

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И
НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЮЖНО-РОССИЙСКИЙ ГОСУНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИКИ И СЕРВИСА
ВОЛГОДОНСКИЙ ИНСТИТУТ СЕРВИСА

Исследования по
дифференциальным
уравнениям
и математическому
моделированию

Владикавказ
2009

ББК 22.161.6+
УДК 517 + 519
И 88

Ответственные редакторы:
кандидат технических наук Е. С. Каменецкий,
доктор физико-математических наук С. Б. Климентов

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-06818.

Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию / отв. ред. С. Б. Климентов, Е. С. Каменецкий.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2009.—156 с.

Настоящий сборник представляет собой доклады VII Международной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (Волгодонск, 24–29 августа 2009 года), посвященные дифференциальным уравнениям, численным методам их решения и математическому моделированию.

ISBN 978-5-93000-063-4

© Южный математический институт
ВНЦ РАН и РСО-А, 2009
© Южный Федеральный университет, 2009
© Южно-Российский государственный
университет экономики и сервиса, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х. Краткосрочный прогноз социодинамики общества	5
Бахвалов Ю. А., Грекова А. Н. Математическое моделирование магнитного поля электрической машины с применением векторного магнитного потенциала	12
Бахвалов Ю. А., Гречихин В. В., Князев С. Ю., Щербаков А. А. Математическое моделирование магнитных полей электрических машин с постоянными магнитами методами фундаментальных решений и конечных элементов	19
Богачев В. А., Богачев Т. В. Классические алгебраические кривые четвертого порядка, возникающие в маркетинговых исследованиях	26
Гриценко С. А. О задаче нелинейной диффузии в слабосжимаемой вязкой жидкости	31
Задорожный А. И., Гуров М. Н. Магнитогидродинамическая задача Ламба с учетом молекулярной вязкости и конечной электропроводимости	43
Задорожный А. И., Лагунова Е. О. Магнитогидродинамическое обобщение модельной задачи Н. П. Петрова для подшипника со смазкой конечной электрической проводимости	52
Климентов С. Б. Представления второго рода для классов <i>LMO</i> обобщенных аналитических функций	61
Князев С. Ю., Лозовский В. С., Цапколенко А. В. Исследование эволюции межфазных границ при термомиграции плоских зон с помощью численной модели на основе метода интегрированных источников поля	69
Михайлов А. Б., Михайлова И. Д. Построение математической модели нестационарного процесса теплообмена в системе «стопа-обувь-окружающая среда»	77

Михайлова Н. А. Алгоритм распределения часов самостоятельной работы в учебных планах	83
Пинчук Н. А., Столяр А. М. Решение некоторых начально-краевых задач с подвижными границами	89
Родин В. А., Ясиненко Е. А. Проверка гипотезы о возможных нарушениях в налоговой отчетности предприятия с помощью статистического анализа временного ряда	95
Седов А. В., Тришечкин Е. В. Особенности использования вейвлет-анализа при моделировании временных рядов электропотребления	99
Семенов В. В., Постоловский Н. Н. Совершенствование систем цифровой обработки изображения промышленных аэрозолей	113
Семенов В. П., Попов В. А. Уточнение метода расчета инфляционного роста цен на уровне потребительской корзины	131
Фетисов В. Г., Алехин С. Н., Фетисов И. В. Модельная задача о поведении подвешенного блока стиральной машины, подверженного случайным воздействиям	137
Чочиев Т. З. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка	144

КРАТКОСРОЧНЫЙ ПРОГНОЗ СОЦИОДИНАМИКИ ОБЩЕСТВА

**Е. К. Басаева, Е. С. Каменецкий,
З. Х. Хосаева**

Предложена модель краткосрочного прогнозирования изменения состояния общества, характеризующегося двумя параметрами: напряженностью и социетальностью. Учитывались различные сценарии экономических и политических процессов, а культура общества предполагалась неизменной.

1. Введение

В настоящее время существует ряд попыток моделирования социодинамики общества [1–7].

Как правило, в этих работах, рассматриваются отдельные фрагменты социологических процессов, происходящих в обществе, либо делается попытка долгосрочного прогноза.

А. А. Лаптевым [4] рассмотрена математическая модель эволюции общества за промежуток времени порядка 100 лет, основанная на теории американского социолога Т. Парсонса [8] и теории циклического развития экономической и политической систем общества, предложенной Н. Кондратьевым и Ю. Яковцом.

Нами сделана попытка применения аналогичного подхода для краткосрочного (до 5 лет) прогноза изменения состояния общества.

Состояние общества в работе [4] характеризуется пятью переменными: пассионарностью, социетальностью, уровнем экономики, политики и культуры. При краткосрочном прогнозировании можно считать уровень культуры постоянным и задавать изменение экономической и политической ситуаций с использованием статистических методов прогноза. Вместо пассионарности, которая определяется числом активных (пассионарных) членов общества [9], представляется целесообразным рассматривать напряженность общества, которая характеризуется установкой его членов на активную созидательную либо деструктивную деятельность.

2. Описание модели

Динамика напряженности в обществе описывается по аналогии с работой [2], в которой рассматривалась модель формирования общественного мнения. Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{dP}{dt} = \left[\alpha K(P_D - P) + \mu(I_B + \mu_1 \dot{E} - P) \right] (1 - P^2),$$

где напряженность P меняется в диапазоне от -1 до 1 , причем положительные значения P означают «конструктивное напряжение» (т. е. общество сплачивается в стремлении к преодолению возникающих трудностей), а отрицательные значения P — «деструктивное напряжение», т. е. тенденцию к разрушению существующей системы; t — время (за единицу времени принимается один месяц).

Так как рассматриваемое нами общество не является закрытым, то на него существенное влияние оказывают информационные потоки, поступающие извне. Внешняя информация характеризуется постоянной I_B , которая согласно данным опроса, полученным Вологодским научно-координационным центром, определяется, в основном влиянием СМИ [2]; $\dot{E}$ — скорость изменения среднечеловеческого потребления; K — социетальность, характеризующая уровень интегрированности общества, т. е. контроль общества за соблюдением его членами общепринятых норм; P_D — установка, которая вырабатывается в обществе в соответствии с его культурными нормами; $(1 - P^2)$ — множитель, обеспечивающий изменение напряженности в пределах ± 1 .

Таким образом, мы предполагаем, что на напряженность в обществе влияют отклонение от культурной нормы, воздействие информации получаемой извне и экономическая ситуация, которые в совокупности также создают нормативный уровень напряженности.

Влияние отклонения от культурной нормы общества предполагается пропорциональным социетальности.

Изменение социетальности общества описывается уравнением [4]:

$$\frac{dK}{dt} = \left[K_S(S^2 + E^2) - K_K e^{-\gamma K + \gamma_1} K P^2 - D^2 K_D \right] K^2 (1 - K^2),$$

где S — уровень политического единства общества; D — величина, описывающая влияние культуры общества на социетальность, в дан-

ном случае принимаемая постоянной; K_S , K_K , γ , γ_1 , K_D — константы.

Поскольку напряженность может принимать как положительные так и отрицательные значения, а пассионарность может быть только положительной во втором слагаемом использован множитель P^2 вместо P , что предполагает уменьшение социальности при высоком уровне напряженности независимо от того является она конструктивной или деструктивной.

Для того чтобы социальность изменялась в пределах $[0; 1]$ в уравнение введен множитель $K^2(1 - K^2)$.

В рассматриваемом уравнении первое слагаемое описывает влияние политической дифференциации и уровня благосостояния граждан на социальность. Второе слагаемое описывает постепенное снижение социальности с течением времени. Третье слагаемое характеризует уменьшение социальности под влиянием культуры.

Мы предполагаем, что влияние экономики E на социальные процессы наилучшим образом характеризуется уровнем среднедушевого потребления. Прогнозировать изменения этого уровня целесообразно с использованием статистических методов прогноза [10], с введением некоторых априорных предположений. В работе использованы данные о среднедушевом доходе в Республике Северная Осетия-Алания с 2000 по 2007 гг. [11], которые аппроксимированы линейной функцией с коэффициентами, найденными по методу наименьших квадратов:

$$E = 0,03t + 1,95.$$

Для уменьшения влияния инфляции использованные значения среднедушевого дохода были отнесены к прожиточному минимуму за соответствующий год.

Предполагалось, что в течение прогнозируемого периода (5 лет) либо сохранялся линейный рост экономики, либо среднедушевой доход достигал максимума через два года после начала прогнозируемого периода и затем начинался его спад. В последнем случае изменение среднедушевого дохода аппроксимировалось параболой:

$$E = -0,0006t^2 + 0,03t + 3,75.$$

В начале прогнозируемого периода принималось, что значения среднедушевого дохода и производные от него по времени непрерывны.

Политическое состояние общества S будем характеризовать процентом электората, поддерживающим правящую партию. Так же как и изменения в экономике, изменение политической ситуации будем прогнозировать с помощью линейной функции:

$$S = 0,31t + 31,1.$$

Для определения коэффициентов использовались данные Левада центра [12] по уровню поддержки партии «Единая Россия» на территории Российской Федерации за январь 1997–ноябрь 2007 гг., предполагая, что аналогичная динамика сохраняется и для республики Северная Осетия-Алания.

Кроме того, рассматривался вариант, когда поддержка правящей партии за прогнозируемый период достигает насыщения. В этом случае используемое выражение имеет вид:

$$S = 40 - \frac{255}{t + 29}.$$

Для уточнения коэффициентов модели было сделано предположение о том, что уровень напряженности общества пропорционален количеству самоубийств. При использовании данных о количестве самоубийств на территории Республики Северная Осетия-Алания за 2001–2006 гг. подобраны следующие значения коэффициентов: $\mu = 0,003125$; $I_B = -0,1$; $\mu_1 = 0,1$; $\alpha = 0,4$; $P_D = -0,03$; $K_S = 0,0174$; $K_K = 7,5$; $\gamma = 1$; $\gamma_1 = 0,1$; $D = 0,088$; $K_D = 75$.

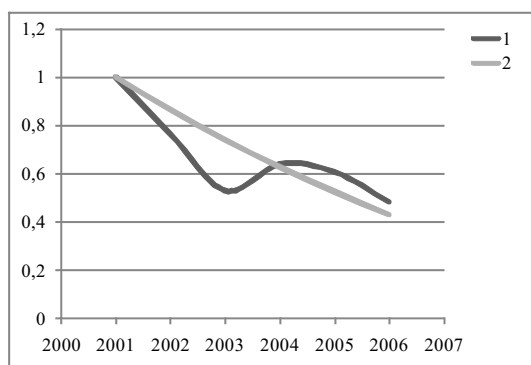


Рис. 1. Изменение количества самоубийств в РСО-А (кривая 1) и расчетная напряженность (кривая 2).

На рис. 1 представлены изменение количества самоубийств с 2001 г. по 2006 г., отнесенное к количеству самоубийств за 2001 г. и расчетная напряженность, отнесенная к ее значению в 2001 г. Видно, что кривая изменения напряженности при введенной нормировке удовлетворительно описывает изменение количества самоубийств за рассматриваемый период.

Разработанная модель описывает изменение состояния общества при отсутствии заметных катаклизмов. При стремлении модуля напряженности к единице общество становится нестабильным и модель нуждается в корректировке.

3. Результаты расчетов

С помощью разработанной модели была сделана попытка прогноза состояния общества на период с августа 2006 по август 2011 гг. Были выполнены четыре варианта расчетов. В первом варианте предполагалось, что экономика и поддержка правящей партии растут линейно; во втором варианте — линейный рост экономики и выход поддержки правящей партии на насыщение; в третьем варианте переход экономики к спаду и линейный рост поддержки правящей партии; в четвертом варианте переход экономики к спаду и выход поддержки правящей партии на насыщение. Результаты расчетов показали, что качественная картина прогнозируемого изменения напряженности и социетальности одинакова.

Типичное изменение напряженности и социетальности приведено на рис 2.

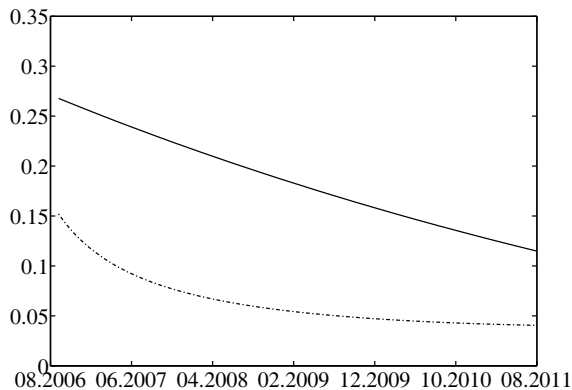


Рис. 2. Прогноз изменения напряженности, P (сплошная кривая), и социетальности, K (пунктирная кривая), за период 2006–2011 гг.

Конечные значения напряженности и социетальности по истечении пяти лет (август 2011 г.) приведены в таблице 1. Из таблицы видно, что зависимость напряженности от времени заметно отличается только для первого варианта расчетов, т. е. для линейного роста экономики и поддержки правящей партии. По-видимому, при заданных значениях констант изменение напряженности, в основном определяется влиянием внешней информации. Социетальность оказывается несколько более чувствительной к сценариям экономических и политических изменений.

Таблица 1

**Расчетные значения напряженности
и социетальности в августе 2011 г.**

	Напряженность	Социетальность
Вариант 1	0,2678	0,1521
Вариант 2	0,1132	0,0344
Вариант 3	0,1131	0,0399
Вариант 4	0,1146	0,0484

Литература

1. Колесин И. Д. Математические модели субкультур.—СПб: Изд-во СПбГУ, 2007.—134 с.
2. Гаврилец Ю. Н. Стохастическое моделирование межгрупповых информационных взаимодействий // Экономика и математические методы.—2003.—Т. 39, № 2.—С. 106–116.
3. Михайлов А. П. Моделирование системы «власть — общество».—М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.—144 с.
4. Лаптев А. А. Математические структуры и моделирование.—Омск: ОмГУ, 1999.—№ 3.—С. 109–124.
5. Гуц А. К. Глобальная этносоциология.—URL: [http:// www.univer.omsk.su/MER/mesp.win.htm](http://www.univer.omsk.su/MER/mesp.win.htm).
6. Малков С. Ю. Моделирование социальной самоорганизации — ключ к пониманию логики исторического развития.—URL: <http://www.nonlin.ru/node/82>.
7. Пугачева Е. Г., Соловьев К. Н. Самоорганизация социально-экономических систем: Учеб. пособие.—Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2003.—172 с.
8. Парсонс Т. Понятие общества: компоненты и их взаимодействия // Американская социологическая мысль.— М.: Изд-во МГУ, 1999.—С. 494–520.
9. Гумилев Л. Н. Этногенез и биосфера земли.—М.: Изд-во ТОО «МИШЕЛЬ и К⁰», 1993.—503 с.
10. Льюис К. Д. Методы прогнозирования экономических показателей.—М.: Финансы и статистика, 1986.—133 с.

11. Северная Осетия-Алания в цифрах. Краткий статистический справочник.— Владикавказ, 1980–2007.
12. Вестник общественного мнения.—URL: <http://www.levada.ru>

БАСАЕВА ЕЛЕНА КАЗБЕКОВНА
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: helen@smath.ru

КАМЕНЕЦКИЙ ЕВГЕНИЙ САМОЙЛОВИЧ
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: esk@smath.ru

ХОСАЕВА ЗАРИНА ХЕТАГОВНА
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: hzaia83@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ ВЕКТОРНОГО МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Ю. А. Бахвалов, А. Н. Грекова

Предлагается методика расчета магнитного поля электрической машины с возбуждением от постоянных магнитов, основанная на использовании метода граничных элементов.

В связи с созданием новых материалов на основе редкоземельных металлов и их сплавов существенно возрос интерес к разработке электрических машин с постоянными магнитами (ЭМПМ). Применение в электрических машинах постоянных магнитов имеет ряд неоспоримых преимуществ по сравнению с электромагнитным возбуждением. Наибольший интерес представляет использование в системах возбуждения магнитов на основе редкоземельных металлов и их сплавов. Такие ЭМПМ имеют более простую конструкцию, отличаются высокой надежностью, имеют более высокий КПД, так как в случае их применения нет затрат энергии на создание магнитного поля.

В связи с этим актуальной является задача разработки методик расчета и анализа магнитного поля ЭМПМ.

В литературе не уделено достаточного внимания расчету магнитных полей в ЭМПМ с использованием современных методов расчета вычислительной математики, поэтому авторами была разработана методика расчета магнитного поля ЭМПМ, основанная на применении метода граничных элементов для ненасыщенных или слабонасыщенных систем.

Приняты следующие допущения:

- магнитное поле плоскопараллельное, квазистационарное;
- намагниченность в объеме постоянных магнитов постоянна и отличается от нуля только по главной оси намагничивания; магнитная проницаемость материала постоянных магнитов равна магнитной постоянной μ_0 ;

- поле вне машины отсутствует;
- вихревыми токами в шихтованных ферромагнитных сердечниках пренебрегаем.

Считая известными в любой момент времени токи обмотки статора и положение ротора относительно статора, представим напряженность магнитного поля в D_2 (рис. 1) в виде суммы $\overline{H}_{СУМ}^{(2)} = \overline{H}_\delta^{(2)} + \overline{H}_2$, где $\overline{H}_\delta^{(2)}$ напряженность поля, созданного токами обмотки статора в однородной среде с $\mu = \mu_0$ (при отсутствии ферромагнетиков и постоянных магнитов); $\overline{H}_2$ — напряженность поля, созданного намагниченностью ферромагнетиков и постоянных магнитов.

Магнитное поле намагниченности описывается системой уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \overline{H} &= 0; \quad \operatorname{div} \overline{B} = 0; \quad \overline{B} = \mu_0 \overline{H} \text{ в } D_0 \text{ и } D_2; \\ \overline{B} &= \mu_0 (\overline{H} + \overline{M}) \text{ в } D_1; \quad \overline{B} = \mu_{СТ} \overline{H} \text{ в } D_3; \quad \overline{B} = 0 \text{ в } D_4. \end{aligned} \quad (1)$$

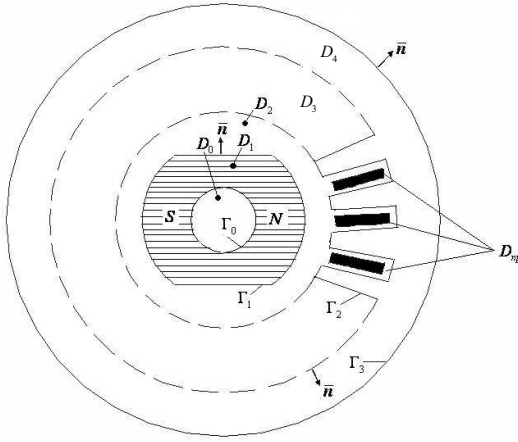


Рис. 1. Эскиз магнитной системы двухполюсной электрической машины с постоянными магнитами с полым ротором. D_0 — область с $\mu = \mu_0$; D_1 — область, занятая постоянным магнитом; D_2 — область воздушного зазора ($\mu = \mu_0$); D_3 — область, занятая сердечником ($\mu = \mu$); D_4 — внешняя область электрической машины; $D_{пр}$ — области, занятые проводниками обмотки статора с токами; $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ — границы областей; $\overline{n}$ — нормали к границам.

На границах раздела сред $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ (рис. 1) нормальные составляющие магнитной индукции и касательные составляющие напря-

женности удовлетворяют условиям:

$$B_n^+ = B_n^-, \quad H_\tau^+ = H_\tau^-. \quad \text{На границе } \Gamma_3 \text{ имеем } B_\tau^{(3)} = 0. \quad (2)$$

Учитывая, что во всех областях $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, магнитное поле удобно характеризовать векторным магнитным потенциалом с помощью соотношений $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ и $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

Тогда систему (1) для обесточенной машины ($H_{\delta\tau} = H_{\delta\tau} = 0$) можно записать в следующем виде:

$$\Delta \vec{A} = 0 \text{ в } D_i, \quad i = 0, \dots, 3. \quad (3)$$

Граничные условия (2) принимают вид на

$$\begin{aligned} \Gamma_0 : A^{(0)} &= A^{(1)}, \quad -\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A^{(0)}}{\partial n} = -\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A^{(1)}}{\partial n} - M_\tau^{(0)}, \\ \Gamma_1 : A^{(1)} &= A^{(2)}, \quad -\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A^{(1)}}{\partial n} - M_\tau^{(1)} = -\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A^{(2)}}{\partial n}, \\ \Gamma_2 : A^{(2)} &= A^{(3)}, \quad -\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A^{(2)}}{\partial n} = -\frac{1}{\mu_{СТ}} \cdot \frac{\partial A^{(3)}}{\partial n}, \\ \Gamma_3 : -\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A^{(3)}}{\partial n} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $M_\tau^{(i)}$ — проекция намагниченности $\vec{M}$ на касательную Γ_0 ($i = 0$), либо Γ_1 ($i = 1$).

Перейдем в областях D_0, D_1, D_2 , с линейной средой от дифференциальных уравнений с частными производными (3) к интегральным уравнениям с помощью основной интегральной формулы Грина.

Формула Грина для области D_0 имеет в

$$A^{(0)}(P_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \left[\frac{\partial A^{(0)}}{\partial n_Q}(Q) \ln \frac{1}{r_{P_0Q}} - A^{(0)}(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\ln \frac{1}{r_{P_0Q}} \right) \right] d\Gamma, \quad (5)$$

где P_0 — точка, принадлежащая области D_0 , Q — точка, лежащая на границе Γ_0 .

Устремив точку P_0 к точке P , лежащей на Γ_0 , получим интегральное уравнение, связывающее неизвестные значения $A^{(0)}$ и $\frac{\partial A^{(0)}}{\partial n_Q}$ на границе Γ_0

$$\pi A^{(0)}(P) - \int_{\Gamma_0} \left[\frac{\partial A^{(0)}}{\partial n_Q}(Q) \ln \frac{1}{r_{PQ}} - A^{(0)}(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\ln \frac{1}{r_{PQ}} \right) \right] d\Gamma = 0. \quad (6)$$

Аналогично получим интегральные уравнения для областей D_1 и D_2 .

Перейдем к построению дискретной математической модели задачи. Будем применять для решения интегральных уравнений МГЭ. Покроем границы областей $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ граничными элементами — отрезками прямых. Точки коллокации выберем в геометрических центрах граничных элементов. Искомые величины A и $\frac{\partial A}{\partial n}$ на $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ аппроксимируем кусочно-постоянными функциями.

В результате описанная выше процедура позволяет приближенно заменить интегральные уравнения системами алгебраических уравнений. Например, уравнение (6) заменим следующей системой

$$\pi A_m + \sum_{k=1}^{N_{\Gamma_0}} c_{mk} A_k - \sum_{k=1}^{N_{\Gamma_0}} d_{mk} q_k = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N_{\Gamma_0}, \quad (7)$$

где $c_{mk} = \int_{\Gamma^{(k)}} \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\ln \frac{1}{r_{P_m Q}} \right) d\Gamma$, $d_{mk} = \int_{\Gamma^{(k)}} \ln \frac{1}{r_{P_m Q}} d\Gamma$, N_{Γ_0} — количество граничных элементов на Γ_0 ; $q_k = \frac{\partial A^{(0)}}{\partial n_Q}$ на k -ом граничном элементе $\Gamma^{(k)}$; P_m — точка коллокации m -го граничного элемента $\Gamma^{(m)}$; A_m и A_k — значение скалярного магнитного потенциала соответственно на элементах $\Gamma^{(m)}$ и $\Gamma^{(k)}$.

Коэффициенты c_{mk} и d_{mk} вычисляются с помощью квадратурных формул Гаусса с тремя узлами.

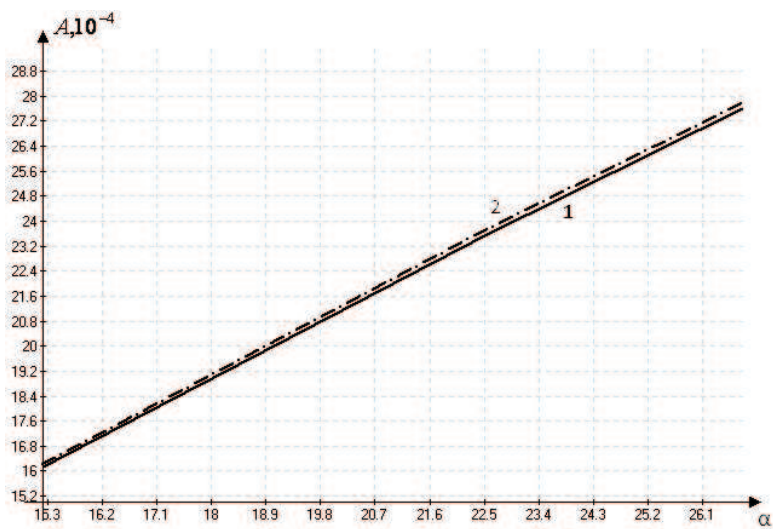
Аналогично аппроксимируются системами алгебраических уравнений и другие интегральные уравнения.

Совокупность систем уравнений, аппроксимирующих интегральные уравнения, и условий (4), является дискретной математической моделью, полученной на основе метода граничных элементов.

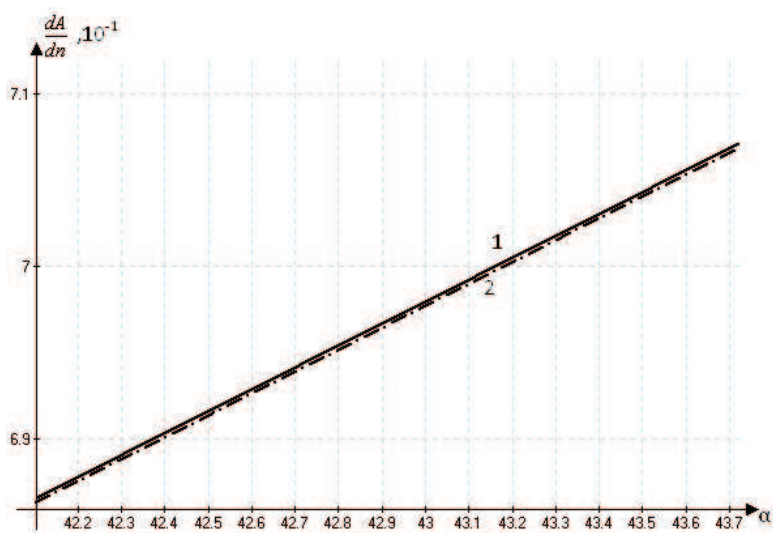
Для решения указанной совокупности уравнений составлена программа на языке Object Pascal в среде Delphi7.

