемой задачи. Они образуют базис для нахождения решения граничной задачи. В [1] доказывается полнота этого базиса.

Приближенное решение граничной задачи можно искать в виде

$$U_n(r, z) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \psi_i(r, z), \quad (3)$$

где n — число интегрированных источников, моделирующих поле; σ_i — линейная плотность заряда на круговом источнике L_i .

Для нахождения неизвестных плотностей заряда требуем выполнение граничного условия (1) в n точках коллокации с координатами r_k, z_k . Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i \psi_i(r_k, z_k) = f(z_k), \quad (4)$$

решая которую находим плотности σ_i , и затем с помощью формулы (3) вычисляем потенциал в произвольной точке поля.

Описанный метод тестировался на примере решения задачи Дирихле для области, ограниченной поверхностью эллипсоида S с уравнением

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1.$$

Точное решение задачи определялось в виде

$$U(r, z) = I_0(r)(2 \cos z + \sin z),$$

где $I_0(r)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Центры интегрированных источников располагались на оси z в равноотстоящих друг от друга точках с координатами Z_i , а их радиусы R_i полагались равными $k \cdot r_i$, где r_i — радиус сечения эллипсоида плоскостью, проходящей через точку с координатой $z_i = Z_i$ перпендикулярно оси z ; k — коэффициент, определяющий расстояние от зарядов до поверхности эллипсоида. Численное решение задачи Дирихле находилось при различных значениях числа интегрированных источников n и различных значениях коэффициента k . Для каждой n и k вычислялась максимальная погрешность численного решения

$$\epsilon = \max |U(r, z) - U_n(r, z)|_S.$$

На рис. 1 приведены зависимости максимальной погрешности ϵ от числа интегрированных источников поля n при значениях k , равных 1,1 (кривая 1), 1,2 (кривая 2) и 1,5 (кривая 3). Как видно из рис. 1, эту зависимость (для данной задачи) можно приближенно аппроксимировать выражением

$$\epsilon = \epsilon_0 \exp(-\gamma n),$$

где γ — параметр, зависящий от расположения источников поля. Для кривых 1–3 на рис. 1 параметр α равен 0,204, 0,319 и 0,646, соответственно. Таким образом, для решаемой задачи наблюдалось очень быстрое (экспоненциальное) убывание погрешности решения с ростом n вплоть до предельно низких значений для операций с числами типа *double*. Аналогичные результаты получались также при решении других тестовых задач.

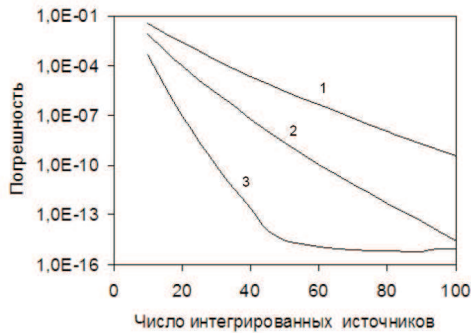


Рис. 1. Зависимость погрешности от числа источников.

Несмотря на высокую точность численного решения, уже при небольшом числе источников поля (при $n = 20$, $k = 1, 5$, $\epsilon = 2 \cdot 10^{-7}$) погрешность вычислений можно заметно уменьшить, используя интегрированные источники поля большей размерности. Будем рассматривать часть конической поверхности между окружностями с радиусами R_i и R_{i+1} как интегрированный источник поля с номером i , на поверхности которого распределен заряд с плотностью, линейно зависящей от координаты z . В этом случае потенциал поля, созданного интегрированным источником в точке $\mathbf{r}$, с цилиндрическими координатами r, z будет равен

$$u_i(r, z) = \int_{Z_i}^{Z_{i+1}} \int_L \frac{\sigma_i(Z) dl_R dZ}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}.$$

Представив зависимость поверхностной плотности заряда от координаты Z в виде

$$\sigma_i(Z) = \frac{(\sigma_{i+1} - \sigma_i)(Z - Z_i) + \sigma_i \Delta Z_i}{\Delta Z_i}, \quad (5)$$

где $\Delta Z_i = Z_{i+1} - Z_i$, и произведя в (5) численное интегрирование по методу Симпсона, найдем, что потенциал искомого поля будет определяться формулой (3), где теперь вместо базисных функций $\psi_i(r, z)$ фигурируют функции

$$\Psi_i(r, z) = \frac{(\Delta Z_i + \Delta Z_i)\psi_i(r, z)}{6} + \frac{\Delta Z_i \psi_{i+1/2}(r, z) + \Delta Z_{i-1} \psi_{i-1/2}(r, z)}{3}.$$

Здесь функции $\psi_{i\pm 1/2}(r, z)$ вычисляются для окружностей с $R_{i\pm 1/2} = (R_i + R_{i\pm 1})/2$ и $Z_{i\pm 1/2} = (Z_i + Z_{i\pm 1})/2$. Неизвестные плотности зарядов σ_i находим, решая систему уравнений (4) с базисными функциями $\Psi_i(r, z)$, а затем с помощью формулы (3) (с базисными функциями $\Psi_i(r, z)$) вычисляем потенциал в произвольной точке поля.

Тестирование данного метода с помощью описанной выше задачи показало, что при одинаковых числах интегрированных источников и их одинаковом расположении точность решения повышается на порядок. При этом объем вычислений увеличивается незначительно. Это свидетельствует о перспективности применения МИИ при решении граничных задач для уравнений эллиптического типа.

Литература

1. *Алексидзе М. А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач.—М.: Наука, 1991.—352 с.
2. *Князев С. Ю., Щербакова Е. Е.* Решение граничных задач математической физики методом точечных источников поля // Изв. ВУЗов. Электромеханика.—2007.—Т. 3.—С. 11–15.

Бахвалов Юрий Алексеевич

E-mail: iranov64@mail.ru

Князев Сергей Юрьевич

E-mail: ksy@donpac.ru

Южно-Российский государственный технический университет

(Новочеркасский политехнический институт)

Россия, 346428, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА

М. Х. Бештоков

Работа посвящена рассмотрению локально-одномерной схемы (ЛОС) [4] для псевдопараболического уравнения третьего порядка в p -мерном параллелепипеде. Получена априорная оценка для решения ЛОС. Доказана сходимость ЛОС для псевдопараболического уравнения третьего порядка в многомерной области.

1. Постановка задачи. В цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leq T]$, основанием которого является p -мерный прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$ с границей Γ , $\bar{G} = G + \Gamma$, рассматривается третья краевая задача для псевдопараболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$\Pi_{-\alpha}(x, t) = \beta_{-\alpha}(x, t)u(x, t) - \mu_{-\alpha}(x, t), \quad x_\alpha = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$-\Pi_{+\alpha}(x, t) = \beta_{+\alpha}(x, t)u(x, t) - \mu_{+\alpha}(x, t), \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad (4)$$

где

$$Lu = L^*u + L^{**}u, \quad L^*u = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha^*u, \quad L^{**}u = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha^{**}u,$$

$$L_\alpha^*u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) - q_\alpha(x, t)u, \quad L_\alpha^{**}u = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\eta_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right),$$

$$0 < c_0 \leq \eta_\alpha(x, t) \leq c_1, \quad |k_\alpha|, |\eta_{\alpha t}|, |q_\alpha(x, t)|, |\beta_{-\alpha}|, |\beta_{+\alpha}| \leq c_2, \quad (5)$$

$\Pi_\alpha(x, t) = k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\eta_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)$ — полный поток в направлении x_α , $\alpha = \overline{1, p}$, c_0, c_1, c_2 — положительные постоянные известные

числа. По ходу изложения будем использовать положительные постоянные числа M_i , $i = 1, 2, \dots$, зависящие только от входных данных задачи (1)–(4).

Относительно коэффициентов задачи (1)–(4) предположим, что они обладают таким количеством непрерывных производных, которое необходимо для обеспечения нужной гладкости решения $u(x, t)$ в цилиндре Q_T . Для обеспечения нужной гладкости $u(x, t)$ вблизи границы потребуем для (1)–(4) выполнения условий сопряжения нужного порядка [1–3, 6].

2. Локально-одномерная схема. Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом h_α , $h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$. Совокупность $\bar{\omega}_h$ точек $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, \dots, x_\alpha^{(i_\alpha)}, \dots, x_p^{(i_p)})$ пересечения этих плоскостей назовем узлами разностной сетки.

$$\bar{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^p \bar{\omega}_{h_\alpha},$$

$$\bar{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}.$$

Множество узлов, принадлежащих границе Γ , назовем граничными узлами, $\gamma_h = (x_i \in \Gamma)$, где $\gamma_{-\alpha}$ — левый граничный узел $x_\alpha = 0$, $\gamma_{+\alpha}$ — правый граничный узел $x_\alpha = l_\alpha$.

На отрезке $[0, T]$ введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, m, m\tau = T\} \text{ с шагом } \tau,$$

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j), x \in \bar{\omega}_h, t \in \bar{\omega}_\tau\}.$$

Каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на p частей, вводя точки $t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha\tau}{p}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$, и обозначим через $\Delta_\alpha = [t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}]$ — полуинтервал, где $\alpha = 1, 2, \dots, p$.

По аналогии с [4] уравнению (1) поставим в соответствие цепочку "одномерных" уравнений

$$\frac{1}{p} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = L_\alpha \vartheta + f_\alpha, \quad t_{j+\frac{\alpha-1}{p}} < t \leq t_{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad x \in G,$$

где $f_\alpha(x, t)$ — произвольные функции, удовлетворяющие условию нормировки $\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f$.

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^p \mathcal{L}_\alpha u = 0, \quad \mathcal{L}_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha, \quad L_\alpha u = L_\alpha^* u + L_\alpha^{**} u.$$

На каждом полуинтервале $\Delta_\alpha = \left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, будем последовательно решать задачи

$$\mathcal{L}_\alpha \vartheta_{(\alpha)} = \frac{1}{p} \frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha \vartheta_{(\alpha)} - f_\alpha = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, p}, \quad (6)$$

$$\Pi_{-\alpha}(x, t) = \beta_{-\alpha}(x, t) \vartheta_{(\alpha)} - \mu_{-\alpha}(x, t), \quad x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \quad (7)$$

$$-\Pi_{+\alpha}(x, t) = \beta_{+\alpha}(x, t) \vartheta_{(\alpha)} - \mu_{+\alpha}(x, t), \quad x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}, \quad (8)$$

полагая при этом [4, с. 487]

$$\vartheta_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}(x, t_j) = \vartheta_{(p)}(x, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

$$\vartheta_{(\alpha)}(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}) = \vartheta_{(\alpha-1)}(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}), \quad \alpha = 2, 3, \dots, p, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Аппроксимируя каждое уравнение (6) номера α на полуинтервале $t_{j+\frac{\alpha-1}{p}} < t \leq t_{j+\frac{\alpha}{p}}$ двухслойной схемой с весами и применяя известный прием повышения точности аппроксимации до второго порядка по h_α краевых условий третьего рода, получим цепочку p одномерных схем

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \overline{\Lambda}_\alpha^* \left(\sigma_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + (1 - \sigma_\alpha) y^{j+\frac{\alpha-1}{p}} \right) + \overline{\Lambda}_\alpha^{**} y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \Phi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}},$$

$$y(x, 0) = u_0(x),$$

где $x \in \overline{\omega}_h$, σ_α — произвольное число, $0 \leq \sigma_\alpha \leq 1$, $\alpha = \overline{1, p}$.

В дальнейшем мы ограничимся изучением лишь чисто неявных ЛОС ($\sigma_\alpha = 1$):

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \overline{\Lambda}_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \Phi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = \overline{1, p}, \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad (10)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (11)$$

где

$$\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} = \begin{cases} \Lambda_\alpha y^{(\alpha)} = (a_\alpha y_{x_\alpha}^{(\alpha)})_{x_\alpha} + (\gamma_\alpha y_{x_\alpha}^{(\alpha)})_{x_\alpha \bar{t}} - d_\alpha y^{(\alpha)}, & x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} = \frac{a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha, 0}^{(\alpha)} + (\gamma_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha, 0}^{(\alpha)})_{\bar{t}} - \beta_{-\alpha} y_0^{(\alpha)}}{0,5h_\alpha} - d_\alpha y_0^{(\alpha)}, & x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} = \frac{-a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{x_\alpha, N_\alpha}^{(\alpha)} - (\gamma_\alpha^{(N_\alpha)} y_{x_\alpha, N_\alpha}^{(\alpha)})_{\bar{t}} - \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)}}{0,5h_\alpha} - d_\alpha y_{N_\alpha}^{(\alpha)}, & x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}. \end{cases}$$

Итак, имеем цепочку одномерных схем при каждом $\alpha = 1, 2, \dots, p$.

Так как для схемы (10)–(11) не установлен принцип максимума, то априорные оценки будем получать с помощью метода энергетических неравенств. Умножим уравнение (10) скалярно на $y^{(\alpha)} = y^{j+\frac{\alpha}{p}}$:

$$[y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] - [\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] = [\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}], \quad (12)$$

где

$$[u, v] = \sum_{x \in \bar{\omega}_h} uvH, \quad H = \prod_{\alpha=1}^p \hbar_\alpha, \quad [u, v]_\alpha = \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} \hbar_\alpha,$$

$$\hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \\ \frac{h_\alpha}{2}, & i_\alpha = 0, N_\alpha. \end{cases}$$

$$[u, v]_\alpha = \sum_{L_\alpha=0}^{N_\alpha-1} u_{L_\alpha} v_{L_\alpha} \hbar_\alpha, \quad [u, v] = \sum_{L_\beta \neq L_\alpha} [u, v]_\alpha \frac{H}{\hbar_\alpha},$$

$$(u, v)_\alpha = \sum_{L_\alpha=1}^{N_\alpha} u_{L_\alpha} v_{L_\alpha} \hbar_\alpha,$$

$$\|u\| = (u, u) = (1, u^2), \quad \|u\| = [u, u] = [1, u^2].$$

Преобразуем каждую сумму тождества (12):

$$[y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] = (\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2)_{\bar{t}} + \tau \|y_{\bar{t}}^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} [\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] &= \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} [\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_\alpha \frac{H}{h_\alpha} = \\ &= \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} \bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} y^{(\alpha)} h_\alpha \right) h_1 \cdot h_2 \cdots h_{\alpha-1} \cdot h_{\alpha+1} \cdots h_p, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\beta = 1, 2, \dots, p$.

Тогда получим

$$\begin{aligned} [\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_\alpha &= -(a_\alpha, (y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)})^2)_\alpha - ((\gamma_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)})_{\bar{t}}, y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)})_\alpha - \\ &- [d, (y^{(\alpha)})^2]_\alpha - \beta_{-\alpha} (y_0^{(\alpha)})^2 - \beta_{+\alpha} (y_{N_\alpha}^{(\alpha)})^2. \end{aligned}$$

Подставляя последнее в (14), находим

$$\begin{aligned} [\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] &= \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left((a_\alpha, (y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)})^2)_\alpha + ((\gamma_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)})_{\bar{t}}, y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)})_\alpha + \right. \\ &\left. + [d, (y^{(\alpha)})^2]_\alpha + \beta_{-\alpha} (y_0^{(\alpha)})^2 + \beta_{+\alpha} (y_{N_\alpha}^{(\alpha)})^2 \right) \frac{H}{h_\alpha}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$[\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_\alpha = [\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_\alpha + \mu_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + \mu_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)}. \quad (16)$$

Суммируя (16) по всем $i_\beta \neq i_\alpha$, $\beta = 1, 2, \dots, p$, имеем

$$[\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] = \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left([\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_\alpha + \mu_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + \mu_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)} \right) \frac{H}{h_\alpha}. \quad (17)$$

Подставляя (13), (15) и (17) в тождество (12), получаем

$$\begin{aligned} &(\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2)_{\bar{t}} + \tau \|y_{\bar{t}}^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ &+ c_0 (\|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2)_{\bar{t}} + c_0 \tau \|y_{\bar{x}_\alpha \bar{t}}^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \\ &\leq 2c_2 (\|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2) + [d, (y^{(\alpha)})^2] + [\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] - \\ &- \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\beta_{-\alpha} (y_0^{(\alpha)})^2 + \beta_{+\alpha} (y_{N_\alpha}^{(\alpha)})^2 \right) \frac{H}{h_\alpha} + \\ &+ \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\mu_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + \mu_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)} \right) \frac{H}{h_\alpha}. \end{aligned} \quad (18)$$

Оценим слагаемые, стоящие в правой части неравенства (18). В силу разностного аналога теоремы вложения [5] имеем:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\beta_{-\alpha} (y_0^{(\alpha)})^2 + \beta_{+\alpha} (y_{N_\alpha}^{(\alpha)})^2 \right) \frac{H}{\hbar_\alpha} \leq \\
& \leq 2c_2 \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \|y^{(\alpha)}\|_{C(\alpha)}^2 \frac{H}{\hbar_\alpha} \leq \\
& \leq 2c_2 \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\varepsilon \|y_{\bar{x}}^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + \left(\frac{1}{l_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 \right) \frac{H}{\hbar_\alpha} = \\
& = 2c_2 \|y_{\bar{x}}^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + 2c_2 \left(\frac{1}{l_\alpha} + 1 \right) \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2, \quad \varepsilon = 1,
\end{aligned} \tag{19}$$

где $\|\cdot\|_{C(\alpha)}$, $\|\cdot\|_{L_2(\alpha)}$ означают, что нормы берутся по переменной x_α при фиксированных значениях остальных переменных,

$$\|y_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 = \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 \frac{H}{\hbar_\alpha}, \quad \|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 = \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha}^2 \hbar_\alpha,$$

$$[d, (y^{(\alpha)})^2] \leq c_2 \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2, \tag{20}$$

$$[\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] \leq \frac{1}{2} \|\varphi^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \frac{1}{2} \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\mu_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + \mu_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)} \right) \frac{H}{\hbar_\alpha} \leq \|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\
& + \left(\frac{1}{l_\alpha} + 1 \right) \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j) \right) \frac{H}{\hbar_\alpha}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Используя неравенства (19)–(22), из (18) получим:

$$\begin{aligned}
& \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 - \|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + c_0 \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 - \\
& - c_0 \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq M_1 \left(\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right) \tau + \\
& + \frac{\tau}{2} \|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \frac{\tau}{2} \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j) \right) \frac{H}{\hbar_\alpha}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Просуммируем (23) сначала по $\alpha = \overline{1, p}$:

$$\begin{aligned} & \|y^{j+1}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 - \|y^j\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + c_0 \|y_{\overline{x}}^{j+1}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 - c_0 \|y_{\overline{x}}^j\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 \leq \\ & \leq M_1 \sum_{\alpha=1}^p \left(\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \|y_{\overline{x}\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 \right) \tau + \\ & + \frac{\tau}{2} \sum_{\alpha=1}^p \left(\|\varphi^{(\alpha)}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j) \right) \frac{H}{h_\alpha} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

а затем по j' от 0 до j :

$$\begin{aligned} & \|y^{j+1}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \|y_{\overline{x}}^{j+1}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 \leq \\ & \leq M_2 \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left(\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \|y_{\overline{x}\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 \right) + M_3 F^j, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} F^j &= \|y^0\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \|y_{\overline{x}}^0\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \\ & + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left(\|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\mu_{-\alpha}^2(t_{j'}) + \mu_{+\alpha}^2(t_{j'}) \right) \frac{H}{h_\alpha} \right). \end{aligned}$$

Имеет место и такое неравенство:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq \alpha \leq p} \left(\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \|y_{\overline{x}}^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 \right) \leq \\ & \leq \nu_1 \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \max_{1 \leq \alpha \leq p} \left(\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \|y_{\overline{x}\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 \right) + \nu_2 F^j, \end{aligned} \quad (26)$$

где ν_1, ν_2 — известные положительные постоянные.

С помощью неравенства (26) на основании леммы 4 [5, с. 171] при $\tau < \tau_0 \leq \frac{1}{2pM_3}$ из неравенства (25) получим априорную оценку

$$\begin{aligned} & \|y^{j+1}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \|y_{\overline{x}}^{j+1}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 \leq M(t) \left[\|y^0\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \|y_{\overline{x}}^0\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left(\|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\mu_{-\alpha}^2(t_{j'}) + \mu_{+\alpha}^2(t_{j'}) \right) \frac{H}{h_\alpha} \right) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Из оценки (27) следует следующая

Теорема 1. *Локально-одномерная схема (10)–(11) устойчива по начальным данным и правой части так, что для решения задачи (10)–(11) при любых h и $\tau < \tau_0$ справедлива оценка (27).*

3. Погрешность аппроксимации. Перейдем к изучению погрешности аппроксимации (невязки) ЛОС и убедимся в том, что каждое уравнение (10) номера α в отдельности не аппроксимирует уравнение (1), но аппроксимирует уравнение $\mathcal{L}_\alpha \vartheta_{(\alpha)} = 0$ в обычном смысле, и сумма погрешностей аппроксимации $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_p$ стремится к нулю при $\tau \rightarrow 0$ и $|h| \rightarrow 0$. Поэтому система разностных уравнений (10) является аддитивной схемой, т. е. $\Psi_\alpha = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \Psi_\alpha^*$,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Psi}_\alpha &= (\mathcal{L}_\alpha u)^{j+\frac{1}{2}}, \quad \sum_{\alpha=1}^p \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = 0, \quad \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = O(1), \\ \Psi_\alpha^* &= O(h_\alpha^2 + \tau), \quad \Psi = \sum_{\alpha=1}^p \Psi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^p \Psi_\alpha^* = O(|h|^2 + \tau), \\ |h|^2 &= h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2. \end{aligned}$$

Из оценки (27) непосредственно не следует сходимость схемы, необходимо получить оценку, учитывающую аддитивность схемы.

Пусть $u = u(x, t)$ — решение задачи (1)–(4), а $y^{j+\frac{\alpha}{p}}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, — решение задачи (10)–(11). Характеристикой точности ЛОС является разность $z^{j+1} = y^{j+1} - u^{j+1}$. Промежуточные значения $y^{j+\frac{\alpha}{p}}$ будем сравнивать с $u^{j+\frac{\alpha}{p}} = u(x, t_{j+\frac{\alpha}{p}})$, полагая $z^{j+\frac{\alpha}{p}} = y^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha}{p}}$.

Подставляя $y^{j+\frac{\alpha}{p}} = z^{j+\frac{\alpha}{p}} + u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в уравнение (10), получим для погрешности z^{j+1} задачу

$$\frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}} - z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}} + \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = \overline{1, p}, \quad j = \overline{0, m}, \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad (28)$$

где

$$\Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}.$$

Вводя обозначение

$$\overset{\circ}{\Psi}_\alpha = \left(L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+\frac{1}{2}}$$

и замечая, что $\sum_{\alpha=1}^p \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha} = 0$, если $\sum_{\alpha=1}^p f_{\alpha} = f$, представим $\Psi_{\alpha} = \Psi^{j+\frac{\alpha}{p}}_{\alpha}$ в виде

$$\Psi_{\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha} + \Psi_{\alpha}^*,$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha}^* &= \left(\Lambda_{\alpha} u^{j+\frac{\alpha}{p}} - L_{\alpha} u^{j+\frac{1}{2}} \right) + \left(\varphi_{\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - f_{\alpha}^{j+\frac{1}{2}} \right) - \\ &- \left(\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \frac{1}{p} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+\frac{1}{2}} \right) = O(\hbar^2 + \tau), \\ \Psi &= \sum_{\alpha=1}^p \Psi_{\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \sum_{\alpha=1}^p \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^p \Psi_{\alpha}^* = O(\hbar^2 + \tau), \end{aligned}$$

где $|h|^2 = \hbar_1^2 + \hbar_2^2 + \dots + \hbar_p^2$.

Подставим $y^{j+\frac{\alpha}{p}} = z^{j+\frac{\alpha}{p}} + u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в разностные граничные условия и получим задачу для погрешности $z^{j+\frac{\alpha}{p}}$:

$$\begin{aligned} z_{\bar{t}}^{(\alpha)} &= \Lambda_{\alpha} z^{(\alpha)} + \Psi_{\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \Psi_{\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha} + \Psi_{\alpha}^*, \quad x_{\alpha} \in \omega_h, \\ \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha} &= O(1), \quad \Psi_{\alpha}^* = O(\hbar_{\alpha}^2 + \tau), \\ z_{\bar{t},0}^{(\alpha)} &= \Lambda_{\alpha}^{-} z^{(\alpha)} + \Psi_{-\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \Psi_{-\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + \frac{\Psi_{-\alpha}^*}{0.5\hbar_{\alpha}}, \quad x_{\alpha} \in \gamma_{-\alpha}, \\ \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} &= O(1), \quad \Psi_{-\alpha}^* = O(\hbar_{\alpha}^2 + \tau), \\ z_{\bar{t},N_{\alpha}}^{(\alpha)} &= \Lambda_{\alpha}^{+} z^{(\alpha)} + \Psi_{+\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \Psi_{+\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{+\alpha} + \frac{\Psi_{+\alpha}^*}{0.5\hbar_{\alpha}}, \quad x_{\alpha} \in \gamma_{+\alpha}, \\ \overset{\circ}{\Psi}_{+\alpha} &= O(1), \quad \Psi_{+\alpha}^* = O(\hbar_{\alpha}^2 + \tau), \\ z(x, 0) &= 0, \text{ или в виде} \\ z_{\bar{t}}^{(\alpha)} &= \bar{\Lambda}_{\alpha} z^{(\alpha)} + \Psi_{\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$z(x, 0) = 0,$$

где

$$\bar{\Lambda}_{\alpha} = \begin{cases} \Lambda_{\alpha}, & x_{\alpha} \in \omega_{\hbar_{\alpha}}, \\ \Lambda_{\alpha}^{-}, & x_{\alpha} \in \gamma_{-\alpha}, \\ \Lambda_{\alpha}^{+}, & x_{\alpha} \in \gamma_{+\alpha}, \end{cases} \quad \Psi_{\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \begin{cases} \Psi_{\alpha}, & x_{\alpha} \in \omega_{\hbar_{\alpha}}, \\ \Psi_{-\alpha}^{-}, & x_{\alpha} \in \gamma_{-\alpha}, \\ \Psi_{+\alpha}^{+}, & x_{\alpha} \in \gamma_{+\alpha}. \end{cases}$$

4. Сходимость ЛОС. По аналогии с [4] представим решение (29) в виде $z_{(\alpha)} = v_{(\alpha)} + \delta_{(\alpha)}$, $z_{(\alpha)} = z^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где $\delta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\delta_{(\alpha)} - \delta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha}, \quad (30)$$

при $x \in \omega_h + \gamma_{h,\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, $\delta(x, 0) = 0$, где

$$\overset{\circ}{\Psi}_{\alpha} = \begin{cases} \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha}, & x_{\alpha} \in \omega_{h_{\alpha}}, \\ \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha}, & x_{\alpha} \in \gamma_{-\alpha}, \\ \overset{\circ}{\Psi}_{+\alpha}, & x_{\alpha} \in \gamma_{+\alpha}. \end{cases}$$

Отсюда находим $\delta^{j+1} = \delta_{(p)} = \delta^j + \tau(\overset{\circ}{\Psi}_1 + \overset{\circ}{\Psi}_2 + \dots + \overset{\circ}{\Psi}_p) = \delta^j = \delta^{j-1} = \delta^{j-2} = \dots = \delta^0 = 0$, так как $\delta^0 = 0$. Тогда для $\delta_{(\alpha)}$ имеем

$$\delta_{(\alpha)} = \tau(\overset{\circ}{\Psi}_1 + \overset{\circ}{\Psi}_2 + \dots + \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha}) = -\tau(\overset{\circ}{\Psi}_{\alpha+1} + \dots + \overset{\circ}{\Psi}_p).$$

Функция v_{α} определяется условиями

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_{\alpha} v_{(\alpha)} + \tilde{\Psi}_{\alpha}, \quad x \in \omega_h, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (31)$$

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_{\alpha}^{-} v_{(\alpha)} + \frac{\tilde{\Psi}_{-\alpha}}{0,5\hbar_{\alpha}}, \quad x_{\alpha} \in \gamma_{-\alpha}, \quad (32)$$

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_{\alpha}^{+} v_{(\alpha)} + \frac{\tilde{\Psi}_{+\alpha}}{0,5\hbar_{\alpha}}, \quad x_{\alpha} \in \gamma_{+\alpha}, \quad (33)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad (34)$$

где

$$\tilde{\Psi}_{\alpha} = \begin{cases} \tilde{\Psi}_{\alpha} = \Psi_{\alpha}^{*} + (a_{\alpha} \delta_{\bar{x}_{\alpha}}^{j+\frac{\alpha}{p}})_{x_{\alpha}} + (\gamma_{\alpha} \delta_{\bar{x}_{\alpha}}^{j+\frac{\alpha}{p}})_{x_{\alpha}\bar{t}} - d_{\alpha} \delta^{j+\frac{\alpha}{p}}, & x_{\alpha} \in \omega_{h_{\alpha}}, \\ \frac{\tilde{\Psi}_{-\alpha}}{0,5\hbar_{\alpha}} = \frac{\Psi_{-\alpha}^{*}}{0,5\hbar_{\alpha}} + \frac{a_{\alpha}^{(+1\alpha)} \delta_{x_{\alpha},0}^{j+\frac{\alpha}{p}} + (\gamma_{\alpha}^{(+1\alpha)} \delta_{x_{\alpha},0}^{j+\frac{\alpha}{p}})_{\bar{t}} - \beta_{-\alpha} \delta^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0,5\hbar_{\alpha}}, & x_{\alpha} \in \gamma_{-\alpha}, \\ \frac{\tilde{\Psi}_{+\alpha}}{0,5\hbar_{\alpha}} = \frac{\Psi_{+\alpha}^{*}}{0,5\hbar_{\alpha}} + \frac{-a_{\alpha}^{(N\alpha)} \delta_{\bar{x}_{\alpha},N\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - (\gamma_{\alpha}^{(N\alpha)} \delta_{\bar{x}_{\alpha},N\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}})_{\bar{t}} - \beta_{+\alpha} \delta^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0,5\hbar_{\alpha}}, & x_{\alpha} \in \gamma_{+\alpha}. \end{cases}$$

Решение задачи (31)–(34) оценим с помощью теоремы 1:

$$\begin{aligned} \|v^{j+1}\|_{L_2(\varpi_h)}^2 + \|v_{\overline{x}}^{j+1}\|_{L_2(\varpi_h)}^2 &\leq M(t) \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left(\|\tilde{\Psi}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\varpi_h)}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\tilde{\Psi}_{-\alpha}^2(t_{j'}) + \tilde{\Psi}_{+\alpha}^2(t_{j'}) \right) \frac{H}{h_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Так как $\delta^j = 0$, $\delta_{(\alpha)} = O(\tau)$, $\|z^j\| \leq \|v^j\|$, то из оценки (35) следует следующая

Теорема 2. Пусть задача (1)–(4) имеет единственное непрерывное в Q_T решение $u(x, t)$; тогда если существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^6 u}{\partial t^2 \partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x_\alpha^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad \alpha \neq \beta,$$

то $\Lambda_\alpha \delta_{(\alpha)} = -\tau \Lambda_\alpha (\overset{\circ}{\Psi}_{\alpha+1} + \dots + \overset{\circ}{\Psi}_p) = O(\tau)$ во всех узлах $x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}$, так как $\delta_{(\alpha)}$ определяется из уравнения (30) всюду в $\omega_h + \gamma_{h,\alpha}$. С другой стороны $\Psi_\alpha^* = O(h_\alpha^2 + \tau)$, $\Psi_{-\alpha}^* = O(h_\alpha^2 + \tau)$, $\Psi_{+\alpha}^* = O(h_\alpha^2 + \tau)$, поэтому

$$\|\overline{\Psi}\|_{L_2(\varpi_h)}^2 = O(|h|^2 + \tau).$$

Таким образом, схема (10)–(11) сходится со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$ так, что

$$\begin{aligned} \|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1^2 &\leq M(|h|^2 + \tau), \\ \|y^{j+1}\|_1^2 &= \|y^{j+1}\|_{L_2(\varpi_h)}^2 + \|y_{\overline{x}}^{j+1}\|_{L_2(\varpi_h)}^2. \end{aligned}$$

Литература

1. Андреев В. Б. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ.— 1968.—Т. 8, № 6.—С. 1218–1231.
2. Бештоков М. Х. О сходимости разностных схем для псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами в многомерной области // В сб.: Исследования по математическому анализу, математическому моделированию и информатике.—Владикавказ, 2007.—С. 106–114.
3. Бештоков М. Х. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих третью краевую задачу для уравнения гиперболического типа в многомерной области с нелокальным краевым условием // Изв. КБНЦ РАН. Ч. 1.—Нальчик, 2007.—Т. 19, № 3.—С. 88–96.

4. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656 с.
5. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—416 с.
6. Фрязинов И. В. О разностной аппроксимации граничных условий для третьей краевой задачи // ЖВМ и МФ.—1964.—Т. 4, № 6.—С. 1106–1112.

Бештоков Мурат Хамидбиевич
Кабардино-Балкарский государственный
университет им. Х. М. Бербекова
Россия, КБР, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: beshtokov_murat@rambler.ru

ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ОБРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ЗАДАЧАХ И ИХ ИССЛЕДОВАНИЕ

А. О. Ватульян

Изложен метод исследования коэффициентных обратных задач теории упругости по восстановлению упругих характеристик и плотности, как функций координат по граничным полям смещений. На основе обобщенного равенства Грина предложен способ построения итерационных процессов. Представлены простейшие одномерные примеры.

Большинство современных математических моделей базируется на моделях с постоянными физическими характеристиками (модули упругости, плотность, коэффициенты температуропроводности и теплопроводности). В то же время совершенствование и уточнение моделей, описывающих распространение упругих волн в неоднородных твердых телах, распределение температуры в функционально-градиентных материалах требует отказа от гипотезы однородности и привлечения усложненных моделей, для которых характеристики исследуемой модели являются функциями координат (современная геофизика и вибросейсморазведка, биомеханика). Для практического использования модели неоднородной теории упругости необходимо знать две функции координат, которые должны быть предварительно определены из некоторых экспериментов или наблюдений, как правило, при помощи измерения граничных полей смещений. Наиболее часто такие функции предполагаются одномерными (особенно при использовании моделей слоя, полупространства или слоистого полупространства, стержневых или тонкостенных моделей), а наиболее распространенным способом их определения является анализ колебаний исследуемого объекта при варьировании способа нагружения и приводящий к исследованию обратных коэффициентных задач для дифференциальных операторов [1, 2]. Заметим, что к коэффициентным обратным задачам теории упругости, в которых требуется определить коэффициенты дифференциальных операторов по информации о граничных полях смещений в некотором

диапазоне изменения спектрального параметра, приводят несколько различных постановок, что отмечено в обзорной статье [3].

1. Общая постановка обратной задачи. Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω ограниченной области V с кусочно-гладкой границей S , причем n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к S . Сформулируем общую постановку коэффициентной обратной задачи об определении неоднородностей различного вида в упругом теле по данным частотного зондирования. Требуется определить напряженно-деформированное состояние, модули упругости и плотность, как функции координат, причем эти функции удовлетворяют следующей краевой задаче:

$$\sigma_{ij} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{mj} = C_{mjkl} u_{k,l}, \quad (2)$$

$$u_i |_{S_u} = 0, \sigma_{ij} n_j |_{S_\sigma} = p_i, \quad (3)$$

$$u_i |_{S_\sigma} = f_i, \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (4)$$

Здесь C_{ijkl} — компоненты тензора упругих модулей, являющиеся кусочно-непрерывными функциями координат и удовлетворяющие обычным условиям симметрии и положительной определенности, ρ — плотность. Функции пространственных координат, характеризующие законы изменения модулей упругости и плотности, могут иметь конечное число разрывов первого рода на некоторых поверхностях внутри области V , которые разбивают ее на конечное число подобластей V_m ; внутри каждой из этих подобластей функции бесконечно дифференцируемы. В частности, эти функции могут быть кусочно-постоянными (включение) или равны нулю (полость) на некоторых из этих подобластей. Далее такой класс функций будем обозначать $H_m(V)$. Отметим, что постановка (1)–(3) при известных модулях и плотности есть смешанная задача теории упругости и достаточно подробно изучена в литературе в рамках общих постановок для эллиптических операторов. Для таких задач разработаны эффективные численные методы решения, опирающиеся, в основном, на конечноэлементные технологии. Дополнительная информация, по которой осуществляется реконструкция неизвестных физических характеристик как функций координат (4), характеризует общую информацию о граничных полях смещений, которые доступны

для непосредственного измерения в некотором частотном диапазоне, и приводит к обратной коэффициентной задаче.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что граничное условие (4) может быть сформулировано на части границы, которая есть носитель нагрузки p_i .

2. Формулировка обобщенной формулы Грина. Для получения аналитических соотношений, связывающих заданные и искомые функции в обратных коэффициентных задачах, которые являются нелинейными, наиболее часто используется метод линеаризации [1, 4]. При этом для нахождения искомой операторной связи необходимо обращать дифференциальные операторы с переменными коэффициентами, что практически невозможно для произвольных видов зависимостей. В этом случае при исследовании различных задач неоднородной теории упругости обычно осуществляют выделение из исходного дифференциального оператора главный дифференциальный оператор, который может быть обратим аналитически (как правило, это оператор с постоянными или кусочно-постоянными коэффициентами). Отметим, что процедура линеаризации требует вычисления производной оператора задачи по Фреше. В то же время возможно избежать этой громоздкой процедуры, используя обобщенное соотношение взаимности или обобщенную формулу Грина.

Теорема 1. Пусть имеется два решения задачи (1)–(4), отвечающие различным модулям упругости и различным плотностям. Тогда для них справедлива обобщенная формула Грина или соотношение взаимности

$$\begin{aligned} \int_V \left(C_{m j k l}^{(2)} - C_{m j k l}^{(1)} \right) u_{k l}^{(2)} u_{m j}^{(1)} dV + \omega^2 \int_V \left(\rho^{(1)} - \rho^{(2)} \right) u_i^{(2)} u_i^{(1)} dV + \\ + \int_{S \sigma} p_i \left(u_i^{(2)} - u_i^{(1)} \right) dS = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \end{aligned} \quad (5)$$

◁ Пусть имеется два решения задачи (1)–(4), отвечающие различным модулям упругости и различным плотностям (их далее будем называть состояниями). При этом введем обозначения соответствующих характеристик первого решения: компоненты тензора модулей упругости $C_{m j k l}^{(1)}$, плотность $\rho^{(1)}$, компоненты вектора смещений $u_k^{(1)}$ и компоненты тензора напряжений $\sigma_{m j}^{(1)}$; второе — соответственно

$C_{mjk}^{(2)}, \rho^{(2)}, u_k^{(2)}, \sigma_{mj}^{(2)}$. Используем обычную технику для эллиптических уравнений второго порядка. Умножим уравнение движения для первого состояния на смещение $u_i^{(2)}$ и вычтем из него уравнение движения для второго состояния, умноженное на $u_i^{(1)}$. Далее, интегрируя по объему V , используя преобразование объемного интеграла в поверхностный в соответствии с теоремой Гаусса–Остроградского, получим искомую обобщенную формулу Грина (5). $\triangleright$

Построенное соотношение взаимности (5) позволяет сразу строить итерационные процессы в обратных коэффициентных задачах, формулируя линейные операторные уравнения для поправок n -го приближения, минуя процедуру обращения оператора с произвольными правыми частями на $n - 1$ шаге, что невозможно осуществить аналитически для операторов с переменными коэффициентами.

3. Построение итерационных процессов. На основе соотношения (5) и его упрощенных вариантов (постоянные модули или плотность) можно построить итерационные процессы, формулируя последовательность линейных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с суммируемыми ядрами. Будем исходить из соотношения (5). Положим в нем $u_k^{(1)} = u_k^{(n-1)}$, $u_k^{(2)} = u_k^{(n-1)} + u_k^{(n)}$, $C_{mjk}^{(1)} = C_{mjk}^{(n-1)}$, $C_{mjk}^{(2)} = C_{mjk}^{(n-1)} + C_{mjk}^{(n)}$, $\rho^{(1)} = \rho^{(n-1)}$, $\rho^{(2)} = \rho^{(n-1)} + \rho^{(n)}$, и, сохраняя в нем линейные относительно поправок n -го приближения слагаемые, с учетом дополнительного условия (4) получим них следующее уравнение

$$\begin{aligned} & \int_V C_{mjk}^{(n)} u_{kl}^{(n-1)} u_{mj}^{(n-1)} dV - \omega^2 \int_V \rho^{(n)} u_i^{(n-1)} u_i^{(n-1)} dV + \\ & + \int_{S\sigma} p_i (f_i - u_i^{(n-1)}) dS = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (n = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (6)$$

Это соотношение можно трактовать как интегральное уравнение 1-го рода. При этом ядра соответствующих интегральных операторов выражаются через решения, найденные на предыдущем этапе, и подынтегральные выражения внешне напоминают соответственно удвоенные потенциальную энергию деформаций и кинетическую энергию, где модули и плотность относятся к новой итерации, а смещения и деформации — к предыдущей. Критерием выхода из итера-

ционного процесса является малость значения функционала невязки $J_{n-1} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{S_\sigma} (f_i - u_i^{(n-1)})^2 dS d\omega$. Такой подход требует знания начального приближения, которое может быть определено из условия минимума функционала невязки J_0 на некотором подмножестве в $H_m(V)$, состоящем из простых функций, например, линейных или кусочно-постоянных. Такое сужение приводит к простой задаче отыскания минимума функционала на замкнутом выпуклом множестве в конечномерном пространстве, размерность которого определяется числом неизвестных функций.

4. Примеры. Постановка одномерных обратных задач. В качестве примеров реализации предложенного подхода рассмотрим простейшие одномерные обратные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задача А. Определение модуля упругости. Краевая задача, описывающая продольные колебания консольно закрепленного стержня постоянного поперечного сечения длины l с переменным модулем упругости под действием силы на конце, после введения безразмерных параметров и переменных имеет вид [5]

$$(g(x)u'(x, k))' + k^2 u(x, k) = 0, \quad (7)$$

$$u(0, k) = 0, \quad g(1)u'(1, k) = -1, \quad k^2 = \frac{\rho\omega^2 l^2}{E_0}, \quad g(x) = \frac{E(x)}{E_0}.$$

Требуется определить функцию $g(x)$ по дополнительному условию вида

$$u(1, k) = f(k), \quad k \in [k_1, k_2]. \quad (8)$$

Задача Б. Определение плотности. Краевая задача, описывающая продольные колебания в случае переменной плотности, имеет вид [5]

$$(u'(x, k))' + k^2 r(x) u(x, k) = 0, \quad (9)$$

$$u(0, k) = 0, \quad u'(1, k) = -1, \quad k^2 = \frac{\rho_0 \omega^2 l^2}{E_0}, \quad r(x) = \frac{\rho(x)}{\rho_0}.$$

Требуется определить функцию $r(x)$ по дополнительному условию (8). Соответствующие итерационные процессы строятся при помощи интегральных операторов, получающихся из соотношения (6), и имеют вид:

Задача А.

$$\int_0^1 g^{(n)}(x)(u^{(n-1)}(x, k)')^2 dx - (f(k) - u^{(n-1)}(1, k)) = 0, \quad k \in [k_1, k_2]. \quad (10)$$

Задача Б.

$$k^2 \int_0^1 r^{(n)}(x)(u^{(n-1)}(x, k))^2 dx + (f(k) - u^{(n-1)}(1, k)) = 0, \quad k \in [k_1, k_2]. \quad (11)$$

Отметим интересные особенности ядер интегральных операторов в (10), (11). Во-первых, оба ядра неотрицательны при $0 < k < k_*$, где k_* есть первое собственное значение соответствующей краевой задачи. Во-вторых, ядро в задаче А всегда положительно, а ядро в задаче Б обращается в нуль при $x = 0$, что свидетельствует о различных свойствах решений. Так, итерационный процесс для оператора в задаче Б не может реализовать нахождение поправки $r(0) = r_0$, поскольку это значение может быть произвольно. Операторы (10), (11) являются компактными операторами, действующими из $H_m([0, 1])$ в $C^\infty[k_1, k_2]$, и обратные к ним неограничены. Для обращения используется регуляризующий алгоритм, как правило, в форме А. Н. Тихонова [6].

5. Теоремы единственности. В заключение приведем две теоремы единственности для гладких законов изменения искомым характеристик в одномерных задачах. Имеют место

Теорема 2. Если $g(x) \in C^\infty[0, 1]$, и отрезок $[k_1, k_2]$ не содержит k_* , то решение задачи А единственно.

Теорема 3. Если $r(x) \in C^\infty[0, 1]$, $r(0) = r_0$, и отрезок $[k_1, k_2]$ не содержит k_* , то решение задачи Б единственно.

Доказательства обеих теорем опираются на аналитичность решений $u(x, k)$ в рассматриваемых случаях.

Литература

1. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач.—М.: МГУ, 1994.—206 с.
2. Isakov V. Inverse problems for PDE.—Springer-Verlag, 2005.—284 p.
3. Ватульян А. О. Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел // Вестник Самарского госуниверситета. Ест. науки.—2007.—№ 4 (54).—С. 93–103.

4. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела.—М.: Физматлит, 2007.—224 с.
5. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем.—М.: Машиностроение, 1970.—734 с.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1986.—287 с.

Ватульян Александр Ованесович

Южный математический институт ВНЦ РАН;

Южный федеральный университет

Россия, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105

E-mail: vatulyan@aanet.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ МАГНИТАМИ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. В. Гречихин

Показана необходимость определения магнитных характеристик деталей магнитоэлектрических систем. Для решения этой проблемы применяется метод, объединяющий измерение и моделирование магнитных состояний деталей. Исходя из требований к точности и быстродействию определения характеристик, предлагается использовать математическую модель на основе интегральных уравнений. Рассматривается пример реализации модели, приводится оценка ее эффективности.

Магнитоэлектрические системы, содержащие постоянные магниты, широко применяются в современной технике. В связи с все большей миниатюризацией систем, существенной становится зависимость их эксплуатационных характеристик от магнитных свойств деталей, из которых они изготовлены. Изготовление деталей из ферромагнитных материалов — сложный технологический процесс, не позволяющий обеспечить полную идентичность магнитных параметров. Поэтому в процессе сборки систем необходимо знать реальные магнитные характеристики постоянных магнитов и других ферромагнетиков. Для определения характеристик может быть использован натурно-модельный метод, объединяющий измерение и моделирование магнитных состояний деталей [1]. Результаты эксперимента используются и в качестве исходных данных для решения обратной задачи расчета магнитного поля системы, и в качестве критерия правильности решения данной задачи. Решение обратной задачи сводится к решению серии прямых задач. Каждая прямая задача является корректной, т. е. существует единственное решение, непрерывно зависящее от граничных условий и параметров магнитной среды. Метод реализуется следующим образом. Путем измерений определяется экспериментальная магнитная характеристика $B(H)_{ex}$. Затем выполняется математическое моделирование магнитного поля в системе и расчет значений величин B и H в объемах, занимаемых

датчиками. Результатом вычислений является расчетная характеристика $B(H)_{es}$. Сравнивая характеристики $B(H)_{ex}$ и $B(H)_{es}$, по специальной методике строят первое приближение искомой характеристики $B(H)_1$, которую используют для нового расчета показаний сенсоров. Процесс повторяют i раз до тех пор, пока экспериментальная и расчетная характеристики совпадут с заданной точностью. Соответствующее приближение искомой характеристики $B(H)_i$ и принимается за окончательный результат измерения. Выбор метода моделирования магнитного поля связан с характеристиками магнитоэлектрической системы и во многом зависит от требуемой точности и затрачиваемого машинного времени. Предлагается для математического моделирования использовать метод интегральных уравнений, широко применяемый при решении задач магнитостатики. К достоинствам модели в виде интегральных уравнений относится то, что уравнения составляются только для ферромагнитных областей. Как следствие, значительно сокращается размерность задачи по сравнению с моделями на основе дифференциальных уравнений и не возникает трудностей при рассмотрении разомкнутых систем. В соответствии с теоремой разложения Гельмгольца, напряженность магнитного поля, создаваемого в магнитной системе, может быть представлена в виде суммы соленоидальной $\vec{H}_0$ и безвихревой $\vec{H}_J$ составляющих [2]:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_J, \quad (1)$$

где $\vec{H}_0$ — составляющая, созданная токами катушек магнитной системы при предположении, что все пространство заполнено однородной средой с магнитной проницаемостью, равной магнитной постоянной μ_0 ; $\vec{H}_J$ — составляющая, созданная ферромагнитными телами. В безвихревом поле $\text{rot } \vec{H}_J = 0$ и, следовательно, эту составляющую можно определить через скалярную функцию соотношением

$$\vec{H}_J(Q) = -\text{grad } u_J(Q), \quad (2)$$

где $u_m(Q)$ — скалярный магнитный потенциал в точке Q , определяемый формулой [3]:

$$u_m(Q) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\text{div } \vec{M}(K)}{r_{QK}} dV_K + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{M_n(P)}{r_{QP}} dS_P, \quad (3)$$

где $\vec{M}$ — намагниченность ферромагнетиков; M_n — проекция $\vec{M}$ на нормаль $\vec{n}(p)$ к поверхности S ферромагнетиков в точке P ; r_{QK} — расстояние между точками Q и K ; r_{QP} — расстояние между точками Q и P .

Характеристики $B(H)$ ферромагнетиков заменим характеристиками $M(H)$ на основе формулы $\vec{M} = (\vec{B}/\mu_0) - \vec{H}$.

Соотношения (1)–(3) и характеристики $M = f(H)$ образуют математическую модель задачи. Искомым является распределение $\vec{M}$ по объему ферромагнетиков при известном распределении $\vec{H}_0$.

В случае $\text{div} \vec{M} = 0$, $\vec{H}_J$ определяется с использованием зарядовой модели

$$\vec{H}_J[\vec{M}(Q)] = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{M_n(P) \vec{e}_{PQ}}{r_{PQ}^2} dS_P, \quad (4)$$

где $\vec{e}_{PQ}$ — единичный вектор, направленный из точки P к точке Q .

Перейдем к построению дискретной модели, используя кусочно-постоянную аппроксимацию намагниченности по элементарным объемам: $M_j = \text{const}$, где $j = 1, 2, \dots, N$ — номер элементарного объема [4]. В этом случае интегрирование в (4) производится по всем поверхностям $\Delta S_{\nu j}$, ограничивающим элементарные объемы. При этом в точках наблюдения Q_j получим

$$\vec{H}(Q_j) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \sum_{\nu=1}^{l_j} M_{n\nu j} \iint_{\Delta S_{\nu j}} \frac{\vec{e}_{PQ_j}}{r_{PQ}^2} dS_P, \quad (5)$$

где l_j — число граней j -го элементарного объема; точки наблюдения Q_j располагаются в геометрических центрах элементов.

Рассмотрим реализацию математической модели на примере магнитоэлектрической системы, представляющей собой соленоид, внутри которого по оси расположены два цилиндрических стержня из магнитомягкого материала, между которыми размещается постоянный магнит цилиндрической формы.

Выберем цилиндрическую систему координат, при этом ось z направим по оси ферромагнетиков. Начало координат поместим в геометрический центр системы.

Примем следующие допущения: векторы $\vec{M}$ и $\vec{H}$ в ферромагнетиках имеют только z -составляющие, значения H_z и B_z по сечениям ферромагнитных тел равны их среднему значению. Постоянный магнит имеет постоянную намагниченность по всему объему M_{PM} .

Разобьем ферромагнетики на $2n$ элементарных цилиндров, в пределах которых будем считать $M_{z_i} = \text{const}$. Значения M_j одинаковы на левом и правом торце j -го элемента, но противоположны по знаку, поэтому, принимая во внимание, что $H_i = f(M_i)$, из (5) получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{j=2}^n k_{ij} M_j = H_{0i} - H_i(M_i) - k_{1j} M_{PM}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (6)$$

Коэффициенты $k_{i,j}$ равны:

$$a) \ k_{ij} = 1 - W_{ij}, \quad i = j; \quad b) \ k_{ij} = -W_{ij}, \quad i \neq j;$$

где с учетом симметрии магнитной системы относительно плоскости, проходящей через геометрический центр системы нормально оси z ,

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{z_i - z_j}{\sqrt{(z_i - z_j)^2 + a^2}} - \frac{z_i - z_{j+1}}{\sqrt{(z_i - z_{j+1})^2 + a^2}} + \right. \\ \left. + \frac{z_i + z_{j+1}}{\sqrt{(z_i + z_{j+1})^2 + a^2}} - \frac{z_i + z_j}{\sqrt{(z_i + z_j)^2 + a^2}} \right],$$

$z_i - z_j$, $z_i - z_{j+1}$ — расстояния между точкой i и торцами j -го и $(j+1)$ -го элементов, соответственно; $z_i + z_j$, $z_i + z_{j+1}$ — расстояния между точкой i и торцами элементов, симметричных j -му и $(j+1)$ -му; $a = d/2$, d — диаметр ферромагнетика.

Напряженность магнитного поля H_{0i} определяется по известным соотношениям, в частности, в случае осесимметричных катушек, с помощью формул, приведенных в [5]:

$$B_r = \frac{1}{2\pi} \int_{R_B}^{R_H} \int_0^\pi \int_{b_1}^{b_2} \frac{J r_M (z_Q - z_M) \cos \phi}{r_{MQ}} dr_M d\phi dz_M; \\ B_z = \frac{1}{2\pi} \int_{R_B}^{R_H} \int_0^\pi \int_{b_1}^{b_2} \frac{J r_M (r_M - r_Q \cos \phi)}{r_{MQ}} dr_M d\phi dz_M.$$

Здесь R_B и R_H — соответственно внутренний и наружный радиус намагничивающей катушки; b_1 и b_2 — габаритные размеры длины

катушки; J — плотность тока в катушке; M — точка интегрирования; Q — точка наблюдения; r_M, ϕ, z_M — цилиндрические координаты точки M . Примем, что плотность тока по сечению катушки постоянна, тогда $J = I_k \omega / S$, где I_k, ω — ток и число витков катушки.

Система уравнений (6) решается итерационным методом с применением релаксации. В первом приближении принимается допущение о постоянстве магнитной проницаемости материала по всему объему ферромагнетика. Последовательно выполняется расчет: коэффициентов пропорциональности между напряженностями магнитного поля k -го и j -го элементарных объемов с учетом симметрии; напряженности магнитного поля H_{0_n} для каждого элементарного объема n ; намагниченности M_n в элементарных объемах. Затем начинается второй цикл определения намагниченности — магнитная проницаемость зависит от характеристики $B(H)$ материала ферромагнетиков и выполняется приведенный выше расчет. Количество итерационных циклов зависит от заданной погрешности расчета намагниченности δ_M и коэффициента релаксации ν , который, в свою очередь, определяется магнитным состоянием ферромагнетиков. Расчет заканчивается при выполнении условия $|M_g - M_{g+1}| < \delta_M$, где g — номер итерационного цикла.

Затем, используя полученные значения M_g , по формуле (5) определяется распределение напряженности магнитного поля в ферромагнетиках. Для вычисления магнитной индукции и напряженности в районе датчиков используются формулы:

$$B_d = \mu_0(H(M_d) + M_d), \quad H_d = \sum_{i=1}^n (H_{z1}^{(i)} + H_{z2}^{(i)}),$$

где M_d — намагниченность в районе датчика магнитной индукции, определяется в результате решения системы (6); $H(M_d)$ определяется в зависимости от материала ферромагнетика; H_{z1} и H_{z2} — составляющие напряженности магнитного поля от зарядов на торцевых поверхностях S_1 и S_2 i -го элементарного цилиндра.

Для исследования предложенной математической модели были проведены вычислительные эксперименты для магнитоэлектрической системы, представляющей собой: соленоид длиной 500 мм и внутренним диаметром 30 мм; цилиндрические стержни длиной 140 мм, постоянный магнит длиной 20 мм и диаметром 10 мм; зазор между постоянным магнитом и стержнями 10 мм.

Вычислительные эксперименты показали, что для обеспечения погрешности вычислений 5–8% достаточно разбивать ферромагнетики на 150 элементарных цилиндров. Для достижения требуемых результатов необходимо выполнить не более 14 итераций. Применение для моделирования поля с такой же погрешностью программного комплекса Maxwell 2D, реализующего метод конечных элементов, приводит к необходимости использования конечно-элементной сетки с большим количеством узлов (до 16 тыс.), а следовательно, к затрачиванию значительного времени для расчетов.

Таким образом, предложенная математическая модель позволяет обеспечить быструю сходимость последовательности приближенных решений и достаточно высокую точность определения параметров магнитного поля при относительно небольшом количестве элементов, что позволяет использовать ее для моделирования магнитоэлектрических систем с постоянными магнитами при использовании натурно-модельного метода.

Литература

1. Бахвалов Ю. А., Гречихин В. В., Юфанова Ю. В. Применение математического моделирования в задачах идентификации ферромагнитных материалов // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Ест. науки. Спецвыпуск. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент в механике и физике.—2001.—С. 29–31.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.—М.: Наука, 1970.—720 с.
3. Шимони К. Теоретическая электротехника.—М.: Мир, 1964.—774 с.
4. Курбатов П. А., Аринчин С. А. Численный расчет электромагнитных полей.—М.: Энергоатомиздат, 1984.—168 с.
5. Алиевский Б. Л., Орлов В. Л. Расчет параметров магнитных полей осесимметричных катушек. Справочник.—М.: Энергоатомиздат, 1983.—112 с.

Гречихин Валерий Викторович
Южно-Российский государственный
технический университет
Россия, 346428, г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132
E-mail: vgrech@mail.ru

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. В. Дзарахохов

В работе доказана однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа третьего порядка с оператором Кароля.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_y - \lambda_1 u, & y > 0, \\ y^{2m} u_{xx} + y u_{yy} + \alpha u_y, & y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

в области Ω , ограниченной отрезками AA_0 , A_0B_0 , B_0B прямых $x = 0$, $y = y_0$, $x = l$, соответственно, и характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 0; \quad BC : x + \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = l, \quad (2)$$

уравнения (1) при $y < 0$; J — интервал $0 < x < l$, $\theta(x) = \frac{x}{2} - i \left[\frac{(2m+1)x}{4} \right]^{\frac{2}{2m+1}}$ — аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $x \in J$, с характеристикой AC из (2); $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$.

ЗАДАЧА 1. Найти регулярное решение уравнения (1) с непрерывной вплоть до линий $x = 0$ и $x = l$, $0 \leq y \leq y_0$, производной первого порядка по переменной x , удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq y_0, \quad (3)$$

$$(\alpha_1(y)u_x + \beta_1(y, u))|_{x=x_0} = (\alpha_2(y)u_x + \beta_2(y, u))|_{x=l} + \delta(y), \quad (4)$$

$$u[\theta(x)] = a(x)u(x, 0) + b(x) \quad \forall x \in J, \quad (5)$$

где x_0 — фиксированная точка интервала J ; $\alpha_i(y)$, $\beta_i(y)$, $i = 1, 2$, $\varphi_1(y)$, $\delta(y)$ — заданные функции, непрерывные в замыкании области их определения, $\beta_2 \neq 0$ для всех $y \in [0, y_0]$, $a(x) \in C^1(\bar{J}) \cap$

$C^2(J)$, $b(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$ — также известные функции, первые производные которых интегрируемы в $\bar{J}$, причем функция $\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\alpha u_y(x, y) = \nu(x) \in C^2(J)$ и при $x = 0$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1 - 2\varepsilon = \frac{2(1-\alpha)}{2m+1}$, $\varepsilon = \frac{2m+\alpha}{2(2m+1)}$.

Уравнение (1) при $y < 0$ заменой переменных $x = x$, $s = \frac{1}{(2m+1)^2}(-y)^{2m+1}$ сводится к уравнению

$$su_{ss} - u_{xx} + \beta u_s = 0, \quad (6)$$

где $\beta = \frac{2m+\lambda_1}{2m+1}$.

Здесь будем рассматривать также случай, когда $\alpha = \frac{1-2m}{2}$ и $\frac{1-2m}{2} < \alpha < 1$.

Пусть имеет место случай $\beta = \frac{1}{2}$, т. е. $\alpha = \frac{1-2m}{2}$.

Положим, что существует решение задачи 1 и

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\frac{1-2m}{2}} = \nu(x), \quad (7)$$

тогда, опираясь на однозначную разрешимость видоизмененной задачи Коши (6), (7) в Ω_2 , любое решение задачи 1 в Ω_2 представимо в виде [3]

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{1}{2}\tau \left(x - \frac{2}{(2m+1)}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} \right) + \\ & + \frac{1}{2}\tau \left(x + \frac{2}{(2m+1)}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} \right) - \\ & - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} \int_0^1 \nu \left(x + (1-2t)\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} \right) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) имеем

$$u[\theta(x)] = \frac{1}{2}\tau(x) + \frac{1}{2}\tau(0) - \frac{1}{2} \int_0^x \nu(t) dt. \quad (9)$$

Подставляя (9) в краевое условие (5), получим

$$\nu(x) = (1 - 2a(x))\tau'(x) - 2a'(x)\tau(x) - 2b'(x). \quad (10)$$

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y \rightarrow 0+$, получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_1

$$\tau'''(x) - \nu(x) + \lambda_1 \tau(x) = 0. \quad (13)$$

Исключая $\nu(x)$ из уравнений (10), (11), получим нелокальную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка

$$\tau'''(x) + \theta_1(x)\tau'(x) + \theta_2(x)\tau(x) = 2b'(x), \quad (12)$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau'(0) = \varphi_2(0), \quad (13)$$

$$\alpha_1(0)\tau'(x_0) + \beta_1(0)\tau(x_0) = \alpha_2(0)\tau'(l) + \beta_2(0)\tau(l) + \delta(0), \quad (14)$$

где $\theta_1(x) = 2a(x) - 1$, $\theta_2(x) = 2a'(x) + \lambda_1$.

Из равенства (12) после трехкратного интегрирования в пределах от 0 до x , с учетом условий (13), получим нагруженное интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\tau(x)$:

$$\tau(x) + \int_0^x N(x, t)\tau(t) dt = q(x) + \frac{x^3}{6}\tau''(0), \quad (15)$$

где

$$N(x, t) = (\theta_2(t) - \theta_1'(t)) \frac{(x-t)^2}{2} + (x-t)\theta_1(t) \in C(\bar{J} \times \bar{J}) \cap C^2(J \times J),$$

$$q(x) = \int_0^x (x-t)^2 b(t) dt + (\theta_1(0)\varphi_1(0) - 2b(0)) \frac{x^3}{6} + \\ + \varphi_2(0)x + \varphi_1(0) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J).$$

Обращая (15), находим

$$\tau(x) = A(x) + \tau''(0)B(x), \quad (16)$$

где

$$A(x) = \int_0^x R(x, t)q(t) dt + q(x), \quad B(x) = \frac{1}{6} \int_0^x R(x, t)t^3 dt,$$

$R(x, t)$ — резольвента ядра $N(x, t)$. На основании свойств заданных функций заключаем, что $A(x), B(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$.

Подставляя (16) в (14), однозначно находим неизвестную константу $\tau''(0)$, если выполнено неравенство

$$\alpha_1(0)B'(x_0) + \beta_1(0)B(x_0) - \alpha_2(0)B'(l) - \beta_2(0)B(l) \neq 0.$$

После определения функции $\tau(x)$, функцию $\nu(x)$ находим из соотношения (11). Следовательно, решение задачи 1 в области Ω_2 определяется формулой (8), а в области Ω_1 — как решение уравнения (1) при $y > 0$ с граничными условиями (3), (4), $u(x, 0) = \tau(x)$ [1].

Пусть теперь $\frac{1}{2} < \beta < 1$, т. е. $\frac{1-2m}{2} < \alpha < 1$, и выполняется условие $\lim_{y \rightarrow 0+} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-} (-y)^\alpha u_y(x, y) = \nu(x)$, причем $\nu(x)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $\frac{2}{3}$ на концах интервала $[0, \ell]$, т. е. $\nu(x) = \nu^*(x)/[x(x-l)]^\gamma$, где ν^* — ограниченная функция для любого $x \in [0, \ell]$, $0 < \gamma < 2/3$.

Регулярное в области Ω_2 решение $u(x, y)$ уравнения (1) при $y < 0$, удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0-} (-y)^\alpha u_y(x, y) = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \quad (17)$$

в предположении, что $\tau''(x)$ и $\nu'(x)$ удовлетворяют условию Гельдера, единственно и имеет вид [2]

$$u(x, y) = k_1 \int_0^1 \tau(\zeta) [t(1-t)]^{\beta-1} dt + k_2 (-y)^{1-\alpha} \int_0^1 \nu(\zeta) [t(1-t)]^{-\beta} dt, \quad (18)$$

где

$$k_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad k_2 = -\frac{2\Gamma(1-2\beta)}{(2m+1)\Gamma^2(1-\beta)},$$

$$\zeta = x + \frac{2(1-2t)}{2m+1} (-y)^{\frac{2m+1}{2}}, \quad \beta = \frac{2m+2\alpha-1}{2(2m+1)}.$$

Подставляя решение $u(x, y)$ задачи (1) ($y < 0$), (17) в краевое условие (5), получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ в виде [3]

$$\nu(x) = \mathfrak{A}_1 \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau(t) dt}{(x-t)^{1-2\beta}} - \mathfrak{A}_1 x^\beta \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{a(t)\tau(t) dt}{(x-t)^{1-\beta}} + c(x), \quad (19)$$

где

$$c(x) = \varkappa_1 \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\beta(t) dt}{(x-t)^{1-\beta}}, \quad \varkappa_1 = -\frac{1}{2\pi k_3},$$

$$k_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{2m+1} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Учитывая (19) в равенстве (11), получим обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\tau'''(x) + \lambda_1 \tau(x) = \varkappa_1 \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau(t) dt}{(x-t)^{1-2\beta}} - \varkappa_1 x^\beta \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{a(t)\tau(t) dt}{(x-t)^{1-\beta}} + c(x) \quad (20)$$

с граничными условиями (13), (14).

Решение задачи (20), (13), (14) находится аналогично предыдущему случаю. После определения $\tau(x)$ в области Ω_1 снова приходим к задаче (1), (3), $u(x, 0) = \tau(x)$, $u(l, y) = \varphi_2(y)$, которая имеет единственное решение [4]. В гиперболической части Ω_2 решение задачи представляется формулой (8), в которой значение $\nu(x)$ определяется из равенства (19).

Литература

1. Напсо А. Ф. О задаче Бицадзе–Самарского для уравнения параболического типа // Диф. уравнения.—Минск, 1977.—Т. 13, № 4.—С. 761–762.
2. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболыческие уравнения.—М.: Наука, 1966.—292 с.
3. Бицадзе А. В. К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль линии изменения типа // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа.—М., 1972.—С. 47–52.
4. Kattabriga L. Un problem al kontorno per una eguation parabolica di ordine // An Scuola norm Sunep Pisa Sci fis. & mat.—1959.—V. 13, № 2.

ДЗарахохов Азамат Валерианович
ФГОУ ВПО «Горский государственный
аграрный университет»

Россия, 362040, г. Владикавказ, ул. Кирова, 37

E-mail: azambat79@mail.ru

ОБЩАЯ НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. Г. Езаова

В данной работе рассматривается общая нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка. Доказана теорема единственности. Вопрос существования редуцирован к уравнению Фредгольма второго рода.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} U_{xxx} - U_y, & y > 0, \\ (-y)^m U_{xx} - U_{yy}, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $m = \text{const} > 0$, в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, Ω_2 — характеристический треугольник, ограниченный характеристиками AC , BC уравнения (1) и отрезком $I \equiv AB = (0, 1)$ прямой $y = 0$; $\Theta_0(x)$, $\Theta_1(x)$ — абсциссы точек пересечения характеристик уравнения (1) при $y < 0$, выходящих из точки $x \in I$, с характеристиками AC и BC , соответственно.

Под регулярным в области Ω решением уравнения (1) будем понимать функцию $U(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C_{x,y}^{3,1}(\Omega_1) \cap C_{x,y}^{2,2}(\Omega_2)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$, и такую, что $U_y(x, 0)$ может обращаться в бесконечность порядка ниже $1 - 2\varepsilon$, $\varepsilon = \frac{m}{2(m+2)}$ на концах A и B интервала I .

ЗАДАЧА Н $[\Theta_0, \Theta_1]$. Требуется определить функцию $U(x, y)$ со следующими свойствами:

1. При $y \neq 0$ $U(x, y)$ является решением уравнения (1);
2. $U(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$U(0, y) = \varphi_1(y), \quad U(1, y) = \varphi_2(y), \quad U_x(0, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \alpha(x) D_{0x}^a \delta(x) U[\Theta_0(x)] + \beta(x) D_{x1}^b \omega(x) U[\Theta_1(x)] + \\ + \gamma(x) U(x, 0) + c(x) U_y(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in I, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varphi_i(x) \in C[0, y_0] \cap C^2]0, y_0[, i = \overline{1, 3}; \alpha(x), \beta(x), \gamma(x), c(x), f(x) \in C^1(\bar{I}) \cap C^3(I); a, b$ — вещественные числа, причем $\alpha^2(x) + \beta^2(x) + \gamma^2(x) + c^2(x) \neq 0, D_{ox}^l, D_{x1}^l$ — операторы дробного в смысле Римана–Лиувилля интегро-дифференцирования [4].

Пусть $U(x, 0) = \tau(x), U_y(x, 0) = \nu(x)$.

Теорема (теорема единственности). *В области Ω не может существовать более одного решения задачи (1)–(3), если:*

$$a = b = 1 - \varepsilon, \quad \delta(x) = \omega(x) = 1, \quad (4)$$

$$A_1(x) = (1-x)^\varepsilon \alpha(x) + x^\varepsilon \beta(x) - \frac{1}{c_1} x^\varepsilon (1-x)^\varepsilon c(x) \neq 0, \quad (5)$$

$$\left[\frac{(1-x)^\varepsilon \alpha(x)}{A_1(x)} \right]' \leq 0, \quad \left[\frac{x^\varepsilon \beta(x)}{A_1(x)} \right]' \geq 0, \quad \frac{\gamma(x)}{A_1(x)} \geq 0, \quad (6)$$

где $c_1 = \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-2\varepsilon}$.

◁ Пусть выполняются условия (5) теоремы единственности. Тогда основное функциональное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_2 , принимает вид [2]

$$\tau(x) = \alpha_1(x) D_{0x}^{2\varepsilon-1} \nu(x) + \beta_1(x) D_{x1}^{2\varepsilon-1} \nu(x) + \gamma_1(x) \nu(x) f_1(x), \quad (7)$$

где

$$\alpha_1(x) = \frac{c_1(1-x)^{1-\varepsilon} \alpha(x)}{A_2(x)}, \quad \beta_1(x) = \frac{c_1 x^{1-\varepsilon} \beta(x)}{A_2(x)},$$

$$\gamma_1(x) = -\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)} \frac{c(x)(1-x)^{1-\varepsilon} x^{1-\varepsilon}}{A_2(x)}, \quad f_1(x) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)} \frac{f(x)(1-x)^{1-\varepsilon} x^{1-\varepsilon}}{A_2(x)}.$$

Докажем, что решение задачи (1)–(3) единственно при выполнении условий (4)–(6) теоремы. Для этого при $f(x) = 0$ покажем, что

$$I^* = \int_0^1 \tau(x) \nu(x) dx \geq 0.$$

В самом деле, с учетом равенства (7) получаем

$$I^* = \frac{1}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \int_0^1 \alpha_1(x) \nu(x) dx \int_0^x \frac{\nu(t) dt}{(x-t)^{2\varepsilon}} + \\ + \frac{1}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \int_0^1 \beta_1(x) \nu(x) dx \int_x^1 \frac{\nu(t) dt}{(t-x)^{2\varepsilon}} + \int_0^1 \gamma_1(x) \nu^2(x) dx.$$

Воспользуемся свойством функции $\Gamma(\mu)$ [1, 3] и получим

$$\frac{\pi}{2 \sin \pi \varepsilon} I^* = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{2\varepsilon-1} dt \times \\ \times \int_0^1 \alpha_1(x) \left[\left(\int_0^x \nu(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 + \left(\int_0^x \nu(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 \right]' dx - \\ - \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{2\varepsilon-1} dt \int_0^1 \beta_1(x) \left[\left(\int_0^x \nu(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 + \left(\int_0^x \nu(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 \right]' dx + \\ + \frac{2}{\pi} \sin \pi \varepsilon \int_0^1 \gamma_1(x) \nu^2(x) dx.$$

Интегрируя последнее выражение по частям, с учетом того, что $\alpha_1(1) = \beta_1(0) = 0$ (это следует из вида функций $\alpha_1(x)$ и $\beta_1(x)$), получаем, что при выполнении $\alpha_1'(x) \leq 0$, $\beta_1'(x) \geq 0$, $\gamma_1(x) \geq 0$ будет выполняться $I^* \geq 0$.

Таким образом, мы показали, что при выполнении условий (5)–(6) теоремы единственности выполняется

$$I^* = \int_0^1 \tau(x) \nu(x) dx \geq 0.$$

С другой стороны, переходя в уравнении (1) к пределу при $y \rightarrow +0$, получаем

$$\tau'''(x) - \nu(x) = 0. \quad (8)$$

Умножая последнее на $\tau(x)$, а затем интегрируя от 0 до 1, с учетом однородных граничных условий, получим

$$I^* = \int_0^1 \tau(x)\nu(x) dx = -\frac{[\tau'(1)]^2}{2} \leq 0.$$

Следовательно,

$$I^* = \int_0^1 \tau(x)\nu(x) dx = 0.$$

Таким образом, левая часть (8) равна нулю. Поскольку слагаемые справа неотрицательны, то они также равны нулю.

Следовательно, $\nu(x) = 0$ и из (7) при $f(x) = 0$ следует, что $\tau(x) = 0$.

Таким образом, $U(x, y) \equiv 0$ в Ω_2 как решение задачи Коши с нулевыми данными, а в Ω_1 — как решение задачи (1), $\tau(x) = 0$, $U(1, y) = 0$, $U(0, y) = 0$. Отсюда решение задачи (1)–(3) при выполнении условий (4)–(6) теоремы единственно.

Для доказательства существования проинтегрируем (8) трижды от 0 до x и, проделав несложные преобразования, с учетом граничных условий (2), получаем

$$\begin{aligned} \tau(x) = & -\frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 \nu(t) dt + \frac{x^2}{2} \int_0^1 (1-t)^2 \nu(t) dt + \\ & + x^2 \varphi_2(0) + (1-x^2) \varphi_1(0) + (x-x^2) \varphi_3(0). \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом выполнения условий (4)–(5) теоремы единственности, исключим $\tau(x)$ из (9) и (7), получим

$$\gamma_1(x)\nu(x) + \int_0^1 \frac{K(x, \xi)\nu(\xi) d\xi}{|x-\xi|^{2\varepsilon}} = F_1(x), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} K(x, \xi) = & \begin{cases} \frac{\alpha_1(x)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} + \frac{1}{2}(x-\xi)^{2+2\varepsilon} - \frac{x^2}{2}(1-\xi)^2(x-\xi)^{2\varepsilon}, & \xi \leq x, \\ \frac{\beta_1(x)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} - \frac{x^2}{2}(1-\xi)^2(\xi-x)^{2\varepsilon}, & \xi \geq x, \end{cases} \\ F_1(x) = & \varphi_2(0)x^2 + (1-x^2)\varphi_1(0) + (x-x^2)\varphi_3(0) - f_1(x). \end{aligned}$$

При $\gamma_1(x) \neq 0$ или, что то же самое, $c(x) \neq 0$, уравнение (10) есть уравнение Фредгольма второго рода со слабой особенностью в ядре и непрерывной правой частью, безусловная разрешимость которого вытекает из единственности решения задачи.

По найденному $\nu(x)$ определяется $\tau(x)$ из (7), а решение задачи (1)–(3) в области Ω_2 — как решение задачи Коши, а в области Ω_1 по формуле [3]

$$U(x, y) = \int_0^y G_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta - \int_0^y G_{\xi\xi}(x, y; 1, \eta) \varphi_2(\eta) d\eta - \\ - \int_0^y G_{\xi}(x, y; 0, \eta) \varphi_3(\eta) d\eta + \int_0^1 G(x, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi,$$

где $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина задачи (1), (2), $U(x, 0) = \tau(x)$. $\triangleright$

Литература

1. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения.—М.—Л.: ГИФМЛ, 1963.—360 с.
2. Нахушев А. М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Докл. АН СССР.—1969.—Т. 187, №4.—С. 736–739.
3. Елеев В. А., Кумыкова С. К., Абрегов М. Х. Краевые задачи для смешанных и смешанно-составных уравнений высшего порядка (учебное пособие).—Нальчик, 1997.—106 с.
4. Hardy G., Littlewood J. Some properties of fractional integrals // Math. Zs.—1928.—Vol. 27, № 4.—P. 565–606.

Езаова Алена Георгиевна
Кабардино-Балкарский государственный
университет им. Х. М. Бербекова
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: ruslan210@yandex.ru

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ

М. Г. Завгородний, С. П. Майорова

В работе обосновывается метод разделения переменных для смешанной задачи гиперболического типа, заданной на геометрическом графе. Дифференциальное уравнение рассматриваемой задачи имеет второй порядок по временной переменной и четвертый порядок по пространственной переменной. Задача описывает малые упругие поперечные колебания плоской жесткосочлененной стержневой системы.

1. Вывод уравнения поперечных колебаний плоской стержневой системы. Рассмотрим систему, состоящую из m тонких упругих массивных стержней, лежащих в одной плоскости. Концы некоторых из этих стержней жестко соединены (спаяны) в единые общие узлы. Остальные концы стержней закреплены. Других соединений или закреплений у стержней нет.

Обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ осевые линии всех стержней системы, а через Γ — объединение этих осевых линий. Пусть на стержневую систему перпендикулярно ее плоскости действует внешняя сила интенсивности $f(x)$, $x \in \Gamma$. Обозначим через $u(x)$ величину смещения точки $x \in \Gamma$, вызванного этой силой. Пусть $p(x)$ — жесткость соответствующего стержня на изгиб, а $q(x)$ — на растяжение. Известно (см., например, [1]), что потенциальная энергия, накопленная прямолинейным стержнем длины l за счет деформации, представима в виде $\frac{1}{2} \int_0^l [(pu'')^2 + (qu')^2 - 2fu] dx$. Тогда потенциальная энергия $V(u)$, накопленная всей системой за счет деформации, имеет вид:

$$V(u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [(pu'')^2 + (qu')^2 - 2fu] dx,$$

где интеграл по Γ есть сумма интегралов по всем γ_k . Под производной $u'(x)$ в точке $x \in \gamma_k$ мы понимаем величину изменения функции u на единицу длины кривой γ_k , т. е. $u'(x) = \frac{du(x(\tau))}{d\tau}$, где $\tau = \tau(x)$ — длина дуги кривой γ_k от одного из двух ее концов до точки x .

Возьмем приращение h функции u , где $h \in C_c^\infty$ на каждом из γ_k , и найдем первую вариацию функционала потенциальной энергии:

$$\delta V(u, h) = \int_{\Gamma} [pu''h'' + qu'h' - fh] dx.$$

Обозначим через $J(\Gamma)$ множество точек a , принадлежащих двум и более осевым линиям γ_k , а через $\partial\Gamma$ — множество точек b , принадлежащих только одной осевой линии. Другими словами, $J(\Gamma)$ — множество общих узлов стержней системы, а $\partial\Gamma$ — множество всех остальных концевых точек стержней, не связанных в узлы. Пусть $I(a)$ — множество индексов всех осевых линий, содержащих точку $a \in J(\Gamma)$. Проинтегрируем первые два слагаемых по частям в выражении для первой вариации. Получим

$$\delta V(u, h) = \sum_{a \in J(\Gamma)} P_a(u, h) + \sum_{b \in \partial\Gamma} Q_b(u, h) + \int_{\Gamma} [(pu'')'' - (qu')' - f] h dx,$$

где $P_a(u, h) = \sum_{i \in I(a)} [p_{[i]} u_{[i]}'' h_{[i]}' - (p_{[i]} u_{[i]}'')' h_{[i]} + q_{[i]} u_{[i]}' h_{[i]}] \big|_{x=a}$ и $Q_b(u, h) = [pu''h' - (pu'')'h + qu'h] \big|_{x=b}$. Здесь и везде в дальнейшем через $u_{[i]}(a)$ обозначаем односторонний предел функции u в точке a вдоль линии γ_i .

Приравняем первую вариацию к нулю. В силу произвольности приращения h получим дифференциальное уравнение Эйлера:

$$(pu'')'' - (qu')' = f, \quad (1)$$

заданное на каждой линии γ_k , $k = \overline{1, m}$, уравнения $P_a(u, h) = 0$ для каждого $a \in J(\Gamma)$ и уравнения $Q_b(u, h) = 0$ для каждого $b \in \partial\Gamma$.

Так как стержни жестко соединены в их общем узле a , то функция смещений $u(x)$ удовлетворяет условиям непрерывности

$$u_{[i]}(a) = u_{[j]}(a) \quad (2)$$

для любых $i, j \in I(a)$ и условиям гладкого согласования [2, 3]

$$u_{[i]}'(a) = \alpha_{1i}(a) u_{[j]}'(a) + \alpha_{2i}(a) u_{[k]}'(a) \quad (i \in I(a), i \neq j, i \neq k), \quad (3)$$

где $\alpha_{1i}(a) = \frac{\sin \Theta_{ki}}{\sin \Theta_{kj}}$, $\alpha_{2i}(a) = \frac{\sin \Theta_{ji}}{\sin \Theta_{jk}}$ и Θ_{ij} — угол между линиями γ_i и γ_j . Фиксированные индексы j и k выбраны так, чтобы $0 < \Theta_{jk} < \pi$.

Условия (3) приведены для случая, когда в узле a соединены три и более стержней. Если в узле a соединены ровно два стержня, то условия (3) отсутствуют. Отсюда, в силу равенства $P_a(u, h) = 0$, получаем еще три условия

$$\sum_{i \in I(a)} \beta_{ni}(a) u''_{[i]}(a) = 0 \quad (n=1, 2), \quad \sum_{i \in I(a)} \left[-(p_{[i]} u''_{[i]})' + q_{[i]} u'_{[i]} \right] \Big|_{x=a} = 0, \quad (4)$$

где $\beta_{ni}(a) = p_i(a) \alpha_{ni}(a)$, $n = 1, 2$. Концевая точка стержня $b \in \partial \Gamma$ жестко закреплена. Следовательно,

$$u(b) = u'(b) = 0. \quad (5)$$

При этих условиях уравнение $Q_b(u, h) = 0$ обращается в тождество, что не приводит ни к каким дополнительным условиям.

Таким образом, малые упругие поперечные деформации плоской стержневой системы, порождаемые воздействием внешней силы интенсивности $f(x)$, описывает функция смещений $u(x)$, непрерывная на объединении осевых линий стержней Γ . На каждой осевой линии γ_k она является решением дифференциального уравнения (1). В каждом общем узле a она удовлетворяет набору условий (3), (4), а в каждой концевой точке b — условиям (5).

Везде в дальнейшем через L будем обозначать дифференциальный оператор $Lu = (pu'')'' - (qu')'$.

Рассмотрим теперь малые упругие колебания стержневой системы. Для этого дополним интеграл потенциальной энергии кинетической энергией $T(u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho(x) \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx$ и найдем стационарное значение интеграла $\int_0^T (V(u) - T(u)) dt$. Получим следующее утверждение.

Теорема 1. *Малые упругие поперечные колебания стержневой системы описывает функция смещений $u(x, t)$, непрерывная на объединении осевых линий стержней Γ . На каждой осевой линии γ_k она является решением дифференциального уравнения в частных производных*

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -Lu(x, t) + f(x, t), \quad (6)$$

в каждом общем узле a она удовлетворяет набору условий (3), (4), а в каждой концевой точке b — условиям (5). В начальный момент

времени $t = 0$ заданы начальные условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(x). \quad (7)$$

2. Постановка смешанной задачи, заданной на графе, для гиперболического уравнения вида (6). Пусть Γ [4] — связный геометрический граф (в дальнейшем просто граф). Обозначим через V множество его вершин, а через m — число ребер. Пусть $I(a)$ — множество индексов ребер графа Γ , инцидентных вершине a при некоторой их нумерации, $d(a)$ — количество таких ребер (степень вершины a). Вершину a будем называть внутренней, если $d(a) \geq 2$, и граничной, если $d(a) = 1$.

Рассмотрим на Γ пространство скалярных функций $C[\Gamma]$, равномерно непрерывных на каждом ребре графа Γ . Обозначим через $u_{[i]}(a)$ односторонний предел функции $u(x)$ в вершине a вдоль ребра γ_i . Следуя монографии [4], мы не требуем непрерывности функций пространства $C[\Gamma]$ во внутренних вершинах графа Γ , поэтому односторонние пределы $u_{[i]}(a)$ и $u_{[j]}(a)$ вдоль ребер γ_i и γ_j не обязаны совпадать при $i, j \in I(a)$ и $i \neq j$.

Введем в рассмотрение функцию $\tau(x) \in C[\Gamma]$, взаимно однозначно отображающую каждое ребро γ_i на интервал $(0, l_i)$ при некотором положительном l_i . Величину l_i будем называть длиной ребра γ_i . Очевидно для сужения функции $\tau(x)$ на ребро γ_i существует обратное отображение $x(\tau)$ интервала $(0, l_i)$ на ребро γ_i . Функцию $u(x) \in C[\Gamma]$ назовем дифференцируемой на графе Γ , если для каждого ребра γ_i дифференцируема по переменной τ суперпозиция $u(x(\tau))$. При этом полагаем $u'(x) = \frac{\partial u(x(\tau))}{\partial \tau}$. Для натурального n обозначим через $C^n[\Gamma]$ пространство функций $u(x) \in C[\Gamma]$, производные которых до n -го порядка включительно существуют и принадлежат пространству $C[\Gamma]$. Введем в пространстве $C^n[\Gamma]$ норму $\|u\| = \sum_{i=0}^n \sup_{x \in \Gamma} |u^{(i)}(x)|$ и скалярное произведение $\langle u, v \rangle = \int_{\Gamma} u(x)v(x)dx$. Обозначим через $C^4(\Gamma)$ множество функций пространства $C^4[\Gamma]$, непрерывных на всем графе Γ и удовлетворяющих набору условий (3), (4) в каждой внутренней вершине a и условиям (5) в каждой граничной вершине b . Отметим, что для непрерывной на функции $u(x)$ все односторонние пределы $u_{[i]}(a)$, $i \in I(a)$, в каждой внутренней вершине a совпадают и равны значению $u(a)$ функции $u(x)$ в точке a .

Обозначим через $C(0, \infty)$ пространство непрерывных, а через $C^2(0, \infty)$ — дважды непрерывно дифференцируемых на интервале $(0, \infty)$ функций.

Для функций $\rho(x) \in C[\Gamma]$, $p(x) \in C^2[\Gamma]$, $q(x) \in C^1[\Gamma]$ и $f(x, t) \in C[\Gamma] \times C(0, \infty)$ рассмотрим уравнение (6) при начальных условиях (7). Под решением смешанной задачи (6), (7) будем понимать функцию $u(x, t)$ пространства $C^4(\Gamma) \times C^2(0, \infty)$. Для нахождения решения $u(x, t)$ применим метод разделения переменных (метод Фурье). Для этого предварительно изучим структуру спектра и вопросы базисности собственных функций дифференциального оператора четвертого порядка, заданного на графе.

3. Структура спектра дифференциального оператора четвертого порядка, заданного на графе. На функциональном пространстве $C^4[\Gamma]$ рассмотрим краевую задачу на собственные значения со спектральным параметром λ :

$$u^{(4)} + p_2(x)u'' + p_1(x)u' + p_0(x)u = \lambda u \quad (p_k(x) \in C[\Gamma], k = \overline{0, 2}) \quad (8)$$

при условиях

$$\begin{cases} \zeta_i u_{[i]}(a) = \zeta_j u_{[j]}(a), \\ \zeta_i u'_{[i]}(a) = \zeta_j \alpha_{1i}(a) u'_{[j]}(a) + \zeta_k \alpha_{2i}(a) u'_{[k]}(a) + r_{i0}(a) \\ \quad (i \in I(a), i \neq j, i \neq k), \\ \sum_{i \in I(a)} \zeta_i \beta_{ni}(a) u''_{[i]}(a) + r_{n1}(a) = 0 \quad (n = 1, 2), \\ \sum_{i \in I(a)} \zeta_i p_{[i]}(a) u'''_{[i]}(a) + r_{12}(a) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

заданных в каждой внутренней вершине a , и условиях (5), заданных в каждой граничной вершине b . Здесь ζ_i — строго положительные константы, $r_{is}(a)$ — выражения, содержащие линейную комбинацию значений в вершине a самой функции $u(x)$ и ее производных порядка не выше s . Остальные константы такие же, как и в условиях (2), (3).