С целью проверки правильности предложенной математической модели и возможности практического применения рассмотренного метода реализации было проведено сравнение полученных значений векторного магнитного потенциала и его производных с аналитическим решением (рис. 2).

Тестирование программы выполнено путем анализа задачи расчета магнитного поля магнитной системы с минимальным полем рассеяния при $\mu_{CT} = \infty$ (рис. 3).



а)



б)

Рис. 2. Сравнение аналитических (кривая 1) и полученных с помощью разработанной программы (кривая 2) значений векторного магнитного потенциала (а) и его производных (б). $r = r_1$.

Численное решение получено при следующих значениях параметров: $r_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ м, $r_1 = 7,5 \cdot 10^{-3}$ м, $r_2 = 10 \cdot 10^{-3}$ м, $M = 10^6$ А/м. На Γ_2 полагалось $A = 0$, так как принималось, что $\mu_{CT} = \infty$.

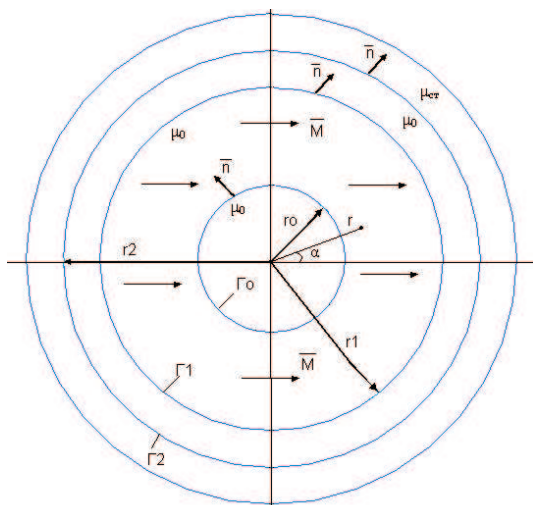


Рис. 3. Сечение магнитной системы беспазовой ЭМПМ (тестовая задача).

Полученные результаты позволяют вычислить с помощью (5) магнитный потенциал не только на границах областей, но и во внутренних точках.

Результаты расчетов, полученные с помощью предлагаемой программы, имеют хорошую сходимость с результатами решений тестовых задач, полученных аналитически.

Решение указанных выше задач с помощью пакета FEMM показало, что применение МКЭ требует построения сеток с числом узлов примерно на два порядка больше, чем при использовании МГЭ.

Предложенная программа позволяет выполнить расчет магнитных систем ЭМПМ с минимальными затратами машинного времени, получить значения их магнитных потенциалов, напряженностей и магнитных индукций, необходимых для расчета рабочих характеристик. Предложенная методика может быть использована и для оптимизации конструкции магнитной системы ЭМПМ по выбранным параметрам.

Литература

1. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр.—М.: Физматлит, 2001.—320 с.
2. Волокитина Е. В. Особенность применения постоянных магнитов в вентильных электродвигателях авиационных электроприводов // Электротехника / Под ред. Е. В. Волокитина, В. И. Свиридова, В. М. Шалягинова.—2003.—№ 7.—С. 55–59.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1972.—736 с.
4. Говорков В. А. Электрические и магнитные поля.—М.: Энергия, 1968.—488 с.

Бахвалов Юрий Алексеевич
Южно-Российский государственный технический университет
(Новочеркасский политехнический институт)
Россия, 346428, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132
E-mail: iranov64@mail.ru

Грекова Анна Николаевна
Южно-Российский государственный технический университет
(Новочеркасский политехнический институт)
Россия, 346428, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132
E-mail: anna_grekova@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН
С ПОСТОЯННЫМИ МАГНИТАМИ МЕТОДАМИ
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Ю. А. Бахвалов, В. В. Гречихин,
С. Ю. Князев, А. А. Щербаков**

Рассматривается применение методов конечных элементов и фундаментальных решений для моделирования магнитных полей электрических машин с постоянными магнитами.

Успехи в создании постоянных магнитов в последние годы и ряд существенных преимуществ электрических машин с постоянными магнитами (ЭМПМ) способствуют широкому применению последних в электроприводах малой, средней и большой мощности. Например, тяговые двигатели электроподвижного состава с постоянными магнитами имеют более высокий коэффициент полезного действия (КПД) и меньший вес, чем двигатели других типов, позволяют создавать безредукторные приводы, повышают безопасность движения, обеспечивая работу электрического тормоза при отключении тягового преобразователя. Исследования, выполненные компанией DV System показали, что при номинальной мощности 500 кВт ЭМПМ, по сравнению с асинхронным двигателем, имеет массу привода меньше на 25%, а КПД больше на 3% [1]. Известны примеры успешного использования ЭМПМ в приводах широкого применения [2].

Для создания приводов с ЭМПМ необходимо на стадии проектирования иметь методики расчета их характеристик. Однако в литературе не уделено достаточного внимания расчету магнитных полей в ЭМПМ с применением современных численных методов.

В данной работе для расчета магнитных полей в ЭМПМ применяется метод конечных элементов (МКЭ) и метод фундаментальных решений, который известен в литературе как метод точечных источников (МТИ) [3]. Название связано с тем, что МТИ получил при-

менение для расчета электростатических полей. При этом поле, создаваемое заряженными электродами, аппроксимируется полем точечных электрических зарядов. Плоскопараллельные поля аппроксимируются полями тонких бесконечно длинных заряженных линий, которые также называют точечными источниками. Магнитные поля, созданные постоянными магнитами, будем аппроксимировать полями фиктивных магнитных зарядов.

Принимаем следующие допущения:

- магнитные поля являются плоскопараллельными;
- ферромагнетики ненасыщены;
- намагниченность $\vec{M}$ в объеме постоянных магнитов постоянна;
- магнитная проницаемость материала постоянных магнитов равна магнитной постоянной μ_0 ;
- вихревыми токами в шихтованных ферромагнетиках пренебрегаем.

Представим напряженность магнитного поля в воздушном зазоре машины в виде суммы напряженностей

$$\vec{H}_\Sigma = \vec{H}_\delta + \vec{H}_M,$$

где $\vec{H}_\delta$ — напряженность поля, созданного токами обмотки статора в однородной среде с магнитной проницаемостью $\mu = \mu_0$ (при отсутствии ферромагнетиков и постоянных магнитов); $\vec{H}_M$ — напряженность поля, созданного намагниченностью ферромагнетиков и постоянных магнитов.

Значение $\vec{H}_\delta$ вычисляется как напряженность поля, созданного бесконечно длинными проводниками с током в однородной среде. Далее считаем, что токи в обмотке статора равны нулю.

Напряженность $\vec{H}_M$ определяется в результате решения краевой задачи для уравнения Лапласа

$$\operatorname{divgrad} \varphi = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями:

- на поверхности раздела сред с различными μ^+ и μ^-

$$\varphi^+ = \varphi^-, \quad \mu^+ \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} = \mu^- \frac{\partial \varphi^-}{\partial n}; \quad (2)$$

- на поверхностях постоянного магнита (pm)

$$\varphi^- = \varphi^{(\text{pm})}; \quad -\mu_0 \frac{\partial \varphi^{(\text{pm})}}{\partial n} + \mu_0 M_n = -\mu^- \frac{\partial \varphi^-}{\partial n}. \quad (3)$$

Решив (1) с условиями (2) и (3), найдем распределение магнитного потенциала $\varphi(\mathbf{r})$, следовательно, и напряженности

$$\vec{H}_M^r = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}) \quad (4)$$

в любой точке $\mathbf{r}$ сечения машины.

Рассмотрим применение МТИ.

Фундаментальное решение уравнения Лапласа в двумерном случае

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) = \ln \left(\frac{1}{\mathbf{r} - \mathbf{R}_0} \right) \quad (5)$$

можно рассматривать как потенциал поля в точке $\mathbf{r}$, созданного единичным точечным зарядом, помещенным в точку $\mathbf{R}_0$. Для полей, удовлетворяющих уравнению Лапласа, справедлив принцип суперпозиции. Поэтому любое поле $\varphi(\mathbf{r})$, созданное произвольными, в том числе непрерывно распределенными в пространстве источниками, можно приближенно представить как суперпозицию полей точечных зарядов:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_j q_j g(\mathbf{r}, \mathbf{R}_j), \quad (6)$$

где q_j — величина фиктивного магнитного заряда, помещенного в точку $\mathbf{R}_j$.

Если физические условия решаемой задачи позволяют задавать разумное расположение $\mathbf{R}_j$ зарядов, моделирующих поле, то задача сведется к нахождению их величин. Для этого величины зарядов q_j подбирают таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия.

Пусть требуется найти решение уравнения Лапласа в области S , ограниченной контуром L , на котором выполняется условие

$$\left(\alpha(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) + \beta(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \Big|_L = \gamma(\mathbf{r}) \Big|_L. \quad (7)$$

Расположим заряды поля q_j на вспомогательном контуре l вокруг границы L на некотором расстоянии от нее, вне области S . Число зарядов N должно быть согласовано с числом узловых точек на границе L , радиус-векторы которых $\mathbf{r}_i$. Число и расположение зарядов на контуре l определяет точность решения задачи. Подставим (6) в (7) и потребуем выполнения граничных условий во всех узловых

точках (точках коллокации). В результате получим систему N линейных алгебраических уравнений, решая которую находим заряды q_j , после чего с помощью (6) производим расчет поля.

Если вспомогательный контур l , на котором располагаются точечные заряды q_j , совпадает с границей L области S , то получаем метод граничных элементов [4]. Удаление зарядов, моделирующих поле на некоторое расстояние от области S , позволяет в ряде случаев значительно повысить точность получаемого решения [5]. Достоинством МТИ является также удобный метод контроля точности получаемого решения. Для этого вычисляется величина

$$\varepsilon = \alpha\varphi + \beta \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \gamma$$

в точках между узлами коллокации на границе L , определяющая невязку граничного условия в этих точках. Очевидно, что получаемые значения величины ε будут характеризовать точность решения.

Еще одно преимущество МТИ заключается в том, что производные потенциала вычисляются с высокой точностью, так как могут быть найдены путем дифференцирования потенциала (6).

В ряде случаев симметрия решаемой задачи позволяет значительно уменьшить размерность системы уравнений, к которой приводит МТИ, и тем самым уменьшить время и повысить точность вычислений.

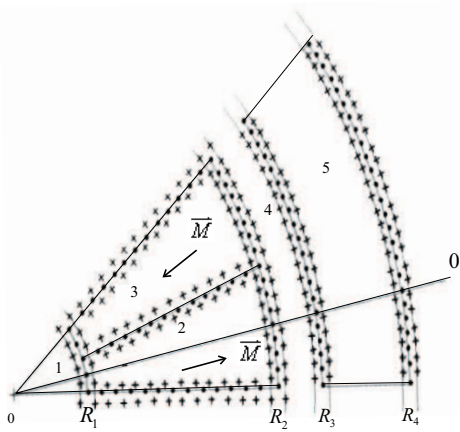


Рис. 1. Сектор, составляющий $1/9$ часть сечения ЭМПМ: $\bullet$ — узловые точки на границах раздела сред; $+$ — точки на вспомогательных контурах, в которых располагаются точечные заряды; цифрами $1 \div 5$ обозначены области сектора.

Применение МТИ для определения потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ проиллюстрируем на примере расчета магнитного поля ЭМПМ с числом пар полюсов равным девяти. Выделим в сечении электрической машины сектор, содержащий два постоянных магнита (рис. 1). Этот сектор составляет одну девятую часть от всего объема двигателя. Очевидно, что магнитное поле в каждом из девяти секторов будет таким же, как и в выделенном первом секторе. Поэтому если, например, заряды, моделирующие поле в некоторой области сектора электродвигателя располагаются вдоль некоторой окружности, то в точках с полярными координатами $\alpha_{i,j} = \alpha_i + (j-1)2\pi/9$ будут располагаться одинаковые по величине заряды q_i (здесь α_i — полярная координата заряда в выделенном первом секторе электродвигателя, j — номер сектора). В этом случае, например, потенциал поля в первом секторе в областях 1, 4, 5 будет вычисляться с помощью ряда

$$\varphi_k(\mathbf{r}) = \sum_i q_i^k \sum_j g(\mathbf{r}, \mathbf{R}_{ij}),$$

$$i = 1, 2, \dots, N_k, \quad j = 1, 2, \dots, 9, \quad k = 1 \div 5,$$

где N_k — число зарядов в k -ой области; q_i^k — заряд с номером i , моделирующий поле в области k .

В результате число зарядов, подлежащих определению, уменьшается почти в девять раз, а объем вычислений (при решении системы линейных уравнений методом Гаусса) уменьшается приблизительно в 700 раз. Сравнение с результатами численных экспериментов показывает, что уже при числе зарядов, равном 100 максимальная погрешность МТИ для потенциала магнитного поля, оцененная по описанной выше методике, составляет $2 \cdot 10^{-4}$. Можно предполагать, что погрешность для рассчитанной индукции магнитного поля также имеет порядок $2 \cdot 10^{-4}$. На рис. 2 приведен график зависимости индукции магнитного поля $B(r) = B(r, \alpha_0)$ при $\alpha_0 = 10^\circ$ вдоль радиуса 00' ЭМПМ со следующими данными: $R_1 = 5$ мм; $R_2 = 14$ мм; $R_3 = 18$ мм; $R_4 = 25$ мм; намагниченность постоянных магнитов $M = 1 \cdot 10^6$ А/м; магнитная проницаемость статора $\mu_{st} = 4 \cdot 10^3 \mu_0$. На этом же графике приведена аналогичная зависимость, полученная методом конечных элементов. Видно хорошее качественное и количественное совпадение результатов полученных методами точечных источников и конечных элементов. При этом время вычисления результата с помощью МТИ оказывается значительно меньшим, чем

с помощью МКЭ. Поэтому при решении поставленной задачи МТИ оказывается более эффективным.

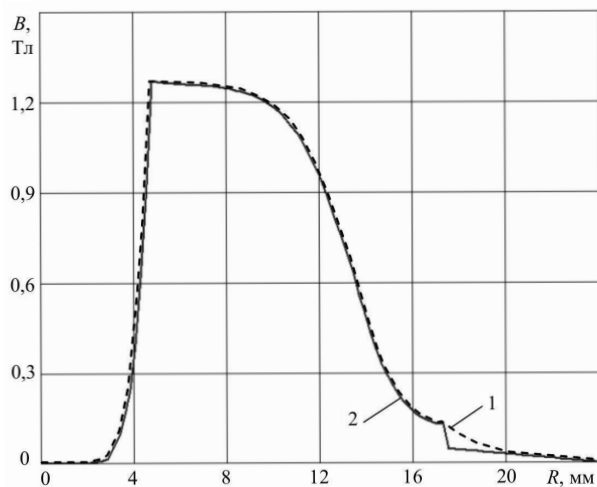


Рис. 2. Распределение магнитной индукции вдоль линии 00' (рис. 1):
1 — рассчитано с помощью МТИ; 2 — рассчитано с помощью МКЭ.

Для расчета полей в системах с нелинейными средами можно применять комбинированный метод: в областях, заполненных линейными средами — МТИ, в областях с нелинейной средой — МКЭ.

Литература

1. Клоков Т. Тяговый двигатель с возбуждением от постоянных магнитов // Железные дороги мира.—2004.—№ 9.—С. 46–50.
2. Понкратов В. В. Вентильный электропривод: от стиральных машин до металлорежущего станка и электровоза // Электронные компоненты.—2007.—№ 2.—С. 69–77.
3. Алексидзе М. А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач.—М.: Наука, 1991.—352 с.
4. Баттерфильд Р., Бенерджи П. Методы граничных элементов в прикладных науках.—М.: Мир, 1984.—494 с.
5. Князев С. Ю., Щербаков А. А. Решение граничных задач математической физики методом точечных источников поля // Изв. Вузов. Электромеханика.—2007.—№ 3.—С. 11–15.

Бахвалов Юрий Алексеевич
Южно-Российский государственный технический университет
Россия, 346428, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132
E-mail: vgrech@mail.ru

Гречихин Валерий Викторович
Южно-Российский государственный технический университет
Россия, 346428, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132
E-mail: vgrech@mail.ru

Князев Сергей Юрьевич
Южно-Российский государственный технический университет
Россия, 346428, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132
E-mail: ksy@donpac.ru

Щербаков Антон Андреевич
Южно-Российский государственный технический университет
Россия, 346428, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132
E-mail: ksy@donpac.ru

КЛАССИЧЕСКИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, ВОЗНИКАЮЩИЕ В МАРКЕТИНГОВЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

В. А. Богачев, Т. В. Богачев

С использованием системы аналитических вычислений Maple изучается вопрос о разделении рынка сбыта двух конкурирующих предприятий. Выясняется конкретный вид возникающих при этом алгебраических кривых четвертого порядка и даются соответствующие графические и анимационные иллюстрации.

В работах [1–4] рассматривалась задача о разделении рынка сбыта двух конкурирующих предприятий, выпускающих одну и ту же продукцию, при различных предположениях относительно отпускных цен продукции и транспортных расходов на ее перевозку. В работе [4] указано необходимое и достаточное условие того, чтобы рынок сбыта продукции каждого из предприятий был географически неограниченным. Приведем соответствующий результат.

Пусть расстояние между предприятиями A и B равно L (км), отпускные цены продукции на этих предприятиях равны p_1 (у. е.) и p_2 (у. е.), транспортные расходы на перевозку единицы продукции — q_1 (у. е./км) и q_2 (у. е./км) соответственно. Рынок сбыта каждого из предприятий $A(-\frac{L}{2}, 0)$ и $B(\frac{L}{2}, 0)$ является неограниченным множеством на плоскости тогда и только тогда, когда выполняются условия $q_1 = q_2$ и $|p_2 - p_1| < Lq_1$. Если при этом $p_2 > p_1$, то рынки разделены правой ветвью гиперболы

$$\frac{4q_1^2x^2}{(p_2 - p_1)^2} - \frac{4q_1^2y^2}{q_1^2L^2 - (p_2 - p_1)^2} = 1,$$

если же $p_1 > p_2$ — левой ветвью этой гиперболы.

Дополнительную наглядность этому результату можно придать, используя анимационные возможности системы аналитических вычислений Maple. На рис. 1–6 приведено несколько кадров анимации, иллюстрирующей метаморфозы разделения рынков для случая, когда, например, $L = 2$, $p_2 - p_1 = 1$, $q_1 = 1$, а q_2 увеличивается от 0 до 3, и реализуемой выполнением следующей программы.

```
> with(plots):
> R:=n->sqrt((x+1)^2+y^2)=1+n/100*sqrt((x-1)^2+y^2):
gr2:=seq(implicitplot(R(n), x=-5..5, y=-5..5,
numpoints=10000), n=0..300):
display(gr2, insequence=true);
```

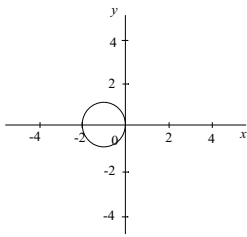


Рис. 1.

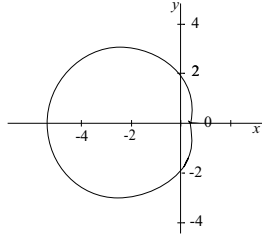


Рис. 2.

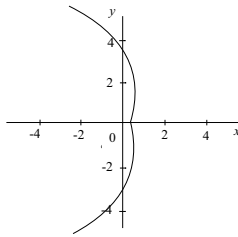


Рис. 3.

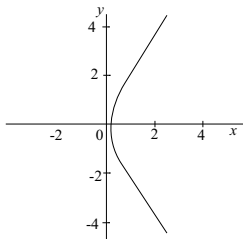


Рис. 4.

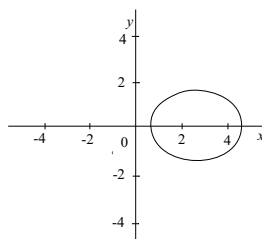


Рис. 5.

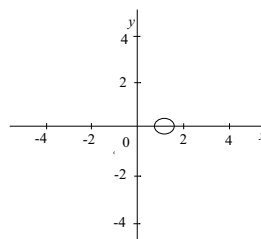


Рис. 6.

Возвратимся к анализу рассматриваемой ситуации. Случай, когда $p_1 = p_2$, тривиален [1]. Если же $p_1 \neq p_2$ и $q_1 \neq q_2$, то [3, 4] либо рынки сбыта предприятий A и B разделены алгебраической кривой 4-го порядка, либо вся плоскость является рынком сбыта только одного из предприятий.

Далее займемся выяснением конкретного вида указанной выше алгебраической кривой.

Рассмотрим, например, случай, когда $L = 2$, $p_2 - p_1 = 1$, $q_1 = 1$ и $q_2 = 0,5$. Подставляя эти значения в уравнение (4) и неравенство (3) работы [4], получим соответственно

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{4}y^2 - \frac{1}{4} \right)^2, \quad (1)$$

$$\left(x + \frac{5}{3} \right)^2 + y^2 - \frac{28}{9} \geq 0. \quad (2)$$

Используя Maple, изобразим на плоскости множества, задаваемые уравнением (1) и неравенством (2).

```
> implicitplot([(x+5/3)^2+y^2-28/9=0, x^2-2*x+1+y^2-
(3/4*x^2+5/2*x+3/4*y^2-1/4)^2=0], x=-9..1, y=-6..6,
gridrefine=3, filledregions, coloring=[white, grey]);
```

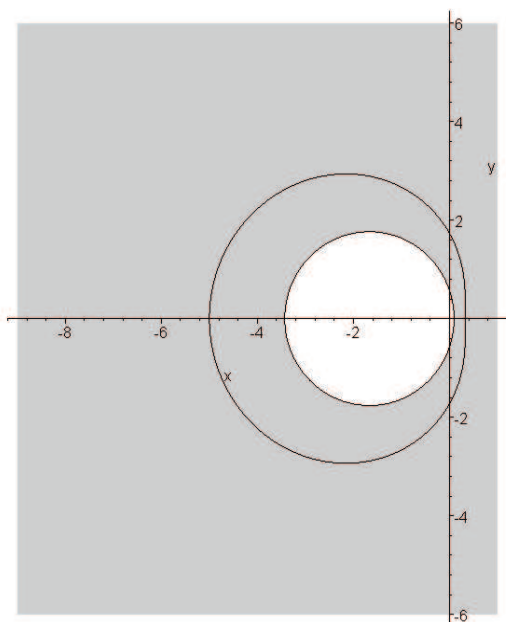


Рис. 7.

Из рис. 7 можно сделать предположение, что в данном случае интересующей нас кривой является перевернутая и сдвинутая вдоль оси абсцисс улитка Паскаля.

Исходя из уравнения улитки Паскаля (см., например, [5])

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0,$$

где a и l — отличные от нуля числа, покажем, что уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$((x - c)^2 + y^2 - a(x - c))^2 - l^2((x - c)^2 + y^2) = 0. \quad (3)$$

Здесь c — число, реализующее сдвиг кривой вдоль оси абсцисс.

Числа a , l и c найдем с помощью Maple, проведя соответствующие преобразования уравнений (1) и (3).

```
> eq1:=expand(x^2-2*x+1+y^2-(3/4*x^2+5/2*x+3/4*y^2-
1/4)^2)=0;
```

$$\text{eq1} := \frac{39}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{15}{16} + \frac{11}{8}y^2 - \frac{9}{16}x^4 - \frac{15}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2y^2 - \frac{15}{4}xy^2 - \frac{9}{16}y^4 = 0$$

```
> eq2:=eq1/coefficient(lhs(eq1),x^4);
```

$$\text{eq2} := \frac{26}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} - \frac{22}{9}y^2 + x^4 + \frac{20}{3}x^2 + 2x^2y^2 + \frac{20}{3}xy^2 + y^4 = 0$$

```
> eq3:=expand(((x-c)^2+y^2-a*(x-c))^2-l^2*((x-c)^2+y^2))=0;
```

$$\begin{aligned} \text{eq3} := & x^4 - 4xcy^4 + y^4 - 2a^2xc + 2y^2ac + 2x^2y^2 - 2y^2ax - 6xc^2a + \\ & + 6x^2ac - 4x^3c + 6x^2c^2 - 2x^3a - 4xc^3 + 2c^2y^2 + 2c^3a + a^2x^2 + \\ & + a^2c^2 + c^4 - l^2x^2 + 2l^2xc - l^2c^2 - l^2y^2 = 0 \end{aligned}$$

```
> eq4:=collect(eq3,[x,y], 'distributed');
```

$$\begin{aligned} \text{eq4} := & c^4 + 2c^3a + a^2c^2 - l^2c^2 + x^4 + (-4c - 2a)x^3 + (-4c - 2a)xy^2 + \\ & + (-l^2 + 2c^2 + 2ac)y^2 + (-4c^3 + 2l^2c - 2a^2c - 6c^2a)x + y^4 + \\ & + (6c^2 - l^2 + a^2 + 6ac)x^2 + 2x^2y^2 = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая соответствующие коэффициенты в преобразованных уравнениях (1) и (3), получаем следующий результат.

```
> solve({-4*c-2*a=20/3, 6*c^2-l^2+a^2+6*a*c=26/3,
-4*c^3+2*l^2*c-2*a^2*c-6*c^2*a=4/3, -l^2+2*c^2+2*a*c=
-22/9, c^4+2*c^3*a+a^2*c^2-l^2*c^2=-5/3}, [a, l^2, c]);
```

$$\left[\left[a = -\frac{4}{3}, l^2 = \frac{64}{9}, c = -1. \right] \right]$$

Таким образом, кривая (1) действительно является улиткой Паскаля, имеющей уравнение вида (3) когда $a = -\frac{4}{3}$, $l^2 = \frac{64}{9}$ и $c = -1$.

В заключение отметим, что в общем случае рассматриваемая алгебраическая кривая является овалом Декарта.

Литература

1. Крынский Х. Э. Математика для экономистов.—М.: «Статистика», 1970.—581 с.
2. Богачев В. А., Богачев Т. В. Маркетинговые исследования методом аналитической геометрии в среде Maple // Тр. научно-практической конференции «Актуальные проблемы развития транспорта Черноморского побережья России».—Туапсе, 2004.—С. 188.
3. Богачев В. А., Богачев Т. В. Использование информационных технологий при изучении математических дисциплин // Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2006.—С. 256–262.
4. Богачев В. А., Богачев Т. В. Маркетинговые исследования с использованием систем аналитических вычислений // Современная математика и проблемы математического образования. Тр. Всероссийской научно-практической конференции.—Орел: ОГУ, 2009.—С. 310.
5. Математическая энциклопедия. Том 4 / Под ред. И. М. Виноградова.—М.: Советская Энциклопедия, 1984.—С. 1216.

Богачев Виктор Алексеевич
Южный федеральный университет
Россия, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105
E-mail: bogachev89@yandex.ru

Богачев Тарас Викторович
РГЭУ «РИНХ»
Россия, 344002, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 69
E-mail: bogachev73@yandex.ru

О ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ В СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

С. А. Гриценко

В работе рассматривается движение слабосжимаемой вязкой жидкости, в которой кинематическая вязкость жидкости зависит от концентрации примеси. Движение жидкости описывается системой уравнений Стокса. Система дополняется уравнением диффузии с конвективным слагаемым, зависящим от скорости жидкости. Доказывается разрешимость в целом начально-краевой задачи в ограниченной области с липшицевой границей.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с липшицевой границей Γ , $\mathbf{v}(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t))$ — скорость жидкости, $p(x, t)$ — давление, $c(x, t)$ — концентрация примеси.

Рассматривается следующая система уравнений:

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div} (\alpha_\mu \mu(c) \nabla \mathbf{v} + (\alpha_\nu \operatorname{div} \mathbf{v} - p) I) + \mathbf{F}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{v}(x, t) = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad \mathbf{v}(x, 0) = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla c = D \Delta c, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad c(x, 0) = c_0(x), \quad (1.5)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ , D — коэффициент диффузии, $\mu(c)$ — безразмерная вязкость, I — единичная матрица.

2. Основной результат

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функции $\mathbf{v}(x, t)$, $p(x, t)$ и $c(x, t)$ называются обобщенным решением задачи (1.1)–(1.5) в области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, если

- 1) $\frac{\partial p}{\partial t} \in \mathbb{L}_2(\Omega_T)$, $\mathbf{v} \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$, $c \in \mathbb{L}_\infty(\Omega_T) \cap \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$;

2) почти всюду в области Ω_T выполнено уравнение неразрывности (1.2);

3) функции $\mathbf{v}$, p и c удовлетворяют интегральным тождествам

$$\int_{\Omega_T} \left(\alpha_\tau \mathbf{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha_\mu \mu(c) \nabla \mathbf{v} : \nabla \varphi - \alpha_\nu \operatorname{div} \mathbf{v} \operatorname{div} \varphi + \right. \\ \left. + p \operatorname{div} \varphi + \mathbf{F} \cdot \varphi \right) dx dt = 0 \quad (2.1)$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$, равной нулю на границе Γ и при $t = T$,

$$\int_{\Omega_T} \left(-c \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla c \xi + D \nabla c \cdot \nabla \xi \right) dx dt = \int_{\Omega} c_0(x) \xi(x, 0) dx \quad (2.2)$$

$$\forall \xi \in \dot{\mathbb{C}}^\infty(\Omega_T) : \xi(x, T) = 0.$$

Здесь используется обозначение: $A : B \equiv \operatorname{tr}(AB^T)$, A и B — квадратные матрицы. Функциональные пространства обозначаются так, как это принято в [1].

Теорема 1. Пусть граница Γ ограниченной связной области $\Omega \in \mathbb{R}^3$ является липшицевой поверхностью, $\mu(c) \in \mathbb{C}^2(0, +\infty)$, $|\mu|_{\Omega_T}^{(1)} < \nu_0^{-1}$, $0 < \nu_0 \leq \mu(c) \leq \frac{1}{\nu_0}$, $0 \leq c_0(x) \leq 1$, $c_0(x) \in \dot{\mathbb{C}}^\infty(\Omega)$, $\int_{\Omega_T} |\mathbf{F}|^2 dx dt = F^2 < \infty$; α_p , α_τ , α_μ , α_ν — положительные и ограниченные постоянные:

$$0 < \alpha_\nu < \frac{1}{\nu_0}, \quad 0 < \alpha_p < \frac{1}{\nu_0}, \quad 0 < \alpha_\mu < \frac{1}{\nu_0}, \quad 0 < \alpha_\tau < \frac{1}{\nu_0}.$$

Тогда задача (1.1)–(1.5) имеет обобщенное решение и для него справедливы оценки:

$$\max_{0 < t < T} \int_{\Omega} \left(\alpha_\tau |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p} p^2 \right) dx + \alpha_\nu \int_{\Omega_T} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 dx dt + \\ + \alpha_\mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx dt \leq M^2(\nu_0, T) F^2, \quad (2.3)$$

$$0 \leq c(x, t) \leq \max c_0(x) \leq 1, \quad (2.4)$$

где M — константа, зависящая только от ν_0 и T .

3. Вспомогательные задачи

Зададим множество $\mathfrak{M}$ следующим образом $\mathfrak{M} = \{\bar{c} \in \mathbb{C}(\Omega_T) \mid 0 \leq \bar{c} \leq 1\}$. Пусть $\bar{c} \in \mathfrak{M}$. Определим функцию $\mathbf{u}(x, t)$ как решение задачи (1.1)–(1.3) с функцией $\mu(\bar{c})$:

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \operatorname{div} (\alpha_\mu \mu(\bar{c}) \nabla \mathbf{u} + (\alpha_\nu \operatorname{div} \mathbf{u} - p) I) + \mathbf{F}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u}(x, t) = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad \mathbf{u}(x, 0) = 0. \quad (3.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и $p(\mathbf{x}, t)$ называются обобщенным решением задачи (3.1)–(3.3) в области Ω_T , если

- 1) $\frac{\partial p}{\partial t} \in \mathbb{L}_2(\Omega_T)$, $\mathbf{u} \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$;
- 2) почти всюду в области Ω_T выполнено уравнение неразрывности (3.2);
- 3) функции $\mathbf{u}$ и p удовлетворяют интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \left(\alpha_\tau \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha_\mu \mu(\bar{c}) \nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi - \alpha_\nu \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \varphi + \right. \\ \left. + p \operatorname{div} \varphi + \mathbf{F} \cdot \varphi \right) dx dt = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$, равной нулю на границе Γ и при $t = T$.

Лемма 1. Для каждого фиксированного $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ существует единственное обобщенное решение задачи (3.1)–(3.3) и для него справедлива оценка

$$\begin{aligned} \max_{0 < t < T} \int_{\Omega} \left(\alpha_\tau |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p} p^2 \right) dx + \alpha_\nu \int_{\Omega_T} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 dx dt + \\ + \alpha_\mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx dt \leq M^2(\nu_0, T) F^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

◁ Пользуясь тождеством (3.4) и выражая в нем $\operatorname{div} \mathbf{u}$ в третьем слагаемом из уравнения неразрывности (3.2), можем записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\alpha_{\tau} |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p} p^2 \right) dx + \alpha_{\nu} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 dx + \\ + \alpha_{\mu} \int_{\Omega} \mu(\bar{c}) |\nabla \mathbf{u}|^2 dx = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dx \end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее равенство от 0 до T , учтем предположение $0 < \nu_0 \leq \mu(c) \leq \frac{1}{\nu_0}$, а правую часть оценим с помощью неравенства Коши с ε :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \max_{0 < t < T} \int_{\Omega} \left(\alpha_{\tau} |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p} p^2 \right) dx + \alpha_{\nu} \int_{\Omega_T} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 dx dt + \\ + \alpha_{\mu} \nu_0 \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx dt \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega_T} |\mathbf{F}|^2 dx dt + \frac{\varepsilon T}{2} \max_{0 < t < T} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Положим $\varepsilon = \frac{\alpha_{\tau}}{2T}$, тогда получим оценку

$$\begin{aligned} \max_{0 < t < T} \int_{\Omega} \left(\alpha_{\tau} |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p} p^2 \right) dx + \alpha_{\nu} \int_{\Omega_T} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 dx dt + \\ + \alpha_{\mu} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx dt \leq M^2(\nu_0, T) F^2. \end{aligned}$$

Эта оценка позволяет доказать существование и единственность обобщенного решения методом Галеркина, подробное изложение можно найти, например, в [2, с. 88]. ▷

Пусть $\mathfrak{N}$ — нормированное пространство с нормой:

$$\begin{aligned} (\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}})^2 = \max_{0 < t < T} \int_{\Omega} \left(\alpha_{\tau} |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p} p^2 \right) dx + \\ + \alpha_{\nu} \int_{\Omega_T} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 dx dt + \alpha_{\mu} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx dt. \end{aligned} \tag{3.6}$$

В силу леммы 1 определен оператор $\mathbf{A} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ такой, что $\mathbf{u} = \mathbf{A}(\bar{c})$.

Лемма 2. Оператор $\mathbf{A}$ — непрерывный.

◁ Пусть $\mathbf{u}_1 = A(\bar{c}_1)$, $\mathbf{u}_2 = A(\bar{c}_2)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $\bar{c} = \bar{c}_1 - \bar{c}_2$, $p = p_1 - p_2$. Тогда для разности $\mathbf{u}$ имеем:

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \operatorname{div} (\alpha_\mu \mu(\bar{c}_1) \nabla \mathbf{u}_1 - \alpha_\mu \mu(\bar{c}_2) \nabla \mathbf{u}_2) + \operatorname{div} ((\alpha_\nu \operatorname{div} \mathbf{u} - p) \mathbf{I}),$$

$$\begin{aligned} \mu(\bar{c}_1) \nabla \mathbf{u}_1 - \mu(\bar{c}_2) \nabla \mathbf{u}_2 &= \mu(\bar{c}_1) \nabla \mathbf{u}_1 - \mu(\bar{c}_1) \nabla \mathbf{u}_2 + \mu(\bar{c}_1) \nabla \mathbf{u}_2 - \mu(\bar{c}_2) \nabla \mathbf{u}_2 = \\ &= \mu(\bar{c}_1) \nabla \mathbf{u} + (\mu(\bar{c}_1) - \mu(\bar{c}_2)) \nabla \mathbf{u}_2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbf{u}$ есть обобщенное решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \operatorname{div} (\alpha_\mu \mu(\bar{c}_1) \nabla \mathbf{u} + (\alpha_\nu \operatorname{div} \mathbf{u} - p) \mathbf{I}) + \\ &+ \alpha_\mu \operatorname{div} ((\mu(\bar{c}_1) - \mu(\bar{c}_2)) \nabla \mathbf{u}_2), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

$$\mathbf{u}(x, t) = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma, \quad \mathbf{u}(x, 0) = 0.$$

Умножим уравнение (3.7) на функцию $\mathbf{u}$ и проинтегрируем по области Ω :

$$\begin{aligned} \alpha_\tau \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \mathbf{u} \, dx - \alpha_\mu \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mu(\bar{c}_1) \nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} \, dx - \int_{\Omega} \operatorname{div} ((\alpha_\nu \operatorname{div} \mathbf{u} - p) \mathbf{I}) \mathbf{u} \, dx = \\ = \alpha_\mu \int_{\Omega} \operatorname{div} ((\mu(\bar{c}_1) - \mu(\bar{c}_2)) \nabla \mathbf{u}_2) \mathbf{u} \, dx. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование по частям и выразив $\operatorname{div} \mathbf{u}$ из уравнения неразрывности, имеем:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} \left(\alpha_\tau |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p} p^2 \right) dx + 2\alpha_\nu \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \, dx \, dt + \\ + 2\alpha_\mu \int_{\Omega} \mu(\bar{c}_1) |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx \, dt = -2\alpha_\mu \int_{\Omega_T} (\mu(\bar{c}_1) - \mu(\bar{c}_2)) (\nabla \mathbf{u}_2 : \nabla \mathbf{u}) \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Оценим теперь правую часть (2.8), пользуясь ограниченностью производной $\mu'(\bar{c})$, неравенством Гельдера и неравенством Коши с ε :

$$\begin{aligned} \left| -2\alpha_\mu \int_{\Omega} (\mu(\bar{c}_1) - \mu(\bar{c}_2)) (\nabla \mathbf{u}_2 : \nabla \mathbf{u}) dx dt \right| &\leq \frac{2\alpha_\mu}{\nu_0} \int_{\Omega_T} |\bar{c} \nabla \mathbf{u}_2 : \nabla \mathbf{u}| dx dt \leq \\ &\leq \frac{2\alpha_\mu}{\nu_0} \sqrt{\int_{\Omega_T} |\bar{c} \nabla \mathbf{u}_2|^2 dx dt} \sqrt{\int_{\Omega_T} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx dt} \leq \\ &\leq \frac{2\alpha_\mu}{\nu_0} \left(\frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega_T} |\bar{c} \nabla \mathbf{u}_2|^2 dx dt \right). \end{aligned}$$

Левую часть (2.8) оценим снизу (учитывая $0 < \nu_0 \leq \mu(c)$) выражением

$$\max_{0 < t < T} \int_{\Omega} \left(\alpha_\tau |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p} p^2 \right) dx + \alpha_\nu \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 dx dt + \alpha_\mu \nu_0 \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx dt,$$

положим $\varepsilon = \frac{\nu_0^2}{2}$ и воспользуемся оценкой (2.5) для $|\nabla \mathbf{u}_2|$. Получаем:

$$\begin{aligned} (\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}})^2 &\leq M_1^2(\nu_0, T) F^2 \int_{\Omega_T} |\bar{c}|^2 dx dt = M_1^2(\nu_0, T) F^2 (\|\bar{c}\|_{2, \Omega_T})^2 \leq \\ &\leq M_1^2(\nu_0, T) F^2 |\Omega_T| \left(\max_{\Omega_T} |\bar{c}| \right)^2 = M_2(\nu_0, T, F, |\Omega|) \left(|\bar{c}|_{\Omega_T}^{(0)} \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}} \leq \operatorname{const} |\bar{c}|_{\Omega_T}^{(0)}$, что и влечет непрерывность оператора A . $\triangleright$

Полученная таким образом функция $\mathbf{u}$, вообще говоря, не является достаточно гладкой, поэтому приблизим ее стекловскими усреднениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_h(x, t) &= \mathbf{M}_h(\mathbf{u}(x, t)) = \\ &= \frac{1}{h^4} \int_0^T \eta \left(\frac{|t - \tau|}{h} \right) \left(\int_{\Omega} \eta \left(\frac{|x - y|}{h} \right) \mathbf{u}(y, \tau) dy \right) d\tau, \end{aligned}$$

где $\eta(s) \in \mathbb{C}(0, \infty)$ — четная неотрицательная функция, $\int_0^\infty \eta(s) ds = \operatorname{const}$; $\eta(s) = 0$, если $s > 1$, $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \eta(|t|) \eta(|x|) dx dt = 1$. Функции $\mathbf{w}_h$ являются гладкими, финитными и при $h \rightarrow 0$ равномерно сходятся к $\mathbf{u}$ в любой строго внутренней подобласти $\Omega'_T \subset \Omega_T$.

Определим теперь функцию $c_h(x, t)$ как решение задачи:

$$\frac{\partial c_h}{\partial t} + \mathbf{w}_h \nabla c_h = D \Delta c_h, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial c_h(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad c_h(x, 0) = c_0(x). \quad (3.10)$$

Задача (3.9)–(3.10), как задача с гладкими коэффициентами, имеет бесконечно дифференцируемое единственное решение $c_h(x, t)$, для которого справедлив принцип максимума

$$0 \leq c_h(x, t) \leq \max c_0(x) \leq 1. \quad (3.11)$$

Таким образом, для каждой фиксированной функции $\mathbf{u} \in \mathfrak{N}$ существует единственная функция $\bar{c}_h \in \mathfrak{M}$, т. е. определен оператор $\mathbf{B}: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}$, такой что $c_h = \mathbf{B}(\mathbf{u})$.

Лемма 3. Оператор $\mathbf{B}$ — непрерывный.

◁ Пусть $\mathbf{w}_1 = M_h(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{w}_2 = M_h(\mathbf{u}_2)$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$, $c_1 = \mathbf{B}(\mathbf{u}_1)$, $c_2 = \mathbf{B}(\mathbf{u}_2)$ (индекс h для краткости опускаем), $c = c_1 - c_2$.

Тогда разность c является решением начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{w}_1 \nabla c = D \Delta c - \nabla c_2 \mathbf{w}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad c(x, 0) = 0.$$

Умножим (3.12) на c и проинтегрируем по области Ω

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c^2 dx + D \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx = \int_{\Omega} \frac{c^2}{2} \operatorname{div} \mathbf{w}_1 dx - \int_{\Omega} c \mathbf{w} \cdot \nabla c_2 dx. \quad (3.13)$$

По построению, $|\operatorname{div} \mathbf{w}_1| \leq N_1(h)$, $|\nabla c_2| \leq N_1(h)$. Оценим последнее слагаемое

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} c \mathbf{w} \cdot \nabla c_2 dx \right| &\leq \sqrt{\int_{\Omega} |c \nabla c_2|^2 dx} \sqrt{\int_{\Omega} |\mathbf{w}|^2 dx} \leq \\ &\leq \sqrt{N_1(h)} \sqrt{\int_{\Omega} c^2 dx} \sqrt{\int_{\Omega} |\mathbf{w}|^2 dx} \leq N_2(h) \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} c^2 dx + \int_{\Omega} |\mathbf{w}|^2 dx \right). \end{aligned}$$

Обозначим $y = \int_{\Omega} c^2 dx$, тогда из (3.13) можно записать неравенство

$$\frac{dy}{dt} \leq N_2(h) \left(y + \int_{\Omega} |\mathbf{w}|^2 dx \right).$$

Воспользовавшись неравенством Гронуолла [1, с. 112], получаем:

$$\max_{0 < t < T} \int_{\Omega} c^2 dx \leq \text{const} \int_{\Omega_T} |\mathbf{w}|^2 dx dt,$$

или

$$\|c\|_{2,\Omega_T} \leq \text{const} \|\mathbf{w}\|_{2,\Omega_T}. \quad (3.14)$$

Чтобы получить оценку (2.14) для $|c|^{(0)}$, обратимся к лемме 3.3 из [1, с. 95]. В нашем случае $c(x, t) \in \mathbb{W}_2^{4,2}$, т. е. $l = 2, r = 0, s = 0, n = 3, \lambda = 0$,

$$|c|_{\Omega_T}^{(0)} \leq b_1 \delta^{\frac{3}{2}} \langle \langle c \rangle \rangle_{2,\Omega_T}^{(4)} + b_2 \delta^{-\frac{5}{2}} \|c\|_{2,\Omega_T} \equiv A \delta^{\frac{3}{2}} + B \delta^{-\frac{5}{2}} \equiv f(\delta).$$

Функция $f(\delta)$ достигает минимума при $\delta = \left(\frac{5B}{3A}\right)^{\frac{1}{4}}$, в этом случае $f(\delta) = b_3 A^{\frac{5}{8}} B^{\frac{3}{8}}$ и

$$|c|_{\Omega_T}^{(0)} \leq b_4 \left(\langle \langle c \rangle \rangle_{2,\Omega_T}^{(4)} \right)^{\frac{5}{8}} (\|c\|_{2,\Omega_T})^{\frac{3}{8}}.$$

Окончательно получаем оценку

$$|c|_{\Omega_T}^{(0)} \leq b_5 \|c\|_{2,\Omega_T} \leq b_6 \|\mathbf{w}\|_{2,\Omega_T} \leq b_7 \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega_T}.$$

Таким образом, $|c|_{\Omega_T}^{(0)} \leq \text{const} \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega_T}$, что и означает непрерывность оператора $\mathbf{B}$. $\triangleright$

Определим теперь оператор

$$\Phi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M},$$

$$c_h = \Phi(\bar{c}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}(\bar{c})).$$

Лемма 4. Оператор Φ имеет неподвижную точку.

$\triangleleft$ Оператор Φ непрерывен как суперпозиция непрерывных операторов. Более того, можно доказать, что он вполне непрерывен. Для

доказательства воспользуемся теоремой Арцела о том, что множество M непрерывных функций, определенных в M , компактно тогда и только тогда, когда входящие в M функции равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.

В нашей задаче для фиксированного $h > 0$ функции $c_h(x, t)$ по построению обладают ограниченными производными по x и по t , поэтому

$$|c_h(x', t) - c_h(x'', t)| \leq \frac{\partial c_h(x^*, t)}{\partial x_j} |x'_j - x''_j| \leq \text{const} |x' - x''| \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$|c_h(x, t') - c_h(x, t'')| \leq \frac{\partial c_h(x, t^*)}{\partial t} |t' - t''| \leq \text{const} |t' - t''|,$$

т. е. функции $c_h(x, t)$ равностепенно непрерывны по x и по t . Равномерная ограниченность очевидна. Таким образом, оператор Φ любое ограниченное множество переводит в компактное, т. е. является вполне непрерывным.

Множество $\mathfrak{M}$ является выпуклым. Действительно, пусть $c^1 \in \mathfrak{M}$ и $c^2 \in \mathfrak{M}$. Рассмотрим отрезок, соединяющий c^1 и c^2 :

$$c_\alpha(x, t) = \alpha c^1(x, t) + (1 - \alpha) c^2(x, t), \quad \alpha \in [0, 1].$$

Так как $0 \leq c_\alpha \leq \alpha \cdot 1 + (1 - \alpha) \cdot 1 = 1$, то весь отрезок содержится в $\mathfrak{M}$.

Все вышесказанное позволяет применить к оператору $\Phi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ принцип неподвижной точки Шаудера [4, с. 411]. $\triangleright$

Итак, существует неподвижная точка оператора Φ , обозначим ее c_h ,

$$c_h = \Phi(c_h),$$

и пусть $\mathbf{u}_h = \mathbf{A}(c_h)$. Тогда c_h является решением задачи

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} = \text{div} (\alpha_\mu \mu(c_h) \nabla \mathbf{u}_h + (\alpha_\nu \text{div} \mathbf{u}_h - p_h) \mathbf{I}) + \mathbf{F}, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial p_h}{\partial t} + \alpha_p \text{div} \mathbf{u}_h = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial c_h}{\partial t} + M_h(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla c_h = D \Delta c_h, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{u}_h(x, t) = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad \mathbf{u}_h(x, 0) = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial c_h(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad c_h(x, 0) = c_0(x), \quad (3.19)$$

где (3.17) понимается как интегральное тождество:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \left(-c_h \frac{\partial \xi}{\partial t} + M_h(\mathbf{u}_h) \nabla c_h \xi + D \nabla c_h \cdot \nabla \xi \right) dx dt = \\ = \int_{\Omega} c_0(x) \xi(x, 0) dx \quad \forall \xi \in \dot{\mathbb{C}}^\infty(\Omega_T) : \xi(x, T) = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

4. Предельный переход

Пусть $h \rightarrow 0$. Оценки (3.5) и (3.11) верны независимо от h . Предельный переход в уравнениях (3.15) и (3.16) очевиден. Оценка (3.5) позволяет из последовательности $\{\mathbf{u}_h\}$ выбрать подпоследовательность такую, что

$$\mathbf{u}_h \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ слабо в } \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T), \quad \mathbf{u}_h \rightarrow \mathbf{u} \text{ сильно в } \mathbb{L}_2(\Omega_T),$$

$$\nabla \mathbf{u}_h \rightharpoonup \nabla \mathbf{u} \text{ слабо в } \mathbb{L}_2(\Omega_T), \quad p_h \rightharpoonup p \text{ слабо в } \mathbb{L}_2(\Omega_T),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_h \rightharpoonup \operatorname{div} \mathbf{u} \text{ слабо в } \mathbb{L}_2(\Omega_T), \quad \frac{\partial p_h}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial p}{\partial t} \text{ слабо в } \mathbb{L}_2(\Omega_T).$$

Аналогично, из последовательности $\{c_h\}$ выбираем подпоследовательность такую, что

$$c_h \rightharpoonup c \text{ слабо в } \mathbb{L}_2(\Omega_T),$$

$$\mu(c_h) \rightharpoonup \mu(c) \text{ слабо в } \mathbb{L}_2(\Omega_T).$$

Чтобы получить оценку для ∇c_h , умножим (3.17) на c_h и проинтегрируем по Ω

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c_h^2 dx + \int_{\Omega} c_h M_h(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla c_h dx = D \int_{\Omega} |\nabla c_h|^2 dx. \quad (4.1)$$

Учитывая (3.11), оценим второе слагаемое

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_h M_h(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla c_h dx &\leq \int_{\Omega} M_h(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla c_h dx \leq \\ &\leq \sqrt{\int_{\Omega} |M_h(\mathbf{u}_h)|^2 dx} \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla c_h|^2 dx} \leq \operatorname{const} \|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega} \cdot \|\nabla c_h\|_{2,\Omega} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega} \right)^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \left(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega} \right)^2. \end{aligned}$$

Положим $\varepsilon = D$ и проинтегрируем (2.20) по t , получим

$$D\left(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(\|c_h\|_{2,\Omega_T}\right)^2 + \frac{D}{2}\left(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T}\right)^2 + \frac{1}{2D}\left(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T}\right)^2,$$

откуда

$$\left(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T}\right)^2 \leq \text{const} \left(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T}\right)^2$$

и, следовательно,

$$\nabla c_h \rightharpoonup \nabla c \text{ слабо в } \mathbb{L}_2(\Omega_T).$$

В уравнении диффузии сложность только в одном слагаемом:

$$\int_{\Omega_T} \xi M_h(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla c_h \, dx \, dt \equiv I_h,$$

поскольку оба сомножителя всего лишь слабо сходятся. Из свойств усреднений имеем:

$$M_h(\mathbf{u}) \rightarrow \mathbf{u} \text{ сильно в } \mathbb{L}_2(\Omega_T),$$

$$\|M_h(\mathbf{u}_h)\|_{2,\Omega_T} \leq \text{const} \|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_h &= \int_{\Omega_T} \xi (M_h(\mathbf{u}_h) - M_h(\mathbf{u})) \cdot \nabla c_h \, dx \, dt + \\ &+ \int_{\Omega_T} \xi (M_h(\mathbf{u}) - \mathbf{u}) \cdot \nabla c_h \, dx \, dt + \int_{\Omega_T} \xi \mathbf{u} \cdot \nabla c_h \, dx \, dt \equiv I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

$$|I_1| \leq \max_{x,t} |\xi| \|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T} \|M_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})\|_{2,\Omega_T} \leq \text{const} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{2,\Omega_T} \rightarrow 0,$$

$$h \rightarrow 0,$$

$$|I_2| \leq \text{const} \|M_h(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\|_{2,\Omega_T} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0,$$

окончательно получаем

$$I_h \rightarrow \int_{\Omega_T} \xi \mathbf{u} \cdot \nabla c \, dx \, dt.$$

Из результатов этого параграфа и доказанных лемм следует утверждение теоремы 1.