Легко проверить, что пространство решений уравнения (8) имеет размерность $4m$. В каждой вершине графа Γ заданы $2d(a)$ условий и, так как сумма степеней всех вершин графа Γ равна $2m$, то число условий совпадает с размерностью пространства решений.

Сужение решения $u(x, \lambda)$ дифференциального уравнения (8) на ребро γ является решением этого уравнения, также суженного на

ребро γ . Отсюда в силу результатов монографии [5] в любом секторе раствора $\frac{\pi}{4}$ комплексной ρ -плоскости существует фундаментальная система решений дифференциального уравнения (8) такая, что любой ее элемент при достаточно большом $|\rho|$ удовлетворяет следующим соотношениям [1]:

$$\frac{\partial^r u_i(x, \rho^4)}{\partial x^r} = \begin{cases} (\omega_k \rho)^r \exp\{\omega_k \rho \tau(x)\}, & x \in \gamma_j, \\ 0, & x \notin \gamma_j, \end{cases} \quad r = \overline{0, 3}, \quad (10)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ — все корни четвертой степени из единицы; i, j и k связаны соотношением $i = 4(j - 1) + k$ ($1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq 4$). Здесь и везде в дальнейшем через [1] обозначаем величину $1 + O(\rho^{-1})$, где $|\rho \cdot O(\rho^{-1})|$ ограничено.

Пусть $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{4m}$ — линейные функционалы, порождающие условия (9), (5). Рассмотрим характеристический определитель $\Delta(\lambda) = \det \|\ell_j u_i(\cdot, \lambda)\|_1^{4m}$. Каждой (внутренней или граничной) вершине a отвечает $\kappa(a) = 2d(a)$ условий (9) или (5) и, соответственно, $\kappa(a)$ строк характеристического определителя $\Delta(\lambda)$. Таким образом, каждой вершине a поставлена в соответствие прямоугольная матрица $A(a, \lambda)$ порядка $\kappa(a) \times 4m$. В силу определения фундаментальной системы решений дифференциального уравнения (8) в матрице $A(a, \lambda)$ могут быть отличны от нуля лишь элементы, расположенные в столбцах с номерами из множества $\{4i - 3, 4i - 2, 4i - 1, 4i : i \in I(a)\}$, а все остальные элементы, принадлежащие другим столбцам, равны нулю. Обозначим через $B(a, \lambda)$ матрицу, составленную из столбцов матрицы $A(a, \lambda)$ с указанными номерами. По определению матрица $B(a, \lambda)$ имеет $\kappa(a)$ строк и $2\kappa(a)$ столбцов. Обозначим через $\Omega_B(a)$ множество всевозможных миноров порядка $\kappa(a)$ матрицы $B(a, \lambda)$. Каждой вершине a поставим в соответствие подмножество $j(a)$ множества индексов $\{1, 2, \dots, 4m\}$, состоящее из $\kappa(a)$ элементов. Набор индексов $\{j(a) : a \in V\}$ назовем полным, если $j(a) \cap j(b) = \emptyset$ для любых различных вершин a и b , а объединение множеств $j(a)$ по всем вершинам a совпадает с множеством индексов $\{1, 2, \dots, 4m\}$.

Лемма 1. Характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ представим в виде $\Delta(\lambda) = \sum \prod_{a \in V} D_{j(a)}$, где суммирование ведется по всевозможным полным наборам индексов таким, что $D_{j(a)}$ принадлежит множеству $\Omega_B(a)$.

◁ Разложим характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ по элементам $\kappa(a)$ строк, соответствующих матрице $A(a, \lambda)$ для произвольно выбранной вершины a . В полученном разложении каждое алгебраическое дополнение разложим по элементам $\kappa(b)$ строк, соответствующих матрице $A(b, \lambda)$ для произвольно выбранной вершины b , отличной от вершины a . Продолжая разложение по всем вершинам графа Γ и исключая нулевые слагаемые, получим утверждение леммы. ▷

Порядком функционала ℓ_i назовем порядок старшей производной, входящей в определение этого функционала. Так функционалы, задающие первый набор условий (9), имеют нулевой порядок. Функционалы, задающие второй набор условий (9), первого порядка и так далее. Порядком условий, заданных в вершине a , назовем сумму порядков всех функционалов, задающих эти условия. Легко проверить, что порядок условий, заданных в вершине a , равен $d(a) + 5$, если $a \in J(\Gamma)$, и равен $d(a) = 1$, если $a \in \partial\Gamma$. Положим $\mu_k = \omega_k + \omega_{k+1}$, $k = \overline{1, 4}$, где, как и выше, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ — все корни четвертой степени из единицы и $\omega_5 = \omega_1$.

Лемма 2. *Определитель $D_{j(a)}$, принадлежащий множеству $\Omega_B(a)$, представим в виде $D_{j(a)} = A\rho^\nu \exp\left\{\rho \sum_{i \in I(a)} \xi_i \tau_{[i]}(a)\right\}$ [1], где $\xi_i \in \{0, \omega_k, \mu_k : k = \overline{1, 4}\}$, ν — порядок условий, заданных в вершине a , и A — некоторая константа. Причем, если все $\xi_i \in \{\mu_k : k = \overline{1, 4}\}$, то $A \neq 0$.*

◁ Пусть $\ell_n^{(a)}$, $n = \overline{1, 2d(a)}$ — функционалы, задающие условия в вершине a . Тогда матрицу $B(a, \lambda)$ можно представить в виде клеточной матрицы-строки: $B(a, \lambda) = \|B_i(a, \lambda)\|_{i \in I(a)}$, где каждая клетка $B_i(a, \lambda)$ является прямоугольной матрицей порядка $2d(a) \times 4$ вида $B_i(a, \lambda) = \left\| \ell_n^{(a)} u_r(\cdot, \lambda) \right\|_{n=\overline{1, 2d(a)}; r=\overline{4i-3, 4i}}$. В силу (10) имеем $\ell_n^{(a)} u_r(\cdot, \rho^4) = \zeta_i \alpha_n (\omega_k \rho)^{\nu_n} \exp\{\omega_k \rho \tau_{[i]}(a)\}$ [1], где $k = 4i - r + 4$, ν_n — порядок функционала $\ell_n^{(a)}$ и α_n — коэффициент при старшей производной. Вынося из каждой строки определителя $D_{j(a)}$ общий множитель ρ^{ν_n} , а из каждого столбца общий экспоненциальный множитель и ζ_i , получим первое утверждение леммы. Непосредственно вычисляя коэффициент A при $\xi_i \in \{\mu_k : k = \overline{1, 4}\}$, $i \in I(a)$, убеждаемся в его отличии от нуля. ▷

Обозначим через l сумму всех длин ребер графа Γ . Положим $\eta = 2m + 5m_1$, где m_1 — число внутренних вершин графа Γ . Величину η в дальнейшем будем называть порядком условий (9), (5). В силу лемм 1 и 2 верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ краевой задачи (8), (9), (5) является квазиполиномом вида: $\Delta(\rho^4) = \rho^\eta \sum_{k=1}^q A_k e^{\xi_k \rho} [1]$, индикаторная диаграмма которого есть квадрат с вершинами в точках $\mu_k l$, $k = \overline{1, 4}$.*

Пронормируем коэффициенты A_k , отвечающие экспоненциальным показателям ξ_k , лежащим на одной и той же стороне индикаторной диаграммы, так, что $\sum |A_k| = 1$. Положим $\delta = l^{-1} (\ln |A| - \ln(1 - |A|))$, где A — коэффициент, отвечающий одному из экспоненциальных показателей $\mu_k l$. Так как собственные значения краевой задачи (8), (9), (5) являются нулями характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, то в силу теоремы 2, результатов приложения VI монографии [6] и работы [7] верно следующее утверждение.

Теорема 3. *Множество собственных значений краевой задачи (8), (9), (5) состоит из последовательности $\lambda_k = \left(\frac{2\pi}{l}k + \omega(k) + \varepsilon_k\right)^4$, $k = 1, 2, \dots$, где $\omega(t)$ — ограниченная функция, почти периодическая в смысле В. В. Степанова такая, что $|\omega(t)| \leq \delta$, причем $\operatorname{Re} \omega(t)$ — почти периодическая функция Бора, а ε_k — бесконечно малая последовательность.*

Исключим из комплексной плоскости все собственные значения λ_k вместе с их ε -окрестностями при некотором $\varepsilon > 0$. Полученное множество обозначим через $\mathbb{C}_\varepsilon$. В силу теоремы 2 и результатов § 2 монографии [8] верно следующее утверждение.

Лемма 3. *Существуют такие положительные константы C_1 и C_2 , что $C_1 r^\eta e^{r\sqrt{2}l \cos \theta} \leq |\Delta(\lambda)| \leq C_2 r^\eta e^{r\sqrt{2}l \cos \theta}$, где $r = \left|\sqrt[4]{\lambda}\right|$, $\theta = \frac{\arg \lambda - \pi}{4}$ ($0 \leq \arg \lambda \leq 2\pi$) и η — порядок условий (9), (5). Оценка сверху выполняется при всех комплексных λ , а оценка снизу — лишь при $\lambda \in \mathbb{C}_\varepsilon$.*

4. Базисность корневых функций дифференциального оператора четвертого порядка, заданного на графе. Назовем геометрической кратностью собственного значения λ_0 краевой задачи (8), (9), (5) размерность соответствующего ему собственного пространства. Очевидно, геометрическая кратность не превосходит

$4m$. Собственное значение λ_0 является корнем характеристического определителя $\Delta(\lambda)$. Кратность этого корня мы будем называть алгебраической кратностью собственного значения λ_0 .

Пусть $u(x, \lambda)$ — решение уравнения (8). Пусть при некотором значении λ_0 функция $u(x, \lambda_0)$ не равна тождественно нулю и принадлежит пространству $C^4(\Gamma)$. Тогда λ_0 является собственным значением, а $h_0(x) = u(x, \lambda_0)$ — собственной функцией краевой задачи (8), (9), (5). Последовательность функций $h_i(x) = \frac{\partial^i u(x, \lambda_0)}{\partial \lambda^i}$, $i = \overline{1, k}$, назовем цепочкой функций, присоединенных к собственной функции $h_0(x)$, если все они принадлежат пространству $C^4(\Gamma)$. Очевидно, длина цепочки присоединенных функций строго меньше алгебраической кратности собственного значения λ_0 .

Рассмотрим функцию $\psi_i(x, \lambda)$, получаемую из характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ заменой i -ой строки строкой из решений фундаментальной системы уравнения (8). Функция $\psi_i(x, \lambda)$ является решением однородного уравнения (8) и удовлетворяет всем условиям (9), (5), за исключением, быть может, i -го условия. При этом $\ell_i \psi_i(\cdot, \lambda) = \Delta(\lambda)$. Пусть λ_0 — собственное значение. Тогда функция $\psi_i(x, \lambda_0)$ удовлетворяет и i -му условию. И, следовательно, если она отлична от нуля, то является собственной функцией. Отметим, что функция $\psi_i(x, \lambda_0)$ отлична от тождественного нуля, лишь когда геометрическая кратность собственного значения λ_0 равна единице. Представим решение $\psi_i(x, \lambda)$ в виде $\psi_i(x, \lambda) = (\lambda - \lambda_0)^\mu \varphi(x, \lambda)$, где функция $\varphi(x, \lambda_0)$ отлична от тождественного нуля. Величина μ не превосходит алгебраической кратности ν собственного значения λ_0 . Если μ строго меньше алгебраической кратности ν , то решение $\varphi(x, \lambda)$ уравнения (8) порождает собственную функцию $h_0(x) = \varphi(x, \lambda_0)$ и цепочку из $\nu - \mu - 1$ присоединенных к ней функций. Обозначим через $\wp_i$ полученное множество собственных и присоединенных функций при $\mu < \nu$ и положим $\wp_i = \emptyset$, если $\mu = \nu$. Объединение $\wp(\lambda_0)$ множеств $\wp_i$, $i = \overline{1, 4m}$, отвечающих одному и тому же собственному значению λ_0 , назовем базовым.

Положим $v_i(x, \lambda) = \frac{\psi_i(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)}$. Система функций $\{v_i(x, \lambda)\}_1^{4m}$ образует фундаментальную систему решений уравнения (8) при каждом фиксированном λ , не являющимся собственным значением. И каждое решение $v_i(x, \lambda)$ удовлетворяет условиям $\ell_j v_i(\cdot, \lambda) = 0$ при $j \neq i$ и $\ell_i v_i(\cdot, \lambda) = 1$.

Лемма 4. Вычет функции $v_i(x, \lambda)$ относительно собственного значения λ_0 есть линейная комбинация собственной и присоединенных функций множества $\wp_i$, либо равен нулю.

Правильность утверждений леммы проверяется непосредственным вычислением вычета.

Лемма 5. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}_\varepsilon$ существует такая константа C , что $\left| \frac{\partial^k v_i(x, \lambda)}{\partial x^k} \right| < Cr^{k-\nu_i}$, $k = \overline{0, 3}$, где $r = \sqrt[4]{|\lambda|}$ и v_i — порядок функции ℓ_i .

◁ Для функции $\psi_i(x, \lambda)$ при любом λ верна (см. лемму 3) оценка $\left| \frac{\partial^k \psi_i(x, \lambda)}{\partial x^k} \right| \leq Cr^{\eta-\nu_i+k} e^{r\sqrt{2}l \cos \theta}$, $k = \overline{0, 3}$. Отсюда и в силу нижней оценки для характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ из леммы 3 получаем искомые оценки. ▷

Рассмотрим функцию Грина $G(x, \xi, \lambda)$ краевой задачи (8), (9), (5). В силу результатов монографии [4] $G(x, \xi, \lambda) = H(x, \xi, \lambda) - \sum_{i=1}^{4m} \ell_i(H(\cdot, \xi, \lambda)) v_i(x, \lambda)$, где $H(x, \xi, \lambda)$ — какое-либо фундаментальное решение уравнения (8) и $\{v_i(x, \lambda)\}_1^{4m}$ — построенная выше фундаментальная система решений.

Обозначим через $h_i(x, \xi, \lambda)$ функцию Коши уравнения (8), суженного на ребро γ_i . Положим $H(x, \xi, \lambda) = h_i(x, \xi, \lambda)$, если x и ξ принадлежат ребру γ_i и $H(x, \xi, \lambda) = 0$ в противном случае. Тогда $H(x, \xi, \lambda)$ есть фундаментальное решение уравнения (8). При этом $H(x, \xi, \lambda)$ является аналитической функцией спектрального параметра λ . Отсюда и в силу леммы 4 верно следующее утверждение.

Теорема 4. Функция Грина $G(x, \xi, \lambda)$ является мероморфной функцией спектрального параметра λ . Множество ее полюсов совпадает с множеством собственных значений краевой задачи (8), (9), (5) и вычет относительно каждого полюса λ_0 есть линейная комбинация собственных и присоединенных функций базового множества $\wp(\lambda_0)$.

Теорема 5. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}_\varepsilon$ существует такая константа C , что $\left| \frac{\partial^k G(x, \xi, \lambda)}{\partial x^k} \right| < Cr^{k-3}$, $k = \overline{0, 3}$, где $r = \sqrt[4]{|\lambda|}$.

◁ Пусть a и b — вершины, инцидентные ребру γ_i . Возьмем в качестве $h_i(x, \xi, \lambda)$ функцию Грина для уравнения (8), суженного на ребро γ_i , с условиями (5) в точках a и b . Полагаем, что λ лежит на расстоянии не меньше $\varepsilon > 0$ от каждого собственного значения этой кра-

ею задачи. В противном случае в качестве $h_i(x, \xi, \lambda)$ возьмем функцию Грина для уравнения (8), суженного на ребро γ_i , с условиями (5) в точке a и условиями $u(b) = u''(b) = 0$. Построим фундаментальное решение $H(x, \xi, \lambda)$ по предложенной выше схеме. Для построенного фундаментального решения верны оценки $\left| \frac{\partial^k H(x, \xi, \lambda)}{\partial x^k} \right| < Cr^{k-3}$, $k = \overline{0, 3}$. Отсюда $|\ell_i H(\cdot, \xi, \lambda)| < Cr^{\nu_i-3}$, где ν_i — порядок функционала ℓ_i . В силу полученных оценок и леммы 5 получаем искомые оценки для функции Грина. $\triangleright$ Для линейного дифференциального оператора L^* четвертого порядка, действующего из пространства $C^4[\Gamma]$ в пространство $C[\Gamma]$, и линейных функционалов ℓ_j^* , $j = \overline{1, 4m}$ рассмотрим на графе Γ краевую задачу

$$L^*u - \lambda u = 0, \quad \ell_j^*u = 0. \quad (11)$$

Если для любых функций $u(x)$ и $v(x)$ из пространства $C^4[\Gamma]$, удовлетворяющих условиям (9), (5) и (11), соответственно, выполняется равенство $\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^*v \rangle$, то краевую задачу (11) называют сопряженной задачей к краевой задаче (8), (9), (5). Множества собственных значений этих задач совпадают с учетом их кратностей. Обозначим через $\wp^*(\lambda_k)$ базовое множество сопряженной краевой задачи (11), соответствующее собственному значению λ_k .

Теорема 6. Для любого фиксированного $\lambda_0 \in \mathbb{C}_\varepsilon$ функция Грина $G(x, \xi, \lambda_0)$ краевой задачи (8), (9), (5) разлагается в сходящийся по норме пространства $C^2[\Gamma] \times C[\Gamma]$ ряд $G(x, \xi, \lambda_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_0} \sum_j h_{kj}(x) h_{kj}^*(\xi)$ по собственным и присоединенным функциям $h_{kj}(x) \in \wp(\lambda_k)$ и $h_{kj}^*(x) \in \wp^*(\lambda_k)$.

$\triangleleft$ Доказательство опирается на теоремы 3, 4 и 5 и проводится методом контурного интеграла по схеме, приведенной в монографии [5]. $\triangleright$

В силу теоремы 6 верно следующее утверждение.

Теорема 7. Любая функция $u(x) \in C^4[\Gamma]$ разлагается в сходящийся по норме пространства $C^2[\Gamma]$ ряд по собственным и присоединенным функциям $h_{kj}(x) \in \wp(\lambda_k)$ краевой задачи (8), (9), (5) :

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_j \alpha_{kj} h_{kj}(x),$$

$$\alpha_{kj} = \int_{\Gamma} u(\xi) h_{kj}^*(\xi) d\xi \quad (h_{kj}^*(x) \in \wp^*(\lambda_k)).$$

Заметим, что уточнив оценки функции Грина в теореме 5 и проведя рассуждения, аналогичные работе [9], можно установить сходимость полученного ряда для функции $u(x) \in C^4(\Gamma)$ и по норме пространства $C^3[\Gamma]$.

Отметим, что результаты, аналогичные результатам пунктов 3 и 4 для дифференциального оператора второго порядка, опубликованы в работе [10].

5. Спектральные свойства самосопряженного дифференциального оператора четвертого порядка, заданного на графе. Вернемся (см. уравнение (1)) к дифференциальному оператору $Lu \equiv (p(x)u'')'' - (q(x)u')'$, действующему из пространства $C^4(\Gamma)$ в пространство $C[\Gamma]$.

Лемма 6. Дифференциальный оператор L является самосопряженным.

◁ Доказательство леммы сводится к непосредственной проверке равенства $\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle$ для функций $u(x)$ и $v(x)$, принадлежащих пространству $C^4(\Gamma)$. ▷

Лемма 7. Все собственные значения дифференциального оператора L вещественны и положительны.

◁ В силу леммы 5 все собственные значения вещественные. Докажем их положительность. Пусть λ — собственное значение и $u(x)$ — соответствующая ему нормированная собственная функция. Тогда $\lambda = \langle Lu, u \rangle = \int_{\Gamma} (p(x)u''(x))'' u(x) dx - \int_{\Gamma} (q(x)u'(x))' u(x) dx$. Интегрируя по частям и учитывая условия (2)–(5), получим $\lambda = \int_{\Gamma} [p(x)(u''(x))^2 + q(x)(u'(x))^2] dx$. По определению $p(x) > 0$ и $q(x) \geq 0$. Следовательно, $\lambda > 0$. ▷

Лемма 8. Существует ортонормированная система собственных и присоединенных функций дифференциального оператора L .

◁ В силу леммы 6 собственные и присоединенные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Ортогонализуем каждый конечный набор линейно независимых собственных и присоединенных функций, отвечающих одному и тому же собственному значению. Получим утверждение леммы. ▷

Наряду с функцией $\tau(x)$ (см. пункт 2) зададим новую функцию $\tilde{\tau}(x)$, полагая $\tilde{\tau}(x) = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt[4]{p(x)}}$ при $x \in \gamma$, где a — вершина, инцидентная ребру γ . Функция $\tilde{\tau}(x)$ принадлежит пространству $C[\Gamma]$ и отображает каждое ребро γ_i на интервал $(0, \tilde{l}_i)$, где $\tilde{l}_i = \int_{\gamma_i} \frac{dx}{\sqrt[4]{p(x)}}$ —

новые длины ребер. Перейдем от дифференцирования по τ к дифференцированию по $\tilde{\tau}$ и от неизвестной функции $u(x)$ — к функции $v(x) = u(x) \exp \{0, 25p(x)\}$. Тогда дифференциальное выражение $(p(x)u'')'' - (q(x)u')'$ примет вид $v^{(4)} + p_2(x)v'' + p_1(x)v' + p_0(x)v$ с некоторыми коэффициентами $p_k(x) \in C[\Gamma]$, а условия (2)–(5) примут вид (9), (5) при $\zeta_i = \exp \{-0, 25p_{[i]}(a)\}$. Отсюда и в силу результатов пунктов 3 и 4 получим следующие утверждения.

Теорема 8. Множество собственных значений дифференциального оператора L состоит из последовательности вещественных и положительных чисел вида $\lambda_k = \left(\frac{2\pi}{\sigma}k + \omega(k) + \varepsilon_k\right)^4$, $k = 1, 2, \dots$, где $\sigma = \int_{\Gamma} \frac{dx}{\sqrt[4]{p(x)}}$, величины $\omega(k)$ и ε_k определены в теореме 3.

Теорема 9. Любая функция $u(x) \in C^4(\Gamma)$ разлагается в сходящийся по норме пространства $C^2[\Gamma]$ ряд по ортонормированной системе собственных и присоединенных функций $h_{kj}(x) \in \wp(\lambda_k)$ оператора L :

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_j \alpha_{kj} h_{kj}(x), \quad \alpha_{kj} = \int_{\Gamma} u(\xi) h_{kj}(\xi) d\xi.$$

6. Метод разделения переменных для смешанной задачи (6), (7). Рассмотрим предварительно однородную смешанную задачу (6), (7), полагая $f(x, t) \equiv 0$. Разделим переменные $u(x, t) = u(x)T(t)$ в уравнении (6), получим два обыкновенных дифференциальных уравнения $Lu = \lambda u$ и

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0. \quad (12)$$

В силу леммы 7 каждое собственное значение λ_k дифференциального оператора L вещественное и положительное. Это означает, что общее решение уравнения (12) при $\lambda = \lambda_k$ имеет вид $a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t)$. Составим ряд

$$u_0(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) h_k(x),$$

где $h_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ — все ортонормированные собственные и присоединенные функции дифференциального оператора L . В силу теоремы 9 построенный ряд сходится по норме пространства

$C^2[\Gamma] \times C(0, \infty)$. Положим,

$$a_k = \int_{\Gamma} u_0(\xi) h_k(\xi) d\xi, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_{\Gamma} u_1(\xi) h_k(\xi) d\xi, \quad (13)$$

где $u_0(x)$ и $u_1(x)$ — функции, задающие начальные условия (7). Тогда при $t = 0$ ряд $u_0(x, t)$ сходится по норме пространства $C^2[\Gamma] \times C(0, \infty)$ к функции $u_0(x)$, а ряд, полученный почленным дифференцированием этого ряда по переменной t , сходится к функции $u_1(x)$.

Решение $u_1(x, t)$ неоднородной смешанной задачи (6) с однородными начальными условиями (7) при $u_0(x) \equiv u_1(x) \equiv 0$ представимо в виде ряда $u_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) h_k(x)$, где

$$T_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_k}(t - \tau) d\tau \int_{\Gamma} f(x, \tau) h_k(x) dx. \quad (14)$$

Так как решение смешанной задачи (6), (7) является суммой двух полученных решений, то верно следующее утверждение.

Теорема 10. *Решение $u(x, t)$ смешанной задачи (6), (7) представимо в виде ряда*

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) + T_k(t) \right) h_k(x),$$

где λ_k и $h_k(x)$ — собственные значения и собственные функции дифференциального оператора L , константы a_k и b_k определены согласно (13), а функции $T_k(t)$ — согласно (14).

Найденное решение $u(x, t)$ является обобщенным решением смешанной задачи (6), (7). При необходимых согласованиях функций $f(x, t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$, используя интеграл энергии $V(u) - T(u)$, методами, аналогичными методам главы 6 учебника [11] доказывается, что полученное обобщенное решение является классическим.

В заключение отметим, что аналогичные результаты получаются и при других способах соединения и закрепления стержней системы. Так при шарнирном соединении стержней в их общем узле a вместо условий (3), (4) выполняются условия:

$$u''_{[i]}(a) = 0 \quad (i \in I(a)), \quad \sum_{i \in I(a)} \left[-(p_{[i]} u''_{[i]})' + q_{[i]} u'_{[i]} \right] \Big|_{x=a} = 0,$$

а при шарнирном закреплении стержня в точке $b \in \partial\Gamma$ вместо условий (5) выполняются условия:

$$u(b) = u''(b) = 0.$$

В остальном рассуждения остаются прежними.

Результаты данной работы частично опубликованы в работе [12].

Литература

1. Лейбензон Л. С. Собрание трудов. Т. 1. Теория упругости.—М.: Изд-во АН СССР, 1951.—468 с.
2. Завгородний М. Г. Вариационные принципы построения моделей стержневых систем // В сб.: Математическое моделирование информационных и технологических систем.—Воронеж: Воронеж. гос. технол. академия, 2000.—Вып. 4.—С. 59–62.
3. Завгородний М. Г., Майорова С. П. Математические модели стержневых систем // Вестник Тамбовского гос. ун-та.—2000.—Т. 5, вып. 4.—С. 450–452.
4. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2004.—272 с.
5. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы.—М.: Наука, 1969.—528 с.
6. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: Изд-во ГТТЛ, 1956.—632 с.
7. Boes R. P. Asymptotic properties of exponential type // Duke Math. J.—1953.—V. 20.—Р. 433–448.
8. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
9. Завгородний М. Г., Четвертнова Т. В. О гладкости разложений по системе корневых функций для некоторых регулярных краевых задач // Вестник Тамбовского технич. ун-та.—1998.—Т. 4, № 4.—С. 540–552.
10. Завгородний М. Г. Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе // Докл. АН РФ.—1994.—Т. 335, № 3.—С. 281–283.
11. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1981.—512 с.
12. Завгородний М. Г., Майорова С. П. Метод разделения переменных для жестко сочлененных стержневых систем // Вестник Воронежского гос. технич. ун-та.—2006.—Т. 2, № 8.—С. 57–59.

Завгородний Михаил Григорьевич,
Майорова Светлана Павловна

Воронежский государственный технический университет
Россия, 394026, Воронеж, Московский пр., 14
E-mail: vmfmm@mail.ru

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ АНТИПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ПРИ ДВИЖУЩЕМСЯ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕМ ИСТОЧНИКЕ

Т. И. Калинина, А. В. Наседкин

Рассмотрена антиплоская задача электроупругости о действии сосредоточенного источника волн, движущегося с постоянной скоростью и одновременно осциллирующего по гармоническому закону в безграничной электроупругой среде. Предполагается, что в подвижной системе координат, связанной с движущимся источником, существует режим установившихся колебаний. С использованием принципа предельного поглощения и интегрального преобразования Фурье построено фундаментальное решение в подвижной системе координат, пригодное для различных режимов движения источника. Определены кинематические и энергетические характеристики волновых полей в дальнем поле.

Введение

В работе изучаются фундаментальные решения (ФР) и их кинематические и энергетические характеристики в дальнем поле для антиплоской задачи электроупругости (пьезоэлектричества) при подвижных осциллирующих источниках. Данная работа является продолжением исследований [1, 2], в которых изучались ФР и энергетика волн для установившихся задач электроупругости без движения источника [1] и для антиплоских задач теории упругости при подвижных осциллирующих источниках [2]. Следуя [2], в дальнейшем будем использовать следующую терминологию. Задачи, в которых источник волн движется с постоянной скоростью $\mathbf{w}$ и одновременно осциллирует с частотой ω , будем называть задачами B . Если же $\mathbf{w} = 0$, $\omega \neq 0$, то имеем задачи об установившихся колебаниях, которые будем называть задачами A .

Задачи A исследованы для различных сред гораздо более подробно, чем задачи B . Так, ранее для задач A теории электроупругости ФР были построены в [3, 4] для $\mathbb{R}^2$ и в [1, 5, 6] для $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. В [6] можно найти достаточно подробную библиографию по ФР статических и динамических задач электроупругости.

ФР задач B для задач теории упругости были изучены в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ в [2, 7, 8]. Между тем, задачи B для электроупругих сред ранее не рассматривались. Отметим, что формы ФР могут существенно отличаться в зависимости от выбираемых интегральных представлений. ФР антиплоских задач электроупругости, представленные ниже, имеют интегральные представления, во многом аналогичные ФР анизотропной упругой среды [2]. Некоторые особенности ФР задач электроупругости обусловлены связанностью механических и электрических полей и наличием отдельного квазистатического электрического потенциала.

Постановка задачи

Обозначим через $O\xi_1\xi_2\xi_3$ неподвижную систему координат, отнесенную к рассматриваемой анизотропной пьезоэлектрической среде. Пусть τ — время, $\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)$ — вектор перемещений, $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)$ — электрический потенциал, $c_{\alpha\beta}^E$ — упругие модули, измеренные при постоянном электрическом напряжении, ϵ_{ij}^S — диэлектрические проницаемости, измеренные при постоянной деформации, $e_{i\alpha}$ — пьезомодули среды в этой системе координат ($i, j = 1, 2, 3$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6$).

Как известно [9], для ряда пьезоэлектрических материалов возможна постановка двумерных задач об антиплоской деформации. Так, в задачах об антиплоской деформации в плоскости $O\xi_1\xi_2$ предполагается, что в результате действия массовой силы $\mathbf{f}$ или объемной плотности электрического заряда q_b вида

$$\mathbf{f} = \{0, 0, f_3\}; \quad f_3 = f_3(\xi_1, \xi_2, \tau); \quad q_b = q_b(\xi_1, \xi_2, \tau), \quad (1)$$

генерируются поля перемещений и электрического потенциала, зависящие от переменных ξ_1 , ξ_2 и τ , причем у вектора механических перемещений имеется только одна ненулевая компонента в направлении, перпендикулярном плоскости $O\xi_1\xi_2$:

$$\mathbf{u} = \{0, 0, u_3\}; \quad u_3 = u_3(\xi_1, \xi_2, \tau); \quad \varphi = \varphi(\xi_1, \xi_2, \tau). \quad (2)$$

Условиями существования антиплоской деформации (1), (2) являются следующие ограничения на модули упругости и пьезомодули:

$$\begin{aligned} c_{14}^E = c_{15}^E = c_{24}^E = c_{25}^E = c_{46}^E = c_{56}^E &= 0, \\ e_{11} = e_{12} = e_{21} = e_{22} = e_{16} = e_{26} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Действительно, рассмотрим определяющие соотношения электроупругости в векторно-матричной форме

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \cdot \mathbf{S} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}, \quad (4)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{S} + \epsilon^S \cdot \mathbf{E}, \quad (5)$$

где $\mathbf{c}^E$ — матрица упругих модулей $c_{\alpha\beta}^E$, $\mathbf{e}$ — матрица пьезомодулей $e_{i\alpha}$, ϵ^S — матрица диэлектрических проницаемостей ϵ_{ij} , $\mathbf{T} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}$ — псевдовектор напряжений (σ_{ij} — компоненты тензора напряжений), $\mathbf{S} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}\}$ — псевдовектор деформаций ($\varepsilon_{ij} = (\partial u_i / \partial \xi_j + \partial u_j / \partial \xi_i) / 2$ — компоненты тензора деформаций), $\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции, $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля, $E_i = -\partial \varphi / \partial \xi_i$.

Зависимости $\mathbf{S}$ от $\mathbf{u}$ и $\mathbf{E}$ от φ можно представить также в векторно-матричной форме ($\nabla^\xi = \{\partial / \partial \xi_1, \partial / \partial \xi_2, \partial / \partial \xi_3\}$):

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}(\nabla^\xi) \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{E} = -\nabla^\xi \varphi, \quad (6)$$

$$\mathbf{L}^*(\nabla^\xi) = \begin{bmatrix} \partial / \partial \xi_1 & 0 & 0 & 0 & \partial / \partial \xi_3 & \partial / \partial \xi_2 \\ 0 & \partial / \partial \xi_2 & 0 & \partial / \partial \xi_3 & 0 & \partial / \partial \xi_1 \\ 0 & 0 & \partial / \partial \xi_3 & \partial / \partial \xi_2 & \partial / \partial \xi_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Используя (4)–(7), полевые уравнения электроупругости в приближении квазиэлектростатики запишем в форме

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial \tau^2 - \mathbf{L}^*(\nabla^\xi) \cdot (\mathbf{c}^E \cdot \mathbf{L}(\nabla^\xi) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{e}^* \cdot \nabla^\xi \varphi) = \mathbf{f}, \quad (8)$$

$$\nabla^\xi \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{L}(\nabla^\xi) \cdot \mathbf{u} - \epsilon^S \cdot \nabla^\xi \varphi) = -q_b, \quad (9)$$

где ρ — плотность пьезоэлектрического материала.

Как легко проверить, необходимость удовлетворения первых двух скалярных уравнений в векторном уравнении (8) в предположениях (1), (2) приводит к ограничениям (3) на модули пьезоэлектрической среды. Тогда, из (8), (9) и (1), (2) получим систему уравнений антиплоской задачи относительно функций $u_3(\xi_1, \xi_2, \tau)$ и $\varphi(\xi_1, \xi_2, \tau)$:

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} - \Gamma(\nabla_2^\xi) u_3 - \gamma(\nabla_2^\xi) \varphi = f_3, \quad (10)$$

$$\gamma(\nabla_2^\xi) u_3 - \epsilon(\nabla_2^\xi) \varphi = -q_b, \quad (11)$$

где $\nabla_2^\xi = \{\partial/\partial\xi_1, \partial/\partial\xi_2\}$,

$$\Gamma(\alpha) = c_{55}^E \alpha_1^2 + 2c_{45}^E \alpha_1 \alpha_2 + c_{44}^E \alpha_2^2, \quad (12)$$

$$\gamma(\alpha) = e_{15} \alpha_1^2 + (e_{14} + e_{25}) \alpha_1 \alpha_2 + e_{24} \alpha_2^2, \quad (13)$$

$$\epsilon(\alpha) = \epsilon_{11}^S \alpha_1^2 + 2\epsilon_{12}^S \alpha_1 \alpha_2 + \epsilon_{22}^S \alpha_2^2, \quad \alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}. \quad (14)$$

Предположим, что источники колебаний f_3 и q_b являются сосредоточенными, движутся в плоскости $O\xi_1\xi_2$ с постоянной скоростью $\mathbf{w} = \{w_1, w_2\}$ и одновременно осциллируют с частотой ω :

$$\left\{ \begin{array}{c} f_3(\xi_1, \xi_2, \tau) \\ q_b(\xi_1, \xi_2, \tau) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f \\ q \end{array} \right\} \delta(\xi_1 - w_1\tau, \xi_2 - w_2\tau) e^{i\omega\tau}. \quad (15)$$

Введем в рассмотрение подвижную систему координат $\{x_1, x_2, x_3\}$, движущуюся относительно неподвижной системы координат $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ со скоростью источника $\mathbf{w}$. Время в подвижной системе координат обозначим через t . Эти две системы координат связаны между собой следующим образом:

$$x_1 = \xi_1 - w_1\tau, \quad x_2 = \xi_2 - w_2\tau, \quad x_3 = \xi_3, \quad t = \tau, \quad (16)$$

$$\partial/\partial\xi_j = \partial/\partial x_j, \quad \partial_\tau = \partial_t - \mathbf{w} \cdot \nabla^x, \quad \nabla_2^x = \{\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2\}. \quad (17)$$

Будем считать, что при действии источников (15) для перемещений u_3 и электрического потенциала φ (2) в подвижной системе координат (16) существует режим установившихся колебаний:

$$u_3 = v(x_1, x_2) \exp(i\omega t), \quad \varphi = \psi(x_1, x_2) \exp(i\omega t). \quad (18)$$

Переходя в (10), (11) к подвижной системе координат (16) и используя соотношения (17), для компонент v и ψ из (18) будем иметь следующие дифференциальные уравнения:

$$\rho(i\omega - \mathbf{w} \cdot \nabla_2^x)^2 v - \Gamma(\nabla_2^x) v - \gamma(\nabla_2^x) \psi = f \delta(x_1, x_2), \quad (19)$$

$$\gamma(\nabla_2^x) v - \epsilon(\nabla^x) \psi = -q \delta(x_1, x_2). \quad (20)$$

Для выделения единственного решения системы (19), (20) используем принцип предельного поглощения или постепенно усиливающегося источника [10], согласно которому перейдем к ε -задаче, заменив в (19), (20) v на v_ε , ψ на ψ_ε , ω на $\omega_\varepsilon = \omega - i\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. По принципу предельного поглощения под решением $\{v, \psi\}$ будем понимать предел решения $\{v_\varepsilon, \psi_\varepsilon\}$ системы уравнений (19), (20) для ε -задачи при $\varepsilon \rightarrow +0$: $v = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v_\varepsilon$, $\psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \psi_\varepsilon$.

Фундаментальные решения

Для нахождения решения уравнений (19), (20) для ε -задачи применим двумерное преобразование Фурье по x_1, x_2 ($\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$). Обозначив

$$\left\{ \begin{array}{c} V_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2) \\ \Psi_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2) \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{c} v_\varepsilon(x_1, x_2) \\ \psi_\varepsilon(x_1, x_2) \end{array} \right\} e^{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}} dx_1 dx_2, \quad (21)$$

из (19), (20) для ε -задачи будем иметь

$$[\Gamma(\boldsymbol{\alpha}) - \rho\Omega_\varepsilon^2(\boldsymbol{\alpha})]V_\varepsilon + \gamma(\boldsymbol{\alpha})\Psi_\varepsilon = f, \quad (22)$$

$$\gamma(\boldsymbol{\alpha})V_\varepsilon - \epsilon(\boldsymbol{\alpha})\Psi_\varepsilon = q, \quad (23)$$

где

$$\Omega_\varepsilon(\boldsymbol{\alpha}) = \omega_\varepsilon + \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\alpha}; \quad \boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2\}. \quad (24)$$

Введя полярную систему координат (α, θ)

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \{\cos \theta; \sin \theta\}, \quad (25)$$

для $V_\varepsilon, \Psi_\varepsilon$ находим

$$V_\varepsilon = \frac{F_v}{\rho(\alpha^2 \nu^2(\mathbf{n}) - \Omega_\varepsilon^2(\alpha \mathbf{n}))}, \quad \Psi_\varepsilon = \frac{F_\psi}{\rho(\alpha^2 \nu^2(\mathbf{n}) - \Omega_\varepsilon^2(\alpha \mathbf{n}))} + \Psi_{\varepsilon n}, \quad (26)$$

$$F_v = f + \frac{\gamma(\mathbf{n})}{\epsilon(\mathbf{n})} q, \quad F_\psi = \frac{\gamma(\mathbf{n})}{\epsilon(\mathbf{n})} F_v, \quad \Psi_{\varepsilon n} = -\frac{q}{\alpha^2 \epsilon(\mathbf{n})}, \quad (27)$$

$\nu(\mathbf{n}) = c_p^A(\mathbf{n})$ — фазовая скорость сдвиговых волн в задаче (19), (20) при отсутствии движения источника $\mathbf{w} = 0$, т. е. в задаче A

$$\nu(\mathbf{n}) = c_p^A(\mathbf{n}) = \sqrt{\rho^{-1} \tilde{\Gamma}(\mathbf{n})}, \quad \tilde{\Gamma}(\mathbf{n}) = \Gamma(\mathbf{n}) + \frac{\gamma^2(\mathbf{n})}{\epsilon(\mathbf{n})}. \quad (28)$$

Применяя к (26) обратное преобразование Фурье и переходя к полярной системе координат (25), будем иметь:

$$v_\varepsilon = \frac{1}{4\pi^2 \rho} \int_0^{2\pi} I_{v\varepsilon} d\theta, \quad \psi_\varepsilon = \frac{1}{4\pi^2 \rho} \int_0^{2\pi} I_{\psi\varepsilon} d\theta + \psi_{ns}, \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} I_{v\varepsilon} \\ I_{\psi\varepsilon} \end{array} \right\} = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 \nu^2(\mathbf{n}) - \Omega_\varepsilon^2(\alpha \mathbf{n})} \left\{ \begin{array}{c} F_v \\ F_\psi \end{array} \right\} e^{-iz\alpha} d\alpha, \quad (30)$$

$$z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad (31)$$

$$\psi_{ns} = -\frac{q}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\epsilon(\mathbf{n})} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-iz\alpha} d\alpha. \quad (32)$$

Отметим, что электрический потенциал ψ_{ns} из (29), (32) является решением фактически отдельной задачи квазиэлектростатики в $\mathbf{R}^2 = \{x_1, x_2\}$ (ϵ_2^S — тензор диэлектрических проницаемостей в $\mathbf{R}^2$):

$$\nabla_2^x \cdot (\epsilon_2^S \cdot \nabla_2^x \varphi_{ns}) = q\delta(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad \varphi_{ns} = \psi_{ns} e^{i\omega t}.$$

Следуя [2], интегралы в (29), (30) можно преобразовать, используя методы контурного интегрирования в комплексной плоскости. После преобразований и предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow +0$ получим итоговые выражения для амплитуд $\{v, \psi\}$ ФР:

$$v = v_d + v_0, \quad \psi = \psi_d + \psi_0 + \psi_{ns}, \quad (33)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} v_d \\ \psi_d \end{array} \right\} = \frac{i}{4\pi\rho} \left(\sum_k' \right) (-1)^{k+1} \left\{ \begin{array}{c} I_{vdk} \\ I_{\psi dk} \end{array} \right\}, \quad (34)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} I_{vdk} \\ I_{\psi dk} \end{array} \right\} = \int_{-\pi/2+\tilde{\theta}}^{\pi/2+\tilde{\theta}} \frac{H[(-1)^k \nu(\theta) - w_n]}{\nu(\theta) c_p^{B(k)}(\theta)} \left\{ \begin{array}{c} F_v \\ F_\psi \end{array} \right\} e^{-i\omega r \mathbf{L}^{B(k)} \cdot \mathbf{y}} d\theta, \quad (35)$$

$$\mathbf{L}^{B(k)} = \mathbf{n}/c_p^{B(k)}(\theta), \quad \mathbf{L}^{B(k)} \cdot \mathbf{y} = \cos(\theta - \tilde{\theta})/c_p^{B(k)}(\theta), \quad (36)$$

$$\mathbf{x} = r\mathbf{y}, \quad |\mathbf{y}| = 1, \quad \mathbf{y} = \{\cos \tilde{\theta}, \sin \tilde{\theta}\}, \quad (37)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} v_0 \\ \psi_0 \end{array} \right\} = \frac{i}{4\pi^2 \rho \omega} \int_{-\pi/2+\tilde{\theta}}^{\pi/2+\tilde{\theta}} \frac{1}{\nu(\theta)} I_0 \left\{ \begin{array}{c} F_v \\ F_\psi \end{array} \right\} d\theta, \quad (38)$$

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \left(\alpha^+ \frac{\alpha^+ - i\eta}{(\alpha^+)^2 + \eta^2} - \alpha^- \frac{\alpha^- - i\eta}{(\alpha^-)^2 + \eta^2} \right) e^{-z\eta} d\eta, \quad (39)$$

$$\alpha^\pm = \omega/(\pm\nu - w_n); \quad z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = r \cos(\theta - \tilde{\theta}), \quad (40)$$

где H — функция Хевисайда, $w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$.

Здесь $c_p^{B(k)}(\theta) = c_p^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta)) = (-1)^k \nu(\theta) - w_n$ — фазовая скорость в задаче B с движением ($\mathbf{w} \neq 0$). Аналогично [8], будем считать фазовую скорость в задаче B неотрицательной, что позволяет определить ее для фиксированного $\mathbf{n}$ следующим образом в зависимости от соотношения между фазовой скоростью $c_p^A(\mathbf{n})$ задачи A и w_n :

$$(c_p^A(\mathbf{n}) > w_n) \wedge (c_p^A(\mathbf{n}) \geq -w_n) \Rightarrow c_p^B(\mathbf{n}) = c_p^A(\mathbf{n}) - w_n, \quad (41)$$

$$c_p^A(\mathbf{n}) < -w_n \Rightarrow c_p^{Bk}(\mathbf{n}) = (-1)^k c_p^A(\mathbf{n}) - w_n; \quad k = 0, 1, \quad (42)$$

$$c_p^A(\mathbf{n}) \leq w_n \Rightarrow \text{нет прямых плоских волн.} \quad (43)$$

Случаи (41), (42) можно обозначить единым образом: $c_p^{B(k)}(\mathbf{n}) = (-1)^k c_p^A(\mathbf{n}) - w_n$, ($k = 0$) $\vee$ ($k = 0, 1$), т. е. для случая (41) $c_p^B = c_p^{B(0)}$.

В соответствие с возможностями (41)–(43), реализующимися в зависимости от режима движения, знак $\sum'_k$ означает наличие или отсутствие суммирования по k .

Формулы (33)–(40) определяют ФР антиплоской динамической задачи теории электроупругости при подвижных осциллирующих источниках и пригодны для различных режимов движения.

В полученных выражениях для амплитуд $\{v, \psi\}$, как и в [1], содержатся динамические составляющие $\{v_d, \psi_d\}$, статические — $\{v_0, \psi_0\}$, и несвязанный квазиэлектростатический потенциал ψ_{ns} .

Отметим, что формулу (32) для несвязанного квазистатического потенциала ψ_{ns} можно видоизменить, используя регуляризацию интеграла по α и разбивая интеграл по θ аналогично (35), (38)

$$\psi_{ns} = -\frac{q}{\pi^2} \int_{-\pi/2+\tilde{\theta}}^{\pi/2+\tilde{\theta}} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{n})} (C + \ln |z|) d\theta; \quad \mathbf{n} = \{\cos \theta, \sin \theta\},$$

где C — постоянная Эйлера.

Кинематика и энергетика дальнего поля

Слагаемые v_d и ψ_d в (34) определяют динамические составляющие ФР, и для них можно построить асимптотику дальнего поля. По классическому методу перевала вклад от седловой точки θ_s в интеграл по произвольному пути в комплексной плоскости переменной θ

$$\int \Phi(\theta) e^{iq(\theta)\omega r} d\theta \quad (44)$$

при $\omega r \gg 1$ дается выражением

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\omega r |q''(\theta_s)|}} \Phi(\theta_s) e^{i[q(\theta_s)\omega r + \frac{\pi}{4} \text{sign } q''(\theta_s)]}, \quad (45)$$

где θ_s — седловая точка, являющаяся корнем уравнения $q'(\theta_s) = 0$.

В данной задаче для интегралов (35) при фиксированном k

$$\Phi(\theta) = \frac{H[(-1)^k \nu - w_n]}{\nu(\theta) c_p^{B(k)}(\theta)} \left\{ \begin{array}{c} F_v \\ F_\psi \end{array} \right\}, \quad q(\theta) = -\mathbf{L}^{B(k)} \cdot \mathbf{y}. \quad (46)$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что для заданного направления $\mathbf{y}$ в физической плоскости $\mathbf{x} = r\mathbf{y}$ седловая (стационарная) точка θ_s является корнем уравнения

$$\mathbf{c}_g^{B(k)}(\theta) = \mathbf{y} |\mathbf{c}_g^{B(k)}(\theta)| \quad (47)$$

при условии $\mathbf{y} \cdot \mathbf{L}^{B(k)}(\theta) > 0$, т. е.

$$\cos(\theta - \tilde{\theta}) > 0. \quad (48)$$

В (47) $\mathbf{c}_g^{B(k)}(\theta)$ — вектор групповой скорости в задаче B , который определяется стандартным образом

$$\mathbf{c}_g^B = \partial\omega / \partial\boldsymbol{\alpha} \quad (49)$$

из дисперсионного уравнения задачи B

$$D(\boldsymbol{\alpha}, \Omega(\boldsymbol{\alpha})) = \tilde{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha}) - \rho\Omega^2(\boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad \Omega(\boldsymbol{\alpha}) = \omega + \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\alpha}. \quad (50)$$

Заметим, что формулы (49) определяют групповую скорость, как функцию от $\boldsymbol{\alpha}$, а при определении зависимости групповой скорости от $\mathbf{n}(\theta)$ нужно использовать формулу [8]:

$$\mathbf{c}_g^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta)) = (-1)^k \mathbf{c}_g^A(\mathbf{n}(\theta)) - \mathbf{w}. \quad (51)$$

Вычисляя выражение (45) для $\Phi(\theta)$ и $q(\theta)$ из (46) для стационарных точек $\mathbf{n}_s^{(k)} = \mathbf{n}(\theta_s^{(k)})$, после ряда преобразований получим:

$$v_d \approx \left(\sum_k \right)' v_s^{(k)}, \quad \psi_d \approx \left(\sum_k \right)' \psi_s^{(k)}, \quad \omega r \rightarrow \infty, \quad (52)$$

$$\begin{pmatrix} v_s^{(k)} \\ \psi_s^{(k)} \end{pmatrix} = (-1)^{k+1} \frac{i G_s^{B(k)}}{\sqrt{2\pi r \rho}} \begin{pmatrix} F_{v_s}^{(k)} \\ F_{\psi_s}^{(k)} \end{pmatrix} e^{-i \left(\frac{\omega r}{|c_{gs}^{B(k)}|} + \frac{\pi}{4} \sigma_s^{B(k)} \right)}, \quad (53)$$

$$G_s^{B(k)} = \frac{c_{ps}^{B(k)}}{2|c_{gs}^{B(k)}| \nu_s \sqrt{|k_{ps}^{B(k)}|}},$$

где $c_{gs}^{B(k)} = c_g^{B(k)}(\mathbf{n}_s^{(k)})$, $c_{ps}^{B(k)} = c_p^{B(k)}(\mathbf{n}_s^{(k)})$, $c_{ps}^A = c_{ps}^A(\mathbf{n}_s^{(k)})$, $F_{v_s}^{(k)} = F_v(\mathbf{n}_s^{(k)})$, $F_{\psi_s}^{(k)} = F_\psi(\mathbf{n}_s^{(k)})$, $k_{ps}^{B(k)} = k_{ps}^{B(k)}(\mathbf{n}_s^{(k)})$ — кривизна кривой медленности $\mathbf{L}^{B(k)}$ в стационарной точке, $\sigma_s^{B(k)} = \text{sign } k_{ps}^{B(k)}$.

Важно отметить, что число волн $v_s^{(k)}$, $\psi_s^{(k)}$ в дальней зоне определяется числом седловых точек или стационарных значений $\mathbf{n}_s^{(k)}(\mathbf{x})$. Как и в задачах B для упругих сред, здесь для стационарных значений $\mathbf{n}_s^{(k)}(\mathbf{x})$ вектор групповой скорости $\mathbf{c}_{gs}^{B(k)}(\mathbf{n}_s^{(k)})$ направлен вдоль вектора $\mathbf{x}$ физической плоскости. В связи с этим, для фиксированного направления $\mathbf{x}$ число волн можно вычислить, как число пересечений луча $0\mathbf{x}$ с кривой групповых скоростей. Как и для антиплоской задачи теории упругости [2], здесь, в зависимости от режима движения, число распространяющихся волн может изменяться от 0 до 2, причем при сверхзвуковом режиме движения существуют зоны распространения быстрых и медленных волн, ограниченные конусами Маха.

В полярной системе координат $(r, \tilde{\theta})$ компоненты вектора групповой скорости в стационарной точке определяются формулами: $c_{grs}^B = |c_{gs}^B|$; $c_{g\tilde{\theta}s}^B = 0$. Следовательно, цилиндрические волны (53) в дальней зоне удовлетворяют общим условиям для однородных цилиндрических волн [11, 12]. Поэтому, как можно показать, для волн (52) справедливы общие энергетические соотношения [11], а групповая скорость $\mathbf{c}_{gs}^B$ является скоростью переноса энергии как для неподвижного, так и для подвижного наблюдателей.

Используем формулы [11, 12] для осредненных энергий цилиндрических волн $\langle E^{\xi x} \rangle$ и $\langle E^x \rangle$ в подвижной системе координат для неподвижного и подвижного наблюдателей и формулы для векторов переноса энергии $\langle J_r^{\xi x(x)} \rangle$

$$\langle E^{\xi x} \rangle = \frac{1}{2} \Omega^2(\alpha) \rho |v|^2, \quad \langle E^x \rangle = \frac{1}{2} \omega \Omega(\alpha) \rho |v|^2, \quad (54)$$

$$\langle J_r^{\xi x(x)} \rangle = c_{gr}^B \langle E^{\xi x(x)} \rangle, \text{ где } \langle \dots \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (\dots) dt, \quad T = 2\pi/\omega. \quad (55)$$

Подставляя (53) в (54), (55), получаем выражения для векторов потока энергии отдельных цилиндрических волн в дальней зоне

$$\langle J_{rs}^{\xi x(k)} \rangle = \frac{\omega^2 |F_{vs}^{(k)}|^2}{16\pi \rho r c_{grs}^{B(k)} |k_{ps}^{B(k)}|}, \quad \langle J_{rs}^{x(k)} \rangle = \frac{\omega}{\Omega(\alpha_s^{(k)})} \langle J_{rs}^{\xi x(k)} \rangle. \quad (56)$$

При сверхзвуковом движении $\Omega(\alpha_s^1) < 0$, и по (56) $\langle J_{rs}^{x1} \rangle < 0$, т. е. медленные волны переносят отрицательную энергию, измеренную подвижным наблюдателем. Данное свойство является общим для медленных волн в задачах B при сверхзвуковых движениях [11].

Литература

1. Белоконь А. В., Наседкин А. В. Фундаментальные решения в задачах электроупругости при установившихся колебаниях // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки.—2001.—Спецвыпуск.—С. 23–25.
2. Iovane G., Nasedkin A. V., Passarella F. Fundamental solutions in antiplane elastodynamic problem for anisotropic medium under moving oscillating source // Europ. J. Mech. A/Solids.—2004.—V. 23.—P. 935–943.
3. Ватульян А. О., Кубликов В. Л. О граничных интегральных уравнениях в электроупругости // ПММ.—1989.—Т. 53, № 6.—С. 1037–1041.
4. Vatulian A. O., Kublikov V. L. Boundary element method in electroelasticity // Boundary Elem. Commun.—1995.—V. 6.—P. 59–61.
5. Norris A. N. Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelastic solids // Proc. Roy. Soc. London. A.—1994.—V. 447, № 1929.—P. 175–188.
6. Wang C.-Y., Zhang Ch. 3-D and 2-D Dynamic Green's functions and time-domain BIEs for piezoelectric solids // Eng. Anal. Bound. Elem.—2005.—V. 29.—P. 454–465.
7. Iovane G., Nasedkin A. V., Passarella F. Moving oscillating loads in 2D anisotropic elastic medium: plane waves and fundamental solutions // Wave Motion.—2005.—V. 43, № 1.—P. 51–66.
8. Nasedkin A. V. Wave field of moving harmonic point source in anisotropic elastic medium // Proc. XXVIII Summer School «Actual problems in Mechanics» / Ed. D. A. Indeitsev.—St. Petersburg, 2001.—V. 2.—P. 66–79.
9. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел.—М.: Наука, 1988.—472 с.
10. Лайтхилл Дж. Волны в жидкости.—М.: Мир, 1981.—598 с.
11. Белоконь А. В., Наседкин А. В. Энергетика волн, генерируемых подвижными источниками // Акуст. журн.—1993.—Т. 39, № 3.—С. 421–427.
12. Наседкин А. В. Перенос энергии однородными акустоэлектромагнитными волнами в пьезоэлектрических средах // Кристаллография.—1995.—Т. 40, № 5.—С. 783–788.

Калинина Тамара Ипполитовна
Южный федеральный университет
Россия, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105
E-mail: tomakalinina@yandex.ru

Наседкин Андрей Викторович
НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича;
Южный математический институт ВНЦ РАН;
Южный федеральный университет
Россия, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105
E-mail: nasedkin@math.rsu.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСТЕКАНИЯ КАПЛИ ПО НАГРЕТОЙ ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. З. Канчукоев, В. Н. Лесев

В рамках модели естественной конвекции в жидкой капле при квазиодномерном ее растекании по равномерно нагретой твердой поверхности рассчитаны профили свободной поверхности и функция тока.

В рамках модели естественной конвекции в жидкой капле при квазиодномерном ее растекании по равномерно нагретой твердой поверхности рассчитаны профили свободной поверхности и функция тока.

Процессы смачивания и растекания жидких фаз по твердой поверхности в различных средах являются начальными и важнейшими стадиями многих физико-химических явлений, сопутствующих современным технологиям [1] и задача управления этими процессами через внешние поля (температурные, электрические, магнитные и т. д.) является актуальной.

Рассмотрим процесс естественной конвекции в жидкой капле при квазиодномерном ее растекании со свободной поверхностью по горизонтальной твердой подложке с температурой T_S . При неполном смачивании жидкостью ограниченного объема V поверхности твердого тела и симметрии профиля капли относительно плоскости $x = 0$, в приближениях теории смазки и Буссинеска [2] исследуемый процесс допускает моделирование упрощенной системой уравнений

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g \cdot [1 + \beta \cdot (T_S - T)] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (2)$$

с дополнительными условиями:

$$\frac{\partial T}{\partial z} + \alpha T = 0, \quad \frac{\partial \vartheta_x}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\vartheta_z(x, z) = \vartheta_x(x, z) \frac{dh}{dx}, \quad P - P_0 = -\sigma_{23} \frac{d^2 h}{dx^2} \text{ при } z = h(x),$$

$$T(x, 0) = T_S, \quad \vartheta_x(x, 0) = 0, \quad \vartheta_z(x, 0) = 0, \quad (4)$$

$$h = h_0, \quad \frac{dh}{dx} = 0 \text{ при } x = 0, \quad (5)$$

$$\frac{dh}{dx} = -\operatorname{tg} \theta(T), \quad h = 0 \text{ при } x = x_0, \quad (6)$$

где $T(x, z)$, $\vec{P}(x, z)$, $\vec{\vartheta}(x, z)$ — температура, давление и скорость соответственно, $z = h(x)$ — уравнение профиля свободной поверхности, x_0 — неизвестная абсцисса точки трехфазного контакта, θ — краевой угол смачивания, σ_{23} — межфазное поверхностное натяжение на границе жидкость-окружающая среда, g — ускорение силы тяжести, α , β — коэффициенты теплоотдачи и теплового расширения, ν , ρ — кинематическая вязкость и плотность жидкой капли.

В рамках приведенной модели получим закон распределения температуры в сечении капли

$$T(x, z) = T_S \left(1 - \frac{\alpha z}{1 + \alpha h} \right) \quad (7)$$

при известном уравнении свободной поверхности $z = h(x)$.

Используя далее уравнения (1) с учетом (7), граничных условий (3) и (4), получим неизвестное уравнение свободной поверхности

$$a^2 \frac{d^3 h}{dx^3} + \left[1 + \alpha \beta T_S h \frac{1 + 0,725 \alpha h}{(1 + \alpha h)^2} \right] \frac{dh}{dx} = 0, \quad (8)$$

где $a^2 = \sigma_{23}/\rho g$.

Интегрируя (8), с учетом симметрии профиля капиллярной поверхности относительно сечения $x = 0$ и граничных условий (5), (6), получаем

$$a \frac{dh}{dx} = -\sqrt{c(h - h_0) + F(h)}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} c = & -\frac{1}{h_0} \left\{ a^2 \operatorname{tg} \theta + h_0^2 + \frac{\beta T_S}{\alpha} \times \right. \\ & \times \left[0,725 \alpha^2 h_0^2 + 0,9 \alpha h_0 - (0,35 + 0,9 \alpha h_0) \ln |1 + \alpha h_0| \right] \Big\}, \\ F(h) = & (1 + 0,725 \beta T_S) (h^2 - h_0^2) - \frac{\beta T_S}{\alpha} \times \\ & \times \left[\frac{0,35}{\alpha} \ln \left| \frac{1 + \alpha h}{1 + \alpha h_0} \right| + 0,9 (h \ln |1 + \alpha h| - h_0 \ln |1 + \alpha h_0| + h_0 - h) \right]. \end{aligned}$$

С учетом граничных условий (5) и (6), из уравнения (9) выразим неизвестную абсциссу точки трехфазного контакта

$$x_0 = \int_0^{h_0} \frac{a dh}{\sqrt{c(h-h_0) + F(h)}}. \quad (10)$$

С другой стороны, с учетом (10), из (9) окончательно получим уравнение свободной поверхности

$$x = x_0 - \int_0^h \frac{a dh}{\sqrt{c(h-h_0) + F(h)}}. \quad (11)$$

Объем жидкости, соответствующий термодинамическому параметру θ и геометрическим параметрам капли x_0 и h_0 , определяется уравнением связи

$$V = \int_0^{h_0} \frac{2aLh dh}{\sqrt{c(h-h_0) + F(h)}}, \quad (12)$$

где L — характерная длина «плоской» капли.

В общем случае вычисление определенных интегралов (10)–(12) связано с большими трудностями и при проведении вычислительного эксперимента на основе данной модели использовались квадратурные формулы Симпсона высокого порядка точности.

В рамках исследуемой модели функция тока $\Psi(x, z)$, которая позволяет найти с учетом (3) компоненты скорости $v_x = -\partial\Psi/\partial z$, $v_z = -\partial\Psi/\partial x$, определяется выражением

$$\Psi(x, z) = \frac{g\beta T_S \alpha^2}{240a} \sqrt{c(h-h_0) + F(h)} \frac{z^2 (7h^3 + 2z^3 - 9zh^2)}{(1 + \alpha h)^2}.$$

Для различных значений температуры поверхности баратно-барийного стекла марки Х230, которое является конструкционным материалом для микроканальных пластин, были рассчитаны профили свободной капиллярной поверхности и графики функции тока при конвективном движении капель дистиллированной воды. Некоторые результаты проведенного вычислительного эксперимента представлены на рисунках 1 и 2.

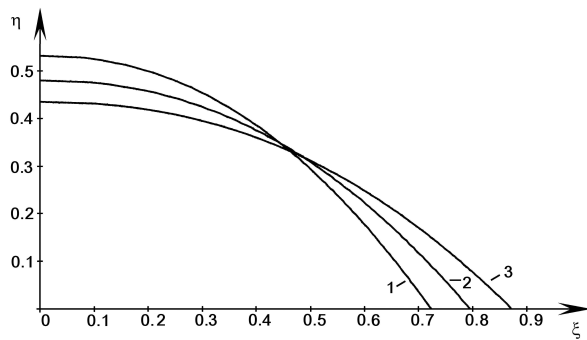


Рис. 1. Деформация профиля свободной поверхности капли с изменением температуры подложки ($\eta = h/a$, $\xi = x/a$): 1 — 293⁰ K; 2 — 298⁰ K; 3 — 303⁰ K.

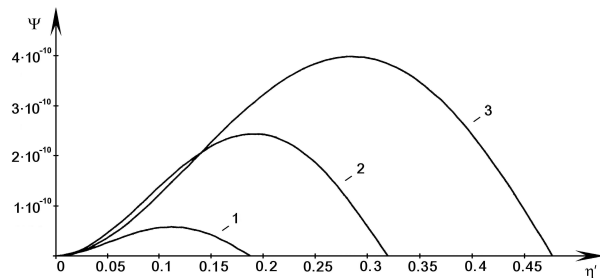


Рис. 2. Изменение функции тока с высотой капли ($\eta' = z/a$, $T = 293^0$ K): 1 — $\eta = 0,186$; 2 — $\eta = 0,319$; 3 — $\eta = 0,479$.

Расчеты показывают, что с увеличением температуры твердой поверхности краевой угол смачивания уменьшается вместе с высотой капли в апексе, абсцисса точки трехфазного контакта увеличивается, а функция тока пропорциональна dh/dx , т. е. интенсивность движения жидкости в капле при прочих равных условиях определяется углом смачивания θ . Эти результаты проведенного вычислительного эксперимента находятся в согласии с хорошо известными экспериментальными наблюдениями.

В заключении отметим, что полученные результаты могут быть использованы при решении задач обратных исследований, т. е. задач, связанных с расчетом температурной зависимости физико-химических параметров (a , σ_{ij} , θ) трехфазной системы по известной деформации профиля свободной поверхности капли [3].

Литература

1. Сумм Б. Д., Иванова Н. И. Объекты и методы коллоидной химии и нанохимии // Успехи химии.—2000.—Т. 69, № 11.—С. 955–1008.
2. Павлов К. Б., Романов А. С., Шахорин А. П. Об одном способе феноменологического описания растекания частично смачивающей жидкости // Численные методы механики сплошной среды.—Новосибирск, 1986.—Т. 17, № 3.—С. 132–138.
3. Емельяненко А. М., Бойнович Л. Б. Применение цифровой обработки видеоизображений для определения параметров сидящих и висящих капель // Коллоидный журнал.—2001.—Т. 63, № 2.—С. 178–193.

Канчукоев Владимир Зедунович

E-mail: vlad-kan@yandex.ru

Лесев Вадим Николаевич

E-mail: lvn_kbsu@mail.ru

Кабардино-Балкарский государственный

университет им. Х. М. Бербекова

Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ ПОЛЯ

С. Ю. Князев

Описано применение метода интегрированных источников поля для расчета динамики изменения температурного поля в объеме цилиндра. Показана устойчивость численного метода при определенных соотношениях параметров задачи.

Численное решение ряда граничных задач для линейных уравнений математической физики можно осуществлять с помощью метода точечных источников поля (МТИ) [1, 2]. При использовании МТИ поле в рассматриваемой области моделируется полем системы точечных зарядов, расположенных на вспомогательной поверхности по периметру области решения на некотором удалении от нее. Особенно эффективно применение МТИ при решении уравнений эллиптического типа, например, уравнений Лапласа и Гельмгольца, если граничные условия содержат нормальную производную от искомой функции, а граница имеет сложную конфигурацию. Однако в ряде случаев МТИ можно с успехом применять также при численном решении уравнений параболического типа, например, уравнения теплопроводности [3]. Обобщением МТИ является метод интегрированных фундаментальных решений, который можно также назвать методом интегрированных источников поля (МИИ) [1, 2]. В МИИ искомое поле моделируется полем, образуемым системой равномерно или неравномерно заряженных протяженных источников, расположенных на вспомогательной поверхности.

Рассмотрим применение МИИ для расчета температурного поля в объеме цилиндра с радиусом R_0 , на поверхности S которого заданы граничные условия

$$T(R_0, t) + \alpha(t) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_S = f(t), \quad (1)$$

где $\alpha(t)$, $f(t)$ — известные функции времени. Известно также температурное поле в начальный момент времени:

$$T(r, 0) = \theta(r). \quad (2)$$

Фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi a(t - t_0)} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}{4a(t - t_0)}\right), \quad t > t_0, \quad (3)$$

где a — коэффициент температуропроводности, можно рассматривать как потенциал температурного поля в точке с координатой $\mathbf{r}$ в момент времени $t > t_0$, которое создано точечным мгновенным источником с зарядом q , возникшим в точке с координатой $\mathbf{r}_0$ в момент времени t_0 . В решаемой задаче точечные источники поля удобно располагать на соосных цилиндру окружностях L радиусом R . В пределе, при устремлении расстояния между точечными источниками к нулю, получаются интегрированные равномерно заряженные источники. Потенциал поля такого источника, возникшего в момент времени t_0 , равен

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sigma\psi(\mathbf{r}, t),$$

где σ — поверхностная плотность заряда на L ;

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a(t - t_0)} \int_L \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2}{4a(t - t_0)}\right) dl_R.$$

Можно показать, что при $t > t_0$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \gamma \frac{R}{a(t - t_0)} \exp\left(-\frac{R^2 + r^2}{4a(t - t_0)}\right) I_0\left(\frac{R \cdot r}{2a(t - t_0)}\right), \quad (4)$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка; γ — постоянная величина, значение которой не влияет на конечный результат. При $t \leq t_0$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Искомое температурное поле моделируем с помощью N интегрированных источников с радиусами R_i и моментами их возникновения t_i . Часть этих источников числом N_0 моделируют температурное поле в начальный момент времени. Для этих источников $R_i < R_0$ и

$t_i < 0$. Оставшиеся $N - N_0$ источников моделируют изменение температуры в объеме цилиндра со временем. Для них $R_i > R_0$.

Температурное поле ищем в виде ряда

$$T(r, t) \approx \sum_{i=1}^N \sigma_i \psi_i(r, t), \quad (5)$$

где функции $\psi_i(r, t)$ вычисляются с помощью формулы (4) при $R = R_i$ и $t_0 = t_i$; σ_i — плотности заряда, которые находим, требуя выполнение граничного (1) и начального (2) условий в N точках коллокации с координатами r_k, τ_k . Это требование приводит к системе линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных величин σ_i . Уравнение этой системы с номером k имеет вид

$$\sum_{i=1}^N \mu_{ki} \sigma_i = \beta_k. \quad (6)$$

Здесь для $k \leq N_0$

$$\beta_k = \theta(r_k), \quad \mu_{ki} = \psi_i(r_k, \tau_k); \quad (7)$$

для $k > N_0$

$$\beta_k = f(\tau_k), \quad \mu_{ki} = \psi_i(r_k, \tau_k) + \alpha(\tau_k) \frac{\partial \psi_i(r_k, \tau_k)}{\partial r}. \quad (8)$$

Учитывая (4) и используя свойства производных функций Бесселя [4], выражение (8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mu_{ki} = & \gamma \frac{R_i}{a(\tau_k - t_i)} \exp\left(-\frac{R_i^2 + r_k^2}{4a(\tau_k - t_i)}\right) \times \\ & \times \left[\left(1 - \frac{\alpha(\tau_k) r_k}{2a(\tau_k - t_i)}\right) I_0\left(\frac{R_i \cdot r_k}{2a(\tau_k - t_i)}\right) + \frac{\alpha(\tau_k) R_i}{2a(\tau_k - t_i)} I_1\left(\frac{R_i \cdot r_k}{2a(\tau_k - t_i)}\right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

После определения с помощью формул (7)–(9) параметров системы (6) и ее решения приближенные значения температуры вычисляем с помощью ряда (5). Качество получаемого при этом численного решения в значительной степени зависит от удачного расположения источников поля и точек коллокации. При тестировании описываемого численного метода координаты узлов полагались равными

$r_k = k \cdot R_0 / N_0$, $\tau_k = 0$ для $k \leq N_0$ и $r_k = R_0$, $\tau_k = (k - N_0)t_n / (N - N_0)$ для $k > N_0$. Пространственные координаты источников поля полагаются равными $R_i = r_i$ для $i \leq N_0$ и $R_i = R_q$ для $i > N_0$, где $R_q > R_0$.

Если времена возникновения источников поля удовлетворяют условиям

$$\tau_{i-1} < t_i < \tau_i, \quad (10)$$

то после нахождения поверхностных плотностей зарядов σ_i для $i \leq N_0$ остальные плотности σ_i находятся последовательно в порядке возрастания номера i по явной схеме с помощью формулы

$$\sigma_i = \left(\beta_i - \sum_{k=1}^{i-1} \mu_{ik} \sigma_k \right) / \mu_{ii}. \quad (11)$$

Описанный численный метод тестировался с помощью задачи об остывании цилиндра. При этом обнаружилось, что устойчивость решения (11) наблюдается только в том случае, если шаг по времени $\tau = t_{i+1} - t_i$ находится в интервале $2 \cdot 10^{-3} < \tau / \tau_0 < 20 \cdot 10^{-3}$, где $\tau_0 = R_0^2 / a$ — характерное время для данной задачи. Если шаг по времени оказывается в указанном интервале, то погрешность решения сначала убывает со временем, а затем начинает быстро возрастать. Аналогичная зависимость наблюдается для расстояния $h = R_q - R_0$, на котором располагаются источники поля от поверхности цилиндра. Устойчивость численного решения наблюдается, если $0,005 < h / R_0 < 0,35$. Заметная зависимость погрешности от числа источников наблюдается только при их небольшом количестве. При увеличении числа источников от 20 до 100 погрешность уменьшается более чем на три порядка от $3 \cdot 10^{-2}$ до $2 \cdot 10^{-5}$.

Интервалы устойчивости для параметров h и τ можно значительно расширить, если не требовать выполнения условия (10). Например, если $t_n < 0$, то устойчивость решения наблюдается при $1 \cdot 10^{-4} < \tau / \tau_0 < 4 \cdot 10^{-2}$ и $0,001 < h / R_0 < 0,9$. При этом погрешность решения при оптимальном соотношении между параметрами задачи достигает $1 \cdot 10^{-7}$.

Вышеизложенное свидетельствует о том, что МИИ может успешно применяться при численном решении уравнения теплопроводности, хотя и с меньшей эффективностью, чем при решении уравнений эллиптического типа.

Литература

1. *Алексидзе М. А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач.—М.: Наука, 1991.—352 с.
2. *Князев С. Ю., Щербакова Е. Е.* Решение граничных задач математической физики методом точечных источников поля // Изв. вузов. Электромеханика.—2007.—Т. 3.—С. 11–15.
3. *Князев С. Ю., Щербакова Е. Е.* Решение задач тепло- и массопереноса с помощью метода точечных источников поля // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Техн. науки.—2006.—Т. 4.—С. 43–47.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике.— М.: Наука, 1984.—528 с.

Князев Сергей Юрьевич

Южно-Российский государственный технический университет

Россия, 346428, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132

E-mail: ksy@donpac.ru

РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРИСУТСТВИИ ИСКРИВЛЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ИДЕАЛЬНЫМИ МАГНИТНЫМИ ИЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Т. В. Кочубей, К. С. Шапошников

Задача моделирования стационарного магнитного поля в присутствии искривленных поверхностей с идеальными магнитными или электрическими свойствами сводится к интегро-дифференциальному или интегральному уравнениям первого рода. Исследование уравнений и сведение их к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) осуществляется вариационным методом. Для решения СЛАУ создан оригинальный программный пакет. Приведены примеры расчетов.

1. Введение

Широкое применение в инженерной практике тонкостенных тел (оболочек, пластин), а также пленочных и печатных технологий изготовления элементов электромагнитных и электронных устройств ставит в ряд актуальных задач задачи математического моделирования электромагнитных полей в присутствии поверхностей с идеальными электрическими или магнитными свойствами.

Основной трудностью является то, что известные интегральные уравнения второго рода либо теряют смысл на разомкнутых поверхностях, либо обладают весьма сложными и неудобными для численной реализации ядрами, что делает проблематичным их практическое применение. Использование метода конечных элементов (МКЭ) для таких задач приводит к системам линейных алгебраических уравнений колоссальной размерности, которые являются при этом плохо обусловленными.

В данной работе задача моделирования магнитного поля в присутствии многосвязных поверхностей с идеальными электрическими или магнитными свойствами сводится к интегро-дифференциальному или интегральному уравнениям первого рода, соответственно, которые являются корректными в подходящих парах

функциональных пространств (естественных для инженерной постановки задачи). Приводится эффективный метод сведения уравнений к СЛАУ.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу моделирования стационарного магнитного поля в присутствии разомкнутых односвязных и многосвязных кусочно-гладких липшицевых поверхностей Γ'_j , $j = \overline{1, \nu}$ с идеальными электрическим ($\gamma = \infty$) и магнитным ($\mu = \infty$) свойствами в трехмерном физическом пространстве $\Omega = E_3$. Объединение Γ'_j обозначим Γ' . Пусть j -я поверхность имеет конечное число $\gamma_j + 1$ отверстий $\Gamma''_{j0}, \Gamma''_{j1}, \Gamma''_{j2}, \dots, \Gamma''_{j\gamma_j}$, объединение которых обозначим Γ''_j . $\Gamma'' = \bigcup_{j=1}^{\nu} \Gamma''_j$ — дополнение Γ' до замкнутой $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma'' \cup \partial\Gamma''$, $\partial\Gamma'' = \bigcup_{j=1}^{\nu} \partial\Gamma''_j$, $\partial\Gamma''_j$ — смежная граница (край) для Γ'_j и Γ''_j , $j = \overline{1, \nu}$.

Будем полагать, что первичное магнитное поле (или ему эквивалентное в смысле [1]) задано своими источниками, которые расположены вне Γ' в ограниченной части пространства. Для простоты окружающую среду примем однородной ($\mu_0 = \text{const}$), а на Γ' , в зависимости от постановки, зададим условия:

$$\text{а) } \mathbf{Hn} = 0 \text{ (идеальный проводник);} \quad (2.1)$$

$$\text{б) } [\mathbf{Hn}] = 0 \text{ (идеальный магнетик),} \quad (2.2)$$

где $\mathbf{H}$ — напряженность результирующего поля; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к Γ' , и в обозначениях учтено, что предельные значения входящих в (2.1), (2.2) компонент магнитного поля с разных сторон на Γ' совпадают.

В условиях (2.1) также необходимо указать наличие или отсутствие в отверстиях, так называемых, «замороженных» потоков. Положим

$$\int_{\Gamma''_{jk}} \mathbf{H} d\mathbf{S} = \Phi_{jk}, \quad k = \overline{1, \gamma_j}, \quad j = \overline{1, \nu}, \quad \Phi_{jk} \text{ — заданы.} \quad (2.3)$$

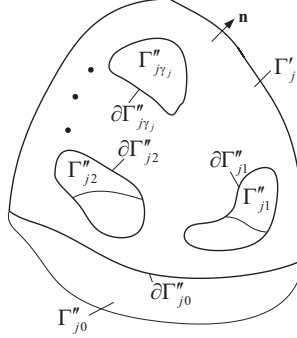


Рис. 1.

Асимптотика поля в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$|\mathbf{H}| \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \left(1/r^3\right). \quad (2.4)$$

Далее выполним редукцию $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^*$, где $\mathbf{H}^0$ и $\mathbf{H}^*$ — напряженности, соответственно, первичного поля и поля магнитной реакции поверхности. $\mathbf{H}^*$ потенциальна вне $\Gamma' \cup \Gamma''$, т. е. можно положить $\mathbf{H}^* = -\text{grad } \varphi^*$ вне $\Gamma' \cup \Gamma''$ и формулировать наши задачи в терминах скалярного потенциала φ^* :

$$\Delta \varphi^* = 0 \quad \text{вне } \Gamma' \cup \Gamma''; \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{а) } \varphi_+^* - \varphi_-^* &= \tau, \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial n_+} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial n_-} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma' \cup \Gamma'', \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} &= \mathbf{H}^0 \mathbf{n} \quad \text{на } \Gamma', \\ \int_{\Gamma''_{jk}} \left(\mathbf{H}^0 \mathbf{n} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right) dS &= \Phi_{jk}, \quad k = \overline{1, \gamma_j}, \quad j = \overline{1, \nu}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$|\varphi^*| \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \left(1/r^2\right);$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \varphi_+^* &= \varphi_-^* = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial n_-} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial n_+} = \sigma \quad \text{на } \Gamma, \\ \varphi^* &= C_j - \varphi^0 \quad \text{на } \Gamma'_j, \quad j = \overline{1, \nu}, \\ |\varphi^*| &\xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \left(1/r^2\right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где знаками «+» и «-» в нижних индексах помечены предельные значения величин со стороны положительного и отрицательного направлений нормали $\mathbf{n}$, соответственно, через τ и σ обозначены скачки предельных значений потенциала (а) и его нормальной производной (б), $C_j = \text{const}$, $j = \overline{1, \nu}$, а φ^0 — потенциал первичного магнитного поля, который в нашей постановке полагается определенным хотя бы на Γ .

К задаче (2.5), (2.7) добавим условие

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (2.8)$$

для любой замкнутой ориентируемой поверхности Σ , отстоящей от Γ' . Справедливость (2.8) непосредственно следует из соленоидальности поля $\mathbf{H}^*$ в $\Omega \setminus \Gamma'$.

Чтобы замкнуть задачи (2.5)–(2.8), присоединим к ним неравенство

$$\int_{\Omega} |\text{grad } \varphi^*|^2 d\Omega < \infty, \quad (2.9)$$

означающее, что нас интересует решение, при котором энергия магнитной реакции оболочек конечна.

Очевидно, все условия задач (2.5)–(2.8) выполняются, если положить

$$\text{а) } \varphi^*(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \tau(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{1}{r_{QM}} d\Gamma_Q, \quad M \notin \Gamma;$$

$$\text{б) } \varphi^*(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sigma(Q)}{r_{QM}} d\Gamma_Q,$$

а плотности τ и σ подчинить уравнениям

$$\text{а) } \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \tau(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{1}{r_{QM}} d\Gamma_Q = 2H_n^0(M), \quad M \rightarrow \Gamma'; \quad (2.10)$$

$$\text{б) } \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sigma(Q)}{r_{QM}} d\Gamma_Q = C_j - 2\varphi^0(M), \quad M \in \Gamma'_j, \quad j = \overline{1, \nu}, \quad (2.11)$$

нагруженных соотношениями

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_{\Gamma''_{jk}} \frac{\partial}{\partial n_M} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \tau(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{1}{r_{QM}} d\Gamma_Q \Big|_{M \rightarrow \Gamma''_{jk}} d\Gamma_M = \\ = 2 \int_{\Gamma''_{jk}} B_n^0 d\Gamma - 2\Phi_{jk}, \quad k = \overline{1, \gamma_j}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\tau(M) = c_{jk}, \quad M \in \Gamma''_{jk} \cup \partial\Gamma''_{jk}, \quad c_{jk} = \text{const}, \quad k = \overline{0, \gamma_j}, \quad j = \overline{1, \nu}; \quad (2.13)$$

$$\text{б) } \sigma = 0 \quad \text{на } \Gamma'', \quad \int_{\Gamma} \sigma d\Gamma = 0. \quad (2.14)$$

3. Исследование уравнений. Исследование уравнений (2.10), (2.11) проведем вариационным методом [2], т. е. сведем уравнения к эквивалентным вариационным задачам для некоторых функционалов, корректность которых поможет установить теорема Рисса [2].

Данный метод удобен тем, что эффективный способ решения вариационных задач известен. Это построение минимизирующей последовательности Ритца, формально совпадающее со схемой применения к уравнениям метода Бубнова–Галеркина.

Для начала рассмотрим уравнение (2.10). Для исследования потребуется расширить это уравнение на замкнутую поверхность Γ . При этом в силу условий (2.12), а также аннулирующих свойств интегро-дифференциального оператора [3], входящего в уравнение (2.10), значения τ будут определяться с точностью до произвольной константы и в дальнейшем эта степень свободы может быть подходящим образом использована. Соотношения (2.12) преобразуются к виду:

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma''_{jk}} K_{\tau\sigma} \tau d\Gamma = - \int_{\Gamma''_{jk}} B_n^0 d\Gamma + \Phi_{jk}, \quad k = \overline{1, \gamma_j}, j = \overline{1, \nu}, \quad (3.1)$$

где

$$K_{\tau\sigma} \tau(M) = - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_M} \int_{\Gamma} \tau(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{1}{r_{QM}} d\Gamma_Q, \quad M \rightarrow \Gamma.$$

Далее введем оператор P , действующий по правилу

$$P\xi = \begin{cases} \xi & \text{на } \Gamma'; \\ \frac{1}{\text{mes}(\Gamma'_{jk})} \int_{\Gamma''_{jk}} \xi d\Gamma & \text{на } \Gamma''_{jk}, \quad k = \overline{0, \gamma_j}, j = \overline{1, \nu}, \end{cases}$$

и с его помощью преобразуем уравнение (2.10) и условие (3.1) в одно уравнение:

$$A_\tau \tau = f'_\tau, \quad (3.2)$$

где

$$A_\tau = \frac{1}{2} P K_{\tau\sigma},$$

$$f'_\tau(M) = \begin{cases} -B_n^0(M), & M \in \Gamma'; \\ -\frac{1}{\text{mes}(\Gamma'_{jk})} \left(\int_{\Gamma''_{jk}} B_n^0 d\Gamma - \Phi_{jk} \right), & M \in \Gamma''_{jk}, \quad k = \overline{0, \gamma_j}, j = \overline{1, \nu}. \end{cases}$$

Причем выполняется условие

$$\int_{\Gamma} f'_\tau d\Gamma = 0.$$

Действуя аналогичным образом по отношению к уравнению (2.11) и условиям (2.14), придем к следующему уравнению

$$A_\sigma \sigma = f'_\sigma, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} A_\sigma &= \frac{1}{2} P' K_{\sigma\tau}, \quad f'_\sigma = -P'(\varphi^0(M)), \quad M \in \Gamma, \\ K_{\sigma\tau} \sigma(M) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \sigma(Q) \frac{d\Gamma_Q}{r_{QM}}, \quad M \in \Gamma, \\ P'\xi &= \begin{cases} \xi(M) - \frac{1}{\text{mes}(\Gamma'_j)} \int_{\Gamma'_j} \xi d\Gamma & \text{на } \Gamma'_j; \\ 0 & \text{на } \Gamma''_j, \quad j = \overline{1, \nu}. \end{cases} \end{aligned}$$

В качестве исходного пространства для исследования уравнения (2.10) выберем $\tilde{L}_2^0(\Gamma)$ — гильбертово пространство вещественных квадратично-суммируемых функций с постоянными значениями на Γ''_{jk} , $k = \overline{0, \gamma_j}$, $j = \overline{1, \nu}$, и нулевым средним значением на Γ . Уравнение (2.11) будем исследовать в пространстве $L_2^0(\Gamma)$ — гильбертовом пространстве вещественных квадратично-суммируемых функций, равных нулю всюду на Γ'' и имеющих нулевое среднее значение на Γ . В этих пространствах операторы A_τ и A_σ обладают свойствами линейности, самосопряженности и положительности [4]. Согласно этому, уравнения (2.10), (2.11) и вариационные задачи

$$F(\tau) = (A_\tau \tau, \tau)_{\tilde{L}_2^0} - 2(f'_\tau, \tau)_{\tilde{L}_2^0} \rightarrow \min, \quad (3.4)$$

$$F(\sigma) = (A_\sigma \sigma, \sigma)_{L_2^0} - 2(f'_\sigma, \sigma)_{L_2^0} \rightarrow \min \quad (3.5)$$

эквивалентны в энергетических пространствах операторов A_τ в $\tilde{L}_2^0(\Gamma)$ и A_σ в $L_2^0(\Gamma)$, соответственно.

Энергетическим пространством оператора A_τ в $\tilde{L}_2^0(\Gamma)$ является $H_\tau^0(\Gamma)$ — гильбертово пространство плотностей потенциалов двойного слоя, имеющих постоянные значения на Γ''_{jk} , $k = \overline{0, \gamma_j}$, $j = \overline{1, \nu}$, и нулевые средние значения на Γ . Гильбертово пространство $H_\sigma^0(\Gamma)$ плотностей потенциалов простого слоя, имеющих нулевое среднее значение на Γ и равных нулю на Γ'' , является энергетическим пространством оператора A_σ в $L_2^0(\Gamma)$.

С помощью теоремы Рисса можно заключить, что вариационные задачи (3.4), (3.5), а с ними и уравнения (2.10), (2.11), разрешимы в $H_\tau^0(\Gamma)$ и $H_\sigma^0(\Gamma)$, соответственно, единственным образом, причем погрешность в энергии поля магнитной реакции поверхности Γ' не превысит суммарной погрешности в энергии исходного поля, возникающей при его неточном задании или аппроксимации, и в этом смысле решения уравнений (2.10), (2.11) устойчивы.