Литература

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.—М.: Наука, 1967.—736 с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.—М.: Мир, 1972.—588 с.
3. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.—409 с.
4. *Треногин В. А.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1980.—495 с.

Гриценко Светлана Александровна
Белгородский государственный университет
Россия, 308007, Белгород, ул. Студенческая, 14
E-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ЛАМБА С УЧЕТОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ВЯЗКОСТИ И КОНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДИМОСТИ

А. И. Задорожный, М. Н. Гуров

Общепринятой моделью для изучения коротких гравитационных волн является плоская линейная задача о собственных колебаниях тяжелой однородной вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины, заполняющей нижнюю полуплоскость и граничащей с вакуумом, называемая задачей Ламба. В представленном докладе задача Ламба, в отличие от классического случая рассмотрена не только с учетом наличия у жидкости молекулярной вязкости, но и магнитной, т. е. конечной электрической проводимости. Полагается, что на систему накладывается стационарное однородное горизонтальное магнитное поле.

Постановка задачи. Рассматривается плоская линейная задача о собственных колебаниях тяжелой однородной вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины граничащей с вакуумом. На систему наложено стационарное горизонтальное магнитное поле постоянной напряженности $\vec{H}_0 = (H_0, 0, 0)$.

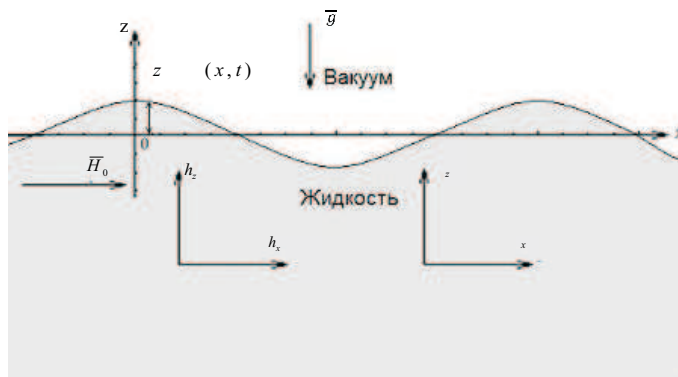


Рис. 1. Физическая постановка задачи.

Систему координат помещаем на невозмущенной поверхности жидкости, ось Oz направляем вертикально вверх. Координату профиля волны $\zeta(x, t)$ будем отсчитывать от уровня $z = 0$.

Возмущение магнитного поля, связанное с движением жидкости, обозначим через $\bar{h}(x, z, t)$ и будем называть индуцированным магнитным полем. Система уравнений магнитной гидродинамики для среды имеет вид [1, 4]:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\text{grad } p + \nu \rho \Delta \bar{V} - \rho g \bar{z}_0 + \mu \text{rot } \bar{H} \times \bar{H},$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \text{rot}(\bar{V} \times \bar{H}) + \nu_m \Delta \bar{H},$$

$$\text{div } \bar{H} = 0, \quad \text{div } \bar{V} = 0.$$

Перепишем эту систему в форме:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\text{grad}(p + \rho g z - p_a) + \nu \rho \Delta \bar{V} + \mu \text{rot } \bar{H} \times \bar{H},$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \text{rot}(\bar{V} \times \bar{H}) + \nu_m \Delta \bar{H},$$

$$\text{div } \bar{H} = 0, \quad \text{div } \bar{V} = 0.$$

Здесь, $\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{h}$ — напряженность магнитного поля, ρ — плотность жидкости, p — гидродинамическое давление, p_a — атмосферное давление, $\rho g z$ — архимедово давление, $\nu_m = \frac{\sigma E}{\mu}$ — магнитная вязкость, σE — электрическая проницаемость жидкости, $\bar{V}$ — скорость частиц жидкости, $\bar{g}$ — ускорение силы тяжести, μ — магнитная проницаемость жидкости.

Линеаризуем последнюю систему, учитывая, что

$$\bar{H} = (H_0 + h_x, 0, h_z),$$

$$\bar{H}_1 = (H_{1,0} + h_{1,x}, 0, h_z),$$

$$\bar{V} = (V_x, 0, V_z).$$

Здесь индекс 1 относится к вакууму.

Запишем проекции $(\bar{H} \cdot \nabla) \bar{V}$:

$$(\bar{H} \cdot \nabla) \bar{V}_{ox} = (H_0 + h_x) \frac{\partial V_x}{\partial x} + h_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = H_0 \frac{\partial V_x}{\partial x},$$

$$(\bar{H} \cdot \nabla) \bar{V}_{oz} = (H_0 + h_x) \frac{\partial V_z}{\partial x} + h_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = H_0 \frac{\partial V_z}{\partial x}.$$

Аналогично рассматривая $(\bar{V} \cdot \nabla)\bar{H}$, получим:

$$(\bar{V} \cdot \nabla)\bar{H}_{ox} = 0,$$

$$(\bar{V} \cdot \nabla)\bar{H}_{oz} = 0.$$

Также очевидно, что $\Delta\bar{H} = \Delta h_x \cdot \bar{x}^0 + \Delta h_z \cdot \bar{z}^0$.

Далее имеем

$$\operatorname{div} \bar{H} = 0 \rightarrow \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_z}{\partial z} = 0,$$

$$\operatorname{div} \bar{V} = 0 \rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

Учитывая формулу $\operatorname{rot}(\bar{V} \times \bar{H}) = (\bar{H} \cdot \nabla)\bar{v} - (\bar{v} \cdot \nabla)\bar{H}$ и полагая $p^* = p + \rho g z - p_a$, придем к системе:

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \rho \Delta V_x,$$

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial z} + \nu \rho \Delta V_z + H_0 \left(\frac{\partial h_z}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial t} = H_0 \frac{\partial V_x}{\partial x} + \nu_m \Delta h_x,$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} = H_0 \frac{\partial V_z}{\partial x} + \nu_m \Delta h_z.$$

Постановка краевых условий. С учетом того, что во внешнем пространстве, над свободной поверхностью возмущения электромагнитного поля должны удовлетворять уравнениям Максвелла, получаем три граничных условия на свободной поверхности (СП):

1. Непрерывность полных нормальных напряжений при переходе через СП:

$$-p^* + \rho g z + 2\nu \rho \frac{\partial V_z}{\partial z} + \mu H_0 (h_{1x} - h_x) = 0.$$

2. Равенство нулю полных касательных напряжений на СП:

$$\nu\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \left(h_z - H_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)(h_x - h_{1x}) = 0.$$

3. Электромагнитное условие равенства нормальных компонент индуцированного магнитного поля на СП запишется в виде:

$$h_{1x} - H_{10}\frac{\partial\zeta}{\partial x} = h_z - H_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}.$$

Окончательно, система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial V_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu\rho\Delta V_x, \\ \rho\frac{\partial V_z}{\partial t} &= -\frac{\partial p^*}{\partial z} + \nu\rho\Delta V_z + H_0\left(\frac{\partial h_z}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial h_x}{\partial t} &= H_0\frac{\partial V_x}{\partial x} + \nu_m\Delta h_x, \\ \frac{\partial h_z}{\partial t} &= H_0\frac{\partial V_z}{\partial x} + \nu_m\Delta h_z.\end{aligned}$$

С краевыми условиями на невозмущенной СП, т. е. при $z = 0$,

$$\begin{aligned}h_{1z} - H_{10}\frac{\partial\zeta}{\partial x} &= h_z - H_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \\ \nu\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \left(h_z - H_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)(h_x - h_{1x}) &= 0, \\ -p^* + \rho g\zeta + 2\nu\rho\frac{\partial V_z}{\partial z} + \mu H_0(h_{1x} - h_x) &= 0.\end{aligned}$$

Заметим, что случай $\text{Rm} = \infty$, $\text{Rg} < \infty$, рассмотрен в [2], а случай $\text{Rg} = \infty$, $\text{Rm} < \infty$ изучен в [3].

Решение задачи. Опуская стандартную процедуру перехода к безразмерным переменным и разыскивая, как это принято в теории

свободных колебаний, решения вида $f = F(z)e^{\sigma t - ix}$, где функции $F(z)$ представляют собой соответствующие амплитуды возмущений, приходим к уравнению шестого порядка:

$$(2Z'' - Z - Z^{IV}) \left(\frac{\sigma}{\text{Rm}} + \frac{\sigma}{\text{Rg}} \right) + \frac{1}{\text{Rm Rg}} (Z^{VI} - 3Z^{IV} + 3Z'' - Z) + (\sigma^2 + A)(Z'' - Z) = 0,$$

где Rm , Rg — гидродинамическое и магнитное числа Рейнольдса соответственно, A — число Альфвена.

Краевые условия преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \sigma^2 Z'(0) + Z(0) + A[Z'(0) + Z(0)] - \frac{1}{\text{Rm}} \left(\sigma[Z'''(0) - Z(0)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sigma}[Z''(0) - Z(0)] \right) - \frac{1}{\text{Rg}} (\sigma Z'''(0) - 3\sigma Z'(0)) + \\ + \frac{1}{\text{Rm Rg}} [(Z^V(0) - Z'''(0)) + 3(Z'''(0) - Z'(0))] = 0, \\ - \frac{1}{\text{Rm}} (Z^{IV}(0) - Z(0)) + \sigma(Z''(0) + Z(0)) = 0, \\ Z''(0) - Z(0) = 0. \end{aligned}$$

Общее решение приведенного выше ОДУ имеет структуру

$$Z(z) = C_1 e^{k_1 z} + C_2 e^{k_2 z} + C_3 e^{k_3 z}.$$

Здесь,

$$k_1 = 1,$$

$$\begin{aligned} k_2 = \sqrt{1 + \frac{\sigma(\text{Rg} + \text{Rm})}{2}} + \sqrt{\frac{\sigma^2(\text{Rg} + \text{Rm})^2}{4} - (\sigma^2 + A) \text{Rg Rm}}, \\ k_3 = \sqrt{1 + \frac{\sigma(\text{Rg} + \text{Rm})}{2}} - \sqrt{\frac{\sigma^2(\text{Rg} + \text{Rm})^2}{4} - (\sigma^2 + A) \text{Rg Rm}}, \end{aligned}$$

и выбирается та ветвь корня, для которой $\text{Re}(k_j) > 0$.

Удовлетворяя граничным условиям на СП мы приходим к линейной однородной алгебраической системе уравнений относительно C_1 ,

C_2, C_3 . Понятно, что эта система имеет нетривиальное решение лишь в том случае, когда ее определитель есть нуль.

Определитель системы

$$\Delta(\sigma, \text{Rg}, \text{Rm}, A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2, & a_{12} &= 1 + k_2, & a_{13} &= 1 + k_3, & a_{21} &= 0, \\ a_{22} &= (1 + k_2^2) \left(\frac{1 - k_2^2}{\text{Rm}} + \sigma \right) - \sigma(1 + k_2), \\ a_{23} &= (1 + k_3^2) \left(\frac{1 - k_3^2}{\text{Rm}} + \sigma \right) - \sigma(1 + k_3), \\ a_{31} &= - \left(\frac{6}{\text{Rm Rg}} + 2\sigma \left(\frac{2}{\text{Rg}} + \frac{1}{\text{Rm}} \right) + \sigma^2 - 1 \right), \\ a_{32} &= \phi_2 + \psi_2 - (\sigma^2 - 1), & a_{33} &= \phi_3 + \psi_3 - (\sigma^2 - 1). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \frac{k_2^5 - 4k_2^3 - 3}{\text{Rg Rm}}, & \phi_3 &= \frac{k_3^5 - 4k_3^3 - 3}{\text{Rg Rm}}, \\ \psi_2 &= -\sigma \left(\frac{k_2^3 + 3}{\text{Rg}} + \frac{k_2^3}{\text{Rg}} + \frac{k_2^3 \sigma^2 + (k_2^2 - 1)}{\text{Rm} \sigma^2} \right), \\ \psi_3 &= -\sigma \left(\frac{k_3^3 + 3}{\text{Rg}} + \frac{k_3^3}{\text{Rg}} + \frac{k_3^3 \sigma^2 + (k_3^2 - 1)}{\text{Rm} \sigma^2} \right). \end{aligned}$$

Тогда раскрывая определитель приходим к дисперсионному уравнению $\Delta(\sigma, \text{Rg}, \text{Rm}, A) = 0$, для определения σ , которое ввиду его громоздкости не приводится.

В своей работе [5] Ламб обратил внимание на то, что при условии затухания движения на бесконечности ($z \rightarrow \infty$), получается дискретный спектр, а при наложении требования лишь ограниченности возмущений — сплошной. Очевидно, что ветвь сплошного спектра получаем, предположив, что $\text{Re}(k_j) = 0$, $j = 2, 3$, т. е. $k_j = ip_j$, $p_j \in \mathbb{R}$.

Тогда, очевидно, имеем:

$$\sigma_{cj} = -\frac{1 + p_j^2}{2} \left(\frac{1}{\text{Rm}} + \frac{1}{\text{Rg}} \right) + (-1)^j \sqrt{\frac{(1 + p_j^2)^2}{4} \left(\frac{1}{\text{Rg}} - \frac{1}{\text{Rm}} \right)^2 - A}.$$

Доказано утверждение, аналогичное приведенному в [6]: для случая неэлектропроводной жидкости в отсутствии магнитного поля: дискретный спектр расположен в левой комплексной полуплоскости.

Его доказательство основывается на выведенном нами функционале баланса энергии:

$$\sigma^2 T + |\sigma|^2 T_m + \sigma D + \sigma J + |W(0)|^2 = 0.$$

Представляя σ в виде $\sigma = \alpha + i\beta$, подставляя в функционал баланса энергии, после несложных выкладок, получаем, что дискретный спектр расположен в левой комплексной полуплоскости, то есть получаем факт временного затухания. Здесь $T = \|U\|^2 + \|W\|^2$ — функционал кинетической энергии, $T_m = \frac{A}{\text{Rm}}(\|X\|^2 + \|Z\|^2 + |Z(0)|^2)$ — функционал магнитной энергии, $D = \frac{1}{\text{Rg}}(\|W'' + W\|^2 + 4\|W'\|^2)$ — функционал вязкой диссипации за счет молекулярного трения, $J = \frac{A}{\text{Rm}}\|Z'' - Z\|^2$ — функционал энергии, рассеянной конечной электрической проводимостью в джоулево тепло, $|W(0)|^2$ соответствует потенциальной энергии архимедовых сил. Здесь норма понимается в смысле $L_2(-\infty, 0)$. $U(z)$, $W(z)$ — амплитудные множители горизонтальной и вертикальной компонент скорости соответственно, X , Z — амплитудные множители горизонтальной и вертикальной компонент индуцированного магнитного поля.

В заключение, приведем пример численного расчета, выполненного для уравнения $\Delta = 0$. Рис. 2 представляет зависимость $|\text{Im}(\sigma)|$ от $|\text{Re}(\sigma)|$, а на рис. 3 $|\text{Im}(\sigma)|$ и $|\text{Re}(\sigma)|$ даны как функции от $\frac{1}{\text{Rg}}$ (безразмерной молекулярной вязкости).

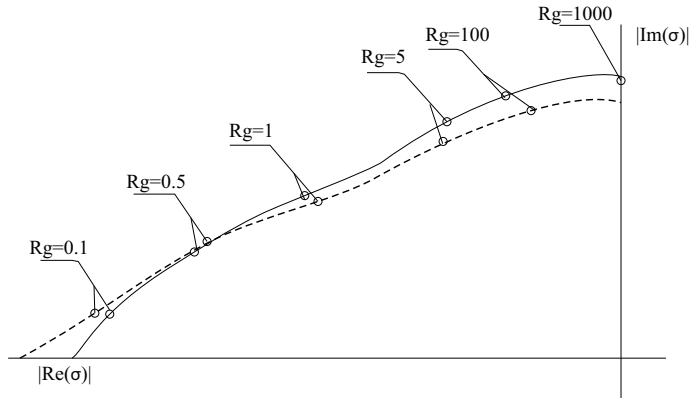


Рис. 2. Спектральные кривые поверхностных мод.

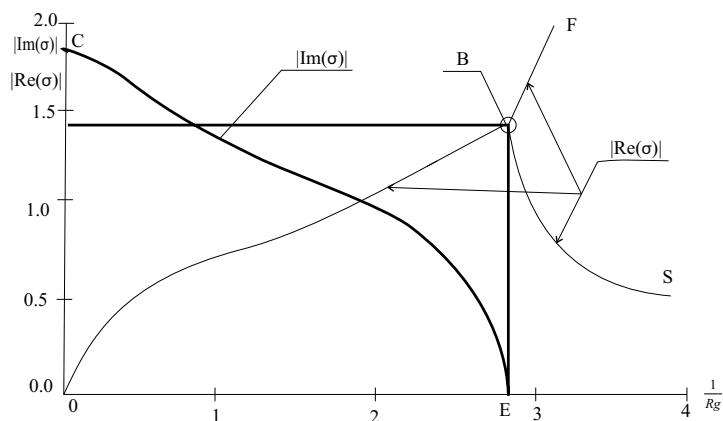


Рис. 3. Зависимость действительной и мнимой части спектрального параметра от безразмерной молекулярной вязкости.

На рис. 3 кривая CE представляет собой график мнимой части (частоты) колебательного ангармонического режима, а OB соответственно является графиком модуля действительной части (декремента затухания). Точка B — точка бифуркации, при переходе через которую комплексно сопряженная пара корней переходит в пару чисто вещественных. Ветвь BF отвечает за так называемый режим быстрого демпфирования, а ветвь BS описывает медленно затухающий аperiodический режим.

Литература

1. Ладиков Ю. П., Ткаченко В. Ф. Гидродинамические неустойчивости в металлургических процессах.—М.: Наука, 1983.—248 с.
2. Задорожный А. И. Задача Ламба о волнах в вязкой жидкости бесконечной проводимости // Математическое моделирование и краевые задачи. Ч. 2.—Самара: СамГТУ, 1996.—С. 36–38.
3. Задорожный А. И., Грунтфест Р. А. Собственные колебания жидкости конечной электропроводимости при наличии внешнего магнитного поля // Прикл. мех. и тех. физика.—2000.—Т. 41, № 2—С 3–10.
4. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. 8.—М.: Наука, 1959.—656 с.
5. Ламб Г. Гидродинамика.—М.—Л.: ОГИЗ, 1947.—929 с.
6. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике.—М.: Наука, 1989.—416 с.

Задорожный Анатолий Иванович
Южный федеральный университет
Россия, 344006, Ростов-на-дону, ул. Большая Садовая, 105
E-mail: Simon@rsu.ru

Гуров Михаил Николаевич
Южный федеральный университет
Россия, 344006, Ростов-на-дону, ул. Большая Садовая, 105
E-mail: MGurov@inbox.ru

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ Н. П. ПЕТРОВА ДЛЯ ПОДШИПНИКА СО СМАЗКОЙ КОНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ

А. И. Задорожный, Е. О. Лагунова

На основе полной системы уравнений магнитной гидродинамики рассматривается обобщение основополагающей задачи гидродинамической теории смазки Н. П. Петрова для случая наложения радиального магнитного поля.

Проведенный нами обзор литературных источников, относящихся к магнитной гидродинамике вязкой жидкости, позволяет сделать вывод об отсутствии как в монографических [1–9], так и в периодических публикациях [10–17] МГД — аналогов классических задач гидродинамической теории смазки.

На основе полной системы уравнений МГД (магнитной гидродинамики) рассматривается обобщение основополагающей задачи ГДТС (гидродинамической теории смазки) Н. П. Петрова. Приступим к ее физической и математической постановке, т. е. к формулировке математической модели.

Созданная Н. П. Петровым гидродинамическая теория смазки дала ключ к решению важнейшей задачи о трении в машинах.

В своей работе [18] профессор Н. П. Петров, правильно оценивая математические трудности, возникающие при учете всех особенностей движения жидкости в смазочном слое, останавливается на рассмотрении простейшей задачи, дающей возможность установить основы всей теории. В этой первоначальной постановке поверхности шипа и подшипника рассматриваются как круглые соосные цилиндры неограниченной длины, пространство между которыми предполагается сплошь заполненным смазкой. Тогда задача сводится к рассмотрению плоско-параллельного течения жидкости между двумя концентрическими окружностями и позволяет найти точное решение.

Общая постановка задачи

Рассмотрим установившееся течение вязкой однородной несжимаемой жидкости конечной электрической проводимости σ между двумя неограниченными в направлении оси Oz круглыми цилиндрами, из которых внутренний, радиуса r_1 , вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 , а внешний, радиуса r_2 , — с постоянной же угловой скоростью ω_2 . Будем предполагать, что смазочный слой вязкой электропроводной жидкости находится в стационарном осесимметричном магнитном поле $\tilde{H}_r(\tilde{r})$ (рис. 1). Массовыми силами будем пренебрегать, что оправдано для случаев слабонагруженных либо быстровращающихся валов. Вопрос о конкретной реализации подобного МП (магнитного поля) в данной работе не обсуждается, принципиальная теоретическая возможность создания подобного рода конфигурации МП описывается в разделе «Топология вихревого (магнитного) поля» [19].

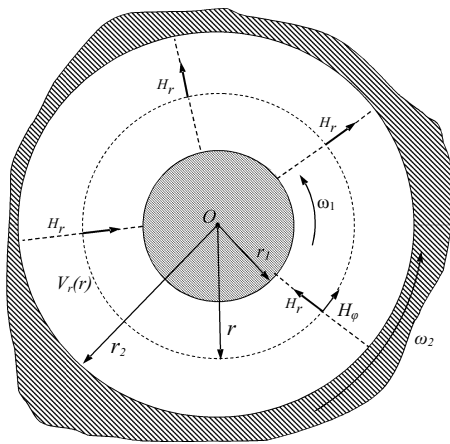


Рис. 1. Схематическое изображение течения смазки между двумя круглыми цилиндрами.

В силу закона «вмороженности» магнитных силовых линий в процессе движения жидкости произойдет их деформация, а, значит, появится подлежащая определению окружная (аксиальная) компонента МП $\tilde{H}_\phi(\tilde{r})$ [1, 3, 4]. Для описания движения воспользуемся системой цилиндрических координат, ось Oz которой совместима с

осью цилиндров. Ввиду однородности среды мы можем в рассматриваемом случае полагать, что течения во всех плоскостях, перпендикулярных Oz , будут тождественны. Кроме того, будем считать, что жидкость движется по концентрическим окружностям с центрами на оси Oz и что в силу симметрии течения характеристики его не зависят от координаты ϕ . Тогда будет:

$$\tilde{V}_r = \tilde{V}_z = 0, \quad \tilde{V}_\phi = \tilde{V}(\tilde{r}).$$

Запишем для описанной механической системы полную систему уравнений МГД в размерных переменных [1, 12].

Уравнения импульсов (количества движения) с учетом пондеромоторных сил в данном случае примут вид

$$-\frac{\tilde{V}_\phi^2}{\tilde{r}} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{P}}{d\tilde{r}} - \frac{\mu}{\rho} \tilde{H}_\phi \frac{d\tilde{H}_\phi}{d\tilde{r}}, \quad (1)$$

$$0 = \frac{\mu}{\rho} \tilde{H}_r \frac{d\tilde{H}_\phi}{d\tilde{r}} + \nu \left(\frac{d^2 \tilde{V}_\phi}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{V}_\phi}{d\tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \tilde{V}_\phi \right); \quad (2)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{d\tilde{V}_r}{d\tilde{r}} + \frac{\tilde{V}_r}{\tilde{r}} = 0;$$

уравнение отсутствия магнитных зарядов

$$\frac{d\tilde{H}_r}{d\tilde{r}} + \frac{\tilde{H}_r}{\tilde{r}} = 0; \quad (3)$$

уравнения индукции

$$\tilde{V}_r \frac{d\tilde{H}_r}{d\tilde{r}} = \tilde{H}_r \frac{d\tilde{V}_r}{d\tilde{r}} + \nu_m \left(\frac{d^2 \tilde{H}_r}{d\tilde{r}^2 + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{H}_r}{d\tilde{r}}} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \tilde{H}_r \right), \quad (4)$$

$$\tilde{V}_r \frac{d\tilde{H}_\phi}{d\tilde{r}} = \tilde{H}_r \frac{d\tilde{V}_\phi}{d\tilde{r}} + \nu_m \left(\frac{d^2 \tilde{H}_\phi}{d\tilde{r}^2 + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{H}_\phi}{d\tilde{r}}} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \tilde{H}_\phi \right), \quad (5)$$

где в согласии с общепринятым в МГД допущением о равенстве магнитных проницаемостей сплошной среды и вакуума, т. е. $\mu_{media} = \mu_{vacuum} = \mu$ [1, 2], ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости, $\nu_m = \frac{1}{\sigma\mu}$ — магнитная вязкость, σ — электропроводность, ρ — плотность, $\tilde{P}$ — избыточное давление.

Неизвестные функции удовлетворяют следующим граничным (краевым) условиям:

$$\nu\rho\left(\frac{d\tilde{V}(r_j)}{d\tilde{r}} - \frac{\tilde{V}(r_j)}{r_j}\right) = \tilde{\lambda}_j\left(V_j - \tilde{V}(r_j)\right), \quad V_j = \omega_j r_j, \quad j = 1, 2. \quad (6)$$

Это и есть «знаменитые» условия Н. П. Петрова [11, 12, 20], называемые условиями обобщенного проскальзывания, с коэффициентами внешнего трения $\tilde{\lambda}_j$. Имеющиеся эксперименты дают очень большие значения $\tilde{\lambda}_j$, что и послужило основанием для широкого использования условия прилипания, отвечающего случаю $\tilde{\lambda}_j = \infty$.

Электромагнитные условия примем в следующем виде

$$\tilde{H}_\phi(r_j) = h_j, \quad (7)$$

где величины h_j определяются величинами поверхностных токов, текущих по границам раздела «жидкость-шип» и «жидкость-подшипник» [21].