4. Решение уравнений. Для численного решения вариационных задач, а значит, и операторных уравнений, используются минимизирующие последовательности Ритца, применение которых формально совпадает с решением уравнений методом Бубнова–Галеркина. А именно:

$$\begin{aligned} \text{а) } f_1^{(n)}(M) &= \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} \tau_i(M); \\ \text{б) } f_2^{(n)}(M) &= \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} \sigma_i(M), \end{aligned}$$

где координаты $\{C_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ приближенных решений $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}$ в базисах, соответственно, $\{\tau_i\}_{i=1}^n, \{\sigma_i\}_{i=1}^n$ получаются решением СЛАУ

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{(n)} \\ c_2^{(n)} \\ \dots \\ c_n^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

с вещественной симметричной матрицей коэффициентов

$$\begin{aligned} \text{а) } \alpha_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} \frac{\text{grad } \tau_j(Q)}{r_{QM}} d\Gamma_Q \text{grad } \tau_i(M) d\Gamma_M, \quad i, j = \overline{1, n}, \\ \text{б) } \alpha_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} \frac{\sigma_j(Q)}{r_{QM}} d\Gamma_Q \sigma_i(M) d\Gamma_M, \quad i, j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

и столбцом свободных членов с элементами

$$\begin{aligned} \text{а) } \beta_i &= \int_{\Gamma_i} (\mathbf{A}^* - \mathbf{A}^0) \boldsymbol{\delta}_i d\Gamma, \quad i = \overline{1, n}, \\ \text{б) } \beta_i &= - \int_{\Gamma_i} \sigma_i \varphi^0 d\Gamma, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\boldsymbol{\delta} = [\mathbf{n} \operatorname{grad} \tau_i]$; $\mathbf{A}^0$ — векторный потенциал поля $\mathbf{H}^0$ ($\mathbf{H}^0 = \operatorname{rot} \mathbf{A}^0$);

$$\mathbf{A}^*(M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\gamma_j} \Phi_{jk} \operatorname{rot} \oint_{L_{jk}} \frac{d\mathbf{l}_Q}{r_{QM}}, \quad M \in \Gamma,$$

здесь $L_{j1}, L_{j2}, \dots, L_{j\gamma_j}$ — система замкнутых контуров, проходящих через Γ''_{j0} и соответствующие внутренние отверстия в поверхности Γ_j ; Φ_{jk} — заданный магнитный поток через k -е отверстие j -ой поверхности.

Базисные функции τ_i , $i = \overline{1, n}$ можно брать из класса непрерывных и кусочно-непрерывно дифференцируемых на Γ функций, принимающих постоянные значения на Γ''_{jk} , $k = \overline{0, \gamma_j}$, $j = \overline{1, \nu}$, а функции σ_i , $i = \overline{1, n}$ — из класса кусочно-непрерывных на Γ функций, равных нулю на Γ'' и обладающих свойством $\int_{\Gamma_j} \sigma_i d\Gamma = 0$, $j = \overline{1, \nu}$. Например, в качестве τ_i допустимо выбрать кусочно-полиномиальные функции, а в качестве σ_i — кусочно-постоянные. При использовании описанных выше систем координатных функций оказывается осуществим ряд преобразований, позволяющих получить удобное для численной реализации представление для выражений (3.2), (3.3).

Для решения задачи создан оригинальный программный пакет, разработанный на языке программирования высокого уровня Microsoft Visual C# 2005. Данный пакет позволяет задавать первичное поле как своими источниками, так и напрямую в виде формулы. Результаты расчетов, выполненные с его помощью, представлены на рис. 2, 3.

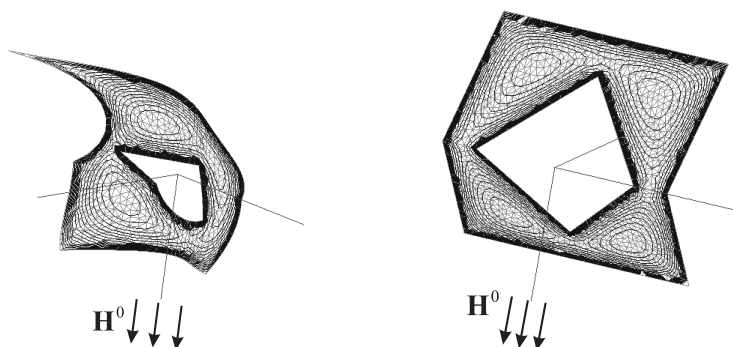


Рис. 2.

На рис. 2 представлено распределение вихревых токов с функцией потока в виде рассчитанной плотности τ на многосвязных идеально-проводящих поверхностях в однородном магнитном поле. На рис. 3 — распределение фиктивных магнитных поверхностных зарядов с рассчитанной плотностью σ на идеально-намагничивающихся поверхностях в однородном магнитном поле (изменению величины от большей к меньшей соответствует изменение цвета от белого к черному, причем черный цвет отвечает значению, равному $-\infty$, а чисто белый — значению ∞).

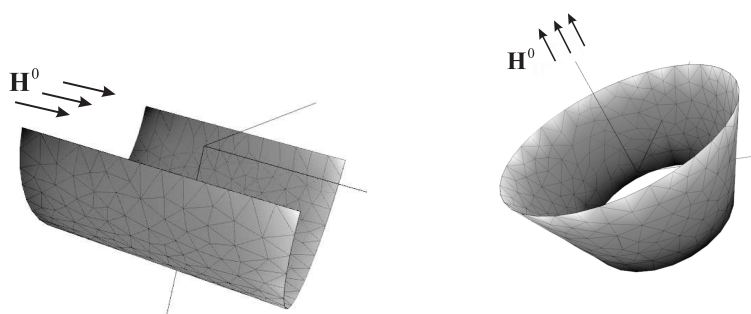


Рис. 3.

Литература

1. Астахов В. И. О допустимости идеализации границ поляризуемых тел и некоторых энергетических соотношениях для стационарного магнитного и элект-

- тростатического полей // Изв. вузов. Электромеханика.—2000.—№ 1.—С. 3–14.
2. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных.—М.: Высшая школа, 1977.—476 с.
3. Астахов В. И. Поверхностные потенциалы, операторы и уравнения теории потенциала в энергетических пространствах // Математические методы в физике, технике и экономике: Юбил. сб. науч. ст. кафедры прикладной математики ЮРГТУ (НПИ) / Юж.-Рос. гос. техн. ун-т (НПИ).—Новочеркасск: Ред. журн. Изв. вузов. Электромеханика.—2001.—С. 5–34.
4. Астахов В. И. Уравнения первого рода в задачах расчета статических и стационарных полей. Ч. 2. // Изв. вузов. Электромеханика.—2005.—№ 4.—С. 3–17.

Кочубей Татьяна Владимировна

E-mail: tako84@yandex.ru

Шапошников Кирилл Сергеевич

E-mail: _cyr_@mail.ru

Южный научный центр РАН,

Лаборатория энергетики и электротехники

Россия, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Чехова, 41

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

Р. Ч. Кулаев

В работе изучаются свойства характеристического определителя краевой задачи на графе.

Последние десятилетия характеризуются довольно бурным развитием теории дифференциальных уравнений на сетях. Подобные задачи возникают при изучении эволюционных процессов в упругих сетках, при моделировании гидросетей, электрических и нейронных сетей. Естественными становятся вопросы о получении методов практического решения краевых задач математической физики, заданных на графах. В работах [1, 2] даются два метода решения подобных задач. Это метод разделения переменных [1] и метод конечного интегрального преобразования [2]. Оба этих метода позволяют получать решения краевой задачи в виде разложения по собственным функциям соответствующей спектральной задачи. В этой связи возникает вопрос о нахождении собственных значений и построении собственных функций спектральной краевой задачи на графе. Известно, что собственные значения краевой задачи есть нули характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, являющегося функциональным определителем размера $2m$, где m — число ребер графа. Если число m велико, то раскрытие определителя $\Delta(\lambda)$, даже с использованием прикладных программных пакетов, становится проблематичным. В настоящей работе предлагается метод раскрытия характеристического определителя краевой задачи на конечном графе.

1. Начнем с описания основных терминов и обозначений используемых в работе (более подробно см. [3]).

Пусть дано одно конечное множество попарно непересекающихся открытых отрезков $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через V множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, которые являются концевыми точками двух и более отрезков. Объединение всех точек отрезков γ_i и множества V обозначим через Γ и назовем графом. При этом отрезки γ_i будем называть ребрами графа Γ , а точки множества V —

его внутренними вершинами. Концевые точки ребер графа, не принадлежащие V , будем называть граничными вершинами графа. Совокупность всех граничных вершин обозначим через $\partial\Gamma$. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_i , то будем говорить, что ребро γ_i примыкает к вершине a . Множество всех индексов ребер, примыкающих к вершине a , обозначим $I(a)$. Будем говорить, что вершины a и b графа Γ смежны, если они являются концами одного и того же ребра графа. Если обе вершины a и b , к которым примыкает ребро γ , внутренние, то ребро γ будем называть внутренним. В противном случае, когда хотя бы одна из вершин a и b граничная, ребро γ назовем граничным.

Всюду далее будем полагать, что граф Γ является связным множеством в $\mathbb{R}^n$ и не содержит циклические маршруты, т. е. является деревом.

Под скалярной функцией $u(x)$ на графе понимаем обычное отображение $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. Сужение функции $u(x)$ на ребро γ_i обозначается через $u_i(x)$. Если a — произвольная вершина графа Γ , то под $u_i(a)$ понимается $\lim_{x \rightarrow a} u_i(x)$, $x \in \gamma_i$.

Дифференцирование функции $u(x) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ внутри любого ребра осуществляется по параметру, причем полагается, что для этого на ребре выбрана ориентация.

Дифференциальным уравнением на графе называется любая совокупность обыкновенных дифференциальных уравнений на всех ребрах графа. Под решением дифференциального уравнения на графе, будем понимать функцию, непрерывную на всем ребре графа Γ удовлетворяющую на каждом ребре дифференциальному уравнению.

2. В центре внимания работы заданная на графе Γ краевая задача на собственные значения

$$(pu')' + qu = \lambda u, \quad x \in \Gamma,$$

со спектральным параметром λ . В каждой внутренней вершине $a \in V$ заданы условия непрерывности и условия согласования

$$\sum_{i \in I(a)} p_i(a) u'_i(a) = 0,$$

а в каждой граничной вершине задаются условия Дирихле

$$u(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma.$$

В дифференциальном уравнении полагаем, что функции p, p', q равномерно непрерывны на каждом ребре графа Γ и $\inf_{x \in \Gamma} p(x) > 0$.

Заменой независимой переменной $x \in \Gamma$ можно привести заданное дифференциальное уравнение к уравнению, в котором коэффициент при старшей производной равен единице. Поэтому приведенная выше спектральная задача может быть сведена к следующей:

$$u'' + Q(x)u = \lambda r(x)u, \quad x \in \Gamma. \quad (1)$$

В каждой граничной вершине задано краевое условие

$$u(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma, \quad (2)$$

а в каждой внутренней вершине — условия непрерывности и условие согласования:

$$u_i(a) - u_{i_1}(a) = 0, \quad i, i_1 \in I(a), \quad \sum_{i \in I(a)} u'_i(a) = 0. \quad (3)$$

3. Пусть $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ — множество всех ребер графа Γ , занумерованных произвольным образом. Дифференциальное уравнение (1), суженное на ребро γ_i , примыкающее к вершине a графа Γ и параметризованное от вершины a , имеет два линейно-независимых решения $s_i(x, \lambda)$ и $c_i(x, \lambda)$, удовлетворяющих начальным условиям $s_i(a, \lambda) = 0$, $\frac{\partial s_i}{\partial x}(a, \lambda) = 1$, $c_i(a, \lambda) = 1$, $\frac{\partial c_i}{\partial x}(a, \lambda) = 0$. Продолжим функции s_i и c_i на весь граф Γ , положив их тождественно равными нулю на остальных ребрах. Получим фундаментальную систему решений $\{\varphi_k(x, \lambda)\}_{k=1}^{2m}$ уравнения (1). Для определенности будем считать, что функция φ_{2i} — продолжение функции c_i , а φ_{2i-1} — продолжение функции s_i .

Пусть далее $\{a_j\}_{j=1}^n$ — некоторая нумерация вершин графа Γ , а $\{e_i\}_{i=1}^{2m}$ — набор всех линейных функционалов, определяющих полную систему условий (2), (3). Рассмотрим характеристический определитель $\Delta(\lambda) = \det \|e_i(\varphi_k(\cdot, \lambda))\|_1^{2m}$. В определителе $\Delta(\lambda)$ k -й столбец получен подстановкой функции φ_k в каждый из функционалов e_i . Поэтому, если функция φ_k не равна тождественно нулю на ребре γ_{i_0} , то будем говорить, что k -й столбец определителя $\Delta(\lambda)$ соответствует ребру γ_{i_0} . С учетом нумерации функций φ_k можно сказать, что ребру γ_i соответствует два столбца определителя $\Delta(\lambda)$ с индексами $2i-1$ и $2i$.

В дальнейшем нам удобно будет рассматривать $\Delta(\lambda)$ как определитель блочной матрицы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} B(a_1) \\ B(a_2) \\ \dots \\ B(a_n) \end{vmatrix},$$

где $B(a_j)$ — матрица размера $|I(a_j)| \times 2m$.

Если a_j — граничная вершина, к которой примыкает ребро γ_i , то $B(a_j)$ имеет вид:

$$\| \underbrace{0 \dots 0}_{2i-2} \ s_i(a_j, \lambda) \ c_i(a_j, \lambda) \ \underbrace{0 \dots 0}_{2m-2i} \|.$$

Если же a_j — внутренняя вершина графа, к которой примыкают ребра $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_s}$, $s = |I(a_j)|$, то $B(a_j)$ имеет вид:

$$\left\| \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & \dots & 0 & s_{i_1} & c_{i_1} & 0 & \dots & 0 & -s_{i_2} & -c_{i_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & s_{i_1} & c_{i_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -s_{i_s} & -c_{i_s} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial s_{i_1}}{\partial x} & \frac{\partial c_{i_1}}{\partial x} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial s_{i_2}}{\partial x} & \frac{\partial c_{i_2}}{\partial x} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial s_{i_s}}{\partial x} & \frac{\partial c_{i_s}}{\partial x} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|.$$

В блоке $B(a_j)$ значения всех функций берутся в точке (a_j, λ) , и ненулевыми являются только столбцы, соответствующие ребрам, примыкающим к вершине a . Обозначим через $\{M_\alpha(a_j)\}$ множество всех миноров матрицы $B(a_j)$ порядка $|I(a_j)|$, составленных из ненулевых столбцов. Тогда характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ можно представить в виде суммы

$$\Delta(\lambda) = \sum_i \varepsilon_i M_{\alpha_i}(a_1) M_{\rho_i}(a_2) \dots M_{\omega_i}(a_n) = \sum_i \varepsilon_i P_i, \quad (4)$$

где ε_i равно либо 1, либо -1 , а различные миноры, входящие в одно произведение P_i , не имеют элементов одного и того же столбца определителя $\Delta(\lambda)$.

4. Свойство. Если некоторый минор $M_\alpha(a)$, $a \in V$, содержит два столбца, соответствующие некоторому ребру, примыкающему к вершине a , то все произведения P_i в формуле (4), содержащие $M_\alpha(a)$, равны нулю.

◁ Так как порядок минора $M_\alpha(a)$ равен $|I(a)|$, то найдется хотя бы одно ребро $\gamma_{\alpha_0} = (a, a_1)$ такое, что минор $M_\alpha(a)$ не содержит элементов столбцов определителя $\Delta(\lambda)$, соответствующих ребру γ_{α_0} .

Рассмотрим произведение P_i , содержащее $M_\alpha(a)$. Произведение можно представить в виде

$$P_i = M_\alpha(a)M_\beta(a_1)M'_{\alpha\beta}, \quad (5)$$

где $M'_{\alpha\beta}$ — определитель, получаемый вычеркиванием из определителя $\Delta(\lambda)$ всех строк и столбцов, содержащих элементы миноров $M_\alpha(a)$ и $M_\beta(a_1)$.

Предположим сначала, что ребро γ_{α_0} граничное. Тогда $a_1 \in \partial\Gamma$ и M_β — один из двух возможных миноров первого порядка матрицы-строки $B(a_1)$. В столбцах определителя $\Delta(\lambda)$, соответствующих ребру $\gamma_{\alpha_0} = (a, a_1)$, ненулевыми могут быть только элементы, попавшие в матрицы $B(a)$ и $B(a_1)$. А поскольку в $M_\alpha(a)$ не входят элементы ни одного столбца, соответствующего ребру γ_{α_0} , а в $M_\beta(a_1)$ входит элемент только одного из двух столбцов, соответствующих ребру γ_{α_0} , то $M'_{\alpha\beta}$ содержит элементы столбца, отвечающего ребру γ_{α_0} , не попадающие в блоки $B(a)$ и $B(a_1)$. Т. е. в $M'_{\alpha\beta}$ один столбец точно нулевой.

Пусть теперь ребро γ_{α_0} внутреннее. В этом случае размерность минора $M_\beta(a_1)$ не менее двух. Если в построении минора $M_\beta(a_1)$ не участвует хотя бы один из столбцов $\Delta(\lambda)$, соответствующих ребру γ_{α_0} , то как и выше, $M'_{\alpha\beta}$ содержит нулевой столбец. Если же минор $M_\beta(a_1)$ содержит элементы обоих столбцов, отвечающих ребру γ_{α_0} , то, найдется ребро $\gamma_{\beta_0} = (a_1, a_2)$ такое, что минор $M_\beta(a_1)$ не содержит элементов столбцов, соответствующих ребру γ_{β_0} . Тогда рассматриваемое произведение P_i можно представить в виде

$$P_i = M_\alpha(a)M_\beta(a_1)M_\delta(a_2)M'_{\alpha\beta\delta},$$

где $M'_{\alpha\beta\delta}$ — минор определителя $M'_{\alpha\beta}$, дополнительный для $M_\delta(a_2)$.

Если вершина $a_2 \in \partial\Gamma$, то, как и выше, показывается, что $M'_{\alpha\beta\delta} = 0$. В противном случае повторяем рассуждения, проведенные для случая, когда ребро γ_{α_0} внутреннее. Поскольку граф Γ является деревом, то через конечное число шагов мы дойдем до граничного ребра $\gamma_{\xi_0} = (a_s, a_{s+1})$, $a_{s+1} \in \partial\Gamma$, такого, что

$$P_i = M_\alpha(a)M_\beta(a_1) \dots M_\xi(a_s)M_\xi(a_{s+1})M'_{\alpha\beta \dots \xi},$$

и минор $M_\xi(a_s)$ не содержит элементов ни одного из столбцов, отвечающих граничному ребру γ_{ξ_0} . Откуда следует, что $M'_{\alpha\beta\dots\xi} = 0$. $\triangleright$

5. ЗАМЕЧАНИЕ. Из свойства 4 следует, что если некоторое произведение P_i , входящее в разложение $\Delta(\lambda)$, не равно нулю, то каждый сомножитель этого произведения содержит элементы одного и только одного столбца от каждого ребра, примыкающего к соответствующей этому сомножителю вершине. Более того, пусть $\gamma = (a_1, a_2)$, $a_1, a_2 \in V \cup \partial\Gamma$, а P_i — элемент разложения (4), отличный от нуля, тогда, если минор $M_\alpha(a_1)$, входящий сомножителем в P_i , содержит элементы одного из двух столбцов, соответствующих ребру $\gamma = (a_1, a_2)$, то минор $M_\beta(a_2)$, входящий в то же произведение P_i , обязательно содержит элементы другого столбца, отвечающего ребру γ .

6. Пусть $a \in V$ и $M_\alpha(a)$ — некоторый минор, входящий в разложение (4) и составленный из столбцов матрицы $B(a)$, соответствующих различным ребрам, с индексами $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ ($s = |I(a)|$). Тогда

$$M_\alpha(a) = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1} & -\varphi_{\alpha_2} & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_{\alpha_1} & 0 & -\varphi_{\alpha_3} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\alpha_1} & 0 & 0 & \dots & -\varphi_{\alpha_s} \\ \varphi'_{\alpha_1} & \varphi'_{\alpha_2} & \varphi'_{\alpha_3} & \dots & \varphi'_{\alpha_s} \end{vmatrix},$$

$$\text{где } \varphi_{\alpha_j} = \varphi_{\alpha_j}(a, \lambda) = \begin{cases} s_{\frac{\alpha_j+1}{2}}(a, \lambda), & \text{если } \alpha_j \text{ — нечетное,} \\ c_{\frac{\alpha_j}{2}}(a, \lambda), & \text{если } \alpha_j \text{ — четное,} \end{cases}$$

$$\varphi'_{\alpha_j} = \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{\alpha_j}(a, \lambda).$$

Непосредственным вычислением можно установить равенство

$$M_\alpha(a) = \varphi'_{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2} \dots \varphi_{\alpha_s} + \dots + \varphi_{\alpha_1} \varphi'_{\alpha_2} \dots \varphi_{\alpha_s} + \dots + \varphi_{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2} \dots \varphi'_{\alpha_s} = (\varphi_{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2} \dots \varphi_{\alpha_s})'. \quad (6)$$

Здесь $(\varphi_{\alpha_1} \dots \varphi_{\alpha_s})' = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_{\alpha_1}(x, \lambda) \dots \varphi_{\alpha_s}(x, \lambda))|_{x=a}$.

Если же $a \in \partial\Gamma$ и γ_i — ребро, примыкающее к a , то $M_1(a) = \varphi_{2i-1} = s_i(a, \lambda)$ и $M_2(a) = \varphi_{2i} = c_i(a, \lambda)$.

7. Для упрощения дальнейших выкладок нам удобно ввести на графе Γ ориентацию ребер, подчиненную правилу: для любой вершины графа все примыкающие к ней ребра ориентированы либо «от вершины», либо «к вершине». Покажем, что введение такой ориентации всегда возможно.

Пусть a_1 — произвольная вершина графа Γ . Зададим на всех ребрах графа, примыкающих к a_1 , направление «от a_1 ». И рассмотрим все вершины графа Γ смежные с a_1 . Обозначим их через $a_2, \dots, a_s$. К каждой из этих вершин подходит ребро $\gamma_i = (a_1, a_i)$, ориентированное «к вершине a_i ». Зададим на всех оставшихся ребрах, примыкающих к вершинам $a_2, \dots, a_s$, ориентацию в направлении «к вершине a_i », $i = \overline{2, s}$. Это возможно сделать, так как граф Γ является деревом и поэтому среди вершин $a_2, \dots, a_s$ нет смежных. Далее, рассмотрим все вершины графа, отличные от a_1 , смежные к $a_2, \dots, a_s$, и на всех ребрах, примыкающих к ним, задаем ориентацию «от вершины». И опять, так как граф Γ является деревом, то такая ориентация возможна, причем ни одно из ориентированных на последнем шаге ребер не совпадает с ребрами, ориентированными ранее. Так как граф Γ конечный, то через конечное число шагов мы получим нужную ориентацию всего графа.

Если на графе Γ задана ориентация ребер, то все вершины графа можно разбить на два непересекающихся множества: множество $A = \{a_i\}$, в которое входят все вершины, для которых примыкающие ребра ориентированы «от», и множество $B = \{b_i\}$, состоящее из всех вершин графа, для которых ориентация идет «к вершине».

8. Пусть $a \in A$ и $\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_s}$ ($s = |I(a)|$) — ребра, примыкающие к вершине a . Если вершина $a \in \partial\Gamma$, то матрица $B(a)$ имеет вид

$$\|0 \dots 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \dots 0\|.$$

$2i_1-1 \quad 2i_1$

Если же a_1 — внутренняя вершина, то $B(a)$ имеет следующий вид:

$$\left\| \begin{array}{cccccccccccc} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 2i_1-1 & 2i_1 & & & 2i_2-1 & 2i_2 & & & & 2i_s-1 & 2i_s & & & & \end{array} \right\|.$$

Очевидно, что любой минор $M_\alpha(a)$, содержащий хотя бы два столбца с нечетными индексами, равен нулю. То же самое можно сказать про миноры порядка ≥ 2 , составленные только из столбцов с четными индексами. Поэтому можно сформулировать следующее утверждение.

9. Свойство. Если $a \in A$, то любой минор $M_\alpha(a)$, не равный нулю, содержит элементы одного и только одного столбца с нечетным индексом. Кроме того, если $M_\alpha(a) \neq 0$, то $M_\alpha(a) = 1$.

Обозначим через M'_α минор характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, дополнительный к $M_\alpha(a)$, $a \in A$. Тогда можно записать равенство

$$\Delta(\lambda) = \sum_{\alpha} M_\alpha(a) M'_\alpha(-1)^{k_\alpha},$$

где k_α сумма индексов всех строк и столбцов определителя $\Delta(\lambda)$, из которых составлен минор $M_\alpha(a)$. Из свойства 9 следует, что $(-1)^{k_\alpha}$ принимает одно и тоже значение для всех $M_\alpha(a) \neq 0$.

10. Свойство. В формуле (4) все произведения берутся с одним знаком, т. е. $\varepsilon_i = \varepsilon_j$.

11. Далее для упрощения записей мы будем пользоваться сокращенными обозначениями. Пусть, по-прежнему, $s_i(a, \lambda)$ и $c_i(a, \lambda)$ два линейно-независимых решения уравнения (1) суженного на ребро $\gamma_i = (a, b)$, $a \in A$, $b \in B$. В силу выбора решений, $s_i(a, \lambda) = 0$, $\frac{\partial}{\partial x} s_i(a, \lambda) = 1$, $c_i(a, \lambda) = 1$, $\frac{\partial}{\partial x} c_i(a, \lambda) = 0$. Для значений этих функций на другом конце ребра γ_i примем обозначения: $s_i = s_i(b, \lambda)$, $s'_i = \frac{\partial}{\partial x} s_i(b, \lambda)$, $c_i = c_i(b, \lambda)$, $c'_i = \frac{\partial}{\partial x} c_i(b, \lambda)$. Везде ниже знак производной будет обозначать дифференцирование по переменной $x \in \Gamma$.

Занумеруем вершины из множества B так, чтобы $b_1, \dots, b_j \in B \cap V$, $b_{j+1}, \dots, b_k \in B \cap \partial\Gamma$. Рассмотрим некоторое произведение P_i из (4). Формула (6) и свойство 9 позволяют записать P_i в виде:

$$\begin{aligned} P_i &= M_\alpha(b_1) \dots M_\xi(b_j) M_\xi(b_{j+1}) \dots M_\omega(b_k) = \\ &= (\varphi_{\alpha_1} \dots \varphi_{\alpha_{s_1}})'|_{x=b_1} \dots (\varphi_{\xi_1} \dots \varphi_{\xi_{s_j}})'|_{x=b_j} \varphi_{\xi_0}|_{x=b_{j+1}} \dots \varphi_{\omega_0}|_{x=b_k}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_{s_1}$ ($s_1 = |I(b_1)|$) — индексы столбцов определителя $\Delta(\lambda)$, из которых составлен минор $M_\alpha(b_1)$, $\xi, \dots, \xi_{s_j}$ ($s_j = |I(b_j)|$) — индексы столбцов, составляющих $M_\xi(b_j)$, ξ_0 — индекс столбца, составляющего минор $M_\xi(b_{j+1})$ и т. д.

Пусть теперь $a \in A$ и $b_{i_1}, \dots, b_{i_k} \in B$ — вершины, смежные с a . Из свойства 4 и замечания следует, что если P — некоторое произведение, отличное от нуля, а $M_\alpha(a)$ — сомножитель, входящий в P и содержащий элементы столбца $\Delta(\lambda)$, отвечающего ребру $\gamma_1(a, b)$ с нечетным индексом, то минор $M_\beta(b_{i_1})$ из того же произведения P содержит элементы столбца, отвечающего ребру γ_1 с четным индексом. Поскольку в миноре $M_\alpha(b_{i_1})$ только один столбец с нечетным индексом (свойство 9), то в формуле (7) для рассматриваемого произведения среди функций φ_k , соответствующих ребрам $\gamma_j = (a, b_{i_j})$,

$j = \overline{1, k}$, примыкающим к вершине a , одна функция равна $c_i(x, \lambda)$, $x \in \gamma_i$, а все остальные равны $s_j(x, \lambda)$, $x \in \gamma_j$.

Таким образом, если $a \in A$ и $I(a) = \{i_1, \dots, i_s\}$, то вершина a «делегирована» в каждое произведение $P_i \neq 0$, приведенное к виду (7), один из наборов функций

$$\begin{aligned} & s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_{s-1}}, c_{i_s}; \\ & s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, c_{i_{s-1}}, s_{i_s}; \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & c_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_{s-1}}, s_{i_s}. \end{aligned} \tag{8}$$

12. Изложенная выше теория позволяет построить алгоритм раскрытия характеристического определителя $\Delta(\lambda)$:

1) задаем параметризацию ребер графа Γ , придерживаясь правила: все ребра, примыкающие к вершине графа, параметризованы либо «от вершины», либо «к вершине»;

2) разбиваем множество вершин графа на два непересекающихся подмножества $A = \{a_k\}$ и $B = \{b_k\}$, где множество A состоит из всех вершин графа, у которых все примыкающие ребра параметризованы «от вершины». Тогда B состоит из всех вершин, у которых примыкающие ребра параметризованы «к вершине»;

3) для каждого ребра $\gamma_i = (a, b)$, $a \in A$, $b \in B$, строим два линейно-независимых решения $s_i(x, \lambda)$, $c_i(x, \lambda)$ уравнения (1), удовлетворяющих начальным условиям $s_i(a, \lambda) = 0$, $\frac{\partial}{\partial x} s_i(a, \lambda) = 1$, $c_i(a, \lambda) = 1$, $\frac{\partial}{\partial x} c_i(a, \lambda) = 0$;

4) удаляем из графа Γ все вершины множества $B \cap V$. Граф разбивается на подграфы, имеющие одну внутреннюю вершину из A (пучки) и не имеющие внутренних вершин (интервалы);

5) каждый пучок с внутренней вершиной a_j дает наборы вида (8);

6) каждый интервал γ_i дает единственный элемент s_i ;

7) составляем всевозможные произведения, каждое из которых содержит по одному из возможных наборов от каждого пучка и каждого интервала;

8) все полученные произведения разбиваем на группы сомножителей так, что в каждую группу данного произведения входят все множители, отвечающие ребрам, примыкающим к одной и той же вершине из множества B (число таких групп равно числу элементов множества B);

9) «навешиваем» на каждую группу, состоящую из двух или более сомножителей, знак производной и получаем элемент P_i разложения (4), приведенный к виду (7);

10) суммируем все P_i и получаем $\Delta(\lambda)$ с точностью до знака.

13. ПРИМЕР. Рассмотрим задачу (1)–(3), заданную на графе Γ , изображенном на рисунке 1. Поскольку граф состоит из семи ребер, то характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ имеет 14-й порядок.

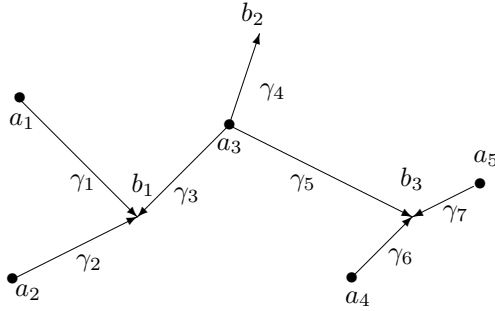


Рис. 1.

Задаем на графе Γ ориентацию ребер, как показано на рисунке. Удаляем вершины b_1 и b_3 . Граф распадается на один пучок Γ_{a_3} и четыре интервала $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_6, \gamma_7$. От Γ_{a_3} имеем три набора

$$s_3, s_4, c_5; \quad s_3, c_4, s_5; \quad c_3, s_4, s_5.$$

От интервалов γ_i имеем соответственно s_1, s_2, s_6, s_7 . Составляем все возможные произведения, содержащие по одному набору от каждого γ_i и один набор от Γ_{a_3} :

$$s_1 s_2 s_6 s_7 s_3 s_4 c_5, \quad s_1 s_2 s_6 s_7 s_3 c_4 s_5, \quad s_1 s_2 s_6 s_7 c_3 s_4 s_5.$$

Группируем сомножители по индексам ребер, примыкающих к вершинам b_1, b_2 и b_3 , и «навешиваем» на группу, отвечающую вершинам b_1 и b_3 , производную. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & (s_1 s_2 s_3)'|_{x=b_1} (c_5 s_6 s_7)'|_{x=b_3} s_4|_{x=b_2} + \\ & + (s_5 s_6 s_3)'|_{x=b_1} (s_5 s_6 s_7)'|_{x=b_3} c_4|_{x=b_2} + \\ & + (s_1 s_2 c_3)'|_{x=b_1} (s_5 s_6 s_7)'|_{x=b_3} s_4|_{x=b_2}. \end{aligned}$$

Литература

1. *Завгородний М. Г.* Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе // Докл. АН.—1994.—Т. 335, № 3.—С. 281–282.
2. *Кулаев Р. Ч.* Интегральное преобразование на графе для дифференциального оператора второго порядка // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 2.—С. 78–85.
3. *Покорный Ю. В. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2004.—268 с.

Кулаев Руслан Черменович

Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова;

Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А

Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: kulaevrch@mail.ru

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ОПЕРАТОРОМ КАПУТО В УСЛОВИИ СМЕЩЕНИЯ

Ф. М. Лосанова

В данной работе исследована краевая задача со смещением в интегральной постановке для уравнения параболического типа на плоскости. Для поставленной задачи доказаны принцип экстремума, теоремы о единственности и существовании решения задачи.

В прямоугольной области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ евклидовой плоскости независимых переменных (x, t) рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x, t) + p(x, t)u_x(x, t) + q(x, t)\partial_{0t}^\varepsilon u(x, t) + r(x, t)u(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

где $p(x, t), q(x, t), r(x, t), f(x, t) \in C(\bar{\Omega})$ — заданные действительные функции, $q(x, t) < 0$, $\partial_{0t}^\varepsilon \psi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^t \frac{\psi'(s)}{(t-s)^\varepsilon} ds$ — оператор Капуто [1, с. 11], $\varepsilon \in]0, 1[$.

Обозначим через $\Omega_0 = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$, $\Omega_1 = \{(x, t) : 0 < x < \alpha, 0 < t < T\}$, $\Omega_2 = \{(x, t) : \beta < x < l, 0 < t < T\}$, $\sigma = \bar{\Omega} \setminus \Omega_0$.

Под регулярным в области Ω решением уравнения (1) будем понимать функцию $u = u(x, t)$, непрерывную в Ω_0 вместе с производными $u_{xx}(x, t)$, $\partial_{0t}^\varepsilon u(x, t)$, $u_x(x, t)$ и обладающую следующим свойством: для любой точки $x \in (0, l)$ существуют положительные величины $k = k(x)$ и $h > \varepsilon$, такие, что

$$|u(x, t) - u(x, y)| \leq k(t - y)^h \quad \forall t \geq y > 0,$$

удовлетворяющую уравнению (1) в Ω .

Рассмотрим следующую краевую задачу с нелокальным смещением.

ЗАДАЧА. Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

и краевым условиям:

$$\begin{aligned} A(t)\partial_{0t}^\delta u(0, t) &= \int_0^\alpha B(x, t)u(x, t)dx + \\ &+ \int_\beta^l C(x, t)u(x, t)dx + D(t), \quad 0 \leq t \leq T; \end{aligned} \quad (3)$$

$$u(l, t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где $A(t), D(t) \in C[0, T]$, $B(x, t) \in C(\bar{\Omega}_1)$, $C(x, t) \in C(\bar{\Omega}_2)$, $0 < \delta < \varepsilon < 1$, $0 < \alpha < \beta < l$.

Теорема 1. Пусть $r(x, t) \leq 0$, функции $B(x, t), C(x, t)$ удовлетворяют требованию

$$\alpha R + (l - \beta)F < \frac{1}{\Gamma(1 - \delta)} \inf_{t \in [0, T]} (|A(t)|t^{-\delta}), \quad (5)$$

где $R = \max_{\bar{\Omega}_1} |B(x, t)|$, $F = \max_{\bar{\Omega}_2} |C(x, t)|$. Тогда задача (2)–(4) для уравнения (1) в области Ω имеет не более одного решения.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующий принцип экстремума.

Теорема 2. Регулярное в области Ω решение уравнения (1) ни в какой точке $(\xi, \eta) \in \Omega_0$ не может принимать своего наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в Ω , если в этой точке

$$f(\xi, \eta) \geq 0 \quad (f(\xi, \eta) \leq 0).$$

Принцип экстремума для уравнения вида (1) с дробной производной в смысле Римана–Лиувилля доказан В. А. Нахушевой [2, с. 46].

При исследовании вопросов существования решения поставленной задачи рассмотрим случай, когда $q(x, t) = -1$. Уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{xx}(x, t) - \partial_{0t}^\varepsilon u(x, t) = f(x, t) - p(x, t) u_x(x, t) - r(x, t) u(x, t). \quad (6)$$

Учитывая связь между операторами дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля и в смысле Капуто, уравнение (6) можно записать в виде

$$u_{xx}(x, t) - D_{0t}^\varepsilon u(x, t) = f_1(x, t), \quad (7)$$

где

$$f_1(x, t) = f(x, t) - p(x, t) u_x(x, t) - r(x, t) u(x, t) - \frac{\tau(x) t^{-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)}.$$

Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть $p_x(x, t)$, $r(x, t)$, $f(x, t) \in C(\bar{\Omega})$, $r(x, t) \leq 0$, $r(x, t)$, $f(x, t)$, $\tau(x)$ удовлетворяют условию Гёльдера по переменной x , $A(t) \neq 0$ для любого $t \in [0, T]$ и выполнено условие (5). Тогда решение нелокальной краевой задачи (2)–(4) для уравнения (7) существует и является единственным.

◁ Пусть $u(0, t) = \varphi_0(t)$, тогда, используя представление решения первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка с производной Римана–Лиувилля [3, с. 99], решение нелокальной краевой задачи (2)–(4) для уравнения (7) запишем в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^t \varphi_0(\eta) G_\xi(x, t, 0, \eta) d\eta - \int_0^t \varphi(\eta) G_\xi(x, t, l, \eta) d\eta - \\ & - \int_0^t \int_0^l f(\xi, \eta) G(x, t, \xi, \eta) d\xi d\eta + \int_0^t \int_0^l p(\xi, \eta) u_\xi(\xi, \eta) G(x, t, \xi, \eta) d\xi d\eta + \\ & + \int_0^t \int_0^l r(\xi, \eta) u(\xi, \eta) G(x, t, \xi, \eta) d\xi d\eta + \int_0^l \tau(\xi) D_{0t}^{\varepsilon-1} G(x, t, \xi, 0) d\xi, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} G(x, t, \xi, \eta) = & \frac{(t-\eta)^{\theta-1}}{2} \times \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e_{1,\theta}^{1,\theta} \left(-\frac{|x-\xi+2nl|}{(t-\eta)^\theta} \right) - e_{1,\theta}^{1,\theta} \left(-\frac{|x+\xi+2nl|}{(t-\eta)^\theta} \right) \right] \end{aligned}$$

— функция Грина, $e_{\alpha,\theta}^{\mu,\delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu) \Gamma(\delta - \theta n)}$ — функция типа Райта, $\theta = \frac{\varepsilon}{2}$.

После необходимых преобразований из (8) получаем интеграль-

ное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x, t) + \int_0^l \int_0^t K^*(x, t, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta = F(x, t),$$

где

$$\begin{aligned} K^*(x, t, \xi, \eta) &= K(x, t, \xi, \eta) + \\ &+ \begin{cases} lA_1(\eta)B(\xi, \eta)D_{\eta t}^{-\delta}F_1(x, t, 0, \gamma), & 0 \leq x \leq \alpha; \\ 0, & \alpha \leq x \leq \beta; \\ A_1(\eta)C(\xi, \eta)D_{\eta t}^{-\delta}F_1(x, t, 0, \gamma), & \beta \leq x \leq l; \end{cases} \\ K(x, t, \xi, \eta) &= p_\xi(\xi, \eta)G(x, t, \xi, \eta) + \\ &+ p(\xi, \eta)G_\xi(x, t, \xi, \eta) - r(\xi, \eta)G(x, t, \xi, \eta), \\ F(x, t) &= \int_0^t [p(l, \eta)G(x, t, l, \eta) - G_\xi(x, t, l, \eta)]\varphi(\eta) d\eta + \\ &+ \int_0^t \int_0^l \left[\frac{\tau(\xi)\eta^{-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} - f(\xi, \eta) \right] G(x, t, \xi, \eta) d\xi d\eta + \\ &+ \int_0^t F_1(x, t, 0, \eta)D_{0\eta}^{-\delta}A_1(\eta)D(\eta) d\eta + \\ &+ \int_0^t F_1(x, t, 0, \eta)\tau(0)D_{0\eta}^{-\delta}A_1(\eta)D(\eta) d\eta + \int_0^t F_1(x, t, 0, \eta)\tau(0) d\eta, \\ F_1(x, t, 0, \eta) &= G_\xi(x, t, 0, \eta) - p(0, \eta)G(x, t, 0, \eta), \quad A_1(t) = 1/A(t). \end{aligned}$$

Итак, задача (2)–(4) для уравнения (7) редуцирована к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи. $\triangleright$

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. Нахушева В. А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов.—М.: Наука, 2006.—173 с.
3. Псху А. В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка.—Нальчик, 2005.—186 с.

Лосанова Фатима Мухамедовна

Научно-исследовательский институт прикладной
математики и автоматизации КБНЦ РАН

Россия, КБР, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: niipma@mail333.com

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ¹

М. О. Мамчуев

В работе доказана теорема существования и единственности решения одной нелокальной краевой задачи для диффузионно-волнового уравнения.

Постановка задачи. В области $\Omega = \{(x, y) : x > 0, 0 < y < T\}$, рассмотрим диффузионно-волновое уравнение

$$u_{xx}(x, y) - D_{0y}^\alpha u(x, y) = 0, \quad (1)$$

где D_{0t}^α — оператор дробного (в смысле Римана — Лиувилля) интегродифференцирования порядка α [1, с. 9], $\alpha \in (0, 2)$.

Пусть $n \in \{1, 2\}$ выбрано из условия $n - 1 < \alpha \leq n$. Регулярным решением уравнения (1) в области Ω называется функция $u = u(x, y)$ из класса $D_{0y}^{\alpha-k} u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, $1 \leq k \leq n$, $u_{xx}(x, y)$, $D_{0y}^\alpha u(x, y) \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x, y) \in \Omega$ [2, с. 103].

Задача N. В области Ω найти регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (1), такое, что $u_x \in C([0; \infty) \times (0; T))$, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-k} u(x, y) = \tau_k(x), \quad 1 \leq k \leq n, \quad x \geq 0, \quad (2)$$

$$A(y)u_x(0, y) + \sum_{j=1}^m B_j(y)D_{0y}^{\alpha_j} u(0, y) = C(y), \quad 0 < y \leq T, \quad (3)$$

где $\alpha_m < \alpha_{m-1} < \dots < \alpha_1 < 1$, $A(y) \neq 0$, $\forall y \in [0; T]$, $B_1(y) \neq 0$, $\tau_k(x)$, $A(y)$, $B_j(y)$, $C(y)$ — заданные функции.

Условие (3) повторяет условие иницированное необходимым условием

$$u_x(0, y) + D_{0y}^{1/2} u(0, \eta) = 0$$

для уравнения Фурье [3, с. 66].

Задача с условием вида (3) для уравнения теплопроводности исследована в работе [4].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-96625-р_юг_а и фонда содействия отечественной науке.

Редукция к задаче с локальным условием. Будем искать решение $u(x, y)$ задачи (1)–(3) среди функций, для которых при $x \rightarrow +\infty$ выполняются аналоги условий Тихонова [5]:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y^{n-\alpha} u(x, y) \exp(-\sigma x^\varepsilon) = 0, \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y^{n-\alpha} u_x(x, y) \exp(-\sigma x^\varepsilon) = 0, \quad (5)$$

где $\varepsilon = \frac{2}{2-\alpha}$, σ — некоторая положительная константа.

Тогда из необходимого нелокального условия [6]

$$u(0, y) = 2 \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_{0l}^{\beta-k+1, 0, y} \tau_k(\xi) + \\ + 2\mathcal{R}_{0y}^{\beta, l} u_x(l, \eta) - D_{0y}^{-\beta} u_x(0, \eta) + 2\mathcal{R}_{0y}^{0, l} u(l, \eta),$$

при $l \rightarrow +\infty$ имеем

$$u(0, y) + D_{0y}^{-\beta} u_x(0, \eta) = S(y), \quad (6)$$

где

$$S(y) = 2 \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_{0\infty}^{\beta-k+1, 0, y} \tau_k(\xi), \\ \mathcal{N}_{x_1 x_2}^{\theta, x, y} \nu(x) = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \nu(\xi) y^{\theta-1} e_{1, \beta}^{1, \theta} \left(-\frac{|x - \xi|}{y^\beta} \right) d\xi, \\ \mathcal{R}_{0y}^{\delta, x} \mu(y) = \frac{1}{2} \int_0^y \mu(\eta) (y - \eta)^{\delta-1} e_{1, \beta}^{1, \delta} \left(-\frac{|x|}{(y - \eta)^\beta} \right) d\eta.$$

Из условий (3) и (6) получим

$$\psi(y) + \sum_{j=1}^m D_{0y}^{-\beta} a_j(y) D_{0y}^{\alpha_j} \psi(y) = f(y), \quad (7)$$

где $\psi(y) = u(0, y)$, $a_j(y) = -\frac{B_j(y)}{A(y)}$, $f(y) = S(y) - D_{0y}^{-\beta} \frac{C(y)}{A(y)}$.

После того, как будет найдено $\psi(y)$, задача N сведется к задаче в полуполосе с локальным условием

$$u(0, y) = \psi(y), \quad 0 < y \leq T, \quad (8)$$

которая исследована в работе [7] при $\alpha \in (0, 1)$ в классе функций обращающихся в ноль при $x \rightarrow \infty$.

Решение уравнения (7). Известно [8], что если $a_j(x) \in C^{H(\alpha_1)}[0; T]$, где $H(x)$ — функция Хевисайда, то

$$D_{0y}^{-\beta} a_j(y) D_{0y}^{\alpha_j} \psi(y) = \int_0^y \frac{k_j(y, s) \psi(s) ds}{(y-s)^{1+\alpha_j-\beta}}, \quad (9)$$

где

$$k_j(y, s) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(-\alpha_j)} \int_0^1 \frac{a_j[(y-s)t+s]}{(1-t)^{1-\beta}t^{1+\alpha_j}} dt, & \alpha_j < 0, \\ \frac{\beta-\alpha_j}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha_j)} \int_0^1 \frac{a_j[(y-s)t+s]}{(1-t)^{1-\beta}t^{\alpha_j}} dt, & \alpha_j > 0. \end{cases}$$

Функция $f(y)$ в правой части уравнения (7) такова, что $f^*(y) = y^{n-\alpha} f(y) \in C[0; T]$. Из $y^{n-\alpha} u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ следует, что $\psi^*(y) = y^{n-\alpha} \psi(y) \in C[0; T]$. Поэтому, пользуясь соотношением (9), запишем (7) в виде

$$\psi^*(y) + \int_0^y \frac{y^\gamma K(y, s) \psi^*(s)}{s^\gamma (y-s)^{\beta_1}} ds = f^*(y), \quad (10)$$

где $K(y, s) = \sum_{j=1}^m (y-s)^{\alpha_1-\alpha_j} k_j(y, s)$, $\gamma = n-\alpha$, $\beta_1 = 1-\beta+\alpha_1$. Очевидно, что $K(y, s) \in C(0 \leq s \leq y \leq T)$ и то, что оператор A , действующий по формуле $A\psi^*(y) = \int_0^y \frac{y^\gamma K(y, s)}{s^\gamma (y-s)^{\beta_1}} \psi^*(s) ds$ отображает пространство $C[0; T]$ в себя.

Покажем, что при $\beta_1 < 1$ оператор A является оператором обобщенного сжатия. Действительно, обозначим $M = \max_{0 \leq s \leq y \leq T} |K(y, s)|$, тогда

$$|A\psi^*| \leq M \|\psi^*\|_0 y^\gamma \int_0^y s^{-\gamma} (y-s)^{\beta_1} ds = M \|\psi^*\|_0 y^{1-\beta_1} B(1-\beta_1, 1-\gamma),$$

далее, получим

$$|A^2 \psi^*| \leq M \|\psi^*\|_0 B(1-\beta_1, 1-\gamma) y^\gamma \int_0^y K(y, s) s^{1-\gamma-\beta_1} (y-s)^{-\beta_1} ds \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq M^2 \|\psi^*\|_0 y^{2-2\beta_1} B(1-\beta_1, 1-\gamma) B(1-\beta_1, 2-\gamma-\beta_1) = \\ &= \|\psi^*\|_0 [My^{1-\beta_1} \Gamma(1-\beta_1)]^2 \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(3-\gamma-2\beta_1)}, \end{aligned}$$

для n -й степени оператора получим оценку

$$|A^n \psi^*| \leq \|\psi^*\|_0 [My^{1-\beta_1} \Gamma(1-\beta_1)]^n \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma+(1-\beta_1)n)}.$$

Из последнего выражения следует, что существует такое натуральное число n , что n -я степень оператора A является сжимающим оператором. Поэтому уравнение (10) имеет единственное решение $\psi^*(y) \in C[0, T]$ при $\beta_1 < 1$, т. е. при $\alpha_1 < \beta$. Значит, и уравнение (7) имеет единственное решение $\psi(y)$, такое, что $y^{n-\alpha} \psi(y) \in C[0, T]$.

Условие согласования. Для однозначной разрешимости задачи (1), (2), (8) необходимо выполнение условия согласования

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-n} \psi(y) = \tau_n(0). \quad (11)$$

Это условие можно переписать в виде $\Gamma(\alpha) \psi^*(0) = \tau_n(0)$. Из (10) следует, что $\psi^*(0) = f^*(0)$ или

$$\begin{aligned} &\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-n} \psi(y) = \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-n} f(y) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} 2 \sum_{k=1}^n D_{0y}^{\alpha-n} \mathcal{N}_{0\infty}^{\beta-k+1, 0, y} \tau_k(\xi) - \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-n} D_{0y}^{-\beta} \frac{C(y)}{A(y)}. \end{aligned}$$

Значение первого предела в последнем соотношении есть $\tau_n(x)$. При $C(y) \in C[0, T]$, получим, что $\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\beta-n} \frac{C(y)}{A(y)} = 0$. Отсюда следует (11).

Из вышесказанного вытекает следующая

Теорема. Пусть $\alpha_1 < \frac{\alpha}{2}$, $A(y) \in C^{H(\alpha_1)}[0; T]$, $B_j(y) \in C^{H(\alpha_j)}[0; T]$, $C(y) \in C[0; T]$, $\tau_k(x) \in C[0; \infty)$, и при $x \rightarrow \infty$, $\tau_k(x) = o(\exp(\sigma x^\varepsilon))$, ($k = 1, n$). Тогда существует единственное решение задачи N , в классе функций удовлетворяющих условиям (4) и (5) и таких, что $u_x(0, y) \in L[0, T]$.

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка.—М.: Наука, 2005.—200 с.

3. Нахужев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных.—М.: Наука, 2006.—287 с.
4. Нахужева З. А. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения теплопроводности // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.—2002.—Т. 6, № 1.—С. 28–34.
5. Псху А. В. Условие типа Тихонова для диффузионно-волнового уравнения // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.—2003.—Т. 6, № 2.—С. 72–73.
6. Мамчужев М. О. Необходимые нелокальные условия и задача Самарского для диффузионно-волнового уравнения // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.—2007.—Т. 9, № 2.—С. 16–19.
7. Геккиева С. Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области // Изв. Кабардино-Балкарского научного центра РАН.—2002.—№ 1(8).—С. 6–8.
8. Нахужев А. М. Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода // Дифференц. уравнения.—1974.—Т. 10, № 1.—С. 100–111.

Мамчужев Мурат Османович

Научно-исследовательский институт прикладной

математики и автоматизации КБНЦ РАН

Россия, КБР, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: mamchuev@rambler.ru

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СЕЙСМОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЯХ

И. Д. Музаев

Статья посвящена математическому моделированию сейсмогидродинамических процессов в системе высоконапорная плотина–водохранилище узкоканьонного типа. Составленная модель представляет смешанную краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами. Краевая задача решена аналитически. Получены расчетные формулы для сейсмогидродинамического давления, действующего на напорную грань плотины.

С 20-х годов прошлого столетия во всем мире начали проектирование и строительство высоких плотин в сейсмически активных зонах. В связи с этим стало необходимым вычисление дополнительного гидродинамического давления, действующего на напорную грань плотины при сейсмических колебаниях основания сооружения. Статья известного американского ученого Вестергарда [1] явилась первой теоретической работой над этой проблемой. В указанной статье задача определения сейсмогидродинамического давления на плотину поставлена и решена при следующих упрощающих предположениях: водохранилище схематизировано в виде полугораниченного прямоугольного параллелепипеда, глубина воды в водохранилище принята постоянной, вода считается идеальной упругой жидкостью, волнообразование на свободной поверхности водохранилища не учитывается, сейсмическое воздействие на систему плотина–вода смоделировано в виде жесткого горизонтального гармонического колебания плотины. При таких предположениях сейсмогидродинамическая задача свелась к смешанной краевой задаче для дифференциального уравнения Гельмгольца. В результате получена формула для вычисления сейсмогидродинамического давления.

Во второй половине двадцатого века во всем мире развернулось массовое строительство сверхвысоких плотин на сейсмически активных территориях. Учеными бывшего Советского Союза и Японии интенсивно развивалась теория, начатая Вестергардом [2–6]. Были поставлены и решены различные модификации задачи Вестергарда.

В цитированных статьях и монографиях дополнительно учтены ряд факторов, которые не были учтены Вестергардом. Например, волнообразование на свободной поверхности воды, поглощающие свойства материала на дне водохранилища, т. е. акустический импеданс и др. В монографии [2] проведены вычислительные эксперименты и доказано утверждение о том, что математическая модель Вестергарда с учетом поглощающего свойства дна водохранилища наиболее адекватно моделирует сейсмогидродинамические процессы в системе плотина–водохранилище призматической конфигурации.

В данной статье представлена и решена модифицированная задача Вестергарда при дополнительном учете ограниченности и непризматической конфигурации водохранилища и поглощающего свойства его дна.

Предположим, что в прямоугольной системе координат $oxyz$ часть пространства, ограниченная условиями $0 < x < L$, $-\frac{B(x,z)}{2} < y < \frac{B(x,z)}{2}$, $0 < z < H$, представляет узкое глубокое непризматическое водохранилище (L — длина, $B(x,z)$ — ширина, H — глубина водохранилища, ось ox направлена вдоль водохранилища, ось oz — вертикально сверху вниз). Потенциал среднего по ширине водохранилища скорости должен удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{B(x,z)} \frac{\partial B(x,z)}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{B(x,z)} \frac{\partial B(x,z)}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0, \quad (1)$$

и следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = V_0 \cos \omega t, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{ak} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \Big|_{z=H} = 0, \quad (3)$$

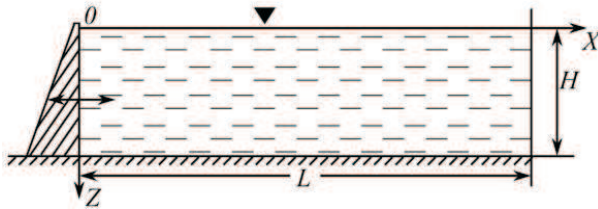
где a — скорость звука в воде, V_0 и ω — амплитуда и круговая частота скорости сейсмических колебаний плотины, k — коэффициент поглощения материала дна водохранилища.

В выше указанных литературных источниках граничные задачи поставлены для дифференциального уравнения Лапласа (без учета

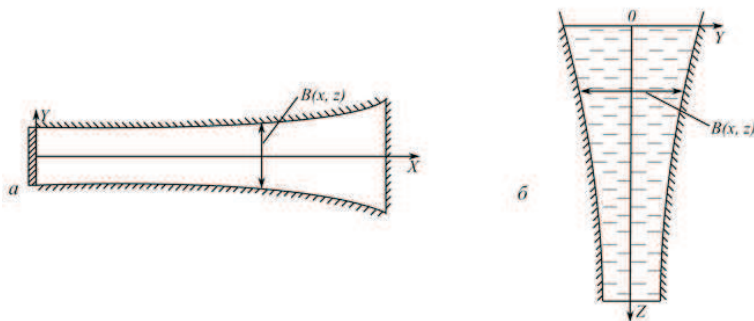
упругости воды), либо для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0$$

с учетом упругости воды. В уравнении (1) дополнительно содержатся последние две слагаемые, которые моделируют непрямоугольную конфигурацию водохранилища как в плане, так и по глубине.



Расчетная схема поставленной задачи



Плановая (а) и глубинная (б) конфигурации водохранилища

Рис. 1

Коэффициенты уравнения (1) являются переменными, зависящими от продольной x и вертикальной z координат. В связи с этим его решение при произвольном $B(x, z)$ связано с большими математическими трудностями. Однако, эти трудности легко преодолимы в частном случае, если ширину водохранилища аппроксимировать через экспоненциальные функции

$$B(x, z) = B_0 e^{s_1 x + s_2 z}, \quad s_1 > 0, \quad s_2 < 0. \quad (4)$$

В результате применения подстановки

$$\varphi(x, z, t) = \psi_1(x, z)e^{-\frac{s_1}{2}x} \cos \omega t + \psi_2(x, z)e^{-\frac{s_1}{2}x} \sin \omega t - \frac{V_0}{L} \frac{(x-L)^2}{2} \cos \omega t, \quad (5)$$

выражения (1)–(3) относительно функций ψ_1 и ψ_2 запишутся так:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + s_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \left(\frac{s_1^2}{4} - \frac{\omega^2}{a^2} \right) \psi_1 = \\ & = \frac{V_0}{L} \left(\left(1 + s_1(x-L) + \frac{\omega^2}{a^2} \frac{(x-L)^2}{2} \right) e^{\frac{s_1}{2}x} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + s_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \left(\frac{s_1^2}{4} - \frac{\omega^2}{a^2} \right) \psi_2 = 0, \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{s_1}{2} \psi_1 \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{s_1}{2} \psi_1 \right) \Big|_{x=L} = 0, \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{s_1}{2} \psi_2 \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{s_1}{2} \psi_2 \right) \Big|_{x=L} = 0, \quad (9)$$

$$\psi_1 \Big|_{z=0} = \frac{V_0}{L} \frac{(x-L)^2}{2} e^{\frac{s_1}{2}x}, \quad \psi_2 \Big|_{z=0} = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\omega}{ak} \psi_2 \right) \Big|_{z=H} = 0, \\ & \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \frac{\omega}{ak} \psi_1 \right) \Big|_{z=H} = \frac{\omega}{ak} \frac{V_0}{L} \frac{(x-L)^2}{2} e^{\frac{s_1}{2}x}. \end{aligned} \quad (11)$$

Легко можно проверить, что система функций $\left\{ \frac{s_1}{2} \sin \frac{n\pi}{L}x + \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi}{L}x \right\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ ортогональна в промежутке $(-L, L)$. В связи с этим искомые функции ψ_1 и ψ_2 и правые части выражений (6), (7) и (8) представим через тригонометрические

ряды по вышеотмеченной ортогональной системе функций

$$\begin{aligned}
\psi_1(x, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1,n}(z) \left(\frac{s_1}{2} \sin a_n x + a_n \cos a_n x \right), \\
\psi_2(x, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{2,n}(z) \left(\frac{s_1}{2} \sin a_n x + a_n \cos a_n x \right), \\
e^{\frac{s_1}{2}x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \left(\frac{s_1}{2} \sin a_n x + a_n \cos a_n x \right), \\
e^{\frac{s_1}{2}x}(x-L) &= \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{s_1}{2} \sin a_n x + a_n \cos a_n x \right), \\
e^{\frac{s_1}{2}x} \frac{(x-L)^2}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{s_1}{2} \sin a_n x + a_n \cos a_n x \right), \\
\delta_n &= \frac{1}{L \left(a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} \right)} \int_{-L}^L e^{\frac{s_1}{2}x} \left(\frac{s_1}{2} \sin a_n x + a_n \cos a_n x \right) dx, \\
\gamma_n &= \frac{1}{L \left(a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} \right)} \int_{-L}^L e^{\frac{s_1}{2}x} (x-L) \left(\frac{s_1}{2} \sin a_n x + a_n \cos a_n x \right) dx, \\
\alpha_n &= \frac{1}{L \left(a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} \right)} \int_{-L}^L e^{\frac{s_1}{2}x} \frac{(x-L)^2}{2} \left(\frac{s_1}{2} \sin a_n x + a_n \cos a_n x \right) dx.
\end{aligned} \tag{12}$$

Подставив выражения (12) в (6)–(11), получим краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 \psi_{1,n}}{dz^2} + s_2 \frac{d\psi_{1,n}}{dz} - \left(a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} - \frac{\omega^2}{a^2} \right) \psi_{1,n} = \varepsilon_n \frac{V_0}{L}, \tag{13}$$

$$\frac{d^2 \psi_{2,n}}{dz^2} + s_2 \frac{d\psi_{2,n}}{dz} - \left(a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} - \frac{\omega^2}{a^2} \right) \psi_{2,n} = 0, \tag{14}$$

$$\varepsilon_n = \delta_n + s_1 \gamma_n + \frac{\omega^2}{a^2} \alpha_n,$$

$$\psi_{1,n} \Big|_{z=0} = \frac{V_0}{L} \alpha_n, \quad \left(\frac{d\psi_{1,n}}{dz} - \frac{\omega}{ak} \psi_{2,n} \right) \Big|_{z=H} = 0, \tag{15}$$

$$\psi_{2,n}\Big|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{d\psi_{2,n}}{dz} + \frac{\omega}{ak} \psi_{1,n} \right) \Big|_{z=H} = \frac{\omega}{ak} \frac{V_0}{L} \alpha_n. \quad (16)$$

Решения дифференциальных уравнений (13) и (14) с граничными условиями (15)–(16) имеют следующий вид:

$$\text{при } a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} + \frac{s_2^2}{4} - \frac{\omega^2}{a^2} < 0,$$

$$\psi_{1,n}(z) = e^{-\frac{s_2}{2}z} (c_1 \sin \beta_n z + c_2 \cos \beta_n z) - \frac{V_0}{L} \frac{\varepsilon_n}{a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} - \frac{\omega^2}{a^2}},$$

$$\psi_{2,n}(z) = c_3 e^{-\frac{s_2}{2}z} \sin \beta_n z, \quad \text{где } \beta_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \left(a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} + \frac{s_2^2}{4} \right)};$$

$$\text{при } a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} + \frac{s_2^2}{4} - \frac{\omega^2}{a^2} > 0,$$

$$\psi'_{1,n}(z) = e^{-\frac{s_2}{2}z} (c'_1 \operatorname{sh} \beta'_n z + c_2 \operatorname{ch} \beta'_n z) - \frac{V_0}{L} \frac{\varepsilon_n}{a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} - \frac{\omega^2}{a^2}},$$

$$\psi'_{2,n}(z) = e^{-\frac{s_2}{2}z} c'_3 \operatorname{sh} \beta'_n z, \quad \text{где } \beta'_n = \sqrt{a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} + \frac{s_2^2}{4} - \frac{\omega^2}{a^2}};$$

$$c_1 = \left[\frac{(\beta_n \sin \beta_n H + \frac{s_2}{2} \cos \beta_n H) (\beta_n \cos \beta_n H - \frac{s_2}{2} \sin \beta_n H)}{(\beta_n \cos \beta_n H - \frac{s_2}{2} \sin \beta_n H)^2 + \frac{\omega^2}{a^2 k^2} \sin^2 \beta_n H} + \right. \\ \left. + \frac{\frac{\omega^2}{a^2 k^2} \sin \beta_n H (e^{\frac{s_2}{2}H} - 1)}{(\beta_n \cos \beta_n H - \frac{s_2}{2} \sin \beta_n H)^2 + \frac{\omega^2}{a^2 k^2} \sin^2 \beta_n H} \right] \cdot \frac{V_0}{L} \frac{\varepsilon_n}{a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} - \frac{\omega^2}{a^2}},$$

$$c_2 = \frac{V_0}{L} \frac{\varepsilon_n}{a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} - \frac{\omega^2}{a^2}},$$

$$c'_1 = \left[\frac{(-\beta'_n \operatorname{sh} \beta'_n H + \frac{s_2}{2} \operatorname{ch} \beta'_n H) (\beta'_n \operatorname{ch} \beta'_n H - \frac{s_2}{2} \operatorname{sh} \beta'_n H)}{(\beta'_n \operatorname{ch} \beta'_n H - \frac{s_2}{2} \operatorname{sh} \beta'_n H)^2 + \frac{\omega^2}{a^2 k^2} \operatorname{sh}^2 \beta'_n H} + \right. \\ \left. + \frac{\frac{\omega^2}{a^2 k^2} \operatorname{sh} \beta'_n H (e^{\frac{s_2}{2}H} - 1)}{(\beta'_n \operatorname{ch} \beta'_n H - \frac{s_2}{2} \operatorname{sh} \beta'_n H)^2 + \frac{\omega^2}{a^2 k^2} \operatorname{sh}^2 \beta'_n H} \right] \frac{V_0}{L} \frac{\varepsilon_n}{a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} - \frac{\omega^2}{a^2}},$$

$$c_3 = \left[\frac{(\beta_n \cos \beta_n H - \frac{s_2}{2} \sin \beta_n H) (e^{\frac{s_2}{2} H} - 1)}{(\beta_n \cos \beta_n H - \frac{s_2}{2} \sin \beta_n H)^2 + \frac{\omega^2}{a^2 k^2} \sin^2 \beta_n H} - \frac{\sin \beta_n H (\beta_n \sin \beta_n H + \frac{s_2}{2} \cos \beta_n H)}{(\beta_n \cos \beta_n H - \frac{s_2}{2} \sin \beta_n H)^2 + \frac{\omega^2}{a^2 k^2} \sin^2 \beta_n H} \right] \cdot \frac{V_0}{L} \frac{\varepsilon_n}{a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} - \frac{\omega^2}{a^2}},$$

$$c'_3 = \left[\frac{(\beta'_n \operatorname{ch} \beta'_n H - \frac{s_2}{2} \operatorname{sh} \beta'_n H) (e^{\frac{s_2}{2} H} - 1)}{(\beta'_n \operatorname{ch} \beta'_n H - \frac{s_2}{2} \operatorname{sh} \beta'_n H)^2 + \frac{\omega^2}{a^2 k^2} \operatorname{sh}^2 \beta'_n H} - \frac{\operatorname{sh} \beta'_n H (-\beta'_n \operatorname{sh} \beta'_n H + \frac{s_2}{2} \operatorname{ch} \beta'_n H)}{(\beta'_n \operatorname{ch} \beta'_n H - \frac{s_2}{2} \operatorname{sh} \beta'_n H)^2 + \frac{\omega^2}{a^2 k^2} \operatorname{sh}^2 \beta'_n H} \right] \cdot \frac{V_0}{L} \frac{\varepsilon_n}{a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} - \frac{\omega^2}{a^2}}.$$

Для сейсмогидродинамического давления на напорной грани плотности получается следующее выражение

$$P(0, z, t) = \rho \omega \psi_1(0, z) \sin \omega t - \rho \omega \psi_2(0, z) \cos \omega t - \rho \omega \frac{V_0 L}{2} \sin \omega t.$$

Присоединенная масса и коэффициент присоединенного сопротивления получаются в следующем виде:

$$M^* = \rho \frac{\omega}{K_c g} \left| \int_0^H B(0, z) \psi_1(0, z) dz \right|,$$

$$\mu^* = \rho \frac{\omega^2}{K_c g} \left| \int_0^H B(0, z) \psi_2(0, z) dz \right|,$$

где K_c — коэффициент сейсмичности рассматриваемого региона.

Литература

1. Westergaardt H. M. Water Pressures on Dams during Earthquakes // Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs.—1931.—V. 57, № 9.—Р. 1303–1318.
2. Шульман С. Г. Расчеты сейсмостойкости гидросооружений с учетом влияния водной среды. — М.: Энергия, 1976.—190 с.
3. Кульмач П. П. Гидродинамика гидротехнических сооружений (основные плоские задачи).—М.: Изд-во АН СССР, 1963.—190 с.
4. Шейнин И. С. Колебания конструкции гидросооружений в жидкости (Справочное пособие по динамике гидросооружений, Ч. 1).—Л.: Энергия, 1967.—310 с.

5. *Hatano T.* An Examination on the Resonance of Pressure during Earthquake due to the Elasticity of Water.—Techn. Rep. CRIEPT, C-65001, 1965.—15 p.
6. *Kotsubo S.* Dynamic Water Pressure on Dams during Earthquakes // Proc. 2th World Conference of Earthquake Engineering.—Japan, 1960.
7. *Уразбаев М. Т.* Сейсмостойкость упругих и гидроупругих систем.—Ташкент: Фан, 1966.—252 с.
8. *Мухутдинова Р. Х.* К вопросу о сейсмостойкости гидроупругой системы // Известия АН УзССР. Сер. техн. наук.—1963.—№ 5.—С. 88–92.

МУЗАЕВ ИЛЛАРИОН ДАВИДОВИЧ
Южный математический институт ВНЦ РАН
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: musaev@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАССИВНОГО МАССОПЕРЕНОСА В РУСЛОВЫХ ПОТОКАХ

К. А. Надолин

Рассмотрен подход к построению математических моделей пассивного переноса вещества в спокойных слабо искривленных русловых потоках малой мутности, основанный на методе малого параметра.

1. Рассмотрим область течения Ω , граница которой $\partial\Omega$ включает твердый непроницаемый участок Γ^r (дно), участок свободной поверхности Γ^f , входное сечение S^{in} и выходное сечение S^{out} .

Распространение вещества в турбулентном потоке малой мутности описывается нестационарным уравнением конвекции-диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla c) = \operatorname{div} (\mathbf{D} \nabla c) - \gamma c. \quad (1)$$

Здесь c — концентрация; $\mathbf{v}$ — вектор осредненной скорости потока; $\mathbf{D}$ — тензорный коэффициент турбулентной диффузии [1]; γ — коэффициент распада вещества. Будем считать, что начальное распределение вещества задано, его поступление и отток происходит через входное и выходное сечения соответственно, а твердая и свободная границы для вещества непроницаемы. Тогда начальные и краевые условия для функции концентрации имеют вид

$$\begin{aligned} c|_{t=0} &= C^0, & \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma^r \cup \Gamma^f} &= 0, \\ a^{in} \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} + b^{in} c \Big|_{S^{in}} &= P^{in}, & a^{out} \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} + b^{out} c \Big|_{S^{out}} &= P^{out}, \end{aligned} \quad (2)$$

где C^0 , a^{in} , b^{in} , P^{in} , a^{out} , b^{out} и P^{out} — известные функции; $\mathbf{n}$ — вектор нормали к соответствующей поверхности.

В случае пассивной примеси, скорость жидкости определяется независимо от концентрации. Уравнения Рейнольдса для турбулент-

ного потока несжимаемой жидкости в поле тяжести с учетом гипотезы Буссинеска будут иметь вид [1, 2]

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \operatorname{div} \left(\eta \left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right) \right) + \rho \mathbf{g}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Здесь p — давление; η — динамический коэффициент турбулентной вязкости; $\mathbf{g}$ — напряженность поля тяжести.

Пусть свободная поверхность Γ^f задана уравнением $\zeta(M, t) = 0$, где точка $M \in \Gamma^f$, тогда начальные и краевые условия будут иметь вид [3]

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}^0, \quad \mathbf{v}|_{S^{in}} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{v}|_{S^{out}} = \mathbf{b}, \quad (4)$$

$$\mathbf{v}|_{\Gamma^r} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\mathbf{v}|_{\Gamma^f}, \nabla \zeta) = 0, \quad (5)$$

$$-(p - p_a - 2\vartheta K) \mathbf{n} + \eta \left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right) \mathbf{n}|_{\Gamma^f} = \mathbf{f}. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{v}^0$, $\mathbf{a}$, и $\mathbf{b}$ — заданные векторные поля; $\mathbf{n}$ — нормаль к Γ^f ; p_a — постоянное атмосферное давление на поверхности потока, которое примем за начало отсчета; $\mathbf{f}$ — заданный вектор поверхностных напряжений, вызванных, например, действием ветра; ϑ — постоянный коэффициент поверхностного натяжения; K — средняя кривизна свободной границы [3]

$$2K = \mathbf{n} (\mathbf{n}, \nabla) \mathbf{n} - \operatorname{div} \mathbf{n}. \quad (7)$$

Учитывая, что на поверхности потока действует атмосферное давление p_a , которое полагаем нулевым, имеем

$$(\mathbf{f}, \mathbf{n}) = 0. \quad (8)$$

Уравнения (1)–(8) содержат общую с гидродинамической точки зрения постановку задачи о распространении пассивной примеси в турбулентном потоке, и их решение представляет значительную трудность. Для формирования математической модели, ориентированной на течения в слабо искривленных руслах, упростим начально-краевую задачу (1)–(8), воспользовавшись тем, что характерной особенностью русловых потоков является их большая протяженность и малая, по сравнению с шириной, глубина.

2. Будем предполагать, что рассматриваемый участок русла искривлен слабо (математический смысл этого предположения будет выяснен позднее). Введем прямоугольные декартовы координаты (x, y, z) так, чтобы плоскость xy оказалась на поверхности потока, а ось z была направлена в сторону дна. Ось x направим вдоль направления уклона потока, а ось y — от левого берега к правому перпендикулярно оси x . Начало координат разместим во входном сечении рассматриваемого участка на одинаковом расстоянии от берегов. Входное и выходное сечения S^{in} и S^{out} находятся в плоскостях $x = 0$ и $x = L_x$, соответственно, где L_x — определяет протяженность рассматриваемого участка потока. Пусть свободная поверхность описывается уравнением $z = \xi(x, y, t)$, где $\xi(x, y, t)$ — неизвестная функция. Будем считать, что ложе потока задает соотношение $z = h(x, y)$, где $h(x, y)$ известная функция. Берега потока являются пространственными линиями, точки которых имеют координаты $(x, l(x, t), h(x, l(x, t)))$ и $(x, r(x, t), h(x, r(x, t)))$ для левого и правого берега соответственно. Функции $y = l(x, t)$ и $y = r(x, t)$ находятся из условия $h(x, y) = \xi(x, y, t)$. Очевидно, что в любой момент времени t при $l(x, t) < y < r(x, t)$ выполнено условие $h(x, y) < \xi(x, y, t)$.

На дне потока $z = h(x, y)$ направление внешней нормали соответствует направлению оси z , а на свободной границе $z = \xi(x, y, t)$ противоположно ему. Поэтому, для единичного вектора внешней нормали к поверхности и дну соответственно, запишем

$$\mathbf{n}|_{z=\xi} = \frac{\nabla(\xi(x, y, t) - z)}{\|\nabla(\xi(x, y, t) - z)\|}, \quad \mathbf{n}|_{z=h} = \frac{\nabla(z - h(x, y))}{\|\nabla(z - h(x, y))\|}. \quad (9)$$

Для кривизны (7) слабо деформированной свободной границы с учетом представления (9) имеем [2]

$$2K = \nabla_0 \left(\frac{\nabla_0 \xi}{\sqrt{1 + \|\nabla_0 \xi\|^2}} \right) \approx \Delta_0 \xi, \quad (10)$$

где ∇_0 и Δ_0 — двумерные операторы градиента и Лапласа по переменным x и y , соответственно.

Запишем уравнения (1)–(8) относительно безразмерных переменных. В качестве линейного масштаба по соответствующему направлению x , y и z примем характерную длину L_x , ширину L_y и глубину потока. Введем обозначения $\varepsilon = L_z/L_y$ и $\delta = L_y/L_x$ (в дальнейшем параметры ε и δ и будут предполагаться малыми). Различные

компоненты вектора скорости нормируем, используя разные масштабы. Пусть U_x — характерная скорость в направлении x . За масштаб скорости в направлении y примем $U_y = \delta U_x$, а в направлении z , соответственно $U_z = \varepsilon U_y = \varepsilon \delta U_x$. В качестве масштаба измерения давления удобно принять ρU_x^2 , а времени — L_x/U_x . Это означает, что число Эйлера и число Струхала для рассматриваемых течений равны единице. Такое предположение выполняется для широкого класса русловых потоков. В силу линейности задачи для уравнения конвекции-диффузии (1), (2), за масштаб концентрации вещества можно принять любое значение, например, $\max(C^0)$. Компоненты вектора внешнего воздействия нормируем в соответствии с представлением

$$\mathbf{f} = (f \cos \psi_x, \delta f \cos \psi_y, \varepsilon \delta f \cos \psi_z), \quad (11)$$

где направляющие косинусы связаны, в силу (8), соотношением

$$\cos \psi_z = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cos \psi_x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cos \psi_y. \quad (12)$$

Уравнение (1) в безразмерных переменных примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cv}{\partial y} + \frac{\partial cw}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(d_{33} \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \\ &+ \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(d_{23} \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(d_{32} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) + \\ &+ \varepsilon \delta \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(d_{13} \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(d_{31} \frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(d_{22} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \delta \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(d_{12} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(d_{21} \frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) + \varepsilon^2 \delta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(d_{11} \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \lambda c, \end{aligned} \quad (13)$$

где $d_{ij} = D_{ij} (U_z L_z)^{-1}$, $d_{ji} = d_{ij}$ — безразмерные коэффициенты турбулентного обмена; $\lambda = \gamma L_x U_x^{-1}$ — параметр распада вещества.

Начальное и краевые условия (2) запишем в виде

$$c|_{t=0} = c^0, \quad \alpha^{in} c + \beta^{in} \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} = \pi^{in}, \quad \alpha^{out} c + \beta^{out} \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=1} = \pi^{out}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} - \varepsilon^2 \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} - \varepsilon^2 \delta^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{z=h(x,y)} = 0, \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial z} - \varepsilon^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} - \varepsilon^2 \delta^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{z=\xi(x,y,t)} = 0, \quad (16)$$

где $c^0 = C^0 / \max(C^0)$, $\pi^{in} = P^{in} L_x / \max(C^0)$, $\alpha^{in} = a^{in} L_x / P^{in}$, $\beta^{in} = b^{in} / P^{in}$, $\pi^{out} = P^{out} L_x / \max(C^0)$, $\alpha^{out} = a^{out} L_x / P^{out}$ и $\beta^{out} = b^{out} / P^{out}$ — заданные безразмерные функции.

Уравнения (3) относительно безразмерных переменных примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) &= Fr^{-1} \sin \varphi - \varepsilon \delta \frac{\partial p}{\partial x} + \\ &+ \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\ &\left. + \varepsilon^2 \delta^2 \left(2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \delta^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} \right) &= -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} + \delta \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\ &+ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + \\ &\left. + \varepsilon^2 \delta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \delta^2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) &= Fr^{-1} \cos \varphi - \frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \varepsilon \delta \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \right. \\ &\left. + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \delta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (20)$$

Здесь φ — уклон русла и введены число Фруда $Fr = U_x^2 / g L_z$, число Рейнольдса $Re = \rho U_x L_z / \eta$ и безразмерная функция вязкости ν , учитывающая турбулентность течения. Поскольку считается, что в определение числа Рейнольдса входит значение коэффициента турбулентной вязкости η , вычисленное на поверхности потока, то значение функции ν на поверхности потока должно быть равно 1.

На свободной поверхности потока при $z = \xi(x, y, t)$ динамические условия (6) с учетом (10)–(12) примут вид

$$-\varepsilon \delta Rep \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \varepsilon^2 \delta^2 \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ + \varepsilon^3 \delta \sigma \left(\delta^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{z=\xi(x,y,t)} = NF \cos \psi_x, \quad (21)$$

$$-\varepsilon Rep \frac{\partial \xi}{\partial y} - \delta \frac{\partial v}{\partial z} + \varepsilon^2 \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \delta^3 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \\ + \varepsilon^3 \sigma \left(\delta^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} \Big|_{z=\xi(x,y,t)} = \delta NF \cos \psi_y, \quad (22)$$

$$Rep + \varepsilon \delta \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial y} - 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \varepsilon^3 \delta \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \\ + \varepsilon^3 \delta^3 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \varepsilon^2 \sigma \left(\delta^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \Big|_{z=\xi(x,y,t)} = \\ = \varepsilon \delta NF \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cos \psi_x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cos \psi_y \right), \quad (23)$$

$$N = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \varepsilon^2 \delta^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2}.$$

Здесь $\sigma = \vartheta (\eta U_x)^{-1}$ — капиллярный параметр; углы ψ_x и ψ_y определяют направление, а параметр $F = f L_z (\eta U_x)^{-1}$ — интенсивность ветровой нагрузки.

3. Дальнейшее основывается на том условии, что величина слагаемых в уравнениях (13)–(23), записанных в безразмерном виде, определяется стоящими при них параметрами. Для неизвестных величин и их производных это обеспечивается выбором масштабов, а для формы русла (в исходной геометрии) требуется выполнение условий

$$\frac{\partial h}{\partial x} = O(\varepsilon \delta), \quad \frac{\partial h}{\partial y} = O(\varepsilon),$$

что и означает слабую искривленность потока.

Безразмерные уравнения (13)–(23), содержащие параметры ε и δ , позволяют получать различные математические модели русловых

потоков. Для этого требуется определить связь между ε и δ в соответствии с предположениями о характере исследуемого течения. В таблице приведены различные варианты связи между параметрами, которые могут быть использованы для характеристики русловых потоков.

Тип модели потока	ε	δ	Подстановка в уравнениях (13)-(23)
1. мелкий протяженный поток	$o(1)$	$O(\varepsilon)$	$\varepsilon = \delta$
2. сверхмелкий протяженный поток	$o(\delta)$	$o(1)$	$\varepsilon = \delta^2$
3. мелкий сверхпротяженный поток	$o(1)$	$o(\varepsilon)$	$\delta = \varepsilon^2$
4. мелкий широкий поток	$o(1)$	$O(1)$	$\delta = 1$
5. глубокий протяженный поток	$O(1)$	$o(\varepsilon)$	$\varepsilon = 1$
6. существенно трехмерный поток	$O(1)$	$O(1)$	$\varepsilon = \delta = 1$

Например, модель *мелкого протяженного потока* формализована предположением, что параметры ε и δ являются малыми одного порядка. Это означает, что ширина значительно превосходит глубину потока, причем рассматривается течение на участке русла, длина которого во столько же раз превосходит ширину потока, во сколько раз ширина превосходит глубину. Считая ε и δ малыми параметрами разных порядков малости, получим уравнения, описывающие мелкий сверхпротяженный поток ($\delta = o(\varepsilon)$) или сверхмелкий протяженный поток ($\varepsilon = o(\delta)$). Варианты, когда лишь один из параметров является малым, отвечают случаям глубокого протяженного потока и мелкого широкого потока. Заметим, что отказ от предположения о малости как параметра ε , так и параметра δ , приводит к обычным трехмерным уравнениям.

Наличие малого параметра в уравнениях позволяет применить технику разложения неизвестных величин в асимптотические ряды и свести исходную нелинейную задачу к рекуррентной последовательности линейных начально-краевых задач. При этом уравнения для главных членов можно рассматривать как упрощенные математические модели, описывающие соответствующий тип руслового потока (будем их называть базовыми), а уравнения для последующих членов — как уравнения поправок [4].

4. Рассмотрим базовую модель распространения вещества в сверхмелком протяженном потоке.

Будем предполагать, что вязкость постоянная, свободная поверх-

ность потока стационарная, а внешнее ветровое воздействие направлено вдоль оси x (т. е. $\nu = 1$, $\xi = \xi(x, y)$, $\cos \psi_x = 1$ и $\cos \psi_y = 0$). Подставим в уравнения (13)–(23) $\varepsilon = \delta^2$, разложим неизвестные величины в ряды по степеням параметра δ и удержим слагаемые, содержащие старшие члены. Полученные уравнения содержат не все производные по сравнению с исходными уравнениями, и поэтому некоторые из начально-краевых условий приходится отбросить.

Базовая математическая модель имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -ReFr^{-1} \sin \varphi, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = Fr^{-1} \cos \varphi, \quad p|_{z=\xi} = 0, \quad u = v = w|_{z=h} = 0, \quad (24)$$

$$u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} - w \Big|_{z=\xi} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = -F, \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cv}{\partial y} + \frac{\partial cw}{\partial z} = d_{33} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - \lambda c, \quad (25)$$

$$c|_{t=0} = c^0(x, y), \quad c|_{x=0} = c_0(y, t), \quad \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = 0.$$

Уравнения (24) образуют гидродинамическую подсистему, а (25) — концентрационную подсистему базовой модели. Гидродинамическая подсистема решается независимо от концентрационной подсистемы, причем решение может быть выписано явно

$$p = (z - \xi)Fr^{-1} \cos \varphi, \quad A = ReFr^{-1} \sin \varphi,$$

$$u = \frac{1}{2}A \left[(h - \xi)^2 - (z - \xi)^2 \right] + F(h - z), \quad v = 0, \quad (26)$$

$$w = A \left((h - \xi)(h - z) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2}(h - z)^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + F(h - z) \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Давление и компоненты скорости в (26) выражены через возвышение свободной поверхности ξ , которое определяется из кинематического краевого условия (24). Вводя функцию глубины

$$H(x, y) = h(x, y) - \xi(x, y)$$

запишем кинематическое краевое условие (24) в виде

$$(AH + F) \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \quad (27)$$

Из уравнения (27) следует, что $H(x, y) = H(0, y) = H_0(y)$ или $\xi(x, y) = h(x, y) - H_0(y)$, т. е. заданное в начальном створе распределение глубин $H_0(y)$ сохраняется на всем рассматриваемом участке течения.

5. Для численного решения начально-краевой задачи (25) удобно сделать замену переменной $z = h(x, y) - (1 - \zeta)H_0(y)$. Тогда для концентрационной подсистемы (25) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + u(y, \zeta) \frac{\partial c}{\partial x} &= d(y) \frac{\partial^2 c}{\partial \zeta^2} - \lambda c, \\ u(y, \zeta) &= \alpha(y)(1 - \zeta)(1 + \zeta + \beta(y)), \\ c|_{t=0} &= c^0, \quad c|_{x=0} = c_0, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = \left. \frac{\partial c}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где обозначено

$$d(y) = \frac{d_{33}}{H_0^2(y)}, \quad \alpha(y) = \frac{1}{2}AH_0^2(y), \quad \beta(y) = \frac{2F}{AH_0(y)}.$$

Заметим, что в начально-краевую задачу (28) переменная y входит как параметр.

Литература

1. Роди В. Модели турбулентности окружающей среды // В кн.: Методы расчета турбулентных течений.—М.: Мир, 1984.—С. 227–322.
2. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика.—СПб.: Гидрометеоиздат, 1992.—Т. 1.—694 с.
3. Пухначев В. В. Движение вязкой жидкости со свободными границами.—Новосибирск: НГУ, 1989.—96 с.
4. Бабаян А. В., Надолин К. А. О моделировании распространения вещества в плоском стационарном потоке вязкой жидкости // Водные ресурсы.—2000.—Т. 21, № 2.—С. 184–191.
5. Надолин К. А. О численном решении начально-краевой задачи для одного параболического в широком смысле уравнения // Изв. вузов. Электромеханика.—2007.—Математические методы в физике, технике и экономике.—С. 16–25.

Надолин Константин Аркадьевич

Южный федеральный университет

Россия, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105

E-mail: nadolin@math.sfedu.ru

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ В ПРОВОДЯЩИХ ОБОЛОЧКАХ

Я. А. Наumenко

Рассмотрено интегро-дифференциальное уравнение для вихревых токов переходного режима на многосвязных проводящих поверхностях с краем. Получено достаточное условие его корректной разрешимости, удобное для практического применения. Предложен численный метод. Рассмотрен ряд способов для ускорения численного решения.

Введение

Круг технических проблем, в которых необходим расчет квазистационарных магнитных полей в присутствии тонкослойных проводников весьма широк, примером может служить моделирование режимов движения высокоскоростного наземного транспорта, проектирование экранов для защиты персонала и высокочувствительного оборудования и т. д. Данная статья является развитием работы [11], обобщающей полученные в ней результаты на случай переходных режимов в проводящих оболочках. Для таких режимов характерны сложные зависимости магнитного поля, которые ни в каком приближении не являются синусоидальными. Обширную библиографию, освещающую историю вопроса можно найти в [7].