Перейдем к безразмерным переменным по формулам: $\tilde{r} = r_1 r$, $\tilde{r} \in (1, 1 + \delta)$, $\delta = \frac{(r_2 - r_1)}{(r_1)}$, $\tilde{V}_\phi = U_1 V$, $\tilde{P} = \rho U_c^2 p$, $U_c = r_1 \omega_1$, $\tilde{H}_\phi = H_0 H_\phi$, $\tilde{H}_r = H_0 H_r$, где H_0 — характерная величина напряженности магнитного поля, определяемая условиями работы узла трения.

Совершенно очевидно, что задача в безразмерном виде имеет вид

$$\frac{1}{Rg} \left(V'' + \frac{1}{r} V' - \frac{1}{r^2} V \right) = -Al H_r H'_\phi, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\text{Rm}} \left(H''_\phi + \frac{1}{r} H'_\phi - \frac{1}{r^2} H_\phi \right) = -H_r V', \quad (9)$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{V^2}{r} - Al \frac{d}{dr} \left(\frac{H_\phi^2}{2} \right), \quad (10)$$

где $H_r = \frac{C_H}{r}$, C_H — задано по условию задачи; $Rg = \frac{U_1 r_1}{\nu}$ — гидродинамическое число Рейнольдса; $\text{Rm} = \frac{U_1 r_1}{\nu_m}$ — магнитное число Рейнольдса; $Al = \frac{\mu H_0^2}{\rho U_1^2}$ — число Альфвена или число магнитного давления, представляющее собой отношение характерного магнитного давления к характерному гидродинамическому давлению, за

которое принимается скоростной напор. Следует заметить, что процедура решения системы сводится к решению лишь уравнений (8)–(9), а уравнение (10) служит после этого для определения градиента гидродинамического давления.

Соответственно граничные условия принимают форму:

$$\left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right) \Big|_{r=r_j} = Rg\lambda_j (V_{Tj} - V(r_j)), \quad (11)$$

где $\lambda_j = \frac{\tilde{\lambda}_j}{\rho U_1}$ — безразмерные коэффициенты внешнего трения.

Что же касается условия (7), то его вид сохраняется. Формулировка магнитогидродинамической модельной задачи Н. П. Петрова, таким образом, завершена.

Решение МГД задачи Петрова

Введем для краткости обозначений линейный дифференциальный оператор типа Эйлера $L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}$ и обозначим через $a = RgAlC_H$, $b = \text{Rm } C_H$. Тогда система (8)–(9) перепишется следующим образом:

$$L \cdot V = -\frac{a}{r} \frac{dH_\phi}{dr}, \quad (12)$$

$$L \cdot H_\phi = -\frac{b}{r} \frac{dV}{dr} \quad (13)$$

с граничными условиями (7) и (11).

Решение ищется в виде

$$H_\phi = Ar^\alpha, \quad V = Br^\beta. \quad (14)$$

Подставляя в (12)–(13), получим равенства

$$A [\alpha (\alpha - 1) + \alpha - 1] r^{\alpha-2} = -a\beta r^{\beta-2} B,$$

$$B [\beta (\beta - 1) + \beta - 1] r^{\beta-2} = -b\alpha r^{\alpha-2} A,$$

тождественно удовлетворяющиеся, как видно, только при $\alpha = \beta$, тогда

$$(\alpha^2 - 1) A + a\alpha B = 0, \quad (15)$$

$$abA + (\alpha^2 - 1) B = 0. \quad (16)$$

Данная линейная однородная алгебраическая система (15)–(16) относительно A и B имеет нетривиальное решение только при ра-

венстве нулю ее определителя, а именно:

$$(\alpha^2 - 1)^2 - ab\alpha^2 = 0,$$

что приводит к биквадратному уравнению для показателей

$$\alpha^4 - (2 + ab)\alpha^2 + 1 = 0,$$

откуда

$$\alpha^2 = 1 + \frac{ab}{2} \pm \sqrt{ab + \frac{a^2b^2}{4}}.$$

Удобно ввести вспомогательную переменную $\gamma = \frac{ab}{2}$, тогда приходим к формуле

$$(\alpha^2)_{1,2} = 1 + \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 2\gamma},$$

причем, легко видеть, что $(\alpha^2)_{1,2} > 0$.

Введя в рассмотрение

$$\alpha_p = \sqrt{1 + \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 2\gamma}}, \quad \alpha_m = \sqrt{1 + \gamma - \sqrt{\gamma^2 + 2\gamma}},$$

представим корни следующим образом $\alpha_{1,2} = \pm\alpha_p$, $\alpha_{3,4} = \pm\alpha_m$.

В результате решение системы (12)–(13) принимает вид:

$$V = B_1 r^{\alpha_p} + B_2 r^{-\alpha_p} + B_3 r^{\alpha_m} + B_4 r^{-\alpha_m}, \quad (17)$$

$$H_\phi = A_1 r^{\alpha_p} + A_2 r^{-\alpha_p} + A_3 r^{\alpha_m} + A_4 r^{-\alpha_m}. \quad (18)$$

Очевидна связь между коэффициентами $A_j = k_j B_j$, которая с учетом обозначений

$$k_1 = \frac{a\alpha_p}{1 - \alpha_p^2}, \quad k_2 = \frac{a\alpha_p}{\alpha_p^2 - 1}, \quad k_3 = \frac{a\alpha_m}{1 - \alpha_m^2}, \quad k_4 = \frac{a\alpha_m}{\alpha_m^2 - 1}$$

и того, что $k_2 = -k_1 = -k_p$, $k_4 = -k_3 = -k_m$, позволяет переписать формулу (18) в виде

$$H_\phi = k_p B_1 r^{\alpha_p} - k_p B_2 r^{-\alpha_p} + k_m B_3 r^{\alpha_m} - k_m B_4 r^{-\alpha_m}. \quad (19)$$

Далее целесообразно представить граничные условия (7) и (11) следующим образом

$$V'(1) - V(1) = K_1 (1 - V(1)), \quad (20)$$

$$V'(1 + \delta) - V(1 + \delta) = K_2 (V_{T2} - V(1 + \delta)), \quad (21)$$

$$H_\phi(1) = h_1, \quad (22)$$

$$H_\phi(1 + \delta) = h_2, \quad (23)$$

где штрих означает производную по r . Приведем здесь необходимое для последующих вычислений выражение для производной скорости

$$V' = \alpha_p B_1 r^{\alpha_p - 1} - \alpha_p B_2 r^{-\alpha_p - 1} + \alpha_m B_3 r^{\alpha_m - 1} - \alpha_m B_4 r^{-\alpha_m - 1}. \quad (24)$$

Подставляя (17), (19) и (24) в граничные условия (20)–(23), получим следующую систему уравнений для определений коэффициентов B_j

$$b_{11}B_1 + b_{12}B_2 + b_{13}B_3 + b_{14}B_4 = K_1, \quad (25)$$

$$b_{21}B_1 + b_{22}B_2 + b_{23}B_3 + b_{24}B_4 = K_2 V_{T2}, \quad (26)$$

$$b_{31}B_1 + b_{32}B_2 + b_{33}B_3 + b_{34}B_4 = h_1, \quad (27)$$

$$b_{41}B_1 + b_{42}B_2 + b_{43}B_3 + b_{44}B_4 = h_2, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= \alpha_p - 1 + K_1, & b_{12} &= -(\alpha_p + 1 - K_1), & b_{13} &= \alpha_m - 1 + K_1, \\ b_{14} &= -(\alpha_m + 1 - K_1), & b_{21} &= \alpha_p(1 + \delta)^{\alpha_p - 1} - (1 + \delta)^{\alpha_p} + K_2(1 + \delta)^{\alpha_p}, \\ b_{22} &= -\alpha_p(1 + \delta)^{-\alpha_p - 1} - (1 + \delta)^{-\alpha_p} + K_2(1 + \delta)^{-\alpha_p}, \\ b_{23} &= \alpha_m(1 + \delta)^{\alpha_m - 1} - (1 + \delta)^{\alpha_m} + K_2(1 + \delta)^{\alpha_m}, \\ b_{24} &= -\alpha_m(1 + \delta)^{-\alpha_m - 1} - (1 + \delta)^{-\alpha_m} + K_2(1 + \delta)^{-\alpha_m}, \\ b_{31} &= k_p, & b_{32} &= -k_p, & b_{33} &= k_m, & b_{34} &= -k_m, & b_{41} &= k_p(1 + \delta)^{\alpha_p}, \\ b_{42} &= -k_p(1 + \delta)^{-\alpha_p}, & b_{43} &= k_m(1 + \delta)^{\alpha_m}, & b_{44} &= -k_m(1 + \delta)^{-\alpha_m}. \end{aligned}$$

Алгебраическая система (25)–(28) решалась численно с использованием правила Крамера, т. е. в системах MathCAD и Maple вычислялся основной определитель и четыре вспомогательных как функции от входных параметров δ , γ , V_{T2} , K_1 и т. д. Вычислительный эксперимент показал, что расчеты не являются трудоемкими, не требуют больших временных затрат. Пример расчета влияния интенсивности магнитного поля на профиль скорости течения приведен

на рис. 2. Принято, что подшипник неподвижен ($\omega_2 = 0$), а коэффициенты внешнего трения выбраны такими, что по сути выполняется условие прилипания.

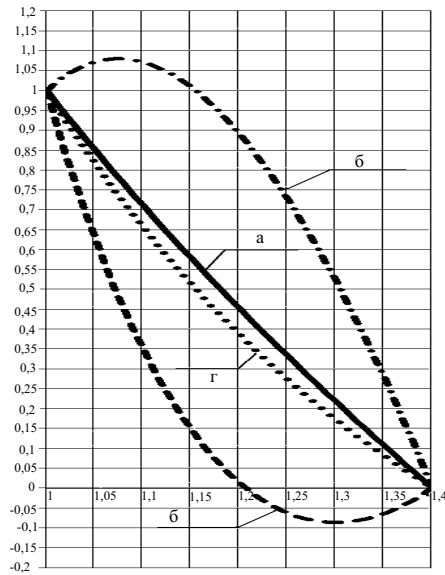


Рис. 2. Влияние интенсивности магнитного поля на профиль скорости течения. а) Сплошная линия — профиль скорости в отсутствии магнитного поля (решение классической задачи Н. П. Петрова), б) штрих-пунктирная — профиль скорости при $C_H < 0$ ($C_H = -0,005$, $Rm = 0,15$), в) пунктирная — профиль скорости при $C_H > 0$ ($C_H = 0,005$, $Rm = 0,15$), г) точечная — случай «больших» магнитных чисел $Rm = 5$, $C_H = 0,01$.

Видно, что в случае (б) происходит увеличение скорости течения, а в случае (в) — уменьшение, вплоть до возникновения возвратного течения. Заметим, что выбранные значения C_H в определенном смысле достаточно велики.

Литература

1. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика.—М.: ГИТТЛ, 1962.—248 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.—М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959.—532 с.
3. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика.—М.: ИЛ, 1959.—132 с.
4. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы.—М.: Мир, 1964.—301 с.

5. Фрик П. Г. Турбулентность: подходы и модели.—М.—Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.—292 с.
6. Половин Р. В., Демуцкий В. П. Основы магнитной гидродинамики.—М.: Энергоатомиздат, 1987.—208 с.
7. Альфвен Х. Космическая электродинамика.—М.: ИИЛ, 1952.—290 с.
8. Богородский А. Ф. Магнитная гидромеханика.—Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1966.—148 с.
9. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред.—М., 1991.—560 с.
10. Петров Н. П. Новая теория трения // Гидродинамическая теория смазки.—М.: ГТТИ, 1934.—С. 250–267.
11. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений.—М.—Л.: ГИТТЛ, 1951.—420 с.
12. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости.—М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1955.—520 с.
13. Галахов М. А., Гусятников П. Б., Новиков А. П. Математические модели контактной гидродинамики.—М.: Наука, 1985.—296 с.
14. Галахов М. А., Усов П. П. Математические модели теории трения, смазки и износа // Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах.—М.: Наука, 1986.—С. 130–142.
15. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика. Ч. II.—М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963.—728 с.
16. Ворovich И. И., Александров В. М. Механика контактных взаимодействий.—М.: Физматлит, 2001.—672 с.
17. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 4-е.—М.: Наука, 1973.—С. 467–484.
18. Петров Н. П. Гидродинамическая теория смазки.—М.: АН СССР, 1948.—550 с.
19. Тамм И. Е. Основы теории электричества: Учеб. пособие для вузов. Изд. 10-е.—М.: Наука, 1989.—504 с.
20. Саткевич А. А. Теоретические основы гидро-аэродинамики. Ч. II. Динамика жидких тел.—М.: Глав. авиационная редакция, 1934.—468 с.
21. Ладиков Ю. П., Ткаченко В. Ф. Гидродинамические неустойчивости в металлургических процессах.—М.: Наука, 1983.—248 с.
22. Москвитин В. В. Сопротивление вязко-упругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе).—М.: Наука, 1972.—328 с.

Задорожный Анатолий Иванович
Южный математический институт ВНЦ РАН;
Южный федеральный университет
Россия, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105
E-mail: simon@rsu.ru

Лагунова Елена Олеговна
Ростовский государственный университет путей сообщения
Россия, 344038, Ростов-на-Дону, пл. Народного ополчения, 2
E-mail: lagunova@rambler.ru

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ КЛАССОВ LMO ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. Б. Климентов

В работе строятся различные представления второго рода для классов LMO обобщенных аналитических функций. Цель настоящей работы — подготовка аппарата для изучения краевых задач в классах BMO .

Введение. Основные определения

В предлагаемой статье развиваются результаты автора [1] по представлениям второго рода обобщенных аналитических функций класса BMO . Важным следствием полученных представлений является возможность исследования краевой задачи Римана — Гильберта с коэффициентом из пространства мультипликаторов класса BMO .

Обозначим $D = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг комплексной z -плоскости E , $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга D ; $\overline{D} = D \cup \Gamma$; $A(z), B(z) \in L_s(\overline{D})$, $s > 2$ (используются обозначения книги [2]), — заданные комплексные функции.

Рассмотрим в $\overline{D}$ каноническую эллиптическую систему в комплексной записи

$$\partial_{\bar{z}} w + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0, \quad (1)$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, u и v — ее действительная и мнимая части, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$ — производная в смысле Соболева.

Решение $w(z)$ системы (1) называют *обобщенной аналитической функцией* [2, с. 148].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Следуя [3], множество ограниченных в $\overline{D}$ решений системы (1) будем обозначать $H_\infty(A, B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вещественная функция $\varphi \in L_1(\Gamma)$, $\varphi = \varphi(e^{is}) \equiv \varphi(s)$ называется функцией класса BMO_f (Bounded Mean Oscillation) [4, с. 227; 5], если

$$\sup_I \frac{1}{f(I)|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I| ds = \|\varphi\|_{*,f} < \infty,$$

где $I \subset \Gamma$ — произвольный интервал на Γ , $|I|$ — его длина,

$$\varphi_I = \frac{1}{|I|} \int_I \varphi ds,$$

f — неубывающая положительная функция, определенная на $[0, \varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < 2\pi$.

Для комплекснозначной функции $\varphi \in L_1(\Gamma)$ определение аналогично.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Следуя [4, с. 269], будем говорить, что функция $\Phi(z)$, аналитическая в D , принадлежит классу $BMOA_f$, если $\Phi(z)$ принадлежит классу Харди H_2 и ее некасательные предельные значения $\Phi(e^{is}) \equiv \Phi(s)$ на Γ принадлежат классу BMO_f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что решение $w(z)$ системы (1) принадлежит классу $BMO_f(A, B)$, если $w(z) \in H_2(A, B)$ и его некасательные предельные значения $w(t)$ на Γ принадлежат классу BMO_f .

При $A = B \equiv 0$ имеем голоморфный класс $BMOA_f$ из определения 3.

Если $f \equiv 1$, будем использовать обозначение $BMO_1 = BMO$; если $f = \ln^{-1} \frac{1}{r}$, будем использовать обозначения $BMO_f = LMO$, $\|\cdot\|_{*,f} = \|\cdot\|_l$. Очевидно, $LMO \subset BMO$.

Известно [5–7, с. 223], что $LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ есть мультипликатор пространства BMO , т. е. максимально широкое множество функций, умножение на которые есть непрерывный линейный оператор из BMO в BMO .

Теорема 1 ([8]). Множество $H_\infty(A, B)$ с нормой

$$\|w\|_{H_\infty} = \sup_{z \in D} |w(z)| \quad (2)$$

является действительным банаховым пространством. Здесь и всюду далее $w(e^{i\theta}) \equiv w(t)$, $t \in \Gamma$, — некасательные предельные значения $w(z)$ на Γ при $z \rightarrow t$.

Следуя [2, с. 42, 45], обозначим

$$T_D f(z) \equiv T f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad f(z) \in L_q(\overline{D}), \quad q \geq 1. \quad (3)$$

Пусть $\varkappa \geq 0$ — целое число. Следуя [2, с. 293], обозначим

$$T_{\varkappa}f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z^{2\varkappa+1} \overline{f(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}z} \right) d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (4)$$

Отметим, что $\operatorname{Re}\{t^{-\varkappa} T_{\varkappa}f(t)\} = 0$ при $t \in \Gamma$.

Также будем рассматривать следующие операторы:

$$T_n f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z} - P(z, \zeta, z_1, \dots, z_n) \right] d\xi d\eta, \quad (5)$$

где

$$P(z, \zeta, z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=1}^n \frac{(z - z_1) \cdots (z - z_{k-1})(z - z_{k+1}) \cdots (z - z_n)}{(z_k - z_1) \cdots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \cdots (z_k - z_n)} \cdot \frac{1}{\zeta - z_k},$$

$\zeta = \xi + i\eta$, $z_1, \dots, z_n \in \overline{D}$ и попарно различны.

$$\begin{aligned} T_{\varkappa, n} f(z) &= -\frac{1}{\pi} \iint_D \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z^{2\varkappa+1} \overline{f(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}z} \right] d\xi d\eta - \\ &- \frac{1}{\pi} \iint_D \sum_{k=1}^{2\varkappa+1} P'_k(z, z_1, \dots, z_{2\varkappa+1}) \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta} - \bar{z}_k} d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{\pi} \iint_D \sum_{k=1}^{2\varkappa+1} P''_k(z, z_1, \dots, z_{2\varkappa+1}) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_k} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} P'_k(z, z_1, \dots, z_{2\varkappa+1}) &= \\ &= \frac{(1 - z\bar{z}_1) \cdots (1 - z\bar{z}_{k-1})(1 - z\bar{z}_{k+1}) \cdots (1 - z\bar{z}_{2\varkappa+1})}{(\bar{z}_k - \bar{z}_1) \cdots (\bar{z}_k - \bar{z}_{k-1})(\bar{z}_k - \bar{z}_{k+1}) \cdots (\bar{z}_k - \bar{z}_{2\varkappa+1})}, \\ P''_k(z, z_1, \dots, z_{2\varkappa+1}) &= \\ &= \frac{(z - z_1) \cdots (z - z_{k-1})(z - z_{k+1}) \cdots (z - z_{2\varkappa+1})}{(z_k - z_1) \cdots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \cdots (z_k - z_{2\varkappa+1})}, \end{aligned}$$

$\zeta = \xi + i\eta$, $z_k, k = \overline{1, 2\varkappa+1}$, — произвольные попарно различные точки контура Γ , $\varkappa \geq 0$ — целое число.

Отметим, что $T_n f(z_k) = 0$, $k = \overline{1, n}$; $\operatorname{Re}\{z^{-\varkappa} T_{\varkappa, n} f(z)\} = 0$ при $z \in \Gamma$; $T_{\varkappa, n} f(z_k) = 0$, $k = \overline{1, 2\varkappa+1}$.

Формулировка основных результатов

Теорема 2. Множество $LMO(A, B)$ с нормой

$$\|w\|_{LMO} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |w(t)| |dt| + \|w\|_l \quad (7)$$

является действительным банаховым пространством.

Теорема 3. Если $w(z) \in LMO(A, B)$, то имеет место соотношение

$$w(z) + T(Aw + B\bar{w})(z) = \Phi(z), \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t-z} dt, \quad (8)$$

и функция $\Phi(z) \in LMOA$.

Если $\Phi(z)$ — произвольная голоморфная функция класса $LMOA$, то соотношением (8) однозначно определяется решение $w(z)$ системы (1) класса $LMO(A, B)$ и формула (8) устанавливает (вещественный) линейный изоморфизм банаховых пространств $LMO(A, B)$ и $LMOA$.

Следствие 1. Если $w(z) \in LMO(A, B)$, то

$$\|T(Aw + B\bar{w})(t)\|_{LMO} \leq \text{const} \|w\|_{LMO}, \quad t \in \Gamma, \quad (9)$$

где $T(Aw + B\bar{w})(t)$ — предельные значения при $z \rightarrow t \in \Gamma$ по некасательным путям выражения $T(Aw + B\bar{w})(z)$, а константа не зависит от w . (О существовании таких предельных значений см. [8]).

Теорема 4. Если $w(z) \in LMO(A, B)$, то имеет место соотношение

$$w(z) + T_n(Aw + B\bar{w})(z) = \Phi(z), \quad (10)$$

и функция $\Phi(z) \in LMOA$.

Если $\Phi(z)$ — произвольная голоморфная функция класса $LMOA$, то соотношением (10) однозначно определяется решение $w(z)$ системы (1) класса $LMO(A, B)$ и формула (10) устанавливает (вещественный) линейный изоморфизм банаховых пространств $LMO(A, B)$ и $LMOA$.

Теорема 5. Если $w(z) \in LMO(A, B)$, то имеет место соотношение

$$w(z) + T_{\kappa, n}(Aw + B\bar{w}) = \Phi(z), \quad (11)$$

где $\Phi(z) \in LMOA$ и почти всюду на Γ

$$\operatorname{Re} \{t^{-\kappa} w(t)\} = \operatorname{Re} \{t^{-\kappa} \Phi(t)\}, \quad t \in \Gamma. \quad (12)$$

Если $\Phi(z) \in LMOA$, то соотношением (11) однозначно определяется функция $w(z) \in LMO(A, B)$, удовлетворяющая на Γ условию (12) и формула (11) устанавливает (вещественный) линейный изоморфизм банаховых пространств $LMO(A, B)$ и $LMOA$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [8] доказано, что теоремы 3–5 справедливы, если $LMO(A, B)$ и $LMOA$ заменить на $H_\infty(A, B)$ и H_∞ .

В связи с этим в утверждениях теорем 3–5 пространства $LMO(A, B)$ и $LMOA$ можно заменить на $LMO(A, B) \cap H_\infty(A, B)$ и $LMOA \cap H_\infty$.

Вспомогательные сведения

Лемма 1. Если $w(z) \in BMO(A, B)$ — решение уравнения (1), то имеет место представление (обобщенная формула Коши)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) w(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{w(\zeta)} d\bar{\zeta} = \begin{cases} w(z), & z \in D, \\ \frac{1}{2}w(z), & z \in \Gamma, \\ 0, & z \notin \overline{D}, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\Omega_1(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta - z} + O\left(|\zeta - z|^{-\frac{2}{s}}\right), \quad \Omega_2(z, \zeta) = O\left(|\zeta - z|^{-\frac{2}{s}}\right), \quad (14)$$

обобщенные ядра Коши уравнения (1) [2, с. 179], $\Omega_1(z, \zeta), \Omega_2(z, \zeta) \in C_\alpha$, $\alpha = \frac{s}{(s-2)}$, по каждой переменной z, ζ при $z \neq \zeta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $A = B \equiv 0$ $\Omega_1(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$, $\Omega_2(z, \zeta) \equiv 0$ и формула (13) превращается в формулу Коши для голоморфных функций.

Лемма 2 [8]. Если $w(z) \in BMO(A, B)$ — решение уравнения (1),

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t - z} dt, \quad (15)$$

то

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) \Phi(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{\Phi(\zeta)} d\bar{\zeta} \equiv \mathcal{K} \Phi(z). \quad (16)$$

Обратно, если $\Phi(z)$ — голоморфная в D функция класса $BMOA$, то (16) — решение уравнения (1) класса $BMO(A, B)$ и имеет место представление (15).

Лемма 3. Оператор $\mathcal{K}$ есть непрерывный оператор из LMO в $LMO(A, B)$.

◁ Переходя в (17) к пределу при $z \rightarrow t \in \Gamma$ по некасательным путям, получим [8]

$$w(t) = \pm \varphi(t) + \mathcal{K} \varphi(t).$$

Так как сингулярный интегральный оператор с ядром Коши и интегральный оператор с ядром со слабой особенностью ограничены в LMO [9, 10], отсюда и из (14) получаем утверждение леммы. ▷

Доказательства основных результатов

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. То, что (7) является нормой на $LMO(A, B)$ — очевидно.

Множество LMO с нормой

$$\|\varphi\|_{LMO} = \frac{1}{2\pi} \|\varphi\|_{L_1(\Gamma)} + \|\varphi\|_l$$

является банаховым пространством [5].

Пусть $\{w_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность в норме (7) решений уравнения (1). Эта последовательность сходится равномерно внутри D к решению $w(z)$ уравнения (1) [8]:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{\varphi(\zeta)} d\bar{\zeta} \equiv \mathcal{K} \varphi(z), \quad (17)$$

где $\varphi(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$; предел понимается в норме LMO ; Ω_1 и Ω_2 — ядра уравнения (1) [2, с. 179].

Так как $\varphi(\zeta) \in LMO \subset L_2(\Gamma)$, функция $w(z) = \mathcal{K}\varphi(z) \in H_2(A, B)$ и в соответствии с рассуждениями доказательства теоремы 1 из [8] $\varphi(\zeta)$ — некасательные предельные значения функции $w(z)$ на Γ .

Итак, $\|w(z) - w_n(z)\|_{LMO} \rightarrow 0$. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Утверждение теоремы в случае BMO доказано в [8].

Если $w(z) \in LMO(A, B)$, из ограниченности интеграла типа Коши в LMO (см. лемму 3) имеем $\Phi(z) \in LMOA$ и

$$\|\Phi\|_{LMO} \leq \text{const} \|w\|_{LMO}, \quad (18)$$

где константа от w не зависит.

Если $\Phi(z)$ — произвольная функция из $LMOA$, из (16) и леммы 3 получим, что соотношением (8) однозначно определяется функция $w(z) \in LMO(A, B)$ и имеет место оценка

$$\|w\|_{LMO} \leq \text{const} \|\Phi\|_{LMO}, \quad (19)$$

где константа от Φ не зависит.