1. Основное функциональное пространство

Рассмотрим $L_2(S; \mathbb{R}^2)$ — пространство двухкомпонентных суммируемых с квадратом вектор-функций, определенных на липшицевом многообразии $S \subset \mathbb{R}^2$. Многообразие S (рис. 1) может быть многосвязным, при этом будем считать, что каждый из связных кусков l — границы множества S , является липшицевой [8] кривой. Нормаль к S существует почти всюду, будем обозначать ее $\mathbf{n}$, а нормаль к l в касательной к S плоскости как ν .

Согласно [6] пространство $L_2(S; \mathbb{R}^2)$ допускает разложение в прямую сумму ортогональных подпространств:

$$L_2(S; \mathbb{R}^2) = L^{(P)} \oplus \mathfrak{L}.$$

Здесь $L^{(P)}$ — пространство обобщенных по Вейлю потенциальных полей $L^{(P)}$.

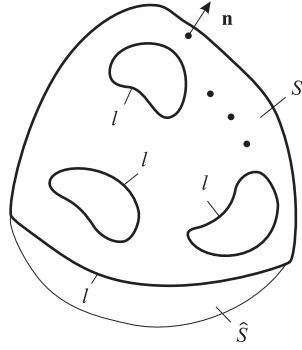


Рис. 1. Пример поверхности S .

Пространство $\mathfrak{L}$ в свою очередь может быть представлено в виде:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{G} \oplus L^{(S)}.$$

Здесь $\mathfrak{G}$ — конечномерное подпространство, размерность которого на единицу меньше связности S [1]. В частности, если поверхность S односвязна, то $\mathfrak{G} = \emptyset$. Компоненты полей из $\mathfrak{G}$ являются на S гармоническими функциями¹. Иными словами $\mathfrak{G}$ — это пространство циклов. Отсюда вытекает существенный для дальнейшего факт, что пространство $L^{(S)}$ состоит из полей, периоды которых равны нулю. Более подробно свойства пространства $\mathfrak{L}$ описаны в [11].

Введем ортопроектор $P = P^{\mathfrak{L}} P^S$. Оператор P^S действует из $L_2(S; \mathbb{R}^3)$ в $L_2(S; \mathbb{R}^2)$, обнуляя нормальную к S компоненту поля. Очевидно, P^S является ортопроектором. Оператор $P^{\mathfrak{L}}$ определим как ортопроектор из $L_2(S; \mathbb{R}^2)$ на подпространство $\mathfrak{L}$. Явное представление оператора $P^{\mathfrak{L}}$ весьма сложно, но для дальнейшего будет достаточно факта его существования. Понятно, что оператор P также будет являться ортопроектором, переводящим $L_2(S; \mathbb{R}^3)$ в $\mathfrak{L}$.

¹В смысле уравнения Лапласа — Бельтрами.

2. Уравнение переходного режима вихревых токов

Расчет переходного режима квазистационарного магнитного поля в присутствии проводящей поверхности (т. е. проводящего тела с вырожденным третьим измерением) может быть сведен к следующему операторному уравнению для вихревых токов:

$$\delta = \lambda \frac{\partial}{\partial t} K \delta + \mathbf{f}(t). \quad (1)$$

Здесь $K = P\Gamma$, $\Gamma\xi = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\xi}{r_{NM}} dS_N$, r — расстояние между точками M и N , λ некоторый (вещественный) параметр, $\mathbf{f}(t) \in \mathfrak{L}$. Уравнение (1) необходимо дополнить начальным условием. Положим $\delta(0) = \delta^0 \in \mathfrak{L}$.

3. Свойства оператора K

Описываемые свойства оператора K доказаны в работе [11], поэтому в данном разделе мы ограничимся лишь формулировками соответствующих результатов.

Лемма 1. Оператор K линейен, самосопряжен и положителен в $\mathfrak{L}$.

Лемма 2. Оператор K вполне непрерывен в пространстве $\mathfrak{L}$.

4. Исследование уравнения

Теорема. Уравнение (1) имеет единственное и устойчивое решение, если $\|\mathbf{f}\|_{\mathfrak{L}} \in C^1[0, \infty)$.

◁ Так как оператор K самосопряженный и положительный — он имеет полную в $\mathfrak{L}$ систему $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ собственных функций с соответствующими характеристическими числами $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$. Формально запишем:

$$\delta = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) \omega_i.$$

Подставив полученное представление в (1) получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \omega_i = -\lambda \frac{\partial}{\partial t} K \sum_{i=1}^{\infty} c_i \omega_i + \mathbf{f}_3.$$

Преобразовывая, имеем:

$$c_i = -\lambda \frac{c'_i}{\lambda_i} + (\mathbf{f}, \omega_i)_{\mathfrak{L}}, \quad c'_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda} c_i - (\mathbf{f}, \omega_i)_{\mathfrak{L}},$$

и далее,

$$c_i(t) = e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda} t} \left[c_i^0 + \int_0^t e^{\frac{\lambda_i}{\lambda} \tau} f_i(\tau) d\tau \right].$$

Здесь $c_i^0 = (\delta^0, \omega_i)_{\mathfrak{L}}$ и $f_i(t) = (\mathbf{f}, \omega_i)_{\mathfrak{L}}$. Наконец, получаем:

$$\delta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (\delta^0, \omega_i) e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda} t} \omega_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i(x) \int_0^t e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda} (t-\tau)} f_i(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Рассмотрим свойства ряда (2).

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^t e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda} (t-\tau)} f_i(\tau) d\tau \right\} \leq \int_0^t e^{-\frac{2\lambda_i}{\lambda} (t-\tau)} d\tau \int_0^t f_i^2(\tau) d\tau = \\ & = \frac{1 - \frac{2\lambda_i}{\lambda} t}{2\frac{\lambda_i}{\lambda}} \int_0^t f_i^2(\tau) d\tau < \frac{\lambda}{2\lambda_i} \int_0^t f_i^2(\tau) d\tau \leq \frac{\lambda}{2\lambda_1} \int_0^t f_i^2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Так как ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (\delta^0, \omega_i)^2$ сходится и $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 = \|\mathbf{f}_3\|_{\mathfrak{L}}$, ряд (2) сходится почти всюду и имеет непрерывную по переменной времени сумму. Тогда по теореме Дини ряд (2) сходится равномерно почти всюду в S .

Ряд

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ -\frac{\lambda_i}{\lambda} (\delta^0, \omega_i) e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda} t} + f_i(t) - \frac{\lambda_i}{\lambda} \int_0^t e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda} (t-\tau)} f_i(\tau) d\tau \right\} \omega_i \quad (3)$$

сходится равномерно почти всюду в S на любом временном отрезке $[\bar{t}, T]$, $0 < \bar{t} < T < \infty$. Действительно, оценим квадраты коэффици-

ентов ряда (3):

$$3 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda} t} \right)^2 (\delta^0, \omega_i)^2 + 3 f_i^2(0) e^{-2 \frac{\lambda_i}{\lambda} t} + 3 \left(\int_0^t e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda} (t-\tau)} f_i'(\tau) d\tau \right)^2 \leq \\ \leq \frac{3}{(\bar{t} \cdot e)^2} (\delta^0, \omega_i)^2 + 3 f_i^2(0) + \frac{3\lambda}{2\lambda_i} \int_0^T [f_i'(\tau)]^2 d\tau.$$

В преобразованиях использовано неравенство Коши — Буняковского. $\triangleright$

Представление (2) решения уравнения (1) дает следующую оценку:

$$\|\Delta\delta\|_{\mathfrak{L}} \leq \|\Delta\delta^0\|_{\mathfrak{L}} e^{-\frac{\lambda_1}{\lambda} t}.$$

Здесь $\Delta\delta^0$ отклонение начального условия, а $\Delta\delta$ вызванная этим отклонением ошибка решения.

5. Численный метод

В этом разделе мы рассмотрим численный метод решения уравнения (1), а также ряд способов, ускоряющих вычислительный процесс и сокращающих потребные ресурсы памяти ЭВМ.

Интерполяционная схема для пространства $\mathfrak{L}$. Здесь мы следуем подходу, развитому в работах [10].

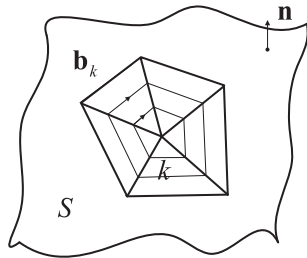
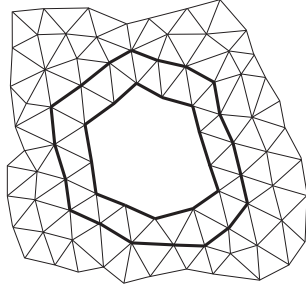


Рис. 2. Пример аппроксимирующей функции.

Рассмотрим аппроксимативную систему $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1}^n$, состоящую из соленоидальных, кусочно-постоянных полей с локальным носителем (рис. 2). Обозначим $S_i = \text{supp } \mathbf{b}_i$.

Рис. 3. Множество Δ_Σ .

Как показано в [9] такая система полна в $L^{(S)}$.

Однако, полноты интерполяционной системы в $L^{(S)}$ недостаточно в случае многосвязной S . Обозначим Δ_Σ множество треугольников, прилегающих к границе отверстия (рис. 3). Зададим на Δ_Σ соленоидальное кусочно-постоянное поле аналогично предыдущему. Ясно что оно принадлежит пространству $\mathfrak{L}$. Более того, такое поле имеет ненулевую составляющую, принадлежащую пространству $\mathfrak{G}$. Мы получим полную систему в $\mathfrak{L}$, поставив в соответствие каждому такому отверстию подобный дополнительный элемент.

Как показано в [10], погрешность аппроксимации стремится к нулю когда максимальный диаметр элементов триангуляции стремится к нулю и все углы треугольников меньше $\pi/2$.

Использование проекционного метода Галеркина приводит к следующей вычислительной задаче для уравнения (1):

$$\begin{aligned} & \lambda \sum_{k=1}^m (\Gamma \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_i)_{\mathfrak{L}} \frac{d}{dt} C_k^{(m)}(t) = \\ & = - \sum_{k=1}^m (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_i)_{\mathfrak{L}} C_k^{(m)}(t) - (\mathbf{f}, \mathbf{b}_i)_{\mathfrak{L}}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (4)$$

Главной частью здесь является матрица A :

$$a_{i,j} = (\Gamma \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_{\mathfrak{L}}.$$

Важно, что при использовании описанной аппроксимационной системы вычислительная размерность задачи (4) эквивалентна скалярной постановке (одно неизвестное на каждую вершину триангуляции).

Построение матрицы A . Несложно показать [10], что матрица симметрична и положительно-определена.

Наиболее сложной частью вычислительного алгоритма является построение матрицы A . Вычисление ее элементов сводится к интегралу:

$$(\Gamma \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_i)_{\mathcal{L}} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_i} \iint_{S_k} \frac{\mathbf{b}_k(M) \mathbf{b}_i(N)}{r_{NM}} dS_N dS_M \quad (5)$$

Этот четырехкратный интеграл имеет высокую вычислительную сложность. Более того, у подынтегральной функции имеются особенности в случае $S_i \cap S_k \neq \emptyset$.

Вычисление (5) сводится к интегралу:

$$\iint_{\Delta_m} \iint_{\Delta_n} \frac{1}{r_{NM}} dS_N dS_M.$$

Этот интеграл вычислен аналитически в работе [9] в частном случае, когда треугольники Δ_n и Δ_n лежат в одной плоскости. На основе подхода из [9] нами получено аналитическое представление интеграла (5) в общем случае, однако оно слишком громоздко чтобы приводить его здесь. Программная реализация аналитического представления занимает более тысячи строк программного кода.

Однако, даже аналитическое представление интеграла (5) вовсе не панацея. Построение матрицы A использованием лишь аналитической формулы для (5) требует весьма много машинного времени. Более того, хранение всей матрицы A в памяти ЭВМ может оказаться невозможным в случае высокоточных вычислений в силу высокой размерности A .

Эта проблема может быть решена различными способами. Наиболее общий подход развит в работах Е. Тыртышникова [2]. Мы используем альтернативный путь, специализированный для данного вида ядра интегрального уравнения и аппроксимаций, использованных в данной работе.

Без потери общности будем считать, что поверхность S плоская. Все получаемые результаты остаются корректными также и в общем случае, но формулы становятся более громоздкими. Будем предполагать, что расстояние r_{NM} между геометрическими центрами S_i и

S_k много больше чем $h = \max diam(h_i)$, т. е.:

$$\frac{h}{r_{NM}} = \eta \ll 1.$$

Разложим функцию $\frac{1}{r_{NM}}$ в ряд Тейлора рядом с геометрическими центрами носителей конечных элементов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{NM}} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_{i,j}(M - M_0) P_{k,m}(N - N_0) \times \\ &\times \frac{\partial^{i+j+k+m}}{\partial^i x_M \partial^j y_M \partial^k x_N \partial^m y_N} \frac{1}{r_{NM}}(M_0, N_0). \end{aligned}$$

Здесь $P_{i,j}$, $P_{k,m}$ некоторые полиномы степени $i + j$ и $k + m$ соответственно. Используем полученное представление в интеграле (5):

$$\begin{aligned} &\iiint_{S_i} \iiint_{S_k} \frac{\mathbf{b}_k(M) \mathbf{b}_i(N)}{r_{NM}} dS_N dS_M = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^{i+j+k+m}}{\partial^i x_M \partial^j y_M \partial^k x_N \partial^m y_N} \frac{1}{r_{NM}}(M_0, N_0) \times \\ &\times \iiint_{S_i} \iiint_{S_k} \mathbf{b}_k(M) \mathbf{b}_i(N) P_{i,j}(M - M_0) P_{k,m}(N - N_0) dS_N dS_M. \end{aligned}$$

Существенно, что все компоненты соленоидальных полей имеют нулевое среднее значение. Благодаря этому часть интегралов в сумме обнулится. Последнее выражение может быть преобразовано к виду:

$$\begin{aligned} &\iiint_{S_i} \iiint_{S_k} \frac{\mathbf{b}_k(M) \mathbf{b}_i(N)}{r_{NM}} dS_N dS_M = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^{i+j+k+m}}{\partial^i x_M \partial^j y_M \partial^k x_N \partial^m y_N} \frac{1}{r_{NM}}(M_0, N_0) \times \\ &\times \iint_{S_k} \mathbf{b}_k(M) P_{i,j}(M - M_0) dS_M \iint_{S_i} \mathbf{b}_i(N) P_{k,m}(N - N_0) dS_N. \end{aligned}$$

Здесь все интегралы, в которых $i + j = 0$ или $k + m = 0$ равны нулю.

В дальнейшем мы используем следующие обозначения:

$$\mathbf{M}_{k,m}^i = \iint_{S_i} \mathbf{b}_i P_{k,m} dS.$$

Совершенно очевидно, что интегралы $\mathbf{M}_{k,m}^i$ могут быть вычислены единожды для каждого конечного элемента, сохранены в массиве и затем использованы по мере необходимости. Мы называем такие интегралы «моментами».

Выполненные рассуждения имеют также одно дополнительное следствие. В литературе существует мнение, что использование уравнения (1) не столь эффективно как использование эквивалентного скалярного уравнения с суперсингулярным ядром. Это уравнение может быть сформулировано на основе (1) с использованием так называемой функции потока. Существуют две причины для подобного мнения. Первая причина — считается, что вычислительная размерность скалярной модели меньше векторной. Как было уже упомянуто выше эти размерности эквивалентны. Вторая — считается, что асимптотика интеграла (5) на бесконечности равна $O\left(\frac{1}{r_{NM}}\right)$, вместо $O\left(\frac{1}{r_{NM}^3}\right)$ для суперсингулярного уравнения. Из представления (6) ясно, что асимптотика интеграла (5) также $O\left(\frac{1}{r_{NM}^3}\right)$ в случае использования корректной аппроксимативной системы. Понятно, что эта асимптотика сохранится для любой системы конечных элементов, лежащей в $\mathfrak{L}$.

Вернемся к нашей аппроксимативной системе. Используя систему моментов, мы можем ввести приближенные формулы различных порядков для элементов матрицы A . Например:

$$\begin{aligned} I_1(i, j) = & \mathbf{M}_{1,0}^i \mathbf{M}_{1,0}^i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} + \mathbf{M}_{1,0}^i \mathbf{M}_{0,1}^i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} \frac{1}{r} + \\ & + \mathbf{M}_{0,1}^i \mathbf{M}_{1,0}^i \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial x_j} \frac{1}{r} + \mathbf{M}_{0,1}^i \mathbf{M}_{0,1}^i \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Построение массива моментов может быть выполнено с использованием аналитического интегрирования. Мы используем другой подход, основанный на кубатурной формуле Радона для треугольников [4]. Эта формула эквивалентна аналитическому интегрированию

для полиномов степени $n \leq 4$. Использование кубатуры Радона позволяет построить унифицированную процедуру вычисления моментов различного порядка. Этот метод может быть использован для приближенных формул порядка от I_1 до I_4 .

Формулы I_k порядка $k > 4$ малоинтересны в практических вычислениях. Мы пользуемся формулой I_3 .

Оценка вычислительной погрешности формулы I_k весьма громоздка. Мы не будем приводить ее здесь. Отметим лишь, что аппроксимативная формула I_3 не приводит к дополнительным вычислительным погрешностям свыше машинных в случае $\eta < 0,05$.

Формула I_3 требует мало машинного времени для вычисления. Оказывается возможным не хранить матрицу A целиком в памяти при использовании итерационных методов. Мы храним в памяти ЭВМ лишь ту часть матрицы, которая вычислена по полной формуле (5). Элементы, для которых применима формула I_3 вычисляются «на лету». На практике это означает необходимость хранения лишь некоторого фиксированного количества элементов на строку, которое не зависит от размерности матрицы. Для первой строки A это число ≈ 200 . В практических вычислениях это означает что в памяти ЭВМ хранится $\approx 1\%$ всех элементов матрицы A .

6. Поиск приближенного решения

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (4) не является разрешенной относительно старших производных. Обращение матрицы A требует слишком значительных расходов машинного времени и ресурсов. Мы используем неявный метод Рунге — Кутты четвертого порядка² [3]. Использование этого метода приводит необходимости неоднократного решения системы линейных алгебраических уравнений вида:

$$Ax = b \quad (7)$$

в течение интегрирования системы (4). Нами использован стабилизированный метод сопряженных градиентов [5]. Оказывается удобным использовать решение линейной системы (7), полученное на предыдущем шаге, как начальное приближение итерационного процесса на текущем шаге интегрирования.

²Неявность метода необходима в силу жесткости системы (4).

Литература

1. *Friedrichs K. O.* Differential forms on Riemannian manifolds // Comm. on Pure and Appl. Math.—1955.—V. VIII.—P. 551–590.
2. *Goreinov S., Tyrtysnikov E.* The maximal-volume concept in approximation by low-rank matrices // Contemporary Mathematics.—2001.—V. 208.—P. 47–51.
3. *Ortega J., Poole W.* Numerical Methods for Differential Equations.—Pitman Publishing Inc., 1981.
4. *Radon J.* Zur mechanischen Kubatur // Monatsh. für Math.—1948.—V. 52, № 4.—P. 286–300.
5. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems (II ed.). SIAM, 2003.
6. *Weyl H.* The method of orthogonal projection in potential theory // Duke Math. J.—1940.—V. 7.—P. 411–444.
7. Астахов В. И. Математическое моделирование инженерных задач в электротехнике.—Новочеркасск: Новочерк. гос. техн. ун-т, 1994.—192 с.
8. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.—М.: Наука, 1996.—480 с.
9. Науменко Я. А., Астахов В. И. Математическое моделирование магнитного поля в присутствии идеально-проводящей пластины с краем // Изв. вузов. Электромеханика.—2003.—№ 5.—С. 11–16.
10. Науменко Я. А. Локальный признак корректности и численное решение интегрального уравнения первого рода для плотности вихревых токов // Вестник Южного научного центра РАН.—2005.—Т. 1.—№ 4.—С. 3–8.
11. Науменко Я. А. Расчет синусоидальных по времени магнитных полей в присутствии проводящих поверхностей методом интегральных уравнений // Труды Южного научного центра РАН.—Ростов-на-Дону: Изд-во ЮНЦ РАН, 2007.—Т. 2.—С. 80–93.

НАУМЕНКО Ян Александрович

Южный научный центр РАН

Россия, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Чехова, 41

E-mail: jan@novoch.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ «КОНУСООБРАЗОВАНИЯ» В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОМ ГРУНТЕ

Т. А. Никольская

Приводится математическая модель задачи «конусообразования» в кусочно-неоднородной пористой среде, в рамках модели «поршневого» вытеснения (модель Лейбензона–Маскета). Получена основная система интегральных и дифференциальных уравнений, выписана дискретная схема. Приведен пример «конусообразования» для некоторых реальных параметров жидкостей и грунта.

Задача равновесия двух жидкостей в пористой среде или задача «конусообразования» одна из сложнейших проблем теории фильтрации, состоящая в нахождении дебита скважины, при котором время эксплуатации месторождения будет наиболее продолжительным. Такой дебит назовем критическим дебитом. Сложность задачи заключается в определении не только критического дебита, но и формы водо-нефтяного контакта.

В данной статье приведено решение задачи «конусообразования» в кусочно-неоднородном грунте путем продвижения границы раздела различных жидкостей к горизонтальной скважине из начального положения в устойчивое положение. Актуальность исследования такой задачи связана с эффективностью применения горизонтальных скважин при нефтедобыче и разработке водяных месторождений.

Математическая модель, с помощью которой решается поставленная задача, приведена в работе [1]. Задача «конусообразования» при осесимметричной фильтрации для жидкостей различной вязкости и плотности решена в работе [2]. Обзор статических задач для однородного грунта приведен в работе И. А. Чарного [3].

1. Рассмотрим двумерную нестационарную фильтрацию в безграничном кусочно-неоднородном, изотропном, недеформируемом грунте. Проницаемость его $K(M)$ моделируется хотя бы один раз непрерывно дифференцируемой функцией координат точки M . Течение описываем квазипотенциалом $\varphi(M, t)$, который удовлетворяет

всюду, за исключением особых точек, уравнению

$$\nabla[K(M)\nabla\varphi(M,t)] = 0, \quad \varphi(M,t) = \frac{\rho \vec{e}_g \vec{r}_M - P(M)}{\mu}. \quad (1)$$

Пусть грунт кусочно-неоднороден и в сопрягающихся на кривой L областях D_1 и D_2 , коэффициенты проницаемости $K_1(M)$ и $K_2(M)$ причем

$$K_\nu(M) = k_\nu K(M), \quad \nu = 1, 2,$$

$K(M)$ — непрерывная функция точки M , в том числе и на L . В области D фильтруются две жидкости с вязкостями μ_1, μ_2 и плотностями ρ_1, ρ_2 .

Считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ граница Γ_t известна

$$\Gamma_0: \vec{r} = \vec{r}(0, \varsigma) = \vec{r}_0(\varsigma), \quad (2)$$

где ς — параметр.

Течение в области фильтрации обусловлено заданными стоками (источниками), которые моделируем сингулярными точками квазипотенциала $\varphi_0(M, t)$ однородной жидкости ($\mu = 1, \rho = 1$).

Воспользовавшись принципом суперпозиции, потенциалы φ_1 и φ_2 представим в виде:

$$\varphi_\nu(M, t) = \frac{\varphi_0(M, t) + \varphi_*(M, t)}{k_\nu}, \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь φ_* квазипотенциал возмущения обусловленный различием проницаемости грунта, вязкостей и плотностей жидкостей.

На границах Γ_t и L выполняются условия непрерывности давления и расхода жидкостей

$$(1 - \lambda_k)\varphi_*^+(M, t) - (1 + \lambda_k)\varphi_*^-(M, t) = 2\lambda_k\varphi_0(M, t),$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_*(M, t)}{\partial n_M}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi_*(M, t)}{\partial n_M}\right)^-, \quad M \in L, \quad (4)$$

$$(1 - \lambda_\mu)\varphi_*^+(M, t) - (1 + \lambda_\mu)\varphi_*^-(M, t) = 2\lambda_\mu\varphi_0(M, t) - 2k_\nu\alpha\vec{e}_g\vec{r}_M,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_*(M, t)}{\partial n_M}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi_*(M, t)}{\partial n_M}\right)^-, \quad M \in \Gamma_t = \Gamma'_t \cup \Gamma''_t, \quad (5)$$

$$\lambda_k = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad \lambda_\mu = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \alpha = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Здесь $\vec{n}_M$ орт нормали. «+» и «-» означают предельные значения соответствующих функций при подходе к границам Γ_t и L со стороны нормали и со стороны противоположной нормали. Если область фильтрации содержит сингулярную линию, где проницаемость $K(M) = \infty$, $M \in L_{01}$ или $K(M) = 0$, $M \in L_{02}$ квазипотенциал, возмущения удовлетворяет условиям

$$\varphi_*(M, t) = \text{const}, \quad M \in L_{01} \text{ или } K(M) \frac{\partial \varphi_*(M, t)}{\partial n_M} = 0, \quad M \in L_{02}. \quad (6)$$

Если область D содержит бесконечно удаленную точку, то для единственности решения потребуем выполнения для квазипотенциала возмущения условий регулярности [4]

$$\begin{aligned} \varphi_*(M, t) &= O\left(\frac{1}{r_{MN}}\right), \\ K(M)|\nabla \varphi_*(M, t)| &= O\left(\frac{1}{r_{MN}^2}\right), \quad \text{при } r_{MN} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая непрерывность $K(M)$, $\varphi_*(M, t)$, имеем дифференциальное уравнение движения границы Γ_t

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_M}{dt} &= K(M) \left[\nabla \varphi_0(M, t) + \right. \\ &\left. + \frac{(\nabla \varphi_1(M, t))^+ + (\nabla \varphi_2(M, t))^-}{2} \right], \quad M \in \Gamma_t = \Gamma'_t \cup \Gamma''_t. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и далее Γ'_t часть границы Γ_t , принадлежащая области с проницаемостью $K_1(M)$, Γ''_t часть границы Γ_t , принадлежащая области с проницаемостью $K_2(M)$. Таким образом, чтобы исследовать эволюцию границы Γ_t необходимо решить уравнения (1), (8) совместно с граничными условиями (4), (5) и начальными условиями (2).

Квазипотенциал возмущения представим в виде потенциала двойного слоя, непрерывно распределенного на контуре Γ_t с плотностью $g(M, t)$ и на контуре L с плотностью $f(M, t)$

$$\begin{aligned} \varphi_*(M, t) &= \int_{\Gamma_t} g(N, t) K(N) \Omega(M, N) dl_N + \\ &+ \int_L f(N, t) K(N) \Omega(M, N) dl_N, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Omega(M, N) = \frac{\partial \Phi_1(M, N)}{\partial n_N}$, а $\Phi_1(M, N)$ — первое фундаментальное решение уравнения (1), квазипотенциал скорости нормированного стока с полным расходом -1 .

Предельные значения потенциала возмущения на границах Γ_t и L примут вид

$$\begin{aligned}\varphi_*^\pm(M, t) &= \varphi_*(M, t) \pm \frac{g(M, t)}{2}, \quad M \in \Gamma_t = \Gamma'_t \cup \Gamma''_t. \\ \varphi_*^\pm(M, t) &= \varphi_*(M, t) \pm \frac{f(M, t)}{2}, \quad M \in L.\end{aligned}\quad (10)$$

Подставляя предельные значения квазипотенциала возмущения в граничные условия и уравнение движения границы, получаем два интегральных уравнения и дифференциальное уравнение движения границы записанное в векторном виде:

$$\begin{aligned}g(M, t) - 2\lambda_\mu \int_{\Gamma_t} g(N, t) K(N) \Omega(M, N) dl_N - \\ - 2\lambda_\mu \int_L f(N, t) K(N) \Omega(M, N) dl_N = 2\lambda_\mu \varphi_0(M, t) + 2k_\nu \alpha \vec{e}_g \vec{r}_M,\end{aligned}\quad (11)$$

$$M \in \Gamma_t = \Gamma'_t \cup \Gamma''_t,$$

$$\begin{aligned}f(M, t) - 2\lambda_k \int_{\Gamma_t} g(N, t) K(N) \Omega(M, N) dl_N - \\ - 2\lambda_k \int_L f(N, t) K(N) \Omega(M, N) dl_N = 2\lambda_k \varphi_0(M, t), \quad M \in L,\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\frac{dr_M}{dt} &= K(M) \nabla \varphi_0(M, t) + \\ &+ \int_{\Gamma_t} g'(N, t) \left(\frac{\partial \Psi_2(M, N)}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial \Psi_2(M, N)}{\partial x} \vec{j} \right) dl_N + \\ &+ \int_L f'(N, t) \left(\frac{\partial \Psi_2(M, N)}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial \Psi_2(M, N)}{\partial x} \vec{j} \right) dl_N,\end{aligned}\quad (13)$$

$$M \in \Gamma_t = \Gamma'_t \cup \Gamma''_t.$$

Таким образом, для исследования эволюции границы Γ_t решаем систему уравнений, состоящую из двух интегральных уравне-

ний (11), (12) и дифференциального уравнения (13) при заданных начальных условиях (2).

Полученную систему решаем численно, методом дискретных особенностей, для этого границы L и Γ_t в каждый момент времени заменяем системой точек (x_k^j, y_k^j) , (x_m^j, y_m^j) , интегралы заменяем суммой по формуле прямоугольников, а дифференциалы их разностными аналогами. Численная схема основной системы уравнений имеет вид:

$$g_m^j - 2\lambda_\mu \sum_{k=1, k \neq m}^{n_1} g_k^j K(x_k^j, y_k^j) \Omega(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j) - \\ - 2\lambda_\mu \sum_{k=1}^{n_2} f_k^j K(x_k^j, y_k^j) \Omega(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j) = 2\lambda_\mu \varphi_0(x_m^j, y_m^j) + 2\kappa \alpha y_m^j,$$

$$f_m^j - 2\lambda_k \sum_{k=1}^{n_1} g_k^j K(x_k^j, y_k^j) \Omega(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j) - \\ - 2\lambda_k \sum_{k=1, k \neq m}^{n_2} f_k^j K(x_k^j, y_k^j) \Omega(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j) = 2\lambda_k \varphi_0(x_m^j, y_m^j),$$

$$\frac{x_m^{j+1} - x_m^j}{\Delta t_j} = K(x_m^j, y_m^j) \frac{\partial \varphi_0(x_m^j, y_m^j)}{\partial x_m^j} + \\ + \sum_{m=1}^{n_1} \frac{\partial \Psi_2(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j)}{\partial y_m^j} \Delta g_k^j + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{\partial \Psi_2(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j)}{\partial y_m^j} \Delta f_k^j,$$

$$\frac{y_m^{j+1} - y_m^j}{\Delta t_j} = K(x_m^j, y_m^j) \frac{\partial \varphi_0(x_m^j, y_m^j)}{\partial y_m^j} + \\ + \sum_{m=1}^{n_1} \frac{\partial \Psi_2(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j)}{\partial x_m^j} \Delta g_k^j + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{\partial \Psi_2(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j)}{\partial x_m^j} \Delta f_k^j,$$

$$m = \overline{1, n_1}, \quad k = \overline{1, n_2}, \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\Delta g_k^j = \frac{g_{k+1}^j - g_{k-1}^j}{2}, \quad \Delta f_k^j = \frac{f_{k+1}^j - f_{k-1}^j}{2}.$$

2. За первоначальное положение границы примем прямую (рис. 1). Характерным расстоянием в данной задаче является расстояние от первоначального положения границы раздела жидкостей до скважины. Характерное время примем равным времени заводнения скважины в одножидкостной системе ($\lambda_\mu = 0$, $\alpha = 0$)

$$T_0 = \frac{\pi d^2}{q}.$$

В результате численных расчетов был найден критический дебит $q^* = 0,286$ и время $T = 10,03$, при котором граница перестает перемещаться и занимает устойчивое положение, сохраняющееся в течении продолжительного промежутка времени. На рис. 1 представлено последовательное положение контура нефтеносности в различные моменты времени для параметров $\lambda_\mu = 0,5$ и $\alpha = 0,3$.

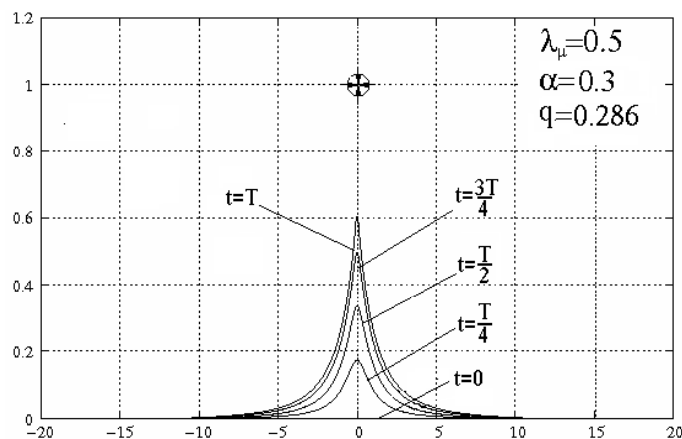


Рис. 1. Устойчивое положение границы раздела жидкостей различной вязкости и плотности.

Литература

1. Lifanov I. K., Nikolsky D. N., Piven V. F. Mathematical modeling of the work of the system of wells in a layer with the exponential law of permeability variation and the mobile liquid interface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling.— 2002.—V. 17, № 4.—С. 381–391.

2. *Никольский Д. Н., Никольская Т. А.* Исследование осесимметричной задачи о работе несовершенной скважины в однородном грунте с подвижным контуром нефтеносности // В сб.: Труды международных школ — семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». — Орел: Изд-во ОГУ, 2005. — С. 89–93.
3. *Чарный И. А.* Подземная гидрогазодинамика. — М. — 1963. — 397 с.
4. *Пивень В. Ф.* Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. — Орел: Изд-во ГОУ ВПО «ОГУ», 2006. — 508 с.

Никольская Татьяна Александровна
ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»
Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95
E-mail: Nikolskyata@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРЕХМЕРНОЙ И ДВУМЕРНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА РАЗЛИЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ¹

Д. Н. Никольский

Получены основные системы интегральных и дифференциальных уравнений, моделирующие трехмерную и двумерную эволюцию границы раздела жидкостей различной вязкости и плотности в неоднородной пористой среде в постановке Лейбензона–Маскета. Для этих систем построены дискретные схемы. В двумерном случае дискретная схема построена методом дискретных вихревых пар, в трехмерном — методом замкнутых вихревых рамок.

1. Постановка задачи. Пусть в каждый момент времени t замкнутая граница σ_t (кривая или поверхность) класса C^2 разбивает область протекания процесса D на части $D^+ = D_1$ (внешнюю) и $D^- = D_2$ (внутреннюю), занятые жидкостями с вязкостями μ_1 и μ_2 и плотностями ρ_1 и ρ_2 , соответственно. Область D ограничена эквипотенциалью σ_1 и (или) непроницаемой границей σ_2 . Течение возбуждается точечными и линейными источниками (стоками), ограниченными контурами L_i , $i = \overline{0, \kappa}$. При этом $D = D^+ \cup D^- \cup \sigma_t \cup L$, $L = \bigcup_{i=0}^{\kappa} L_i$.

Фильтрация жидкостей подчиняется закону Дарси и уравнению неразрывности [1]

$$\mathbf{v} = K \operatorname{grad} \varphi, \quad \varphi = \mu^{-1}(\rho\Pi - p) \quad \text{в} \quad D^+ \cup D^-. \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{в} \quad D^+ \cup D^-. \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость фильтрации, φ — квазипотенциал скорости фильтрации, p — гидростатическое давление, Π — потенциал внешних массовых сил ($\mathbf{F} = \operatorname{grad} \Pi$), $\mu = \mu_i$ и $\rho = \rho_i$ в областях D_i , $i = 1, 2$.

Перемещение частиц жидкостей, находящихся на границе раздела σ_t описывается дифференциальным уравнением [2]

$$d\mathbf{r}/dt = (\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-)/2 \quad \text{на} \quad \sigma_t. \quad (1.3)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 006-01-96303, гранта Президента Российской Федерации, проект МК-491.2008.1 и Федерального агентства по образованию.

В начальный момент времени $t = 0$ положение границы σ_t известно

$$\mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0. \quad (1.4)$$

Законы (1.1)–(1.4) записаны в безразмерных величинах. Характерные величины при этом удовлетворяют соотношению

$$P_0 = \rho_0 \Pi_0, \quad \Phi_0 \mu_0 = P_0, \quad V_0 L_0 = K_0 \Phi_0, \quad V_0 T_0 = m L_0.$$

Здесь m — пористость среды, а индекс «0» используется для обозначения соответствующих характерных величин.

На подвижной границе σ_t должны выполняться условия непрерывности давлений и неразрывности фильтрационного потока [1]

$$p^+ = p^-, \quad v_n^+ - v_n^- \quad \text{на} \quad \sigma_t. \quad (1.5)$$

На границе σ_1 выполняется условие отсутствия касательной составляющей скорости фильтрации [1]

$$v_\tau^+ = 0 \quad \text{на} \quad \sigma_1, \quad (1.6)$$

а на границе σ_2 — условие непротекания [1]

$$v_n^+ = 0 \quad \text{на} \quad \sigma_2. \quad (1.7)$$

Скорости фильтрации жидкостей ищем в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_* \quad \text{в} \quad D^+ \cup D^-. \quad (1.8)$$

Здесь $\mathbf{v}_0 = K \operatorname{grad} \varphi_0$ — поле скоростей, создаваемое источниками и стоками течения жидкости единичной вязкости и плотности в области протекания процесса D в отсутствии границы σ_t , $\mathbf{v}_* = K \operatorname{grad} \varphi_*$ — скорость возмущения, вызванного границей σ_t .

Из законов (1.1) и (1.2) следует, что квазипотенциал φ_* удовлетворяет уравнению эллиптического типа

$$\operatorname{div} (K \operatorname{grad} \varphi_*) = 0 \quad \text{в} \quad D^+ \cup D^-. \quad (1.9)$$

Условия на подвижной границе σ_t (1.5) принимают вид

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_\mu) \varphi_*^+ - (1 + \lambda_\mu) \varphi_*^- &= 2\lambda_\mu \varphi_0 + 2\lambda_\rho \Pi, \\ (K \operatorname{grad} \varphi_* \cdot \mathbf{n})^+ &= (K \operatorname{grad} \varphi_* \cdot \mathbf{n})^- \quad \text{на} \quad \sigma_t. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь и далее $\lambda_\mu = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$, $\lambda_\rho = (\rho_1 - \rho_2)/(\mu_2 + \mu_1)$.

На границе σ_1 условие (1.6) для квазипотенциала φ_* принимает вид

$$\varphi_*^+ = -\varphi_0 \quad \text{на} \quad \sigma_1, \quad (1.11)$$

а (1.7) на границе σ_2

$$(K \operatorname{grad} \varphi_* \cdot \mathbf{n})^+ = -K \operatorname{grad} \varphi_0 \cdot \mathbf{n} \quad \text{на} \quad \sigma_2. \quad (1.12)$$

Квазипотенциал φ_* будем искать при дополнительном условии

$$\varphi_* \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty. \quad (1.13)$$

С учетом (1.8) дифференциальное уравнение движения примет вид

$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_*^+ + \mathbf{v}_*^-)/2 \quad \text{на} \quad \sigma_t. \quad (1.14)$$

В итоге видим, что для решения задачи об эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости и плотности требуется решить систему уравнений (1.9) и (1.14), при начальном условии (1.4) и граничных условиях (1.10)–(1.12), а так же с учетом условия на бесконечности (1.13).

2. Основная система в двумерном случае. Пусть процесс протекает в тонком неоднородном изотропном слое проводимости $P = KH$ (K — коэффициент проницаемости слоя, H — его толщина). Квазипотенциал φ_* ищем в виде квазипотенциала двойного слоя, распределенного по кривой L_t с плотностью g

$$\varphi_* = \int_{L_t} g(N, t) \Omega(M, N) dl_N \quad \text{в} \quad D^+ \cup D^-, \quad (2.1)$$

где ядро $\Omega(M, N) = P(N) \partial \Phi_1(M, N) / \partial n_N$, Φ_1 — функция Грина эллиптического уравнения (1.9), моделирующая нормированный сток с полным расходом равным -1 , и учитывающая условия (1.1) и (1.2).

Представляя функцию Φ_1 в виде [3]

$$\Phi_1 = (P(M)P(N))^{-1/2} (-\ln r_{NM} + G_1(M, N))$$

найдем предельные значения от квазипотенциала φ_* и от производной по нормали $\partial \varphi_*/\partial n$

$$\varphi_*^\pm = \int_{L_t} g(N, t) \Omega(M, N) dl_N \pm g/2 \quad \text{на} \quad L_t, \quad (2.2)$$

$$(\partial\varphi_*/\partial n)^+ = (\partial\varphi_*/\partial n)^- \quad \text{на } L_t. \quad (2.3)$$

Здесь и далее символ $\oint$ будем использовать для обозначения сингулярного интеграла, понимаемого в смысле главного значения по Коши [4].

Квазипотенциал φ_* удовлетворяет уравнению (1.9), условиям (1.11)–(1.13), второму условию из (1.10). Подставим (2.2) в первое условие из (1.10), получим

$$g - 2\lambda_\mu \oint_{L_t} g(N, t) \Omega(M, N) dl_N = 2\lambda_\mu \varphi_0 + 2\lambda_\rho \Pi \quad \text{на } L_t. \quad (2.4)$$

Учитывая замкнутость L_t и [3]

$$\partial\Phi_1(M, N)/\partial n_N = -P^{-1}\partial\Phi_2(M, N)/\partial l_N,$$

после вычисления интеграла по частям, получим

$$\varphi_* = \int_{L_t} \gamma(N, t) \Phi_2(M, N) dl_N \quad \text{в } D^+ \cup D^-, \quad (2.5)$$

где $\gamma = \partial g(N, t)/\partial l_N$, Φ_2 — второе фундаментальное решение (1.9), моделирующее нормированный вихрь с циркуляцией равной -1 .

Вычислим скорость возмущения $\mathbf{v}_*$, используя (2.5) и (1.1)

$$\mathbf{v}_* = \int_{L_t} \gamma(N, t) \mathbf{V}_2(M, N) dl_N \quad \text{в } D^+ \cup D^-, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{V}_2 = H^{-1}(\partial\Psi_2/\partial y\mathbf{i} - \partial\Psi_2/\partial x\mathbf{j})$ — скорость вихря, Ψ_2 — его функция тока.

Учитывая предельные значения скорости возмущения $\mathbf{v}_*$ (2.6)

$$\mathbf{v}_*^\pm = \oint_{L_t} \gamma(N, t) \mathbf{V}_2(M, N) dl_N \pm K \text{Grad } g/2 \quad \text{на } L_t,$$

получим дифференциальное уравнение движения границы L_t в виде

$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}_0 + \oint_{L_t} \gamma(N, t) \mathbf{V}_2(M, N) dl_N \quad \text{на } L_t. \quad (2.7)$$

Таким образом для решения двумерной задачи об эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости и плотности в неоднородном слое имеем дифференциальное уравнение (2.7), которое нужно интегрировать с учетом начального условия (1.4) и интегрального уравнения (2.4).

3. Основная система в трехмерном случае. В случае трехмерной неоднородной пористой среды квазипотенциал возмущения φ_* ищем в виде квазипотенциала двойного слоя, распределенного по поверхности σ_t с плотностью g

$$\varphi_* = \int_{\sigma_t} g(N, t) \Omega(M, N) d\sigma_N \quad \text{в } D^+ \cup D^-, \quad (3.1)$$

где ядро $\Omega = K(N) \partial \Phi(M, N) / \partial n_N$, Φ — функция Грина эллиптического уравнения (1.9), моделирующая пространственный сток, с полным расходом равным -1 . Функция Φ учитывает условия (1.11) и (1.12).

Ограничимся рассмотрением метагармонической серии сред, когда $\sqrt{K}$ удовлетворяет метагармоническому уравнению

$$\Delta \sqrt{K} = \beta^2 \sqrt{K}. \quad (3.2)$$

В этом случае функция Φ имеет вид [1]

$$\Phi = (K(M)K(N))^{-1/2} (U(r_{NM}) + G(M, N)), \quad (3.3)$$

где $U(r_{NM}) = (4\pi r_{NM})^{-1} \exp(-\beta r_{NM})$.

С учетом (3.3) представим квазипотенциал возмущения φ_* и скорость возмущения v_* в виде

$$\begin{aligned} \varphi_* = & \int_{\sigma_t} g(N, t) \sqrt{K(N)/K(M)} \partial U(r_{NM}) / \partial n_N d\sigma_N - \\ & -(K)^{-1/2} \int_{\sigma_t} g(N, t) \partial \sqrt{K(N)} / \partial n_N U(r_{NM}) d\sigma_N + \\ & + \int_{\sigma_t} g(N, t) K(N) \frac{\partial}{\partial n_N} \frac{G(M, N)}{\sqrt{K(M)K(N)}} d\sigma_N \quad \text{в } D^+ \cup D^-, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_* = & \sqrt{K} \int_{\sigma_t} \sqrt{K(N)} g(N, t) \nabla_M \partial U(r_{NM}) / \partial n_N d\sigma_N - \\
 & - \nabla \sqrt{K} \int_{\sigma_t} \sqrt{K(N)} g(N, t) \partial U(r_{NM}) / \partial n_N d\sigma_N - \\
 & - \sqrt{K} \int_{\sigma_t} g(N, t) \partial \sqrt{K(N)} / \partial n_N \nabla_M U(r_{NM}) d\sigma_N + \\
 & + \nabla \sqrt{K} \int_{\sigma_t} g(N, t) \partial \sqrt{K(N)} / \partial n_N U(r_{NM}) d\sigma_N + \\
 & + K \int_{\sigma_t} K(N) g(N, t) \nabla_M \frac{\partial}{\partial n_N} \frac{G(M, N)}{\sqrt{K(M)K(N)}} d\sigma_N \text{ в } D^+ \cup D^-.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Используя известные предельные значения для потенциалов простого и двойного слоев и их производных [4] из (1.10), (1.14) и (3.4) и (3.5) получим [6]

$$\begin{aligned}
 & g - 2\lambda_\mu \int_{\sigma_t} g(N, t) \sqrt{K(N)/K(M)} \partial U(r_{NM}) / \partial n_N d\sigma_N - \\
 & - 2\lambda_\mu (K)^{-1/2} \int_{\sigma_t} \partial \sqrt{K} / \partial n_N U(r_{NM}) d\sigma_N + \\
 & + 2\lambda_\mu \int_{\sigma_t} g(N, t) K(N) \partial ((K(M)K(N))^{-\frac{1}{2}} G(M, N)) / \partial n_N d\sigma_N = \\
 & = 2\lambda_\mu \varphi_0 + 2\lambda_\rho \Pi \quad \text{на } \sigma_t,
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{r}/dt = & \mathbf{v}_0 + \sqrt{K} \int_{\sigma_t} \sqrt{K(N)} g(N, t) \nabla_M \partial U(r_{NM}) / \partial n_N d\sigma_N - \\
 & - \nabla \sqrt{K} \int_{\sigma_t} \sqrt{K(N)} g(N, t) \partial U(r_{NM}) / \partial n_N d\sigma_N - \\
 & - \sqrt{K} \int_{\sigma_t} \partial \sqrt{K(N)} / \partial n_N \nabla_M U(r_{NM}) d\sigma_N + \\
 & + \nabla \sqrt{K} \int_{\sigma_t} g(N, t) \partial \sqrt{K(N)} / \partial n_N U(r_{NM}) d\sigma_N + \\
 & + K \int_{\sigma_t} K(N) g(N, t) \nabla_M \frac{\partial}{\partial n_N} \frac{G(M, N)}{\sqrt{K(M)K(N)}} d\sigma_N \quad \text{на } \sigma_t.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Коэффициенты w_i , p_i , $i = \overline{1, l}$ известны и определяются таблицами Бутчера [8].

Отметим, что в [2] приводится дискретный аналог, отличный от (4.2) и (4.3), построенный на базе одной системе точек.

5. Численный алгоритм решения трехмерной задачи. Поверхность σ_t в некоторый произвольный момент времени t_s , $s = \overline{0, 1, \dots}$ представим элементарными площадками $\Delta\sigma_{mk}^s$, $m = \overline{1, n_1}$, $k = \overline{1, n_2}$, $s = \overline{0, 1, \dots}$ с приблизительно одинаковыми площадями. Края этих площадок определяют точки P_{mk}^s , $m = \overline{1, n_1}$, $k = \overline{1, n_2}$, $s = \overline{0, 1, \dots}$. В центре каждой площадки $\Delta\sigma_{mk}^s$ расположим «расчетную» точку, вычисленную по формуле $M_{mk}^s = 0,25(P_{mk}^s + P_{m+1,k}^s + P_{m+1,k+1}^s + P_{m,k+1}^s)$, $m = \overline{1, n_1}$, $k = \overline{1, n_2}$, $s = \overline{0, 1, \dots}$.

После замены интеграла (3.6) на сумму по формуле прямоугольников получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$g_{mk}^s - 2\lambda_\mu \sum_{i=1}^{n_1-1} \sum_{j=1}^{n_2-1} g_{ij}^s \Omega_{mkij}^s \Delta\sigma_{ij}^s = 2\lambda_\mu \varphi_{0mk}^s + 2\lambda_\rho \Pi_{mk}^s, \quad (5.1)$$

где $m = \overline{1, n_1}$, $k = \overline{1, n_2}$, $s = \overline{0, 1, \dots}$.

Для построения разностного аналога для (3.7) полагаем, что плотность g_{mk}^s и коэффициент K_{mk} не меняются в пределах каждой площадки $\Delta\sigma_{mk}^s$, $m = \overline{1, n_1}$, $k = \overline{1, n_2}$, $s = \overline{0, 1, \dots}$, и с учетом [6]

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \nabla_M (\nabla U(r_{NM}) \mathbf{n}_N) d\sigma_N = \\ & = - \oint_L \nabla_M U(r_{NM}) d\mathbf{r}_N - \int_{\Sigma} \beta^2 U(r_{NM}) \mathbf{n}_N d\sigma_N, \end{aligned}$$

где Σ — площадка опирающаяся на контур L , получим

$$\Delta \mathbf{r}_m^s / \Delta t_s = \sum_{k=1}^l p_k \mathbf{v}_{mk}^s, \quad m = \overline{1, n}, \quad s = \overline{0, 1, \dots} \quad (5.2)$$

Тестирование схем (5.1) и (5.2) при $l = 1$ для $K = 1$ приведены в [5], а для $K = \exp(2\beta z)$ — в [6].

Литература

1. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред.—М.: Высшая школа, 1972.—368 с.
2. Lifanov I. K., Nikolsky D. N., Piven V. F. Mathematical modelling of the work of the system of wells in a layer with the exponential law of permeability variation and the mobile liquid interface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling.—2002.—V. 17, № 4.—P. 381–391.
3. Пивень В. Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений.—Орел.—2006.—508 с.
4. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО Янус, 1995.—521 с.
5. Никольский Д. Н. Математическое моделирование трехмерной задачи эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости и плотности в однородном и безграничном грунте // Журн. «Вычислительные методы и программирование».—2006.—Т. 7, № 2.—С. 108–114.
6. Никольский Д. Н. Математическое моделирование трехмерной задачи эволюции поверхности раздела жидкостей различной вязкости и плотности в неоднородном грунте // Журн. вычислительной математики и математической физики.—2007.—Т. 47, № 8.—С. 1402–1412.
7. Пивень В. Ф. Математическое моделирование эволюции границы раздела жидкостей в кусочно-неоднородном грунте // Исследования по математическому анализу, математическому моделированию и информатике.—Владикавказ.—2007.—С. 230–236.
8. Петров И. Б., Лобанов А. И. Лекции по вычислительной математике.—БИНОМ, 2006.—523 с.

Никольский Дмитрий Николаевич
ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»
Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95
E-mail: nikolskydn@mail.ru

АСИМПТОТИКА МНОГОЧЛЕНОВ $\hat{P}_N^{\alpha,\beta}(T)$, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ

А. А. Нурмагомедов

В этой работе исследуются асимптотические свойства многочленов $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t)$ ортогональных с весом $(1-t_j)^\alpha(1+t_j)^\beta\Delta t_j$ на произвольных сетках, состоящих из конечного числа N точек отрезка $[-1, 1]$. А именно установлена асимптотическая формула, в которой при возрастании n вместе с N , асимптотическое поведение этих многочленов близко к асимптотическому поведению многочленов Якоби.

1. Введение

Пусть α и β — целые неотрицательные числа, $T_N = \{t_j\}_{j=0}^N$ — дискретное множество (сетка), состоящее из конечного числа различных точек отрезка $[-1, 1] : -1 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$.

Через

$$\hat{p}_k^{\alpha,\beta}(t) = \hat{p}_k^{\alpha,\beta}(t; T_N) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (1.1)$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке T_N в следующем смысле ($0 \leq n, m \leq N-1$):

$$(\hat{p}_n^{\alpha,\beta}, \hat{p}_m^{\alpha,\beta}) = \sum_{j=0}^{N-1} (1-t_j)^\alpha(1+t_j)^\beta \hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t_j) \hat{p}_m^{\alpha,\beta}(t_j) \Delta t_j = \delta_{nm}, \quad (1.2)$$

где $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 0, 1, \dots, N-1$. Для определенности будем считать, что старший коэффициент многочлена $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t)$ положителен, т. е.

$$\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t) = k_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_0, \quad k_n > 0. \quad (1.3)$$

В настоящей работе исследуются асимптотические свойства многочлена $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t)$ при $n, N \rightarrow \infty$.

Ниже нам понадобится обобщение на интегральные метрики известного неравенства В. А. Маркова для производных алгебраических многочленов. А именно, пусть $q_n(t)$ — произвольный алгебраический многочлен степени n , $0 \leq r \leq n$. Тогда имеет место [1, 4]

оценка

$$\int_{-1}^1 \left| q_n^{(r)}(t) \right| dt \leq c(r) n^{2r} \int_{-1}^1 |q_n(t)| dt, \quad (1.4)$$

где $c(r), c(\alpha, \beta), \dots, c(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ — положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах. Через $\mathfrak{a}_r$ мы обозначим наименьшую константу в неравенстве (1.4), т. е.

$$\mathfrak{a}_r = \inf_{q_n} \frac{\int_{-1}^1 \left| q_n^{(r)}(t) \right| dt}{n^{2r} \int_{-1}^1 |q_n(t)| dt}, \quad (1.5)$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим многочленам $q_n(t)$ степени n , не равными нулю тождественно.

Далее, пусть $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$ — ортонормированный многочлен Якоби,

$$\delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} \Delta t_j. \quad (1.6)$$

В данной работе установлена асимптотическая формула

$$\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t) = \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) + v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t), \quad (1.7)$$

в которой для остаточного члена $v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ при $1 \leq n \leq a\delta_N^{-1/2}$ имеет место оценка ($-1 \leq t \leq 1$)

$$|v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)| \leq c(\alpha, \beta, a) \delta_N^{1/2} n^{3/2} \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-1/2} \quad (1.8)$$

В монографии [5, с. 56–61] Шарапудиновым И. И., для ортонормированных на равномерной сетке $\Omega = \{0, 1, \dots, N-1\}$ многочленов Чебышева $\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть α и β — целые неотрицательные числа, $a > 0$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) + v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t),$$

для остаточного члена $v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ которой при $1 \leq n \leq aN^{1/2}$ справедлива оценка

$$|v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)| \leq c(\alpha, \beta, a) \frac{n}{\sqrt{N}} \left[\sqrt{1-t} + \frac{1}{n} \right]^{-\alpha-1/2} \left[\sqrt{1+t} + \frac{1}{n} \right]^{-\beta-1/2}.$$

Нам удалось перенести эту теорему на произвольный случай.

2. Некоторые свойства многочленов Якоби

Мы здесь приведем некоторые сведения о многочленах Якоби. Определим многочлены Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) с помощью обобщенной формулы Родрига:

$$P_n^{\alpha,\beta}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{k(t)} \frac{d^n}{dt^n} \{k(t) \sigma^n(t)\}, \quad (2.1)$$

где α, β — произвольные действительные числа, $\sigma(t) = 1 - t^2$, $k(t) = k(t; \alpha, \beta) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$. Если $\alpha, \beta > -1$, то многочлены Якоби образуют ортонормированную систему с весом $k(t)$, т. е.

$$\int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(t) P_m^{\alpha,\beta}(t) dt = h_n^{\alpha,\beta} \delta_{nm}, \quad (2.2)$$

где

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{n! (2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, \quad (2.3)$$

и, следовательно, $h_n^{\alpha,\beta} \asymp n^{-1/2}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Ниже нам понадобятся следующие свойства многочленов Якоби [2, 3]:

производная

$$\frac{d^r}{dt^r} P_n^{\alpha,\beta}(t) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_r}{2^r} P_{n-r}^{\alpha+r, \beta+r}(t) \quad (0 \leq r \leq n), \quad (2.2)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_\nu = a(a+1) \dots (a+\nu-1)$;

весовая оценка ($-1 \leq t \leq 1$)

$$\sqrt{n} |P_n^{\alpha,\beta}(t)| \leq c(\alpha, \beta) \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-\frac{1}{2}}; \quad (2.3)$$

симметрия

$$P_n^{\alpha,\beta}(-t) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(t). \quad (2.4)$$

3. Некоторые вспомогательные результаты

Мы здесь докажем некоторые утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 3.1. Пусть функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$, $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 0, 1, \dots, N-1$. Тогда имеет место следующее равенство:

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \Delta t_j + r_N(f), \quad (3.1)$$

в котором для остаточного члена $r_N(f)$ имеет место оценка

$$|r_N(f)| \leq \delta_N \int_a^b |f'(x)| dx. \quad (3.2)$$

◁ Мы имеем

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t) dt. \quad (3.3)$$

Далее, воспользовавшись формулой Тейлора, мы можем записать

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t) dt &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[f(t_j) + \int_{t_j}^t f'(x) dx \right] dt = \\ &= f(t_j) \Delta t_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{t_j}^t f'(x) dx dt = \\ &= f(t_j) \Delta t_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - x) f'(x) dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Поскольку (см. (1.6))

$$\left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - x) f'(x) dx \right| \leq \delta_N \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f'(x)| dx, \quad (3.5)$$

то из (3.3) и (3.4), мы находим:

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \Delta t_j + r_N(f),$$

где

$$\begin{aligned} |r_N(f)| &= \left| \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - x) f'(x) dx \right| \leq \\ &\leq \delta_N \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f'(x)| dx = \delta_N \int_a^b |f'(x)| dx. \triangleright \end{aligned}$$

В качестве следствия леммы 3.1 отметим следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $[-1, 1]$, $-1 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$, $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 0, 1, \dots, N-1$. Тогда имеет место следующее равенство:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \Delta t_j + r_N(f), \quad (3.6)$$

в котором для остаточного члена $r_N(f)$ имеет место оценка

$$|r_N(f)| \leq \delta_N \int_{-1}^1 |f'(x)| dx. \quad (3.7)$$

Лемма 3.2. Пусть $\alpha, \beta > -1$, $t_1^* = \min\{t_j : -1 + n^{-2} \leq t_j \leq 1 - n^{-2}\}$, $t_2^* = \max\{t_j : -1 + n^{-2} \leq t_j \leq 1 - n^{-2}\}$. Тогда для нормированного многочлена Якоби $\hat{P}_n^{\alpha, \beta}(t) = \{h_n^{\alpha, \beta}\}^{-1/2} P_n^{\alpha, \beta}(t)$ имеет место следующая формула

$$\sum_{t_1^* \leq t_j \leq t_2^*} (1 - t_j)^\alpha (1 + t_j)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha, \beta}(t_j))^2 \Delta t_j = 1 - r_{n, N}, \quad (3.8)$$

в которой

$$|r_{n,N}| \leq c(\alpha, \beta) \delta_N n \ln(n+1). \quad (3.9)$$

◁ Мы имеем

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt = \\ &= \int_{-1}^{-1+n^{-2}} (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt + \\ &+ \int_{-1+n^{-2}}^{1-n^{-2}} (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt + \\ &+ \int_{1-n^{-2}}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вначале оценим I_1 .

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^{-1+n^{-2}} (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt \leq \\ &\leq c(\alpha, \beta) n^{2\beta+1} \int_{-1}^{-1+n^{-2}} (1+t)^\beta dt \leq c(\alpha, \beta) n^{-1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Аналогичную оценку допускает и I_3

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{1-n^{-2}}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt \leq \\ &\leq c(\alpha, \beta) n^{2\alpha+1} \int_{1-n^{-2}}^1 (1-t)^\alpha dt \leq c(\alpha, \beta) n^{-1}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Теперь перейдем к оценке интеграла I_2 . Полагая, $f(x) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 = \{h_n^{\alpha,\beta}\}^{-1} (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (P_n^{\alpha,\beta}(t))^2$ воспользуемся

леммой 3.1. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{-1+n^{-2}}^{1-n^{-2}} (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt = \\ & = \sum_{t_1^* \leq t_j \leq t_2^*} (1-t_j)^\alpha (1+t_j)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t_j))^2 \Delta t_j + \bar{r}_{n,N}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\bar{r}_{n,N} = r_N((1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2)$, и, стало быть,

$$|\bar{r}_{n,N}| \leq \delta_N \int_{-1+n^{-2}}^{1-n^{-2}} \left| \{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2\}' \right| dt. \quad (3.14)$$

Далее, в силу (2.2), имеем

$$\begin{aligned} & \{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2\}' = \\ & = \{h_n^{\alpha,\beta}\}^{-1} \{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta (P_n^{\alpha,\beta}(t))^2\}' = \\ & = \{h_n^{\alpha,\beta}\}^{-1} \{\alpha(1-t)^{\alpha-1} (1+t)^\beta (P_n^{\alpha,\beta}(t))^2 + \\ & \quad + \beta(1-t)^\alpha (1+t)^{\beta-1} (P_n^{\alpha,\beta}(t))^2 + \\ & \quad + (n+\alpha+\beta+1)(1-t)^\alpha (1+t)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(t) P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(t)\}. \end{aligned}$$

Поэтому в силу весовой оценки (2.3), получим $(0 \leq t \leq 1-n^{-2})$

$$\left| \{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2\}' \right| \leq c(\alpha, \beta) [(1-t)^{-3/2} + (1-t)^{-1/2} + (1-t)^{-1}].$$

Отсюда, в свою очередь, имеем

$$\int_0^{1-n^{-2}} \left| \{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2\}' \right| \leq c(\alpha, \beta) n \ln(n+1).$$

Случай $-1+n^{-2} \leq t \leq 0$ равенством (2.4) приводится к рассмотренному. Следовательно,

$$\int_{-1+n^{-2}}^{1-n^{-2}} \left| \{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2\}' \right| dt \leq c(\alpha, \beta) n \ln(n+1). \quad (3.15)$$

Сопоставляя (3.10)–(3.15), приходим к утверждению леммы 3.2. $\triangleright$

Лемма 3.3. Пусть α, β — целые неотрицательные числа и $\mathfrak{a}_1\delta_N n^2 < 1$. Тогда для ортонормированного многочлена (1.3) имеет место следующая формула

$$\int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt = 1 + R_{n,N}, \quad (3.16)$$

в которой

$$|R_{n,N}| \leq \frac{\mathfrak{a}_1\delta_N n^2}{1 - \mathfrak{a}_1\delta_N n^2}. \quad (3.17)$$

◁ В силу следствия 1

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt = \\ & = \sum_{j=0}^{N-1} (1-t_j)^\alpha (1+t_j)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t_j))^2 \Delta t_j + R_{n,N}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $R_{n,N} = r_N((1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t))^2)$ и, стало быть, в силу (3.7)

$$|R_{n,N}| \leq \delta_N \int_{-1}^1 |\{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t))^2\}'| dt. \quad (3.19)$$

Далее, из неравенства (1.4) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 |\{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t))^2\}'| dt \leq \\ & \leq \mathfrak{a}_1 n^2 \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Сопоставляя (3.19) и (3.20), получим

$$|R_{n,N}| \leq \mathfrak{a}_1\delta_N n^2 \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt. \quad (3.21)$$

Кроме того, из (3.17) и (3.21) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt \leq \\ & \leq 1 + \mathfrak{x}_1 \delta_N n^2 \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Если теперь $\mathfrak{x}_1 \delta_N n^2 < 1$, то из (3.22) получаем

$$\int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt \leq \frac{1}{1 - \mathfrak{x}_1 \delta_N n^2}. \quad (3.23)$$

А теперь из (3.21) и (3.23) непосредственно следует оценка (3.17). $\triangleright$

Лемма 3.4. Пусть $k_n = k_n(T_n, V_n)$ — старший коэффициент многочлена $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t)$, а λ_n — старший коэффициент многочлена Якоби $\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$. Тогда

$$\frac{1}{1 + c(\alpha, \beta) \delta_N n \ln n} \leq \frac{k_n}{\lambda_n} \leq \frac{1}{(1 - \mathfrak{x}_1 \delta_N n^2)^{1/2}}. \quad (3.24)$$

$\triangleleft$ Легко заметить, что

$$\lambda_n^2 = \frac{1}{\int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt}, \quad (3.25)$$

где $\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$ — многочлен Якоби с единичным старшим коэффициентом. Если $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t)$ — многочлен из последовательности (1.1), то

$$k_n^2 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{N-1} (1-t_j)^\alpha (1+t_j)^\beta (p_n^{\alpha,\beta}(t_j))^2 \Delta t_j}, \quad (3.26)$$

где $p_n^{\alpha,\beta}(t)$ — многочлен из последовательности (1.1) с единичным старшим коэффициентом. Далее, из (3.25) и (3.26) находим, что:

$$\begin{aligned} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2} &= \frac{1}{\lambda_n^2 \sum_{j=0}^{N-1} (1-t_j)^\alpha (1+t_j)^\beta (p_n^{\alpha,\beta}(t_j))^2 \Delta t_j} \geq \\ &\geq \frac{1}{\sum_{j=0}^{N-1} (1-t_j)^\alpha (1+t_j)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t_j))^2 \Delta t_j}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Последнюю сумму в неравенстве (3.27) представим в виде

$$\sum_{j=0}^{N-1} = \sum_{-1 \leq t_j \leq t_1^*} + \sum_{t_1^* \leq t_j \leq t_2^*} + \sum_{t_2^* \leq t_j \leq 1} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \quad (3.28)$$

Оценим σ_1 . В силу весовой оценки (2.3) мы имеем

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{-1 \leq t_j \leq t_1^*} (1-t_j)^\alpha (1+t_j)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t_j))^2 \Delta t_j \leq \\ &\leq c(\alpha, \beta) n^{2\beta+1} \sum_{-1 \leq t_j \leq t_1^*} (1+t_j)^\beta \leq c(\alpha, \beta) n^{-1}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Аналогичную оценку допускает и σ_3 .

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \sum_{t_2^* \leq t_j \leq 1} (1-t_j)^\alpha (1+t_j)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t_j))^2 \Delta t_j \leq \\ &\leq c(\alpha, \beta) n^{2\alpha+1} \sum_{t_2^* \leq t_j \leq 1} (1-t_j)^\alpha \leq c(\alpha, \beta) n^{-1}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Сопоставляя (3.27)–(3.30) и (3.8)–(3.9) имеем

$$\frac{k_n^2}{\lambda_n^2} \geq \frac{1}{1 + c(\alpha, \beta) \delta_N n \ln n}. \quad (3.31)$$

Отсюда, в свою очередь, следует левая часть неравенства (3.24). Для доказательства правой части этого неравенства, воспользуемся интегральным неравенством Коши—Буняковского. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{k_n}{\lambda_n} &= \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t) \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) dt \leq \\ &\leq \left(\int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt \right)^{1/2} \leq \frac{1}{(1 - \alpha_1 \delta_N n^2)^{1/2}}. \triangleright \end{aligned}$$

4. Асимптотические свойства многочленов $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t)$

Здесь мы получим асимптотическую формулу для многочленов $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t)$ ортонормированных на T_N в смысле (1.2).

Теорема 4.1. Пусть α и β — целые неотрицательные числа, $0 < a < \mathfrak{a}_1^{-1/2}$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t) = \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) + v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t), \quad (4.1)$$

для остаточного члена $v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ которой при $1 \leq n \leq a\delta_N^{-1/2}$ справедлива оценка

$$|v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)| \leq c(\alpha, \beta, a) \delta_N^{1/2} n^{3/2} \left[\sqrt{1-t} + \frac{1}{n} \right]^{-\alpha-1/2} \left[\sqrt{1+t} + \frac{1}{n} \right]^{-\beta-1/2}. \quad (4.2)$$

◁ Оценим следующий интеграл

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \left\{ v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right\}^2 dt = \\ & = \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \left\{ \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) - \hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t) \right\}^2 dt = \\ & = \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt - 2 \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) \hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t) dt + \\ & + \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta (\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t))^2 dt = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$I_1 = 1, \quad I_2 = -2 \frac{k_n}{\lambda_n}, \quad I_3 = 1 + \frac{\mathfrak{a}_1 \delta_N n^2}{1 - \mathfrak{a}_1 \delta_N n^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \left\{ v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right\}^2 dt \leq \\ & \leq \frac{c(\alpha, \beta) n \delta_N \ln(n+1)}{1 + c(\alpha, \beta) n \delta_N \ln(n+1)} + \frac{\mathfrak{a}_1 \delta_N n^2}{1 - \mathfrak{a}_1 \delta_N n^2} < \mathfrak{a}_1 \delta_N n^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из неравенства (4.3), используя теорему 7.71.1 [2], легко получить утверждение теоремы 4.1. $\triangleright$

Сопоставляя (4.1), (4.2) с (2.3), мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.2. Пусть α и β — целые неотрицательные числа, $1 \leq n \leq a \delta_N^{-\frac{1}{2}}$, $0 < a < \mathfrak{a}_1^{-1/2}$, $-1 \leq t \leq 1$. Тогда существует постоянная $c(\alpha, \beta, a) > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} |\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(t)| & \leq c(\alpha, \beta, a) \left(\delta_N^{1/2} n^{3/2} + 1 \right) \times \\ & \times \left[\sqrt{1-t} + \frac{1}{n} \right]^{-\alpha-1/2} \left[\sqrt{1+t} + \frac{1}{n} \right]^{-\beta-1/2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Литература

1. Даугавет И. К., Рафальсон С. З. О некоторых неравенствах для алгебраических многочленов // Вестник Ленинградского ун-та.—Л.: Изд-во Лен-о ун-та, 1974.—Т. 19.—С. 18–24.
2. Сеге Г. Ортогональные многочлены.—М.: Физматгиз, 1962.—500 с.
3. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены.—М.: Наука, 1979.—416 с.
4. Конягин С. В. О неравенстве В. А. Маркова для многочленов в метрике L // Тр. Мат. ин-та АН СССР.—1980.—Т. 145.—С. 117–125.
5. Шарापудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения.—Махачкала: ДНЦ РАН, 2004.—276 с.

Нурмагомедов Алим Алаутдинович
Южный математический институт ВНЦ РАН
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: alimn@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ
ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ
СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ
В АНИЗОТРОПНОМ ГРУНТЕ¹

В. Ф. Пивень

Ставятся основные граничные задачи стационарной плоскопараллельной фильтрации в анизотропном грунте, тензор проницаемости которого, вообще говоря, не обладает симметрией. В случае канонических границ (прямая, эллипс) решения задач получены в конечном виде. Эти задачи являются математическими моделями задач практики разработки нефтеносных (водоносных) пластов грунта сложной геологической структуры.

Ставятся основные граничные задачи стационарной плоскопараллельной фильтрации в анизотропном грунте, полагая, в отличие от [1], что грунт не является ортотропным и характеризуется тензором проницаемостей общего вида. В случае фильтрации в анизотропном и кусочно-анизотропном однородном грунте с каноническими границами (прямая, эллипс) решения задач получены в конечном виде. Эти задачи являются математическими моделями задач практики разработки нефтеносных (водоносных) пластов грунта сложной геологической структуры.

1. Согласно [1, 2] плоскопараллельную стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости в недеформируемом грунте с тензором проницаемости $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$ описываем обобщенным потенциалом φ и функцией тока ψ , которые как функции декартовых координат x, y удовлетворяют в области $\mathcal{D}$ (за исключением особых точек течения) эллиптической системе уравнений

$$K_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad K_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.1)$$

Причем коэффициенты K_{ij} , $i, j = 1, 2$, вообще говоря зависят от координат x, y (анизотропный грунт может быть неоднородным) и

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-96303.

в силу эллиптичности (1.1) удовлетворяют условиям

$$K_{11} > 0, \quad \mathcal{D}(K_s) = K_{11}K_{22} - \left(\frac{K_{12} + K_{21}}{2} \right)^2 > 0,$$

где $\mathcal{D}(K_s) \equiv \left| \frac{K_{ij} + K_{ji}}{2} \right|$ — определитель симметричной части $K_s = \frac{K_{ij} + K_{ji}}{2}$ тензора $K = (K_{ij})$.

Уравнения (1.1) записаны в безразмерных величинах [3]. Первое и второе уравнения определяют v_x и v_y составляющие вектора скорости фильтрации $\vec{v} = (v_x, v_y)$.

Совершим неособое преобразование координат

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad (1.2)$$

для которого якобиан $J = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0$ и $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ — хотя бы один раз непрерывно дифференцируемые в области $\mathcal{D}$ функции x, y .

Согласно [2], если $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений типа Бельтрами

$$\begin{aligned} K_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{K_{12} + K_{11}}{2} \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \sqrt{\mathcal{D}(K_s)} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{K_{12} + K_{21}}{2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + K_{22} \frac{\partial \xi}{\partial y} &= -\sqrt{\mathcal{D}(K_s)} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

то в переменных ξ, η система уравнений (1.1) принимает канонический вид

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{D}(K_s)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \sqrt{\mathcal{D}(K_a)} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \\ -\sqrt{\mathcal{D}(K_a)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \sqrt{\mathcal{D}(K_s)} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\mathcal{D}(K_a) = \left| \frac{K_{ij} - K_{ji}}{2} \right| = \left(\frac{K_{12} - K_{21}}{2} \right)^2$ — определитель антисимметричной части тензора проницаемости $K = (K_{ij})$.

Систему уравнений (1.4) можно трактовать как уравнения плоскопараллельной фильтрации в анизотропном, вообще говоря, неоднородном грунте с тензором проницаемости канонического вида

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{D}(K_s)} & \sqrt{\mathcal{D}(K_a)} \\ -\sqrt{\mathcal{D}(K_a)} & \sqrt{\mathcal{D}(K_s)} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

с компонентами $\tilde{K}_{11} = \tilde{K}_{22} = \sqrt{\mathcal{D}(K_s)}$ и $\tilde{K}_{12} = -\tilde{K}_{21} = \sqrt{\mathcal{D}(K_a)}$, зависящими от координат (ξ, η) (компоненты тензора $K = (K_{ij})$ зависят от ξ, η).

Для описания течения введем две комплексные плоскости: физическую плоскость $z = x + iy$ и вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$, в которых воспользуемся комплексными операторами дифференцирования

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, & 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}, \\ 2\frac{\partial}{\partial \zeta} &= \frac{\partial}{\partial \xi} - i\frac{\partial}{\partial \eta}, & 2\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} &= \frac{\partial}{\partial \xi} + i\frac{\partial}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тогда преобразования (1.2) и уравнения Бельтрами (1.3) запишем в комплексной форме

$$\zeta = \zeta(z) \quad \left(J = \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right|^2 \neq 0 \right), \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} - \mu(z) \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad \left(\mu(z) = \frac{K_{22} - K_{11} - i(K_{12} + K_{21})}{K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{\mathcal{D}(K_s)}} \right). \quad (1.8)$$

В плоскости ζ введем комплексный потенциал течения

$$W = \varphi + i\frac{\psi}{\mathcal{K}} \quad (\mathcal{K} = \sqrt{\mathcal{D}(K_s)} - i\sqrt{\mathcal{D}(K_a)}), \quad (1.9)$$

который как функция ζ удовлетворяет следующему из (1.4) уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} + A(\zeta)(W - \bar{W}) = 0 \quad \left(A(\zeta) = \frac{\overline{\mathcal{K}}}{\mathcal{K} + \overline{\mathcal{K}}} \frac{\partial \ln \mathcal{K}}{\partial \bar{\zeta}} \right), \quad (1.10)$$

где $\overline{\mathcal{K}} = \sqrt{\mathcal{D}(K_s)} + i\sqrt{\mathcal{D}(K_a)}$.

Комплексный потенциал (1.9), удовлетворяющий уравнению (1.10) (за исключением его особых точек в плоскости ζ), описывает в плоскости ζ течение в анизотропном, вообще говоря, неоднородном грунте, который характеризуется тензором проницаемости (1.5) или, что то же самое, комплексным коэффициентом проницаемости $\mathcal{K}$.

Таким образом, если известно однолистное решение (гомеоморфизм) $\zeta(z)$ уравнений Бельтрами (1.8) (или системы уравнений (1.3)), то отыскивая комплексный потенциал $W(\zeta)$, удовлетворяющий уравнению (1.10) (функции $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ удовлетворяют системе уравнений (1.4)) находим согласно (1.9) искомые обобщенный потенциал $\varphi = \varphi(x, y)$ и функцию тока $\psi = \psi(x, y)$:

$$\varphi = \frac{\mathcal{K}W + \overline{\mathcal{K}W}}{\mathcal{K} + \overline{\mathcal{K}}}, \quad \psi = \frac{|\mathcal{K}|^2(W - \overline{W})}{i(\mathcal{K} + \overline{\mathcal{K}})} \quad (1.11)$$

($W = W[\zeta(x, y)] = W(x, y)$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}[\zeta(x, y)] = \mathcal{K}(x, y)$), которые являются решениями уравнений (1.1). Следовательно, исследование плоскопараллельного течения в анизотропном грунте сводится к нахождению гомеоморфизма $\zeta(z)$ и комплексного потенциала $W(\zeta)$.

2. В статье [1] указан метод решения двумерных (в том числе плоскопараллельных) граничных задач стационарной фильтрации в анизотропной пористой среде (грунте). Согласно этому методу сформулированные на физической плоскости z граничные условия запишем, используя гомеоморфизм $\zeta(z)$, на вспомогательной плоскости ζ для комплексного потенциала $W(\zeta)$ и поставим для него основные задачи фильтрации. Ограничимся случаем, когда анизотропный грунт однородный (компоненты тензора проницаемости K_{ij} , $i, j = 1, 2$ — постоянные). В этом случае коэффициенты μ и $\mathcal{K}$ — комплексные постоянные. Следовательно, уравнение (1.8) имеет гомеоморфное решение [1]

$$\zeta = z + \mu\bar{z} \quad (|\mu| \neq 1), \quad (2.1)$$

представляющее собой аффинное (линейное) преобразование всей плоскости z на всю плоскость ζ . Так как якобиан преобразования (2.1) $J = 1 - |\mu|^2$, то в зависимости от значения $|\mu|$ это преобразование сохраняет направление обхода кривой при переходе из плоскости z в плоскость ζ , если $|\mu| < 1$, меняет его на противоположное, когда $|\mu| > 1$ и является вырожденным при $|\mu| = 1$. Из (2.1) и комплексно сопряженного ему равенства $\bar{\zeta} = \bar{z} + \bar{\mu}z$ следует обратное преобразование

$$\zeta = \frac{z - \mu\bar{\zeta}}{1 - |\mu|^2} \quad (|\mu| \neq 1). \quad (2.1')$$

Поскольку коэффициент $\mathcal{K}$ — комплексная постоянная, то коэффициент уравнения (1.10) $A = 0$ и, следовательно, комплексный по-

тенциал $W(\zeta)$ — аналитическая функция всюду в плоскости ζ за исключением его особых точек.

Следуя [1], укажем на плоскости z граничные условия основных задач фильтрации, моделируя границы простыми (без самопересечений) гладкими кривыми. Если на границе σ_1 задано давление $p_0(z)$, то обобщенный потенциал $\varphi(z)$ удовлетворяет на ней условию

$$\varphi^+(z) = f_0(z) \quad (f_0(z) = -[p_0(z) + \rho\Pi(z)]/\mu), \quad z \in \sigma_1, \quad (2.2)$$

где $\Pi(z)$ — потенциал массовой силы, μ и ρ — вязкость и плотность жидкости. Здесь и далее «+» (или «-») означает предельное значение функции при подходе к границе со стороны (противоположной стороны) нормали к ней. В частности, если фильтрация напорная (градиент давления p велик: $|\nabla p| \gg \rho|\nabla\Pi|$) и давление p_0 постоянно, то в условии (2.2) $f_0(z) = \text{const}$.

Если граница σ_2 непроницаема для жидкости, то она является линией тока:

$$\psi^+(z) = \text{const}, \quad z \in \sigma_2. \quad (2.3)$$

Если обобщенный потенциал $\varphi(z)$, а значит и сопряженная согласно уравнений (1.1) функция тока $\psi(z)$, не имеют сингулярностей в бесконечности, то потребуем выполнения условий регулярности [4], которые для $\varphi(z)$ имеют вид

$$\varphi(z) = O(|z|^{-1}) \quad |K \cdot \nabla \varphi(z)| = O(|z|^{-2}) \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Условия (2.4) означают, что $\varphi(z)$ и поток скорости $\vec{v} = K \cdot \nabla \varphi(z)$ через произвольный замкнутый контур стремятся к нулю при $|z| \rightarrow \infty$.

Пусть грунт кусочно-анизотропный, Γ — граница сопряжения областей $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$, тензоры проницаемости грунта в которых K_1 и K_2 , причем $K_\nu = k_\nu K$ ($K = (K_{ij})$, $k_\nu > 0$ — постоянные, $\nu = 1, 2$), и течение описывают обобщенные потенциалы, функции тока $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$. На этой границе имеем условия непрерывности давления и расхода жидкости (условия сопряжения):

$$\varphi_1^+(z) = \varphi_2^-(z), \quad \psi_1^+(z) = \psi_2^-(z), \quad z \in \Gamma. \quad (2.5)$$

Условия (2.2)–(2.5) запишем на плоскости ζ для комплексного потенциала $W(\zeta)$. Для определенности полагаем проницаемость $K = (K_{ij})$ таковой, что $|\mu| < 1$. В этом случае при переходе на

плоскость ζ направление обхода границ и направление орта нормали к ним не меняется. Учтем ковариантность этих условий относительно преобразований (2.1) и (2.1'). Так как согласно (2.1') $\varphi(z) = \varphi[z(\zeta)] = \varphi(\zeta)$, $\psi(z) = \psi[z(\zeta)] = \psi(\zeta)$, $f_0(z) = f_0[z(\zeta)] = f_0(\zeta)$, то на основании формул (1.11) имеем условия для $W(\zeta)$ на границах σ'_1 , σ'_2 (σ'_1 и σ'_2 — образы границ σ_1 и σ_2 при преобразовании (2.1)):

$$\frac{[\mathcal{K}W(\zeta) + \overline{\mathcal{K}W(\zeta)}]^+}{\mathcal{K} + \overline{\mathcal{K}}} = f_0(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_1, \quad (2.6)$$

$$\frac{|\mathcal{K}|^2[W(\zeta) - \overline{W(\zeta)}]^+}{\mathcal{K} + \overline{\mathcal{K}}} = \text{const}, \quad \zeta \in \sigma'_2 \quad (2.7)$$

и в бесконечности

$$\begin{aligned} \text{Re}[\mathcal{K}W(\zeta)] &= O(|\zeta|^{-1}), \\ |\nabla \text{Re}[\mathcal{K}W(\zeta)]| &= O(|\zeta|^{-2}) \quad \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Чтобы записать условия (2.5) на плоскости ζ , введем комплексные потенциалы $W_1(\zeta)$ и $W_2(\zeta)$ вида

$$W_\nu(\zeta) = \varphi_\nu(\zeta) + i \frac{\psi_\nu(\zeta)}{\mathcal{K}_\nu} \quad \nu = 1, 2, \quad (2.9)$$

которые описывают течение в областях $\mathcal{D}'_1$ и $\mathcal{D}'_2$ (являющихся согласно преобразованию (2.1) образами областей $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ с грунтом проницаемости $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, причем $\mathcal{K}_\nu = k_\nu \mathcal{K}$, $\nu = 1, 2$). Учитывая (1.11), имеем условия на границе Γ' сопряжения областей $\mathcal{D}'_1$ и $\mathcal{D}'_2$:

$$W_1^+(\zeta) - \lambda W_1^+(\zeta) = (1 + \lambda)W_2^-(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma', \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{(k_1 - k_2)\overline{\mathcal{K}}}{k_1\overline{\mathcal{K}} + k_2\mathcal{K}} = \\ &= \frac{\lambda_k \left[\mathcal{D}(K_s) + \lambda_k \mathcal{D}(K_a) + i(1 - \lambda_k) \sqrt{\mathcal{D}(K_s)\mathcal{D}(K_a)} \right]}{\mathcal{D}(K_s) + \lambda_k^2 \mathcal{D}(K_a)}, \end{aligned}$$

$\lambda_k = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ ($\lambda_k \in (-1, 1)$), причем $|\lambda| < 1$.

Таким образом, следуя [5], имеем для комплексного потенциала $W(\zeta)$ основные задачи. Первая и вторая краевые задачи состоят в

отыскании комплексного потенциала $W(\zeta)$, удовлетворяющего условиям (2.2) и (2.3). Задача сопряжения заключается в нахождении комплексных потенциалов $W_1(\zeta)$ и $W_2(\zeta)$, удовлетворяющих условию (2.10). Если область течения содержит бесконечно удаленную точку, то комплексные потенциалы этих задач должны также удовлетворять условиям (2.8). Искомые комплексные потенциалы в этих задачах — аналитические функции всюду в области течения за исключением их особых точек, моделирующих источники (стоки) течения.

Течение обусловлено источниками (стоками). Учтем их и введем на плоскости ζ комплексный потенциал $W_0(\zeta)$ ($\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ — обобщенный потенциал и функция тока) в виде

$$W_0(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + i \frac{\varphi_0(\zeta)}{\mathcal{K}}. \quad (2.11)$$

Он описывает течение на всей плоскости ζ и его особые точки моделируют заданные источники (стоки) течения.

Пусть область $\mathcal{D}'$ течения ограничена линиями σ'_1 или σ'_2 , на которых выполняются условия (2.6) и (2.7).

Учтем особые точки комплексного потенциала $W_0(\zeta)$ и представим искомый комплексный потенциал $W(\zeta)$ в виде

$$W(\zeta) = W_0(\zeta) + W_*(\zeta), \quad \zeta \in \mathcal{D}'. \quad (2.12)$$

Здесь

$$W_*(\zeta) = \varphi_*(\zeta) + i \frac{\psi_*(\zeta)}{\mathcal{K}}$$

комплексный потенциал ($\varphi_*(\zeta)$ и $\psi_*(\zeta)$ — обобщенный потенциал и функция тока) возмущений, обусловленных наличием границы σ'_1 или σ'_2 .