Изоморфизм вытекает из (18) и (19). $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Для BMO теорема установлена в [8]. Если $w(z) \in LMO(A, B)$, то, сопоставляя (9) и (5), получим $\Phi(z) \in LMOA$ и

$$\|\Phi\|_{LMO} \leq \text{const} \|w\|_{LMO}, \quad (20)$$

где константа от w не зависит.

Пусть $\Phi(z) \in LMOA$. Поскольку $w(z) \in BMO(A, B) \subset L_q(\overline{D})$ для любого $q > 1$ [8], $T_n(Aw + B\bar{w})(z) \in C_\alpha(\overline{D})$, $0 < \alpha < 1$ [2, с. 58]. Отсюда и из (10) получаем $w(z) \in LMO(A, B)$.

Утверждение об изоморфизме есть следствие (20) и теоремы Банаха. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Доказательство проведем для оператора $T_{\mathcal{K}}f$. В случае $T_{\mathcal{K},n}f$ рассуждения почти дословно повторяются.

В случае BMO теорема доказана в [8]. Если $w(z) \in LMO(A, B)$, то, в силу (12), $\text{Re}\{t^{-\mathcal{K}}\Phi(t)\} \in LMO$, откуда $\Phi(z) \in LMOA$ [11].

Для доказательства изоморфизма так же, как в доказательстве теоремы 4, из (11) получим $\|\Phi\|_{BMO} \leq \text{const} \|w\|_{BMO}$ и воспользуемся теоремой Банаха. $\triangleright$

Литература

1. Климентов С. Б. Представления второго рода для классов Харди и *BMO* обобщенных аналитических функций // Исследования по современному анализу и математическому моделированию.—Владикавказ: ИПМИ ВНЦ РАН, 2008.—С. 38–54.
2. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—628 с.
3. Климентов С. Б. Классы Харди обобщенных аналитических функций // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки.—2003.—№ 3.—С. 6–10.
4. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции.—М.: Мир, 1984.—470 с.
5. Janson S. On functions with conditions on the mean oscillation // Ark. Math.—1976.—Vol. 4, № 2.—Р. 189–196.
6. Stegenga D. A. Bounded Toeplitz operators on H^1 and applications of the duality between H^1 and the functions of bounded mean oscillation // American J. of Math.—1976.—Vol. 98, № 3.—Р. 573–589.
7. Мазья В. Г., Шапошникова Т. О. Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций.—Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1986.—404 с.
8. Климентов С. Б. Классы *BMO* обобщенных аналитических функций // Владикавказ. мат. журн.—2006.—Т. 8, вып. 1.—С. 27–39.
9. Peetre J. On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant // Ann. Mat. Pura Appl.—1966.—Vol. 72, № 4.—Р. 295–304.
10. Bramanti M., Brandolini L. Estimates of *BMO* type for singular integrals on spaces of homogeneous type and applications to hypoelliptic pdes // Rev. Mat. Iberoamericana.—2005.—Vol. 21, № 2.—Р. 511–556.
11. Климентов С. Б. Краевые задачи Римана и Гильберта в классе *BMO* для аналитических функций // Владикавказ. мат. журн.—В печати.

КЛИМЕНТОВ СЕРГЕЙ БОРИСОВИЧ
Южный математический институт ВНЦ РАН;
Южный федеральный университет
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
E-mail: sklimentov@pochta.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ
МЕЖФАЗНЫХ ГРАНИЦ
ПРИ ТЕРМОМИГРАЦИИ ПЛОСКИХ ЗОН
С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ
НА ОСНОВЕ МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАННЫХ
ИСТОЧНИКОВ ПОЛЯ

**С. Ю. Князев, В. С. Лозовский,
А. В. Цапколенко**

Построена численная модель процесса термомиграции дискретных зон с применением метода интегрированных источников поля. Температурные и концентрационные поля в объеме композиции кристалл-зона смоделированы с помощью линейных, равномерно и линейно заряженных источников поля. Произведено сравнение результатов, полученных с помощью методов интегрированных источников поля и граничных элементов.

Явление термомиграции жидкофазных включений в твердых телах [1] представляет интерес как основа различных методов локальной модификации свойств кристаллов, создания новых функциональных и конструкционных материалов. Наибольшее применение процесс термомиграции нашел в твердотельной электронике. Здесь он больше известен в качестве метода зонной перекристаллизации градиентом температуры (ЗПГТ) [2], используемого в технологии полупроводниковых материалов и структур. Технологические возможности метода ЗПГТ базируются на достаточно хорошо теоретически и экспериментально изученных кинетических и термодинамических закономерностях процесса термомиграции [2]. Однако успешное проведение технологических процессов ограничивается проблемой стабильности термомиграции. Под стабильностью понимается такое поведение межфазной границы (растворения или кристаллизации), при котором возмущение, возникшее на ней, будет уменьшаться по мере ее движения, возвращаясь к первоначальной геометрии зоны. Технологически важным случаем является движение включений плоской формы (плоских зон). В нашей работе будет построена

численная модель движения плоской зоны в кристалле под действием градиента температуры и с помощью этой модели исследована ее стабильность.

Для изучения термомиграции широко используются методы математического моделирования [3, 4], которые позволяют значительно снизить объем натурных экспериментов, одновременно резко повысив их эффективность. В работе [3] описана конечно-разностная модель термомиграции линейной зоны в кристалле, в которой численно решаются уравнение теплопроводности для определения температуры на границах включения и уравнение диффузии, описывающее массоперенос в жидкой фазе линейной зоны. Основные недостатки этой модели — большое время вычислений (для трехмерных моделей время счета может составлять тысячи часов) и недостаточно высокая их точность (в связи с грубым представлением границы зоны в численном методе и большой размерностью системы уравнений). В первую очередь эти проблемы возникают при учете условий (в общем случае нелинейных) на непрерывно изменяющейся межфазной границе зоны. Тем самым обусловлена необходимость поиска (или разработки) более эффективного численного метода решения такого рода задач. Одним из таких методов является метод точечных источников поля (МТИ) [4, 5]. При использовании МТИ искомое температурное поле в объеме кристалла и поле концентраций в объеме зоны представляются в виде суперпозиции полей точечных источников, расположенных за пределами области решения задачи. Применение этого метода позволило построить эффективные двумерные и трехмерные модели термомиграции и исследовать с их помощью кинетику дискретных и точечных зон [4, 6]. Эффективность компьютерного моделирования, при использовании МТИ, можно значительно повысить, представляя искомое поле в виде суперпозиции полей протяженных интегрированных источников, т. е. заменяя МТИ методом интегрированных источников поля (МИИ) [6, 7].

Опишем компьютерную модель термомиграции, основанную на МИИ, ограничившись для простоты моделированием концентрационного поля в объеме плоской зоны и считая при этом температурное поле $T(r)$ известным. Пусть плоская зона толщиной l движется в поле градиента температуры G . Совместим начало координат с центром зоны, ориентируя ось y перпендикулярно к поверхности зоны по направлению градиента температуры, а ось x — вдоль поверхности зоны (рис. 1).

Выделим часть зоны длиной H и расположим на межфазной границе выделенной части зоны N узловых точек, точек коллокации, равноотстоящих друг от друга вдоль оси x с шагом dx . В центральной части участка H несколько узлов (возможно один) моделируют начальное возмущение плоской межфазной границы с некоторой начальной амплитудой и длиной возмущения (рис. 1). Межфазные границы оставшейся части бесконечно протяженной плоской зоны (за исключением участка H) обозначим L . Ввиду удаленности участка L от возмущенной части межфазной границы его форма продолжает оставаться плоской невозмущенной и двигаться в направлении градиента температуры со скоростью v_l , определяемой формулой Тиллера [2].

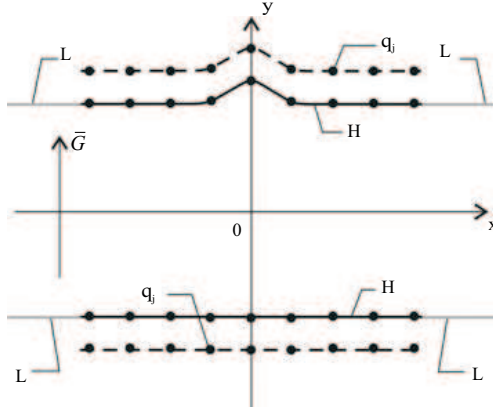


Рис. 1. Часть границы зоны, с расположенными на ней узловыми точками и линейными зарядами, моделирующими концентрационное поле.

Концентрационное поле в плоской невозмущенной зоне (невозмущенное поле) может быть определено на основе теории термомиграции Тиллера [2] по формуле

$$U_0(r) = u_0 + G_c y, \quad (1)$$

где градиент концентрации G_c в зоне и u_0 :

$$G_c = \left(G - \frac{2(\mu_p + \mu_k) v_l}{\mu_p \mu_k l} \right) \frac{dC}{dT},$$

$$u_0 = \left(G \frac{dC}{dT} - G_c \right) \left(\frac{\mu_p}{\mu_k} - 1 \right) \frac{l}{2};$$

$\mu_{p,k}$ — кинетические коэффициенты растворения и кристаллизации; $\frac{dT}{dC}$ — наклон линии ликвидуса для системы кристалл–вещество включения. Появление возмущения на межфазной границе приводит к искажению концентрационного поля (1). Опишем поле в зоне с возмущенными границами выражением

$$U(r) = U_0(r) + u(r), \quad (2)$$

где $u(r)$ определяет искажение концентрационного поля при появлении на границе возмущения. Назовем его полем возмущения. Поле $u(r)$ удовлетворяет уравнению Лапласа с граничным условием

$$\left. \frac{D}{1 - C_0} \frac{\partial u}{\partial n} \right|_H = v = \mu_{p,k} \left(t(\mathbf{r}) - \frac{dT}{dC} U(\mathbf{r}) \right) \Big|_H, \quad (3)$$

где $t(\mathbf{r})$ — известное температурное поле в объеме зоны, C_0 — средняя концентрация в объеме зоны, D — коэффициент диффузии атомов кристалла в объеме зоны. Значение μ_p выбирается, если на границе происходит растворение, а μ_k — кристаллизация. Выражение в скобках в правой части (3) равно значению перегрева (переохлаждения) расплава у межфазной границы, которое определяет величину скорости растворения (кристаллизации) v межфазной границы.

Будем рассматривать искажение концентрационного поля как совокупный результат действия небольших отрезков (участков) вспомогательного контура, на которых помещаются некоторые «заряды», являющиеся источником концентрационного поля. Расположим эти источники концентрационного поля в кристалле по обе стороны от границы зоны вблизи от возмущенного участка межфазной границы (но вне объема зоны). Каждый источник ограничен точками с координатами $\mathbf{R}_j$ (рис. 1). Число источников должно соответствовать числу узлов N на участке H границы зоны в точках $\mathbf{r}_i$. Поле возмущения внутри зоны, обусловленное такими зарядами, может быть описано на основе принципа суперпозиции:

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N u_j(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где $u_j(\mathbf{r})$ — потенциал поля в точке r , созданного источником с номером j , который ограничен точками с координатами $\mathbf{R}_{j-1}$ и $\mathbf{R}_j$.

Функции $u_j(\mathbf{r})$ представляют собой решение уравнения Лапласа и находятся по формуле:

$$u_j(\mathbf{r}) = \int_{\Delta l_j} \sigma(\mathbf{R}) \ln \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} dl_{\mathbf{R}}, \quad (5)$$

где интегрирование производится по длине источника Δl_j , а $\sigma(\mathbf{R})$ представляет собой линейную плотность заряда концентрационного поля в точке $\mathbf{R}$ источника. Обычно при численном решении краевой задачи линейную плотность заряда полагают либо постоянной в пределах каждого источника и равной σ_j , либо меняющейся вдоль источника по линейному закону $\sigma = \sigma_{j-1} + l(\sigma_j - \sigma_{j-1})/\Delta l_j$. Тогда после подстановки всех $u_j(\mathbf{r})$ в (4) получим

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \sigma_j \varphi_j(\mathbf{r}), \quad (6)$$

где функции $\varphi_j(\mathbf{r})$ представляют собой решения уравнения Лапласа. Функции $\varphi_j(\mathbf{r})$ находим в процессе интегрирования (5). Если линейная плотность заряда в пределах каждого источника полагается постоянной, то

$$\begin{aligned} \varphi_j(x, y) = & - \left[\frac{\sqrt{A}}{2} \ln(r) + \frac{B}{2\sqrt{A}} \ln \left(\frac{A + 2B + C}{C} \right) \right] - \\ & - \sqrt{\frac{AC - B^2}{A}} \left(\arctan \left(\frac{A + B}{\sqrt{AC - B^2}} \right) - \arctan \left(\frac{B}{\sqrt{AC - B^2}} \right) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= (x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2, \\ B &= (x_j - x_{j-1})(x_{j-1} - x) + (y_j - y_{j-1})(y_{j-1} - y), \\ C &= (x_j - x)^2 + (y_j - y)^2, \\ r &= \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2}. \end{aligned}$$

Аналогично находим функции $\varphi_j(\mathbf{r})$, если плотность заряда меняется вдоль источника по линейному закону. В этом случае выражения для $\varphi_j(\mathbf{r})$ получаются значительно более громоздкими.

Поступая подобным образом, можно получить выражение для нормальной производной потенциала в виде соотношения

$$\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} = \sum_{j=1}^N \sigma_j \psi_j(\mathbf{r}). \quad (7)$$

Функции $\psi_j(\mathbf{r})$, которые также являются решениями уравнения Лапласа, находим аналитически. Выражения для $\psi_j(\mathbf{r})$, ввиду их громоздкости, мы не приводим.

Подставляем (6), (7) в граничное условие (3) и требуем выполнения этого условия в N узловых точках. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных плотностей заряда σ_j :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left(\frac{D}{1-C_0} \psi_j(\mathbf{r}_i) + \mu_{p,k} \varphi_j(\mathbf{r}_i) \right) \sigma_j = \\ & = t(\mathbf{r}_i) \frac{dC}{dT} - \frac{D}{1-C_0} \frac{\partial U_0(\mathbf{r}_i)}{\partial n} - \mu_{p,k} U_0(\mathbf{r}_i), \quad i = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (8)$$

Решая систему (8), определяем плотности зарядов σ_j . Далее, используя (1), (2) и (4), находим концентрации, а с помощью формулы

$$v(\mathbf{r}_i) = \mu_{p,k} \left(t(\mathbf{r}_i) - \frac{dT}{dC} U(\mathbf{r}_i) \right)$$

— нормальные составляющие скорости миграции в узловых точках. Затем смещаем узлы в новое положение и находим форму возмущенной границы на новом временном уровне. Это позволяет шаг за шагом следить за эволюцией формы межфазной границы зоны.

Результаты численных экспериментов позволили выявить следующие особенности эволюции возмущения на растворяющейся границе:

- 1) на начальном этапе миграции амплитуда возмущения, локализованного в небольшой области пространства, уменьшается при одновременном увеличении его пространственной протяженности (длины) возмущения;
- 2) на начальном этапе миграции объем, занимаемый возмущением, медленно возрастает;

3) по достижении длины возмущения некоторого значения, зависящего от параметров процесса, амплитуда начинает возрастать, причем темп ее роста со временем увеличивается;

4) чем больше отношения коэффициентов теплопроводности кинетических коэффициентов в жидкой и твердой фазах тем сильнее проявляется неустойчивость процесса.

Таким образом, результаты численных экспериментов вполне соответствуют выводам теории стабильности термомиграции Зайденстикера [2], а также результатам теоретического исследования стабильности, выполненного в работе [8], авторами которой был сделан вывод о взаимосвязи формы межфазных границ растворения и кристаллизации.

Также было произведено сравнение результатов, полученных с помощью описанной здесь модели с результатами компьютерных моделей термомиграции, построенных на основе метода граничных элементов и метода точечных источников. Сравнение результатов численных экспериментов показало, что различие рассчитанных различными моделями величин скорости роста возмущения не превышает 5% при числе узлов $N = 100$. При $N = 200$ это различие становится менее 1%.

Литература

1. Гегузин Я. Е., Кривоглаз М. А. Движение макроскопических включений в твердых телах.—М.: Металлургия, 1971.—344 с.
2. Лозовский В. Н., Лукин Л. С., Попов В. П. Зонная перекристаллизация градиентом температуры полупроводниковых материалов.—М.: Металлургия, 1987.—232 с.
3. Князев С. Ю., Лозовский В. Н., Малибашев А. В. Компьютерное моделирование кинетики движения жидкой зоны при термомиграции // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Тех. науки.—2002.—С. 49–52.
4. Князев С. Ю. Моделирование термомиграции с помощью метода граничных элементов и точечных источников поля // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Тех. науки.—2006.—№ 5.—С. 11–15.
5. Алексидзе М. А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач.—М.: Наука, 1991.—352 с.
6. Князев С. Ю., Щербакова Е. Е. Численное исследование стабильности термомиграции плоских зон // Изв. вузов. Электромеханика.—2007.—№ 1.— С. 14–17.
7. Бахвалов Ю. А., Князев С. Ю. Расчет двумерных потенциальных полей методом интегрированных фундаментальных решений // Вестник Воронежского гос. ун-та.—2007.— Т. 3, № 8.—С. 39–41.
8. Lozovskii V. N., Ovcharenko A. N., Popov V. P. Liquid-solid interface stability // Prog. Crystal Growth Charact.—1986.—Vol. 13.—P. 145–162.

Князев Сергей Юрьевич

Южно-Российский государственный технический университет;

Новочеркасский политехнический институт

Россия, 346428, г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132

E-mail: ksy@donpac.ru, lozovsky@gmail.com

Лозовский Владимир Сергеевич

Южно-Российский государственный технический университет;

Новочеркасский политехнический институт

Россия, 346428, г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132

E-mail: lozovsky@gmail.com

Цапколенко Александр Викторович

Южно-Российский государственный технический университет;

Новочеркасский политехнический институт

Россия, 346428, г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА
ТЕПЛООБМЕНА В СИСТЕМЕ
«СТОПА–ОБУВЬ–ОКРУЖАЮЩАЯ СРЕДА»

А. Б. Михайлов, И. Д. Михайлова

Построена математическая модель процесса теплообмена в системе «стопа–обувь–окружающая среда». Проведены экспериментальные исследования в климатической камере при воздействии на стопу низких температур, подтверждающих эффективность построенной модели.

При конструировании зимней обуви в первую очередь необходимо обеспечить комфортное температурное состояние стопы. Поэтому возникает задача расчета температурного поля обуви и поверхности стопы при воздействии на них низких температур. Модель обуви представляется как геометрический объект, составленный из плоских, цилиндрических и сферических многослойных пакетов различных материалов.

Большинство применяемых материалов в первом приближении можно считать изотропными, а зависимость их коэффициентов теплопроводности λ от температуры можно аппроксимировать линейной функцией

$$\lambda = \lambda_0(1 + \beta\Delta T) \quad (\Delta T = T - T_0),$$

где λ_0 — коэффициент теплопроводности при температуре $T = T_0$, β — коэффициент пропорциональности, определяемый из эксперимента.

В настоящей работе изучается нестационарный процесс теплообмена в системе «стопа–обувь–окружающая среда» с учетом линейной зависимости коэффициентов теплопроводности обуви от температуры. Рассмотрим многослойный плоский пакет низа обуви. Пусть $\hat{T}_i(x_i, t)$ — температура i -го слоя пакета, $\hat{T}_c$ — температура окружающей среды, $T_i(x_i, t) = \hat{T}_i(x_i, t) - \hat{T}_c$ — относительная температура i -го слоя пакета, $i = 1, \dots, n$. Система уравнений теплопроводности

для плоского пакета материалов, которая описывает процесс теплообмена, имеет следующий вид

$$c_i(T_i)\rho_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial x_i} \right), \quad (1)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad l_{i-1} < x_i < l_i,$$

где c_i — удельная теплоемкость материала, ρ_i — плотность материала, λ_i — коэффициент теплопроводности, l_{i-1} , l_i — границы i -го слоя.

Граничные условия:

— внутренняя поверхность пакета материалов нагревается тепловым потоком стопы плотности q :

$$\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(0, t) + q(t) = 0; \quad (2)$$

— на внешней поверхности обуви происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона

$$\lambda_n(T_n)\frac{\partial T_n}{\partial x_n}(l_n, t) + \alpha T_n(l_n, t) = 0; \quad (3)$$

— между слоями низа обуви предполагается идеальный контакт, который выражается условиями сопряжения на стыках

$$T_{i-1}(l_{i-1}, t) = T_i(l_{i-1}, t), \quad i = 2, \dots, n, \quad (4)$$

$$\lambda_{i-1}(T_{i-1})\frac{\partial T_{i-1}}{\partial x_{i-1}}(l_{i-1}, t) = \lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial x_i}(l_{i-1}, t), \quad i = 2, \dots, n. \quad (5)$$

Начальные условия

$$T_i(x_i, 0) = f_i(x_i). \quad (6)$$

Будем предполагать, что $\lambda_i(T_i)$ линейно зависит от температуры

$$\lambda_i = \lambda_{0i}(1 + \beta_i T_i), \quad (7)$$

где λ_{0i} — коэффициент теплопроводности i -го слоя при температуре окружающей среды. Система (1) при непостоянном λ_i нелинейная, для ее упрощения можно применить преобразование Кирхгофа

$$\theta_i = \frac{1}{\lambda_{0i}} \int_0^{T_i} \lambda_i(T_i) dT_i = T_i + \frac{\beta_i}{2} T_i^2.$$

После замены система примет вид

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = a_i(\theta_i) \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_i^2}. \quad (8)$$

Отметим, что для многих металлов и теплозащитных материалов температуропроводность a_i не зависит от температуры, а поэтому будем считать ее для каждого слоя постоянной.

Краевые условия после преобразования Кирхгофа будут иметь вид

$$\lambda_{01} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}(0, t) + q(t) = 0, \quad (9)$$

$$\lambda_{0n} \frac{\partial \theta_n}{\partial x_n}(l_n, t) + \alpha \frac{\sqrt{1 + 2\beta_n \theta_n(l_n, t)} - 1}{\beta_n} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\sqrt{1 + 2\beta_{i-1} \theta_{i-1}(l_{i-1}, t)} - 1}{\beta_{i-1}} = \frac{\sqrt{1 + 2\beta_i \theta_i(l_{i-1}, t)} - 1}{\beta_i}, \quad (11)$$

$$\lambda_{0i-1} \frac{\partial \theta_{i-1}}{\partial x_{i-1}}(l_{i-1}, t) = \lambda_{0i} \frac{\partial \theta_i}{\partial x_i}(l_{i-1}, t). \quad (12)$$

В силу того, что $\beta_n \theta_n(l_n, t)$ близко к 0, то в (10) можно считать $\frac{\sqrt{1 + 2\beta_n \theta_n(l_n, t)} - 1}{\beta_n} \approx \theta_n(l_n, t)$ и равенство (10) примет линейный вид

$$\lambda_{0n} \frac{\partial \theta_n}{\partial x_n}(l_n, t) + \alpha \theta_n(l_n, t) = 0. \quad (13)$$

Через $\mathcal{R}(T)$ обозначим суммарное тепловое сопротивление пакета при температуре T

$$\mathcal{R}(T) = \sum_{i=1}^n \frac{l_i - l_{i-1}}{\lambda_i(T)}.$$

Тогда эквивалентный коэффициент теплопроводности всего пакета

$$\lambda(T) = \frac{l_n}{\mathcal{R}(T)}.$$

Используя формулу Тейлора, получим $\lambda(T) = \lambda_0 + \beta_0 T + O(T^2) \approx \lambda_0(1 + \beta T)$, где λ_0 — эквивалентный коэффициент теплопроводности при температуре окружающей среды, β — среднее значение коэффициентов β_i . В дальнейшем в формулах (7) будем считать $\beta_i = \beta$, что дает возможность заменить (11) на линейные условия

$$\theta_{i-1}(l_{i-1}, t) = \theta_i(l_{i-1}, t). \quad (14)$$

Таким образом, после принятых предположений получена система (8) с краевыми условиями (9), (12)–(14) и начальными условиями

$$\theta_i(x_i, 0) = f_i(x_i) + \frac{\beta f_i^2(x_i)}{2}. \quad (15)$$

Решение этой краевой задачи находится методом Фурье в виде ряда

$$\theta_i(x_i, t) = A_i(t)x_i + B_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t)M_{ik} \sin\left(\frac{\mu_k x_i}{\sqrt{a_i}} + \varphi_{ik}\right), \quad (16)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Здесь

$$A_n(t) = \frac{-q(t)}{\lambda_{0n}}, \quad B_n(t) = q(t) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{l_n}{\lambda_{0n}} \right), \quad A_i(t) = \frac{-q(t)}{\lambda_{0i}},$$

$$B_i(t) = q(t) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{l_n}{\lambda_{0n}} + \sum_{k=i}^{n-1} l_k \left(\frac{1}{\lambda_{0k}} - \frac{1}{\lambda_{0,k+1}} \right) \right), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Если $q(t) \in C([0; \infty)) \cap C^1((0; \infty))$ и $f_i(x_i) \in L_2([l_{i-1}; l_i])$, то формула (16) дает решение задачи (8), (9), (12)–(15) в виде ряда, сходящегося в $L_2([l_{i-1}; l_i])$ равномерно по $t \in [0; M]$; $M > 0$ [1]. Система собственных функций соответствующей однородной задачи $\{M_{ik} \sin(\frac{\mu_k x_i}{\sqrt{a_i}} + \varphi_{ik})\}_{i=1, \dots, n, k \in \mathbb{N}}$, является полной ортогональной системой в $L_2([0; l_n])$ [2], собственные числа μ_k находятся также как в работе [3] из системы уравнений. Тогда

$$T_i(x_i, t) = \frac{\sqrt{1 + 2\beta\theta_i} - 1}{\beta}$$

дает приближенное решение задачи (1)–(6).

Для апробации модели был проведен ряд экспериментов. В климатической камере исследовались три модели зимней обуви при температуре -5° , -10° , -15°C . Каждые пять минут снимались показания температуры кожи и плотность теплового потока различных участков стопы. С другой стороны, были проведены расчеты изменения во времени температуры кожи стопы с помощью построенной

модели. Среднее отклонение теоретической кривой от экспериментальных данных температуры не превысило 7%, что допустимо для применения модели на практике.

Для иллюстрации приведем пример расчета изменения температуры носочной части стопы от времени при воздействии на обувь низких температур. Исследовалась модель обуви, верх которой составлен из следующего пакета материалов: 1. кожа (бычок хромового дубления, 2,3 мм); 2. тик-саржа (0,5 мм); 3. мех натуральный (8,5 мм); 4. внутренняя обувь — носки шерстяные (3,5 мм).