Учитывая (2.12) и $W_0^+(\zeta) = W_0(\zeta)$, $\zeta \in \sigma'_1$ или $\zeta \in \sigma'_2$, запишем для $W_*(\zeta)$:

$$\frac{\mathcal{K} W_*^+(\zeta) + \overline{\mathcal{K}} \overline{W_*^+}(\zeta)}{\mathcal{K} + \overline{\mathcal{K}}} = f_0(\zeta) - \frac{\mathcal{K} W_0(\zeta) + \overline{\mathcal{K}} \overline{W_0}(\zeta)}{\mathcal{K} + \overline{\mathcal{K}}}, \quad \zeta \in \sigma'_1, \quad (2.13)$$

$$\frac{|\mathcal{K}|^2 (W_*^+(\zeta) - \overline{W_*^+}(\zeta))}{i(\mathcal{K} + \overline{\mathcal{K}})} = \text{const} - \frac{|\mathcal{K}|^2 (W_0(\zeta) - \overline{W_0}(\zeta))}{i(\mathcal{K} + \overline{\mathcal{K}})}, \quad \zeta \in \sigma'_2. \quad (2.14)$$

В случае напорной фильтрации ($|\nabla p| \gg \rho\Pi$), когда давление p_0 постоянно, то, как отмечалось выше, можно положить $f_0(\zeta) = \text{const}$ и не нарушая общности суждений выбрать $\text{const} = 0$ ($f_0(\zeta) = 0$). Выберем в условии (2.14) $\text{const} = 0$. Тогда условия (2.13) и (2.14) запишем

$$\mathcal{K}W_*^+(\zeta) + \overline{\mathcal{K}W_*}(\zeta) = -\mathcal{K}W_0(\zeta) - \overline{\mathcal{K}W_0}(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_1, \quad (2.13')$$

$$W_*^+(\zeta) - \overline{W_*}^+(\zeta) = -W_0(\zeta) + \overline{W_0}(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_2. \quad (2.14')$$

Комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta)$ не имеет особых точек в бесконечности, поскольку заданные особые точки течения (в том числе и в бесконечности) входят в комплексный потенциал $W_0(\zeta)$. Поэтому потребуем, чтобы $W_*(\zeta)$ удовлетворял в бесконечности условиям вида (2.8), т. е.

$$\begin{aligned} \text{Re}[\mathcal{K}W_*(\zeta)] &= O(|\zeta|^{-1}), \\ |\nabla \text{Re}[\mathcal{K}W_*(\zeta)]| &= O(|\zeta|^{-2}) \quad \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Если грунт кусочно-анизотропен, то комплексные потенциалы течений в областях $\mathcal{D}'_1$ и $\mathcal{D}'_2$ представим аналогично (2.12) в виде

$$W_\nu(\zeta) = W_0(\zeta) + W_*(\zeta), \quad \zeta \in \mathcal{D}_\nu, \quad \nu = 1, 2. \quad (2.16)$$

Тогда условие (2.10) для $W_*(\zeta)$ запишем

$$W_*^+(\zeta) - \lambda \overline{W_*}^+(\zeta) - (1 - \lambda)W_*^-(\zeta) = -\lambda[W_0(\zeta) - \overline{W_0}(\zeta)], \quad \zeta \in \Gamma'. \quad (2.17)$$

Таким образом, имеем основные задачи фильтрации для комплексного потенциала возмущений $W_*(\zeta)$, которая является аналитической функцией в области течения. Первая и вторая краевые задачи состоят в отыскании $W_*(\zeta)$, удовлетворяющие условиям (2.13) и (2.14) (или, в частности, (2.13') и (2.14')). Задача сопряжения заключается в нахождении $W_*(\zeta)$, удовлетворяющего условию (2.17). Если область течения содержит бесконечно удаленную точку, то $W_*(\zeta)$ должен удовлетворять также условиям (2.15).

3. Решение поставленных задач удастся найти в конечном виде для случаев, когда границами в физической плоскости z являются прямая и эллипс. Пусть на плоскости z границей является прямая (θ_0 — угол наклона прямой к оси Ox):

$$z = e^{i\theta_0} \quad (y = x \operatorname{tg} \theta_0). \quad (3.1)$$

Эта прямая при переходе на плоскость ζ преобразуется согласно (2.1) в прямую (ϑ_0 — угол наклона прямой к оси $O\xi$):

$$\zeta = e^{i\vartheta_0} \quad (\eta = \xi \operatorname{tg} \vartheta_0), \quad (3.2)$$

причем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta_0 &= \frac{b + (1-a) \operatorname{tg} \theta_0}{1 + a + b \operatorname{tg} \theta_0}, \\ a = \operatorname{Re} \mu &= \frac{K_{22} - K_{11}}{K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{\mathcal{D}(K_s)}}, \\ b = \operatorname{Im} \mu &= -\frac{K_{12} + K_{21}}{K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{\mathcal{D}(K_s)}}. \end{aligned}$$

Свяжем с прямой (3.2) систему координат $O_{\xi_1 \eta_1}$. Перейдем на плоскость $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$, используя конформное преобразование поворота на угол ϑ_0 :

$$\zeta_1 = \zeta e^{-i\vartheta_0} \quad (3.3)$$

и запишем уравнение прямой (3.2) в координатах ξ_1, η_1 : $\xi_1 \in (-\infty, \infty)$, $\eta_1 = 0$ (ось абсцисс плоскости ζ_1).

Решение задачи сопряжения представляет

Теорема 1 (фильтрационная теорема сопряжения на прямой).

Пусть течение в анизотропном однородном грунте проницаемости $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$, $\mathcal{D}(K) = |K_{ij}| > 0$ описывают на плоскости z обобщенный потенциал $\varphi_0(z)$ и функция тока $\psi_0(z)$ которые имеют особые точки всюду в этой плоскости за исключением прямой (3.1), делящей эту плоскость на части (области) $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$. Это течение описывает на комплексной плоскости ζ комплексный потенциал $W_0(\zeta)$ вида (2.11), особые точки которого располагаются в частях (областях) $\mathcal{D}'_1$ и $\mathcal{D}'_2$, сопрягающихся вдоль прямой (3.2). Полагаем, что $W_0(\zeta)$ можно представить в виде

$$W_0(\zeta) = W_{01}(\zeta) + W_{02}(\zeta), \quad (3.4)$$

где функции $W_{01}(\zeta)$ и $W_{02}(\zeta)$ имеют особые точки соответственно в $\mathcal{D}'_1$ и $\mathcal{D}'_2$. Причем

$$W_0(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}) \quad \text{при} \quad |\zeta| \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Тогда течение в областях $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$, проницаемости грунта в которых K_1 и K_2 ($K_\nu = k_\nu K$, $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$, $k_\nu > 0$ — постоянные,

$\nu = 1, 2$) описывают комплексные потенциалы

$$\begin{aligned} W_1(z) &= W_0(\zeta_1) - \lambda \left[W_{02}(\zeta_1) - \overline{W_{01}(\zeta_1)} \right], \quad z \in \mathcal{D}_1, \\ W_2(z) &= W_0(\zeta_1) + \frac{\lambda(1-\bar{\lambda})}{1-\lambda} \left[W_{01}(\zeta_1) - \overline{W_{02}(\zeta_1)} \right], \quad z \in \mathcal{D}_2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\zeta_1 = (z + \mu\bar{z})e^{-i\vartheta_0}$.

По условию теоремы $W_{01}(\zeta)$ и $W_{02}(\zeta)$ имеют особые точки в областях $\mathcal{D}'_1$ и $\mathcal{D}'_2$ плоскости ζ . Поэтому функции $W_{01}(\zeta)$ и $W_{02}(\zeta)$ являются аналитическими в областях $\mathcal{D}'_2$ и $\mathcal{D}'_1$. В связанной с прямой (3.2) системе координат $O\xi_1\eta_1$ области $\mathcal{D}'_2$ и $\mathcal{D}'_1$ сопрягаются на прямой $\Gamma' : \xi_1 \in (-\infty, \infty), \eta_1 = 0$ (ось абсцисс) и представляют собой верхнюю и нижнюю части плоскости ζ_1 . Точки $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1 \in \mathcal{D}'_1$ и $\bar{\zeta}_1 = \xi_1 - i\eta_1 \in \mathcal{D}'_2$ зеркально симметричны относительно $\Gamma' : \xi \in (-\infty, \infty), \eta_1 = 0$. Аналитические функции $W_{01}(\zeta_1)$, $\zeta_1 \in \mathcal{D}'_2$ и $W_{02}(\zeta_1)$, $\zeta_1 \in \mathcal{D}'_1$ продолжим соответственно в области $\mathcal{D}'_1$ и $\mathcal{D}'_2$. Согласно принципу симметрии получим аналитические функции $\overline{W_{01}(\zeta_1)}$, $\zeta_1 \in \mathcal{D}'_1$ и $\overline{W_{02}(\zeta_1)}$, $\zeta_1 \in \mathcal{D}'_2$. Тогда комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta_1)$ в областях $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$, проницаемости грунта в которых K_1 и K_2 ($K_\nu = k_\nu K$, $\nu = 1, 2$) представим в виде

$$W_*(\zeta_1) = \begin{cases} A \left[W_{02}(\zeta_1) - \overline{W_{01}(\zeta_1)} \right], & \zeta_1 \in \mathcal{D}'_1, \\ B \left[W_{01}(\zeta_1) - \overline{W_{02}(\zeta_1)} \right], & \zeta_1 \in \mathcal{D}'_2. \end{cases} \quad (3.7)$$

Здесь A и B — вообще говоря, комплексные постоянные, которые находим удовлетворяя (3.7) условию (2.17) на границе $\Gamma' : \zeta_1 \in (-\infty, \infty), \eta = 0$. Учитывая (3.4) и $W_{0\nu}^+(\zeta_1) = W_{0\nu}^-(\zeta_1) = W_{0\nu}(\zeta_1)$, $\overline{W_{0\nu}^+(\zeta_1)} = \overline{W_{0\nu}^-(\zeta_1)} = \overline{W_{0\nu}(\zeta_1)}$, $\nu = 1, 2$, $\zeta \in \Gamma'$, имеем равенство

$$\begin{aligned} & [(1 + \bar{A})\lambda - (1 - \lambda)B] [W_{01}(\xi_1, 0) - \overline{W_{02}(\xi_1, 0)}] - \\ & -(A + \lambda) [\overline{W_{01}(\xi_1, 0)} - W_{02}(\xi_1, 0)] = 0, \xi_1 \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Это равенство должно выполняться во всех точках границы $\Gamma' : \xi_1 \in (-\infty, \infty), \eta_1 = 0$ при всех значениях параметра $|\lambda| < 1$. В силу непрерывности $W_{0\nu}(\zeta_1)$, $\nu = 1, 2$ на этой границе $W_{01}(\xi_1, 0) - \overline{W_{02}(\xi_1, 0)} \neq 0$, $\overline{W_{01}(\xi_1, 0)} - W_{02}(\xi_1, 0) \neq 0$, $\xi_1 \in (-\infty, \infty)$ это равенство обратиться в тождество, если постоянные

$$A = -\lambda, \quad B = \lambda(1 - \bar{\lambda}/(1 - \lambda)).$$

Тогда комплексный потенциал возмущений (3.7) принимает вид

$$W_*(\zeta_1) = \begin{cases} -\lambda \left[W_{02}(\zeta_1) - \overline{W_{01}(\bar{\zeta}_1)} \right], & \zeta_1 \in \mathcal{D}'_1, \\ \frac{\lambda(1-\bar{\lambda})}{(1-\lambda)} \left[W_{01}(\zeta_1) - \overline{W_{02}(\bar{\zeta}_1)} \right], & \zeta_1 \in \mathcal{D}'_2. \end{cases} \quad (3.8)$$

По условию (3.5) $W_0(\zeta_1) = O(|\zeta_1|^{-1})$ при $|\zeta_1| \rightarrow \infty$. Поэтому комплексный потенциал (3.8) удовлетворяет условиям (2.15). Подставляя комплексный потенциал (3.8) в (2.16) и учитывая (2.1), (3.3), имеем искомые комплексные потенциалы (3.6). $\triangleright$

Решение первой и второй краевой задачи выражает

Теорема 2. Пусть течение в анизотропном однородном грунте проницаемости $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$, $\mathcal{D}(K) = |K_{ij}| > 0$ описывают на плоскости z обобщенный потенциал $\varphi_0(z)$ и функция тока $\psi_0(z)$, особые точки которых располагаются в области $\mathcal{D}$, ограниченной прямой (3.1). Это течение описывает на плоскости ζ комплексный потенциал $W_0(\zeta)$, особые точки которого располагаются в области $\mathcal{D}'$, ограниченной прямой (3.2), причем

$$W_0(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}) \quad \text{при} \quad |\zeta| \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Тогда течение в области $\mathcal{D}$, проницаемость грунта в которой та же $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$ и эта область ограничена прямой (3.1), являющейся границей водоема σ_1 или непроницаемой границей σ_2 , описывает комплексный потенциал

$$W(z) = W_0(\zeta_1) - \frac{\overline{\mathcal{K}}}{\mathcal{K}} \overline{W_0(\bar{\zeta}_1)}, \quad z \in \mathcal{D} \quad (3.10)$$

или

$$W(z) = W_0(\zeta_1) + \overline{W_0(\bar{\zeta}_1)}, \quad z \in \mathcal{D}, \quad (3.11)$$

где

$$\zeta_1 = (z + \mu \bar{z})e^{-i\vartheta_0}, \quad \mathcal{K} = \sqrt{\mathcal{D}(K_s)} - i\sqrt{\mathcal{D}(K_a)}.$$

$\triangleleft$ Функция $\overline{W_0(\bar{\zeta}_1)}$, $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1 \in \mathcal{D}'$ аналитическая всюду в области $\mathcal{D}'$. Комплексные потенциалы возмущений $W_*(\zeta_1) = -\frac{\overline{\mathcal{K}}}{\mathcal{K}} \overline{W_0(\bar{\zeta}_1)}$ и $W_*(\zeta_1) = \overline{W_0(\bar{\zeta}_1)}$ удовлетворяют условию (2.13') на $\sigma'_1 : \xi_1 \in (-\infty, \infty)$, $\eta_1 = 0$ и условию (2.14') на $\sigma'_2 : \xi_1 \in (-\infty, \infty)$, $\eta_1 = 0$, а также при учете (3.9) условиям в бесконечности (2.15). $\triangleright$

Пусть теперь на плоскости z границей является эллипс (α, β — его полуоси, $\theta \in [0, 2\pi]$):

$$z = \frac{\alpha + \beta}{2} e^{i\theta} + \frac{\alpha - \beta}{2} e^{-i\theta} \quad (x = \alpha \cos \theta, \quad y = \beta \sin \theta). \quad (3.12)$$

Этому эллипсу согласно преобразованию (2.1) соответствует на плоскости ζ окружность единичного радиуса ($\vartheta \in [0, 2\pi]$):

$$\zeta = e^{i\vartheta} \quad (\xi = \cos \vartheta, \quad \eta = \sin \vartheta), \quad (3.13)$$

причем

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{b\alpha + (1-a)\beta \operatorname{tg} \theta}{(1+a)\alpha + b\beta \operatorname{tg} \theta}.$$

При $|\mu| < 1$ внешняя $\mathcal{D}_1$ и внутренняя $\mathcal{D}_2$ (по отношению к эллипсу) части плоскости z переходит во внешнюю $\mathcal{D}'_1$ и внутреннюю $\mathcal{D}'_2$ (по отношению к окружности) части плоскости ζ .

Решение задачи сопряжения выражает

Теорема 3 (теорема сопряжения на эллипсе). Пусть течение в анизотропном однородном грунте проницаемости $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$ $\mathcal{D}(K) = |K_{i,j}| > 0$ описывают на плоскости z обобщенный потенциал $\varphi_0(z)$ и функция тока $\psi_0(z)$, которые имеют особые точки всюду в этой плоскости за исключением эллипса (3.12), делящей эту плоскость на части (области) $\mathcal{D}_1$ (вне эллипса) и $\mathcal{D}_2$ (внутри эллипса). На плоскости ζ это течение описывает комплексный потенциал $W_0(\zeta)$ вида (2.11), особые точки которого располагаются при $|\mu| < 1$ в частях (областях) $\mathcal{D}'_1$ (вне окружности) и $\mathcal{D}'_2$ (внутри окружности), сопрягающихся на окружности (3.13). Полагаем, что $W_0(\zeta)$ можно представить в виде

$$W_0(\zeta) = W_{01}(\zeta) + W_{02}(\zeta), \quad (3.14)$$

где функции $W_{01}(\zeta)$ и $W_{02}(\zeta)$ имеют особые точки в областях $\mathcal{D}'_1$ и $\mathcal{D}'_2$ и удовлетворяют условиям

$$W_{01}(\zeta) = O(|\zeta|) \text{ при } |\zeta| \rightarrow 0, \quad W_{02} = O(|\zeta|^{-1}) \text{ при } |\zeta| \rightarrow \infty. \quad (3.15)$$

Тогда течения в областях $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$, проницаемости грунта в которых K_1 и K_2 ($K_\nu = k_\nu K$, $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$, $k_\nu > 0$ — постоянные,

$\nu = 1, 2$) описывают комплексные потенциалы

$$\begin{aligned} W_1(z) &= W_0(\zeta) - \lambda \left[W_{02}(\zeta) - \overline{W_{01}\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \right], \quad z \in \mathcal{D}_1, \\ W_2(z) &= W_0(\zeta) + \frac{\lambda(1-\bar{\lambda})}{1-\lambda} \left[W_{01}(\zeta) - \overline{W_{02}\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \right], \quad z \in \mathcal{D}_2, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\zeta = z + \mu\bar{z}$.

◁ По условию теоремы функции $W_{01}(\zeta)$ и $W_{02}(\zeta)$ имеют особые точки в областях $\mathcal{D}'_2$ и $\mathcal{D}'_1$ (вне и внутри окружности единичного радиуса). Поэтому функции $W_{01}(\zeta)$ и $W_{02}(\zeta)$ являются аналитическими в областях $\mathcal{D}'_1$ и $\mathcal{D}'_2$. К этим функциям применим принцип симметрии (преобразование инверсии) относительно окружности $\Gamma' : |\zeta| = 1$. Учитывая, что точке $\zeta \in \mathcal{D}'_1$ соответствует точка $1/\bar{\zeta} \in \mathcal{D}'_2$, продолжим аналитические функции $W_{01}(\zeta)$, $\zeta \in \mathcal{D}'_2$ и $W_{02}(\zeta)$, $\zeta \in \mathcal{D}'_1$ соответственно в области $\mathcal{D}'_1$ и $\mathcal{D}'_2$. Получим аналитические функции $\overline{W_{01}(1/\bar{\zeta})}$, $\zeta \in \mathcal{D}'_1$ и $\overline{W_{02}(1/\bar{\zeta})}$, $\zeta \in \mathcal{D}'_2$.

Комплексные потенциалы возмущений $W_*(\zeta)$ в областях $\mathcal{D}'_1$ и $\mathcal{D}'_2$, проницаемости грунта в которых K_1 и K_2 ($K_\nu = k_\nu K$, $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$, $k_\nu > 0$ — постоянные, $\nu = 1, 2$) ищем в виде

$$W_*(\zeta) = \begin{cases} A_1 \left[W_{02}(\zeta_1) - \overline{W_{01}\left(\frac{1}{\zeta_1}\right)} \right], & \zeta_1 \in \mathcal{D}'_1, \\ A_2 \left[W_{01}(\zeta_1) - \overline{W_{02}\left(\frac{1}{\zeta_1}\right)} \right], & \zeta_1 \in \mathcal{D}'_2. \end{cases} \quad (3.17)$$

Здесь A_1 и A_2 — комплексные постоянные, которые находим удовлетворяя (3.17) условию (2.5) на окружности $\Gamma' : |\zeta| = 1$. Так как на окружности $\bar{\zeta}\zeta = 1$ и $W_{0\nu}^+(\zeta) = W_{0\nu}^-(\zeta) = W_{0\nu}(\zeta)$, $\overline{W_{0\nu}^+(\zeta)} = \overline{W_{0\nu}^-(\zeta)} = \overline{W_{0\nu}(\zeta)}$, то имеем равенство

$$\begin{aligned} [(1 + \bar{A}_1)\lambda - (1 - \lambda)A_2] [W_{01}(\zeta) - \overline{W_{02}(\zeta)}] - \\ - (A_1 + \lambda) [\overline{W_{01}(\zeta)} - W_{02}(\zeta)] = 0, \quad \zeta \in \Gamma' : |\zeta| = 1. \end{aligned}$$

Поскольку функции $W_{0\nu}(\zeta)$ $\nu = 1, 2$, непрерывны на окружности, то на ней $W_{01}(\zeta) - \overline{W_{02}(\zeta)} \neq 0$, $\overline{W_{01}(\zeta)} - W_{02}(\zeta) \neq 0$. Тогда последнее равенство обратится в тождество, если

$$A_1 = -\lambda, \quad A_2 = \lambda(1 - \bar{\lambda})/(1 - \lambda).$$

Следовательно, комплексные потенциалы возмущений примут вид

$$W_*(\zeta) = \begin{cases} -\lambda \left[W_{02}(\zeta_1) - \overline{W_{01}\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \right], & \zeta_1 \in \mathcal{D}'_1, \\ \frac{\lambda(1-\bar{\lambda})}{1-\lambda} \left[W_{01}(\zeta_1) - \overline{W_{02}\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \right], & \zeta_1 \in \mathcal{D}'_2. \end{cases} \quad (3.18)$$

В силу (3.15) комплексные потенциалы (3.18) удовлетворяют в бесконечности условиям (2.15). Подставляя эти комплексные потенциалы в (2.16) и учитывая преобразование (2.10) имеем искомые комплексные потенциалы (3.16). $\triangleright$

Решение первой и второй краевой задачи в случае эллиптической границы выражает

Теорема 4. Пусть течение в анизотропном однородном грунте проницаемости $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$, $\mathcal{D}(K) = |K_{ij}| > 0$ описывают на плоскости z обобщенный потенциал $\varphi_0(z)$ и функция тока $\psi_0(z)$, особые точки которых располагаются в области $\mathcal{D}$, вне или внутри эллипса (3.12). Это течение описывает на плоскости ζ комплексный потенциал $W_0(\zeta)$, особые точки которого располагаются в области $\mathcal{D}'$, (при $|\mu| < 1$ вне или внутри окружности (3.13)). Причем этот комплексный потенциал удовлетворяет условию

$$W_0(\zeta) = O(|\zeta|) \text{ при } |\zeta| \rightarrow 0, \quad (3.19)$$

когда его особые точки расположены вне окружности, и условию

$$W_0(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}) \text{ при } |\zeta| \rightarrow \infty, \quad (3.20)$$

если его особые точки лежат внутри окружности. Тогда течение в области $\mathcal{D}$ с той же проницаемостью грунта $K = (K_{ij})$ и ограниченной эллипсом (3.12), являющимся границей водоема σ_1 или непроницаемой границей σ_2 , описывает комплексный потенциал

$$W(z) = W_0(\zeta) - \frac{\overline{\mathcal{K}}}{\mathcal{K}} \overline{W_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)}, \quad z \in \mathcal{D} \quad (3.21)$$

или

$$W(z) = W_0(\zeta) + \overline{W_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)}, \quad z \in \mathcal{D}, \quad (3.22)$$

где $\zeta = z + \mu\bar{z}$, $\mathcal{K} = \sqrt{\mathcal{D}(K_s)} - i\sqrt{\mathcal{D}(K_a)}$.

◁ Если $W_0(\zeta)$ имеет особые точки в $\mathcal{D}'_1$ ($|\zeta| > 1$ (или в $\mathcal{D}'_2$ ($|\zeta| < 1$)), то согласно преобразованию инверсии относительно окружности $|\zeta| = 1$ функция $\overline{W_0(1/\bar{\zeta})}$ является аналитической в области $\mathcal{D}'_2$ (или $\mathcal{D}'_1$). Комплексные потенциалы возмущений $W_*(\zeta) = -\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}'} \overline{W_0\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}$ и $W_*(\zeta) = W_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ удовлетворяют условиям (2.13') на $\sigma_1 : |\zeta| = 1$ и (2.14') на $\sigma_2 : |\zeta| = 1$ и в силу условий (3.19) и (3.20) отвечают условиям в бесконечности (2.15). ▷

Используя формулы (1.11), из полученных комплексных потенциалов течений нетрудно найти обобщенные потенциалы и функции тока этих течений. Эти комплексные потенциалы принимают известный вид [1] в частном случае ортотропного грунта ($K_{12} = K_{21}$).

Полученные в конечном виде решения задач являются математическими моделями задач практики разработки нефтеносных (водоносных) пластов грунта сложной геологической структуры и могут служить в качестве тестовых при исследовании задач с более сложными границами.

Литература

1. Пивень В. Ф. Решение граничных задач двумерной фильтрации в анизотропнонеоднородном слое пористой среды // Тр. международных школ-семинаров «МДОЗМФ».—Орел: Изд-во ГОУ ВПО «Орловский госуниверситет», 2007.—Вып. 6.—С. 71–100.
2. Пивень В. Ф. Уравнения двумерной фильтрации в анизотропнонеоднородном слое грунта и их преобразование к каноническому виду // Вестник науки. Сборник научных работ преподавателей, аспирантов и студентов физ.мат. факультета ГОУ ВПО «ОГУ».—Орел: Изд-во ГОУ ВПО «Орловский госуниверситет», 2007.—Вып. 6.—С. 120–125.
3. Пивень В. Ф. Постановка основных граничных задач фильтрации в анизотропной пористой среде // Тр. XIII Международного симпозиума «МДОЗМФ».—Харьков-Херсон, 2007.—С. 239–243.
4. Пивень В. Ф. Единственность решения граничных задач фильтрации в анизотропно-неоднородной пористой среде // Вісник Харківського національного університету.—Харків, 2007.—№ 775.—С. 205–215.
5. Пивень В. Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости.—Орел: Изд-во ГОУ ВПО «Орловский госуниверситет», 2006.—508 с.

Пивень Владимир Федотович

ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»

Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95

E-mail: pivenvf@gmail.com

О КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ
НЕКОТОРЫХ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ**Л. Ю. Плиева**

Рассматриваются квадратурные формулы построенные Д. Г. Саникидзе. Вычисляются узлы и коэффициенты для различных параметров данных квадратурных формул. Приводится таблица узлов и коэффициентов для некоторых значений параметров.

Несобственные интегралы, как известно, представляют собой обобщение классического понятия интеграла на случай неограниченных функций и функций, заданных на бесконечном промежутке интегрирования. Несобственные интегралы имеют важное значение во многих областях математического анализа и его приложений. Например, в теории специальных функций (цилиндрических функций, ортогональных многочленов и др.) и при решении некоторых краевых задач математической физики.

Во многих случаях несобственный интеграл может быть преобразован в собственный с помощью интегрирования по частям или замены переменной в интеграле. Получившийся при этом интеграл может быть вычислен с помощью известных квадратурных формул. С таким приемом вычисления несобственных интегралов мы встречаемся у А. Н. Крылова. Таким образом, сначала мы убеждаемся в существовании несобственного интеграла, а потом путем преобразований обеспечиваем вычисление несобственных интегралов с помощью квадратурных формул.

Рассмотрим теперь подынтегральную функцию $f(x)$, которая непрерывна в каждой точке $[a, b]$, а производная от нее не ограничена в какой-нибудь точке, которая содержится в $[a, b]$ или находится в окрестности одного из концов этого промежутка. Наличие особенностей у производных от $f(x)$ делает квадратурную формулу почти непригодной для вычисления даже определенных интегралов, так как остаточный член зависит от производных. Чтобы заменить интеграл конечной суммой полезно обратиться к приему выделения особенностей Л. В. Канторовича [1]. Этот прием состоит в построении элементарной функции (интегрирование в конечном смысле)

имеющей те же особенности что и подынтегральная функция. Вычитая из подынтегральной функции эту вспомогательную функцию, мы получим функцию, непрерывную вместе со своими производными.

Рассмотрим вопрос приближенного вычисления несобственных интегралов вида

$$\int_{-1}^1 |x|^\alpha f(x) dx \quad (\alpha > -1), \quad (1)$$

и

$$\int_{-1}^1 x^\beta f(x) dx, \quad (2)$$

где число β такое, что $(-x)^\beta = -x^\beta$ и $f(x)$ как в интеграле (1) так и в (2) имеет производные до определенного порядка.

С помощью преобразования остаточного [2] для вычисления интегралов (1) и (2) Д. Г. Саникидзе [3] построил квадратурные формулы высокой степени точности, которые содержат производные от функции $f(x)$.

Рассмотрим сперва интеграл (1), который можно свести к виду

$$\int_0^1 x^\alpha [f(x) + f(-x)] dx. \quad (3)$$

Представим $f(x) + f(-x)$ интерполяционной формулой [3]

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) = & \sum_{\nu=1}^m \frac{x^{2p} H_\nu(x)}{x_\nu^{2p} H_\nu(x_\nu)} [f(x_\nu) + f(-x_\nu)] + \\ & + 2 \sum_{s=0}^{p-1} \left[x^{2s} - \sum_{\nu=1}^m \frac{x^{2p} H_\nu(x)}{x_\nu^{2p-2s} H_\nu(x_\nu)} \right] \frac{f^{(2s)}(0)}{(2s)!} + R, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} R = & 2x^{2p} \prod_{k=1}^m (x^2 - x_k^2) f(\pm x, \underbrace{0, \dots, 0}_{2p-1}, \pm x_1, \dots, \pm x_m), \\ H_\nu(x) = & \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^m (x^2 - x_k^2), \quad H_\nu(x_\nu) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^m (x_\nu^2 - x_k^2). \end{aligned}$$

Тогда получается следующая квадратурная формула

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x|^\alpha f(x) dx &= \sum_{\nu=1}^m A_\nu(\alpha) [f(x_\nu) + f(-x_\nu)] + \\ &+ \sum_{s=0}^{p-1} B_s(\alpha) f^{(2s)}(0) + R_{m,p}(\alpha), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} A_\nu(\alpha) &= \frac{1}{x_\nu^{2p} H_\nu(x_\nu)} \int_0^1 x^{2p+\alpha} H_\nu(x) dx, \\ B_s(\alpha) &= \frac{2}{(2s)!} \left[\frac{1}{2s+\alpha+1} - \sum_{\nu=1}^m x_\nu^{2s} A_\nu(\alpha) \right], \end{aligned}$$

$$R_{m,p}(\alpha) = 2 \int_0^1 x^{2p+\alpha} \prod_{k=1}^m (x^2 - x_k^2) f(\pm x, \underbrace{0, \dots, 0}_{2p-1}, \pm x_1, \dots, \pm x_m) dx. \quad (6)$$

Полагая

$$\psi(x) = f(x, \underbrace{0, \dots, 0}_{2p-1}, \pm x_1, \dots, \pm x_m),$$

разделенную разность, входящую в остаток (6) можно представить в виде

$$\frac{\psi(x) - \psi(-x)}{2x}.$$

Заменим $\psi(x) - \psi(-x)$ интерполяционной формулой

$$\begin{aligned} \psi(x) - \psi(-x) &= \sum_{\lambda=1}^m \frac{x H_\lambda(x)}{x_\lambda H_\lambda(x_\lambda)} [\psi(x_\lambda) - \psi(-x_\lambda)] + \\ &+ 2x \prod_{k=1}^m (x^2 - x_k^2) \psi(\pm x, \pm x_1, \dots, \pm x_m). \end{aligned}$$

Тогда

$$R_{m,p}(\alpha) = \sum_{\lambda=1}^m \frac{\psi(x_\lambda) - \psi(-x_\lambda)}{x_\lambda H_\lambda(x_\lambda)} \int_0^1 x^{2p+\alpha} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \lambda}}^m (x^2 - x_k^2) \prod_{k=1}^m (x^2 - x_k^2) dx + \\ + 2 \int_0^1 x^{2p+\alpha} \prod_{k=1}^m (x^2 - x_k^2)^2 \psi(\pm x, \pm x_1, \dots, \pm x_m) dx.$$

Заметим, что узлы x_k надо подобрать так, чтоб

$$\int_0^1 x^{2p+\alpha} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \lambda}}^m (x^2 - x_k^2) \prod_{k=1}^m (x^2 - x_k^2) dx = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, m). \quad (7)$$

А это означает, что в качестве узлов $\pm x_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$) можно взять корни многочлена ортогонального по весу $|x|^\alpha x^{2p}$ на отрезке $[-1, 1]$ многочленам более низкой степени. После этого остаточный член примет вид

$$R_{m,p}(\alpha) = \frac{2f^{(4m+2p)}(\xi)}{(4m+2p)!} \int_0^1 x^{2p+\alpha} \prod_{k=1}^m (x^2 - x_k^2)^2 dx.$$

В статье Д. Г. Саникидзе [3] найдены узлы и коэффициенты только для случая $m = 1$, $p = 2$, $\alpha = -0,5$, что не позволяет вычислить интеграл с более высокой степенью точности из-за отсутствия дальнейших значений узлов и коэффициентов. Также невозможно наблюдать процесс сходимости.

Наша задача заключалась в том, чтобы найти узлы и коэффициенты для различных значений m , p , α , для данной квадратурной формулы (5).

Используя свойства ортогональных многочленов [4] можно (7) заменить следующей эквивалентной системой

$$\int_0^1 x^{2p+\alpha} x^{2(\lambda-1)} \prod_{k=1}^m (x^2 - x_k^2) dx = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, m). \quad (8)$$

Заметим, что для любого λ мы получим формулы Виета. Таким образом, наша задача свелась к решению обыкновенного алгебраического уравнения степени m

$$z^m + \sum_{k=1}^m C_m^k (-1)^k z^{m-k} \prod_{j=1}^k \frac{2p + \alpha + 1 + 2(m-j)}{2p + \alpha + 1 + 2(2m-j)} = 0, \quad z = x^2. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь интеграл (2). После несложных преобразований (2) сведется к виду

$$\int_0^1 x^\beta [f(x) - f(-x)] dx. \quad (10)$$

Аналогично (4) заменим функцию $f(x) - f(-x)$ интерполяционной формулой

$$\begin{aligned} f(x) - f(-x) &= \sum_{\nu=1}^m \frac{x^{2p+1} H_\nu(x)}{x_\nu^{2p+1} H_\nu(x_\nu)} [f(x_\nu) - f(-x_\nu)] + \\ &+ 2 \sum_{s=0}^{p-1} \left[x^{2s+1} - \sum_{\nu=1}^m \frac{x^{2p+1} H_\nu(x)}{x_\nu^{2p-2s} H_\nu(x_\nu)} \right] \frac{f^{(2s+1)}(0)}{(2s+1)!} + R, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} R &= 2x^{2p+1} \prod_{k=1}^m (x^2 - x_k^2) f(\pm x, \underbrace{0, \dots, 0}_{2p}, \pm x_1, \dots, \pm x_m), \\ H_\nu(x) &= \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^m (x^2 - x_k^2), \quad H_\nu(x_\nu) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^m (x_\nu^2 - x_k^2). \end{aligned}$$

Для (2) Саникидзе Д. Г. [3] получил следующую квадратурную формулу

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^\beta f(x) dx &= \sum_{\nu=1}^m A_\nu(\beta) [f(x_\nu) - f(-x_\nu)] + \\ &+ \sum_{s=0}^{p-1} B_s(\beta) f^{(2s+1)}(0) + R_{m,p}(\beta), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}
 A_\nu(\beta) &= \frac{1}{x_\nu^{2p+1} H_\nu(x_\nu)} \int_0^1 x^{2p+\beta+1} H_\nu(x) dx, \\
 B_s(\beta) &= \frac{1}{(2s+1)!} \left[\frac{1}{2s+\beta+2} - \sum_{\nu=1}^m x_\nu^{2s+1} A_\nu(\beta) \right], \\
 R_{m,p}(\beta) &= 2 \int_0^1 x^{2p+\beta+1} \prod_{k=1}^m (x^2 - x_k^2) f(\pm x, \underbrace{0, \dots, 0}_{2p}, \pm x_1, \dots, \pm x_m) dx.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Производя над остатком преобразования аналогичные преобразованию остатка (6) мы получим

$$R_{m,p}(\beta) = \frac{2f^{(4m+2p+1)}(\xi)}{(4m+2p+1)!} \int_0^1 x^{2p+\beta+1} \prod_{k=1}^m (x^2 - x_k^2)^2 dx,$$

а узлы x_k надо подобрать так, чтоб выполнялось

$$\int_0^1 x^{2p+\beta+1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \lambda}}^m (x^2 - x_k^2) \prod_{k=1}^m (x^2 - x_k^2) dx = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, m). \tag{14}$$

Для нахождения узлов и коэффициентов квадратурной формулы (12), поступим аналогично предыдущему. Заменим (14) эквивалентной системой

$$\int_0^1 x^{2p+\beta+1} x^{2(\lambda-1)} \prod_{k=1}^m (x^2 - x_k^2) dx = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, m). \tag{15}$$

В результате наша задача сведется к решению алгебраического уравнения

$$z^m + \sum_{k=1}^m C_m^k (-1)^k z^{m-k} \prod_{j=1}^k \frac{2p+\beta+2+2(m-j)}{2p+\beta+2+2(2m-j)} = 0, \quad z = x^2. \tag{16}$$

Приведем таблицы узлов и коэффициентов для интегралов (1) (Таблица 1) и (2) (Таблица 2):

Таблица 1

$$n = 15, p = 1, \alpha = 0, 3 :$$

$$\begin{aligned} x_1^2 &= 0,011175275415023884; & x_2^2 &= 0,041651489334569913; \\ x_3^2 &= 0,090126991328675226; & x_4^2 &= 0,154695136976357063; \\ x_5^2 &= 0,232819211027106951; & x_6^2 &= 0,321430293099468214; \\ x_7^2 &= 0,417047590764903837; & x_8^2 &= 0,515915123749491963; \\ x_9^2 &= 0,614149252179085399; & x_{10}^2 &= 0,707891231073854983; \\ x_{11}^2 &= 0,793458797303320907; & x_{12}^2 &= 0,867490850613385895; \\ x_{13}^2 &= 0,927079619882217558; & x_{14}^2 &= 0,969885623969374609; \end{aligned}$$

$$x_{15}^2 = 0,994237346872398426;$$

$$\begin{aligned} A_1(\alpha) &= 0,050646686798108881; & A_2(\alpha) &= 0,060436143614543334; \\ A_3(\alpha) &= 0,066045655358452500; & A_4(\alpha) &= 0,069004916145947633; \\ A_5(\alpha) &= 0,069882275906828336; & A_6(\alpha) &= 0,068971959004005437; \\ A_7(\alpha) &= 0,066468697019180986; & A_8(\alpha) &= 0,062529403044334900; \\ A_9(\alpha) &= 0,057299084561964187; & A_{10}(\alpha) &= 0,050922705357816994; \\ A_{11}(\alpha) &= 0,043550643282994943; & A_{12}(\alpha) &= 0,035340873685450647; \\ A_{13}(\alpha) &= 0,026459399336948905; & A_{14}(\alpha) &= 0,017080176791978562; \end{aligned}$$

$$A_{15}(\alpha) = 0,007395123392391896;$$

$$B_0(\alpha) = 0,034394051859642183.$$

Таблица 2

$$n = 14, p = 2, \beta = -0, 2 :$$

$$\begin{aligned} x_1^2 &= 0,026066156335847908; & x_2^2 &= 0,070164598926785157; \\ x_3^2 &= 0,131858601168828580; & x_4^2 &= 0,208634546013532806; \\ x_5^2 &= 0,297334641505365641; & x_6^2 &= 0,394305854795653435; \\ x_7^2 &= 0,495553267638829311; & x_8^2 &= 0,596905381141123051; \\ x_9^2 &= 0,694186228423859883; & x_{10}^2 &= 0,783387542427550437; \\ x_{11}^2 &= 0,860833991651120527; & x_{12}^2 &= 0,923334785719905084; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{13}^2 &= 0,968315937392276611; & x_{14}^2 &= 0,993934520379808362; \\A_1(\beta) &= 0,154607063560933259; & A_2(\beta) &= 0,131112390004582066; \\A_3(\beta) &= 0,117548544402075304; & A_4(\beta) &= 0,106668916115350171; \\A_5(\beta) &= 0,096768408581168855; & A_6(\beta) &= 0,087212975355121562; \\A_7(\beta) &= 0,077717883686386067; & A_8(\beta) &= 0,068146699947383496; \\A_9(\beta) &= 0,058437081217787344; & A_{10}(\beta) &= 0,048568001832452263; \\A_{11}(\beta) &= 0,038543314692720858; & A_{12}(\beta) &= 0,028382696275258596; \\A_{13}(\beta) &= 0,018116813153986465; & A_{14}(\beta) &= 0,007795676221802446; \\B_0(\beta) &= 0,018515160831818772; & B_1(\beta) &= 0,000008903584480755.\end{aligned}$$

Литература

1. Канторович Л. В. О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей // Мат. сб.—1934.—Т. 41, вып. 2—С. 235–245.
2. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа.—М.: 1953.—522 с.
3. Саникидзе Д. Г. О приближенном вычислении некоторых несобственных интегралов // Тр. Тбилисского мат. ун-та.—1965.—Т. 110.—С. 255–267.
4. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены.—М.: Наука, 1980.—364 с.

ПЛИЕВА ЛЮБОВЬ ЮРЬЕВНА

Южный математический институт ВНЦ РАН

Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: plieva-21@mail.ru

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА¹

А. В. Псху

В работе строится решение первой краевой задачи для диффузионно-волнового уравнения с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсесяна.

1. Введение. Рассмотрим диффузионно-волновое уравнение

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} u(x, y) - \Delta_x u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

где $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа, $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$; через $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}$ обозначена дробная производная порядка α с началом в точке $y = 0$, понимаемая в одном из следующих смыслов: производная Римана–Лиувилля, $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = D_{0y}^\alpha$; производная Капуто, $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = \partial_{0y}^\alpha$; оператор дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсесяна, $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = \mathbf{D}^\alpha$.

Производная Римана–Лиувилля порядка α с началом в точке $y = \eta$ определяется выражением [1, с. 9]

$$D_{\eta y}^\alpha g(y) = (\text{sign}(y - \eta))^p \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^p D_{\eta y}^{\alpha-p} g(y). \quad (2)$$

Производная Капуто определяется равенством [1, с. 11]

$$\partial_{\eta y}^\alpha g(y) = (\text{sign}(y - \eta))^p D_{\eta y}^{\alpha-p} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^p g(y). \quad (3)$$

В формулах (2) и (3) число $p \in \mathbb{N}$ выбрано из условия $p - 1 < \alpha \leq p$; $D_{\eta y}^0 g(y) = g(y)$,

$$D_{\eta y}^\mu g(y) = \frac{\text{sign}(y - \eta)}{\Gamma(-\mu)} \int_{\eta}^y g(t) (y - t)^{-\mu-1} dt, \quad \mu < 0,$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 06-01-96625.

— дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $-\mu$ с началом в точке $y = \eta$.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашьяна–Нерсесяна порядка $\alpha = \sum_{k=0}^m \gamma_k - 1$, ассоциированный с последовательностью $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, $\gamma_k \in (0; 1]$, $k = \overline{0, m}$, определяется соотношением [2]

$$D^\alpha g(y) \equiv D_{\eta y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}} g(y) = D_{\eta y}^{\gamma_m-1} D_{\eta y}^{\gamma_{m-1}} \dots D_{\eta y}^{\gamma_1} D_{\eta y}^{\gamma_0} g(y). \quad (4)$$

Заметим, что если в (4) в качестве последовательности $\{\gamma_k\}_0^m$ взять последовательность $\{\alpha - m + 1, 1, \dots, 1\}$, то мы получим производную Римана–Лиувилля: $D_{\eta y}^{\{\alpha-m+1, 1, \dots, 1\}} = D_{\eta y}^\alpha$, $\alpha \in (m-1, m]$. Последовательности $\{\gamma_k\}_0^m = \{1, \dots, 1, \alpha - m + 1\}$ соответствует производная Капуто: $D_{\eta y}^{\{1, \dots, 1, \alpha-m+1\}} = \partial_{\eta y}^\alpha$.

Как следует из определений (2) и (3), если $p \in \mathbb{N}$, то для производной Римана–Лиувилля и производной Капуто имеют место равенства $D_{\eta y}^p g(y) = \partial_{\eta y}^p g(y) = \text{sign}^p(y - \eta)(d^p/dy^p)g(y)$. Поэтому при $\alpha = 1$ уравнение (1) совпадает с уравнением диффузии, а при $\alpha = 2$ с волновым уравнением. Уравнения с производными дробного порядка возникают в математических моделях, описывающих различные процессы в средах с фрактальной геометрией (см., например, [1, гл. 5]).

Обзор работ, посвященных исследованию уравнения (1), можно найти в [3].

В данной работе строится решение первой краевой задачи для уравнения (1). Результаты получены для уравнения с оператором Джрбашьяна–Нерсесяна. Соответствующие результаты для уравнений с производной Римана–Лиувилля и производной Капуто получаются как частные случаи доказанных утверждений.

2. Постановка задачи. Обозначим через $I = \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i\}$, $B = \partial I \times (0; T)$, $D = I \times (0; T)$.

Регулярным решением уравнения

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} u(x, y) - \Delta_x u(x, y) = f(x, y), \quad (5)$$

в области D назовем функцию $u = u(x, y)$ такую, что $y^{1-\gamma_0} u(x, y) \in C(\bar{D})$, $D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_r\}} u(x, y) \in C(D \cup \{x \in S, y = 0\})$, $0 \leq r \leq m-1$, $u_{x_i x_i}(x, y)$, $D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} u(x, y) \in C(D)$, удовлетворяющую уравнению (5) во всех точках $(x, y) \in D$.

Сформулируем первую краевую задачу для уравнения (5).

ЗАДАЧА. Найти регулярное решение $u = u(x, y)$ уравнения (5) в области D , удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} u(x, y) = \tau_k(x), \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad x \in I; \quad (6)$$

$$u|_B = 0. \quad (7)$$

3. Фундаментальное решение. Далее будем считать, что $\beta = \alpha/2$, $\alpha \in (0; 2)$. Рассмотрим функцию [4]

$$\Gamma_{\alpha, n}(x, y) = C_n y^{\beta(2-n)-1} f_\beta(|x|y^{-\beta}; n-1, \beta(2-n)), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $C_n = 2^{-n} \pi^{(1-n)/2}$,

$$f_\beta(z; \mu, \delta) = \begin{cases} \frac{2}{\Gamma(\mu/2)} \int_1^\infty \phi(-\beta, \delta; -zt) (t^2 - 1)^{\mu/2-1} dt, & \mu > 0, \\ \phi(-\beta, \delta; -z), & \mu = 0, \end{cases}$$

$$\phi(-\beta, \delta; z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n! \Gamma(\delta - \beta n)}$$

— функция Райта [5, 6].

Для функции $\Gamma_{\alpha, n}(x, y)$ справедливы следующие утверждения.

1. Пусть $0 \leq \eta < y \leq T$; $\xi, x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta \in \mathbb{R}$. Функция $\Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta)$ является решением уравнения

$$(D_{\eta y}^\alpha - \Delta_x) D_{\eta y}^\zeta \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta) = 0, \quad (8)$$

на множестве $\{|x - \xi| > 0, \eta < y\}$ как функция переменных x и y , и решением уравнения

$$(D_{y\eta}^\alpha - \Delta_\xi) D_{y\eta}^\zeta \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta) = 0$$

как функция переменных ξ и η .

2. Пусть $D = \mathbb{R}^n \times (0; T)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $h(x) \in C(\mathbb{R}^n)$, и функция $h(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$ растет не быстрее, чем $\exp(\sigma|x|^{1/(1-\beta)})$, $\sigma < (1-\beta)(\beta/T)^{\beta/(1-\beta)}$. Тогда

$$D_{0y}^\mu \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^{\mu+\zeta} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi \in C(D), \quad \zeta < \alpha, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi \in C(D), \quad i = \overline{1, n}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) \Delta_x D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi - \frac{h(x) y^{-\zeta-1}}{\Gamma(-\zeta)}. \end{aligned} \quad (11)$$

В случае, если $\zeta \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $n \geq 2$, то для выполнения (10) и (11) дополнительно требуем, чтобы функция $h(x)$ удовлетворяла условию Гельдера.

3. Обозначим через $\zeta = \zeta(k, r) = \sum_{i=k+1}^r \gamma_i < \alpha$, $\mu_k = \sum_{i=0}^k \gamma_i$. Пусть функция $h(x)$ в некоторой области $Q \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям: $h(x)$ непрерывна, если $r \leq k$; удовлетворяет условию Гельдера с показателем $q > \zeta/\beta$, если $\zeta \in (0; \beta)$; $h(x)$ имеет частные производные $(\partial/\partial x_i)h(x)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем $q > (\zeta - \beta)/\beta$, если $\zeta \in [\beta; \alpha)$. И пусть функция $h(x)$ растет при $|x| \rightarrow \infty$ не быстрее $\exp(\rho|x|^{1/(1-\beta)})$ для некоторого $\rho > 0$. Тогда для всех $x \in Q$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_r\}} \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^{\alpha - \mu_k} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi = \begin{cases} h(x), & k = r, \\ 0, & k \neq r. \end{cases} \quad (12)$$

При этом, сходимость равномерная на любом ограниченном подмножестве Q .

4. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n \times (0; T)$, функция $f(x, y)$ такова, что: $y^{1-\mu} f(x, y) \in C(\bar{D})$, $\mu > 1 - \gamma_m$; $f(x, y)$ удовлетворяет условию Гельдера по переменной x

$$|f(x, y) - f(\xi, y)| \leq \text{const} \cdot y^{\mu-1} |x - \xi|^q, \quad q \in (0; 1];$$

для $\{y \in (0; T)\}$ имеет место неравенство

$$f(x, y) \leq \text{const} \cdot y^{\mu-1} \exp\left(\sigma|x|^{1/(1-\beta)}\right), \quad \sigma < (1-\beta) \left(\frac{\beta}{T}\right)^{\beta/(1-\beta)}.$$

Тогда для функции

$$F(x, y) = \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, \eta) \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$$

имеют место соотношения:

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} F(x, y) = 0, \quad (13)$$

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} F(x, y) \in C(\bar{\Omega}), \quad k = \overline{0, m-1};$$

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} F(x, y), \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F(x, y) \in C(\Omega); \quad (14)$$

$$\left(D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} - \Delta_x \right) F(x, y) = f(x, y). \quad (15)$$

4. Решение задачи. Как и выше будем обозначать через $\beta = \alpha/2$, $\mu_k = \sum_{i=0}^k \gamma_i$. Напомним, что $\gamma_k \in (0; 1]$, $\alpha = \sum_{k=0}^m \gamma_k - 1$, $\alpha \in (0; 2)$.

Далее через $C^{k, \varepsilon}$ будем обозначать пространство функций, принадлежащих C^k , частные производные порядка k которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем ε .

Для $k \leq m-2$ обозначим через

$$\zeta_k = \sum_{i=k+1}^{m-1} \gamma_i.$$

Обозначим через $\tau_k^*(x)$ и $f^*(x, y)$ нечетные продолжения $\tau_k(x)$ и $f(x, y)$ с отрезка I на $\mathbb{R}^n$:

$$\tau_k^*(x) = \tau_k(x), \quad f^*(x, y) = f(x, y), \quad x \in I, \quad (16)$$

$$\tau_k^*(x + 2(b_j - x_j)e_j) = -\tau_k^*(x), \quad f^*(x + 2(b_j - a_j)e_j, y) = -f^*(x, y), \quad (17)$$

через e_j обозначены единичные орты, $e_j = (e_{ji})$, $e_{ji} = \delta_{ji}$, δ_{ji} — символ Кронекера.

Теорема 1. Пусть 1) $\gamma_m + \gamma_0 > 1$;

2) $\tau_k|_{\partial I} = 0$, $\tau_k \in C(\bar{I})$, $0 \leq k \leq m-1$;

3) $\tau_{m-1} \in C^{0, \varepsilon}(I)$, $\varepsilon > 0$, если $\gamma_m \neq 1$ и $n \geq 2$;

4) $\tau_k \in C^{0, \varepsilon}(I)$, $\varepsilon > \frac{\zeta_k}{\beta}$, если $\zeta_k < \beta$, и $\tau_k \in C^{1, \varepsilon}(I)$, $\varepsilon > \frac{\zeta_k - \beta}{\beta}$, если $\beta \leq \zeta_k < \alpha$, $0 \leq k \leq m-2$;

5) $y^{1-\mu} f(x, y) \in C(\bar{D})$, $\mu > 1 - \gamma_m$, и функция $y^{1-\mu} f(x, y)$ удовлетворяет условию Гельдера по переменной x . Тогда функция

$u = u(x, y)$, определенная равенством

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^n} \tau_k^*(\xi) D_{0y}^{\alpha-\mu_k} \Gamma_{\alpha,n}(x-\xi, y) d\xi + F(x, y),$$

где

$$F(x, y) = \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} f^*(\xi, \eta) \Gamma_{\alpha,n}(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta, \quad (18)$$

является регулярным решением уравнения (5) в области D , и удовлетворяет условиям (6) и (7).

◁ Из (13)–(15) следует, что $F(x, y)$ является регулярным решением уравнения (5), причем

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} F(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (19)$$

Обозначим через

$$u_k = \int_{\mathbb{R}^n} \tau_k^*(\xi) D_{0y}^{\alpha-\mu_k} \Gamma_{\alpha,n}(x-\xi, y) d\xi, \quad 0 \leq k \leq m-1.$$

Соотношения (10) и (11) доказывают, что $(\partial^2 / \partial x_i^2) u_k \in C(D)$,

$$\begin{aligned} \Delta_x u_k &= \int_{\mathbb{R}^n} \tau_k(\xi) \Delta_x D_{0y}^{\alpha-\mu_k} \Gamma_{\alpha,n}(x-\xi, y) d\xi - \\ &\quad - \frac{y^{\mu_k-\alpha-1}}{\Gamma(\mu_k-\alpha)} \left[D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} u_k \right]_{y=0}. \end{aligned} \quad (20)$$

Учитывая равенство

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} u_k = D_{0y}^\alpha u_k - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{y^{\mu_i-\alpha-1}}{\Gamma(\mu_i-\alpha)} \left[D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_i\}} u_k \right]_{y=0},$$

и соотношения (9) и (12) получаем

$$\begin{aligned} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} u_k &= \int_{\mathbb{R}^n} \tau_k(\xi) D_{0y}^\alpha D_{0y}^{\alpha-\mu_k} \Gamma_{\alpha,n}(x-\xi, y) d\xi - \\ &\quad - \frac{y^{\mu_k-\alpha-1}}{\Gamma(\mu_k-\alpha)} \left[D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} u_k \right]_{y=0}. \end{aligned}$$

Вместе с (8) и (20) это доказывает, что $\sum u_k$ является регулярным решением уравнения (5).

Выполнение начальных условий (6) следует из (12) и (19). Заметим, что условие $\zeta_k < \alpha$, требуемое для выполнения (12), обеспечивается условием $\gamma_0 + \gamma_m > 1$. Выполнение краевых условий (7) является следствием нечетности функций $\tau_k^*(x)$, $f^*(x, y)$ по каждой из координат переменной x . Теорема доказана.

Из теоремы 1 следуют соответствующие утверждения для уравнения с производной Римана–Лиувилля и производными Капуто.

Теорема 2. Пусть $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \{1, 2\}$, $\tau_k|_{\partial I} = 0$, $\tau_k \in C(\bar{I})$, $0 \leq k \leq m-1$, и, в случае $m = 2$, $\tau_0 \in C^{1,\varepsilon}(I)$, $\varepsilon > (1-\beta)/\beta$; $y^{1-\mu}f(x, y) \in C(\bar{D})$, $\mu > 0$, функция $y^{1-\mu}f(x, y)$ удовлетворяет условию Гельдера по переменной x . Тогда функция $u = u(x, y)$, определенная равенством

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^n} \tau_k^*(\xi) \frac{\partial^{m-k-1}}{\partial y^{m-k-1}} \Gamma_{\alpha,n}(x-\xi, y) d\xi + F(x, y), \quad (21)$$

в области D является регулярным решением уравнения

$$D_{0y}^\alpha u(x, y) - \Delta_x u(x, y) = f(x, y),$$

и удовлетворяет краевым условиям (7) и начальным условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-m+k} u(x, y) = \tau_k(x), \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad x \in I.$$

Теорема 3. Пусть $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \{1, 2\}$, $\tau_k|_{\partial I} = 0$, $\tau_k \in C(\bar{I})$, $0 \leq k \leq m-1$, $\tau_{m-1} \in C^{0,\varepsilon}(\bar{I})$, $\varepsilon > 0$, в случае $n > 1$; и, в случае $m = 2$, $\tau_0 \in C^{1,\varepsilon}(I)$, $\varepsilon > (1-\beta)/\beta$; $y^{1-\mu}f(x, y) \in C(\bar{D})$, $\mu > m-\alpha$, функция $y^{1-\mu}f(x, y)$ удовлетворяет условию Гельдера по переменной x . Тогда функция $u = u(x, y)$, определенная равенством

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^n} \tau_k^*(\xi) D_{0y}^{\alpha-k-1} \Gamma_{\alpha,n}(x-\xi, y) d\xi + F(x, y), \quad (22)$$

в области D является регулярным решением уравнения

$$\partial_{0y}^\alpha u(x, y) - \Delta_x u(x, y) = f(x, y),$$

удовлетворяющим краевым условиям (7) и начальным условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(x, y) = \tau_k(x), \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad x \in I.$$

В равенствах (21) и (22) $\tau_k^*(x)$, $f^*(x, y)$ и $F(x, y)$ определяются с помощью соотношений (16)–(18).

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—202 с.
2. Джрбашян М. М., Нерсисян А. Б. Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН Арм. ССР.—1968.—Т. 3, № 1.—С. 3–28.
3. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка.—М.: Наука, 2005.—199 с.
4. Псху А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной АН.—2005.—Т. 8, № 1.—С. 78–83.
5. Wright E. M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc.—1933.—Vol. 8, № 29.—С. 71–79.
6. Wright E. M. The generalized Bessel function of order greater than one // Quart. J. Math., Oxford Ser.—1940.—Vol. 11.—С. 36–48.

Псху Арсен Владимирович

Научно-исследовательский институт прикладной

математики и автоматизации КБНЦ РАН

КБР, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: pskhu@mail333.com

ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАГМАТИЧЕСКОГО РАСПЛАВА И ЕГО ПОДЪЕМА ПО КАНАЛУ ВУЛКАНА

Радионов А. А.

Описаны основные результаты экспериментальных работ по моделированию свойств магматического расплава при термодинамических условиях, характерных для магматической камеры. Кроме того, описываются основные подходы к решению задачи о подъеме магматического расплава по каналу вулкана, особенно актуальной при катастрофических вулканических явлениях.

Магматическая камера, расположенная под вулканической постройкой, является источником всех рисков, связанных с вулканической активностью. Первичный мантийный расплав, поднимающийся к земной поверхности, взаимодействует с вмещающей породой и меняет свой химический состав [1]. Этот процесс называется магматической дифференциацией. Последовательность превращений идет от ультраосновных базальтовых магм, относительное содержание кремния в которых менее 45%, в пересчете на SiO_2 , в сторону увеличения содержания кремния в кислых и ультракислых расплавах, где весовое содержание SiO_2 превышает 65%.

По мере дифференциации из базальтовых образуются расплавы андезитового, дацитового, риолитового и т. д. содержания, каждый из которых обладает свойственными ему физико-химическими свойствами. Рассмотрим важнейшие характеристики этих расплавов, изученные в экспериментах с извергнутыми породами. Здесь необходимо отметить невозможность непосредственных измерений в природных условиях, за небольшими исключениями случаев экстрезивных извержений, позволяющих наблюдать непосредственно вытекающую лаву. С этим связаны сложности, возникающие при воспроизведении в эксперименте термодинамических условий при которых находятся в природных условиях магматические расплавы. Однако данные, полученные в экспериментах, частично перекрывают условия, возникающие при наиболее опасных вулканических явлениях.

Основные свойства магматического расплава существенно зависят от химического состава, температуры, давления и содержания растворенных летучих (в основном это H_2O и CO_2 , содержание которых может превышать 5%).

Плотность расплава зависит, главным образом, от его химического состава и уменьшается от базальтовых ($2600 \div 2900 \text{ кг/м}^3$) к кислым составам ($2200 \div 2400 \text{ кг/м}^3$). Зависимость от температуры и давления, известная как $\rho = \rho_0 (1 + (p - p_0)/\beta + \alpha(T - T_0))$, где $\beta \approx 10^{11}$, коэффициент температурного расширения $\alpha \approx 10^{-5}$, в случае магматического расплава пренебрежимо мала. Кроме того, плотность увеличивается с увеличением содержания кристаллической массы в расплаве.

Температура расплава меняется в связи с процессами остывания в магматической камере, связанными также с процессами дифференциации и для магм различных композиций наиболее типичными являются следующие величины температур: для базальтов $1000 \div 1200^\circ\text{C}$, для андезитов $950 \div 1200^\circ\text{C}$, для дацитов $800 \div 1100^\circ\text{C}$, для риолитов $700 \div 900^\circ\text{C}$.

Понимание существенной зависимости вязкости магматического расплава от температуры, давления и содержания летучих явилось ключевым фактором при объяснении динамики многих вулканических извержений. Особенно сильная зависимость вязкости расплава обнаруживается от температуры и от содержания летучих (преимущественно воды), а именно при уменьшении температуры и содержания растворенной воды вязкость увеличивается экспоненциально [2, 3]. Для заданного содержания воды и при высоких температурах выполняется аррениусовская зависимость: логарифм вязкости обратно пропорционален температуре:

$$\mu = \mu_0 \exp \left(\frac{E_\mu^0 (1 - k_\mu c)}{RT} \right),$$

где $E_\mu = E_\mu^0 (1 - k_\mu c)$ — энергия активации вязкого течения, E_μ^0 — энергия активации «сухого» расплава, k_μ — эмпирический коэффициент, $\mu_0 = 10^{-4,5}$ — предэкспоненциальный множитель, R — универсальная газовая постоянная, c — содержание летучих. Величина E_μ^0 меняется от $1,75 \times 10^5$ для базальтовых расплавов до величины $3,045 \times 10^5$ для риолитовых расплавов [4, 5]. Эмпирический коэффициент $k_\mu = 6$ для базальтовых расплавов и $k_\mu = 11$ для риолитовых. В экспериментах [6] указывается, что такая зависимость справедлива только при содержаниях растворенных летучих меньше равновесного, а при больших содержаниях необходим дополнительный учет растворенной молекулярной воды. В работах [7–9] приведена экспе-

риментальная зависимость вязкости расплава риолитового состава от температуры и содержания летучих в виде:

$$\lg \mu = -3,545 + 0,833 \ln c + \frac{9601 - 2368 \ln c}{T - (195,7 + 32,25 \ln c)},$$

$$\lg \mu = 0,2911 + 0,833 \ln c - \frac{1304 + 2368 \ln c}{T - 344,2 - 32,25 \ln c},$$

см. [7, 8, 9].

В работах [10–12] отмечается неньютоновское поведение магматического расплава. Такое поведение связывается с вязким разогревом при сдвиговом движении расплава — чем больше скорость сдвига, тем сильнее происходит разогрев и тем более уменьшается вязкость расплава. Вводится характерная скорость релаксации $\dot{\epsilon}_r$, характеризующая отклик жидкости на деформирующее воздействие. При маленьких скоростях деформации $\dot{\epsilon} \ll \dot{\epsilon}_r$ расплав находится в полностью равновесном состоянии, что соответствует ньютоновской жидкости. При $\dot{\epsilon} \approx \dot{\epsilon}_r$ расплав становится «разжижающимся при сдвиге» с зависимостью вязкости от скорости деформации. При высоких скоростях деформации $\dot{\epsilon} \gg \dot{\epsilon}_r$ нарушатся структура расплава и вязкость стремиться к нулю. Вязкость определяется в безразмерном виде как μ/μ_{rel} , где μ_{rel} — ньютоновская вязкость жидкости, μ — измеренная вязкость. Для широкого диапазона температур и композиций расплавов найдена общая зависимость вязкости от безразмерной скорости сдвига:

$$\mu/\mu_{rel} = (1 + \mu_{rel}\dot{\epsilon}/\sigma_{\infty})^{-1},$$

где $\sigma_{\infty} \propto \mu_{rel}^{0,24}$ — максимально возможный в расплаве модуль сдвига, $\dot{\epsilon}$ — скорость деформации.

При снижении температуры расплава ниже температуры ликвидуса в нем начинает расти кристаллическая масса. В работах [13, 14] отмечается зависимость вязкости расплава от содержания в нем кристаллического материала. Изменение вязкости учитывается поправочным коэффициентом $\theta(\beta)$ к вязкости $\mu_m(c, T)$ лишённого кристаллов расплава: $\mu(c, T) = \theta(\beta)\mu_m(c, T)$, $\log(\theta(\beta)/\theta_0) = \text{arctg}(\varepsilon(\beta - \beta_*)) + \pi/2$, где β — объемное содержание кристаллической фазы. Коэффициенты имеют значения $\theta_0 = 1,4$, $\varepsilon = 8,6$, $\beta_* = 0,69$.

Для определения максимально возможного количества растворенной в расплаве воды c_H используется закон Генри в виде: $c_H =$

$K_H p^n$, где K_H — постоянная Генри, p — давление, n — показатель степени. Для растворов воды в расплавах базальтового типа $K_H \approx 6,8 \times 10^{-8}$, $n = 0,5 \div 0,7$ [15]. Для растворов воды в кислых расплавах $K_H \approx 4,11 \times 10^{-6}$, $n = 0,5$ [16]. Для растворов CO_2 в базальтовых расплавах $K_H \approx 4,4 \times 10^{-12}$, $n = 1,0$ [17].

В работе [8] использовано выражение для закона Генри с учетом зависимости от температуры в виде:

$$c_H = p^{0,5}(0,4874 - 608,0/T + 489530/T^2) + \\ + p(-0,06062 - 135,6/T - 69200/T^2) + \\ + p^{1,5}(0,00253 - 4,154/T + 1509/T^2).$$

Некоторые исследователи [18] предлагают более точные алгоритмы вычисления растворимости для магматических расплавов с учетом температуры и композиции расплава:

1. При заданном давлении p (в барах) и температуре (в °K) вычисляется величина

$$k(p, T) = 5,0 + K + (\ln p)(4,481 \times 10^{-8}T^2 - 1,51 \times 10^{-4}T - 1,137) + \\ + (\ln p)^2(1,831 \times 10^{-8}T^2 - 4,882 \times 10^{-5}T + 4,656 \times 10^{-2}) + \\ + (\ln p)^3(7,8 \times 10^{-3}) - (\ln p)^4(5,012 \times 10^{-4}) + \\ + T(4,754 \times 10^{-3} - 1,621 \times 10^{-6}T).$$

2. Вычисляется молярное содержание воды X , используя выражение $X = 1/\sqrt{k(p, T)}$, если $X > 0,5$, тогда $X = 0,5 + \ln(4/k(p, T))/(6,52 - 2667/T)$

3. Вычисляется растворимость

$$c_H = \frac{18,02X}{18,02X + (1 - X)W}.$$

В приведенных выражениях W и K являются параметрами, зависящими от композиции расплава, и выбираются следующими:

	W	K
Базанит	297	0,14
Базальт	296	0,19
Толеитовый базальт	292	0,24
Андезит	276	0,17
Дацит	265	0,15
Риолит	261	0,19

При низких давлениях полученные из этих выражений значения растворимости практически совпадают с законом Генри, различие можно отметить при давлениях более 100 МПа. Отклонения от закона Генри возрастают с ростом температуры.

Известны значения теплоемкости [19] для базальтовых расплавов: $c_p = 1,45 \times 10^3$, для расплавов риолитовой композиции $c_p = 1,35 \times 10^3$. Основным летучим веществом, растворенным в магматическом расплаве, является вода. Теплоемкость водяного пара известна из экспериментов [20] и при характерных для магматического очага температурах и давлениях приведена в таблице 1.

Таблица 1

Теплоемкость водяного пара (кДж/кг/К)
при магматических температурах и давлениях [20]

Давление, МПа	Температура, °K							
	700	800	900	1000	1200	1400	1600	1800
0,1	2,09	2,15	2,22	2,29	2,43	2,58	2,73	3,02
0,5	2,11	2,16	2,23	2,29	2,43	2,58	2,73	2,98
1,0	2,13	2,18	2,24	2,30	2,44	2,58	2,73	2,95
2,0	2,19	2,21	2,26	2,32	2,45	2,59	2,73	2,92
4,0	2,32	2,28	2,30	2,34	2,46	2,59	2,73	2,90
6,0	2,47	2,35	2,34	2,37	2,48	2,60	2,73	2,89
8,0	2,65	2,43	2,39	2,40	2,49	2,61	2,73	2,88
10,0	2,85	2,52	2,44	2,44	2,50	2,62	2,73	2,88
15,0	3,55	2,74	2,57	2,53	2,54	2,65	2,75	2,88
20,0	4,67	3,04	2,71	2,62	2,57	2,67	2,76	2,88
25,0	6,16	3,40	2,86	2,71	2,61	2,69	2,77	2,89
30,0	10,20	3,82	3,03	2,81	2,65	2,72	2,78	2,90
40,0	13,20	4,86	3,39	3,01	2,70	2,77	2,81	2,91
50,0	8,44	5,70	3,90	3,21	2,77	2,81	2,84	2,92
60,0	6,93	6,93	4,19	3,38	2,87	2,86	2,86	2,92
70,0	6,12	6,26	4,62	3,59	2,94	2,91	2,88	2,93
80,0	5,60	6,09	4,77	3,75	3,01	2,96	2,91	2,95
90,0	5,29	5,86	4,85	3,86	3,08	3,00	2,94	2,97
100,0	5,08	5,51	4,88	3,96	3,16	3,05	2,97	2,98

Температуропроводность расплава определяется как $\kappa = \lambda_m / (c_p \rho_m)$, где λ_m — теплопроводность, c_p — теплоемкость при постоянном объеме, ρ_m — плотность расплава. Для расплавов базальтового типа найдена малая зависимость от состава [21] и ее значение

принимается $\kappa = 1,14 \times 10^{-7}$ [4], кислые магматические расплавы имеют несколько большее значение $\kappa = 1,42 \times 10^{-7}$. В работе [22] исследовалась зависимость температуропроводности для риолитовых расплавов от температуры. Найдена слабая зависимость от температуры: с ростом последней до 1200°K температуропроводность растёт от типичного значения в $\kappa = 10^{-6}$ до значения $\kappa = 2 \times 10^{-6}$.

Коэффициент диффузии воды в расплаве различается в зависимости от композиции расплава и принимается равным $D = 1,0 \times 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$ для базальтовых расплавов, $D = 1,6 \times 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}$ для риолитовых расплавов. В экспериментах [23, 24] для риолитовых расплавов указывается на зависимость коэффициента диффузии от содержания растворённых летучих и используется значение $D = 2 \div 3 \times 10^{-12}$. В работе [4] предлагается зависимость коэффициента диффузии воды от концентрации и температуры, при характерных для магматической камеры термодинамических условиях, в виде:

$$\ln D = \ln c - b - E_D / (RT),$$

где постоянные коэффициенты $b = 12,49$, $E_D = +15200,0$ — для базальтовых расплавов и $b = -12,574$, $E_D = +87300,0$ — для риолитовых расплавов, c — концентрация растворённой воды, R — универсальная газовая постоянная, T — температура.

Коэффициент поверхностного натяжения различается для магм разных композиций: $\sigma = 0,36 \text{ Н/м}$ для базальтовых, $\sigma = 0,32 \text{ Н/м}$ для риолитовых расплавов [4]. В работе [24] для риолитовых композиций расплава предлагается значение $\sigma = 0,06 \div 0,2 \text{ Н/м}$ и указывается на зависимость коэффициента поверхностного натяжения от содержания растворённых летучих.

Молярной теплотой десорбции является то количество теплоты, которое теряет расплав при испарении моля воды (в общем случае растворённых летучих). Эта теплота существенно зависит от температуры и давления. В работе [4] предлагается следующая эмпирическая зависимость для молярной теплоты десорбции воды:

$$\Delta H_{ev} = \sum_{i=0}^5 \left[(\ln P)^i \sum_{j=0}^2 k_{j,i} T^j \right],$$

где коэффициенты $k_{j,i}$ приведены в таблице 2, молярная теплота десорбции ΔH_{ev} Дж/моль, давление P выражено в МПа, температура T в $^\circ\text{K}$. Эта формула даёт ошибочное значение при значениях

давления близких к нулевым и значениях больших 100 МПа. Для расчета величины ΔH_{ev} при низких значениях давления используются уравнения:

$$\frac{d\Delta H_{ev}}{dT} = \Delta c_P - 4RT \frac{d(\ln c_{H_2O}^{mole})}{dT}$$

— для зависимости от температуры;

$$\frac{d\Delta H_{ev}}{dP} = \Delta c_P \frac{T\tilde{V}_g}{\Delta H_{ev}} + \tilde{V}_g \left(2 + \frac{T\Delta c_P}{\Delta H_{ev}} \right) \left(\frac{\partial (\ln K_H)}{\partial (\ln P)} \right)_T,$$

— для зависимости от давления, где $c_{H_2O}^{mole}$ — равновесная молярная концентрация воды при заданных давлении P и температуре T , $\tilde{V}_g$ — молярный объем газовой фазы в расплаве, K_H — постоянная Генри.

Таблица 2

Коэффициенты для расчета ΔH_{ev} [4]

Индекс	i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
j=0	67360	2470	-2349	-1131	259,1	-10,89
j=1	-71,85	-3,534	3,65	1,639	-0,4865	0,02939
j=2	0,02365	0,001744	-0,01594	-0,0006038	0,0001984	-0,0000127

Стеклованием называется достижение расплавом вязкости порядка 10^{12} Па·с. Теплота стеклования, то есть поглощаемое при стекловании тепло, изучена только для расплавов риолитового состава [19] и принимается равной $7,15 \times 10^3$ Дж/кг, при этом температура стеклования равна 1075 °K, а температурный интервал стеклования — 20 градусов [4]. Для базальтовых расплавов достижение такой вязкости возможно при температурах порядка 550 °K, однако процесс кристаллизации базальтового расплава закончится задолго до достижения этой температуры.

При падении внешнего давления в магматической камере расплав, согласно закону Генри, становится перенасыщенным растворенными летучими, в результате начинается кипение расплава. В связи с большими и возрастающими при дегазации значениями вязкости, образовавшиеся пузырьки не способны всплывать вверх и расплав с растущими пузырьками поднимается к поверхности земли как целое. Об этом же свидетельствует изучение магматических пемз. Именно это обстоятельство дает возможность использовать

при моделировании подъема расплава ячеистые модели роста пузырьков [4, 7, 23]. Некоторые авторы [7, 8] принимают модель роста пузырька в бесконечной среде, при этом отбрасывается влияние соседних ячеек на рост пузырька. Отличия таких моделей от ячеистой модели на ранних этапах роста не существенно.

В качестве примера, рассмотрим модель, представленную в работе [4], учитывающую температурные изменения в процессе подъема магматического расплава по каналу вулкана. По мере рассмотрения будем отмечать возможные упрощения и допущения, используемые различными авторами. Основными предположениями, принятыми в этой модели являются следующие.

Рассматривается сферическая ячейка радиусом $S_0 \approx N_0^{-1/3}$. Количество сферических ячеек на единицу объема расплава, принимается равным $N_0 \approx 10^{13} \div 10^{14}$, что соответствует наблюдениям числа пузырьков в извергнутых породах. В центре ячейки расположен образовавшийся пузырек начального радиуса a_0 . Обе величины S_0 и a_0 являются параметрами модели, и их изменения влияют на получаемые результаты [4, 5]. Используется сферическая система координат с началом в центре пузырька. Соседние ячейки соприкасаются при $r = S_0$.

Рост пузырька осуществляется за счет увеличения его массы вследствие дегазации расплава:

$$d\left(\frac{p_g a^3}{T_g}\right) = 3 \frac{R}{M_w} a^2 D(c, T) \rho_m \left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_{r=a} dt, \quad (1)$$

где $a(t)$ — радиус пузырька, p_g — давление в пузырьке, T_g — температура пара в пузырьке, R — универсальная газовая постоянная, M_w — молярная масса паров воды, $D = D(c, T)$ — коэффициент диффузии летучих (в данном случае воды), в расплаве, ρ_m — плотность расплава, c — массовая концентрация летучих в расплаве, T — температура расплава, t — время.

Здесь учтено, что масса m_g паров воды в пузырьке связана с давлением уравнением состояния $p_g V_g = M_w^{-1} m_g R T_g$, V_g — объем пузырька. В работе [23] сравнивались уравнения состояния Ван-дер-Ваальса и Менделеева-Клайперона и показано, что полученные результаты отличаются не более чем на 15%.

Градиент $(\partial c / \partial r)_{r=a}$ на границе пузырька вычисляется из реше-

ния уравнения диффузии растворенной в расплаве воды:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v_r \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(D(c, T) r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right), \quad (2)$$

которого для ставятся начальное $c(r, 0) = c_0$, $r > a$ и граничные условия: $(\partial c / \partial r)_{r=S} = 0$, $c(a, t) = (K_h p_g)^{1/n}$.

Здесь $v_r = v_a a^2 / r^2$ — скорость движения расплава вокруг растущего со скоростью v_a пузырька.

Равновесная концентрация растворенной воды на границе пузырька определяется по закону Генри из давления газа в пузырьке. Величины K_h и n в законе Генри зависят от композиции расплава.

Скорость роста пузырька определяется законом Рэлея–Ламба:

$$p_g - p_f = \frac{2\sigma}{a} - \frac{4v_a}{a} \mu_{av}, \quad \mu_{av}(t) = \frac{3}{S^3 - a^3} \int_a^S r^2 \mu(r, t) dr, \quad (3)$$

где p_f — давление на внешней границе ячейки, p_g — давление газа в пузырьке, σ — коэффициент поверхностного натяжения расплава, $\mu(r, t)$ — вязкость расплава.

Полный вид этого уравнения, в котором сохранены слагаемые, пренебрежимо малые при больших вязкостях, но могущие стать заметными при низких значениях вязкости расплава [4]:

$$p_g - p_f = \frac{2\sigma}{a} - \frac{4v_a}{a} \mu_{av} + \rho_m a \frac{dv_a}{dt} \left(1 - \frac{a}{S} \right) + \rho_m v_a^2 \left(\frac{3}{2} - 2 \frac{a}{S} + \frac{1}{2} \frac{a^4}{S^4} \right).$$

В работах [5, 7] процесс подъема магматического расплава считается изотермическим. Учет энергетических явлений, связанных с ростом пузырька в некоторых случаях несущественно влияет на процесс течения в канале вулкана, однако позволяет уточнить некоторые закономерности роста пузырьков (например, эволюционный закон роста пузырька в изотермических моделях $a(t) \sim t^{1/2}$, а в моделях с учетом температуры $a(t) \sim \log t$ [4]).

Температура газа в пузырьке определяется уравнением:

$$\frac{dT_g}{dt} = \frac{3RT_g}{p_g a c_P M_w} \left[\rho_m c_m \chi \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=a} - \frac{\Delta H_{ev}}{M_w} D \rho_m \left(\frac{\partial c}{\partial r} \right)_{r=a} + \frac{a}{3} \frac{dp_g}{dt} \right], \quad (4)$$

где первый член в квадратных скобках отвечает за теплообмен пара в пузырьке с окружающим расплавом, второе слагаемое отражает потерю тепла при десорбции пара с поверхности пузырька, третье учитывает работу, совершаемую пузырьком при расширении либо сжатии.

Температура расплава вокруг пузырька вычисляется из уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\chi r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + 12 \frac{\mu_m}{\rho_m c_m} v_a^2 \frac{a^4}{r^6} - \left(\frac{H'_{vt}}{c_m} \frac{dT}{dt} \right)_{T < T_{vt}}, \quad (5)$$

где χ — коэффициент температуропроводности, μ_m — вязкость расплава. К этому уравнению добавляются начальное $T(r, 0) = T_0$, $r > a$ и граничные условия: $(\partial T / \partial r)_{r=S} = 0$, $T(a, t) = T_g$.

В уравнении (5) первое слагаемое в правой части отражает теплопроводность, второе — диссипативный нагрев за счет вязкого сопротивления расплава, третье слагаемое отражает скрытое тепло фазовых переходов (стеклование или кристаллизация).

Фракционной кристаллизации магматического расплава посвящено большое количество работ [14, 25, 26]. При математическом моделировании процесса подъема расплава по каналу вулкана используется представление о кристаллизации, как о появлении в многофазной среде кристаллической фазы [14, 26]. В работе [26] посвященной изучению роста кристаллической массы в расплаве рассматривается уравнение изменения температуры, записанное для канала вулкана, где учтено слагаемое, отражающее потерю тепла за счет десорбции воды из расплава в пузырьки, а также слагаемое, учитывающее фазовый переход в кристаллическое состояние:

$$\frac{dT_m}{dt} = Ku \frac{d\varepsilon_c}{dt} - Ku' \frac{4\pi}{3} N_0 a^3 \frac{dm_g}{dt},$$

здесь число Кутателадзе для десорбции $Ku' = \Delta H_{ev} / (c_m T_0)$, m_g — масса газа в пузырьке, $Ku = L / (c_m T_0)$ — число Кутателадзе для кристаллизации, L — теплота кристаллизации. Скорость роста кристаллической массы определяется соотношением

$$\varepsilon_c = \frac{4\pi}{3} N_{cr} v_{cr}^3 t_0^3 \left(\int_0^t v_{cr} d\tau \right)^3, \quad v_{cr} = \Delta T,$$

где v_{cr} — скорость роста кристаллов, ΔT — переохлаждение расплава, N_{cr} — число кристаллов в единице объема. В работе [14] подобный подход обобщен на случай роста кристаллов различных минералов.

Магматический расплав рассматривается при помощи теории многофазных сред как двух- или трехфазная среда [14, 27, 28]. При трехфазном рассмотрении плотность среды определяется как $\rho = \varepsilon_m \rho_m + \varepsilon_g \rho_g + \varepsilon_c \rho_c$, где индекс m соответствует жидкой фазе, индекс g — газовой фазе, индекс c — твердой (кристаллической) фазе. Объемные содержания фаз, т.е. доля объема многофазной среды, занимаемая фазой, связаны соотношением $\varepsilon_m + \varepsilon_g + \varepsilon_c = 1$, объемное содержание газа в смеси определяется из решения локальной задачи о росте газового пузырька (1–5): $\varepsilon_g \approx 4\pi (a/S)^3 / 3$ [28].

В некоторых работах [7, 14] рассматривается «одножидкостное» приближение многофазной среды, при котором считается скорость движения всех фаз одинаковой, что вполне приемлемо для магматического расплава при изучении вулканических событий на коротких временах (порядка нескольких суток протекания вулканического извержения). При этом рассматривается одно уравнение движения расплава по каналу вулкана [13]:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g - 32\mu \frac{u}{\delta^2}$$

или [7]:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 - \text{Eu} p_s)}{\partial z} = \text{Eu} (\rho + 32\text{Ag}\mu u),$$

где $\text{Eu} = p'_0 / (\rho'_0 u'^2_0)$ — безразмерное число Эйлера, $\text{Ag} = \mu'_0 u'_0 / (\rho'_0 g' d'^2)$ — безразмерное число, характеризующее трение о стенки канала, здесь штрихом отмечены размерные величины: p'_0 — давление, ρ'_0 — плотность, μ'_0 — вязкость, u'_0 — скорость потока, d' — диаметр канала вулкана.

В работе [8] принята двухскоростная модель многофазной среды, с учетом межфазного массообмена, и предполагалось, что масса пузырька увеличивается значительно быстрее, чем шаг по времени модели:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_g \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_g \rho_g u_i^g}{\partial x_i} &= R_g, \quad \frac{\partial \varepsilon_m \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_m \rho_m u_i^m}{\partial x_i} = R_m, \quad R_g = -R_m, \\ \frac{\partial \varepsilon_g \rho_g u_i^g}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_g \rho_g u_i^g u_j^g}{\partial x_j} &= \frac{\partial S_{ij}^g}{\partial x_j} + \varepsilon_g \rho_g g - I_i^{gm}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_m \rho_m u_i^m}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_m \rho_m u_i^m u_j^m}{\partial x_j} = \frac{\partial S_{ij}^m}{\partial x_j} + \varepsilon_m \rho_m g + I_i^{gm}.$$

Здесь по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Величина межфазного массообмена $R_g = \Delta u_g \rho_g / \Delta t$ — вычислялась на каждом шаге Δt по времени. Тензор напряжений $S_{ij}^m = -p_m \delta_{ij} + s_{ij}^m$ считался одинаковым для всех фаз. $s_{ij}^m = 2\mu_m \varepsilon_m (\partial u_i^m / \partial x_j + \partial u_j^m / \partial x_i)$. Сила взаимодействия фаз $I_i^{gm} = 6\pi\mu_m (u_i^g - u_i^m) / (4\rho_m a^2) - \varepsilon_g \partial p_g / \partial x_i + R_g u_i^m$, где сила Стокса учтена первым слагаемым в правой части, второе описывает силы Архимеда, а последнее — обмен импульсом при массообмене.

С ростом пузырьков увеличивается объемное содержание газовой фазы и наступает момент, при котором ячейчатая модель более не может отражать структуру течения. Ячейки разрушаются, и течение расплава превращается в газо-тепловой поток. Такой процесс называется фрагментацией и критерием фрагментации обычно выбирается превышение объемным содержанием газовой фазы величины $0,60 \div 0,75$ [7, 8].

Выше уровня фрагментации авторами [7, 8] вводится другая система уравнений, описывающая течение газо-тепловой смеси, в которой скорость относительного движения фаз велика.

В работе [7] использована следующая система уравнений:

$$\partial (\rho_m u_m) / \partial t + \partial (\rho_m u_m^2) / \partial z = \text{Eu} (F_{gm} - \rho_m)$$

— для твердых частиц,

$$\partial (\rho_g u_g) / \partial t + \partial (\rho_g u_g^2 + \text{Eu} p) / \partial z = -\text{Eu} F_{gm}$$

— для газовой составляющей, где сила межфазного взаимодействия $F_{gm} = C_\mu (\rho_m, \rho_g) (u_m - u_g)^2 / 2$. Также выполняются уравнения неразрывности: $\partial \rho_m / \partial t + \partial \rho_m u_m / \partial z = 0$, $\partial \rho_g / \partial t + \partial \rho_g u_g / \partial z = 0$, $\rho_m = (1 - \varepsilon_g)$, $\rho_g = \varepsilon_g \rho_g^0$.

Область течения расплава, в котором происходит фрагментация потока, считается достаточно тонкой [7], чтобы можно было говорить о поверхности фрагментации. На этой границе между двумя различными типами течения должны выполняться условия сопряжения уравнений, описывающих эти течения.

$$(1 - \varepsilon_g^-) (u_S - u^-) = \rho_m^+ (u_S - u_m^+),$$

$$\rho_g^{0-} \varepsilon_g^- (u_S - u^-) = \rho_g^+ (u_S - u_g^+),$$

$$\begin{aligned} & \text{Eu } p_s^- + \rho^- u^- (u_S - u^-) = \\ & = \text{Eu } p^+ + \rho_g^+ u_g^+ (u_S - u_g^+) + \rho_m^+ u_m^+ (u_S - u_g^+), \\ & p_g^- - p_m^- = \Delta p^*, \quad F_{gm}^+ = \rho_m^+. \end{aligned}$$

Здесь верхний индекс « $-$ » соответствует пузырьковому течению ниже уровня фрагментации, индекс « $+$ » соответствует течению газопепловой смеси, u_S — скорость движения уровня фрагментации.

Литература

1. Ананьев В. П., Потапов А. Д. Основы геологии, минералогии и петрографии.—М.: Высш. шк., 2005.—398 с.
2. Persikov E. S. The viscosity of magmatic liquids: Experiment, generalized patterns, a model for calculation and prediction, applications // Physical Chemistry of Magmas (ed. L. L. Perchuk and I. Kushiro).—New York: Springer-Verlag, 1991.—P. 1–40.
3. Persikov E. S., Zharikov V. A., Bukhtiyarov P. G., Pol'skoy S. F. The effect of volatiles on the properties of magmatic melts // Europ. J. Mineral.—1990.—Vol. 2.—P. 621–642.
4. Proussevitch A. A., Sahagian D. L. Dynamics and energetics of bubble growth in magmas: analytical formulation and numerical modeling // J. Geophys. Res.—1998.—Vol. 103, № B8.—P. 18223–18251.
5. Proussevitch A. A., Sahagian D. L. Dynamics of coupled diffusive and decompressive bubble growth in magmatic melts // J. Geophys. Res.—1996.—Vol. 101, № 8.—P. 17447–17456.
6. Silver L. A., Ihinger P. D., Stolper E. The influence of bulk composition on the speciation of water in silicate glasses. // Contrib. Mineral. Petrol.—1990.—Vol. 104.—P. 142–162.
7. Melnik O. Dynamics of two-phase conduit flow of high-viscosity gas-saturated magma: large variations of sustained explosive eruption intensity // Bull Volcanol.—2000.—Vol. 62.—P. 153–170.
8. Dufek J., Bergantz G. W. Transient two-dimensional dynamics in the upper conduit of a rhyolitic eruption: A comparison of closure models for the granular stress // J. Volcanol. and Geotherm. Res.—2005.—Vol. 143.—P. 113–132.
9. Старостин А. Б. Исследование течений магмы в случае неравновесной диффузии воды в расплаве // Изв. РАН. МЖГ.—2005.—№ 4.—С. 45–58.
10. Moynihan C. T. Structural relaxation and the glass transition // Rev. Mineral. GeoChem. 1995, 32, p. 1–19.
11. Simmons J. H., Mohr R. K., Montrose C. J. Non-Newtonian viscous flow in glass // J. Appl. Phys.—1982.—Vol. 53.—P. 4075–4080.
12. Webb S. L., Dingwell D. B. Non-Newtonian rheology of igneous melts at high stresses and strain rates: experimental results for rhyolite, andesite, basalt and nephelinite // J. Geophys. Res.—1990.—Vol. 95.—P. 15695–15701.
13. Melnik O., Sparks R. S. J. Nonlinear dynamics of lava dome extrusion // Nature.—1999.—Vol. 402.—P. 37–41.
14. Melnik O., Sparks R. S. J. Controls on conduit magma flow dynamics during lava dome building eruptions // J. Geophys. Res.—2005.—Vol. 110, B02209.