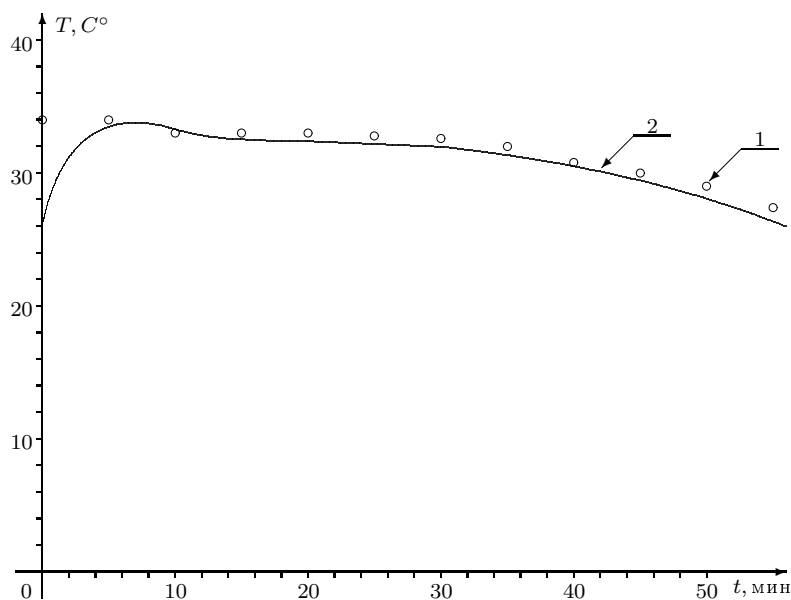


Рис. 1. Зависимость температуры кожи стопы в области большого пальца от времени воздействия температуры -10°C . 1 — данные температуры, полученные экспериментальным путем; 2 — расчетная температура кожи при плотности теплового потока $q(t) = -0,059t^2 + 3,33t + 114$ Вт/м².

Для данной обуви проводились испытания в климатической камере при температуре воздуха -10°C . По экспериментальным данным, используя метод наименьших квадратов, можно получить аппроксимирующую зависимость плотности теплового потока от времени $q(t) = -0,059t^2 + 3,33t + 114$ Вт/м². С помощью построенной модели

был проведен расчет температуры кожи стопы в области носка. Значения экспериментальных данных и теоретическая расчетная кривая приведены на рис. 1. Сравнительный анализ показывает, что среднее относительное отклонение от экспериментальных данных расчетной кривой температуры кожи не превосходит 4%.

Литература

1. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.— 408 с.
2. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы теории теплопроводности. Ч. 1.—М.: Высшая школа, 1982.—328 с.
3. *Михайлов А. Б., Михайлова И. Д., Осина Т. М., Прохоров В. Т.* Математическая модель микроклимата в обуви при воздействии на нее низких температур // Изв. Вузов Сев.-Кавк. регион. Тех. науки.—2005.—№ 2.—С. 50–54.

Михайлов Андрей Борисович

Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса

Россия, 346500, Шахты, ул. Шевченко, 147

E-mail: mihailov@sssu.ru

Михайлова Инна Дмитриевна

Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса

Россия, 346500, Шахты, ул. Шевченко, 147

E-mail: michinna124@mail.ru

АЛГОРИТМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСОВ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ В УЧЕБНЫХ ПЛАНАХ

Н. А. Михайлова

Исследуется задача автоматического распределения часов самостоятельной работы студента в учебных планах с выполнением требований государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

Одной из задач, возникающих при составлении рабочих учебных планов (РУП), является распределение часов самостоятельной работы студента по курсам (семестрам). В настоящей работе представлен алгоритм, позволяющий организовать автоматическое распределение данных часов так, чтобы выполнялись требования государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования (ГОС ВПО).

Пусть в рабочем учебном плане имеется множество дисциплин M и множество семестров N . Обозначим через x_{ij} — количество часов самостоятельной работы i -ой дисциплины в j -ом семестре. Тогда матрица $X = \{x_{ij}\}_{i \in M, j \in N}$ полностью определяет распределение часов самостоятельной работы в РУП.

Поскольку дисциплины подразделяются на односеместровые и неодносеместровые, то множество M можно разбить на два подмножества $M = M_1 \cup M_2$, где M_1 — множество односеместровых дисциплин, а M_2 — множество неодносеместровых дисциплин. Пусть далее N_i — множество номеров семестров, в которых преподается i -ая дисциплина. Очевидно, что $\bigcup_{i \in M} N_i = N$.

Введем следующие обозначения:

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — множество всех неотрицательных целых чисел;

m_1 — количество элементов во множестве M_1 ;

m_2 — количество элементов во множестве M_2 ;

n — количество элементов во множестве N ;

t_j — количество недель теоретического обучения в j -ом семестре;

S_i — объем часов самостоятельной работы i -ой дисциплины;

A_i — объем часов аудиторной работы i -ой дисциплины;

a_{ij} — объем часов аудиторной работы i -ой дисциплины в j -ом семестре.

Отметим, что для односеместровых дисциплин объем часов самостоятельной работы определяется однозначно, следовательно, решение рассматриваемой задачи сводится к нахождению x_{ij} для каждого i из M_2 .

Определим множество G допустимых решений. Согласно одному из требований в учебном плане по каждой дисциплине должны быть распределены все часы самостоятельной работы, т. е. должны выполняться равенства

$$\sum_{j \in N_i} x_{ij} = S_i \quad \forall i \in M_2. \quad (1)$$

Далее, учитывая требование ГОСа [1], которое состоит в том, что недельная нагрузка студента не может превосходить 54 часов, получим

$$\sum_{i \in M_2: j \in N_i} x_{ij} \leq B_j \quad \forall j \in N, \quad (2)$$

где $B_j = 54t_j - \sum_{i \in M} a_{ij} - \sum_{i \in M_1} x_{ij}$ — «свободные» часы, оставшиеся в j -ом семестре. Это условие может иметь вид равенства в том случае, если

$$\sum_{i \in M_2} S_i = \sum_{j \in N} B_j, \quad (3)$$

т. е. общий объем часов самостоятельной работы всех дисциплин равен объему «свободных» часов во всех семестрах. Это означает, что в рабочем учебном плане общий объем фактических часов совпадает с произведением недель теоретического обучения на 54. Далее будем считать, что условие (3) выполняется, тогда такая задача называется сбалансированной, а ее модель — закрытой [2, 3].

Поскольку в рассматриваемой задаче речь идет о часах, то, естественным образом, получаем еще одно ограничение

$$x_{ij} \in \mathbb{N}_0, \quad i \in M_2, \quad j \in N. \quad (4)$$

Таким образом, G представляет собой множество всех матриц, элементы которых удовлетворяют (1), (2) и (4).

Для завершения построения математической модели поставленной задачи необходимо формализовать критерий оптимальности. Поскольку объем часов самостоятельной работы i -ой дисциплины в j -ом семестре должен быть прямо пропорционален объему ауди-

торных часов в данном семестре, то приходим к такому критерию оптимальности

$$f(x) = \sum_{i \in M_2} \sum_{j \in N_i} \left| \frac{x_{ij}}{S_i} - \frac{a_{ij}}{A_i} \right| \rightarrow \min. \quad (5)$$

Итак, задача автоматического распределения часов самостоятельной работы — это задача математического программирования с целевой функцией (5) и множеством допустимых решений G .

Вид ограничений и требование целочисленности, а также формулировка задачи позволяют рассматривать задачу автоматического распределения часов самостоятельной работы как задачу транспортного типа. Действительно, использование транспортной модели не ограничивается задачей о транспортировке какого-либо груза между географическими объектами (пунктами отправления и назначения). Транспортную модель применяют и к задачам распределения оборудования, и к задачам управления запасами [4, 5].

Задача распределения часов самостоятельной работы может быть отнесена к задачам управления запасами. Однако отсутствие стоимости «транспортировки» часов и, как следствие, нелинейный вид целевой функции не позволяют решить данную задачу известными методами (например, методом потенциалов). Поэтому для решения поставленной задачи предлагается специально разработанный метод, суть которого изложена ниже.

Решение задачи распределения часов самостоятельной работы начинается с нахождения опорного решения модифицированным методом «северо-западного угла». Это метод сводится к простым операциям, выполняемым с таблицей, где определенным образом записываются все условия задачи. Такую таблицу будем называть распределительной.

В распределительной таблице строки — это дисциплины, а столбцы — семестры. Для каждой строки задается общий объем часов самостоятельной работы S_i , а для каждого столбца — объем свободных часов B_j . В каждой клетке указывается объем аудиторных часов a_{ij} . Пользуясь этой таблицей распределяем часы самостоятельной работы, начиная с левой верхней клетки, условно называемой северо-западной, двигаясь вправо по строке либо вверх или вниз по столбцу. Это возможно, так как при распределении часов учитывается также «размерность» дисциплин, т. е. количество семестров, в которых дисциплина изучается. Рассмотрим подробнее, что это означает.

Пусть в первом семестре начинается изучение нескольких дисциплин, одни из которых будут изучаться в течение двух семестров, другие — в течение трех, четырех, пяти семестров (возможны любые вариации). Тогда распределение часов следует начать с первой дисциплины в таблице, имеющей наименьшую «размерность», т. е. изучаемую в двух семестрах, затем рассмотреть следующую дисциплину с такой же «размерностью». Если таковых больше не окажется, тогда переходим к рассмотрению первой в таблице дисциплины, имеющей «размерность», на единицу большую, чем предыдущая и т. д., пока не будут рассмотрены все дисциплины таблицы, изучение которых начинается в первом семестре. Затем переходим к следующему семестру и так до последнего семестра. При этом в соответствующие клетки (i, j) заносится наименьшее из значений S_i и B_j .

После того, как найдено начальное решение, применяется алгоритм, позволяющий найти оптимальное решение задачи распределения часов самостоятельной работы: метод направленного перебора, разработанный для данной задачи и основанный на некоторых шагах метода потенциалов [6, 7]. Данный алгоритм позволяет достаточно быстро находить наиболее оптимальное решение рассматриваемой задачи в области допустимых решений. В процессе вычисления достаточно хранить лишь предыдущее решение.

Введем обозначения: X — допустимое решение, найденное на предыдущем шаге, X' — допустимое решение, найденное на последнем шаге. Все действия алгоритма осуществляются с распределительной таблицей.

Шаг 1. Формируем распределительную таблицу по данным учебного плана, для которого выполняется распределение часов самостоятельной работы:

- определяем семестры изучения каждой дисциплины;
- переносим в ячейки таблицы аудиторные часы по каждой дисциплине в соответствующем семестре;
- в правый столбец записываем общий объем часов самостоятельной работы по каждой дисциплине;
- вычисляем количество «свободных» часов в каждом семестре и записываем в последние клетки таблицы.

Шаг 2. Находим начальное допустимое решение X , для него вычисляем значение целевой функции $f = f(X)$. Получаем начальную распределительную таблицу.

Шаг 3. Находим очередное допустимое решение. Для этого в распределительной таблице выбираем первую клетку (вершину) $(1, 1)$: $i := 1, j := 1$.

Шаг 4. Проверяем, является ли выбранная клетка (i, j) запрещенной. Если она запрещенная, переходим к шагу 10.

Шаг 5. Строим цикл, содержащий выбранную клетку. Начиная с нее, нумеруем все вершины.

Шаг 6. Помечаем нечетные вершины знаком минус, а четные — знаком плюс.

Шаг 7. Для клеток со знаком минус проверяем условие $x_{ij} > \min\{1, 0.1A_i\}$. Если условие не выполняется, переходим к шагу 11.

Шаг 8. Перемещаем по циклу единицу, т. е. вычитаем 1 из клеток со знаком минус и прибавляем к клеткам со знаком плюс. Получаем новое допустимое решение X' .

Шаг 9. Вычисляем значение целевой функции $f' = f(X')$.

Шаг 10. Сравниваем f и f' . Если $f' < f$, тогда $X := X'$ и возвращаемся к шагу 7.

Шаг 11. Если в распределительной таблице еще не все клетки просмотрены, т. е. $i \leq m_2$ и $j < n$, переходим к следующей клетке (шаг 12), иначе — к шагу 13.

Шаг 12. Если $j < n$, тогда $j := j + 1$. Иначе, если $i < m_2$, тогда $i := i + 1, j := 1$ и переходим к шагу 4. В противном случае возвращаемся к шагу 3.

Шаг 13. Проверяем условие $|f(X) - f(X')| < \varepsilon$, где ε — некоторая заданная величина отклонения. Если условие не выполняется, переходим к шагу 3.

Шаг 14. X — искомое оптимальное решение. Распределение часов самостоятельной работы выполнено.

Литература

1. Электронный каталог государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ГОС ВПО).—URL: <http://www.edu.ru/db/portal/spe/index.htm>.
2. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов.—М.: Высшая школа, 1986.—319 с.
3. Шишин Е. В., Шишина Г. Е. Исследование операций: Учебник.—М.: Изд-во «Проспект», 2006.—280 с.

4. Бахтин А. Е., Колоколов А. А., Коробкова З. В. Дискретные задачи производственно-транспортного типа.—Новосибирск: Наука, 1978.—160 с.
5. Хемди А. Таха. Введение в исследование операций. 7-е издание.—М.: Изд. дом «Вильямс», 2005.—912 с.
6. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. 2-е изд.—М.: Наука, 1988.—208 с.
7. Вентцель Е. С. Исследование операций.—М.: Советское радио, 1972.—552 с.

Михайлова Наталья Александровна
Информационно-методический центр анализа ФГУ «ИМЦА»;
Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса
Россия, 346500, Шахты, ул. Шевченко, 147
E-mail: natalymich@mail.ru

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ
ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ**Н. А. Пинчук, А. М. Столяр**

В работе исследуются начально-краевые задачи для уравнений гиперболического типа с подвижными границами. Проводится сравнение результатов асимптотического и численного интегрирования.

1. В работе исследуются начально-краевые задачи для уравнений гиперболического типа с подвижными границами, которые моделируют продольные колебания троса переменной длины с грузом на конце. Различные задачи динамики объектов переменной длины рассматривались в работах Н. П. Неронова, А. Ю. Ишлинского, Г. Н. Савина, О. А. Горошко, А. И. Весницкого и др. [1]. Задачу, описывающую поведение указанной системы, можно привести к виду:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F_1(t)\varepsilon_{\pm} + F_2(t)\varepsilon^2 = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x=0} + F_1(t)\varepsilon_{\pm} + F_2(t)\varepsilon^2 &= \frac{EF}{m} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0}, \\ w \Big|_{t=0} &= \Phi_{11}(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Phi_{22}(x), \\ w \Big|_{x=\ell(t)} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\ell(t) = \ell_0 + \ell_1(t)\varepsilon_{\pm}, \quad \ell_1(t) = \int_0^t \psi(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Здесь

$$w(x, t) = \xi(t) - x - u(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\rho g}{E} [\ell^2(t) - x^2] - \left(\frac{mg}{EF} + 1 \right) [\ell(t) - x],$$

$u(x, t)$ — смещение сечения x троса в момент времени t ; ρ , F , E — плотность, площадь поперечного сечения и модуль Юнга для троса;

g — ускорение силы тяжести; m — масса груза; $\ell(t)$ — длина троса в момент времени t в недеформированном состоянии; $\xi(t)$ — расстояние от точки схода троса с катушки (на которую он намотан) до груза; $\varepsilon_{\pm}\psi(t)$ — скорость изменения длины троса; $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon > 0$, когда длина троса увеличивается, $\varepsilon_{\pm} = -\varepsilon < 0$ — когда длина троса убывает; $\varepsilon = \frac{V_*}{a}$, V_* — максимальная скорость изменения длины троса, $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ — скорость распространения волны в тросе. Предполагается, что $a \ll V_*$, т. е. $\varepsilon < 1$ — малый параметр; $F_1(t)$, $F_2(t)$, $\Phi_{11}(x)$, $\Phi_{22}(x)$ — известные функции, которые выражаются через исходные параметры задачи [1].

Задача (1)–(3) содержит малый параметр в уравнении и граничных условиях (она является регулярно-возмущенной). Причем в граничном условии (2) он присутствует в выражении для самой границы. Раскладывая функцию (2) в окрестности точки $x = \ell_0$ в ряд Тейлора и применяя затем метод асимптотического интегрирования, решение задачи (1)–(3) строим в виде

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x, t) \varepsilon^k.$$

Функции $w_k(x, t)$ удовлетворяют начально-краевым задачам уже на постоянном отрезке интегрирования.

Для численного решения задачи применялись алгоритмы, основанные на методах конечных разностей (МКР) и Рунге-Кутты. Коротко опишем их применение.

В каждый момент времени t_j разобьем трос длиной $\ell(t)$ на N равных частей узлами $x_i(t_j) = ih_j$, где $t_j = j\Delta t$, Δt — шаг интегрирования по времени, j — соответствующий временной слой сетки, $i = 0, 1, \dots, N$, $h_j = \frac{\ell(t_j)}{N}$ — шаг сетки по пространственной переменной в момент времени t_j . Ввиду того, что область интегрирования меняется со временем, узлы сетки сами являются функциями времени, что учитывается в модификациях МКР и метода Рунге-Кутты.

2. Для сравнения асимптотического и численного интегрирования проведены расчеты при следующих значениях параметров:

$$F = 4,41 \cdot 10^{-6} \pi \text{ м}^2, \quad E = 10^{11} \text{ н/м}, \quad \rho = 5197 \text{ кг/м}^3, \quad (4)$$

$$\ell_0 = 50 \text{ м}, \quad \varphi_1(x) = \frac{g}{E} \left(\frac{\rho}{2} x^2 + \frac{m}{F} x \right), \quad \varphi_2(x) = 0, \quad \frac{d\ell}{dt} = Kt.$$

На рисунках представлена зависимость от времени смещения троса в точке схода его с колеса. На рис. 1 кривая 1 соответствует расчету при помощи модифицированного метода Рунге — Кутты (МРК), а кривые 2 и 3 — асимптотическому интегрированию с учетом одного и двух членов разложения соответственно — для задачи с $\varepsilon_{\pm} < 0$ и параметром $K = 2$.

На рис. 2 приводятся аналогичные результаты при $K = 20$.

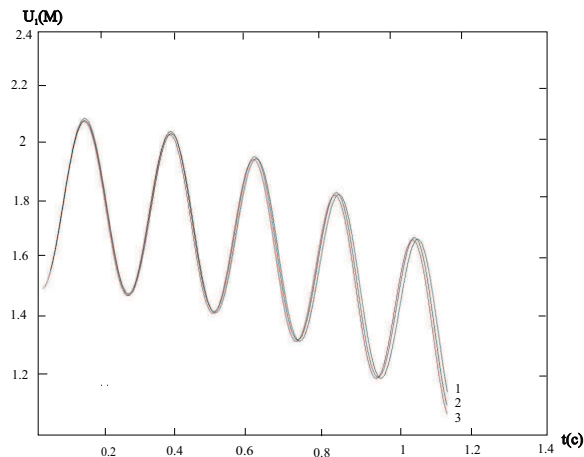


Рис. 1.

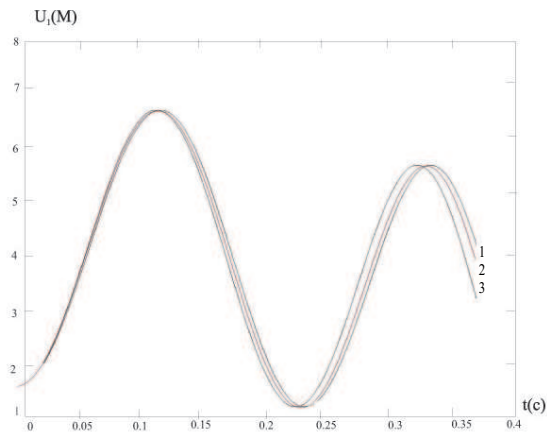


Рис. 2.

На рис. 3 проводится сравнение результатов расчетов при помощи модифицированного метода конечных разностей (кривая 1) и при помощи модифицированного метода Рунге — Кутты (кривая 2) при $\varepsilon_{\pm} > 0$.

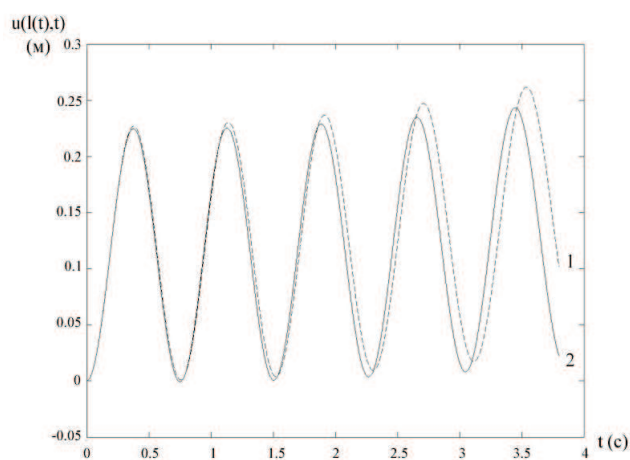


Рис. 3.

На рис. 4 и 5 проводится сравнение результатов, аналогичное сравнению на рис. 1 и 2, но при $\varepsilon_{\pm} > 0$.

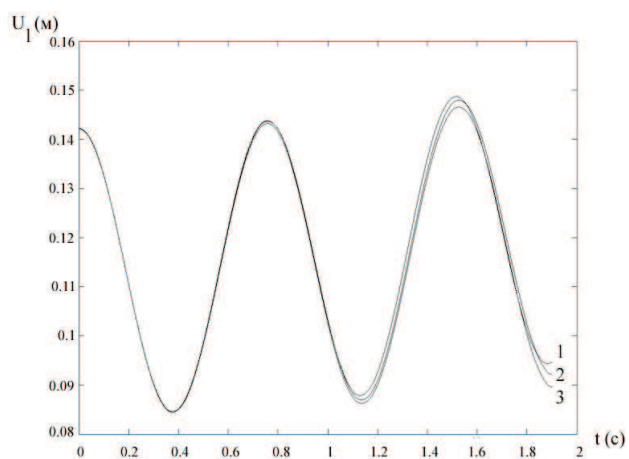


Рис. 4.

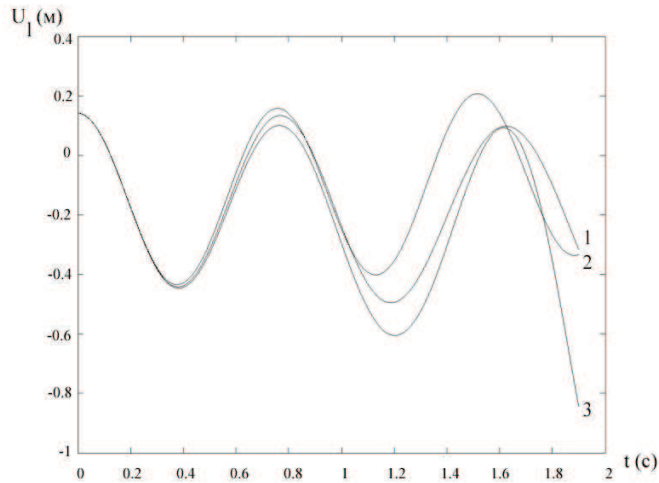


Рис. 5.

Представленное сравнение результатов позволяет сделать следующие выводы:

— различные численные методы (МКР и Рунге — Кутта) в проведенной серии расчетов дают практически совпадающие результаты (рис. 3);

— численное и асимптотическое интегрирование также дают хорошее совпадение;

— для задачи с $\varepsilon_{\pm} > 0$ при больших значениях параметра K (что соответствует большим значениям ε) со временем наблюдается расхождение результатов асимптотического и численного интегрирования.

Литература

1. Кечеджиян Л. О., Пинчук Н. А., Столяр А. М. Об одной задаче математической физики с подвижной границей // Изв. высших учебных заведений. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2008.—№ 1.—С. 22–27.

Столяр Александр Моисеевич
Южный федеральный университет
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
E-mail: ajoiner@math.rsu.ru

Пинчук Никита Алексеевич
Южный федеральный университет
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
E-mail: pin@pochta.ru

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ВОЗМОЖНЫХ
НАРУШЕНИЯХ В НАЛОГОВОЙ ОТЧЕТНОСТИ
ПРЕДПРИЯТИЯ С ПОМОЩЬЮ
СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ВРЕМЕННОГО РЯДА

В. А. Родин, Е. А. Ясиненко

Рассматривается задача вскрытия криминальных схем нарушения налоговой отчетности с помощью анализа временных рядов.

В практике прогнозирования принято считать, что значения уровней временных рядов финансово-экономических показателей состоят из следующих компонент: тренда, сезонной, циклической и случайной составляющих. Мы рассмотрим аддитивную модель:

$$Y_t = u_t + s_t + v_t + e_t, \quad (1)$$

где Y_t — уровень временного ряда в момент времени t ; u_t — трендовая составляющая; s_t — сезонная составляющая; v_t — циклическая компонента; e_t — случайная компонента. В последнее время теорию временных рядов стали использовать для прогноза нарушений в производственной сфере. Отметим работу [1], в которой статистический контроль над отклонениями в качестве продукции используется для прогнозирования нарушений в технологическом процессе. Проверяется статистическая гипотеза причинно-следственных связей по внешним данным.

В настоящей работе предлагается в качестве уровней временного ряда рассмотреть отчетные данные по налоговому сбору одного предприятия за достаточно длинный временной промежуток. Статистическая и аналитическая обработка такого временного ряда может вскрыть нарушения (занижения сумм) в налоговой отчетности.

Можно выделить два принципиально различных вида предполагаемого нарушения правильной налоговой отчетности.

А. Планомерное постоянное нарушение (занижение) суммы налоговых отчислений, связанное с определенной постоянно действующей криминальной схемой.

Б. Стихийные занижения, связанные с временным нарушением закона.

Для проверки гипотезы **А** при неизменном тренде развития самого предприятия (налогооблагаемой базы) на определенном временном промежутке можно моделировать тенденции временного ряда при наличии структурных изменений [2]. И эти изменения могут указать на появление схемы хищения части налоговых сборов. Если же, как и происходит на практике, меняются условия и архитектура производства, то изменения в тренде связанные с производством должны быть идентичными изменениям уровней временного ряда налоговых отчислений. В обоих случаях возможно применение теста Чоу [2].