15. *Burnham C.W.* Water in magmas: A mixing model // *Geochim. Cosmochim. Acta.*—1975.—Vol. 39.—P. 1077–1084.
16. *Hamilton D. L., Burnham C. W., Osborn E. F.* The solubility of water and effects of oxygen fugacity and water content on crystallization in mafic magmas // *J. Petrol.*—1964.—Vol. 5.—P. 21–39.
17. *Stolper E., Holloway J. R.* Experimental determination of the solubility of carbon dioxide in molten basalt at low pressure // *Earth Planet. Sci. Lett.*—1988.—Vol. 87.—P. 397–408.
18. *Burnham C. W.* Development of the Burnham model for prediction of water solubility in magmas // *Volatiles in magmas.*—Washington: Mining Soc. of Am.—1994.—Vol. 30.—P. 123–129.
19. *Neuville D. R., Courtial P., Dingwell D. B., Richet P.* Thermodynamic and rheological properties of rhyolite and andesite melts. // *Contrib. Mineral. Petrol.*—1993.—Vol. 113.—P. 572–581.
20. Физические величины: справочник. под. ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова.—М.: Энергоатомиздат, 1991.—1232 с.
21. *Snyder D., Gier E., Carmichael I.* Experimental determination of the thermal conductivity of molten $CaMgSi_2O_6$ and the transport of heat through magmas // *J. Geophys. Res.*—1994.—Vol. 99.—P. 15503–15516.
22. *Bagdassarov N., Dingwell D.* Thermal properties of vesicular rhyolite // *J. Volcanol. Geotherm. Res.*—1994.—Vol. 60.—P. 179–191.
23. *Lensky N. G., Navon O., Lyakhovsky V.* Bubble growth during decompression of magma: experimental and theoretical investigation // *J. Volcanol. Geotherm. Res.*—2004.—Vol. 129.—P. 7–22.
24. *Lyakhovsky V., Hurwitz S., Navon O.* Bubble growth in rhyolitic melts: experimental and numerical investigation // *Bull Volcanol.*—1996.—Vol. 58.—P. 19–32.
25. *Ariskin A. A., Barmina G. S.* COMAGMAT: Development of a Magma Crystallization Model and Its Petrological Applications // *Geochemistry International.*—2004.—Vol. 42, № 1.—P. S1–S157.
26. *Кедринский В. К., Давыдов М. Н., Чернов А. А., Такаяма К.* Начальная стадия взрывного извержения вулканов: динамика состояния магмы в волнах разгрузки // *Докл. РАН. Механика.*—2006.—Т. 407, № 2.—С. 190–193.
27. *Давыдов М. Н., Кедринский В. К., Чернов А. А., Такаяма К.* Зарождение и развитие кавитации в магме при динамической разгрузке // *ПМТФ.*—2005.—Т. 46, № 2.—С. 71–80.
28. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1.—М.: Наука, 1987.—464 с.

Радионо́в Анатолий Анатольевич

Южный математический институт ВНЦ РАН

Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: aar200772@mail.ru

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Рузиев М. Х.

В работе исследована задача с нелокальными краевыми условиями в вертикальной полуполосе. С помощью принципа экстремума и методом разделения переменных доказана однозначная разрешимость поставленной задачи.

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \quad (1)$$

где $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$, в вертикальной полуполосе $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, y > 0\}$.

Пусть $\overline{D} = D \cup J_0 \cup \overline{OB} \cup J_1$, где $O(0, 0)$, $B(1, 0)$, $J_0 = \{(x, y) : x = 0, y > 0\}$, $J_1 = \{(x, y) : x = 1, y > 0\}$.

ЗАДАЧА F. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup J_0 \cup J_1) \cap C^2(D)$ и удовлетворяет уравнению (1) в D ;

2)

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0 \quad \text{равномерно по } x \in [0, 1]; \quad (2)$$

3)

$$u(0, y) - u(1, y) = \varphi_1(y), \quad y \geq 0; \quad (3)$$

$$u_x(0, y) - u_x(1, y) = \varphi_2(y), \quad y > 0; \quad (4)$$

4)

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_y = \nu(x), \quad x \in [0, 1],$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ и $\nu(x)$ — заданные функции.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Задача F не может иметь более одного решения.*

◁ Пусть $u(x, y)$ — решение однородной задачи. Покажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в области D . Предположим противное. Тогда найдется

область D_h , в которой $u(x, y) \equiv 0$, где D_h — конечная область, отсекаемая от области D прямой $y = h$, $h > 0$, $O_h(0, h)$, $B_h(1, h)$. Тогда функция $u(x, y)$ в области $\overline{D}_h$ своего положительного максимума и отрицательного минимума может достигать только на $\overline{O_h B_h}$. В силу принципа максимума для эллиптических уравнений функция $u(x, y)$ своего положительного максимума во внутренних точках области D_h не достигает. Пусть $\max_{\overline{D}_h} |u|$ достигается на OO_h в некоторой точке $(0, y_0)$. Тогда ввиду $u(0, y) = u(1, y) \max_{\overline{D}_h} |u|$ должен достигаться на BB_h в точке $(1, y_0)$. В силу хорошо известного свойства эллиптических уравнений $u_x(0, y_0) < 0$ и $u_x(1, y_0) > 0$, что противоречит $u_x(0, y) = u_x(1, y)$. Так же $\max_{\overline{D}_h} |u|$ не может достигаться в точках O и B ввиду условия (4) задачи F . Тогда он должен достигаться в некоторой внутренней точке $(x_0, 0)$ отрезка OB . Но тогда по лемме, приведенной в работе [1], должно быть $\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_y < 0$, что противоречит условию $\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_y = 0$.

Следовательно, $\max_{\overline{D}_h} |u|$ должен достигаться на $\overline{O_h B_h}$.

Возьмем произвольное малое число $\varepsilon > 0$ и, учитывая (2), выберем h настолько большим, чтобы $|u(x, y)| < \varepsilon$ на $y = h$.

Пусть (x_0, y_0) — произвольная точка в области D . При достаточно большом h эта точка попадает в область D_h и потому $|u(x_0, y_0)| < \varepsilon$. В силу произвольности ε будем иметь $u(x_0, y_0) = 0$. Тогда $u(x, y) \equiv 0$ в области D . $\triangleright$

Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть выполнены условия: $\varphi_i(y) \in C[0, \infty) \cap C^1(0, \infty)$, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi_i(y) = 0$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} \varphi_i(y) \in L(0, \infty)$, $i = 1, 2$, $\nu(x) \in C^2[0, 1]$ и на $[0, 1]$ имеет кусочно-непрерывную производную третьего порядка, $\nu(0) = \nu(1)$, $\nu'(0) = \nu'(1)$. Тогда решение задачи F существует.

$\triangleleft$ Решение уравнения (1) в области D , удовлетворяющее условиям (2)–(4), будем искать в виде суммы двух функций $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$, где $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие соответственно краевым условиям

$$u_1(0, y) - u_1(1, y) = \varphi_1(y), \quad y \geq 0, \quad (5)$$

$$u_{1x}(0, y) - u_{1x}(1, y) = \varphi_2(y), \quad y > 0, \quad (6)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u_1(x, y) = 0 \text{ равномерно по } x \in [0, 1], \quad (7)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_{1y}(x, y) = 0, \quad x \in [0, 1],$$

$$u_2(0, y) - u_2(1, y) = 0, \quad y \geq 0, \quad (8)$$

$$u_{2x}(0, y) - u_{2x}(1, y) = 0, \quad y > 0, \quad (9)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u_2(x, y) = 0 \quad \text{равномерно по } x \in [0, 1], \quad (10)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_{2y}(x, y) = \nu(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (11)$$

Функцию $u_1(x, y)$ будем искать в виде интеграла

$$u_1(x, y) = y^{\frac{1-\beta_0}{2}} \int_0^\infty [a_1(\lambda)e^{\lambda x} + a_2(\lambda)e^{-\lambda x}] J_{\frac{2\beta-1}{2}} \left(\frac{2\lambda y^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) d\lambda, \quad (12)$$

где $a_1(\lambda)$ и $a_2(\lambda)$ — пока неизвестные функции, $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода [2], $\beta = \frac{2\beta_0+m}{2(m+2)}$.

Учитывая условия (5), (6) и применяя преобразование Ханкеля, после несложных вычислений получим

$$\begin{aligned} a_1(\lambda)e^{\lambda x} + a_2(\lambda)e^{-\lambda x} &= \frac{1}{(m+2)(1-\operatorname{ch} \lambda)} \int_0^\infty y^{\frac{2m+\beta_0+1}{2}} \times \\ &\times J_{\frac{2\beta-1}{2}} \left(\frac{2\lambda y^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) \times [\lambda (\operatorname{ch} \lambda x - \operatorname{ch}(\lambda x - \lambda)) \varphi_1(y) + \\ &+ (\operatorname{sh} \lambda x + \operatorname{sh}(\lambda - \lambda x)) \varphi_2(y)] dy. \end{aligned} \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) определяют искомое решение $u_1(x, y)$. Применяв метод разделения переменных, в силу условий (8)–(11) нетрудно получить явный вид функции $u_2(x, y)$:

$$u_2(x, y) = y^{\frac{1-\beta_0}{2}} \sum_{n=1}^\infty c_n K_{\frac{1-2\beta}{2}} \left(\frac{4\pi n y^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) \sin 2\pi n x, \quad (14)$$

где $K_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя третьего рода (функция Макдональда) [2]

$$c_n = -\frac{2}{\pi n \Gamma\left(\frac{1+2\beta}{2}\right)} \left(\frac{2\pi n}{m+2} \right)^{\frac{1+2\beta}{2}} \int_0^1 \nu(t) \sin 2\pi n t dt.$$

Используя асимптотическое разложение Ханкеля [3]

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad -\pi < \arg z < \pi,$$

$z \rightarrow \infty$, легко показать, что функция $u_1(x, y)$ удовлетворяет условию (7).

Применив асимптотическое разложение функции Макдональда [4]

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad z \rightarrow \infty,$$

нетрудно убедиться в том, что функция $u_2(x, y)$ удовлетворяет условию (10). Справедливость условия (11) следует из того, что

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^{\frac{1-\beta_0}{2}} K_{\frac{1-2\beta}{2}} \left(\frac{4\pi n y^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) \right] = \\ = -\pi n \Gamma\left(\frac{1+2\beta}{2}\right) \left(\frac{m+2}{2\pi n}\right)^{\frac{1+2\beta}{2}}, \end{aligned}$$

и того, что $\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin 2\pi n x$. Отметим, что задача F для уравнения (1) в случае $\beta_0 = 0$ рассмотрена в работах [5, 6].

Литература

1. Салахитдинов М. С., Рузиев М. Х. Задача Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области // Узб. мат. жур.—2005.—№ 2.—с. 77–83.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2—М., 1966.—296 с.
3. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции.—М., 1977.—344 с.
4. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции.—М., 1990.—528 с.
5. Сабитов К. Б., Сидоренко О. Г. Существенно нелокальные задачи для вырождающегося эллиптического уравнения // Материалы международного Российско-Казахского симпозиума.—Нальчик: Эльбурс, 2004.—С. 156–159.
6. Лернер М. Е., Репин О. А. Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа // Докл. РАН.—1999.—Т. 365, № 5.—с. 593–595.

РУЗИЕВ МЕНГЛИБАЙ ХОЛТОЖИБАЕВИЧ

Институт математики и информационных технологий АНРУз

Узбекистан, 100143, Ташкент, ул. Ходжаева, 29

E-mail: mruziev@mail.ru

КАНОНИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ ОДНОМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ГРАВИТИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ

В. Г. Сапогин

Построен канонический формализм одномерной динамической системы гравитирующих частиц, удерживаемых в ограниченной области пространства самосогласованным полем. Система имеет первый интеграл, который позволяет дать новое математическое определение силе Бернулли: она совпадает по величине и направлению с градиентом давления самосогласованного поля и обеспечивает класс равновесий частиц с полем, которое они сами и создают. Сила Бернулли является силой расталкивания и удерживает систему от гравитационного коллапса, компенсируя ньютоновское притяжение в каждом элементарном объеме. Полученное распределение концентрации частиц неожиданно, так как поле выталкивает вещество на границы системы в области с наибольшей потенциальной энергией, образуя у границ слои с высокой концентрацией медленных частиц.

Рассмотрим двухпотокное периодическое движение нерелятивистских гравитирующих частиц системы, ограниченное по продольной координате x , при котором уравнение непрерывности имеет вид

$$\vec{j}_1 + \vec{j}_2 = 0, \quad (1)$$

где $\vec{j}_1$ плотность потока частиц, движущихся в положительном направлении оси x , а $\vec{j}_2$ плотность потока частиц, движущихся против оси x . При этом $\dot{j}_1 = \dot{j}_2 = \dot{j}_0$.

В силу плоской симметрии задачи для любого потока в (1)

$$\dot{j}_0 = \frac{n(x)v(x)}{2} = \frac{n_0 v_0}{2} = \text{const}, \quad (2)$$

где n — концентрация системы в произвольной плоскости; соответствующий ей модуль скорости частиц системы; n_0 — минимальная (наименьшая) концентрация системы в плоскости $x = 0$; V_0 максимальная (наибольшая) скорость частиц системы (здесь и далее индекс «0» относится к плоскости $x = 0$).

Предположим, что система бесстолкновительна. Движение гравитирующей частицы в статическом самосогласованном поле не зависит от времени явно и определяется интегралом энергии

$$E = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + m\varphi = \text{const}, \quad (3)$$

где E — значение механической энергии, одинаковое у всех частиц, m — масса гравитирующей частицы. Калибровка потенциала самосогласованного поля выбрана в виде $\varphi_0 = 0$.

Пространственное распределение потенциала статического самосогласованного гравитационного поля φ описывается уравнением Пуассона, в правой части которого концентрация частиц должна быть выражена через функцию распределения по координате:

$$\varphi'' = 4\pi Gmn(\varphi), \quad (4)$$

где G — гравитационная постоянная.

Бесстолкновительная функция распределения частиц $n(\varphi)$ следует из (2), (3) и имеет вид

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{1 - \varphi/\varphi_n}}, \quad (5)$$

где $\varphi_n = \frac{E}{m} = \frac{v_0^2}{2}$ — наибольшее значение гравитационного потенциала системы, достигаемое на ее границах. В бесстолкновительном случае концентрация частиц системы больше там, где больше ее потенциал.

Подставляя выражение (5) в (4), согласуем систему и преобразуем (4) к виду

$$\varphi'' = \frac{4\pi Gmn_0}{\sqrt{1 - \varphi/\varphi_n}}. \quad (6)$$

Уравнение (6) описывает статические двухпотоковые равновесия периодически движущихся гравитирующих частиц с самосогласованным полем. Оно имеет вид $y'' = f(y)$, который допускает понижение порядка. Понижение порядка приводит к интегралу живых сил, размерность которого не совпадает с размерностью энергии.

Гамильтонова функция взаимодействия частиц с полем. Уравнение (6) имеет первый интеграл, являющийся гамильтоновой функцией системы и соответствующий ее полному давлению P :

$$(\varphi')^2/8\pi G + p_0\sqrt{1 - \varphi/\varphi_n} = P = H(\varphi'/4\pi G, \varphi, x) = \text{const}, \quad (7)$$

где $p_0 = mn_0 v_0^2$ — давление частиц в плоскости $x = 0$. Первое слагаемое в (7) представляет собой давление самосогласованного поля системы, а второе — бесстолкновительное давление частиц одномерной системы $p = mn v_2^2/2$, совпадающее с удвоенной объемной плотностью их кинетической энергии. Закон сохранения (7) впервые получен в [1, 2]. Там исследован частный случай состояний, при которых полное давление P совпадает с давлением частиц p_0 в плоскости $\varphi_0 = 0$. Ниже проведено обобщение на случай $P \geq p_0$.

Закон сохранения (7) означает также, что в любой плоскости пространства взаимодействия рассматриваемой системы градиенты давлений самосогласованного поля и частиц системы равны между собой, но имеют различные направления. Поскольку объемная плотность силы Бернулли противоположна градиенту давления частиц ($\vec{f} = -\text{grad}(p)$), то она получает новое математическое определение: *сила Бернулли совпадает по величине и направлению с градиентом давления самосогласованного поля и обеспечивает класс равновесий частиц с полем, которое они сами и создают.*

Докажем это утверждение. Введем в (7) обозначение

$$p(x) = p_0 \sqrt{1 - \varphi/\varphi_n}$$

и продифференцируем (7) по x :

$$\frac{2\varphi'\varphi''}{8\pi G} + \frac{dp}{dx} = 0.$$

Подставляя сюда правую часть (4), получим условие равновесия элементарного объема системы

$$mn\varphi' + \frac{dp}{dx} = -\rho g_x + \frac{dp}{dx} = \rho g_x + f_x = 0.$$

Отсюда следует новое математическое определение силы Бернулли:

$$f_x = -\rho g_x = \frac{d}{dx} \left[\frac{(\varphi')^2}{8\pi G} \right].$$

Из (7) видно, что она является силой расталкивания и удерживает систему от ньютоновского притяжения (гравитационного коллапса), компенсируя ее в каждом элементарном объеме системы.

Распределения физических величин. Разделим обе части (7) на p_0 и введем обозначения: $\beta = P/p_0 \geq 1$ — параметр состояния двухпотоковой системы, $g_* = \sqrt{8\pi G p_0}$ — масштаб напряженности гравитационного поля.

При положительном полном давлении (параметр состояния изменяется в пределах $1 \leq \beta < \infty$) система находится в двухпоточковом состоянии периодического движения частиц. В этом случае существует два значения координаты $x = \pm L$, при которых давление частиц системы $p(\varphi)$ обращается в нуль и система ограничена. При $x = \pm L$ ее потенциал принимает наибольшее значение φ_n , а градиент потенциала имеет одинаковый модуль, но различные знаки $\varphi'_n = \sigma \sqrt{8\pi G P}$, где $\sigma = \text{sign}(\varphi')$. Как показывает решение, в этих плоскостях частицы системы останавливаются. Плоскости $x = \pm L$ назовем плоскостями возврата потока. Они же ограничивают длину системы.

Будем искать интегральные кривые, проходящие через точку $(0, 0)$. Для этого интегрирование в (7) представим в виде

$$\sigma x = \int_0^\varphi d\varphi / \sqrt{8\pi G [P - p_0 \sqrt{1 - \varphi/\varphi_n}]}. \quad (8)$$

Интегрируя (8), получим

$$\frac{\sigma x}{l} = (\beta - \sqrt{1 - \varphi/\varphi_n})^{1/2} (2\beta + \sqrt{1 - \varphi/\varphi_n}) - (\beta - 1)^{1/2} (2\beta + 1), \quad (9)$$

где

$$l = v_0 / (3\sqrt{2\pi G m n_0}) \quad (10)$$

— пространственный масштаб системы.

Набор функций $x = x(\varphi)$ в (9) содержит четыре решения. Первое из них получается при $\sigma = +1$ (решение имеет положительную производную в нуле и проходит через нуль). Второе — для $\sigma = -1$ (решение имеет отрицательную производную в нуле и проходит через нуль). Третье решение (оно положительно в области допустимых значений и имеет скачок производной в нуле) формируется при $\sigma = \sigma_1$, где

$$\sigma_1 = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (11)$$

Четвертое (оно отрицательно в области допустимых значений и имеет скачок производной в нуле) получается при $\sigma = \sigma_2$, где

$$\sigma_2 = \begin{cases} +1 & \text{при } x < 0, \\ -1 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Физическую ситуацию описывает третье решение. Будем считать его основным, а остальные — посторонними, которые отбросим. Полудлина системы $x = L$ следует из (9) при $\varphi/\varphi_n = 1$, $\sigma = +1$ и зависит от ее параметра состояния

$$\frac{L}{l} = 2\beta^{3/2} - (\beta - 1)^{1/2}(2\beta + 1). \quad (13)$$

Длина системы $d = 2L$.

Для получения зависимости $\varphi = \varphi(x)$ введем в (9) безразмерные переменные

$$t = \sqrt{1 - \varphi/\varphi_n}/\beta, \quad z = (x_0 + \sigma x)/(l\beta^{3/2}), \quad (14)$$

где $x_0/l = (\beta - 1)^{1/2}(2\beta + 1)$. Находя $t = t(z)$ из (9), получим законы пространственного распределения потенциала в виде составной функции в области $0 \leq z \leq 2$:

$$\varphi_1/\varphi_n = 1 - \beta^2(2 \cos \theta_1 - 1)^2 \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (15)$$

$$\varphi_2/\varphi_n = 1 - \beta^2(2 \cos \theta_2 - 1)^2 \text{ при } \sqrt{2} \leq z \leq 2, \quad (16)$$

где

$$\theta_1 = \lfloor \arccos(1 - z^2/2) \rfloor / 3; \quad (17)$$

$$\theta_2 = \lfloor \pi - \arccos(z^2/2 - 1) \rfloor / 3. \quad (18)$$

Из соотношений (15)–(18) видно, что при $\beta = 1$ самосогласованное поле системы представляет собой симметричную относительно $x = 0$ необычную потенциальную яму, которая ограничена по глубине и в пространстве. Глубина ямы определяется интегралом энергии, а длина — значением интеграла полного давления.

При $\beta > 1$ самосогласованное поле представляет собой ограниченную в пространстве потенциальную щель V -образной формы. В этом случае минимум потенциальной энергии в системе не возникает. В ней появляется наименьшее значение потенциальной энергии, достигаемое на дне щели. На рис. 1 представлен вид потенциального рельефа для различных значений параметра состояния системы. Кривая 1 соответствует параметру состояния $\beta = 1$; кривая 2 — $\beta = 1,1$; кривая 3 — $\beta = 1,5$; кривая 4 — $\beta = 4,0$. Как видно из рис. 1, полученные кривые при $\beta > 1$ оказываются похожи на потенциальный рельеф, возникающий в одномерном зарядовом кластере [3]. Их существенное отличие заключается в различных знаках производных второго порядка и сил, удерживающих систему.

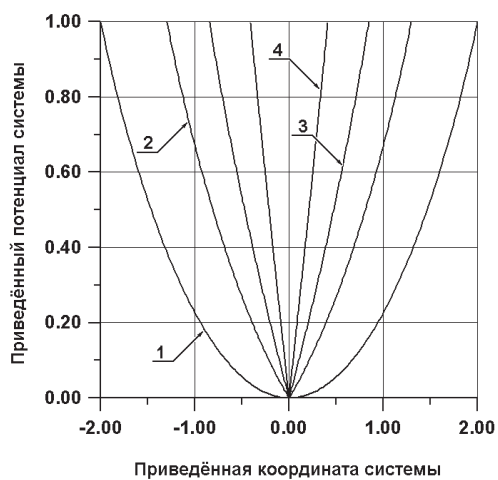


Рис. 1

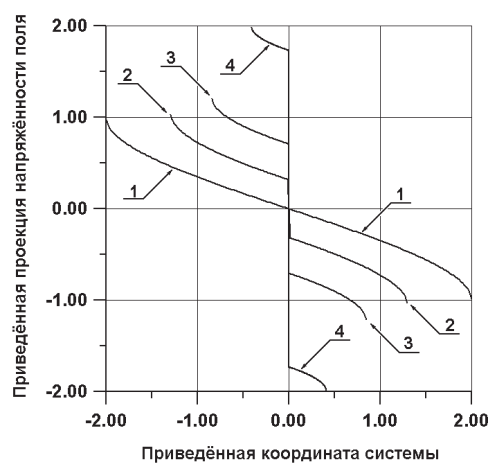


Рис. 2

Проекция напряжённости самосогласованного поля системы на координату x находится дифференцированием из (15)–(18):

$$g_1(x) = -2\sigma g_* \sqrt{\beta} \sin(\theta_1/2) \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (19)$$

$$g_2(x) = -2\sigma g_* \sqrt{\beta} \sin(\theta_2/2) \text{ при } \sqrt{2} \leq z \leq 2. \quad (20)$$

На рис. 2 представлено распределение напряженности поля, рассчитанное по (19), (20) для тех же значений параметра состояния β . Как видно из рис. 2, проекция напряженности поля системы терпит разрыв при переходе через плоскость нуля потенциала, изменяясь в конечных пределах от $g_*\sqrt{\beta-1}$ до $-g_*\sqrt{\beta-1}$. С ростом β ширина щели уменьшается, а скачок напряженности гравитационного поля увеличивается.

Законы изменения скорости частиц и давления по длине системы находятся из (3) и второго слагаемого в (7) и имеют вид

$$p_1/p_0 = v_1/v_0 = \beta(2\cos\theta_1 - 1) \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (21)$$

$$p_2/p_0 = v_2/v_0 = \beta(2\cos\theta_2 - 1) \text{ при } \sqrt{2} \leq z \leq 2. \quad (22)$$

Изменение концентрации по длине системы находится из (5) и имеет вид

$$n_1/n_0 = [\beta(2\cos\theta_1 - 1)]^{-1} \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (23)$$

$$n_2/n_0 = [\beta(2\cos\theta_2 - 1)]^{-1} \text{ при } \sqrt{2} \leq z \leq 2. \quad (24)$$

Градиент давления частиц системы всегда направлен к плоскости $x = 0$ и распределен на длине системы по закону

$$\frac{dp_1}{dx} = -\frac{2\sigma p_0}{3l} \frac{\sin\theta_1}{\cos(3\theta_1/2)} \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (25)$$

$$\frac{dp_2}{dx} = -\frac{2\sigma p_0}{3l} \frac{\sin\theta_2}{\cos(3\theta_2/2)} \text{ при } \sqrt{2} \leq z \leq 2. \quad (26)$$

Распределение давления поля по длине системы имеет вид

$$D_1 = g_1^2/8\pi G = 4\beta p_0 \sin^2(\theta_1/2) \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (27)$$

$$D_1 = g_2^2/8\pi G = 4\beta p_0 \sin^2(\theta_2/2) \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}. \quad (28)$$

Из соотношений (21) и (27), а также (22) и (28) видно, что сумма давлений частиц и поля системы в любой плоскости пространства взаимодействия остается постоянной и равной полному давлению системы $P = \beta p_0$.

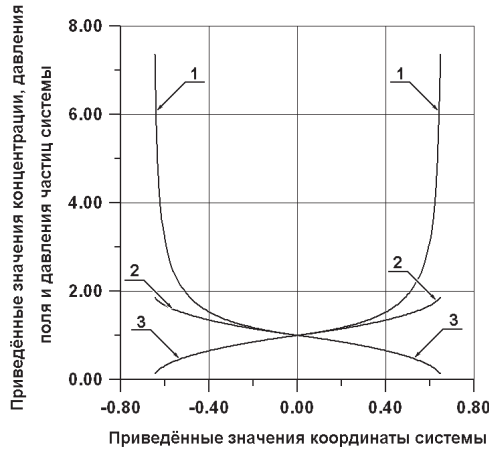


Рис. 3

Для параметра состояния $\beta = 2$ на рис. 3 представлены зависимости концентрации частиц n/n_0 (кривые 1–1), давления поля D/p_0 (кривые 2–2), давления частиц p/p_0 (кривые 3–3) от приведенной координаты x/l системы. Из рисунка видно выполнение закона сохранения (7) и тот факт, что для любых значений параметра состояния поле выталкивает вещество системы на границы, образуя у границ области с высокой концентрацией медленных частиц.

Рассмотрим поведение частиц системы вблизи плоскости возврата. Введем для этого безразмерную координату $\hat{x}/l$, отсчитываемую от этой плоскости против оси x :

$$\hat{x}/l = L/l - x/l. \quad (29)$$

С учетом (29) переменная z примет вид

$$z = 2 - \hat{x}/(l\beta^{3/2}). \quad (30)$$

Предполагая $\hat{x}/l \ll 1$, выберем из (15), (16) решение, принадлежащее второму интервалу $0 \leq z \leq \sqrt{2}$. Введем обозначение

$$y = \arccos(z^2/2 - 1) \approx \arccos[1 - 2\hat{x}/(l\beta^{3/2})] \ll 1. \quad (31)$$

Выписывая разложение для $\cos \theta_2$ в точке $\pi/3$,

$$\cos \theta_2 \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{3}} \right),$$

получим линейную зависимость потенциала системы вблизи плоскости возврата

$$\varphi_2 \approx \varphi_n(1 - 4\sqrt{\beta}\hat{x}/(3l)). \quad (32)$$

Напряженность поля гравитации в рассматриваемой области однородна и направлена по оси $\hat{x}$:

$$\hat{g} \approx 4\varphi_n\sqrt{\beta}/(3l) = g_*\sqrt{\beta}. \quad (33)$$

Из (33) следует, что движение гравитирующих частиц в области возврата равнопеременное с изменением модуля скорости по закону

$$v_2 = (2\hat{g}\hat{x})^{1/2} = 2v_0\beta^{1/4}\sqrt{\hat{x}/3l}, \quad (34)$$

а закон изменения концентрации на границе системы имеет интегрируемую особенность $\sim (\hat{x})^{-1/2}$:

$$n = 2j_0/\sqrt{2\hat{g}\hat{x}}, \quad (35)$$

что указывает на конечность числа частиц, удерживаемых системой.

Литература

1. Сапогин В. Г. Плоские самосогласованные гамильтоновы системы гравитирующих частиц // Изв. вузов Сев.-Кавк. регион. Сер. Естеств. науки.—1996.—№ 3.—С. 72–78.
2. Сапогин В. Г. Механизмы удержания вещества самосогласованным полем.— Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000.—254 с.
3. Сапогин В. Г. Бесстолкновительный кластер плоской динамической системы зарядов с V -образной потенциальной щелью // Вестник ЮНЦ.—2005.—Т. 1, № 2.—С. 9–16.

Сапогин Владимир Георгиевич
 Таганрогский технологический институт
 Южного федерального университета
 Россия, 347928, г. Таганрог, ул. Некрасовская, 44
 E-mail: sapogin@at.infotecstt.ru

РАЗНОВИДНОСТИ И ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ДЕКОМПОЗИЦИОННЫХ ПОДХОДОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ

А. В. Седов

Рассматриваются продольная и поперечная модификации декомпозиционного метода моделирования, используемого при идентификации процессов в сложных системах, в частности, энергетических. Определяются особенности использования предыстории изменения моделируемых процессов в каждой из модификаций, даются основные соотношения и общие формулы оценки точности моделирования.

1. Введение

Современный этап в развитии теории идентификации характеризуется прагматичным взглядом на имеющуюся в наличии априорную информацию об объекте контроля и условиях его функционирования [1, 2]. Априори известная математическая модель сложного объекта идентификации в большинстве случаев не удовлетворяет современным требованиям, предъявляемым к системам контроля, идентификации и прогнозирования. В сложных системах, работающих в разнообразных условиях, как сама математическая модель (уравнения объекта управления), так и ее параметры, и действующие возмущения (например, их статистические характеристики) не только не известны с достаточной точностью, но в ряде случаев их достаточно сложно определить экспериментально заранее. К таким объектам относятся, например, объекты электропотребления: энергосистемы, объединения, предприятия и т. п.

Одним из путей учета сложности объекта при моделировании является использование адаптивных декомпозиционных подходов. Под термином «декомпозиция» (decomposition) при моделировании сложных технических объектов понимают разбиение исходного объекта на более простые, как правило, той же природы, что и исходный объект, но при этом совокупность этих более простых объектов в той или иной степени эквивалентна исходному объекту [3].

В рамках статьи рассматриваются подходы и методы адаптивной *пространственно-структурной декомпозиции*. Пространственная декомпозиция при этом предполагает разбиение в пространстве выходных сигналов объекта, в пространстве состояния. Структурная — подразумевает выделение в моделях простых подсистем, допускающих независимое моделирование.

В зависимости от принципа моделирования многомерного процесса предлагается две модификации декомпозиционных методов моделирования: *продольная* и *поперечная*. В основе всех модификаций методов лежит ортогональное разложение моделируемых процессов по адаптивно настраиваемому базису в зависимости от изменения текущей информации, измеряемой на объекте. При этом реализуется алгебраический детерминированный подход [2].

Допустим, многомерный объект в j момент времени описывается вектором $\mathbf{P}_j = [P_{1j}, P_{2j}, \dots, P_{nj}]^T \in \mathbf{R}^n$ дискретно-распределенных параметров P_{ij} , $i = \overline{1, n}$. Кроме того, известна текущая предыстория изменения состояния объекта в форме матрицы

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N] \in \mathbf{R}^{n \times N}.$$

Опишем последовательно каждую из модификаций декомпозиционного метода моделирования (ДММ).

2. Продольная модификация ДММ

Название данной модификации отражает то, что каждый вектор дискретно-распределенных параметров (ВДРП) $\mathbf{P}_j$ моделируется индивидуально, при этом моделируются взаимосвязи *вдоль* вектора или между отдельными дискретно-распределенными параметрами P_{ij} , $i = \overline{1, n}$ в одном векторе $\mathbf{P}_j$. Такое моделирование выявляет ортогональные базисные функции $\mathbf{U}_i$, $\tilde{\mathbf{U}}_i$, $i = \overline{1, n}$ разложения каждого отдельного вектора $\mathbf{P}_j$, и эти базисные функции отражают указанные взаимозависимости.

Совокупность $\mathbf{U}_i$, $\tilde{\mathbf{U}}_i$, $i = \overline{1, n}$, представляющую ортонормированный базис (ОНБ) указанных базисных функций, запишем в виде матриц $\hat{\mathbf{U}}$, $\hat{\tilde{\mathbf{U}}}$. Матрицы $\hat{\mathbf{U}}$, $\hat{\tilde{\mathbf{U}}}$ определяются как матрицы собственных векторов квадратных матриц разброса $\mathbf{K}$ или $\tilde{\mathbf{K}}$, построенных по имеющейся в наличии предыстории $\mathbf{P}$, с использованием так называемой *R-технологии* (термин, принятый в компонентном анализе [4]). *R-технология* характеризуется тем, что размерность матриц

$\mathbf{K}$ или $\tilde{\mathbf{K}}$ равна $n \times n$ и определяется числом отсчетов n в каждом векторе $\mathbf{P}_j$ из $\mathbf{P}$. Формулы расчета матриц разброса $\mathbf{K}$ и $\tilde{\mathbf{K}}$ при этом имеют вид:

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{P}}^T / (N - 1); \quad (1)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T / (N - 1), \quad (2)$$

где

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P} - \underbrace{[\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}, \dots, \bar{\mathbf{P}}]}_{N \text{ столбцов}} \quad (3)$$

— матрица, полученная по предыстории $\mathbf{P}$ путем вычитания среднего вектора

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{P}_j \quad (4)$$

из каждого ВДРП $\mathbf{P}_j$.

Матрицы базисных функций $\hat{\mathbf{U}}$, $\hat{\mathbf{U}}$ продольной модификации ДММ определяются при этом по формулам:

$$\hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{U}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n); \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{U}}^T \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{U}} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3, \dots, \tilde{\lambda}_n), \quad (6)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$ — собственные числа матриц $\mathbf{K}$ и $\tilde{\mathbf{K}}$.

Каждый собственный вектор или базисная функция $\mathbf{U}_i$, $\tilde{\mathbf{U}}_i$, $i = \overline{1, n}$, являющаяся столбцом матриц $\hat{\mathbf{U}}$, $\hat{\mathbf{U}}$, также состоит из n отсчетов и используется для моделирования отсчетов отдельного ВДРП $\mathbf{P}_j$. Каждая из выделенных составляющих $\mathbf{U}_i$ ВДРП $\mathbf{P}_j$ является отражением отдельных независимых элементов внутренней *структуры объекта*. Таким образом, реализуется структурная декомпозиция на основе анализа предыстории в пространстве выходных параметров объекта.

Согласно продольной модификации ДММ, определяемой формулами (1)–(6), реализуется трендовая модель [5], и используется ортогональное разложение непосредственно самого вектора $\mathbf{P}_j$. При этом вектор $\mathbf{P}_j$ представляется в виде суммы двух слагаемых: динамически изменяющейся детерминированной части (тренда) $\mathbf{P}_{Sj}$ и

составляющей $\mathbf{P}_{Dj}$, обусловленной действием помех и неучтенных факторов, в виде:

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_{Sj} + \mathbf{P}_{Dj} = \bar{\mathbf{P}} + \widehat{\mathbf{U}} \Delta \widehat{\mathbf{f}}_j + \mathbf{P}_{Dj} = \bar{\mathbf{P}} + \sum_{i=1}^m \Delta f_{ij} \mathbf{U}_i + \xi + \mathbf{P}_{Dj}; \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_{Sj} + \mathbf{P}_{Dj} = \widehat{\mathbf{U}} \widehat{\mathbf{f}}_j + \mathbf{P}_{Dj} = \sum_{i=1}^m \tilde{f}_{ij} \tilde{\mathbf{U}}_i + \xi + \mathbf{P}_{Dj}. \quad (8)$$

В случае использования матрицы $\mathbf{K}$ при моделировании на основе продольного ДММ возможно применение более простой модели типа (8), характерной для случая использования матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_j &= \mathbf{P}_{Sj} + \mathbf{P}_{Dj} = \mathbf{U} \mathbf{f}_j + \mathbf{P}_{Dj} = \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbf{U}_i f_{ij} + \sum_{i=m+1}^n \mathbf{U}_i f_{ij} + \mathbf{P}_{Dj} = \sum_{i=1}^m \mathbf{U}_i f_{ij} + \xi + \mathbf{P}_{Dj}. \end{aligned}$$

Величина m или порядок модели определяется из выражения [4, 5] для собственных чисел матрицы разброса $\mathbf{K}$ или $\tilde{\mathbf{K}}$ вида:

$$\frac{\sum_{i=m+1}^n \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} < 0,01 \div 0,05.$$

При этом вектор ξ представляет собой практически постоянные значения координат, которые имеют малую изменчивость менее $1 \div 5\%$. Наличие вектора ξ обусловлено погрешностью, связанной с уменьшением числа слагаемых до m в моделях (7), (8). Как показано в работах [4, 5], модель (7) имеет наименьшую погрешность $\|\xi\|$ среди всех возможных ортогональных разложений данного типа для $(\mathbf{P}_{Sj} - \bar{\mathbf{P}})$ с m составляющими-слагаемыми:

$$\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T \approx \mathbf{P}_{Sj} - \bar{\mathbf{P}} - \sum_{i=1}^m \Delta f_{ij} \mathbf{U}_i, \quad \|\xi\| \rightarrow \min.$$

Данную особенность модели (7) связывают со свойством наилучшей самовоспроизводимости или прогноза. Модель (8) имеет наименьшую погрешность $\|\xi\|$ среди всех возможных ортогональных разложений данного типа для $\mathbf{P}_{Sj}$ с m составляющими-слагаемыми.

По предыстории процесса $\mathbf{P}$ определяют значения коэффициентов разложения $\Delta \mathbf{f}_j$ или $\hat{\mathbf{f}}_j$:

$$\Delta \mathbf{f}_j = \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{P}}_j, \quad \hat{\mathbf{f}}_j = \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{P}_j, \quad j = \overline{1, N}.$$

Изменения отдельных координат векторов $\Delta \mathbf{f}_j$ или $\hat{\mathbf{f}}_j$ линейно независимы, поэтому для моделирования каждой из них $\Delta f_{1j}, \dots, \Delta f_{mj}$ или $\hat{f}_{1j}, \dots, \hat{f}_{mj}$ применимо m одномерных, независимых линейных или нелинейных моделей вида:

$$\Delta f_{ij} = \psi_i(t_j, \Delta f_{ij}, \mathbf{Z}_j); \quad \tilde{f}_{ij} = \psi_i(t_j, \tilde{f}_{ij}, \mathbf{Z}_j), \quad i = \overline{1, m},$$

где $\mathbf{Z}_j = [z_{1j}, \dots, z_{rj}]^T \in \mathbf{R}^r$ — вектор входных воздействий на объект. Таким образом, осуществляется разбиение общей модели на независимые более простые, и реализуется продольная модификация адаптивной декомпозиционной модели сложного объекта.

3. Поперечная модификация ДММ

Данная *поперечная* модификация ДММ используется для моделирования взаимосвязей одноименных i -ых дискретно-распределенных параметров вектора $\mathbf{P}_j$ в случае изменения этих параметров во времени $P_{ij}, j = \overline{1, N}$. Условно вектор моделирования при этом направлен перпендикулярно или поперек каждого отдельного ВДРП $\mathbf{P}_j$, поэтому и название данной модификации ДММ — *поперечного моделирования*.

При описании данной модификации ДММ удобно матрицу предыстории $\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N] \in \mathbf{R}^{n \times N}$ рассматривать как состоящую не из векторов-столбцов $\mathbf{P}_j$, а из векторов-строк $\tilde{\mathbf{P}}_i, i = \overline{1, n}$, т. е. можно записать $\mathbf{P} = [\tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n]^T \in \mathbf{R}^{n \times N}$.

При поперечном моделировании используются иные базисные ортогональные функции $\mathbf{U}_i^{(N)}, \tilde{\mathbf{U}}_i^{(N)}, i = \overline{1, N}$, с помощью которых оптимальным образом, с точки зрения точности, при минимальном числе этих функций возможно воспроизведение изменения векторов-строк $\tilde{\mathbf{P}}_i, i = \overline{1, n}$ за время предыстории.

Рассмотренная же ранее продольная модификация ДММ выявляет базисные ортогональные функции $\mathbf{U}_i, \tilde{\mathbf{U}}_i, i = \overline{1, n}$, с помощью которых оптимальным образом, с точки зрения точности, при минимальном числе функций возможно воспроизведение каждого ВДРП

$\mathbf{P}_j$ из предыстории. Оптимальность же воспроизведения векторов $\tilde{\mathbf{P}}_i$, $i = \overline{1, n}$ из предыстории при этом не гарантируется.

В случае поперечной модификации ДММ в качестве матриц базисных функций или ОНБ

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{U}}^{(N)} &= [\mathbf{U}_1^{(N)}, \mathbf{U}_2^{(N)}, \dots, \mathbf{U}_m^{(N)}, \dots, \mathbf{U}_N^{(N)}], \\ \widehat{\mathbf{U}}^{(N)} &= [\tilde{\mathbf{U}}_1^{(N)}, \tilde{\mathbf{U}}_2^{(N)}, \dots, \tilde{\mathbf{U}}_m^{(N)}, \dots, \tilde{\mathbf{U}}_N^{(N)}]\end{aligned}$$

используют собственные вектора квадратных матриц разброса $\mathbf{K}^{(N)}$ или $\tilde{\mathbf{K}}^{(N)}$, построенных по имеющейся в наличии предыстории $\mathbf{P} = [\tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n]^T \in \mathbf{R}^{n \times N}$. Указанный способ получения ортогональных функций иногда называют *Q-технологией* [4]. Q-технология характеризуется тем, что размерность матриц $\mathbf{K}^{(N)}$ или $\tilde{\mathbf{K}}^{(N)}$ при этом равна $N \times N$ и определяется числом N ВДРП $\mathbf{P}_j$ в предыстории $\mathbf{P}$. Основные формулы расчета матриц разброса $\mathbf{K}^{(N)}$ и $\tilde{\mathbf{K}}^{(N)}$ при этом имеют вид:

$$\mathbf{K}^{(N)} = \frac{(\widehat{\mathbf{P}}^{(N)})^T \widehat{\mathbf{P}}^{(N)}}{n-1}; \quad \tilde{\mathbf{K}}^{(N)} = \frac{\mathbf{P}^T \mathbf{P}}{n-1},$$

где $\widehat{\mathbf{P}}^{(N)} = \mathbf{P} - \underbrace{[\tilde{\mathbf{P}}^{(N)}, \tilde{\mathbf{P}}^{(N)}, \tilde{\mathbf{P}}^{(N)}, \dots, \tilde{\mathbf{P}}^{(N)}]^T}_n$ — матрица, полученная по предыстории $\mathbf{P}$ путем вычитания среднего вектора

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(N)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{P}}_i$$

из каждого вектора-строки $\tilde{\mathbf{P}}_i$ предыстории $\mathbf{P}$.

Матрицы $\widehat{\mathbf{U}}^{(N)}$ и $\tilde{\mathbf{U}}^{(N)}$ базисных функций $\mathbf{U}_j^{(N)}$, $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(N)}$, $j = \overline{1, N}$ ДММ определяются при этом по формулам:

$$(\widehat{\mathbf{U}}^{(N)})^T \mathbf{K}^{(N)} \widehat{\mathbf{U}}^{(N)} = \text{diag}(\lambda_1^{(N)}, \lambda_2^{(N)}, \lambda_3^{(N)}, \dots, \lambda_N^{(N)}), \quad (9)$$

$$(\widehat{\mathbf{U}}^{(N)})^T \tilde{\mathbf{K}}^{(N)} \widehat{\mathbf{U}}^{(N)} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1^{(N)}, \tilde{\lambda}_2^{(N)}, \tilde{\lambda}_3^{(N)}, \dots, \tilde{\lambda}_N^{(N)}), \quad (10)$$

где $\lambda_1^{(N)}, \dots, \lambda_N^{(N)}$ и $\tilde{\lambda}_1^{(N)}, \dots, \tilde{\lambda}_N^{(N)}$ — собственные числа матриц $\mathbf{K}^{(N)}$ и $\tilde{\mathbf{K}}^{(N)}$.

Каждый собственный вектор или базисная функция $\mathbf{U}_j^{(N)}$, $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(N)}$, $j = \overline{1, N}$, являющиеся столбцами матриц $\hat{\mathbf{U}}^{(N)}$ и $\tilde{\mathbf{U}}^{(N)}$, определяемых по формулам (9), (10), также состоит из N отсчетов и используется для моделирования изменения векторов-строк $\tilde{\mathbf{P}}_i$ предыстории $\mathbf{P}$.

В поперечной модификации ДММ также как и в продольной модификации реализуется трендовая модель, но используется ортогональное разложение векторов $\tilde{\mathbf{P}}_i$. При этом вектор представляется в виде суммы двух слагаемых: динамически изменяющейся детерминированной части (тренда) $\tilde{\mathbf{P}}_{Si}$ и составляющей $\tilde{\mathbf{P}}_{Di}$, обусловленной действием помех и неучтенных факторов:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}_i &= \tilde{\mathbf{P}}_{Si} + \tilde{\mathbf{P}}_{Di} = \bar{\mathbf{P}}^{(N)} + \hat{\mathbf{U}}^{(N)} \Delta \hat{\mathbf{f}}_i^{(N)} + \tilde{\mathbf{P}}_{Di} = \\ &= \bar{\mathbf{P}}^{(N)} + \sum_{j=1}^m \Delta f_{ij}^{(N)} \mathbf{U}_j^{(N)} + \xi^{(N)} + \tilde{\mathbf{P}}_{Di};\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}_i &= \tilde{\mathbf{P}}_{Si} + \tilde{\mathbf{P}}_{Di} = \hat{\mathbf{U}}^{(N)} \hat{\mathbf{f}}_i^{(N)} + \tilde{\mathbf{P}}_{Di} = \\ &= \sum_{j=1}^m \tilde{f}_{ij}^{(N)} \tilde{\mathbf{U}}_j^{(N)} + \tilde{\xi}^{(N)} + \tilde{\mathbf{P}}_{Di}.\end{aligned}\quad (12)$$

Расчет коэффициентов разложения в предыдущих формулах (11), (12) осуществляется по предыстории $\mathbf{P}$ в соответствии с выражениями:

$$\Delta \hat{\mathbf{f}}_i^{(N)} = [\Delta f_{i1}^{(N)}, \Delta f_{i2}^{(N)}, \dots, \Delta f_{iN}^{(N)}]^T = (\hat{\mathbf{U}}^{(N)})^T (\tilde{\mathbf{P}}_i - \bar{\mathbf{P}}^{(N)}); \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_i^{(N)} = [\tilde{f}_{i1}^{(N)}, \tilde{f}_{i2}^{(N)}, \dots, \tilde{f}_{iN}^{(N)}]^T = (\hat{\mathbf{U}}^{(N)})^T \tilde{\mathbf{P}}_i. \quad (14)$$

Изменения отдельных координат векторов $\Delta \hat{\mathbf{f}}_i^{(N)}$ или $\hat{\mathbf{f}}_i^{(N)}$ линейно независимы, поэтому для моделирования каждой из них применимы *m одномерных, независимых линейных или нелинейных моделей* вида:

$$\Delta f_{ij}^{(N)} = \tilde{\psi}_j(t_j, \Delta f_{ij}^{(N)}, \mathbf{Z}_j); \quad \tilde{f}_{ij}^{(N)} = \hat{\psi}_j(t_j, \tilde{f}_{ij}^{(N)}, \mathbf{Z}_j); \quad j = \overline{1, m},$$

где $\mathbf{Z}_j = [z_{1j}, \dots, z_{rj}]^T \in \mathbf{R}^r$ — вектор входных воздействий на объект.

Порядок модели m определяется из выражения для собственных чисел матриц разброса $\mathbf{K}^{(N)}$ и $\tilde{\mathbf{K}}^{(N)}$, подобного используемому в продольной модификации.

Возможна запись моделей (11), (12) в форме подобной (7), (8), когда в качестве выходной величины выступает ВДРП $\mathbf{P}_j$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_j &= \mathbf{P}_{Sj} + \mathbf{P}_{Dj} = \bar{\mathbf{P}}_j^{(N)} \mathbf{E}_{n \times 1} + (\text{row}_j(\hat{\mathbf{U}}^{(N)}) \Delta \hat{\mathbf{f}}^{(N)})^T + \mathbf{P}_{Dj} = \\ &= \bar{\mathbf{P}}_j^{(N)} \mathbf{E}_{n \times 1} + \sum_{i=1}^m \text{row}_i(\Delta \hat{\mathbf{f}}^{(N)})^T U_{ji}^{(N)} + \xi^{(N)} + \mathbf{P}_{Dj};\end{aligned}\quad (15)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_j &= \mathbf{P}_{Sj} + \mathbf{P}_{Dj} = (\text{row}_j(\hat{\mathbf{U}}^{(N)}) \hat{\mathbf{f}}^{(N)})^T + \mathbf{P}_{Dj} = \\ &= \sum_{i=1}^m \text{row}_i(\hat{\mathbf{f}}^{(N)})^T \tilde{U}_{ji}^{(N)} + \tilde{\xi}^{(N)} + \mathbf{P}_{Dj},\end{aligned}\quad (16)$$

где $\mathbf{E}_{n \times 1} = \left[\underbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}_n \right]^T$ — единичный вектор, состоящий из n элементов; $\Delta \hat{\mathbf{f}}^{(N)} = \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{f}}_1^{(N)} & \dots & \Delta \hat{\mathbf{f}}_n^{(N)} \end{bmatrix}$ — матрица коэффициентов разложения (13); $\hat{\mathbf{f}}^{(N)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_1^{(N)} & \dots & \hat{\mathbf{f}}_n^{(N)} \end{bmatrix}$ — матрица коэффициентов разложения (14); $\text{row}_j(\mathbf{A})$ — функция выделения j -ой строки матрицы $\mathbf{A}$.

Погрешность моделирования ВДРП $\mathbf{P}_j$ на основе формул (15), (16) поперечного ДММ несколько выше, чем погрешность при моделировании по формулам (7), (8) продольной модификации. Это объясняется тем, что выбор базисных функций $\mathbf{U}_j^{(N)}$, $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(N)}$, $j = \overline{1, N}$ осуществляется с точки зрения оптимизации точности моделирования векторов $\tilde{\mathbf{P}}_i$, а не ВДРП $\mathbf{P}_j$. Среднеквадратическая погрешность моделирования может оцениваться по формулам:

$$\Delta = \sqrt{\sum_{i=m+1}^N \lambda_i^{(N)}} \text{ или } \Delta = \sqrt{\sum_{i=m+1}^N \tilde{\lambda}_i^{(N)}}.$$

Таким образом, реализуется поперечная модификация адаптивной декомпозиционной модели сложного объекта.

4. Общие выводы по использованию модификаций ДММ

1) В рассмотренных модификациях ДММ в качестве базисных функций могут браться собственные вектора одного из двух типов матриц: *матриц централизованного разброса (рассеяния)* $\mathbf{K}, \mathbf{K}^{(N)}$ или *матриц нецентрализованного разброса (рассеяния)* $\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{K}}^{(N)}$ векторов предыстории. Исследования показали, что использование первого типа матриц приводит к построению *теоретически* более точных моделей, однако использование матриц второго типа позволяет реализовать более устойчивые модели.

2) При реализации *продольной* модификации ДММ основной акцент перенесен на моделирование взаимосвязей между отдельными параметрами P_{ij} , $i = \overline{1, n}$ внутри ВДРП $\mathbf{P}_j$, т. е., по сути, выявление внутренних взаимосвязей сложного объекта, однако, учет влияния внешних факторов при этом опосредованный.

3) Преимуществом *поперечного* ДММ является лучший учет влияния внешних факторов, большая наглядность и лучшая интерпретируемость этого влияния, так как основной акцент при моделировании перенесен на выявление взаимосвязей между различными ВДРП $\mathbf{P}_j$ во времени. Учет внутренних взаимосвязей объекта при этом осуществляется опосредованно.

Литература

1. Пупков К. А., Коньков В. Г. Интеллектуальные системы.—М.: Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003.—348 с.
2. Тераев Е. Д., Шамриков Б. М. Цифровые системы и поэтапное адаптивное управление.—М.: Наука, 1999.—330 с.
3. Первозванский А. А., Гайцгори В. Г. Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация.—М.: Наука, 1979.—344 с.
4. Иберла К. Факторный анализ.—М.: Статистика, 1980.—398 с.
5. Седов А. В., Надтока И. И. Системы контроля, распознавания и прогнозирования электропотребления: модели, методы, алгоритмы и средства.—Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 2002.—320 с.

Седов Андрей Владимирович

Южный научный центр РАН

Россия, 344006, Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41

E-mail: Sedov_A.V@mail.ru

О СУЩЕСТВЕННОМ И ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ
ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ДВУХМАГНОННЫХ
СИСТЕМ В ТРЕХМЕРНОЙ ИЗОТРОПНОЙ
ПРИМЕСНОЙ ФЕРРОМАГНЕТНОЙ МОДЕЛИ
ГЕЙЗЕНБЕРГА С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ
БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ

С. М. Ташпулатов

Исследованы существенные и дискретные спектры оператора энергии двухмагнонных систем в трехмерной изотропной ферромагнитной примесной модели Гейзенберга с взаимодействием ближайших соседей. Показано, что существенный спектр этой трехчастичной системы состоит из не более чем четырех отрезков и дискретный спектр системы на краях существенного спектра трехчастичной системы разве лишь конечен.

Одним из замечательных результатов спектрального анализа трехчастичного непрерывного оператора Шредингера является эффект Ефимова: если в системе трех частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, ни одна из трех двухчастичных подсистем не имеет связанных состояний (СС) с отрицательной энергией, но по меньшей мере две из них имеют резонанс с энергией в нуле, то у этой трехчастичной системы существует бесконечное число трехчастичных СС с отрицательной энергией, накапливающихся к нулю. Этот эффект впервые был обнаружен В. Н. Ефимовым [1]. В работах [2–3] эта задача изучалась в физическом аспекте. Строгое математическое доказательство существования эффекта Ефимова было проведено впервые в работе Д. Р. Яфаева [4], а затем в работах Овчинникова и Сигала [5], а также в работах Тамура [6], Соболева [7].

В моделях физики твердого тела возникают так называемые дискретные операторы Шредингера, являющиеся решетчатым аналогом обычного непрерывного трехчастичного оператора Шредингера. Для таких операторов существование эффекта Ефимова на физическом уровне строгости было показано в работах [8–10].

В работах С. Н. Лакаева и его учеников исследованы существование эффекта Ефимова для решетчатых трехчастичных систем (бо-

зонов), взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения при фиксированном значении полного квазиимпульса системы (см., например, [11–14]).

В настоящей работе рассматривается двухмагنونная система в изотропной примесной ферромагнитной модели Гейзенберга на трехмерной решетке Z^3 с взаимодействием ближайших соседей и исследуется существенный и дискретный спектр системы.

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = J \sum_{m, \tau} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau}) + (J_0 - J) \sum_{\tau} (\vec{S}_0 \vec{S}_{\tau}), \quad (1)$$

где $J < 0$ и J_0 — параметры билинейного обменного взаимодействия между атомами и между атомами и примесями, соответственно, $\vec{S}_m = (S_m^x; S_m^y; S_m^z)$ — оператор атомного спина величины $s = 1/2$ в узле m , а по τ ведется суммирование по ближайшим соседям. Гамильтониан (1) действует в симметрическом фоковском пространстве $\mathcal{H}$. Обозначим через φ_0 вектор, называемый вакуумным и однозначно определяемый условиями: $S_m^+ \varphi_0 = 0$, $S_m^z \varphi_0 = \frac{\varphi_0}{2}$, где $\|\varphi_0\| = 1$. Положим $S_m^{\pm} = S_m^x \pm iS_m^y$, где S_m^+ и S_m^- — соответственно, операторы рождения и уничтожения магнона в узле m . Вектор $S_m^- S_n^- \varphi_0$ описывает состояние системы двух магнонов, находящегося в узлах m , и n со значением спина $s = 1/2$. Векторы $S_m^- S_n^- \varphi_0$ образуют ортонормальную систему. Пространство, натянутое на эти векторы, обозначим через $\widehat{\mathcal{H}}_2$. Это пространство евклидово относительно естественного скалярного произведения. Замыкание этого пространства обозначим через $\mathcal{H}_2$. Оно называется пространством двухмагнонных состояний оператора H .

Предложение 1. Пространство $\mathcal{H}_2$ инвариантно относительно оператора H . Оператор $H_2 = H|_{\mathcal{H}_2}$ является ограниченным самосопряженным оператором, который порождает ограниченный самосопряженный оператор $\overline{H}_2$, действующий в пространстве $l_2(Z^{\nu} \times Z^{\nu})$ по формуле

$$\begin{aligned} (\overline{H}_2 f)(p; q) = & J \sum_{p, q, \tau} \left\{ [\delta_{p, q+\tau} + \delta_{p+\tau, q} - 2] f(p; q) - \frac{1}{2} \delta_{p-\tau, q} f(p-\tau; q) - \right. \\ & - \frac{1}{2} \delta_{p, q-\tau} f(p; q-\tau) + \frac{1}{2} f(p; q-\tau) - \frac{1}{2} \delta_{p+\tau, q} f(p+\tau; q) + \\ & \left. + \frac{1}{2} f(p+\tau; q) + \frac{1}{2} f(p; q+\tau) - \frac{1}{2} \delta_{p, q+\tau} f(p; q+\tau) \right\} + \frac{1}{2} f(p-\tau; q) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (J_0 - J) \sum_{p,q,\tau} \left\{ [\delta_{p,\tau} \delta_{q,0} + \delta_{p,0} \delta_{q,\tau} - \frac{1}{2} \delta_{p,\tau} - \frac{1}{2} \delta_{q,\tau} - \frac{1}{2} \delta_{p,0} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \delta_{q,0}] f(p; q) - \frac{1}{2} \delta_{p,0} \delta_{q,\tau} f(p; 0) - \frac{1}{2} \delta_{p,\tau} \delta_{q,0} f(0; q) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \delta_{p,\tau} f(0; q) + \frac{1}{2} \delta_{q,\tau} f(p; 0) - \frac{1}{2} \delta_{p,0} \delta_{q,\tau} f(\tau; q) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \delta_{p,\tau} \delta_{q,0} f(p; \tau) + \frac{1}{2} \delta_{p,0} f(\tau; q) + \frac{1}{2} \delta_{q,0} f(p; \tau) \right\},
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера. Сам оператор H_2 действует на вектор $\psi \in \mathcal{H}_2$ по формуле

$$H_2 = \sum_{p,q,\tau} (\bar{H}_2 f)(p; q) S_p^- S_q^- \varphi_0. \tag{3}$$

Предложение 1 доказывается с использованием известных коммутационных соотношений между операторами S_m^+ , S_p^- и S_q^z .

Используя критерий Вейля, можно доказать, что спектры операторов H_2 и $\bar{H}_2$ совпадают.

Наша цель состоит в изучении спектра оператора H_2 . Это удобно сделать в его квазиимпульсном представлении. Обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье

$$\mathcal{F} : l_2(Z^\nu \times Z^\nu) \Rightarrow L_2(T^\nu \times T^\nu).$$

Здесь T^ν — ν -мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda : \lambda(T^\nu) = 1$.

Оператор H_2 в квазиимпульсном представлении в пространстве $L_2(T^\nu \times T^\nu)$ действует по формуле

$$\begin{aligned}
(\widetilde{H}_2 f)(x; y) = & \left[-4J\nu + 2J \sum_{i=1}^{\nu} (\cos x_i + \cos y_i) \right] f(x; y) - \\
& - \varepsilon \int_{T^\nu} \left[\nu + \sum_{i=1}^{\nu} [\cos(x_i - s_i) - \cos x_i - \cos s_i] \right] f(s; y) ds - \\
& - \varepsilon \int_{T^\nu} \left[\nu + \sum_{i=1}^{\nu} [\cos(y_i - t_i) - \cos y_i - \cos t_i] \right] f(x; t) dt + \\
& + J \int_{T^\nu} \left[4\nu - \sum_{i=1}^{\nu} [\cos s_i + \cos x_i + \cos y_i + \cos(x_i + y_i - s_i)] \right] f(s; x + y - s) ds +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \left\{ 2\nu + 2 \sum_{i=1}^{\nu} [\cos(x_i - s_i) + \cos(y_i - t_i) + \right. \\
& + \cos(x_i + y_i - s_i - t_i)] - \cos t_i - \cos s_i - \cos x_i - \cos y_i - \\
& - \cos(x_i - s_i - t_i) - \cos(y_i - s_i - t_i) - \cos(x_i + y_i - t_i) - \\
& \left. - \cos(x_i + y_i - s_i) \right\} f(s; t) ds dt, \quad \varepsilon = J_0 - J.
\end{aligned} \tag{4}$$

1. Одномагнот примесное состояние

Интенсивное развитие физики пленочного состояния, а также применение пленок в различных областях физики и техники обуславливают значительный интерес к изучению локализованных примесных состояний (ЛПС) магнетиков.

ЛПС в ферромагнетике Гейзенберга с ферромагнитной или антиферромагнитной примесями изучались во многих работах (см., например, в [15–20]), где подробно рассматривались случаи линейной или кубической решетки. Было показано, что в линейном случае существует два типа ЛПС, а в кубической решетке — три. В работе [21] исследуется спектр и ЛПС одномагнитных систем в примесной модели Гейзенберга на ν -мерной решетке Z^ν . В этой работе рассматривался как случай ферромагнетика с ферромагнитной примесью, так и случай ферромагнетика с антиферромагнитной примесью. Показано, что в ν -мерном случае система имеет не более трех (без учета кратности вырождений их энергии) ЛПС, и найдено условие существования этих состояний. Определено местоположение их энергии относительно непрерывного спектра системы.

Гамильтониан одномагнитной примесной системы также имеет вид (1). Вектор $S_m^- \varphi_0$ описывает состояние системы одного магнота, находящегося в узле m , со значением спина $s = 1/2$. Векторы $S_m^- \varphi_0$ образуют ортонормальную систему. Пространство, натянутое на эти векторы, обозначим через $\widehat{\mathcal{H}}_1$. Это пространство евклидово относительно естественного скалярного произведения. Замыкание этого пространства обозначим через $\mathcal{H}_1$. Оно называется пространством одномагнитных состояний оператора H .

Предложение 2. Пространство $\mathcal{H}_1$ инвариантно относительно оператора H . Оператор $H_1 = H|_{\mathcal{H}_1}$ является ограниченным самосопряженным оператором, порождает ограниченный самосопряжен-

ный оператор $\bar{H}_1$, действующий в пространстве $l_2(Z^\nu)$ по формуле

$$\begin{aligned} (\bar{H}_1 f)(p) = \sum_{p, \tau} \left[-Jf(p) + \frac{J}{2}(f(p+\tau) + f(p-\tau)) \right] + \\ + (J_0 - J) \sum_{p, \tau} [(-\delta_{p,0} - \delta_{p,\tau})f(p) + (\delta_{p,\tau}f(0) + \delta_{p,0}f(\tau))], \end{aligned} \quad (5)$$

где $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера. Сам оператор H_1 действует на вектор $\psi \in \mathcal{H}_1$ по формуле

$$H_1 \psi = \sum_p (\bar{H}_1 f)(p) S_p^- \varphi_0. \quad (6)$$

Предложение 2 доказывается с использованием известных коммутационных соотношений между операторами S_m^+ , S_p^- и S_q^z .

Используя критерия Вейля, можно доказать, что спектры операторов H_1 и $\bar{H}_1$ совпадают.

Наша цель состоит в изучение спектра оператора H_1 . Это удобно сделать в его квазиимпульсном представлении. Обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье $\mathcal{F} : l_2(Z^\nu) \Rightarrow L_2(T^\nu)$. Здесь T^ν — ν -мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda : \lambda(T^\nu) = 1$.

Предложение 3. Пусть $\mathcal{F} : \mathcal{H}_1 \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_1 \equiv L_2(T^\nu)$ — преобразование Фурье. Оператор $\bar{H}_1$ переходит в оператор $\tilde{H}_1 = \mathcal{F} \bar{H}_1 \mathcal{F}^{-1}$, который действует в пространстве $L_2(T^\nu)$ по формуле

$$(\tilde{H}_1 f)(x) = h(x)f(x) + \int_{T^\nu} h_1(x;t)f(t) dt, \quad (7)$$

где $h(x) = -2J\nu + 2J \sum_{i=1}^\nu \cos x_i$, $h_1(x;t) = -2\varepsilon [\nu + \sum_{i=1}^\nu [\cos(x_i - t_i) - \cos x_i - \cos t_i]]$, здесь $\varepsilon = J_0 - J$; $x, t \in T^\nu$.

Доказательство предложения 3 проводится непосредственно с использованием преобразования Фурье. Известно, что непрерывный спектр оператора $\bar{H}_1$ не зависит от функции $h(x;t)$ и заполняет весь отрезок $[m_\nu; M_\nu]$, где $m_\nu = \min_{x \in T^\nu} h(x)$, $M_\nu = \max_{x \in T^\nu} h(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Собственная функция $\varphi \in L_2(T^\nu)$ оператора $\tilde{H}_1$, отвечающая собственному значению z , называется локально примесным состоянием (ЛПС) оператора $\tilde{H}_1$, а величина z — энергией этого состояния.

Обозначим

$$\Delta_\nu(z) = (1 - 2\varepsilon J_{\nu,1}(z))(1 - 2\varepsilon J_{\nu,2}(z))^\nu (1 - \varepsilon J_{\nu,3}(z))^{\nu-1}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} J_{\nu,1}(z) &= \int_{T^\nu} \frac{(1 - \cos s_1)(\nu - \sum_{i=1}^\nu \cos s_i) ds_1 ds_2 \dots ds_\nu}{h(s_1; s_2; \dots; s_\nu) - z}, \\ J_{\nu,2}(z) &= \int_{T^\nu} \frac{\sin^2 s_1 ds_1 ds_2 \dots ds_\nu}{h(s_1; s_2; \dots; s_\nu) - z}, \\ J_{\nu,3}(z) &= \int_{T^\nu} \frac{(\cos s_1 - \cos s_2)^2 ds_1 ds_2 \dots ds_\nu}{h(s_1; s_2; \dots; s_\nu) - z}. \end{aligned}$$

Лемма 1. Число $z = z_0 \notin [m_\nu; M_\nu]$ является собственным значением оператора $\tilde{H}_1$ тогда и только тогда, когда является нулем функции $\Delta_\nu(z)$, т. е. $\Delta_\nu(z_0) = 0$.

Обозначим через P пару $(J; \varepsilon) : P = (J; \varepsilon)$ и

$$\begin{aligned} a &= \int_{T^\nu} \frac{\sin^2 s_1 ds_1 ds_2 ds_3}{3 - \cos s_1 - \cos s_2 - \cos s_3} = \int_{T^\nu} \frac{\sin^2 s_1 ds_1 ds_2 ds_3}{3 + \cos s_1 + \cos s_2 + \cos s_3}, \\ b &= \int_{T^\nu} \frac{(\cos s_1 - \cos s_2)^2 ds_1 ds_2 ds_3}{3 - \cos s_1 - \cos s_2 - \cos s_3} = \int_{T^\nu} \frac{(\cos s_1 - \cos s_2)^2 ds_1 ds_2 ds_3}{3 + \cos s_1 + \cos s_2 + \cos s_3}. \end{aligned}$$

Ясно, что $0 < a < b < 1$ и $2a < b$. Теперь при $\nu = 3$ введем следующие множества пар P :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{P : J < 0, 0 < \varepsilon \leq -J\}, \quad Q_2 = \left\{P : J < 0, \frac{J}{3} < \varepsilon < 0\right\}, \\ Q_3 &= \left\{P : J > 0, 0 < \varepsilon < \frac{J}{3}\right\}, \quad Q_4 = \{P : J > 0, -J < \varepsilon < 0\}, \\ Q_5 &= \left\{P : J < 0, -J \leq \varepsilon < -\frac{2J}{b}\right\}, \quad Q_6 = \left\{P : J > 0, \frac{J}{3} \leq \varepsilon < \frac{2J}{b}\right\}, \\ Q_7 &= \left\{P : J < 0, \frac{2J}{b} < \varepsilon \leq \frac{J}{3}\right\}, \quad Q_8 = \left\{P : J > 0, -\frac{2J}{b} < \varepsilon \leq -\frac{J}{a}\right\}, \\ Q_9 &= \left\{P : J < 0, -\frac{2J}{b} \leq \varepsilon < -\frac{J}{a}\right\}, \quad Q_{10} = \left\{P : J > 0, -\frac{2J}{b} \leq \varepsilon < -\frac{J}{a}\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \left\{ P : J < 0, \frac{J}{a} < \varepsilon \leq \frac{2J}{b} \right\}, & Q_{12} &= \left\{ P : J > 0, -\frac{J}{a} < \varepsilon \leq -\frac{2J}{b} \right\}, \\
Q_{13} &= \left\{ P : J < 0, \varepsilon \geq -\frac{J}{a} \right\}, & Q_{14} &= \left\{ P : J > 0, \varepsilon \geq \frac{J}{a} \right\}, \\
Q_{15} &= \left\{ P : J < 0, \varepsilon \leq \frac{J}{a} \right\}, & Q_{16} &= \left\{ P : J > 0, \varepsilon \leq -\frac{J}{a} \right\}.
\end{aligned}$$

Теорема 1. А. Пусть $P \in Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$. Тогда оператор $\tilde{H}_1$ не имеет ЛПС.

Б. Пусть $P \in Q_5 \cup Q_6$ ($P \in Q_7 \cup Q_8$). Тогда оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное ЛПС со значением энергии $z < m_3$ ($z > M_3$). Уровень этой энергии невырожден.

В. Пусть $P \in Q_9 \cup Q_{10}$ ($P \in Q_{11} \cup Q_{12}$). Тогда оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два ЛПС φ_1 и φ_2 со значениями энергии, соответственно равными z_1 и z_2 (z_3 и z_4), причем $z_i < m_3$, $i = 1, 2$; ($z_j > M_3$, $j = 3, 4$). Кроме того, уровень z_1 (z_3) невырожден, а уровни z_2 (z_4) двукратно вырождены.

Г. Пусть $P \in Q_{13} \cup Q_{14}$ ($P \in Q_{15} \cup Q_{16}$). Тогда оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно три ЛПС φ_1 , φ_2 и φ_3 со значениями энергии соответственно равными z_1 , z_2 и z_3 (z_4 , z_5 и z_6), причем $z_i < m_3$, $i = 1, 2, 3$; ($z_j > M_3$, $j = 4, 5, 6$). Кроме того, уровень z_1 (z_4) невырожден, уровни z_2 (z_5) двукратно вырождены, а уровень z_3 (z_6) трехкратно вырожден.

2. Двухмагнетонное состояние

Гамильтониан двухмагнетонной системы имеет вид:

$$H = J \sum_{m, \tau} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau}), \quad (9)$$

где $J < 0$ — параметры билинейного обменного взаимодействия между ближайшими атомами решетки. Оператор (9) в квазиимпульсном представлении в пространстве $L_2(T^\nu \times T^\nu)$ действует по формуле

$$\begin{aligned}
(\tilde{H}_2 f)(x; y) &= \left[-4J\nu + 2J \sum_{i=1}^{\nu} (\cos x_i + \cos y_i) \right] f(x; y) + \\
&+ J \int_{T^\nu} \left[4\nu - \sum_{i=1}^{\nu} [\cos s_i + \cos x_i + \cos y_i + \right. \\
&\left. + \cos(x_i + y_i - s_i)] \right] f(s; x + y - s) ds.
\end{aligned} \quad (10)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Собственная функция $\varphi \in L_2(T^\nu \times T^\nu)$ оператора $\tilde{H}_2$, отвечающая собственному значению z , называется связанным состоянием (СС) оператора $\tilde{H}_2$, а величина z — энергией этого состояния.

Спектр и связанные состояния оператора энергии двухмагнонных систем были изучены в работах [22–23]. Для краткости изложения исследование спектра оператора (10) здесь приводить не будем.

Конечность или бесконечность дискретного спектра данного трехчастичного дискретного оператора Шредингера зависит от количества двухчастичных подсистем, имеющих так называемый виртуальный уровень на краю существенного спектра трехчастичной системы. Дискретный спектр системы конечен, если на краю существенного спектра система имеет виртуальный уровень только одна двухчастичная подсистема или виртуальных уровней вообще нет у двухчастичных подсистем. Если же две или все три двухчастичные подсистемы имеют виртуальный уровень на краю существенного спектра, то дискретный спектр системы бесконечен. Двухчастичные подсистемы данной трехчастичной системы состоят из двух примесных двухчастичных подсистем и системы двух магнонов. Одномагнон примесные подсистемы не различимы, поэтому если одна из таких подсистем имеет виртуальный уровень, то другая также имеет виртуальный уровень на краю существенного спектра трехчастичной системы.

Сначала мы определим структуры существенного спектра рассматриваемой трехчастичной системы, потом проверим сколько двухчастичных подсистем данной системы имеют виртуальный уровень на краю существенного спектра.

Сравнивая формулы (4) и (7), легко можно убедиться, что оператор $\tilde{H}_2$ можно представить в виде: $\tilde{H}_2 = \tilde{H}_1 \otimes E + E \otimes \tilde{H}_1 + K_1 + K_2$, где E — единичный оператор в пространстве $\mathcal{H}_1$. Рассматриваемая трехчастичная система является замкнутой системой, а в замкнутых системах имеет место закон сохранения полного квазиимпульса системы. Кроме того, примесь закреплена в определенном узле (в узле с номером $m = 0$), поэтому ясно, что полный квазиимпульс трехчастичной системы и полный квазиимпульс двухмагнонной подсистемы равны. Теперь, фиксируя полный квазиимпульс системы можно разложить в прямой интеграл оператора $\tilde{H}_2$ и пространство $\mathcal{H}_2$, так что после разложения в прямой интеграл опе-

раторы $K_{1\Lambda}$ и $K_{2\Lambda}$ становятся компактными операторами. Поэтому существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ и оператора $\tilde{H}_1 \otimes E + E \otimes \tilde{H}_1$ совпадают. Простая проверка показывает, что спектр оператора $\tilde{H}_1$ не зависит от Λ . Спектр оператора $A \otimes E + E \otimes B$, где A и B плотно определенные ограниченные линейные операторы, было изучено в работах [24–26]. В этих работах дано явные формулы выражающие $\sigma_{ess.}(A \otimes E + E \otimes B)$ через $\sigma(A)$, $\sigma_{disc.}(A)$, $\sigma(B)$ и $\sigma_{disc.}(B)$. Кроме того, ясно, что $\sigma(A \otimes E + E \otimes B) = \{\lambda + \mu : \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}$. Мы уже исследовали спектр оператора $\tilde{H}_1$. Из полученных результатов видно, что спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит из непрерывного спектра и не более трех собственных значений, невырожденного, двукратно и трехкратно вырожденных.

Следующая теорема описывает структуру существенного спектра оператора $\tilde{H}_1 \otimes E + E \otimes \tilde{H}_1$.

Теорема 2. Если $0 < \varepsilon < -J$ или $\frac{J}{3} < \varepsilon < 0$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из единственного отрезка $G_1 = [0; -24J]$, т. е. $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2) = [0; -24J]$ и дискретный спектр оператора конечен.

Теорема 3. Если $\frac{2J}{b} \leq \varepsilon \leq \frac{J}{3}$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из двух отрезков: $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2) = [0; -24J] \cup [z_1; -12J + z_1]$ и в левом краю существенного спектра дискретный спектр оператора $\tilde{H}_2$ конечен.

Теорема 4. Если $\frac{J}{a} \leq \varepsilon \leq \frac{2J}{b}$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из трех отрезков: $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2) = [0; -24J] \cup [z_1; -12J + z_1] \cup [z_2; -12J + z_2]$ и в левом краю существенного спектра дискретный спектр оператора $\tilde{H}_2$ конечен.

Теорема 5. Если $\varepsilon \leq \frac{J}{a}$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из четырех отрезков: $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2) = [0; -24J] \cup [z_1; -12J + z_1] \cup [z_2; -12J + z_2] \cup [z_3; -12J + z_3]$ и в левом краю существенного спектра дискретный спектр оператора $\tilde{H}_2$ конечен.

Литература

1. Ефимов В. Н. Слабо связанные состояния трех резонансно взаимодействующих частиц // Ядерная физика.—1970.—Т. 12, вып. 5.—С. 1080–1091.
2. Amado R. D., Noble J. V. On Efimov's effect: a new pathology of three-body systems 1 // Phys. Lett. Ser. B.—1971.—Vol. 33, № 1.—P. 25–27.

3. *Amado R. D., Noble J. V.* On Efimov's effect: a new pathology of three-body systems 2 // *Phys. Rev. Ser. D.*—1972.—Vol. 33, № 8.—P. 1992–2002.
4. *Яфаев Д. Р.* К теории дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера // *Мат. сб.*—1974.—Т. 94(136), №4(8).—P. 567–593.
5. *Ovchinnikov Yu. N., Sigal J. M.* Number of bound states of three-body systems and Efimov's effect // *Ann. Physics.*—1989.—Vol. 123.—P. 274–295.
6. *Tamura H.* The Efimov effect of three-body Shrodinger operators // *J. Funct. Anal.*—1991.— Vol. 95.—P. 433–459.
7. *Sobolev A. V.* The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics // *Commun. Math. Phys.*—1993.—Vol. 156.—P. 101–126.
8. *Mattis L. C.* The few-body problem on lattice // *Rev. Modern Phys.*—1986.— Vol. 58, № 2.—P. 361–379.
9. *Малышев В. А., Минлос Р. А.* Кластерные операторы // *Тр. семинара им. И. Г. Петровского.*—1983.—Вып. 9.—С. 63–80.
10. *Mogilner A. I.* The problem of few quasi particle in solid state physics: In applications of self-adjoint extentions in quantum particles // *Lecture Notes in physics.*—Berlin: Springer-Verlag, 1988.—Vol. 324.
11. *Лакаев С. Н.* Об эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц // *Функ. анализ и его прил.*—1993.—Т. 27, вып. 3.—С. 15–28.
12. *Лакаев С. Н.* О бесконечном числе трехчастичных связанных состояний системы трех квантовых решетчатых частиц // *ТМФ.*—1991.—Т. 89, № 1.—С. 94–104.
13. *Лакаев С. Н.* О бесконечном числе трехчастичных связанных состояний системы трех одинаковых решетчатых частиц // *ДАН Уз. ССР.*—1991.—№ 6.—С. 11–14.
14. *Лакаев С.Н., Саматов С. М.* О конечности дискретного спектра гамильтониана системы трех произвольных частиц на решетке // *ТМФ.*—2001.—Т. 129, № 3.—С. 415–431.
15. *Изюмов Ю. А., Медведев М. В.* Примесные атомы в ферромагнитном кристалле // *ЖЭТФ.*—1965.—Т. 48, № 2.—С. 574–586.
16. *Ганн В. В., Зазунов Л. Г.* Локальные уровни в анизотропном ферромагнетике с примесным спином // *Физика твердого тела.*—1973.—Т. 15, № 12.—С. 3535–3569.
17. *Yung-Li Wang, Callen H.* Antiferromagnetically coupled impurities in a heisenberg ferromagnet. // *Phys. Rev.*—1967.—Vol. 160.—P. 358–363.
18. *Ogychi T., Ono I.* Localized magnons in ferromagnet with impurity spin. 1 // *J. Phys. Sos. Japan.*—1969.—Vol. 26.—P. 32–42.
19. *Wolfram T., Callaway J.* Spin-wave impurity states in ferromagnets // *Phys. Rev.*—1963.—Vol. 130.—P. 2207–2217.
20. *Ono I., Endo Y.* Localized magnons in a linear Heisenberg ferromagnet with an antiferromagnetic impurity spin // *Phys. Rev. Lett. A.*—1972.—Vol. 41.—P. 440–442.
21. *Ташпулатов С.М.* О спектрах и локализованных примесных состояниях одномагнонных систем в изотропной примесной ферромагнитной модели Гейзенберга // *ТМФ.*—2001.—Т. 126, № 3.—С. 482–488.
22. *Wortis M.* Two-magnon spin wave in the heisenberg ferromagnet // *Phys. Rev. B.*—1963.—Vol. 132, № 1.—P. 85–103.
23. *Ташпулатов С.М.* О спектрах и связанных состояниях оператора энергии двухмагнонных систем в одномерном анизотропном ферромагнетике Гей-

- зенберга с взаимодействием ближайших и вторых соседей // ТМФ.—1996.—Т. 107, № 1.—С. 544–556.
24. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators.1 // Trans. American Math.Soc.—1978.—Vol. 235.—P. 75–113.
25. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators. 2: The approximate point spectrum and Kato essential spectrum // Trans. American Math. Soc.—1978.—Vol. 237.—P. 223–254.
26. *Ichinose T.* Tensor Products of linear operators // Spectral Theory. Banach Center Publications.—Warsaw: PWN-Polish Scientific Publishers, 1982.—Vol. 8.—P. 294–300.

ТАШПУЛАТОВ САЪДУЛЛА МАМАРАЖАБОВИЧ

Институт ядерной физики АН РУз

Узбекистан, 100124, Ташкент, М. Улугбекский район, пос. Улугбек

E-mail: toshpul@mail.ru

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Т. Р. Тедеев

Получено решение контактной задачи методом конечных элементов. Представлены результаты расчета модельной задачи взаимодействия конструкций с упругим основанием. Показано, что контактные напряжения целесообразно перераспределить таким образом, чтобы наибольшие значения были сконцентрированы в центральной части контактной поверхности, что существенно снизит в расчетных сечениях изгибающие моменты и поперечные усилия.

Прогноз развития напряжений и деформаций в зданиях и инженерных сооружениях требует разработки методов решения контактной задачи взаимодействия сооружения с основанием. При этом дискретное моделирование основания методом конечных элементов (МКЭ) приводит к тому, что перемещения вычисляются в конечном числе узловых точек, а между этими точками подчиняются заданному интерполяционному закону [1–3]. С учетом этих условий наиболее удобным для решения контактной задачи будет классический метод [4] Б. Н. Жемочкина–А. П. Сеницына (МЖС). Он полностью совместим с дискретными методами расчета оснований и позволяет сравнительно простым путем получать решения многих задач промышленного, гражданского и гидротехнического строительства.

Изложим основные положения этого метода применительно к расчетной схеме взаимодействия конструкции конечной длины с основанием (рис. 1а). При этом функция распределения контактных напряжений основания $P(x)$ в случае воздействия силовых и влажностных нагрузок будет иметь, в общем случае, криволинейный вид (рис. 1б). Так как основание представлено совокупностью конечных элементов, то можно предположить взаимодействие конструкции с основанием в конечном числе контактных точек с интерполяционным представлением функции распределения контактных напряжений $P(x)$ в межузловых интервалах.

В классической постановке принимается кусочно-постоянная аппроксимация функции распределения контактных усилий $P(x)$, упрощающая построение эпюр силовых факторов. В данной работе

было использовано как кусочно-постоянное, так и полиномиальное представление функции распределения контактных напряжений.

В соответствии с общими положениями МЖС для расчета статически неопределимой системы, приведенной на рис. 1б, выберем смешанный метод. Основная система будет иметь вид, приведенный на рис. 1в. Используя принцип суперпозиции нагрузок, решение задачи можно разбить на два этапа. На первом этапе определяются составляющие вектора контактных усилий — $\bar{X}_p$, соответствующих квазистатической задаче

$$[\delta]\bar{X}_p + \bar{\Delta}_p = 0, \quad (1)$$

где $[\delta]$ — симметричная матрица единичных коэффициентов смешанного метода; $\bar{X}_p$ — вектор контактных напряжений в основании; $\bar{\Delta}_p$ — вектор грузовых членов в конструкции от внешней силовой нагрузки.

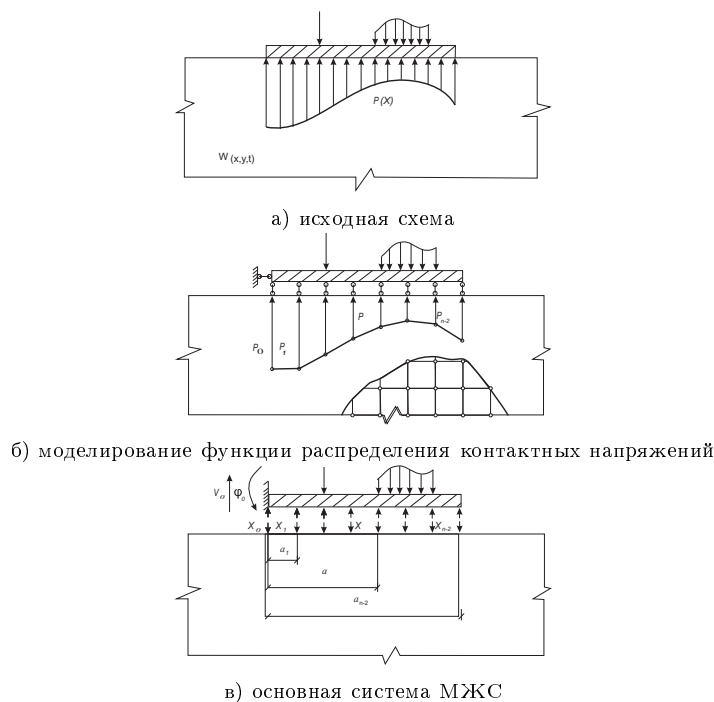


Рис. 1. Дискретизация контактной задачи по методу Б. Н. Жемочкина–А. П. Сеницына.

Методика вычисления элементов симметричной матрицы $[\delta]$ и вектора грузовых членов $\overline{\Delta}_p$ приведена в работе [4].

Наиболее сложным вопросом в этой методике расчета является определение перемещений контактной поверхности основания. Если для обычных линейно-деформируемых сред эти перемещения могут быть найдены на основе решения Фламана [4], то для структурно-неустойчивых оснований они должны определяться из решения задачи МКЭ. При этом легко учитываются произвольная конфигурация основания, его неодносвязность и геологическое сложение в отличие от классической трактовки МЖС.

На втором этапе расчета — из решения дополнительной системы уравнений

$$[\sigma]\overline{X}_W + \overline{\Delta}_W = 0, \quad (2)$$

где $\overline{\Delta}_W$ — вектор перемещений контактных узлов основания от геомеханических процессов набухания или просадки, определяются составляющие вектора контактных напряжений основания $\overline{X}_W$.

Элементы вектора перемещений контактных усилий $\overline{\Delta}_W$ определяются из решения МКЭ общей задачи теории влагоупругости структурно-неустойчивых оснований [5].

При этом в случае плоской деформации физические уравнения влагоупругости имеют следующий вид

$$\overline{\sigma} = E(W)[D](\overline{\varepsilon} - \overline{\varepsilon}_0), \quad (3)$$

где $\overline{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$ — вектор напряжений, $[D]$ — матрица приведенных коэффициентов Лямэ, $\overline{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$ — вектор деформаций, $\overline{\varepsilon}_0$ — вектор влажностных деформаций, определяемый из следующей зависимости

$$\overline{\varepsilon}_0 = (1 + \nu)\psi(W) \begin{Bmatrix} \beta_x(\sigma_{0x}) \\ \beta_y(\sigma_{0y}) \\ 0 \end{Bmatrix} = (1 + \nu)\psi(W)\overline{\beta}(\overline{\sigma}_0), \quad (4)$$

ν — коэффициент Пуассона, $\overline{\beta}(\overline{\sigma}_0)$ — вектор коэффициентов набухания или просадки, T — знак транспонирования.

Экстремальная постановка задачи отыскания поля перемещений $\overline{u}$ в плоскодеформированном основании следующая: для данного распределения поля влажности $W(x, y, t)$ в момент времени t [6] найти соответствующий этому моменту вектор перемещений $\overline{u}(x, y)$ определенный и непрерывный в замкнутой области F вместе со своими

производными, удовлетворяющий на границе S области кинематическим граничным условиям и сообщающий минимальное значение полной потенциальной энергии деформации

$$J(\bar{u}) = \iint \{E(W)([A]\bar{u})^T[D](0, 5[A]\bar{u} - \varepsilon_0) - \bar{u}^T \bar{\rho}\} dF - \sum_I P_i \delta_i. \quad (5)$$

Здесь $\bar{\rho}$ — вектор массовых сил; P_i — сосредоточенные силы; δ_i — перемещение точек приложения этих сил; I — число сил; $[A]$ — матрица дифференциальных операций уравнений равновесия теории упругости [7].

Пусть заданная область F представлена совокупностью M конечных элементов. Примем, что в пределах одного элемента справедливы соотношения:

$$\bar{u}(x, y) = [N]\bar{\delta}_e, \quad (6)$$

где $[N]$ — матрица функций формы элемента, $\bar{\delta}_e$ — вектор перемещений узлов элемента. Подставляя (6) в выражение (5) и минимизируя для одного элемента, получаем:

$$[K]_e \bar{\delta}_e + \bar{R}_{\rho e} + \bar{R}_{\varepsilon_0 e} - \bar{P}_e = 0, \quad (7)$$

где

$$[K]_e = \iint_{Fe} E(W)([A][N])^T[D]([A][N]) dx dy, \quad (8)$$

$$\bar{R}_{\varepsilon_0 e} = -(1 + \nu) \iint_{Fe} E(W)([A][N])^T[D]\bar{\beta}(\bar{\sigma}_0)\psi(W) dx dy, \quad (9)$$

$$\bar{R}_{\rho e} = \iint_{Fe} [N]^T \bar{\rho} dx dy. \quad (10)$$

Для всей области после суммирования вкладов отдельных элементов, имеем:

$$[K]\bar{\delta} + \bar{R}_\rho + \bar{R}_{\varepsilon_0} - \bar{P} = 0. \quad (11)$$

После удовлетворения граничным условиям из этой системы линейных алгебраических уравнений определяется итоговый вектор узловых перемещений $\bar{\delta}$, включающий и перемещения контактных узлов из системы (2).

Окончательный вектор реактивных усилий определяется как сумма составляющих в расчетные моменты времени:

$$\bar{X} = \bar{X}_p + \bar{X}_w. \quad (12)$$

На основе известного вектора могут быть вычислены коэффициенты полиномов, аппроксимирующих контактное давление $P(x)$, и построены эпюры основных силовых факторов.

Общий алгоритм расчета конструкций на структурно-неустойчивом основании в соответствии с изложенной методикой расчета будет включать в себя следующие основные этапы:

1. На основе решения нелинейной задачи теплопроводности при неполном водонасыщении определяется влажностный режим основания в расчетные моменты времени.

2. Производится статический расчет заданной конструкции и ее основания и определяется вектор $\bar{X}_p$.

3. Производится расчет основания на приложенные к нему статические нагрузки и вектор $\bar{X}_p$. Устанавливается активная зона геомеханических процессов набухания или просадки [5].

4. Производится расчет структурно-неустойчивого основания с учетом статических нагрузок и расчетного поля влажности и определяются перемещения контактных узлов поверхности основания.

5. Производится расчет заданной конструкции с учетом известных перемещений основания. Из решения системы уравнений (2) определяется дополнительный вектор реакций основания $\bar{X}_w$. После суммирования по зависимости (12) получается окончательный вектор $\bar{X}$, с помощью которого вычисляются составляющие функции распределения контактных давлений основания $P(x)$ и строятся эпюры силовых факторов. При необходимости осуществляется переход к следующему расчетному моменту времени.

На основе разработанной методики была решена модельная задача определения напряженно-деформированного состояния расчетной конструкции на слое основания без учета геомеханических процессов набухания или просадки, но с осуществлением локального уплотнения контактной поверхности ударным способом. Для получения горизонтальной контактной поверхности локальное уплотнение заполняют жестким материалом, например бетоном [8]. В целом размеры расчетной области 8×20 м, поперечные размеры расчетной полосы 1×6 м. Расчетная конструкция нагружена распределенной нагрузкой 100 кН/м^2 . Характеристики плиты: $E = 30000 \text{ МПа}$,

$\nu = 0,2$, $\rho = 2400 \text{ кг/м}^3$. Расчетные показатели упругого основания: $E = 30 \text{ МПа}$, $\nu = 0,36$, $\rho = 1800 \text{ кг/м}^3$.

Результаты решения задачи, представленные на рис. 2 в связи с симметрией для части расчетной области, показывают, что наличие локально уплотненного массива качественно и количественно меняет картину распределения контактных напряжений в основании. Значительно увеличиваются значения контактных напряжений в центральной части, а их концентрация под консольной частью резко уменьшается (в 2 раза). Существенно уменьшаются также изгибающие моменты в расчетных сечениях рассмотренной конструкции (в 1,8–2 раза).

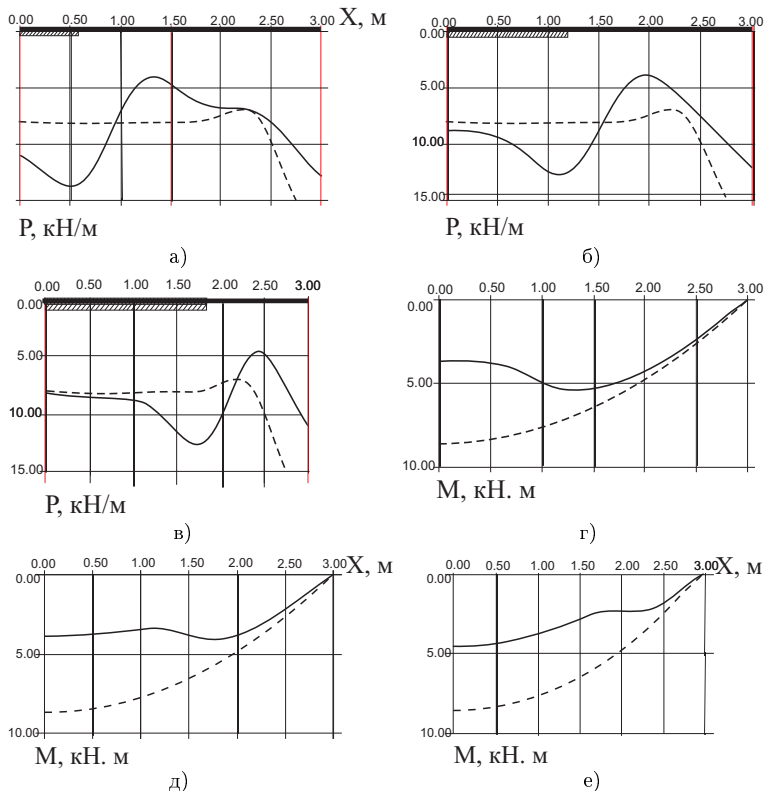


Рис. 2. Расчет конструкции $L = 6 \text{ м}$ с учетом локально уплотненного массива. а), б), в) — функция распределения контактных напряжений, г), д), е) — изгибающие моменты к приведенным схемам; — с учетом локального уплотнения; - - без учета локального уплотнения.

Литература

1. Норри Д., Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов.—М.: Мир, 1981.—304 с.
2. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред (пер. с англ.).—М.: Недра, 1974.—240 с.
3. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация.—М.: Мир, 1981.—318 с.
4. Жемочкин Б. Н., Силицын А. П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании.—М.: Госстройиздат, 1962.—240 с.
5. Тер-Мартirosян З. Г. Прогноз механических процессов в массивах многофазных грунтов.—М.: Недра, 1986.—292 с.
6. Тедеев Т. Р., Арунянц Г. Г. Методология и алгоритмы расчета полей влажности в задачах проектирования грунтовых сооружений.—Владикавказ: Терек, 2005.—203 с.
7. Александров А. В., Потапов В. Д. Основы теории упругости и пластичности.—М.: Высшая школа, 1990.—400 с.
8. Сорочан Е. А. Фундаменты промышленных зданий.—М.: Стройиздат, 1986.—303 с.

Тедеев Тимур Рутенович

Южный математический институт ВНЦ РАН

Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: trt0013@mail.ru

МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЕЙСМИКИ С ПАМЯТЬЮ

Ж. Д. Туаева

Рассмотрена многомерная прямая задача, связанная с определением функции смещения в системе дифференциальных уравнений Ламэ с памятью для вертикально-неоднородной среды. К задаче применяется метод разложений и для такой постановки доказаны теоремы существования и единственности. Решение задачи получено в виде интегрального уравнения.

В области $\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3, x_3 > 0, t \geq 0\}$ рассматривается многомерная прямая задача [1], связанная с определением вектор-функции смещения грунтовой толщи при заданных функциях плотности $\rho(x_2, x_3)$ и памяти $K(x_3, t)$:

$$\rho(x_2, x_3) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

$$u_i|_{t < 0} = 0, \quad (2.2)$$

$$T_{3i}|_{x_3=+0} = -\frac{\delta(t)}{2}, \quad (2.3)$$

где $T_{ij}(x, t) = \sigma_{ij}[u] + \int_0^t K(x_3, t-\tau) \sigma_{ij}[u] d\tau$, $\sigma_{ij}[u] = \mu(x) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda(x) \operatorname{div} u$. Функция $K(x_3, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$K(x_3, t) \in C^2(R_+ \times [0, T]), \quad K(x_3, 0) = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t}(x_3, 0) = 0, \quad T > 0 \text{ фиксировано,}$$

$$\rho_0(x_3), \mu_0(x_3), \lambda_0(x_3) \in C^2(R_+), \quad (2.5)$$

$$\lambda_0(+0) = \mu_0(+0) = \rho_0(+0) = 0.$$

К данной задаче применим метод разложений, который, вообще говоря, математически точно не обосновывается. Речь будет идти о

некоторых предположениях, в рамках которых задача будет упрощена. Предположим, что

$$\begin{aligned}\rho(x_2, x_3) &= \rho_0(x_3) + \rho_1(x_2, x_3), \\ \mu(x) &= \mu_0(x_3) + \mu_1(x), \quad \lambda(x) = \lambda_0(x_3) + \lambda_1(x),\end{aligned}$$

где значения $\rho_1(x_2, x_3)$, $\mu_1(x)$, $\lambda_1(x)$ малы по сравнению со значениями $\rho_0(x_3)$, $\mu_0(x_3)$, $\lambda_0(x_3)$. Последние удовлетворяют следующим условиям:

$$\rho_0(x_3), \mu_0(x_3), \lambda_0(x_3) \in C^2(R_+), \quad \frac{d\rho_0}{dx_3}(+0) = \frac{d\mu_0}{dx_3}(+0) = \frac{d\lambda_0}{dx_3}(+0) = 0.$$

Предполагаем также, что функции $\mu_1(x)$, $\lambda_1(x)$ тождественно равны нулю. Введем в рассмотрение параметр малости ν таким образом, что $\rho(x_2, x_3) = \rho_0(x_3) + \nu\tilde{\rho}_1(x_2, x_3)$. Решение задачи представляется в виде:

$$u(x, t) = u^0(x, t) + u^1(x, t) + \dots, \quad (2.6)$$

где $u^1(x, t) = \nu\tilde{u}^1(x, t)$. Подставляя (2.6) в (2.1)–(2.3) и приравнявая члены, стоящие при ν^k , $k = 0, 1$, получаем две задачи.

1. Прямая задача для системы дифференциальных уравнений изотропной упругости с памятью.

Случай вертикально-неоднородных сред

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ (нулевое приближение). Определить вектор-функцию $u^0(x, t) = (u_1^0(x, t), u_2^0(x, t), u_3^0(x, t))$, удовлетворяющую в области Ω следующим равенствам:

$$\rho_0(x_3) \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}^0}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.7)$$

$$u_i^0|_{t < 0} = 0, \quad (2.8)$$

$$T_{3i}^0|_{x_3=+0} = -\frac{\delta(t)}{2}, \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned}T_{ij}^0(x, t) &= \sigma_{ij}[u^0] + \int_0^t K(x_3, t - \tau) \sigma_{ij}[u^0] d\tau, \\ \sigma_{ij}[u^0] &= \mu_0(x_3) \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda_0(x_3) \operatorname{div} u^0.\end{aligned}$$

2. Прямая задача в первом приближении для системы дифференциальных уравнений упругости с памятью

Определить вектор-функцию $u^1(x, t) = (u_1^1(x, t), u_2^1(x, t), u_3^1(x, t))$, удовлетворяющую в области Ω следующим равенствам:

$$\rho_0(x_3) \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}^1}{\partial x_j} - \rho_1(x_2, x_3) \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.10)$$

$$u_i^1|_{t=0} = 0, \quad (2.11)$$

$$T_{3i}^1|_{x_3=+0} = 0, \quad (2.12)$$

где

$$T_{ij}^1(x, t) = \sigma_{ij}[u^1] + \int_0^t K(x_3, t - \tau) \sigma_{ij}[u^1] d\tau,$$

$$\sigma_{ij}[u^1] = \mu_0(x_3) \left(\frac{\partial u_i^1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^1}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda_0(x_3) \operatorname{div} u^1.$$

Переход от (2.1)–(2.3) к (2.7)–(2.9) и (2.10)–(2.12) оправдан, если априори известно, что в правой части соотношения (2.6) вклад слагаемых с членами при ν^k , $k = 2, 3, \dots$, пренебрежимо мал.

В данной статье ограничимся пока исследованием задачи (2.7)–(2.9). Для этого введем класс функций, в котором будут описаны свойства решения прямой задачи изотропной упругости с памятью. Пусть функция $\psi(x_3)$ определена посредством равенства

$$\psi(x_3) = \int_0^{x_3} \frac{d\xi}{\nu(\xi)}, \quad \nu^2(\xi) = \frac{\mu_0(x)}{\rho_0(x)}, \quad \text{пусть } \nabla(T) = \{(x_3, t) \mid \tau(x_3) \leq t \leq T\}.$$

Для фиксированного положительного числа T введем множество вектор-функций $U(T)$:

$$U(T) = \left\{ u(x, t) \left| \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_k} \in C((0, T); W_2^1(R^2 \times R_+)), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \in C((0, T); W_2^0(R^2 \times R_+)), \\ \frac{\partial u}{\partial x_k} \Big|_{t=+0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \Big|_{t=+0} = 0, \quad k = 1, 2. \end{array} \right. \right\} \cap$$

$$\bigcap \{ u(x, t) \mid u(x_1, x_2, -x_3, t) = u(x_1, x_2, -x_3, t), \\ u(x, t) \in C_{x_1, x_2}^{0,0} (R^2; L_2(R \times (0, T)) \cap C^2(\nabla(T))) \}.$$

В дальнейшем оператор дифференцирования по переменной, например, $\frac{\partial u}{\partial t}$ будем обозначать u_t для компактной записи.

Лемма. Пусть $T > 0$ фиксированное число, функции $K(x_3, t)$, $\lambda_0(x_3)$, $\mu_0(x_3)$, $\rho_0(x_3)$ заданы и удовлетворяют (2.5), (2.6), соответственно. Предполагается, что $K(x_3, t)$ ограничена по модулю и имеет ограниченные частные производные до второго порядка включительно в области $R_+ \times [0, T]$. Тогда существует единственное решение прямой задачи (2.7)–(2.9) $u^0(x, t) \in U(T)$.

Докажем предварительно одно вспомогательное утверждение.

Утверждение. Пусть $T > 0$ фиксировано, вектор-функция $V^1(x, t) = (V_1^1(x, t), V_2^1(x, t), V_3^1(x, t))$, определенная в области $x \in R_3$, $t \in [0, T]$, принадлежит $C((0, t); W_2^1(R^3))$, $\frac{\partial V^1}{\partial t}(x, t) \in C((0, t); W_2^1(R^3))$ и удовлетворяет равенствам:

$$\rho_0(x_3) \frac{\partial^2 V_i^1}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}^*}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.13)$$

$$V_i^1|_{t=0} = 0, \quad (2.14)$$

где

$$T_{ij}^*(x, t) = \sigma_{ij}[V^1] + \int_0^t K(x_3, t - \tau) \sigma_{ij}[V^1] d\tau, \\ \sigma_{ij}[V^1] = \mu_0(x_3) \left(\frac{\partial V_i^1}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j^1}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda_0(x_3) \operatorname{div} V^1,$$

$K(x_3, t)$, $\lambda_0(x_3)$, $\mu_0(x_3)$, $\rho_0(x_3)$ заданы и удовлетворяют (2.5), (2.6), соответственно.

Тогда $V^1(x, t) = 0$, $(x, t) \in R^3 \times [0, T]$.

◁ Обозначим через $\nu_i^1(x, t) = V_i^1(x, t) + K * V_i^1(x, t)$, тогда $V_i^1(x, t) = \nu_i^1(x, t) + R * \nu_i^1(x, t)$, где $R(x_3, t) = K(x_3, t) + \int_0^t K(x_3, t - \tau) R(x_3, \tau) d\tau$ [1], причем $R(x_3, t)$ обладает теми же свойствами, что и $K(x_3, t)$. Отсюда следует, что существует константа :

$$\max_{R_+ \times [0, T]} |R_t(x_3, t)| \leq K.$$

В терминах $\nu_i^1(x, t)$ запишем:

$$\rho_0(x_3) \frac{\partial^2 \nu_i^1}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}[\nu^1]}{\partial x_j} - \int_0^t R_t(x_3, t-\tau) (\nu_i^1)_\tau d\tau, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.15)$$

$$\nu_i^1|_{t=0} = 0. \quad (2.16)$$

Сведем (2.15)–(2.16) к системе дифференциальных уравнений первого порядка относительно $(\nu_i^1)_\tau = p_i, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$, $i = 1, 2, 3$ (тензор напряжений симметричен). Обозначим $-g_i(x_3, t) = \int_0^t R_t(x_3, t-\tau) p_i(x, \tau) d\tau$, $p = (p_1, p_2, p_3)$. Полученная система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_0(x_3) \frac{\partial p_i}{\partial t^2} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + g_i(x, t), \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} &= \mu_0(x_3) \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda_0(x_3) \operatorname{div} p. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Отметим, что справедливо следующее равенство [2]:

$$\nu_i^1(x, t) = \nu_i^1(x, 0) + \int_0^t (\nu_i^1)_\tau(x, \tau) d\tau. \quad (2.18)$$

Обозначим $Y = (p_1, p_2, p_3, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}) = (Y_i)_{i=1}^9$. Тогда, как известно, имеет место неравенство [2]:

$$\|Y\|(t) \leq C \int_0^t e^{\gamma(t-\tau)} \|g\|(\tau) d\tau,$$

где C, γ — константы, зависящие от T и $\|Y\|(t) = \sum_{j=1}^9 \int_{R^3} Y_j^2(x, t) dx$,

$\|g\|(t) = \sum_{j=1}^3 \int_{R^3} g_j^2(x, t) dx$, $\|p\|(t) = \sum_{j=1}^3 \int_{R^3} p_j^2(x, t) dx$. Так как $\|Y\|(t) >$

$\|p\|(t)$, то получаем, что

$$\begin{aligned} \|p\|(t) &\leq C \int_0^t e^{\gamma(t-\tau)} \sum_{j=1}^3 \int_{R^3} g_j^2(x, t) dx d\tau \leq \\ &\leq MC \int_0^t \sum_{j=1}^3 \int_{R^3} \left(\int_0^\tau R_\tau(x_3, \tau-s) p_j(x, s) ds \right)^2 dx d\tau \leq \\ &\leq MCK^2T \int_0^t \|p\|(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где M — постоянная величина, ограничивающая сверху значения входящей в неравенство экспоненциальной функции на области ее определения $[0, T]$.

По лемме Гронуолла [2] заключаем следующее, а именно: $\|p\|(t) = 0 \Rightarrow (\nu_i^1)_\tau(x, t) = 0$. Из равенства (2.18) вытекает, что $(\nu_i^1)_\tau(x, t) = \nu_i^1(x, 0) = 0$. В силу $V_i^1(x, t) = \nu_i^1(x, t) + R * (\nu_i^1)(x, t)$ выводим $V_i^1(x, t) = 0 \in R^3 \times [0, T]$. Тем самым утверждение доказано. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть $u^0(x, t) \in U(T)$. Рассмотрим систему (2.7) с условиями (2.8), (2.9). Продифференцируем правую и левую часть по переменной x_1 и введем обозначение $w = \frac{\partial u^0}{\partial x_1}$. Тогда для функции w , продолженной в область $x_3 < 0$ четным образом, получим равенства вида (2.13), (2.14), где $V^1(x, t) = w(x, t)$. Используя результат утверждения, видим, что $w = 0$ при $(x, t) \in R^2 \times R_+ \times [0, T]$. Аналогично, $\frac{\partial u^0}{\partial x_2} = 0$ при $(x, t) \in R^2 \times R_+ \times [0, T]$. Таким образом, $u^0(x, t) \in U(T)$ не зависит от x_1 и x_2 , т. е. $u^0 = u^0(x_3, t)$. Поэтому задачу определения $u^0(x, t) \in U(T)$ можно переписать как задачу определения вектор-функции $u^0(x_3, t)$, для которой справедливы соотношения при $x_3 > 0$:

$$\begin{aligned} \rho_0(x_3) \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu_0(x_3) \frac{\partial u_i^0}{\partial x_3} \right) + \\ &+ \int_0^t K(x_3, t-\tau) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu_0(x_3) \frac{\partial u_i^0}{\partial x_3} \right) d\tau, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

$$\rho_0(x_3) \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left((\lambda_0(x_3) + 2\mu_0(x_3)) \frac{\partial u_i^0}{\partial x_3} \right),$$

$$u_i^0|_{t<0} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\left[\mu_0(x_3) \frac{\partial u_1^0}{\partial x_3} + \int_0^t K(x_3, t - \tau) \mu_0(x_3) \frac{\partial u_1^0}{\partial x_3} d\tau \right]_{x_3=+0} = -\frac{\delta(t)}{2},$$

$$\left[\mu_0(x_3) \frac{\partial u_2^0}{\partial x_3} + \int_0^t K(x_3, t - \tau) \mu_0(x_3) \frac{\partial u_2^0}{\partial x_3} d\tau \right]_{x_3=+0} = 0,$$

$$\left[(\lambda(x_3) + 2\mu_0(x_3)) \frac{\partial u_2^0}{\partial x_3} + \int_0^t K(x_3, t - \tau) (\lambda(x_3) + 2\mu_0(x_3)) \frac{\partial u_2^0}{\partial x_3} d\tau \right]_{x_3=+0} = 0.$$

Из этих равенств следует, что решение прямой задачи распадается на три независимо решаемые по определению компонент (u_1^0, u_2^0, u_3^0) . При этом для $u_2^0(x_3, t)$, $u_3^0(x_3, t)$ получаем задачу с нулевыми данными. Отсюда следует, $u_2^0(x_3, t) \equiv 0$, $u_3^0(x_3, t) \equiv 0$. Для $u_1^0(x_3, t)$ задача имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_0(x_3) \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu_0(x_3) \frac{\partial u_1^0}{\partial x_3} \right) + \\ &+ \int_0^t K(x_3, t - \tau) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu_0(x_3) \frac{\partial u_1^0}{\partial x_3} \right) d\tau, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$u_1^0|_{t<0} = 0, \quad (2.20)$$

$$\left[\mu_0(x_3) \frac{\partial u_1^0}{\partial x_3} + \int_0^t K(x_3, t - \tau) \frac{\partial u_1^0}{\partial x_3} d\tau \right]_{x_3=+0} = -\frac{\delta(t)}{2}. \quad (2.21)$$

Введем в рассмотрение переменную $y = \psi(x_3)$ и обозначим $\frac{u_1^0(\psi^{-1}(y), t)}{S(y)} = V^0(y, t)$, $\nu(x_3) = \sqrt{\frac{\mu_0(x_3)}{\rho_0(x_3)}}$, $S(y) = \sqrt{\frac{\nu_0(+0)\rho_0(+0)}{\nu(\tau^{-1}(y))\rho_0(\tau^{-1}(y))}}$. Равенства (2.19)–(2.21) примут вид:

$$\frac{\partial^2 V^0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V^0}{\partial y^2} + q(y)V^0 + \int_0^t K(x_3, t - \tau) \left(\frac{\partial^2 V^0}{\partial y^2} + q(y)V^0 \right) d\tau, \quad (2.22)$$

$$V^0|_{t<0} = 0, \quad (2.23)$$

$$\left[\frac{\partial V^0}{\partial y} + \int_0^t K(x_3, t - \tau) \frac{\partial V^0}{\partial y} d\tau \right]_{y=+0} = -\frac{a_0}{2} \delta(t), \quad (2.24)$$

$$q(y) = \frac{S''(y)}{S(y)} - 2 \left(\frac{S'(y)}{S(y)} \right)^2, \quad a_0 = \sqrt{\frac{1}{\mu_0(+0)\rho_0(+0)}}.$$

Пусть $V^0(y, t) + K * V^0(y, t) = Y^0(y, t)$, $V^0(y, t) = Y^0(y, t) + R * Y^0(y, t)$. Перепишем (2.22)–(2.24) в терминах $Y^0(y, t)$:

$$\frac{\partial^2 Y^0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y^0}{\partial y^2} + q(y)Y^0 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}[R * Y^0], \quad (2.25)$$

$$Y^0|_{t<0} = 0, \quad (2.26)$$

$$\left[\frac{\partial Y^0}{\partial y} \right]_{y=+0} = -\frac{a_0}{2} \delta(t). \quad (2.27)$$

Решение ищем в виде $Y^0(y, t) = \frac{a_0}{2} \cdot \theta(t - |y|) + \tilde{Y}^0(y, t)$, где $\tilde{Y}^0(y, t) \in C^1((0, T); L_2(R)) \cap C^0((0, T); W_2^1(R))$. Тогда для новой функции $\tilde{Y}^0(y, t)$ получим соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{Y}^0}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{Y}^0}{\partial y^2} + q(y) \frac{a_0}{2} \theta(t - |y|) + q(y) \tilde{Y}^0 - \\ &- \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{a_0}{2} \theta(t - |y|) \int_{|y|}^t R(\tau^{-1}(y), t - \tau) d\tau \right] - \\ &- \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^t R(\tau^{-1}(y), t - \tau) \tilde{Y}^0(y, \tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\tilde{Y}^0|_{t=+0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{Y}^0}{\partial t} \Big|_{t=+0} = 0, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \tilde{Y}^0}{\partial y} \Big|_{y=+0} = 0. \quad (2.30)$$

Продолжим $q(y)$ четным образом. Решение задачи (2.28)–(2.30) эквивалентно задаче нахождения четной по y функции $\tilde{Y}^0(y, t)$, удовлетворяющей (2.28), (2.29). Для фиксированного $T > 0$ существует единственное четное по y решение задачи (2.28), (2.29). Докажем единственность решения. Допустим, что существует два решения $\tilde{Y}_1^0(y, t)$ и $\tilde{Y}_2^0(y, t)$. Обозначим $\bar{Y}^0(y, t) = \tilde{Y}_1^0(y, t) - \tilde{Y}_2^0(y, t)$. Тогда для введенной таким образом функции получаем задачу:

$$\frac{\partial^2 \bar{Y}^0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \bar{Y}^0}{\partial y^2} + q(y)\bar{Y}^0 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^t R(\tau^{-1}(y), t - \tau) \bar{Y}^0(y, \tau) d\tau \right],$$

$$\bar{Y}^0 \Big|_{t=+0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{Y}^0}{\partial t} \Big|_{t=+0} = 0.$$

Используя энергетические оценки [7], выводим:

$$\begin{aligned} \|\bar{Y}^0\|_{L_2(R)}(t) &= \int_R (\bar{Y}^0)^2(y, t) dy \leq \\ &\leq C \int_0^t \left(\int_R \left[q(y)\bar{Y}^0(y, \tau) - \int_0^\tau R_{\tau\tau}(\tau^{-1}(y), \tau - s) \bar{Y}^0(y, s) ds \right]^2 dy \right)^{1/2} d\tau \leq \\ &\leq C \int_0^t \left(\int_R [q\bar{Y}^0]^2 dy + \int_R \left[\int_0^\tau R_{\tau\tau} \bar{Y}^0(y, s) ds \right]^2 dy + \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_R q\bar{Y}^0 \int_0^\tau R_{\tau\tau}(\tau^{-1}(y), \tau - s) \bar{Y}^0(y, s) ds dy \right)^{1/2} d\tau \leq \\ &\leq \tilde{C} \int_0^t \|\bar{Y}^0\|_{L_2(R)} d\tau + (C + 2\tilde{C})K\sqrt{T} \int_0^t \left(\int_R \int_0^\tau |\bar{Y}^0(y, s)|^2 ds dy \right)^{1/2} d\tau. \end{aligned}$$

По лемме Гронуолла [2] $\|\bar{Y}^0\|_{L_2(R)}(t) = 0$, значит, $\bar{Y}^0(y, t) = 0$ в области $R \times [0, T]$. Отсюда следует равенство решений $\tilde{Y}_1^0(y, t)$ и $\tilde{Y}_2^0(y, t)$ в рассматриваемой области. Единственность доказана.

Заметим, что $\tilde{Y}^0(y, t) = 0$ при $t < |y|$. Это также следует из энер-

гетических оценок. Следовательно,

$$Y^0(y, t) = \theta(t - |y|) \left[\frac{a_0}{2} + \tilde{Y}^0(y, t) \right].$$

Для функции $\tilde{Y}^0(y, t)$ справедливо интегральное уравнение, которое и заканчивает решение поставленной задачи (2.7)–(2.9):

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^0(y, t) = \theta(t - |y|) & \left[\int_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}} \int_{|\xi|}^{t-|\xi-y|} (q(\xi) - R_t(\tau^{-1}(\xi), t - |y - \xi| - \tau)) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{a_0}{2} + \tilde{Y}^0(\xi, \tau) \right) d\tau d\xi \right]. \end{aligned}$$

Используя свойства дифференцирования по параметру, легко доказывается, что $\tilde{Y}^0(y, t) \in C^2(t \geq |y|)$. Из интегрального уравнения следует, что $\tilde{Y}^0(y, t)|_{t=|y|} = 0$, значит, функция $V^0(y, t) = Y^0(y, t) + R * Y^0(y, t)$ принадлежит классу $C^2(t \geq |y|)$ и $V^0(y, t) = \theta(t - |y|) \left[\frac{a_0}{2} + \tilde{V}^0(y, t) \right]$, $\tilde{V}^0(y, t) \in C^2(t \geq |y|)$. $\triangleright$

Литература

1. Владимир В. С. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1967.—436 с.
2. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными.—М.: Мир, 1977.—504 с.

ТУАЕВА ЖАННА ДМИТРИЕВНА

Геофизический центр экспериментальной
диагностики ВНИИ РАН;

Южный математический институт ВНИИ РАН

Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: jannatuaeva@inbox.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПУЛЬСОВОГО ДВИЖЕНИЯ КРОВИ В АРТЕРИАЛЬНОМ СОСУДЕ С УЧЕТОМ ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИИ ЕГО СТЕНКИ¹

Ю. А. Устинов

Описывается математическая модель движения крови в артериальном сосуде во время систолы с учетом винтовой анизотропии его стенки. Приводятся результаты численного анализа основных полевых характеристик крови и стенки сосуда и сравнения их величин с экспериментальными данными.

В [1, разд. 2] проводится подробный качественный анализ движения крови в артериальном сосуде на основе математической модели, в которой стенка сосуда рассматривается как ортотропная цилиндрическая оболочка (безмоментная теория), а кровь — как вязкая жидкость, движение которой описывается линейными уравнениями Навье–Стокса. В этом же разделе, а также в разделе 3 имеется значительное количество ссылок с комментариями на более ранние исследования в рамках одномерной и рассматриваемой моделей.

В [2] анонсировано открытие «...явление образования закрученного потока биологических сред в транспортных каналах человека и животных на примере сердечно-сосудистой, пищеварительной и мочевыделительных систем..., обусловленное возникновением за счет трения соответствующих этому движению двух составляющих касательных напряжений при взаимодействии среды с волной скручивания, возбуждаемой в стенке канала сокращением спирально ориентированных мышечных и эластических элементов».

Ниже дается краткий обзор некоторых результатов, полученных автором за период 2003–2008 гг., связанных с математическим моделированием пульсового движения крови в артериальном сосуде с учетом винтовой анизотропии его стенки.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Южного математического института Владикавказского научного центра РАН и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 07-01-00254а.

О структуре стенки артериального кровеносного сосуда

Накопленный обширный экспериментальный материал [1, 9] позволяет рассматривать стенки артериальных сосудов, как многослойные анизотропные оболочки. Согласно этим работам стенки всех артерий имеют сходное строение и состоят из одних и тех же материалов. Соотношения между материалами в стенках сосудов разных отделах системы кровообращения различны. В [9] выделены три основных типа артериальных сосудов: эластического, смешанного и мышечного. Традиционно стенка делится на три слоя: внутреннюю (интима), среднюю (медия) и наружную (адвентиция). Принято считать, что влияние интимы и адвентиции на механические свойства стенки незначительны, в силу чего упругие свойства оболочки определяются медией. Медия состоит из множества концентрических слоев упругой ткани: эластина и мышечной ткани, оплетенных тончайшими волокнами коллагена. Полости между слоями заполнены различными губчатыми тканями и жидкостью. Относительная концентрация мышечной ткани и эластина определяет тип сосуда. Согласно [1] все мелкие артериальные сосуды относятся к мышечному типу. Средний слой этих сосудов почти полностью состоит из *спирально расположенных* гладкомышечных клеток, размещенных также в виде слоев с незначительным количеством коллагена и эластина. Согласно [9] к этому же типу относятся все артерии головного мозга, а также подвздошная, поверхностная височная, плечевая и ряд других артерий. Угол между направлением волокон и продольной осью сосуда равен примерно 30^0 – 50^0 . На эластин, коллаген и мышечную ткань приходится около 50% материала стенки.

Таким образом, материал стенки можно рассматривать как композит, упругие свойства которого определяются перечисленными выше его компонентами, их взаимной концентрацией и геометрией распределения.

Приведем некоторые сведения об упругих свойствах отдельных компонент [1].

Эластин — нелинейно упругий материал с модулем Юнга примерно $E = 300 \text{ кН/м}^2$ для деформаций до 40%. Коллаген — более жесткий материал с модулем Юнга равным, примерно, 10^6 кН/м^2 . Модуль Юнга гладких мышц существенно зависит от физиологического состояния и может меняться в пределах 100–1200 кН/м². Согласно экспериментальным данным, приведенным в [9], упругие свойства сосудов изменяются с возрастом.

Основные соотношения для оболочки с винтовой анизотропией

Стенку сосуда будем рассматривать как тонкую цилиндрическую оболочку. У сосудов мышечного типа упругие свойства стенки должны обладать винтовой анизотропией. Динамические уравнения цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией приведены в [5–8]. Эти уравнения приводятся ниже. Подчеркнем, что они получены на основе гипотез Киргофа–Лява в рамках безмоментной теории.

Артериальный сосуд будем рассматривать как цилиндрическая оболочку толщиной h и радиусом срединной поверхности a . С центром торца оболочки свяжем декартовую систему координат $Ox_1x_2x_3$ и введем винтовую систему координат r, θ, z , которая связана с декартовой соотношениями

$$x_1 = r \cos(\theta + \tau z), \quad x_2 = r \sin(\theta + \tau z), \quad x_3 = z, \quad (1)$$

где $a\tau = tg\alpha$, α — угол между касательной винтовой мышечной спирали, расположенной на срединной поверхности стенки, и осью сосуда.

Предположим, что материал стенки — ортотропный и в базисе Френе винтовой спирали

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{t},$$

где $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}$ — орты главной нормали, бинормали и касательной соответственно, его свойства определены техническими константами [10] $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$, которые удовлетворяют дополнительными условиями

$$\nu_{12}E_2 = \nu_{21}E_1, \quad \nu_{13}E_3 = \nu_{31}E_1, \quad \nu_{23}E_3 = \nu_{32}E_2,$$

вытекающими из условия положительной определенности удельной энергии деформации.

После перехода к базису винтовой системы координат основные соотношения безмоментной теории имеют следующий вид:

1) обобщенный закон Гука, связывающий усилия с деформациями

$$\begin{aligned} T_{\theta\theta}/h &= g_{11}e_{\theta\theta} + g_{12}e_{zz} + g_{13}e_{\theta z}, \\ T_{zz}/h &= g_{12}e_{\theta\theta} + g_{22}e_{zz} + g_{23}e_{\theta z}, \\ T_{\theta z}/h &= g_{13}e_{\theta\theta} + g_{23}e_{zz} + g_{33}e_{\theta z}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
g_{11} &= [E_2 + x^2(2\nu_{32}E_2 + 4G_{23} - 4G_{23}\nu_{23}\nu_{32}) + x^4E_3] / g_0, \\
g_{12} &= [\nu_{32}E_2 + x^2(E_2 + 4G_{23} - 4G_{23}\nu_{23}\nu_{32}) + x^4\nu_{23}E_3] / g_0, \\
g_{22} &= [E_3 + x^2(4G_{23} - 4G_{23}\nu_{23} + 2\nu_{32}E_2\nu_{23}) + x^4E_2] / g_0, \\
g_{13} &= x[E_2(1 - \nu_{32}) - 2G_{23}(1 - \nu_{23}\nu_{32}) + \\
&\quad + x^2(E_3 - \nu_{32}E_2 - 2G_{23} + 2G_{23}\nu_{23}\nu_{32})] / g_0, \\
g_{23} &= x[-2G_{23}(1 - \nu_{23}\nu_{32}) + E_3(1 - \nu_{23}) + \\
&\quad + x^2(-E_2 - \nu_{32}E_2 - 2G_{23} + 2G_{23} - 2G_{23}\nu_{23}\nu_{32})] / g_0, \\
g_{33} &= [(1 - \nu_{23}\nu_{32})G_{23}(1 - x^2)^2 + x^2(E_2 - \nu_{23}E_2 + E_3 - \nu_{32}E_3)] / g_0, \\
g_0 &= (1 + x^2)^2(1 - \nu_{23}\nu_{32}).
\end{aligned}$$

2) компоненты тензора деформаций

$$e_{\theta\theta} = u_r/a, \quad e_{zz} = \partial_z u_z, \quad 2e_{\theta z} = \partial_z u_\theta, \quad (3)$$

где u_r , u_θ , u_z — смещения точек срединной поверхности.

3) уравнения движения безмоментной теории

$$\begin{aligned}
-\frac{T_{\theta\theta}}{a} + \frac{T_{\theta z}^0}{a} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + T_z^0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - h\rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + q_r &= 0, \\
\frac{\partial T_{zz}}{\partial z} - h\rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + q_z &= 0, \\
\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} - \frac{T_{\theta z}^0}{a} \frac{\partial u_r}{\partial z} - T_\theta^0 \frac{u_\theta}{a^2} - h\rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} + q_\theta &= 0.
\end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ρ_0 — плотность материала оболочки, T_θ^0 , T_r^0 , $T_{\theta z}^0$ — усилия предварительно-напряженного состояния.

Математическая модель пульсового движения крови в артериальных сосудах

В предлагаемой математической модели колебания стенки сосуда описываются выше приведенными уравнениями, а движение крови — линейными уравнениями вязкой несжимаемой жидкости [11].

Предполагается, что на стенке сосуда выполняются кинематические условия прилипания

$$\partial_t u_r = v_r, \quad \partial_t u_\theta = v_\theta, \quad \partial_t u_z = v_z, \quad (5)$$

а гидродинамическое воздействие на стенку сосуда выражается тем, что в уравнениях (4) при $r = a$

$$q_r = p - 2\rho\nu\partial_r v_r, \quad q_z = -\rho\nu(\partial_r v_z + \partial_z v_r), \quad q_\theta = -\rho\nu(\partial_r v_\theta - v_\theta/r). \quad (6)$$

Здесь v_r , v_z , v_θ — радиальная, осевая и тангенциальная компоненты вектора скорости, p — давление, ∂_t , ∂_r , ∂_z , ∂_θ — частные производные по соответствующим переменным.

Решение совместного движения отыскивать в виде

$$u_j = U_j e^{i(k\zeta - \omega t)}, \quad v_j(\xi, \zeta, t) = V_j(\xi) e^{i(k\zeta - \omega t)}, \\ p = a^{-1} \rho \nu X_1 e^{i(k\zeta - \omega t)}, \quad \xi = r/a, \quad \zeta = z/a,$$

где ω — круговая частота, $j = 1 \sim r$, $j = 2 \sim z$, $j = 3 \sim \theta$. На основании решения уравнений гидродинамики в предположении, что $\partial_r p = 0$,

$$V_z(\xi, k) = \frac{ik}{\beta^2} X_1 + \frac{J_0(\beta\xi)}{J_0(\beta)} X_2, \\ V_r(\xi, k) = \frac{k^2}{2\beta^2} \xi X_1 - \frac{ikJ_1(\beta\xi)}{\beta J_0(\beta)} X_2, \quad (8) \\ V_\theta(\xi, k) = \frac{J_1(\beta\xi)}{J_1(\beta)} X_3, \quad \beta^2 = i\gamma^2 - k^2, \quad \gamma^2 = a^2 \omega / \nu.$$

Здесь ρ — плотность крови, ν — кинематическая вязкость, X_1 , X_2 , X_3 — произвольные постоянные, а амплитуды смещений U_j связаны с этими постоянными условием прилипания

$$U_r = i\omega^{-1} V_r(1, k), \quad U_z = i\omega^{-1} V_z(1, k), \quad U_\theta = i\omega^{-1} V_\theta(1, k). \quad (9)$$

Уравнения движения оболочки (4) совместно с соотношениями (5)–(9) позволяет свести задачу к однородной алгебраической системе уравнений

$$d_{ij}(k, \omega) X_j = 0, \quad i, j = 1 \dots 3 \quad (10)$$

определитель которой, приравненный нулю, является дисперсионным уравнением.

Исследования, проведенные в [5–8], показали, что при малых значениях волнового числа k это уравнение имеет шесть комплексных корней

$$k_s^\pm, \quad k_s^+ = k_s, \quad k_s^- = -k_s, \quad \operatorname{Re} k_s > 0, \quad s = 1, 2, 3.$$

Каждому корню отвечают элементарные волны (моды) давления, поля скоростей жидкости и смещений стенки

$$p_s^\pm = X_{1s}^\pm e^{i(\pm k_s \zeta - \omega t)}, \quad v_{js}^\pm = V_j(\xi, \pm k_s) e^{i(\pm k_s \zeta - \omega t)}, \\ u_{js}^\pm = i V_j(1, \pm k_s) e^{i(\pm k_s \zeta - \omega t)} / \omega.$$

Амплитуды скоростей получаются подстановкой $X_2 = X_{2s}$, $X_3 = X_{3s}$ в выражения (8).

В приведенных выражениях X_{js} — решения однородной системы (10), которые для каждого значения s определяются с точностью до произвольной постоянной C_s .

В [7] приведены результаты исследования зависимости фазовых скоростей $c_s^\pm = \pm \omega / \operatorname{Re} k_s$, коэффициентов затухания $K_s = \operatorname{Im} k_s$, коэффициентов координат скоростей

$$n_{js} = \frac{V_j(1, k_s)}{V_s}, \quad V_s = \sqrt{V_1(1, k_s)^2 + V_2(1, k_s)^2 + V_3(1, k_s)^2},$$

от параметра α на частоте пульса $f = 2$ Гц ($\omega = 4\pi$).

Приведем некоторые результаты исследований задачи, моделирующей распространения пучка гармонических волн в артериальном сосуде, порожденного систолой.

Постановка краевой задачи. Обозначим через $T = 2\pi/\omega_1$ период сердечного цикла, где ω_1 — круговая частота пульса. Сосуд будем моделировать полубесконечной цилиндрической оболочкой. Зададим на входе $z = 0$ следующие граничные условия:

$$z = 0 : p^0 = p_{tm} + \tilde{p}(\eta), \quad V_z(1, 0, \eta) = V_\theta(1, 0, \eta) = 0, \quad (11)$$

где p_{tm} — давление на входе в сосуд при закрытом клапане; $\tilde{p}(\eta)$ — избыточное давление, порождаемое систолой и открывающее клапан; $\eta = \omega_1 t$ — безразмерное время; граничные условия для скоростей отвечают условиям прилипания.

ЗАМЕЧАНИЕ. Систола — процесс, который включает в себя сжатие левого желудочка, в результате которого открывается сердечный клапан и кровь поступает в восходящую аорту. Продолжительность систолы примерно равно $T/3 - T/2$.

Обозначим через $\eta_c = 2\epsilon$ временной отрезок систолы и примем следующий закон изменения давления

$$f = \eta^2(\eta - \eta_c)^2, \quad 0 \leq \eta \leq \eta_c, \\ f = 0, \quad \eta_c \leq \eta \leq 2\pi. \quad (12)$$

Выбранный закон изменения давления в форме (12) соответствует графику, изображенному на рис. 1.12 в [1].

Для построения решения представим выражение (12) в виде отрезка ряда Фурье. Имеем

$$p_N = p_{st} + P \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^N f_n \exp^{-in(\eta-\varepsilon)} \right], \quad p_0 = p_{tm} + P f_0, \quad (13)$$

где $P f_0 = p_{\max} - p_0$, $p_{\max}$ — максимальное значение давления во время систолы, f_n , $n = 0 \dots N$ коэффициенты Фурье функции f , которые с помощью замены переменной вычисляются по формуле

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\varepsilon^2 - \eta'^2)^2 d\eta', \quad f_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\varepsilon^2 - \eta'^2)^2 \cos n\eta' d\eta'.$$

Решение будем отыскивать в виде

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_1 a \zeta + \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^3 C_{ns} X_{1ns} \exp^{i\phi_{ns}} \right], \\ v_z &= v_z^0 + \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^3 C_{ns} V_{zns} \exp^{i\phi_{ns}} \right], \\ v_\theta &= v_\theta^0 + \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^3 C_{n,s} V_{\theta ns} \exp^{i\phi_{ns}} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь k_{ns} — корни дисперсионного уравнения, отвечающие значениям $\omega = n\omega_1$, $\phi_{ns} = k_{ns}\zeta - n\eta$; V_{zns} , $V_{\theta ns}$ получаются путем подстановки в выражения (8) $k = k_{ns}$, $X_j = X_{jns}$, где X_{jns} — частные решения однородной алгебраической системы (10), отвечающие значениям $\omega = n\omega_1$, $k = k_{ns}$; C_{ns} — произвольные постоянные, которые определяются при удовлетворении граничных условий (11); v_z^0 , v_θ^0 — координаты скорости стационарного решения. Известно [11], что

$$v_z^0 = \frac{a^2 p_1}{4\rho\nu} (1 - \xi^2)$$

решение Пуазеля, в котором p_1 — градиент давления стационарного течения. Поскольку в момент открытия клапана среднее значение

скорости v_z равно нулю (расход равен нулю), то значение p_1 можно определить из условия

$$\int_0^1 v_z \xi d\xi = 0, \quad z = 0, \quad \tau = 0. \quad (15)$$

Решение линейных уравнений Навье-Стокса для v_θ^0 , удовлетворяющее условию прилипания, является сингулярным при $\xi = 0$ и имеет вид

$$v_\theta^0 = C(\xi - 1/\xi). \quad (16)$$

Постоянная C выражается через удельный момент количества M_z движения следующей формулой

$$M_z = 2\pi\rho a^3 \int_0^1 v_\theta^0 \xi^2 d\xi = -\frac{1}{2}\pi\rho a^3 C.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Результаты экспериментальных исследований [1, разд. 1.2.4] показывают, что в окрестности оси сосуда профиль скорости является практически плоским, что указывает на то, что если на входе в аорту в момент открытия клапана существует вихревое решение с v_θ вида (16), то оно за счет нелинейных конвективных членов уравнений Навье-Стокса преобразуется в течение типа Пуазейля. Поэтому при проведении расчетов принималось $v_\theta^0 = 0$.

В [1] содержится обширный материал, иллюстрирующий нестационарное поведение различных полевых характеристик таких, как давления, градиента давления, максимальных и средних значений скоростей и др. Часть накопленного материала, полученного на основе экспериментальных исследований, содержится в таблице 1, другая часть иллюстрируется графиками в различных разделах монографии. Накопленный экспериментальный материал позволяет исследовать возможности той или иной математической модели. На основе этой концепции проводились исследования, о которых пойдет речь ниже. Однако, полного набора параметров, содержащихся в данной модели в известной авторам литературе не обнаружено (да его, по-видимому, и не существует). Поэтому, при проведении численных экспериментов значения некоторых параметров брались из таблицы 1. Так, например, из этой таблицы выбирались значения a , h , E_3 , а вязкость ν рассчитывалась по приводимым в таблице значениям чисел Рейнольдса для различных сосудов. Для нахождения численных

значений g_{ij} , аналитические выражения которых содержат три модуля упругости, один из модулей (E_3) брался из таблицы, остальные параметры выбирались эвристически и варьировались. Подбор сопровождался контролем выполнения условий положительной определенности матрицы (g_{ij}) .

Таблица 1

Зависимости фазовых скоростей
и коэффициентов затухания от частоты

0	c_1	c_2	c_3	$K_1 10^{-3}$	$K_2 10^{-3}$	$K_3 10^{-3}$
1	17,64	7,47	3,94	1,07	1,61	0,856
2	18,86	7,94	3,98	1,60	2,55	1,16
3	19,47	8,17	4,00	2,02	3,29	1,39
4	19,87	8,33	4,01	2,37	3,92	1,58
5	20,14	8,44	4,02	2,68	4,47	1,76
6	20,36	8,52	4,02	2,96	4,98	1,91
7	20,52	8,58	4,03	3,23	5,45	2,05
8	20,67	8,64	4,03	3,47	5,89	2,19

В качестве иллюстрации приведем некоторые результаты расчетов при следующих значениях параметров сосуда (аорта собаки) и крови: $a = 0,73 \cdot 10^{-2}$ м, $h = 0,6 \cdot 10^{-3}$ м, $E_3 = 4,905 \cdot 10^2$ кН/м² (согласно [1] измеренные значения $E_3 = 3 - 7 \cdot 10^2$ кН/м²), $E_2 = 0,833 \cdot E_3$, $G = E_3/4$, $\nu_{32} = 0,45$, $\nu_{23} = 0,54$, $\rho_0 = 115$ кг/м³, $\nu = 4 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\rho = 102$ кг/м³, $\alpha = \pi/6$, круговая частота пульса $\omega_1 = 4\pi c^{-1}$ (2 Гц).

Продолжительность систолы принималось равным $1/3$ сердечного цикла, из чего следует, что $\eta = 2\varepsilon = 2\pi/3$. При разложении функции f в ряд Фурье бралось девять членов ряда ($N = 8$). При этом максимальная погрешность в равномерной метрике на отрезке $0 \leq \eta \leq 2\pi$ менее 0,01.

При выборе значений $p_{tm} = 10664,47$ Н/м², $P = 6660,99$ Н/м² или, соответственно $p_{tm} = 80$ тор (мм р.с.), $P = 50$ тор, ориентировались на рис 1.12 книги [1]. При этом, градиент давления стационарного течения, определенный из условия (15), принимает значение $p_1 = 98,1$ Н/м³.

Как отмечалось выше, каждой фиксированной частоте отвечает три волны ($s = 1 \dots 3$). Ниже будем пользоваться следующими терминами [7].

1) Квази-продольной модой будем называть такую волну, которая при $\alpha = 0$ (винтовая анизотропия отсутствует) превращается в чисто продольную. Различные характеристики, отвечающие этой моде будем снабжать индексом $s = 1$.

2) Квази-крутильной модой будем называть волну, которая при $\alpha = 0$ превращаются в чисто крутильную. Этой моде ниже будем отвечать индекс $s = 2$.

3) Третью моду ($s = 3$) будем называть волной давления или пульсовой волной, поскольку эта мода выполняет функцию распространения давления. В таблице приводятся значения фазовых скоростей $c_{sn} = an\omega_1 / \text{Re}(k_{sn})$ и коэффициентов затухания $K_{sn} = \text{Im}(k_{sn})$, отвечающих различным модам ($s = 1, 2, 3$) и гармоникам ($n = 1 \dots N$). Из таблицы видно, что в выбранном диапазоне частот, отвечающему Фурье-разложению функции f , фазовые скорости всех типов волн мало изменяются, а фазовая скорость волны давления фактически постоянна. Это означает, что заданная на входе в сосуд форма давления должна распространяться по стволу сосуда, сохраняя свою форму с незначительным уменьшением амплитуды (в силу малости коэффициентов затухания).

Затухание же в данной математической модели определяется только вязкостью жидкости. На рис. 1 приводятся графики, иллюстрирующие зависимость давления от времени на временном отрезке, равном одному циклу, в различных сечениях $z = \text{const}$. Кривая 1 отвечает $z = 0$, кривая 2 — $z = 10a = 0,073$ м, кривая 3 — $z = 50a = 0,365$ м.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следует отметить, что длина прямолинейного участка аорты собаки равна примерно 3 см [1].

Поэтому выбор сечений $z = \text{const}$ был продиктован следующими двумя соображениями: наглядно проиллюстрировать отсутствие дисперсии и степень затухания.

Следует также отметить, что наблюдаемые в конце систолы всплески на экспериментально снятых графиках давления («дикротический зубец»), как сказано в [1], указывает на закрытие клапана, что в данной модели не учитывается. Кроме того, всплеск может быть порожден отраженными волнами от границе перехода прямолинейного участка аорты в криволинейный. Действительно, если учесть, что выбранный временной отрезок систолы $t_c = 0,666$ с, фазовая скорость самой медленной волны давления $c_3 = 4$ м/с, то общее время пробега прямой и обратной волны прямолинейного участка аорты будет равным $t_p = 0,015$ с. Следовательно, за отрезок време-

ни t_c может произойти 44 переотражения, которые даже при незначительном значении коэффициентов отражения могут явиться причиной появления «дикротического зубца».

Рисунок 2 отражает поведение во времени расхода Q в различных сечениях. Следует отметить, что расчетные графики достаточно хорошо отвечают экспериментально снятым кривым расхода, изображенным на рис 1.16 [1].

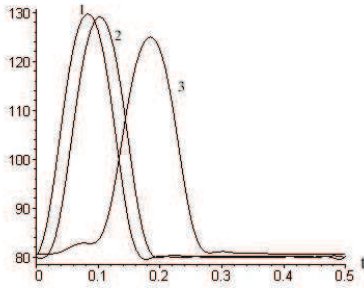


Рис. 1.

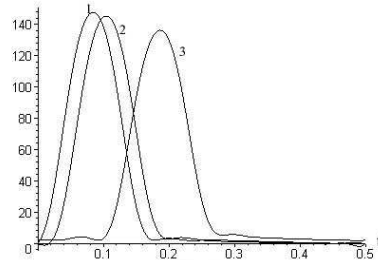


Рис. 2.

Рисунок 3 иллюстрирует распределение скорости v_z по сечению сосуда $z = 3a$ в моменты времени $t_1 = 1/\omega_1 \simeq 0,8$ с. Кривая 1 отвечает трехмодовой теории, кривая 2 — одномодовой (волне давления).

Рисунок 4 иллюстрирует поведение во времени скоростей стенки сосуда V_{zc} (кривая 1) и $V_{\theta c}$ в сечении $z = 3a$. Для выбранного значения $\alpha = \pi/6$ отношение $\max|V_{zc}|/\max|V_{\theta c}| \simeq 3$, для $\alpha = \pi/100$ это отношение равно примерно 10.

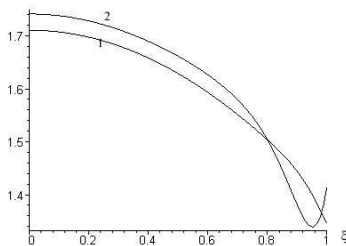


Рис. 3.

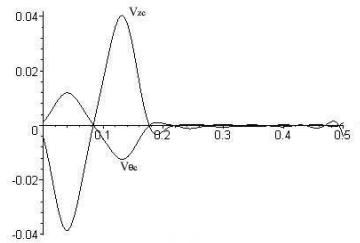


Рис. 4.

Для сравнения с экспериментальными данными из таблицы (1) [1] приведем следующие результаты расчета: среднее по сечению и по времени скорости $v_{ss} = 0,163$ м/с попадает в вилку экспериментальных значений 0,1–0,4 м/с, рассчитанное пиковое значение скорости на оси равное примерно 1,6 м/с попадает в вилку 0,4–2,9 м/с.

Описанные результаты расчета опирались на трехмодовую теорию. Параллельно были проведены аналогичные расчеты основных гидродинамических характеристик движения крови (давления, градиента давления, расхода, распределение скоростей по сечению и др.) по одномодовой теории, согласно которой распространение давления и средней по сечению скорости вдоль оси сосуда описывается уравнениями

$$\partial_z^2 p - c_0^{-2} \partial_t^2 p = 0, \quad \rho \partial_t v = -\partial_z p$$

Проведенный сравнительный анализ показал, что практически все гидродинамические характеристики с высокой степенью совпадения описываются одномодовой теорией. Отличие наблюдается только в распределении скоростей вблизи стенки сосуда.

Приведем некоторые результаты анализа напряженного состояния стенки. Такой анализ полезен, в частности для понимания необходимости предварительного натяжения, которое присуще многим артериальным сосудам.

Кратко опишем схему, на основе которой проводились расчеты напряжений.

Представления для напряжений в виде отрезков рядов Фурье получались путем подстановок (14) $\rightarrow$ (5) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (2).

Рисунок 5 иллюстрирует поведение во времени при $z = 10a$ и $\alpha = 30^\circ$ напряжений σ_{zz} (кривая 1), $\sigma_{\theta\theta}$ (кривая 2), $\sigma_{z\theta}$ (кривая 3). Кривая 1 наглядно иллюстрирует, что при отсутствии предварительного натяжения в стенке сосуда во время систолы возникает продольное сжимающее напряжение. Может ли сжатие вовремя систолы привести к потере устойчивости стенки сосуда? Этот вопрос остается открытым и требует дополнительных исследований. Тем не менее, предварительные растягивающие напряжения существенно уменьшают вероятность возникновения этого явления. В рассмотренном случае для того, чтобы на всем периоде сердечного цикла выполнялось условие $\sigma_{zz} > 0$ достаточно, чтобы $T_z^0 > 1,5 \cdot 10^3$ кгс/м².

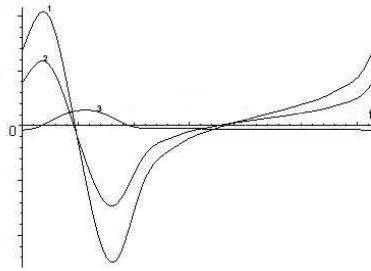


Рис. 5.

Заключение

Рассмотренная модель пульсового движения крови в полубесконечном артериальном сосуде, учитывающая винтовую анизотропию его стенки, естественно далека от совершенства. Вместе с тем, проведенные на ее основе расчеты и сравнительный анализ с экспериментальными данными показал, что она с достаточной степенью точности отражает поведение основных гидродинамических характеристик при развитии движения. Следует подчеркнуть, что на входе в сосуд задавались только давление и условия жесткой заделки сосуда в стенку сердца, что в рассмотренной модели эквивалентно обращению в ноль продольной и крутильных скоростей на границе отверстия. Остальные характеристики такие, как расход, средняя и пиковая скорость, напряжения в стенке сосуда определялись на основе построенного решения. Численные значения этих характеристик попали в вилку экспериментально измеренных значений [1]. Как показали расчеты влияние винтовой анизотропии на эти параметры в выбранном для анализа сосуде оказалось незначительным. Это влияние на скорости существенно только в окрестности стенки сосуда. Однако функции артериальных сосудов сводятся не только к переносу крови. Они выполняют еще одну, не менее важную функцию — сквозь их стенки осуществляется доставка кислорода и лекарственных веществ. Повидимому, распределение мышечных волокон в виде винтовых спиралей оказывает существенное влияние на проницаемость и массо-перенос при динамических процессах в стенке сосуда. Кроме того мышечная ткань в стенке сосуда выполняет еще одну важную функцию — функцию «распределенного сердца» [2, 12, 13], осуществляя дополнительную «подкачку» в периферийной части кровеносной системы.

Литература

1. *Pedley T. J.* Sc. D. The Fluid Mechanics Blood Vessels.—Cambridge etc.: Cambridge Univ. press, 1980.—(Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов.—М.: Мир, 1983.—400 с.)
2. Багаев С. Н., Захаров В. А., Орлов В. А. О необходимости винтового движения крови // Российский журнал биомеханики.—2002.—Т. 6, № 4.—С. 30–51.
3. *Kilner P. J., Yang G. Z., Mohiaddin R. H., Firmin D. N., Longmore D. B.* Helical and Retrograde Secondary Flow Patterns in the Aortic Arch Studied by Three-Directional Magnetic Resonance Velocity Mapping // J. of the Amer. Heart Assoc.—1993.—V. 88.—P. 2235–2247.
4. *Houston J. G., Gandy S. J., Milne W., Dick J. B. C., Belch J. J. F., Stonebridge P. A.* Spiral laminar flow in the abdominal aorta: a predictor of renal impairment deterioration in patients with renal artery stenosis // Nephrol Dial Transplant.—2004.—V. 19.—P. 1786–1791.
5. Богаченко С. Е., Устинов Ю. А. Об одной модели, объясняющей причину винтового пульсового движения крови в кровеносных сосудах // Тр. III Всеросс. конф. по теории упруг (Азов, 13–16 ноября 2003 г.).—Ростов-на-Дону: Изд-во «Новая книга», 2003.—С. 376–378.
6. Устинов Ю. А. Модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах // Докл. РАН.—2004.—Т. 398, № 3.—С. 344–348.
7. Устинов Ю. А. Некоторые задачи для тел с винтовой анизотропией // Успехи механики.—2003.—Т. 4.—С. 37–62.
8. Устинов Ю. А. О винтовом пульсовом движении крови в артериальных сосудах // Изв. ВУЗов. Северо Кавк. регион. Математика и механика сплошной среды. Естеств. науки.—2004.—Спецвыпуск.—С. 220–223.
9. Пурина Б. А., Касьянов В. А. Биомеханика крупных кровеносных сосудов.—Рига: «Знание», 1980.—260 с.
10. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела.—М.: «Наука», 1977.—415 с.
11. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.—М.: «Наука», 1973.—727 с.
12. Янковский М. В. Клинические данные по вопросу о прерферическом артериальном сердце // Научная медицина.—1922.—№ 10.—С. 121–160.
13. Янковский М. В. О функциональной способности артериального периферического сердца // Научная медицина.—1923.—№ 11.—С. 125–123.

Устинов Юрий Анатольевич

Южный федеральный университет

Россия, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105

E-mail: ustinov@math.rsu.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ ГРУНТА¹

Ю. С. Федяев

Ставится для поля скоростей двумерная задача эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей и плотностей в кусочно-неоднородном слое грунта. Исследование задачи сводится к решению системы интегральных и дифференциальных (интегро-дифференциальных уравнений). Предлагается численный алгоритм решения полученных уравнений.

Постановка задачи. Рассмотрим двумерную линейную фильтрацию жидкости постоянной вязкости μ и плотности ρ в тонком неоднородном и недеформируемом слое проводимости $P(M) = K(M)H(M)$. Здесь M — точка в плоскости основания слоя, $K(M)$ — коэффициент проницаемости слоя, $H(M)$ — его толщина. Проводимость $P(M) \geq 0$ моделируется непрерывной с первыми частными производными функцией координат. На единицу массы жидкости действует потенциальная массовая сила $\vec{F}(M, t) = -\nabla\Pi(M, t)$, где ∇ — двумерный оператор Гамильтона, Π — потенциал массовой силы, t — время. Движение жидкости вызвано источниками и стоками течения, которые являются особыми точками поля скоростей. Они моделируют работу совершенных нагнетательных и эксплуатационных скважин.

Выберем в плоскости основания слоя декартову систему координат Oxy . Поле скоростей жидкости всюду в области течения D , за исключением особых точек, удовлетворяет системе уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_y(M, t)}{K(M)} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_x(M, t)}{K(M)} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (H(M)v_x(M, t)) + \frac{\partial}{\partial y} (H(M)v_y(M, t)) &= 0, \quad M \in D. \end{aligned} \tag{1}$$

Уравнения (1) записаны в безразмерных величинах.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-96303.

Пусть неподвижная гладкая граница Γ делит область фильтрации D на области D_1 и D_2 , в которых слой характеризуется проводимостями P_1 и P_2 . Полагаем, что $P_\nu = k_\nu P$ (k_ν — постоянные), $\nu = 1, 2$. Скачок проводимости на границе Γ обусловлен изменением коэффициента проницаемости (толщина слоя является непрерывной функцией).

В области фильтрации D также присутствует изменяющаяся область D_t , ограниченная кривой Γ_t , в которой движется жидкость вязкости μ_2 и плотности ρ_2 . Вне области D_t находится жидкость вязкости μ_1 и плотности ρ_1 . Полагаем, что кривая Γ_t изменяется так, что она в любой момент времени является простой (без самопересечений) и принадлежит классу Ляпунова.

Область фильтрации может быть ограничена эквипотенциальной границей L_1 или непроницаемой границей L_2 . В области течения D также может присутствовать сингулярная линия. Если проводимость слоя на ней обращается в бесконечность, обозначим ее L_{01} . Когда же проводимость слоя на сингулярной линии обращается в нуль, обозначим ее L_{02} . Она служит границей области D , на которой выполняется условие постоянства давления или непроницаемости. Таким образом, под областью течения D понимается $D = D_1 \cup D_2$. Обозначим $C = \Gamma \cup \Gamma_t$, $L = L_1 \cup L_2$ и $L_0 = L_{01} \cup L_{02}$. На линиях Γ , Γ_t , L и L_0 должны выполняться граничные условия [1].

На неподвижной границе Γ выполняются условия непрерывности расхода жидкости и непрерывности давления, которые для нормальной и касательной составляющей скорости имеют вид:

$$v_n^+(M, t) = v_n^-(M, t), \quad v_\tau^+(M, t)/k_1 = v_\tau^-(M, t)/k_2, \quad M \in \Gamma. \quad (2)$$

Здесь и далее «+» («−») обозначены предельные значения соответствующих величин при подходе к границе со стороны нормали $\vec{n}$ (или противоположной стороны). Вектор нормали $\vec{n}$ направлен в область D_1 . Вектор касательной $\vec{\tau}$ здесь и далее образует с нормалью правовинтовую систему.

Полагаем, что при движении одна жидкость полностью замещает другую («поршневое» вытеснение) и капиллярные силы пренебрежимо малы по сравнению с силами гидродинамического давления. Тогда на подвижной границе Γ_t выполняются условия непрерывно-

сти расхода жидкости и непрерывности давления:

$$\begin{aligned} v_n^+(M, t) &= v_n^-(M, t), \\ \mu_1 v_\tau^+(M, t) - \mu_2 v_\tau^-(M, t) &= (\rho_2 - \rho_1) K(M) \frac{\partial \Pi(M, t)}{\partial \tau_M}, \quad M \in \Gamma_t. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь нормаль направлена наружу области D_t .

Когда область фильтрации D ограничивает кривая L , то на ней выполняется условие постоянства давления (граница L_1) или условие непроницаемости (граница L_2):

$$v_\tau(M, t) = 0, \quad M \in L_1; \quad v_n(M, t) = 0, \quad M \in L_2. \quad (4)$$

Если область фильтрации D содержит сингулярную линию L_0 , то на ней выполняется условие постоянства давления (граница L_{01}) или условие отсутствия расхода жидкости (граница L_{02}):

$$v_\tau(M, t) = 0, \quad M \in L_{01}; \quad H(M) v_n(M, t) = 0, \quad M \in L_{02}. \quad (5)$$

Положение границы Γ_t описываем параметрическим уравнением $\vec{r}_M = \vec{r}_M(t, \sigma)$, где $\vec{r}_M$ — радиус-вектор точки M , σ — параметр. В начальный момент времени $t = 0$ положение подвижной границы известно:

$$\text{при } t = 0 \quad \vec{r}_M = \vec{r}_0(\sigma), \quad M \in \Gamma_0. \quad (6)$$

Положение границы Γ_t в последующие моменты времени $t > 0$ определяется из дифференциального уравнения ее движения [1]:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{\vec{v}^+(M, t) + \vec{v}^-(M, t)}{2}, \quad M \in \Gamma_t. \quad (7)$$

Полагаем, что при отсутствии границ Γ ($k_1 = k_2 = 1$) и Γ_t ($\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\rho_1 = \rho_2 = 1$) (границы L и L_0 могут присутствовать) известно невозмущенное поле скоростей $\vec{v}_0(M, t)$. Это поле скоростей учитывает наличие особых точек течения в области фильтрации. Если положение особых точек задано, а их мощности могут меняться со временем, то невозмущенное поле скоростей имеет вид

$$\vec{v}_0(M, t) = \sum_{i=1}^s q_i(t) \vec{F}_i(M, M_{0i}), \quad (8)$$

где s — число источников (стоков), $q_i(t)$ — их мощности. Вид функций $\vec{F}_i(M, M_{0i})$ зависит от закона изменения проводимости слоя. Они

имеют сингулярность типа $1/|\vec{r}_M - \vec{r}_{M_{0i}}|$ в точках нахождения особенностей M_{0i} .

Невозмущенное поле скоростей (8) удовлетворяет уравнениям (1), условиям (4) на границе L и условиям (5) на сингулярной линии L_0 . Представим неизвестное поле скоростей следующим образом

$$\vec{v}(M, t) = \vec{v}_0(M, t) + \vec{V}(M, t), \quad (9)$$

где $\vec{V}(M, t)$ — скорость возмущения, обусловленного наличием границ Γ и Γ_t .

Скорость возмущения $\vec{V}(M, t)$ должна удовлетворять уравнениям (1) и вытекающим из (2)–(5) с учетом (9) граничным условиям:

$$\begin{aligned} V_n^+(M, t) &= V_n^-(M, t), \\ (1 - \lambda_k)V_\tau^+(M, t) - (1 + \lambda_k)V_\tau^-(M, t) &= 2\lambda_k v_{0\tau}(M, t), \quad M \in \Gamma; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} V_n^+(M, t) &= V_n^-(M, t), \quad (1 - \lambda_\mu)V_\tau^+(M, t) - (1 + \lambda_\mu)V_\tau^-(M, t) = \\ &= 2 \left[\lambda_\mu v_{0\tau}(M, t) + \alpha K(M) \frac{\partial \Pi(M, t)}{\partial \tau_M} \right], \quad M \in \Gamma_t; \end{aligned} \quad (11)$$

$$V_\tau(M, t) = 0, \quad M \in L_1; \quad V_n(M, t) = 0, \quad M \in L_2; \quad (12)$$

$$V_\tau(M, t) = 0, \quad M \in L_{01}; \quad H(M)V_n(M, t) = 0, \quad M \in L_{02}, \quad (13)$$

где параметр $\lambda_k = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda_\mu = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$, $\alpha = (\rho_2 - \rho_1)/(\mu_2 + \mu_1)$. Здесь учтено, что скорость $\vec{v}_0(M, t)$ непрерывна на контуре C ($\vec{v}_0^+(M, t) = \vec{v}_0^-(M, t) = \vec{v}_0(M, t)$, $M \in C$). Параметр $\lambda_k \in (-1, 1)$ и $\lambda_\mu \in (-1, 1)$.

Если область D содержит бесконечно удаленную точку, то потребуем затухания скорости возмущения на бесконечности

$$V(M, t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \rho(M, C) \rightarrow \infty, \quad (14)$$

где $\rho(M, C)$ — расстояние между точкой M и контуром C .

Уравнение движения границы Γ_t (7) с учетом (9) примет вид:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_0(M, t) + \frac{1}{2} [\vec{V}^+(M, t) + \vec{V}^-(M, t)], \quad M \in \Gamma_t. \quad (15)$$

Таким образом, исследование задачи эволюции границы Γ_t сводится к отысканию скорости возмущения $\vec{V}(M, t)$, удовлетворяющей

уравнениям (1), условиям (10)–(14) и интегрировании дифференциального уравнения (15) при начальном условии (6).

Сведение задачи к системе уравнений. Полагаем, что кривые Γ и Γ_t в любой момент времени можно моделировать кривыми класса Ляпунова. Будем искать скорость возмущения $\vec{V}(M, t)$ в виде потенциала вихревого слоя [1], распределенного с плотностью $g(N, t)$ на Γ и $f(N, t)$ на Γ_t :

$$\begin{aligned} \vec{V}(M, t) = & \int_{\Gamma} g(N, t) \vec{V}_B^*(M, N) d\ell_N + \\ & + \int_{\Gamma_t} f(N, t) \vec{V}_B^*(M, N) d\ell_N, \quad M \in D \setminus C. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\vec{V}_B^*(M, N) = \vec{V}_B(M, N)/K(N)$, $\vec{V}_B(M, N)$ — скорость в точке M от нормированного вихря, расположенного в точке N . Если область D ограничивает линия L , то выбираем скорость $\vec{V}_B(M, N)$ так, чтобы выполнялись условия (4), а при наличии сингулярной линии L_0 — условия (5).

Скорость возмущения (16) удовлетворяет условию (14). Продолжая скорость $\vec{V}(M, t)$ на границу Γ и Γ_t получаем ее предельные значения [2]:

$$\vec{V}^{\pm}(M, t) = \vec{V}(M, t) \pm \frac{\gamma(M, t)}{2} \vec{\tau}_M, \quad M \in C. \quad (17)$$

Здесь под $\vec{V}(M, t)$ понимается прямое значение скорости возмущения (16) на контуре C , $\gamma(M, t)$ — плотность распределения вихрей на соответствующей части этого контура.

Подставляя (17) в граничные условия (10) и (11), получаем систему двух неоднородных интегральных уравнений второго рода типа Фредгольма:

$$g(M, t) - 2\lambda_k V_{\tau}(M, t) = 2\lambda_k v_{0\tau}(M, t), \quad M \in \Gamma, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} f(M, t) - 2\lambda_{\mu} V_{\tau}(M, t) = & 2[\lambda_{\mu} v_{0\tau}(M, t) + \\ & + \alpha K(M) \nabla \Pi(M, t) \cdot \vec{\tau}_M], \quad M \in \Gamma_t, \end{aligned} \quad (19)$$

где обозначено $V_{\tau}(M, t) = \vec{V}(M, t) \cdot \vec{\tau}_M$ и $v_{0\tau}(M, t) = \vec{v}_0(M, t) \cdot \vec{\tau}_M$.

Подставляя (17) в (15) получим уравнение движения границы Γ_t :

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_0(M, t) + \vec{V}(M, t), \quad M \in \Gamma_t, \quad (20)$$

где $\vec{V}(M, t)$ — прямое значение скорости (16).

Следовательно, нахождение положения границы Γ_t в любой момент времени сводится к решению эволюционной задачи для системы уравнений (18) — (20) при начальном условии (6).

Если необходимо найти только положение границы Γ_t , то можно уменьшить число уравнений в полученной системе. Для этого исключим $f(M, t)$ из уравнения (20). Умножив (20) скалярно на единичный вектор касательной $\vec{\tau}_M$ в точке M границы Γ_t и используя уравнение (19), получим

$$f(M, t) = 2 \left[\lambda_\mu \frac{d\vec{r}_M}{dt} + \alpha K(M) \nabla \Pi(M, t) \right] \cdot \vec{\tau}_M, \quad M \in \Gamma_t. \quad (21)$$

Учитывая (20) и (21), находим векторное интегро-дифференциальное уравнение движения границы Γ_t :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_M}{dt} - 2 \int_{\Gamma_t} \left[\lambda_\mu \frac{d\vec{r}_N}{dt} + \alpha K(N) \nabla \Pi(N, t) \right] \cdot \vec{\tau}_N \vec{V}_B^*(M, N) d\ell_N - \\ - \int_{\Gamma} g(N, t) \vec{V}_B^*(M, N) d\ell_N = \vec{v}_0(M, t), \quad M \in \Gamma_t. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставив (21) в (18) получим интегральное уравнение для определения плотности $g(M, t)$:

$$\begin{aligned} g(M, t) - 4\lambda_k \int_{\Gamma_t} \left[\lambda_\mu \frac{d\vec{r}_N}{dt} + \alpha K(N) \nabla \Pi(N, t) \right] \cdot \vec{\tau}_N V_{B\tau}^*(M, N) d\ell_N - \\ - 2\lambda_k \int_{\Gamma} g(N, t) V_{B\tau}^*(M, N) d\ell_N = 2\lambda_k v_{0\tau}(M, t), \quad M \in \Gamma. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, изучение движения границы Γ_t сводится к решению эволюционной задачи для системы интегро-дифференциального (22) и интегрального (23) уравнений при начальном условии (6).

Решение поставленной задачи упрощается, если граница Γ имеет канонический вид (прямая, окружность). В этом случае иногда удается выбрать невозмущенное поле скоростей $\vec{v}_0(M, t)$ и скорость вихря $\vec{V}_B(M, N)$ таким образом, что условия (2) на границе Γ выполняются. Тогда следует положить $g(M, t) = 0$ и необходимость в уравнениях (18) и (23) отпадает, а интегро-дифференциальное уравнение движения границы Γ_t (22) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_M}{dt} - 2 \int_{\Gamma_t} \left[\lambda_\mu \frac{d\vec{r}_N}{dt} + \alpha K(N) \nabla \Pi(N, t) \right] \cdot \vec{\tau}_N \vec{V}_B^*(M, N) d\ell_N = \\ = \vec{v}_0(M, t), \quad M \in \Gamma_t. \end{aligned} \quad (24)$$

Заметим, что в случае отсутствия границы Γ ($\lambda_k = 0$) интегро-дифференциальное уравнение движения границы Γ_t имеет тот же вид (24). В указанных случаях нахождение положения границы Γ_t в любой момент времени сводится к эволюционной задаче для интегро-дифференциального уравнения (24) при начальном условии (6) [3].

Если массовые силы пренебрежимо малы по сравнению с гидродинамическими силами давления (напорная фильтрация), то в записанных уравнениях можно положить, что потенциал массовой силы равен нулю ($\Pi(N, t) = 0$). Эволюция границы раздела жидкостей в кусочно-неоднородном грунте для этого случая исследовалась в работе [4].

Решение задачи. Полученные уравнения решались численно на основе метода дискретных особенностей [5]. Полагаем, что положение границы Γ задается множеством точек $E_\Gamma = \{(\xi_k, \eta_k), k = 1, 2, \dots, m\}$. Подвижная граница Γ_t в каждый момент времени $t_p, p = 0, 1, \dots$, задается множеством точек $E_{\Gamma_t}^p = \{(x_i^p, y_i^p), i = 1, 2, \dots, n\}$. Тогда начальное условие (6) примет вид:

$$\text{при } t = 0 \quad \Gamma_0 : \{(x_i^0, y_i^0), i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (25)$$

Запишем конечно-разностный аналог уравнений (18), (19). Для этого заменим производные по координатам центральными разностями, а интегралы по формуле прямоугольников. Так как в (18) интеграл по границе Γ , а в (19) по границе Γ_t понимаются в смысле главного значения по Коши, то в сумме, аппроксимирующей эти интегралы, следует выбросить точку в которой записывается соответствующее уравнение. В результате получаем систему $n + m$ ли-

нейных алгебраических уравнений для нахождения плотности вихревого слоя в момент времени t_p для точек E_Γ и $E_{\Gamma_t}^p$:

$$g_k^p - 2\lambda_k \left[\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m g_l^p V_{B\tau kl}^* \Delta \ell_l + \sum_{j=1}^n f_j^p V_{B\tau kj}^* \Delta \ell_j^p \right] = 2\lambda_k v_{0\tau k}^p, \quad (26)$$

$$k = 1, 2, \dots, m,$$

$$f_i^p - 2\lambda_\mu \left[\sum_{l=1}^m g_l^p V_{B\tau il}^* \Delta \ell_l + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j^p V_{B\tau ij}^* \Delta \ell_j^p \right] = \quad (27)$$

$$= 2[\lambda_\mu v_{0\tau i}^p + \alpha K_i \nabla \Pi_i^p \cdot \vec{\tau}_i^p], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь $g_k^p = g(\xi_k, \eta_k, t_p)$, $f_i^p = f(x_i^p, y_i^p, t_p)$, $K_i = K(x_i^p, y_i^p)$, $\Pi_i^p = \Pi(x_i^p, y_i^p, t_p)$, $v_{0\tau k}^p = \vec{v}_0(\xi_k, \eta_k, t_p) \cdot \vec{\tau}_k$, $v_{0\tau i}^p = \vec{v}_0(x_i^p, y_i^p, t_p) \cdot \vec{\tau}_i^p$, $V_{B\tau kl}^* = \vec{V}_B^*(\xi_k, \eta_k, \xi_l, \eta_l) \cdot \vec{\tau}_k$, $V_{B\tau kj}^* = \vec{V}_B^*(\xi_k, \eta_k, x_j^p, y_j^p) \cdot \vec{\tau}_k$, $V_{B\tau il}^* = \vec{V}_B^*(x_i^p, y_i^p, \xi_l, \eta_l) \cdot \vec{\tau}_i^p$, $V_{B\tau ij}^* = \vec{V}_B^*(x_i^p, y_i^p, x_j^p, y_j^p) \cdot \vec{\tau}_i^p$,

$$\tau_{xk} = \frac{\Delta \ell_{k+1}}{\Delta \ell_k + \Delta \ell_{k+1}} \frac{\xi_k - \xi_{k-1}}{\Delta \ell_k} + \frac{\Delta \ell_k}{\Delta \ell_k + \Delta \ell_{k+1}} \frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{\Delta \ell_{k+1}},$$

$$\tau_{yk} = \frac{\Delta \ell_{k+1}}{\Delta \ell_k + \Delta \ell_{k+1}} \frac{\eta_k - \eta_{k-1}}{\Delta \ell_k} + \frac{\Delta \ell_k}{\Delta \ell_k + \Delta \ell_{k+1}} \frac{\eta_{k+1} - \eta_k}{\Delta \ell_{k+1}},$$

$$\Delta \ell_k = \sqrt{(\xi_k - \xi_{k-1})^2 + (\eta_k - \eta_{k-1})^2},$$

$$\tau_{xi}^p = \frac{\Delta \ell_{i+1}^p}{\Delta \ell_i^p + \Delta \ell_{i+1}^p} \frac{x_i^p - x_{i-1}^p}{\Delta \ell_i^p} + \frac{\Delta \ell_i^p}{\Delta \ell_i^p + \Delta \ell_{i+1}^p} \frac{x_{i+1}^p - x_i^p}{\Delta \ell_{i+1}^p},$$

$$\tau_{yi}^p = \frac{\Delta \ell_{i+1}^p}{\Delta \ell_i^p + \Delta \ell_{i+1}^p} \frac{y_i^p - y_{i-1}^p}{\Delta \ell_i^p} + \frac{\Delta \ell_i^p}{\Delta \ell_i^p + \Delta \ell_{i+1}^p} \frac{y_{i+1}^p - y_i^p}{\Delta \ell_{i+1}^p},$$

$$\Delta \ell_i^p = \sqrt{(x_i^p - x_{i-1}^p)^2 + (y_i^p - y_{i-1}^p)^2}.$$

Для замкнутых границ Γ и Γ_t следует положить $\xi_0 = \xi_m$, $\eta_0 = \eta_m$, $\xi_1 = \xi_{m+1}$, $\eta_0 = \eta_{m+1}$, $x_0^p = x_n^p$, $y_0^p = y_n^p$, $x_1^p = x_{n+1}^p$, $y_1^p = y_{n+1}^p$. Решив систему уравнений (26) и (27), находим плотности вихревого слоя g_k^p , $k = 1, 2, \dots, m$ и f_i^p , $i = 1, 2, \dots, n$ в момент времени t_p . Для нахождения положения границы Γ_t в следующий момент времени t_{p+1} заменим в (20) производные по времени правыми разностями, а

интегралы аналогично тому как это было сделано в (27):

$$\vec{r}_i^{p+1} = \vec{r}_i^p + \left[\vec{v}_{0i}^p + \sum_{l=1}^m g_l^p \vec{V}_{Bil}^* \Delta \ell_l + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j^p \vec{V}_{Bij}^* \Delta \ell_j^p \right] \Delta t_{p+1}, \quad (28)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь $\Delta t_{p+1} = t_{p+1} - t_p$, $\vec{r}_i^p = (x_i^p, y_i^p)$, $\vec{v}_{0i}^p = \vec{v}_0(x_i^p, y_i^p, t_p)$, $\vec{V}_{Bil}^* = \vec{V}_B^*(x_i^p, y_i^p, \xi_l, \eta_l)$, $\vec{V}_{Bij}^* = \vec{V}_B^*(x_i^p, y_i^p, x_j^p, y_j^p)$. Совместно решая уравнения (26)–(28) при начальном условии (25) последовательно находим положение границы Γ_t в моменты времени t_p , $p = 1, 2, \dots$

Предложенная модель позволяет исследовать эволюцию границы раздела жидкостей различных вязкостей и плотностей в кусочно-неоднородных слоях грунта. Такие задачи возникают при мониторинге загрязнения, эксплуатации нефтеносных (водоносных) пластов грунта сложной геологической структуры. Конкретные примеры эволюции границы раздела жидкостей рассмотрены в работах [1, 4, 6, 7].

Литература

1. Пивень В. Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости.—Орел: Изд-во ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», 2006.—508 с.
2. Пивень В. Ф. Сингулярные интегралы с ядрами типа Коши и их применение к двумерной задаче эволюции границы раздела жидкостей в неоднородном слое // Дифференц. уравнения.—2006.—Т. 42, № 9.—С. 1201–1213.
3. Федяев Ю. С. Математическое моделирование двумерной эволюции границы раздела жидкостей в неоднородном слое грунта // Труды XIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2007).—Харьков–Херсон, 2007.—С. 291–294.
4. Пивень В. Ф., Федяев Ю. С. Эволюция двумерной границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородном слое грунта // Тр. XI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2003).—Харьков–Херсон, 2003.—С. 211–216.
5. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО «Янус», 1995.—520 с.
6. Пивень В. Ф., Федяев Ю. С. Математическое моделирование двумерной эволюции границы раздела жидкостей в кусочно-неоднородных слоях грунта // Тр. Международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики».—Орел: ОГУ, 2004.—Вып. 3.—С. 54–63.

7. *Федяев Ю. С.* Математическое моделирование эволюции двумерной границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Орловский государственный университет.—Орел, 2005.—191 с.

Федяев Юрий Сергеевич

ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»

Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95

E-mail: fedyaevys@gmail.com

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

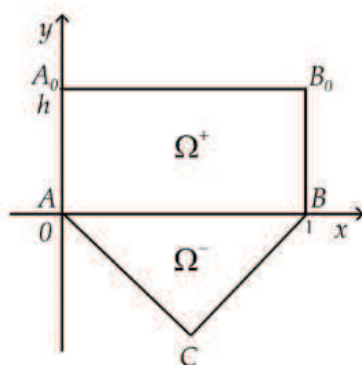
К. У. Хубиев

В работе для уравнения гиперболо-параболического типа доказана теорема существования и единственности решения нелокальной задачи с интегральным условием.

Рассмотрим нагруженное [1] уравнение гиперболо-параболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^{2-H(y)} u}{\partial y^{2-H(y)}} = \lambda_0 u(x - H(-y)y, 0) \quad (1)$$

в области Ω , ограниченной отрезками AA_0 , BB_0 , A_0B_0 прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = h > 0$ соответственно, и характеристиками уравнения (1) $AC : x + y = 0$, $BC : x - y = 1$; $\lambda_0 = \text{sign } y \cdot \lambda^2(x - H(-y)y)$, $H(y)$ — функция Хевисайда. Через Ω^+ и Ω^- обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области Ω соответственно, а через I — интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.



Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega \setminus I)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию монотонности **М** [2], если для любых x и y из $]0, 1[$

$$\varphi(x) \in C^1]0, 1[, \quad \varphi(x) \geq 0, \quad \int_0^1 \varphi(x) dx < \infty,$$

$$\varphi(x) \geq \varphi(y), \quad \varphi'(x) < \varphi'(y), \quad \forall x < y.$$

ЗАДАЧА. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0, y) = \rho_1(y), \quad u(1, y) = \rho_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u(x/2, -x/2) + \int_0^1 K(x, \xi) u(\xi, 0) d\xi = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

где $\rho_1(y)$, $\rho_2(y)$, $\psi(x)$, $K(x, \xi)$ — заданные функции.

Имеет место следующая теорема

Теорема. Если $\rho_1(y)$, $\rho_2(y) \in C[0, h]$ — функции, непрерывные в замыкании области их определения, $\psi(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$; $\lambda(x) \neq 0$, непрерывна в Ω и удовлетворяет условию Гельдера в области Ω^+ ; функция $K(x, \xi)$ представима в виде $K(x, \xi) = \gamma(\xi) + \text{sign}(x - \xi)\varphi(|x - \xi|)$, где $\varphi'(t)$ удовлетворяет условию М, $\gamma(t)$, $\varphi''(t) \in L[0, 1]$, то задача (1)–(3) имеет, и притом единственное решение.

◁ Обозначим $u(x, 0) = \tau(x)$, $x \in \bar{I}$, $u_y(x, 0) = \nu(x)$, $x \in I$, тогда $\tau(x) \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$, $\nu(x) \in C(I)$, $\tau(0) = \rho_1(0)$, $\tau(1) = \rho_2(0)$.

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y \rightarrow +0$, получим функциональное соотношение, принесенное из параболической части Ω^+ смешанной области Ω :

$$\tau''(x) - \lambda^2(x)\tau(x) - \nu(x) = 0. \quad (4)$$

В области Ω^- для уравнения (1) при $\lambda(x) \neq 0$ функциональное соотношение можно получить в виде [3]

$$\tau'(x) + \frac{x}{2}\lambda^2(x)\tau(x) - \nu(x) = 2\psi'_0(x), \quad (5)$$

где $\psi_0(x) = u[\theta_0(x)] = \psi(x) - \int_0^1 K(x, \xi)\tau(\xi) d\xi$.

Докажем единственность решения задачи.

Пусть $\psi(x) = \rho_1(x) = \rho_2(x) \equiv 0$. Умножая соотношение (4) на функцию $\tau(x)$ и интегрируя от 0 до 1, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \tau(\xi) \left[\tau''(\xi) - \lambda^2(\xi) \tau(\xi) - \nu(\xi) \right] d\xi = \\ &= - \int_0^1 \tau(\xi) \nu(\xi) d\xi + \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{2} \tau^2(\xi) \right]'' - [\tau'(\xi)]^2 - \lambda^2(\xi) \tau^2(\xi) \right) d\xi = \\ &= - \int_0^1 \tau(\xi) \nu(\xi) d\xi - \int_0^1 \left([\tau'(\xi)]^2 + \lambda^2(\xi) \tau^2(\xi) \right) d\xi = 0. \\ & \int_0^1 \tau(\xi) \nu(\xi) d\xi = - \int_0^1 \left([\tau'(\xi)]^2 + \lambda^2(\xi) \tau^2(\xi) \right) d\xi \leq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь интеграл $\int_0^1 \tau(\xi) \nu(\xi) d\xi$, используя соотношение (5). Выражая $\nu(x)$ из (5) и подставляя в интеграл, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \tau(\xi) \nu(\xi) d\xi = \int_0^1 \tau(\xi) \left[\tau'(\xi) + \frac{\xi}{2} \lambda^2(\xi) \tau(\xi) - 2\psi'_0(\xi) \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\tau^2(\xi) \right]' d\xi + \frac{1}{2} \int_0^1 \xi \lambda^2(\xi) \tau^2(\xi) d\xi + 2 \int_0^1 \tau(\xi) \int_0^1 K_\xi(\xi, t) \tau(t) dt d\xi = \\ &= \frac{1}{2} [\tau^2(1) - \tau^2(0)] + \frac{1}{2} \int_0^1 \xi \lambda^2(\xi) \tau^2(\xi) d\xi + 2 \int_0^1 \int_0^1 K_\xi(\xi, t) \tau(\xi) \tau(t) dt d\xi = (6) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \xi \lambda^2(\xi) \tau^2(\xi) d\xi + 2 \int_0^1 \int_0^1 K_\xi(\xi, t) \tau(\xi) \tau(t) dt d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \xi \lambda^2(\xi) \tau^2(\xi) d\xi + 2 \int_0^1 \int_0^1 \varphi'(|\xi - t|) \tau(\xi) \tau(t) dt d\xi. \end{aligned}$$

Так как функция $\varphi'(|x - \xi|)$ удовлетворяет условию **М**, то

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi'(|\xi - t|) \tau(\xi) \tau(t) dt d\xi \geq 0, \quad \int_0^1 \tau(\xi) \nu(\xi) d\xi \geq 0.$$

Таким образом, мы получили, что $\int_0^1 \tau(\xi) \nu(\xi) d\xi = 0$, а отсюда и из (6) следует, что $\tau(x) \equiv 0$, из чего нетрудно заключить единственность решения задачи (1)–(3).

Докажем теперь существование решения.

Подставляя значение $\nu(x)$ из (5) в (4), получим дифференциальное уравнение

$$\tau''(x) - \tau'(x) - \frac{x+2}{2} \lambda^2(x) \tau(x) = -2\psi'_0(x). \quad (7)$$

Решая краевую задачу

$$\tau(0) = \rho_1(0), \quad \tau(1) = \rho_2(0) \quad (8)$$

для уравнения (7), получим

$$\tau(x) = -2 \int_0^1 G(x, \xi) \psi'_0(\xi) d\xi + G_\xi(x, 1) \rho_2(0) - G_\xi(x, 0) \rho_1(0), \quad (9)$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина, обладающая свойствами [4]

а) в промежутках $0 \leq x < \xi$, $\xi < x \leq 1$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка и удовлетворяет уравнению, сопряженному с уравнением (7), кроме того, при каждом фиксированном ξ , $0 < \xi < 1$, удовлетворяет как функция от x однородным краевым условиям (8);

б) в точке $\xi = x$ как функция ξ сама непрерывна, а ее первая производная по x имеет скачок, причем $G_x(x, x-0) - G_x(x, x+0) = 1$.

Подставляя значение функции $\psi'_0(x)$ в (9), получим уравнение

$$\tau(x) + \int_0^1 Q(x, \xi) \tau(\xi) d\xi = f(x), \quad (10)$$

где $f(x) = G_\xi(x, 1)\rho_2(0) - G_\xi(x, 0)\rho_1(0) - 2 \int_0^1 G(x, \xi)\psi'(\xi) d\xi$,

$$Q(x, \xi) = 2 \int_0^1 G(x, t)K_t(t, \xi) dt = 2 \int_0^1 G(x, t)\varphi'(|t - \xi|) dt.$$

Учитывая свойства функций, входящих в ядро $Q(x, \xi)$ и правую часть $f(x)$ уравнения (10), получим, что оно является уравнением Фредгольма второго рода, решение которого существует ввиду единственности решения задачи.

После нахождения функции $\tau(x)$ решение задачи (1)–(3) распадается на первую задачу Дарбу в области Ω^- и первую краевую задачу в области Ω^+ . $\triangleright$

Литература

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии.—М.: Высш. шк., 1995.—301 с.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
3. Аттаев А. Х. Задача Трикоми для модельного нагруженного уравнения с оператором Лаврентьева-Бицадзе в главной части // Тр. межд. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы».—Стерлитамак, 2008.—Т. 2.—С. 81–85.
4. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. —М.: Наука, 1966.—444 с.

ХУБИЕВ КАЗБЕК УЗЕИРОВИЧ

Научно-исследовательский институт прикладной

математики и автоматизации КБНЦ РАН

КБР, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: niipma@mail333.com

ОБ АППРОКСИМАЦИИ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ш. С. Хубежты

Рассматривается один метод аппроксимации сингулярных операторов. Указывается о применении метода для численного решения сингулярных интегральных уравнений. В определенных условиях оценивается погрешность, где постоянные вычисляются эффективно.

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$S(\varphi, t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt \quad (t_0 \in L), \quad (1)$$

где L — некоторый гладкий замкнутый контур, заданный в комплексной плоскости уравнением $t = t(s)$ относительно дуговой абсциссы s ($a \leq s \leq b$), а $\varphi(t)$ заданная на L функция, удовлетворяющая условию Гельдера на L . Запись $t_0 \in L$ означает, что t_0 есть произвольная точка контура L .

Считая натуральное n произвольно заданным, разделим отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками

$$s_\sigma = a + \frac{b-a}{n}\sigma, \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1.$$

Далее, задаваясь фиксированным натуральным числом m , каждый из сегментов $[s_\sigma, s_{\sigma+1}]$ разделим на m частей точками

$$s_{\sigma k} = s_\sigma + h x_k, \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad \left(h = \frac{b-a}{n}\right),$$

где $\{x_k\}_{k=0}^{m-1}$ — некоторая система точек, заданных на отрезке $[0, 1]$ и обозначим

$$\tau_\sigma = t(s_\sigma), \quad t_{\sigma k} = t(s_{\sigma k}) \quad (\sigma = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, \dots, m-1).$$

Очевидно при этом, что если одновременно $x_0 = 0$, $x_{m-1} = 1$, то

$$t_{\sigma m-1} = t_{\sigma+1,0} = \tau_{\sigma+1} \quad (\sigma = 0, 1, \dots, n-1).$$

Так как L — замкнутый контур, то очевидно также, что $t_{n-1,m-1} = t_{n0} = \tau_n = \tau_0$. Таким образом, любой сетке точек $s_{\sigma k}$ на отрезке $[a, b]$ (или, иначе, любой заданной системе точек $\{x_k\}_{k=0}^{m-1}$ на отрезке $[0, 1]$) отображение $t = t(s)$ ставит в соответствие вполне определенную сетку точек $\{t_{\sigma k}\}$ на контуре L .

После этого введем обозначения

$$\begin{aligned} \omega_{\sigma}(t) &= \prod_{k=0}^{m-1} (t - t_{\sigma k}) \quad (\sigma = 0, 1, \dots, n-1, k = 0, 1, \dots, m-1), \\ L_{\sigma}(\varphi; t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_{\sigma}(t)}{(t - t_{\sigma k})\omega'_{\sigma}(t_{\sigma k})} \varphi(t_{\sigma k}) \quad (\sigma = 0, 1, \dots, n-1), \\ p_{\sigma k} &= \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\sigma}\tau_{\sigma+1}} \frac{\omega_{\sigma}(t)}{(t - t_{\sigma k})\omega'_{\sigma}(t_{\sigma k})} dt, \\ &(\sigma = 0, 1, \dots, n-1, k = 0, 1, \dots, m-1). \end{aligned}$$

Пусть $t_0 \in \tau_{\nu}\tau_{\nu+1}$ ($0 \leq \nu \leq n-1$). Построим на L оператор функцию $\Phi_n(\varphi, t, t_0)$ [1], полагая, при $t \in \tau_{\sigma}\tau_{\sigma+1}$

$$\Phi_n(\varphi; t, t_0) = \varphi(t_0) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_{\sigma}(t)}{(t - t_{\sigma k})\omega'_{\sigma}(t_{\sigma k})} \frac{t - t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} [L_{\nu}(\varphi; t_0) - \varphi(t_{\sigma k})]. \quad (2)$$

Нетрудно проверить, что $\Phi_n(\varphi; t, t_0) \equiv \varphi(t)$, если $\varphi(t)$ любой многочлен степени $\leq m-1$.

Полагая теперь $\varphi(t) \approx \Phi_n(\varphi; t, t_0)$, получим

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt \approx \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p_{\sigma k}}{t_0 - t_{\sigma k}} [L_{\nu}(\varphi; t_0) - \varphi(t_{\sigma k})].$$

Далее, положив

$$S_n(\varphi; t_0) = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \frac{(\frac{1}{n} + \lambda_{\sigma}(t_0))\omega_{\nu}(t_0)}{(t_0 - t_{\nu k})\omega'_{\nu}(t_{\nu k})} \varphi(t_{\nu k}) - \frac{p_{\sigma k}}{t_0 - t_{\sigma k}} \varphi(t_{\sigma k}) \right\}, \quad (3)$$

$$\lambda_{\sigma}(t_0) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p_{\sigma k}}{t_0 - t_{\sigma k}},$$

при любом $t_0 \in \tau_{\nu}\tau_{\nu+1}$ за приближение к сингулярному интегралу $S(\varphi, t_0)$ примем выражение $S_n(\varphi; t_0)$, равное $S_{n\nu}(\varphi; t_0)$ при $t_0 \in \tau_{\nu}\tau_{\nu+1}$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$). Ясно, что $S_n(\varphi, t_0)$ точно равняется $S(\varphi; t_0)$, когда $\varphi(t)$ представляет произвольный многочлен степени $\leq m-1$.

Известно, что [2], если $\varphi(t)$ имеет на L непрерывные производные $(r-1)$ -го порядка и производная r -го порядка удовлетворяют условию Гельдера, то справедливо неравенство

$$|S(\varphi, t_0) - S_n(\varphi; t_0)| < (C_1 \ln n + C_2) \frac{1}{n^{r+\alpha}}, \quad (4)$$

где α ($0 < \alpha \leq 1$) — показатель Гельдера функции $\varphi^{(r)}$, C_1, C_2 — некоторые постоянные, не зависящие от n .

Мы поставили целью оценить коэффициенты C_1, C_2 эффективно через известные величины.

Для этого представим разность $S(\varphi, t_0) - S_n(\varphi; t_0)$ в виде

$$\begin{aligned} S(\varphi, t_0) - S_n(\varphi; t_0) &= \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \tilde{\Phi}_n(\varphi, t, t_0)}{t - t_0} dt = \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{L-\gamma} \frac{\delta_n(\varphi, t, t_0)}{t - t_0} dt + \sum_{\sigma=\nu\pm 1, \nu} \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\sigma}\tau_{\sigma+1}} \frac{\varphi(t) - \tilde{\Phi}_n(\varphi, t, t_0)}{t - t_0} dt. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\Phi}_n(\varphi, t, t_0)$ отличается от $\Phi_n(\varphi, t, t_0)$ тем, что здесь вместо $\varphi(t_0)$ имеем соответствующий многочлен Лагранжа, построенный по значениям φ в узлах $\{t_{\nu k}\}$, а $\delta_n(\varphi, t, t_0)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta_n(\varphi, t, t_0) &= \varphi(t) - \frac{\omega_{\sigma}(t)}{\omega_{\sigma}(t_0)} \varphi(t_0) + \frac{\omega_{\sigma}(t)}{\omega_{\sigma}(t_0)} R_{\nu}(\varphi; t_0) - \\ &- \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_{\sigma}(t)(t - t_0)}{(t - t_{\sigma k})\omega'_{\sigma}(t_{\sigma k})(t_{\sigma k} - t_0)} \varphi(t_{\sigma k}), \end{aligned}$$

где $R_{\nu}(\varphi, t_0)$ обозначает остаток указанного интерполирования [3].

Последнее выражение равняется нулю, если $\varphi(t)$ многочлен степени $\leq m-1$. Но и $R_{\nu}(\varphi, t_0)$ равняется нулю для таких функций.

Поэтому, если разложим $\varphi(t)$ в ряд Тейлора [3] и учтем свойства $\delta_n(\varphi; t, t_0)$, получим

$$\begin{aligned} \delta_n(\varphi; t, t_0) = & \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \int_{\tau_\sigma t} (t-u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\sigma)] du - \right. \\ & - \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \int_{\tau_\sigma t_0} (t_0-u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\sigma)] du + \\ & + \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\nu(t_0)}{(t_0 - t_{\nu k}) \omega'_\nu(t_{\nu k})} \left[\int_{\tau_\nu t_0} (t_0-u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\nu)] du - \right. \\ & - \int_{\tau_\nu t_{\nu k}} (t_{\nu k} - u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\nu)] du \left. \right] - \\ & - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\sigma(t)(t-t_0)}{(t_0 - t_{\sigma k}) \omega'_\sigma(t_{\sigma k})(t_{\sigma k} - t_0)} \int_{\tau_\sigma t_{\sigma k}} (t_{\sigma k} - u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\sigma)] du \left. \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое указанного выражения. Предварительно введем выражение

$$P = \max_{t, t_0 \in L} \left| \frac{s - s_0}{t - t_0} \right|,$$

где под $s - s_0$ понимается наименьшая дуга между точками t, t_0 .

Известно, что [4]

$$0 < \frac{1}{P} < \frac{|t - t_0|}{|s - s_0|} \leq 1.$$

Теперь оценим $\frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)}$ ($\sigma \neq \nu \pm 1, \nu$) по модулю.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \right| &= \left| \frac{(t - t_{\sigma 0})(t - t_{\sigma 1}) \dots (t - t_{\sigma m-1})}{(t_0 - t_{\sigma 0})(t_0 - t_{\sigma 1}) \dots (t_0 - t_{\sigma m-1})} \right| = \\ &= \left| \frac{\frac{t-t_{\sigma 0}}{s-s_{\sigma 0}} \cdot \frac{t-t_{\sigma 1}}{s-s_{\sigma 1}} \dots \frac{t-t_{\sigma m-1}}{s-s_{\sigma m-1}} (s - s_{\sigma 0}) \dots (s - s_{\sigma m-1})}{\frac{t_0-t_{\sigma 0}}{s_0-s_{\sigma 0}} \cdot \frac{t_0-t_{\sigma 1}}{s_0-s_{\sigma 1}} \dots \frac{t_0-t_{\sigma m-1}}{s_0-s_{\sigma m-1}} (s_0 - s_{\sigma 0}) \dots (s_0 - s_{\sigma m-1})} \right|. \end{aligned}$$

Учитывая очевидные неравенства

$$\begin{aligned} |s - s_{\sigma k}| &\leq h, \quad |s_0 - s_{\sigma k}| \geq |\nu - \sigma - 1|h, \\ |s_0 - s| &\leq |\nu + 1 - \sigma|h \quad \text{или} \quad |s_0 - s| \leq |\sigma + 1 - \nu|h, \end{aligned}$$

получим

$$\left| \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \right| \leq \begin{cases} \frac{P^m}{|\nu-\sigma-1|^m}, & \text{при } \sigma < \nu, \\ \frac{P^m}{|\sigma-\nu-1|^m}, & \text{при } \sigma > \nu. \end{cases}$$

Таким образом, можно написать

$$\begin{aligned} \left| \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \right| & \left| \int_{\tau_\sigma t_0} (t_0 - u)^{\tau-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\sigma)] du \right| \leq \\ & \leq \begin{cases} \frac{|\nu+1-\sigma|^{r+\alpha}}{|\nu-\sigma-1|^m} P^m H_\varphi^{(r)} h^{r+\alpha}, & \text{при } \sigma < \nu, \\ \frac{|\sigma+1-\nu|^{r+\alpha}}{|\sigma-\nu-1|^m} P^m H_\varphi^{(r)} h^{r+\alpha}, & \text{при } \sigma > \nu. \end{cases} \end{aligned}$$

Но легко проверить, что

$$\frac{|\nu+1-\sigma|^{r+\alpha}}{|\nu-\sigma-1|^m} \leq 3^{r+\alpha}, \quad \frac{|\sigma+1-\nu|^{r+\alpha}}{|\sigma-\nu-1|^m} \leq 3^{r+\alpha}.$$

Окончательно для этого слагаемого получаем оценку

$$\left| \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \right| \left| \int_{\tau_\sigma t_0} (t_0 - u)^{\tau-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\sigma)] du \right| \leq 3^{r+\alpha} H_\varphi^{(r)} P^m h^{r+\alpha},$$

где $H_\varphi^{(r)}$ — постоянная в условии Гельдера для функции $\varphi^{(r)}$.

Теперь рассмотрим

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\nu(t_0)}{(t_0 - t_{\nu k}) \omega'_\nu(t_{\nu k})} \int_{\tau_\nu t_0} (t_0 - u)^{r-1} (\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\nu)) du.$$

Воспользовавшись оценкой

$$|s_{\nu k} - s_{\nu j}| = |s_\nu + x_k h - s_\nu - x_j h| = |x_k - x_j| h \geq \min_k |x_{k+1} - x_k| h,$$

получим

$$\left| \frac{\omega_\nu(t_0)}{(t_0 - t_{\nu k}) \omega'_\nu(t_{\nu k})} \right| \leq \frac{P^{m-1}}{\min_k |x_{k+1} - x_k|^{m-1}}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \right| \left| \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\nu(t_0)}{(t_0 - t_{\nu k}) \omega'_\nu(t_{\nu k})} \left[\int_{\tau_\nu t_0} (t_0 - u)^{r-1} (\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\nu)) du - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_{\tau_\nu t_{\nu k}} (t_{\nu k} - u)^{r-1} (\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\nu)) du \right] \right| \leq \\ & \leq \frac{2mP^{m-1}}{\min_k |x_{k+1} - x_k|^{m-1}} h^{r+\alpha} H_\varphi^{(r)} \frac{P^m}{|\nu - \sigma - 1|^m} \leq \frac{2mP^{2m-1} h^{r+\alpha} H_\varphi^{(r)}}{\min_k |x_{k+1} - x_k|^{m-1}}. \end{aligned}$$

Аналогично получается

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\sigma(t)(t - t_0)}{(t - t_{\sigma k}) \omega'_\sigma(t_{\sigma k})(t_{\sigma k} - t_0)} \int_{\tau_\sigma t_{\sigma k}} (t_{\sigma k} - u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\sigma)] du \right| \leq \\ & \leq \frac{mP^m h^{r+\alpha} H_\varphi^{(r)}}{\min_k (x_{k+1} - x_k)^{m-1}} \left| \frac{\nu + 1 - \sigma}{\nu - \sigma - 1} \right| \leq \frac{3mP^m h^{r+\alpha} H_\varphi^{(r)}}{\min_k (x_{k+1} - x_k)^{m-1}}. \end{aligned}$$

Следовательно, окончательно можно написать

$$\begin{aligned} & |\delta_n(\varphi; t, t_0)| \leq \frac{1}{(r-1)!} h^{r+\alpha} H^{(r)} \times \\ & \times \left[1 + 3^{r+\alpha} P^m + \frac{2mP^{2m-1}}{\min_k (x_{k+1} - x_k)^{m-1}} + \frac{3mP^m}{\min_k (x_{k+1} - x_k)^{m-1}} \right] = \frac{C_1}{n^{r+\alpha}}. \end{aligned}$$

Подставляя это значение в рассматриваемый сингулярный интеграл, получим

$$\begin{aligned} & \int_{L-\gamma} \left| \frac{\delta_n(\varphi; t_1, t_0)}{t - t_0} \right| |dt| \leq \max_{L-\gamma} |\delta_n(\varphi; t_0, t_1)| \int_{L-\gamma} \left| \frac{dt}{t - t_0} \right| \leq \\ & \leq \frac{C_1 P}{n^{r+\alpha}} \int_{L-\gamma} \frac{ds}{|s - s_0|} = \frac{C_1 P}{n^{r+\alpha}} \ln \frac{(s_0 - a)(b - s_0)}{(s_0 - s_{\nu-1})(s_{\nu+2} - s_0)}. \end{aligned}$$

Оценим теперь логарифмический член. Для этого используем очевидные неравенства

$$\begin{aligned} \nu h & \leq s_0 - a \leq (\nu + 1)h, \quad (n - \nu - 1)h \leq b - s_0 \leq h(n - \nu), \\ h & \leq s_0 - s_{\nu-1} \leq 2h, \quad h \leq s_{\nu+2} - s_0 \leq 2h, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\nu(n-\nu-1)}{4} \leq \frac{(s_0-a)(b-s_0)}{(s_0-s_{\nu-1})(s_{\nu+2}-s_0)} \leq (\nu+1)(n-\nu),$$

$$(\nu+1)(n-\nu) \leq \frac{(n+1)^2}{4}, \quad \frac{\nu(n-\nu+1)}{4} \leq \frac{(n+1)^2}{4}.$$

Таким образом,

$$\left| \ln \frac{(s_0-a)(b-s_0)}{(s_0-s_{\nu-1})(s_{\nu+2}-s_0)} \right| \leq \left| \ln \frac{(n+1)^2}{4} \right| = 2 \ln \frac{n+1}{2} \quad (n \geq 2).$$

Далее, в

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(t) - \tilde{\Phi}_n(\varphi; t, t_0)}{t - t_0} dt &= \sum_{\sigma=\nu \pm 1, \nu} \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt - L_{\nu}(\varphi; t_0) \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\nu-1} \tau_{\nu+2}} \frac{dt}{t - t_0} - \\ &- \sum_{\sigma=\nu \pm 1, \nu} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p_{\sigma k}}{t_0 - t_{\sigma k}} \sum_{\substack{k_0=0 \\ k_0 \neq k}}^{m-1} \frac{\omega_{\nu}(t_0)}{(t_0 - t_{\nu k_0}) \omega'_{\nu}(t_{\nu k_0})} [\varphi(t_{\nu k_0}) - \varphi(t_{\nu k})] \end{aligned}$$

разложим $\varphi(t)$ в ряд Тейлора в окрестности t_0 . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(t) - \tilde{\Phi}_n(\varphi; t, t_0)}{t - t_0} dt &= \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \sum_{\sigma=\nu \pm 1, \nu} \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \frac{dt}{t - t_0} \times \right. \\ &\times \int_{\tau_0 t} (t-u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_{\nu})] du - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_{\nu}(t_0)}{(t_0 - t_{\nu k}) \omega'_{\nu}(t_{\nu k})} \times \\ &\times \int_{t_0 t_{\nu k}} (t_{\nu k} - u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_{\nu})] du \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\nu-1} \tau_{\nu+2}} \frac{dt}{t - t_0} - \\ &- \sum_{\sigma=\nu \pm 1, \nu} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p_{\sigma k}}{t_0 - t_{\sigma k}} \sum_{\substack{k_0=0 \\ k_0 \neq k}}^{m-1} \frac{\omega_{\nu}(t_0)}{(t_0 - t_{\nu k_0}) \omega'_{\nu}(t_{\nu k_0})} \left[\int_{t_0 t_{\nu k_0}} (t_{\nu k_0} - u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \right. \\ &\left. - \varphi^{(r)}(\tau_{\nu})] du - \int_{t_0 t_{\nu k}} (t_{\nu k} - u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_{\nu})] du \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Используя, далее, неравенства

$$|p_{\sigma k}| \leq \frac{P^{m-1}h}{\pi \min_k (x_{k+1} - x_k)^{m-1}},$$

$$|t_0 - t_{\nu-1,k}| \geq \frac{h}{P} \min_k (x_{k+1} - x_k), \quad |t_0 - t_{\nu+1,k}| \geq \frac{h}{P} \min_k (x_{k+1} - x_k),$$

$$\left| \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{dt}{t - t_0} \right| \leq 1 + \frac{1}{\pi} \ln 2P^2,$$

получим

$$\left| \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(t) - \tilde{\Phi}_n(\varphi; t, t_0)}{t - t_0} dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^{r+\alpha}} \frac{(b-a)^{r+\alpha} H_{\varphi}^{(r)}}{(r-1)!} \left[\frac{3}{\pi} + \frac{mP^{m-1}}{\min_k (x_{k+1} - x_k)^{m-1}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \frac{1}{\pi} \ln 2P^2 \right) + \frac{6m(m-1)P^{2m-1}2^{r+\alpha}}{\pi \min_k (x_{k+1} - x_k)^{2m-2}} \right] = \frac{C_2}{n^{r+\alpha}}.$$

Таким образом, можно написать

$$|S\varphi - S_n\varphi| \leq \frac{1}{n^{r+\alpha}} (C_1 \ln n + C_2),$$

где

$$C_1 = \frac{(b-a)^{r+\alpha} H_{\varphi}^{(r)} P}{\pi (r-1)!} \left[1 + 3^{r+\alpha} P^m + \frac{2mP^{2m-1}}{\min_k (x_{k+1} - x_k)^{m-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{3mP^{2m}}{\min_k (x_{k+1} - x_k)^{m-1}} \right], \quad (5)$$

$$C_2 = \frac{(b-a)^{r+\alpha} H_{\varphi}^{(r)}}{\pi (r-1)!} \left[3 + \frac{mP^{m-1}}{\min_k (x_{k+1} - x_k)^{m-1}} (\pi + \ln 2P^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{6m(m-1)P^{2m-1}2^{r+\alpha}}{\min_k (x_{k+1} - x_k)^{2m-2}} \right] \quad (6)$$

Рассмотрим теперь сингулярное интегральное уравнение [4]

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_L k(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t),$$

где L — замкнутый гладкий контур, а $a(t)$, $b(t)$, $k(t, \tau)$, $f(t)$ заданные на L функции, удовлетворяющие условию Гельдера, $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ нигде на L .

Применив к сингулярной части квадратурную формулу (3), а к регулярной части обычную квадратурную формулу

$$\frac{1}{\pi i} \int_L k(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau \approx \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} p_{\sigma k} k(t, t_{\sigma k}) \varphi(t_{\sigma k}),$$

получим приближенное уравнение

$$a(t)\varphi_n(t) + b(t)S_n(\varphi_n, t) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} p_{\sigma k} k(t, t_{\sigma k}) \varphi_n(t_{\sigma k}) = f(t). \quad (6')$$

Это уравнение, если придавать параметру t значения из множества $\{t_{\nu j}\}$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$; $j = 0, 1, \dots, m-1$) порождает следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно φ_n в точках $t_{\nu j}$

$$a(t_{\nu j})\varphi_n(t_{\nu j}) + b(t_{\nu j})S_n(\varphi_n, t_{\nu j}) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} p_{\sigma k} k(t_{\nu j}, t_{\sigma k}) \varphi_n(t_{\sigma k}) = f(t_{\nu j}). \quad (7)$$

Исследование о разрешимости последней системы может быть проведено с применением общих методов функционального анализа.

Рассмотрим подробно оценку погрешности указанного метода. Наша цель получить эффективные оценки, т. е. такие оценки, где постоянные будут выражены через исходные данные задачи, как это сделано для интегральных уравнений [5].

Отметим, что эту задачу нам не удалось решить в общем случае. Мы здесь приводим ее решение в предположении, что коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ данного уравнения постоянные и $a(t) + b(t) = 1$.

Систему (7) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \varphi_n(t_{\nu j}) + b(t_{\nu j})S_n(\varphi_n - \varphi_n(t_{\nu j}), t_{\nu j}) + \\ & + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} p_{\sigma k} k(t_{\nu j}, t_{\sigma k}) \varphi_n(t_{\sigma k}) = f(t_{\nu j}) \end{aligned} \quad (8)$$

$$(\nu = 0, 1, \dots, n-1; \quad j = 0, 1, \dots, m-1).$$

Согласно формуле Крамера

$$\varphi_n(t_{\nu j}) = \frac{\sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \Delta_{\nu j \sigma k} f(t_{\sigma k})}{\Delta_n} \quad \left(\begin{array}{l} \nu = 0, 1, \dots, n-1 \\ j = 0, 1, \dots, m-1 \end{array} \right), \quad (9)$$

где Δ_n — определитель системы (8).

Для точного решения в формулах (9) следует $f(t_{\sigma k})$ заменить через $f(t_{\sigma k}) + \rho_n(t_{\sigma k})$, тогда

$$\varphi(t_{\nu j}) = \frac{\sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \Delta_{\nu j \sigma k} [f(t_{\sigma k}) + \rho_n(t_{\sigma k})]}{\Delta_n}. \quad (10)$$

Сравнивая с (9), получаем

$$|\varphi(t_{\nu j}) - \varphi_n(t_{\nu j})| = \left| \frac{\sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \Delta_{\nu j \sigma k} \rho_n(t_{\sigma k})}{\Delta_n} \right| \leq \rho B, \quad (11)$$

где через B обозначена верхняя граница отношения $\sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} |\Delta_{\nu j \sigma k}| / |\Delta_n|$.

Оценка (11) является довольно удобной, так как требующиеся для этой оценки величины $\Delta_{\nu j \sigma k}$ и Δ_n должны определяться когда производится фактическое решение системы уравнений (8). Остается еще указать предел погрешности, которую мы допускаем в остальных точках, пользуясь для $\varphi_n(t)$ естественной интерполяционной формулой (6'). Для этого заметим, что

$$\varphi_n(t) = f(t) - b(t)S_n(\varphi_n - \varphi_n(t)), t) - \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} p_{\sigma k} k(t, t_{\sigma k}) \varphi_n(t_{\sigma k}).$$

С другой стороны, точное значение $\varphi(t)$ есть

$$\varphi(t) = f(t) - b(t)S_n(\varphi - \varphi(t)), t) - \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} p_{\sigma k} k(t, t_{\sigma k}) \varphi(t_{\sigma k}) + \rho_n(t),$$

где $|\rho_n(t)| \leq \rho$.

Вычитая из первого равенства второй и воспользовавшись (11), получим

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| \leq |b(t)| |S_n(\varphi - \varphi(t)), t) - S_n(\varphi_n - \varphi_n(t), t)| + \\ + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} |p_{\sigma k}| |k(t, t_{\sigma k})| |\varphi(t_{\sigma k}) - \varphi_n(t_{\sigma k})| + |\rho_n(t)|. \quad (12)$$

В формуле (12) $\rho_n(t)$ оценивается через $\varphi(t)$ и ее производные. От этого недостатка оценки (12) можно, однако избавиться следующим путем.

Воспользуемся методом регуляции Карлемана–Векуа [4]

$$\varphi(t) = Rf - Rk\varphi,$$

где

$$Rf \equiv \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)} f(t) - \frac{b(t)}{a^2(t) - b^2(t)} \cdot \frac{z(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{z(\tau)(\tau - t)} d\tau, \\ k\varphi \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Так как $a(t)$ и $b(t)$ постоянные, то функция $z(t)$ тоже постоянна и $\rho_n(t) = S\varphi - S_n\varphi + k\varphi - k_n\varphi$ оценивается следующим образом

$$|\rho_n(t)| \leq B_1 \|\varphi^{(r)}(t)\| + B_2 \| [k(t, \tau) \varphi(\tau)]^{(r)}_\tau \| = \\ = B_1 \|\varphi^{(r)}\| + B_2 \| k^{(r)}_\tau(t, \tau) \varphi(\tau) + C_2^1 k^{(r-1)}_\tau(t, \tau) \varphi(\tau) + \\ + \dots + C_r^{r-1} k'_\tau(t, \tau) \varphi^{(r-1)}(\tau) + k(t, \tau) \varphi^{(r)}(\tau) \|,$$

где B_1, B_2 постоянные, $C_r^j = r!/j!(r-j)!$.

Из

$$\varphi(t) = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)} f(t) - \frac{b(t)}{a^2(t) - b^2(t)} \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau - \\ - \frac{1}{\pi i} \int_L \left[\frac{a(t)}{a^2(\tau) - b^2(\tau)} k(t, \tau) - \frac{b(\tau)}{a^2(\tau) - b^2(\tau)} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{k(t_1, \tau) dt_1}{t_1 - t} \right] \varphi(\tau) d\tau$$

продифференцировав r раз получаем

$$\varphi^{(r)} = [Rf]^{(r)} - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{d^r}{dt^r} N(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau,$$

откуда

$$|\varphi^{(r)}(t)| \leq C_{1r} + C_{2r} H^{(0)}(b-a), \quad C_{1r} = \max \left| [Rf(t)]^{(r)} \right|, \\ C_{2r} = \max \left| \frac{d^r}{dt^r} N(t, \tau) \right| \frac{(b-a)}{\pi}, \quad M^{(r)} = \max \left| \frac{d^r}{dt^r} k(t, \tau) \right|.$$

Окончательно имеем

$$|\rho_n(t)| \leq B_1 \{C_{1r} + C_{2r} H^{(0)}(b-a)\} + B_2 \{M^{(r)} H^{(0)} + \\ + C_r^1 M^{(r-1)} (C_{11} + C_{21} H^{(0)}(b-a)) + \dots + \\ + C_r^{r-1} M^1 (C_{1r-1} + C_{2r-1} H^{(0)}(b-a)) + \\ + M^{(0)} (C_{1r} + C_{2r} H^{(0)}(b-a))\} = B_1 C_{1r} + B_2 C_r^1 M^{(r-1)} C_{11} + \dots + \\ + B_2 C_r^{r-1} M^1 C_{1r-1} + B_2 M^{(0)} C_{1r} + (B_1 C_{2r} + B_2 C_r^1 C_{21} M^{(r-1)} + \dots + \\ + B_2 C_r^{r-1} M^1 C_{2r-1} + B_2 M^{(0)} C_{2r}) H^{(0)}(b-a) = P_r + Q_r H^{(0)}.$$

Пользуясь полученным неравенством, оценку (12) можем переписать так

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| \leq |b(t)| |S_n| B \rho + M^{(0)}(b-a) B \rho + (P_r + Q_r H^{(0)}).$$

Обозначим через S верхнюю границу модуля приближенного решения $\varphi_n(t)$, тогда можно написать

$$|\varphi(t)| \leq S + (|b(t)| |S_n| B + B M^{(0)}(b-a) + 1)(P_r + Q_r H^{(0)}), \quad (13)$$

$$H^{(0)} \leq \frac{S + P_r (|b(t)| |S_n| B + M^{(0)}(b-a) B + 1)}{1 - (|b(t)| |S_n| B + B M^{(0)}(b-a) + 1) Q_r}. \quad (14)$$

Воспользовавшись полученной оценкой $H^{(0)}$ из неравенств (13) и (14) можем получить окончательную оценку $|\varphi(t) - \varphi_n(t)|$ точности приближения, в которой участвуют лишь известные величины.

Здесь осталось еще оценить $|S_n|$. Как нетрудно убедиться,

$$|S_n| \leq 1 + \frac{8nm^2 P^m}{\min_k (x_{k+1} - x_k)^{m-1}}. \quad (15)$$

Следовательно, с помощью последних неравенств получается оценка для погрешности $|\varphi(t) - \varphi_n(t)|$, где постоянные выражены через исходные данные.

Литература

1. Саникидзе Д. Г., Хубеджашвили Ш. С. Замечание об оценке точности одного процесса аппроксимации сингулярных интегралов для функции, имеющих абсолютно непрерывную производную заданного порядка // Сообщения АН ГССР.—1975.—Т. 78, № 3.—С. 561–564.
2. Хубеджашвили Ш. С. Замечание об оценке точности приближения сингулярных интегралов суммами усложненного типа // Сообщения АН ГССР.—1976.—Т. 83, № 1.—С. 21–23.
3. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов.—М., 1967.—500 с.
4. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.—М., 1968.—510 с.
5. Канторович Л. Г., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа.—М., 1962.—708 с.

ХУБЕЖТЫ ШАЛВА САЛАМОНОВИЧ

Южный математический институт ВНЦ РАН

Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: shalva57@rambler.ru

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

С. А. Циунчик

В работе рассматривается нелинейная параболическая задача. Для нее строится разностная схема, приводится ее решение с помощью итерационного процесса Ньютона и результаты численного эксперимента.

Многие задачи естествознания приводят к необходимости численного решения нелокальных уравнений математической физики с нелинейным вхождением неизвестной функции. В данной работе рассматривается численное решение первой начально-краевой задачи для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[1 + \int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 d\tau \right] \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t).$$

Такие задачи возникают как математические модели проникновения магнитного поля в вещество при условии нагрева тела [1]. Разрешимость рассматриваемой задачи была исследована в работах [1, 2]. В работе [3] исследована разрешимость уравнений, являющихся обобщением уравнения (1). В основе указанных выше работ лежат различные модификации метода Галеркина для параболических уравнений [6] (Фаэдо–Галеркина). При этом в качестве базисных функций берутся некоторые функции с заданными свойствами, факт существования которых доказывается, но точного выражения получить, вообще говоря, невозможно. Таким образом, в данной ситуации вопрос об использовании метода Галеркина для численного решения задач типа (1) остается открытым.

1. Постановка задачи. Рассмотрим в области $D = ((x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T)$ задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[1 + \int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 d\tau \right] \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (2)$$

2. Построение разностной схемы для задачи (1), (2). Для решения задачи (1), (2) построим неявную разностную схему.

Введем в замкнутой области $\overline{D} = ((x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$ равномерную сетку

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \omega_\tau = \{(ih, j\tau), i = 0, 1, \dots, N, j = 1, \dots, j_0\},$$

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}, \omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 1, \dots, j_0\}.$$

Преобразуем уравнение (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 d\tau \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 + \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 d\tau \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d\tau + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(1 + \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 d\tau \right) + f(x, t). \quad (3)$$

Заменим производные, входящие в уравнение (3) их разностными аналогами [4]

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} \sim u_{t,i}^j = \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau}, \quad \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial x} \sim u_{x,i}^j = \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h},$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} \sim u_{xx,i}^j = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2},$$

получим

$$u_{t,i}^j = 2u_{x,i}^j \sum_{k=1}^j \int_{t_{k-1}}^{t^k} u_{x,i}^k u_{xx,i}^k d\tau + u_{xx,i}^j \left(1 + \sum_{k=1}^j \int_{t_{k-1}}^{t^k} \left(u_{x,i}^k \right)^2 d\tau \right) + f^j,$$

$$u_{t,i}^j = 2u_{x,i}^j \left(\int_{t_{j-1}}^{t^j} u_{x,i}^j u_{xx,i}^j d\tau + \sum_{k=1}^{j-1} \int_{t_{k-1}}^{t^k} u_{x,i}^k u_{xx,i}^k d\tau \right) +$$

$$+ u_{xx,i}^j \left(\int_{t_{j-1}}^{t^j} \left(u_{x,i}^j \right)^2 d\tau + 1 + \sum_{k=1}^{j-1} \int_{t_{k-1}}^{t^k} \left(u_{x,i}^k \right)^2 d\tau \right) + f_i^j. \quad (4)$$

Далее, заменяя в (4) интегралы по формуле трапеций

$$\sum_{k=1}^j \int_{t_{k-1}}^{t_k} v(\tau) d\tau = \frac{t_j - t_{j-1}}{2} (v^0 + v^j) + (t_j - t_{j-1}) \sum_{k=1}^{j-1} v^k,$$

имеем

$$\begin{aligned} u_{t,i}^j &= 2u_{x,i}^j \left(\frac{\tau}{2} u_{x,i}^j u_{xx,i}^j + \frac{\tau}{2} \left[u_{x,i}^0 u_{xx,i}^0 + 2 \sum_{k=1}^{j-1} u_{x,i}^k u_{xx,i}^k \right] \right) + \\ &+ u_{xx,i}^j \left(\frac{\tau}{2} (u_{x,i}^j)^2 + 1 + \frac{\tau}{2} \left[(u_{x,i}^0)^2 + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (u_{x,i}^k)^2 \right] \right) + f_i^j, \\ u_{t,i}^j &= 2u_{x,i}^j \left(\frac{\tau}{2} u_{x,i}^j u_{xx,i}^j + S_{1i}^j \right) + u_{xx,i}^j \left(\frac{\tau}{2} (u_{x,i}^j)^2 + S_{2i}^j \right) + f_i^j, \end{aligned}$$

где $S_{1i}^j = \tau/2 \left(u_{x,i}^0 u_{xx,i}^0 + 2 \sum_{k=1}^{j-1} u_{x,i}^k u_{xx,i}^k \right)$, $S_{2i}^j = 1 + \tau/2 \left((u_{x,i}^0)^2 + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (u_{x,i}^k)^2 \right)$, $S_{1i}^1 = S_{2i}^1 = 0$.

Начальные и краевые условия (2) аппроксимируем точно

$$u(x_i, 0) = \varphi(x_i), \quad u(0, t_j) = \mu_1^j, \quad u(1, t_j) = \mu_2^j.$$

В итоге дифференциальной задаче (1), (2) ставим в соответствие разностную схему:

$$\begin{aligned} y_{t,i}^j - \frac{3}{2} \tau (y_{x,i}^j)^2 y_{xx,i}^j - 2y_{x,i}^j S_{1i}^j - y_{xx,i}^j S_{2i}^j - f_i^j &= 0, \\ i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, j_0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} y_i^0 &= \varphi(x_i), \quad i = 0, 2, \dots, N, \\ y_0^j &= \mu(0, t_j), \quad y_N^j = \mu(1, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, j_0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $S_{1i}^j = \tau/2 \left(y_{x,i}^0 y_{xx,i}^0 + 2 \sum_{k=1}^{j-1} y_{x,i}^k y_{xx,i}^k \right)$, $S_{2i}^j = 1 + \tau/2 \left((y_{x,i}^0)^2 + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (y_{x,i}^k)^2 \right)$, $S_{1i}^1 = S_{2i}^1 = 0$.

Разностная схема (5), (6) аппроксимирует дифференциальную задачу (1), (2) с порядком $O(h + \tau)$.

Для нахождения значений функции y_i на j -м слое имеем нелинейную систему уравнений:

$$F(y) = f, \quad (7)$$

где $F_i^j = y_{\tau}^j - 3/2\tau (y_x^j)^2 y_{xx}^j - 2y_x^j S_1^j - y_{xx}^j S_2^j - f^j$.

Для решения системы (7) будем использовать итерационный процесс Ньютона [5]

$$F'(v_k)v_{k+1} = f - F(v_k) + F'(v_k)v_k.$$

Найдем элементы матрицы $F'(y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial y_{i-1}} &= -3\frac{\tau}{2h^2} (y_x^j)^2 - \frac{1}{h^2} S_2^j, \\ \frac{\partial F_i}{\partial y_i} &= \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h} 2S_1^j + \frac{2}{h^2} S_2^j + \frac{3}{2}\tau \left(\frac{2}{h} y_x^j y_{xx}^j + (y_x^j)^2 \frac{2}{h^2} \right), \\ \frac{\partial F_i}{\partial y_{i+1}} &= -\frac{2}{h} S_1^j - \frac{3}{2}\tau \left(\frac{2}{h} y_x^j y_{xx}^j + \frac{1}{h^2} (y_x^j)^2 \right) - \frac{1}{h^2} S_2^j. \end{aligned}$$

Таким образом, переходим от (9) к линейной относительно y_i^{k+1} системе уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_{i-1}} y_{i-1}^{k+1} + \frac{\partial F_i}{\partial y_{i+1}} y_{i+1}^{k+1} + \frac{\partial F_i}{\partial y_i} y_i^{k+1} = -D_i, \quad i = 2, \dots, N-1, \quad (8)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} y_1^{k+1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} y_2^{k+1} = -D_1, \quad (9)$$

$$\frac{\partial F_{N-1}}{\partial y_{N-2}} y_{N-2}^{k+1} + \frac{\partial F_{N-1}}{\partial y_{N-1}} y_{N-1}^{k+1} = -D_{N-1}, \quad (10)$$

где $D_i = -f_i + (F(y))_i - (F'(y))_i$.

Полученная система уравнений (8)–(10) решается методом прогонки.

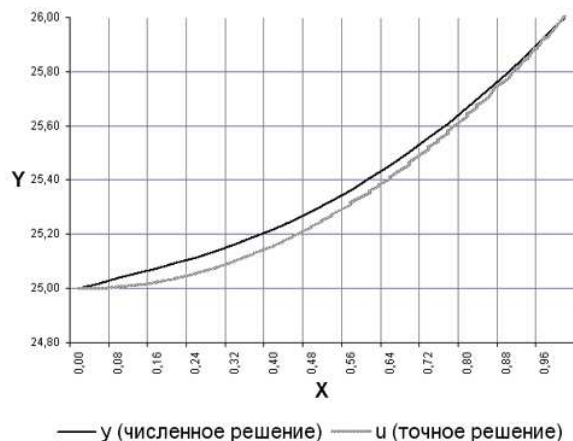
Результаты вычислений при $h = 0,4$, $\tau = 0,0001$ для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[1 + \int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 d\tau \right] \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2t(1 - 12x^2) - 2,$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0, t) = t^2, \quad u(1, t) = 1 + t^2, \quad 0 \leq t \leq T$$

приведены на рисунке 1.



Литература

1. Гордзиани Д. Г., Джангвеладзе Т. А., Коршия Т. К. О существовании и единственности решения одного класса нелинейных параболических задач // Дифференциальные уравнения.—1983.—Т. 19, № 7.—С. 1197–1207.
2. Джангвеладзе Т. А. Исследование первой краевой задачи для некоторых нелинейных интегро-дифференциальных уравнений параболического типа.—Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1983.
3. Лаптев Г. И. Квазилинейные параболические уравнения, содержащие в коэффициентах оператор Вольтерры. // Мат. сб.—1988.—Т. 136(178), № 4(8)—С. 530–545.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656 с.
5. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы.—М.: Наука, 1989.—432 с.
6. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина.—М.: Мир, 1988.—352 с.

Циунчик Светлана Алексеевна
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: svetlana_tc@mail.ru

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ
НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ

И. Д. Цопанов

В работе получено условие однозначной разрешимости одного интегро-дифференциального уравнения с несамосопряженными краевыми условиями. Доказана сходимость метода Галеркина-Петрова.

Введение

Пусть дано интегро-дифференциальное уравнение

$$-y''(x) + q(x)y(x) + \int_0^1 K(x, \xi)y(\xi) d\xi = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = y'(1). \quad (2)$$

В силу того, что дифференциальный оператор T , определяемый равенствами

$$Ty = -y'', \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = y'(1), \quad (3)$$

не является самосопряженным, для численного решения задачи (1)–(2) методами типа Галеркина теория, изложенная в классических монографиях [4] и [5], неприменима.

Спектральные свойства оператора (3) изучены в работе [3]. В частности, установлено, что спектр $\sigma(T)$ оператора T состоит из последовательности собственных значений $\lambda_k = (2k\pi)^2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), которой соответствует набор собственных и присоединенных функций: $\varphi_0(x) = x$, $\varphi_{2k-1}(x) = \sin(2\pi kx)$, $\varphi_{2k}(x) = x \cos(2\pi kx)$ ($k \in \mathbb{N}$). Причем, $T\varphi_{2k-1} = \lambda_k\varphi_{2k-1}$, $T\varphi_{2k} = \lambda_k\varphi_{2k} + p_k\varphi_{2k-1}$, $p_k = 4k\pi$. Т. е. собственному значению $\lambda_0 = 0$ соответствует одна собственная функция φ_0 , а каждому ненулевому собственному значению λ_k ($k \in \mathbb{N}$) соответствует одна собственная φ_{2k-1} и одна присоединенная функция φ_{2k} .

Для сопряженной задачи $T^*y = -y''$, $y'(1) = 0$, $y(0) = y(1)$, имеем $\psi_0 = 2$, $\psi_{2k-1}(x) = 4(1-x)\sin(2\pi kx)$, $\psi_{2k} = 4x\cos(2\pi kx)$, $k \in \mathbb{N}$, где $T^*\psi_{2k} = \lambda_k\psi_{2k}$, $T^*\psi_{2k-1} = \lambda_k\psi_{2k-1} + p_k\psi_{2k}$, $p_k = 4k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, т. е. через ψ_{2k-1} обозначен присоединенный вектор, а через ψ_{2k} — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_k . При такой нумерации выполнены соотношения биортогональности $(\varphi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$. Справедлива [3]

Теорема 1. Последовательность функций $\varphi_0, \varphi_{2k-1}, \varphi_{2k}$ ($k \in \mathbb{N}$) образует базис в $L_2(0,1)$, т. е. для любого $f \in L_2(0,1)$ верно представление в виде сходящегося по норме ряда:

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} (f, \psi_j) \varphi_j,$$

и, кроме того, выполнены оценки

$$r\|f\|_{L_2}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |(f, \psi_k)|^2 \leq R\|f\|_{L_2}^2, \quad \text{где } R = 16, \quad r = 3/4.$$

Согласно [2], это означает, что система $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ является базисом Рисса в гильбертовом пространстве $L_2(0,1)$, т. е. существует ограниченный обратимый оператор J на $L_2(0,1)$ и некоторый ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ такой, что $\varphi_i = Je_i$, $\psi_j = (J^{-1})^*e_j$ для всех $i, j = 0, 1, 2, \dots$

Используя приведенные свойства оператора T , оказывается возможным получить некоторые условия однозначной разрешимости задачи (1)–(2), а также доказать сходимость метода Галеркина–Петрова для ее численного решения.

1. Однозначная разрешимость задачи (1)–(2)

Для исследования вопроса существования и единственности решения задачи (1)–(2) представим интегро-дифференциальное уравнение в операторной форме:

$$Ty + (Q + K)y = f. \quad (4)$$

Так как $\lambda = -1$ не является собственным значением T , то оператор $T + E$ имеет ограниченный обратный. Имеем

$$T + Q + K = (E + (Q - E + K)(T + E)^{-1})(T + E).$$

Таким образом, ограниченная обратимость оператора $T + Q + K$ сводится к существованию ограниченного оператора

$$(E + (Q - E + K)(T + E)^{-1})^{-1}.$$

Так как $(T + E)^{-1}$ — интегральный оператор с непрерывным ядром, то для суммируемых с квадратом функций $q(x)$ и $K(x, t)$ оператор $(Q - E + K)(T + E)^{-1}$ будет интегральным оператором Гильберта–Шмидта с ядром

$$\tilde{K}(x, \xi) = \tilde{q}(x)G(x, \xi) + \int_0^1 K(x, t)G(t, \xi) dt,$$

где $\tilde{q}(x) = q(x) - 1$, $G(x, \xi)$ — функция Грина оператора $(T + E)^{-1}$:

$$G(x, \xi) = \frac{1}{\Delta} \begin{cases} (e^x - e^{-x})(e^{1-\xi} + e^{-1+\xi}), & 0 \leq x \leq \xi, \\ (e^x - e^{-x})(e^{1-\xi} + e^{-1+\xi}) + \frac{\Delta}{2}(e^{\xi-x} - e^{x-\xi}), & \xi \leq x \leq b, \end{cases}$$

где $\Delta = 2(e + e^{-1} - 2)$. Известно [1, с. 219], что операторы

$$Vy = \int_0^x \tilde{K}(x, t)y(t) dt, \quad Wy = \int_x^1 \tilde{K}(x, t)y(t) dt$$

являются вольтерровыми операторами из класса Гильберта–Шмидта. Если ввести обозначение $\|\bullet\|_2$ для операторной нормы Гильберта–Шмидта, то справедлива оценка [1]

$$\|V^k\| \leq \frac{\|V\|_2^k}{\sqrt{k!}},$$

обеспечивающая существование оператора $(E + V)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} V^k$. Таким образом, справедлива

Лемма 1. Если выполнено неравенство $\|(E + V)^{-1}W\| < 1$, т. е. обратим оператор $E + (E + V)^{-1}W$, то оператор $T + Q + K$ обратим.

◁ Доказательство следует из равенств

$$E + (Q - E + K)(T + E)^{-1} = E + V + W = (E + V)(E + (E + V)^{-1}W). \triangleright$$

Для получения оценки $\|(E + V)^{-1}W\| < 1$ используем неравенство Карлемана для резольвенты вольтеррова оператора из класса Гильберта–Шмидта [1]:

$$\|(E + V)^{-1}\| \leq e^{\frac{1}{2}(1 + \|V\|_2^2)}.$$

С учетом приведенной леммы, верна

Теорема 2. Пусть суммируемые с квадратом функции $q(x)$ и $K(x, t)$ таковы, что

$$|\tilde{q}(x)| + |K(x, t)| < \frac{\sqrt{2}(e-1)^3(e+1)}{6e^2} \quad \forall t, x \in [0, 1].$$

Тогда оператор $T + Q + K$ имеет ограниченный обратный, т. е. задача (1)–(2) однозначно разрешима.

◁ Доказательство следует из того, что для функции Грина выполнена оценка

$$|G(x, \xi)| \leq \frac{2e^2}{(e-1)^3(e+1)} \quad \forall t, \xi \in [0, 1].$$

Тогда, как нетрудно проверить,

$$\begin{aligned} \|V\|_2^2 &= \int_0^1 \int_0^x \left| \tilde{q}(x)G(x, \xi) + \int_0^1 K(x, t)G(t, \xi) dt \right|^2 d\xi dx < \frac{1}{9}, \\ \|W\|^2 &\leq \int_0^1 \int_x^1 \left| \tilde{q}(x)G(x, \xi) + \int_0^1 K(x, t)G(t, \xi) dt \right|^2 d\xi dx < \frac{1}{9}, \end{aligned}$$

что обеспечивает выполнение неравенства

$$\|(E + V)^{-1}W\| \leq e^{\frac{1}{2}(1+\|V\|_2^2)}\|W\| < 1. \triangleright$$

2. Методы Бубнова–Галеркина и Галеркина–Петрова

Пусть линейный оператор A определен на множестве D_A , плотном в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H , и пусть требуется решить уравнение

$$Au - f = 0. \quad (5)$$

Метод Бубнова–Галеркина состоит в том, что выбирается система векторов $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathfrak{D}(A)$, называемая координатной, и приближенное решение ищется в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} e_k. \quad (6)$$

После подстановки u_n в (5), получается равенство

$$Au_n - f = \varrho_n,$$

где элемент ϱ_n называют невязкой.

Коэффициенты $a_k^{(n)}$ определяются из условия «малости» невязки: невязка должна быть ортогональна в H элементам $e_1, e_2, \dots, e_n$. Это приводит к следующей системе линейных уравнений с неизвестными $a_k^{(n)}$:

$$\sum_{k=1}^n (Ae_k, e_j) a_k^{(n)} = (f, e_j), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

В методе Галеркина–Петрова используются две координатные системы. Приближенное решение ищется в виде $u_n = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \varphi_k$, но при этом требуется, чтобы невязка была ортогональна элементам второй координатной системы $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$. В результате получается система уравнений относительно коэффициентов $a_k^{(n)}$:

$$\sum_{k=1}^n (A\varphi_k, \psi_j) a_k^{(n)} = (f, \psi_j), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Сходимость метода Бубнова–Галеркина рассматривается, согласно [5], в предположении, что оператор A в уравнении (5) имеет вид

$$A = A_0 + K_0,$$

где A_0 — положительно определенный в гильбертовом пространстве H оператор, т. е. существует $\gamma = \text{const} > 0$ такой, что $(A_0 u, u) \geq \gamma \|u\|^2$ для всех $u \in \mathfrak{D}(A_0)$. Относительно оператора K_0 предполагается, что $\mathfrak{D}(K_0) \supset \mathfrak{D}(A_0)$.

В силу положительной определенности оператора A_0 имеет смысл энергетическое скалярное произведение и, соответственно, энергетическая норма [5]

$$(u, v)_{A_0} \stackrel{\text{def}}{=} (A_0 u, v), \quad \|u\|_{A_0} \stackrel{\text{def}}{=} (u, v)_{A_0}^{1/2}.$$

Линейное многообразие $\mathfrak{D}(A_0)$, пополненное по энергетической норме, является гильбертовым пространством. Будем обозначать

его H_0 . Известно, что это пополнение можно произвести за счет элементов из H ; множество элементов, составляющих H_0 будет совпадать с $\mathfrak{D}(A_0^{1/2})$. Таким образом, $H_0 = \mathfrak{D}(A_0^{1/2}) \subset H$. При этом для всех $u, v \in H_0$ имеем $(u, v)_{A_0} = (A_0^{1/2}u, A_0^{1/2}v)$, $\|u\|_{A_0} = \|A_0^{1/2}u\|$. Запишем (5) в виде

$$A_0u + K_0u = f.$$

Признак сходимости метода Бубнова–Галеркина дается теоремой С. Г. Михлина [4, 5]

Теорема 3. Пусть система координатных функций обладает свойствами:

- 1) $e_k \in \mathfrak{D}(A_0)$ для всех k ;
- 2) векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы для всех n ;
- 3) координатная система полна в H_0 .

Тогда приближенные решения уравнения (5), построенные по методу Бубнова–Галеркина, сходятся по энергии оператора A_0 к точному решению этого уравнения, если выполнены следующие условия:

- I. Уравнение $Au = f$ имеет не более одного решения в H_0 ;
- II. Оператор $L = A_0^{-1}K_0$ вполне непрерывен в H_0 .

Следующая лемма показывает, что в качестве координатной системы можно взять собственные векторы оператора A_0 .

Лемма 2. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированный базис в H , составленный из всех собственных векторов оператора A_0 . Тогда система $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ полна в пространстве H_0 .

◁ Пусть $\mathfrak{L}_n$ — линейная оболочка векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$. Достаточно показать, что $d_n \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{h \in \mathfrak{L}_n} \|A_0^{1/2}y - A_0^{1/2}h\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Так как $A_0^{1/2} : \mathfrak{L}_n \rightarrow \mathfrak{L}_n$ — биекция, а система $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированный базис в H , то

$$d_n = \inf_{h \in \mathfrak{L}_n} \|A_0^{1/2}y - h\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} (A_0^{1/2}y, e_k)e_k \right\|.$$

Таким образом, $d_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. ▷

3. Сходимость метода Галеркина–Петрова

Рассмотрим вопрос о сходимости метода Галеркина–Петрова для задачи (1)–(2). Будем считать, что выполнены условия существования и единственности решения. В силу свойства базисности, имеем

для всех $x \in \mathfrak{D}(T)$

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{k=1}^{\infty} [(x, T^* \psi_{2k-1}) \varphi_{2k-1} + (x, T^* \psi_{2k}) \varphi_{2k}] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [(x, \psi_{2k-1}) \varphi_{2k-1} + (x, \psi_{2k}) \varphi_{2k}] + \sum_{k=1}^{\infty} p_k (x, \psi_{2k}) \varphi_{2k-1}. \end{aligned}$$

Т. е. оператор T представляется в виде суммы двух операторов S и N : $T = S + N$, где

$$Sx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [(x, \psi_{2k-1}) \varphi_{2k-1} + (x, \psi_{2k}) \varphi_{2k}], \quad Nx = \sum_{k=1}^{\infty} p_k (x, \psi_{2k}) \varphi_{2k-1}.$$

При этом очевидно, что $\sigma(S) = \sigma(T)$. Отметим, что оператор N не является ограниченным, но верна

Лемма 3. Оператор $R_z(S)N$ при любом $z < 0$ может быть продолжен до компактного оператора, определенного на всем пространстве.

◁ Имеем для всех $x \in H$

$$R_z(Nx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(x, \psi_{2k}) \varphi_{2k-1}}{\lambda_k - z}. \quad (7)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|R_z(S)(Nx)\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(x, \psi_{2k})}{\lambda_k - z} \varphi_{2k-1} \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(x, \psi_{2k})}{\lambda_k - z} J e_{2k-1} \right\|^2 \leq \\ &\leq \|J\|^2 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(x, \psi_{2k})}{\lambda_k - z} e_{2k-1} \right\|^2 = \|J\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^2(x, \psi_{2k})}{|\lambda_k - z|^2} \leq \\ &\leq \|J\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |(x, \psi_{2k})|^2. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\|R_z(S)(Nx)\|^2 \leq \|J\|^2 R\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathfrak{D}(T),$$

т. е. оператор $R_z(S)N$ непрерывен на всюду плотном в H множестве $\mathfrak{D}(T)$. Следовательно, он может быть продолжен как ограниченный

оператор на все пространство H . Возвращаясь к формуле (7) и рассматривая теми же методами остатки ряда в правой части, легко получить, что оператор $R_z(S)N$ сколь угодно точно может быть приближен конечномерным оператором, т. е. он компактен. $\triangleright$

Теорема 4. Пусть выполнены условия однозначной разрешимости в $L_2(0, 1)$ задачи (1)–(2). Тогда, если в качестве систем координатных функций метода Галеркина–Петрова численного решения задачи (1)–(2) выбрать корневые векторы оператора (3) и сопряженного оператора T^* , то метод Галеркина–Петрова сходится.

$\triangleleft$ Используя прежние обозначения, введем в рассмотрение оператор $\tilde{S} = J^{-1}SJ + E$. Вспоминая, что $\varphi_k = Je_k$, $\psi_k = J^{*-1}e_k$, имеем:

$$\begin{aligned} Sy &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [(y, J^{*-1}e_{2k-1})Je_{2k-1} + (y, J^{*-1}e_{2k})Je_{2k}] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [(J^{-1}y, e_{2k-1})Je_{2k-1} + (J^{-1}y, e_{2k})Je_{2k}]. \end{aligned}$$

Введем обозначение $u = J^{-1}y$. Тогда имеем:

$$J^{-1}SJ u = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [(u, e_{2k-1})e_{2k-1} + (u, e_{2k})e_{2k}],$$

т. е. $\tilde{S} = J^{-1}SJ + E = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\lambda}_k(\cdot, e_k)e_k$, где $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0 + 1 = 1$, $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Оператор $\tilde{S}$ — самосопряженный положительно определенный оператор в H , так как $(\tilde{S}x, x) \geq \|x\|^2$. Пусть y_* — точное решение уравнения (4) (мы предполагаем, что решение существует и единственно). Легко видеть, что исходная задача при замене $y = Ju$ эквивалентна уравнению

$$(J^{-1}SJ + J^{-1}NJ + J^{-1}QJ + J^{-1}KJ)u = J^{-1}f,$$

т. е.

$$(\tilde{S} + B)u = \tilde{f}, \quad (8)$$

где

$$B = J^{-1}NJ + J^{-1}(Q + K - E)J, \quad \tilde{f} = J^{-1}f.$$

Однозначная разрешимость уравнения (8) в силу его построения равносильна однозначной разрешимости исходного уравнения (4). Пусть $u_* = J^{-1}y_*$ — точное решение уравнения (8).

Согласно приведенной выше теореме С. Г. Михлина, сходимость метода Бубнова–Галеркина для задачи (8), если в качестве A_0 и K_0 рассмотреть соответственно $\tilde{S}$ и B , может быть обеспечена компактностью оператора $\tilde{S}^{-1}B$ в энергетическом пространстве $H_0 = \mathfrak{D}(\tilde{S}_0^{1/2}) \subset H = L_2(0, 1)$, что, в свою очередь, следует [5, с. 430] из его компактности в H . Так как

$$\tilde{S}^{-1}B = \tilde{S}^{-1}J^{-1}NJ + \tilde{S}^{-1}J^{-1}(Q + K - E)J,$$

то достаточно установить компактность первого слагаемого. Имеем $\tilde{S}^{-1}J^{-1}NJ = J^{-1}(S + E)^{-1}NJ$, следовательно, компактность оператора $\tilde{S}^{-1}J^{-1}NJ$ следует из леммы 3.

Таким образом, метод Бубнова–Галеркина относительно координатных функций $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ для уравнения (8) сходится по энергетической норме $\|\bullet\|_{\tilde{S}}$:

$$u_n = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} e_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u_*, \quad (9)$$

где $a_k^{(n)}$ — решение системы линейных алгебраических уравнений с матрицей из элементов $((\tilde{S} + B)e_k, e_j)$ и правыми частями $(J^{-1}f, e_j)$, $k, j = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим теперь для исходной задачи (4) метод Галеркина–Петрова с системами координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$. Приближенное решение здесь ищется в виде

$$y_n = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} \varphi_k,$$

где коэффициенты $c_k^{(n)}$ являются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n c_k^{(n)} ((T + Q + K)\varphi_k, \psi_j) = (f, \psi_j), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Так как $\varphi_k = J e_k$, $\psi_j = J^{*-1} e_j$ и $J^{-1}(T + Q + K)J = \tilde{S} + B$, то коэффициенты $c_k^{(n)}$, найденные методом Галеркина–Петрова для исходной задачи (1)–(2), совпадают с коэффициентами $a_j^{(n)}$, найденными методом Бубнова–Галеркина для задачи (8). Т. е. (9) мы можем

переписать в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} e_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u_* = J^{-1} y_*.$$

Но так как $(\tilde{S}x, x) \geq \|x\|^2$, то последний предельный переход справедлив и относительно исходной нормы в $L_2(0, 1)$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n c_k^{(n)} \varphi_k = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} J e_k = J \left(\sum_{k=1}^n c_k^{(n)} e_k \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J(J^{-1} y_*) = y_*. \triangleright$$

Литература

1. Gil 'M. I. Operator Functions and Localization Spectra.—Berlin etc.: Springer, 2003.—256 p.
2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.—М.: Наука, 1965.—448 с.
3. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения.—1977.—Т. 13, № 2.—С. 294–304.
4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Ругицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений.—М.: Наука, 1989.—455 с.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике.—М.: Наука, 1970.—512 с.

Цопанов Игорь Дзастемирович
Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова;
Южный математический институт ВНЦ РАН
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: i.tsopanov@globalalania.ru

РАСЧЕТ ИМПУЛЬСНОГО РЕЖИМА ВЕНТИЛЯЦИИ ТУПИКОВОЙ ВЫРАБОТКИ

А. В. Чупин

На основании численного моделирования дан анализ использования метода разделенных потоков при пульсирующем режиме шахтной вентиляции. Представлено сравнение результатов использования двух моделей турбулентности при постановке численного эксперимента: $k - \varepsilon$ и SST.

Введение

Вопросы вентиляции горных выработок имеют особенное значение для безопасности разработки месторождений и предотвращения техногенных катастроф. С развитием возможностей современных персональных компьютеров для решения прикладных задач аэрологии горных выработок все чаще используют методы математического моделирования. Создаются пакеты специализированного программного обеспечения. Основная часть продукции на рынке специализированных программ направлена на решение вопросов управления пожарной безопасностью. В этих пакетах основное внимание уделено вопросам оптимизации построения вентиляционных сетей: распределению воздуха в сети выработок, расчету сопротивления на различных участках и т. д.

Важнейшей задачей аэрологии шахт является создание условий позволяющих за максимально короткий срок разрушить локальные скопления вредных и взрывоопасных веществ. В настоящее время разрабатывается множество технологических подходов решения этой задачи. Одним из таких подходов является пульсирующий режим шахтной вентиляции. Его применение описано К. З. Ушаковым [1].

1. Постановка задачи

В экспериментах, описанных К. З. Ушаковым [1], проводилось разрушение искусственных слоевых скоплений метана. Эксперименты позволили установить, что существует оптимальная частота пульсаций воздушного потока, при которой коэффициент турбулентной

диффузии имеет максимум, а время разрушения слоевых скоплений минимально. В одном из экспериментов максимальная концентрация газа в скоплениях достигала 6,5%. Поперечное сечение выработки составляло 7,5 м³. Воздух подавался с помощью пульсатора работающего с частотами от 4 до 12 с⁻¹. Оптимальная частота пульсаций в условиях эксперимента составила 7 с⁻¹. Для исследований интерес представляет построение математической модели, адекватно описывающей процесс разрушения слоевых скоплений. С ее помощью можно рассчитывать оптимальный режим проветривания выработок различной конфигурации, как в штатной, так и в аварийной ситуации. Ранее была описана трехмерная модель проветривания тупиковой выработки нагнетательным способом с распределением потоков воздуха [2]. При таком методе проветривания одна часть потока свежего воздуха подается к груди забоя для вытеснения облака взрывных газов из зоны выброса, а другая сбрасывается на границе этой зоны для создания воздушной завесы и разрежения вытесняемого облака до безопасной концентрации. В настоящей работе представлены результаты расчета этой же модели проветривания тупиковой выработки для случая подачи воздуха в пульсирующем режиме. Воспроизведем схему модели.

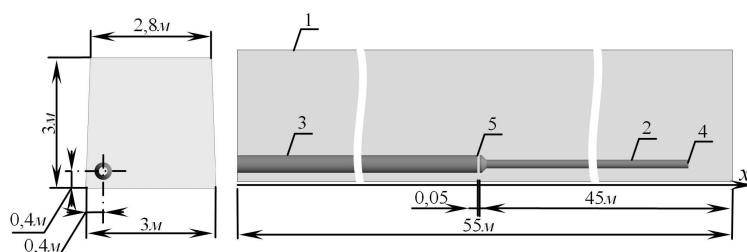


Рис. 1. Схема тупиковой выработки. 1 — выработка, 2 — трубопровод в рабочей зоне забоя $d = 0,2$ м, 3 — воздуховод $d = 0,4$ м, 4 — открытый торец трубопровода $d = 0,2$ м, 5 — окно для сброса основной части потока воздуха на границе зон шириной 0,05 м.

В начальный момент времени задано равномерное распределение метана по всему объему выработки с концентрацией $C = 5\%$, а начальная скорость воздуха во всем объеме выработки приравнена нулю. Подача чистого воздуха производилась через торец трубопровода и окно воздуховода. Скорость поступающего воздуха, по аналогии с экспериментом, задавалась ступенчатой функцией со значениями 0 и 70 м/с. Частота пульсаций при расчете составила 8 с⁻¹.

Подача воздуха производилась в противофазе таким образом, чтобы воздух поступал либо через торец трубопровода, либо через окно воздуховода. Произведен расчет первых 10 секунд течения. Шаг по времени выбран таким образом, чтобы на один период пульсации приходилось 36 временных шагов.

2. Модели течения

Расчет пульсирующего режима произведен с применением двух моделей турбулентности $k - \varepsilon$ и SST. Модель $k - \varepsilon$ вводит в систему уравнений Навье — Стокса, осредненных по Рейнольдсу, две переменные k — кинетическую энергию турбулентности, имеющую размерность $\text{м}^2/\text{с}^2$, которая характеризует изменение случайных отклонений скорости турбулентного потока от средней скорости и ε — скорость диссипации энергии турбулентности. Эта переменная имеет размерность $\text{м}^2/\text{с}^3$. Система уравнений описывающая движение воздуха имеет следующий вид.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U}) = 0. \quad (1)$$

Уравнение количества движения:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + \rho \mathbf{U}_j \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p'}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \mathbf{B}_i, \quad (2)$$

где $\tau_{ij} = \mu_{eff} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial x_i} \right)$, $\mathbf{B}$ — сумма сил, μ_{eff} — эффективная турбулентная вязкость, p' приведенное давление, имеющее вид:

$$p' = p + \frac{2}{3} \rho k. \quad (3)$$

Эффективная турбулентная вязкость:

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t, \quad (4)$$

где μ_t — турбулентная вязкость.

В модели $k - \varepsilon$ турбулентная вязкость, кинетическая энергия турбулентности и скорость диссипации связаны соотношением

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (5)$$

где $C_\mu = 0,09$ является константой. Значения k и ε выражаются из уравнений переноса:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla(\rho U k) = \nabla \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P_k - \rho \varepsilon, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla(\rho U \varepsilon) = \nabla \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon), \quad (7)$$

где $C_{\varepsilon 1} = 1.45$, $C_{\varepsilon 2} = 1.9$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$ константы. P_k является результатом действия сил плавучести и вязкости.

Вторая использованная для вычислений модель SST является модификацией модели $k-\varepsilon$, описанной в работе [1]. Считается, что эта модель дает более точный результат расчета начальных стадий течения и течения с разделяющимися потоками при неблагоприятных градиентах давления. В результате расчетов получено поле скорости, давления и концентрации метана. Вычисления выполнены методом конечных элементов.

3. Результаты

Картина течения при расчете с применением $k-\varepsilon$ и SST моделей турбулентности подобна. В обоих случаях отмечается образование областей с увеличением концентрации метана. На рисунке 2 представлено изменение во времени содержания метана в вертикальном сечении выработки на уровне $y = 0,4$ м. Для наглядности вертикальный масштаб сечения увеличен в три раза. На рисунке изображено распределение метана для пяти моментов времени. Первое (верхнее) сечение соответствует моменту времени 0,0 с. Последующие отображают распределение метана в сечении через интервалы времени равные 2,5 с. Во всех случаях запечатлен момент выброса порции воздуха из открытого торца трубопровода. На рисунке видна область трубопровода, обозначенная черным цветом. Темно серым цветом выделены области с содержанием газа менее 3%. Белый цвет соответствует областям с повышенным содержанием метана, превышающим 6%. Пиковое значение содержания для обоих случаев в среднем колеблется на уровне 15%. Оно локализуется в областях, где градиенты давления максимальны: вблизи торца трубопровода и окна воздуховода в момент выброса воздуха. При использовании модели SST, разброс пиковой концентрации относительно среднего значения больше.

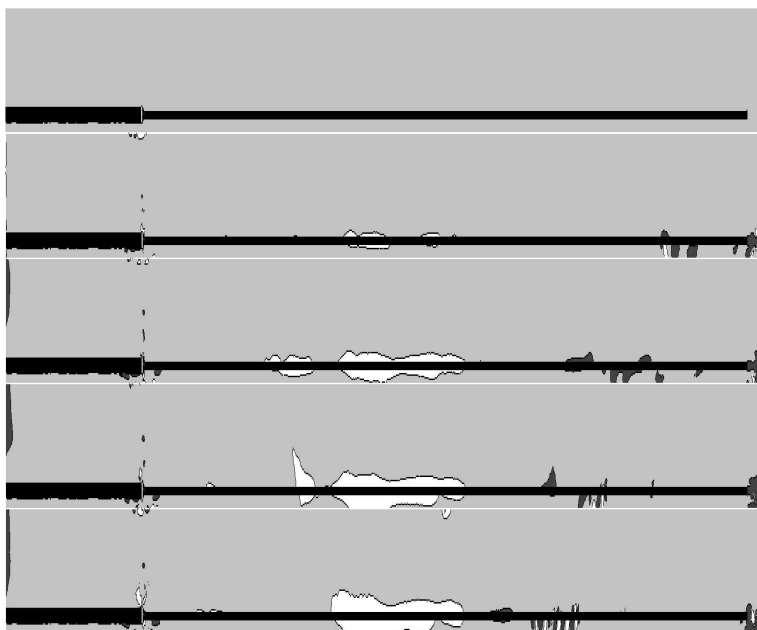


Рис. 2. Сечение выработки $y = 0,4$. Сверху вниз: сечение в моменты времени 0,0; 2,5; 5,0; 7,5; 10,0 сек.

Наиболее активно небольшие по размеру зоны с повышенным содержанием метана распространяются вдоль трубопровода. Они сливаются в средней части трубопровода и образуют постепенно увеличивающуюся область с концентрацией $C > 6\%$. На рисунках 3 и 4 приведены графики изменения суммарного объема областей повышенного содержания метана во времени. Общий объем выработки v_0 (за вычетом области трубопровода) составляет 476 м^3 .

Среднее содержание газа, достигнутое в выработке за 10 секунд при использовании модели $k - \varepsilon$ составляет 4,61%, а при использовании модели SST оно составляет 4,63%. Пульсирующий режим вентиляции используют для разрушения слоевых скоплений газа, которые являются причиной возгораний и взрывов в шахтах. Однако представленные результаты обнаруживают, что пульсирующий режим при поочередном вдуве воздуха с торца трубопровода и окна сброса, расположенного на достаточно большом расстоянии от торца приводит также к образованию новых локальных скоплений метана. Результаты численных экспериментов для двух моделей турбулент-

ности довольно близки. При использовании модели $k - \varepsilon$ объем зон с повышенной концентрацией метана возрастает практически линейно. Модель SST обнаруживает ступенчатое возрастание суммарного объема занимаемого зонами, в которых $C > 6\%$. На основании проведенных расчетов можно сделать вывод о нецелесообразности повторного ввода потока воздуха в двух достаточно удаленных друг от друга сечениях трубопровода.

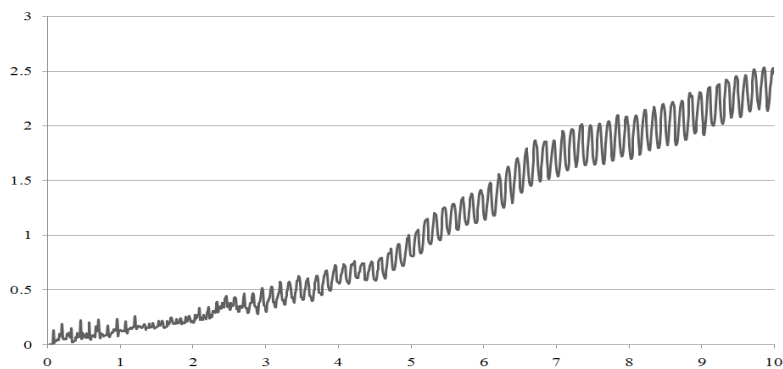


Рис. 3. Изменение объема области с концентрацией метана $> 6\%$. Модель $k - \varepsilon$.

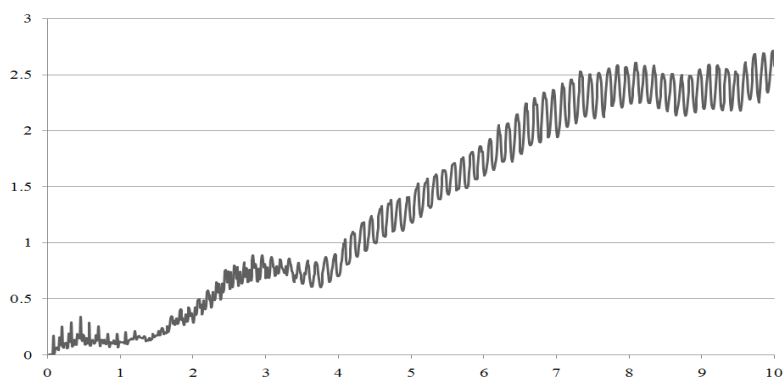


Рис. 4. Изменение объема области с концентрацией метана $> 6\%$. Модель SST.

Литература

1. Ушаков К. З. Газовая динамика шахт.—М.: Издательство МГГУ, 2004.—473 с.
2. Каменецкий Е. С., Чупин А. В. Модель вентиляции тупиковой выработки методом разделенных потоков // Горный информационно-аналитический бюллетень.—М.: МГГУ, 2006.—№ 7.—229–232 с.

Чупин Алексей Владимирович

Южный математический институт ВНЦ РАН

Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: czl-rsa@rambler.ru

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КОНТИНУАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ¹

Б. И. Эфендиев

Работа посвящена исследованию задачи Коши и задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной. Найдены условия существования решения задачи Дирихле.

1. Рассмотрим уравнение

$$u''(x) - \lambda D_{0x}^{[\alpha, \beta]} u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

где $D_{0x}^{[\alpha, \beta]} u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} D_{0x}^{\gamma} u(x) d\gamma$ — континуальная производная сегментного порядка $[\alpha, \beta]$, D_{0x}^{γ} — оператор интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля порядка γ [1, с. 9]; $\alpha, \beta = \text{const}$, $0 < \alpha < \beta < 1$, λ — спектральный параметр.

Задача Коши и задача Дирихле для уравнения (1) при $\alpha = 1$, $\beta = 2$ были решены А. М. Нахушевым [1, с. 145].

В данной работе построено решение задачи Коши для уравнения (1), найдено условие существования решения задачи Дирихле для уравнения (1) и доказано, что задача Дирихле для уравнения (1) разрешима при любом значении спектрального параметра, кроме, быть может, не более чем счетного множества значений.

Регулярным решением уравнения (1) в интервале $(0, 1)$ назовем функцию $u = u(x)$, принадлежащую классу $C^1[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $x \in (0, 1)$.

2. Задача Коши. Сформулируем задачу Коши для уравнения (1):

Найти регулярное решение $u = u(x)$ уравнения (1) в интервале $(0, 1)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = \tilde{u}_0, \quad (2)$$

где $u_0, \tilde{u}_0 = \text{const}$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-96625-р_юг_а.

Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1). К обеим частям уравнения (1) применим оператор D_{0x}^{-2} . Тогда получим

$$u(x) - \lambda D_{0x}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(x) = \int_0^x f(t)(x-t) dt + \tilde{u}_0 x + u_0,$$

или

$$u(x) - \lambda \int_0^x \nu(x-t, \alpha-2, \beta-2) u(t) dt = \int_0^x f(t)(x-t) dt + \tilde{u}_0 x + u_0, \quad (3)$$

где [2, с. 137]

$$\nu(x, \delta, \sigma) = \int_{\delta}^{\sigma} \frac{x^{-t-1}}{\Gamma(-t)} dt, \quad \delta < \sigma < 0. \quad (4)$$

Соотношение (3) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром $\nu(x-t, \alpha-2, \beta-2)$.

Далее будем обозначать

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t) dt.$$

Введем определение функции $\nu_n(x, \delta, \sigma)$:

$$\nu_n(x, \delta, \sigma) = \nu(x, \delta, \sigma) * \nu_{n-1}(x, \delta, \sigma).$$

Обозначим $\nu_0(x, \delta, \sigma) = \nu(x, \delta, \sigma)$.

Для функции $\nu_n(x, \alpha-2, \beta-2)$ справедлива оценка

$$|\nu_{n-1}(x, \alpha-2, \beta-2)| \leq \frac{\Gamma^n(2-\beta-\varepsilon)}{\Gamma[n(2-\beta-\varepsilon)]} x^{n(2-\beta-\varepsilon)-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

где ε — достаточно малая положительная константа.

Обращая интегральное уравнение (3), получим

$$\begin{aligned} u(x) = & \int_0^x f(t)(x-t) dt + \tilde{u}_0 x + u_0 + \\ & + \lambda \int_0^x R(x-t, \lambda) \int_0^t f(\xi)(t-\xi) d\xi dt + \lambda \int_0^x R(x-t, \lambda)(\tilde{u}_0 t + u_0) dt, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$R(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \nu_n(x, \alpha - 2, \beta - 2). \quad (7)$$

В силу оценки (5) функция $R(x, \lambda)$ есть целая функция λ .

Равенство (6) можно переписать в виде

$$u(x) = u_0 G_x(x, \lambda) + \tilde{u}_0 G(x, \lambda) + \lambda \int_0^x G(x-t, \lambda) f(t) dt, \quad (8)$$

где

$$G(x, \lambda) = x + \lambda \int_0^x (x-t) R(t, \lambda) dt. \quad (9)$$

Формула (8) дает решение задачи Коши для уравнения (1).

3. Граничная задача. Сформулируем задачу Дирихле для уравнения (1).

Найти регулярное решение $u = u(x)$ уравнения (1) в интервале $(0, 1)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1, \quad (10)$$

где $u_0, u_1 = \text{const}$.

Выпишем решение задачи Дирихле, используя решение задачи Коши. Из равенства (8) при $x = 1$, учитывая второе условие задачи Дирихле (10), имеем

$$u_1 = u_0 G_x(1, \lambda) + u'(0) G(1, \lambda) + \lambda \int_0^1 G(1-t, \lambda) f(t) dt. \quad (11)$$

В точках λ , в которых $G(1, \lambda) \neq 0$, найдем неизвестное $u'(0)$ из соотношения (11)

$$u'(0) = \frac{1}{G(1, \lambda)} \left[u_1 - u_0 G_x(1, \lambda) - \lambda \int_0^1 G(1-t, \lambda) f(t) dt \right]. \quad (12)$$

Подставляя найденное значение $u'(0)$ в формулу (8), получим решение задачи Дирихле для уравнения (1)

$$u(x) = u_0 G_x(x, \lambda) + \lambda \int_0^x G(x-t, \lambda) f(t) dt + \\ + \frac{G(x, \lambda)}{G(1, \lambda)} \left[u_1 - u_0 G_x(1, \lambda) - \lambda \int_0^1 G(1-t, \lambda) f(t) dt \right]. \quad (13)$$

Таким образом доказана

Теорема. *Граничная задача для уравнения (1) разрешима тогда и только тогда, когда $G(1, \lambda) \neq 0$.*

Известно, что [3, с. 74] целая функция может иметь лишь счетное множество нулей, причем предельной точкой этого множества является бесконечно удаленная точка комплексной плоскости. В силу равенств (5), (7) и (9) функция $G(1, \lambda)$ является целой по переменной λ . Следовательно, функция $G(1, \lambda)$ может иметь счетное множество нулей, а, значит, задача Дирихле для уравнения (1) разрешима при любом значении спектрального параметра, кроме быть может, не более чем счетного множества его значений.

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка.—М.: Наука, 2000.—199 с.
3. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной.—М.: Наука, 1967.—304 с.

Эфендиев Беслан Игорьевич
Научно-исследовательский институт прикладной
математики и автоматизации КБНЦ РАН
Россия, КБР, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89а
E-mail: beslan_efendiev@mail.ru

Научное издание

**ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
И МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ**

под редакцией
А. О. Ватульяна,
Е. С. Каменецкого,
Ш. С. Хубежты

*Утверждено к печати
Ученым советом Института
прикладной математики и информатики
Владикавказского научного центра
Российской академии наук*

Компьютерная верстка
М. Д. Бичкаева
Е. Р. Кайтмазова

Подписано в печать 17.11.2008. Формат бумаги $60 \times 84^{1/16}$.

Печать офсетная. Усл. п. л. 21,86.

Тираж 200 экз. Заказ № 1149.

Владикавказский научный центр,
362008, г. Владикавказ, пр. Коста, 93.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое
предприятие им. В. А. Гассиева»,
362021, г. Владикавказ, ул. Тельмана, 16