Для проверки гипотезы **Б** потребуются различные направления исследования временных рядов. Рассмотрим гипотезы в порядке увеличения их сложности.

Гипотеза Б1. Уровень временного ряда в момент времени t не содержит ни u_t — трендовой составляющей, ни s_t — сезонной составляющей, ни v_t — циклической компоненты. Производство работает в стабильных условиях. Сложное производство облагается и сложной схемой налогообложения, в которой в силу предельной теоремы теории вероятностей возможны случайные отклонения.

Для проверки гипотезы H_0 — о наличии криминальной схемы занижения налоговой суммы сбора можно проверить, является ли временной ряд $Y_t = e_t$ «белым шумом». Это можно сделать с помощью тестирования его выборочной автокорреляции с помощью Q -статистики Бокса — Пирса или другим методом.

Если случайность не подтверждается, то, применяя метод Фостара — Стюарта или метод медианы, можно проверить статистическую гипотезу о наличии определенной тенденции (схемы) уклонения в сторону занижения налоговых выплат.

Гипотеза Б2. Уровень временного ряда в момент времени t содержит u_t — трендовую составляющую, s_t — сезонную составляющую, v_t — циклическую компоненту. В этом случае, применяя все известные методы теории временных рядов, нужно сначала обработать уровни, а затем определить вид и функцию тренда u_t^* , сезонную s_t^* и циклическую v_t^* составляющие. Возможно, в силу специфики производства некоторых компонент в уровнях и не будет.

Анализируя автокорреляционную функцию, можно определить структуру ряда. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции первого порядка, то ряд содержит только тенденцию. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции порядка $k > 1$, то или ряд содержит сильную нелинейную тенденцию, для выявления которой необходим дополнительный анализ, или ряд содержит циклические колебания с периодичностью в k моментов времени. Для определения вида тренда или тенденции применяют аналитическое выравнивание временного ряда. Выбор наилучшего уравнения тренда в нелинейном случае можно осуществить путем перебора основных форм тренда. Расчет для каждого уравнения скорректированного коэффициента детерминации $\bar{R}^2$ и выбор уравнения тренда с максимальным значением этого коэффициента приведет к решению задачи по определению вида уравнения тренда [2]. Реализация этого метода проста при компьютерной обработке данных. Для моделирования сезонной и циклической составляющей предположим, что амплитуда сезонных колебаний не изменяется. В этом случае целесообразно строить, как мы и предполагали первоначально, аддитивную модель (1). Для моделирования сезонных колебаний возможно применение метода фиктивных переменных.

Для полноты изложения напомним схему исследований элементов модели (1) [2]. Если у временного ряда обнаруживаются: 1) тренд, 2) детерминистическая периодичность, 3) гетероскедастичность, 4) изменяющаяся автокорреляция, а этот случай мы сейчас и рассматриваем, то процесс является нестационарным. Существуют несколько методов проверки стационарности временного ряда: применение интеграционной статистики Дарбина — Уотсона (IDW); теста Дики — Фуллера (DF-тест); если в остатках наблюдается автокорреляция, то — ADF-тест. Как правило, достаточно [2] найти процесс или модель $ARIMA(p, d, q)$ с оценкой параметров и дисперсии остатков.

Затем нужно рассмотреть новый уровень

$$Z_t = Y_t - u_t^* - s_t^* - v_t^* - e_t^*, \quad (1)$$

и применить к нему все исследования связанные с гипотезой **Б1**.

В следующих работах авторы планируют провести численный эксперимент с конкретными данными по временному ряду.

Литература

1. *Прохоров Ю. К.* Управление качеством. Электронный учебник.—URL: <http://www.de.info.ru>.
2. *Елисеева И. И.* Эконометрика.—М.: Финансы и статистика, 2008.—575 с.

Родин Владимир Александрович,
Воронежский институт МВД России
Россия, 394065, Воронеж, пр-т Патриотов, 53
E-mail: rodin_v@mail.ru

Ясиненко Екатерина Александровна
Воронежский институт МВД России
Россия, 394065, Воронеж, пр-т Патриотов, 53

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ЭЛЕКТРОПОТРЕБЛЕНИЯ

А. В. Седов, Е. В. Тришечкин

Описан новый подход к моделированию временных рядов электропотребления, в основе которого лежит вейвлет анализ и метод главных компонент. Для реализации подхода предложена матричная форма записи дискретного вейвлет преобразования и разработан алгоритм формирования матрицы преобразования.

Математические модели временных рядов электропотребления строятся на основе массивов данных о состоянии энергообъекта. Пусть F — двумерная матрица, содержащий измерительную информацию о процессе электропотребления энергообъекта:

$$F = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \dots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \dots & f_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N,1} & f_{N,2} & \dots & f_{N,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь $F_i, i = \overline{1, N}$ графики электрической нагрузки (ГЭН) за одни сутки, каждый из которых представляется вектор-строкой $F_i = (f_{i,1}, f_{i,2}, \dots, f_{i,j}, \dots, f_{i,n-1}, f_{i,n})$ и состоит из n коррелированных переменных $F_i[j] = f_{i,j}$ — значений электрической мощности или энергии, полученных, например, через получасовые промежутки времени (при этом $n = 48$). Изменение отдельной переменной $F_i[j]$ во времени (собственно объект прогнозирования) представляется вектор-столбцом $F_j = (f_{1,j}, f_{2,j}, \dots, f_{i,j}, \dots, f_{N-1,j}, f_{N,j})^T$. Каждый элемент этого столбца является суммой детерминированной и стохастической составляющих

$$F_j[i] = Fd_j[i] + \epsilon_j[i].$$

Здесь $Fd_j[i]$ — детерминированная составляющая процесса изменения переменной во времени, зависящая от небольшого числа внешних (температура, длительность светлого времени суток, день недели и т. д.) и внутренних (значение переменной в предыдущие моменты времени) факторов.

$\varepsilon[i]$ — стохастическая составляющая с нулевым математическим ожиданием и неизвестной дисперсией, зависящая от множества факторов, трудно поддающихся строгому математическому описанию.

Точность моделирования детерминированной и стохастической составляющей напрямую зависит от точности разделения этих двух процессов.

Представление сигнала в виде разложения по базису вейвлет функций, вследствие их хорошей частотно-временной локализации, является мощным инструментом для анализа данных, позволяющим отслеживать локальные изменения сигнала на разных масштабах.

1. Кратномасштабный анализ. Термин «кратномасштабный анализ» впервые был введен С. Малла в 1989 г. [1]. Ортогональным кратномасштабным разложением пространства $L^2(R)$ называется последовательность замкнутых, вложенных друг в друга подпространств $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_j \subset \dots$, обладающая свойствами:

- 1) замыкание их объединения совпадает с $L^2(R)$, $\overline{\bigcup_{j \in Z} V_j} = L^2(R)$;
- 2) пересечение всех подпространств равно нулю, $\bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\}$;
- 3) если $f(x) \in V_j$, то $f(2x) \in V_{j+1}$;
- 4) существует функция $\varphi(x) \in V_0$, называемая масштабирующей, такая, что функции $\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x - n)$, $n \in Z$ образуют ортонормированный базис пространства V_0 .

Функции $\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x - n)$, $n \in Z$ образуют ортонормированный базис пространства V_0 в том случае, если выполняется условие $(\varphi_{0,k}, \varphi_{0,m}) = \delta_{km}$, $\forall k, m \in Z$, где $(\varphi_{0,k}, \varphi_{0,m}) = \int_R \varphi_{0,k}(x) \overline{\varphi_{0,m}(x)} dx$ —

скалярное произведение $\varphi_{0,k}(x)$ и $\varphi_{0,m}(x)$, $\delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$

Система подпространств V_j , $j \in Z$, образует бесконечную в обе стороны последовательность вложенных подпространств $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_j \subset \dots$. Для каждого $j \in Z$ система функций $\varphi_{j,k} = \sqrt{2^j} \varphi(2^j x - k)$, $k \in Z$, является ортонормированным базисом пространства $V_j \subset L^2(R)$.

Операторы проектирования $P_j : L^2(R) \rightarrow V_j$ дают приближение $P_j(f)$ функции $f(x)$, все более точное с возрастанием j

$$P_j(f) = \sum_{k \in Z} (f, \varphi_{j,k}) \varphi_{j,k}(x).$$

Число j характеризует уровень разрешения. Чем больше j , тем более мелкие носители имеют функции $\varphi_{j,k}(x)$. Тогда коэффициенты $(f, \varphi_{j,k})$ более детально отражают свойства $f(x)$.

Обозначим символом cA_0 набор коэффициентов разложения:

$$cA_0 = \{a_{j,k}\}, \quad a_{j,k} = (f, \varphi_{j,k}) = \int_R f(x) \overline{\varphi_{j,k}(x)} dx.$$

Простейшей масштабирующей функцией $\varphi_{0,n}(x)$, $n \in Z$, целочисленные сдвиги которой по оси абсцисс образуют ортонормированный базис пространства V_0 , является функция Хаара, изображенная на рис. 1.

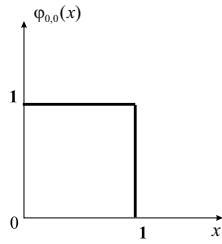


Рис. 1. Масштабирующая функция Хаара.

Типовой суточный график электропотребления $f(x)$, а также представление $f(x)$ в базисе масштабирующих функций Хаара на разных масштабах (проекции на подпространства V_j , $j = -1, -2, \dots, -5$) изображено на рис. 2.

Коэффициенты cA_0 дают информацию относительно функции $f(x)$, однако для более оптимального представления локальных изменений сигнала нужно рассматривать коэффициенты $cA_0 = \{a_{j,k}\}$ в сравнении с коэффициентами разложения при более низком разрешении. Для этого вводится вейвлет-функция.

2. Вейвлет-преобразование. Каждое пространство V_j раскладывается в прямую сумму ортогональных подпространств $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$. Это разложение позволяет вместо j -го уровня приближения $P_j(f)$ взять сумму $P_j(f) = P_{j-1}(f) + P_{j-1}^W(f)$, где $P_{j-1}^W(f) = \sum_{k \in Z} (f, \psi_{j-1,k}) \psi_{j-1,k}(x)$. Первое слагаемое есть более грубое приближение в пространстве V_{j-1} , а второе отражает детали, которыми $P_{j-1}(f)$ отличается от $P_j(f)$. Такое ортогональное дополнение

W_{j-1} пространства V_{j-1} представляет собой пространство вейвлет-функций $\psi_{j,k} = \sqrt{2^j} \psi(2^j x - k)$. В базисах пространств V_{j-1} и W_{j-1} имеем

$$P_j(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-1,k} \varphi_{j-1,k}(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x),$$

где $a_{j-1,k}$ — коэффициенты аппроксимации $(j-1)$ -го уровня разрешения,

$$a_{j-1,k} = (f, \varphi_{j-1,k}) = \int_R f(x) \overline{\varphi_{j-1,k}(x)} dx, \quad (2)$$

$d_{j-1,k}$ — коэффициенты детализации $(j-1)$ -го уровня разрешения,

$$d_{j-1,k} = (f, \psi_{j-1,k}) = \int_R f(x) \overline{\psi_{j-1,k}(x)} dx. \quad (3)$$

Обозначим полученные наборы коэффициентов символами cA_1 и cD_1 : $cA_1 = \{a_{j-1,k}\}$, $cD_1 = \{d_{j-1,k}\}$.

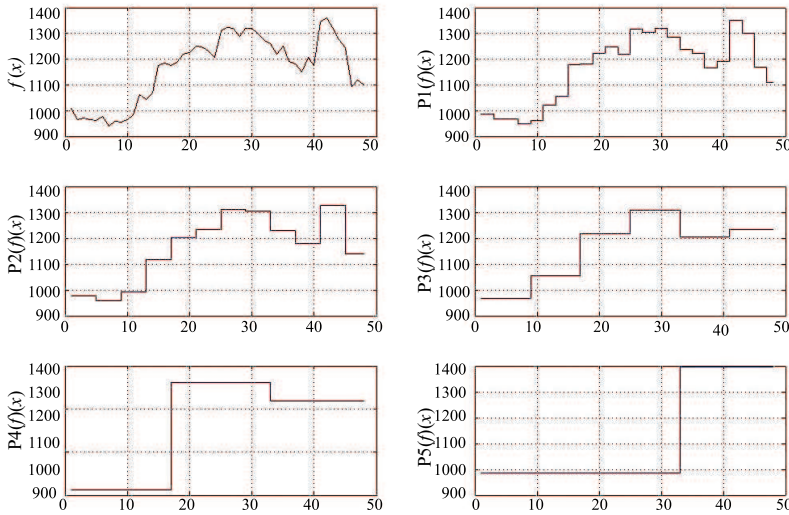


Рис. 2. $f(x)$ в базисе масштабирующих функций Хаара.

Теперь сглаженную функцию $P_{j-1}(f)$ можно еще раз разложить на еще более сглаженную часть $P_{j-2}(f)$ и детализирующую часть $P_{j-2}^W(f)$:

$$P_j(f) = P_{j-2}(f) + P_{j-2}^W(f) + P_{j-1}^W(f)$$

или

$$P_j(f) = \sum_{k \in Z} a_{j-2,k} \varphi_{j-2,k}(x) + \sum_{k \in Z} d_{j-2,k} \psi_{j-2,k}(x) + \sum_{k \in Z} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x).$$

Рассуждая аналогично и повторяя процедуру N раз, получаем вейвлет-разложение аппроксимации j -го уровня разрешения $P_j(f)$ в виде набора коэффициентов $\{cA_N, cD_N, cD_{N-1}, \dots, cD_1\}$, где $cA_N = \{a_{j-N,k}\}$ — коэффициенты аппроксимации разложения глубины N и $cD_m = \{d_{j-m,k}\}$ — детализирующие коэффициенты разложения глубины $m = 1, 2, \dots, N$. Графическая иллюстрация вейвлет разложения представлена на рис. 3.

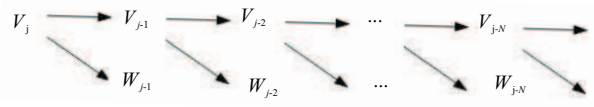


Рис. 3. Вейвлет-разложение пространства V_j .

Вейвлет анализ состоит из следующих шагов.

- Выбираем достаточно высокий уровень разрешения j , такой, чтобы аппроксимация $P_j(f)$ достаточно хорошо отражала функцию $f(x)$. Если функция $f(x)$ задается массивом значений $f[n]$, $n \in Z$, то за аппроксимацию $P_j(f)$ принимаются сами значения функции $f[n]$ в точках n . Тогда коэффициенты аппроксимации $cA_0 = \{a_{j,k}\}$ вычисляются по формуле:

$$a_{j,k} = a_{0,k} = (f, \varphi_{0,k}) = \int_R f(x) \overline{\varphi_{0,k}(x)} dx,$$

где $\varphi_{0,k}(x) = \varphi(x - k)$.

- Выбираем глубину разложения N и находим коэффициенты разложения $\{cA_N, cD_N, cD_{N-1}, \dots, cD_1\}$, где $cA_N = \{a_{0-N,k}\}$, $cD_N = \{d_{0-N,k}\}$. Анализируем эти коэффициенты и изменяем их в случае необходимости.

• Восстанавливаем функцию $f(x)$, используя, возможно измененные, коэффициенты разложения:

$$f(x) \approx \sum_{k \in Z} a_{-N,k} \varphi_{-N,k}(x) + \\ + \sum_{k \in Z} d_{-N,k} \psi_{-N,k}(x) + \dots + \sum_{k \in Z} d_{-1,k} \psi_{-1,k}(x).$$

Глубина разложения N выбирается исходя из особенностей конкретного сигнала, подлежащего анализу.

Из формул (2) и (3) следует, что вычисление коэффициентов вейвлет-разложения функции $f(x)$ требует вычисления большого количества интегралов с необходимой точностью. Следует также учитывать, что при большом уровне разрешения j носители функций $\varphi_{j,k}(x)$ и $\psi_{j,k}(x)$ становятся малыми порядка $1/2^j$. Для решения этой задачи С. Малла [1] предложил алгоритм быстрого вейвлет-преобразования (каскадный алгоритм), позволяющий вычислять коэффициенты вейвлет-разложения без интегрирования, используя алгебраические операции на основе свертки.

3. Алгоритм быстрого вейвлет-преобразования. Предположим, что мы знаем разложение функции $f(x)$ для некоторого уровня разрешения j , т. е. знаем коэффициенты $cA_0 = \{a_{j,k}\}$. Получим формулы для вычисления коэффициентов $cA_1 = \{a_{j-1,k}\}$ и $cD_1 = \{d_{j-1,k}\}$. Для этого выразим базисные функции $\varphi_{j-1,k}(x)$ и $\psi_{j-1,k}(x)$ через базисные функции $\varphi_{j,k}(x)$ пространства V_j :

$$\varphi_{j-1,k}(x) = \sum_n h_n \varphi_{j,2k+n}(x), \quad \psi_{j-1,k}(x) = \sum_n g_n \varphi_{j,2k+n}(x),$$

где $\{h_n\}_{n \in Z}$ и $\{g_n\}_{n \in Z}$ — импульсные функции отклика дискретных фильтров $H(\omega)$ и $G(\omega)$ [1]. Тогда получаем:

$$a_{j-1,k} = (f, \varphi_{j-1,k}) = \left(f, \sum_n h_n \varphi_{j,2k+n} \right) = \\ = \int_R f(x) \overline{\sum_n h_n \varphi_{j,2k+n}(x)} dx = \sum_n \int_R f(x) \overline{h_n \varphi_{j,2k+n}(x)} dx = \\ = \sum_n \overline{h_n} \int_R f(x) \overline{\varphi_{j,2k+n}(x)} dx = \sum_n \overline{h_n} a_{j,2k+n}.$$

Проводя аналогичные рассуждения, получаем формулу для вычисления коэффициентов $cD_1 = \{d_{j-1,k}\}$:

$$d_{j-1,k} = (f, \psi_{j-1,k}) = \left(f, \sum_n g_n \varphi_{j,2k+n} \right) = \sum_n \overline{g_n} a_{j,2k+n}.$$

В случае вещественных импульсных функций отклика получаем:

$$a_{j-1,k} = \sum_n h_n a_{j,2k+n}, \quad d_{j-1,k} = \sum_n g_n a_{j,2k+n}.$$

Пусть $\tilde{H}(\omega)$ и $\tilde{G}(\omega)$ зеркальные фильтры с импульсными функциями отклика $\tilde{h}_n = h_{-n}$, $\tilde{g}_n = g_{-n}$. Тогда коэффициенты разложения $cA_1 = \{a_{j-1,k}\}$ и $cD_1 = \{d_{j-1,k}\}$ вычисляются в виде свертки массива $cA_0 = \{a_{j,k}\}$ первоначальных коэффициентов с зеркальными фильтрами $\tilde{h}_n$ и $\tilde{g}_n$ в точках $2k$:

$$a_{j-1,k} = \sum_n \tilde{h}_n a_{j,2k-n}, \quad d_{j-1,k} = \sum_n \tilde{g}_n a_{j,2k-n}.$$

Последние выражения равносильны вычислению свертки во всех точках, как четных, так и нечетных, с последующим удалением коэффициентов $a_{j-1,k}$, где k — нечетное.

Например, зададимся набором коэффициентов $\{h_n\}$ фильтра масштабирующей функции Добеши 2 порядка: $h_0 = 0,4830$; $h_1 = 0,8365$; $h_2 = 0,2241$; $h_3 = -0,1294$. Тогда получаем: $\tilde{h}_0 = 0,4830$; $\tilde{h}_{-1} = 0,8365$; $\tilde{h}_{-2} = 0,2241$; $\tilde{h}_{-3} = -0,1294$.

Вычисление начальных коэффициентов $cA_0 = \{a_{j,k}\}$ в виде интегралов $a_{j,k} = \int_R f(x) \overline{\varphi_{j,k}(x)} dx$ является трудоемкой задачей и может не обеспечить необходимой точности при больших значениях j . Существует несколько методов определения начальных коэффициентов. Однако, в случае, когда анализируемая функция задана массивом значений $f[n]$, $n \in Z$, в качестве начальных коэффициентов проще всего взять сами значения функции, т. е. $a_{j,k} = f[k]$. Такой подход применяется в MATLAB Wavelets Toolbox.

4. Матричная запись быстрого вейвлет преобразования.

Пусть $F = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_N)^T$ — сигнал, подлежащий вейвлет анализу. Тогда вектор-столбец коэффициентов прямого вейвлет преобразования определяется как матричное произведение $C = W \cdot F$.

Матрица вейвлет преобразования W имеет следующую блочную структуру $W = ((MA_L), (MD_L), (MD_{L-1}), \dots, (MD_2), (MD_1))^T$, где MA_L — матрица размерности $\frac{N}{2^L} \times N$, служащая для вычисления коэффициентов аппроксимации уровня L , N — длина сигнала, подлежащего разложению; MD_j — матрицы для вычисления коэффициентов детализации уровней $j = \overline{1, L}$, имеющие размерности $\frac{N}{2^j} \times N$ соответственно.

Рассмотрим формирование матрицы MA_L . Согласно каскадному алгоритму Малла, коэффициенты аппроксимации уровня L вычисляются при помощи операции свертки коэффициентов аппроксимации уровня $L-1$ с импульсной функцией отклика $\widetilde{h}_n$, коэффициенты уровня $L-1$ вычисляются по коэффициентам уровня $L-2$ и т. д. Коэффициенты уровня 1 вычисляются по коэффициентам уровня 0 или (как было принято ранее) по отсчетам сигнала F . Тогда матрица $\frac{N}{2} \times N$ для вычисления коэффициентов аппроксимации уровня 1 имеет вид

$$TA_1 = \begin{pmatrix} \text{afilter}_{1,1} \\ \text{afilter}_{1,3} \\ \dots \\ \text{afilter}_{1,N-1} \end{pmatrix},$$

где $\text{afilter}_{1,i}$ — строка, содержащая функцию отклика $\widetilde{h}_n$, для вычисления коэффициента аппроксимации $a_{1,i}$, т. е. для вычисления свертки в точке f_i (согласно быстрому алгоритму вычисления коэффициентов), $i = 2k+1$, $k = 0, \frac{N}{2} - 1$.

Например, $\text{afilter}_{1,3} = \underbrace{(0 \ 0 \ \widetilde{h}_0 \ \widetilde{h}_{-1} \ \widetilde{h}_{-2} \ \widetilde{h}_{-3} \ 0 \ \dots \ 0)}_N$.

Обобщая приведенную конструкцию на произвольный уровень разложения j , получаем матрицу TA_j размерности $\frac{N}{2^j} \times \frac{N}{2^{j-1}}$ для вычисления коэффициентов аппроксимации уровня j на основании коэффициентов аппроксимации уровня $j-1$:

$$TA_j = \begin{pmatrix} \text{afilter}_{j,1} \\ \text{afilter}_{j,3} \\ \dots \\ \text{afilter}_{j, \frac{N}{2^{j-1}} - 1} \end{pmatrix},$$

где $\text{afilter}_{j,i}$ — строка, содержащая коэффициенты фильтра, для вычисления коэффициента аппроксимации $a_{j,i}$, т. е. для вычисления свертки в точке $a_{j-1,i}$, $j = \overline{1, L}$, $i = 2k+1$, $k = 0, \frac{N}{2^j} - 1$.

Таким образом, матрица MA_L для вычисления коэффициентов аппроксимации уровня L по вектору отсчетов сигнала F определяется в виде следующего произведения матриц: $MA_L = TA_L \cdot TA_{L-1} \times \dots \times TA_2 \cdot TA_1$. Размерность матрицы MA_L определяется следующим образом

$$\left(\frac{N}{2^L} \times \frac{N}{2^{L-1}}\right) \times \left(\frac{N}{2^{L-1}} \times \frac{N}{2^{L-2}}\right) \times \dots \times \left(\frac{N}{4} \times \frac{N}{2}\right) \times \left(\frac{N}{2} \times N\right) = \left(\frac{N}{2^L} \times N\right).$$

Матрицы MD_j определяются аналогично MA_L .

Исходя из размерности матрицы MA_L , равной $(\frac{N}{2^L} \times N)$, следует, что для анализа сигнала F вплоть до уровня разрешения L необходимо, чтобы количество отсчетов F было кратным 2^L , где L — максимальный уровень разложения.

Следует отметить, что в связи с конечностью сигнала F возникает проблема вычисления коэффициентов вейвлет преобразования на границах интервала, так как свертку импульсной функции отклика необходимо выполнить с неизвестными значениями сигнала. В случае матричного преобразования можно дополнить сигнал периодически, что приведет к циклическому переносу коэффициентов функции отклика

$$\text{afilter}_{j, \frac{N}{2^{j-1}}-1} = \underbrace{\left(\widetilde{h_{-2}} \quad \widetilde{h_{-3}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \widetilde{h_0} \quad \widetilde{h_{-1}} \right)}_{\frac{N}{2^{j-1}}},$$

либо воспользоваться фильтрами, специально сконструированными для конечных интервалов [2, 3].

Матрица преобразования W , полученная с применением фильтров ортогональных вейвлетов Добеши является ортогональной, т. е. выполняется равенство $W^T \cdot W = E$.

Вектор-столбец коэффициентов прямого вейвлет преобразования $C = W \cdot F$ имеет следующую структуру

$$C = \left(a_{L,1}, \dots, a_{L, \frac{N}{2^L}}, d_{L,1}, \dots, d_{L, \frac{N}{2^L}}, \dots, d_{1,1}, \dots, d_{1, \frac{N}{2}} \right)^T.$$

Размерность C равна $(\sum_{m=1}^L \frac{N}{2^m} + \frac{N}{2^L}) \times 1$, т. е. $N \times 1$. Следовательно, матричное вейвлет преобразование представляет собой ортогональное неизбыточное преобразование.

Восстановление исходного сигнала по коэффициентам разложения в силу ортогональности W вычисляется умножением на транспонированную матрицу W^T : $F = W^T \cdot C$.

Приведем пример применения матричного вейвлет преобразования к данным электропотребления энергообъекта. Рассмотрим F_j — вектор размерностью 96×1 , являющийся одним из столбцов матрицы (1). Коэффициенты вейвлет преобразования (коэффициенты аппроксимации cA_3 и коэффициенты детализации cD_j , $j = \overline{1,3}$), полученные при помощи вейвлетов Добеши второго порядка изображены на рис. 4.

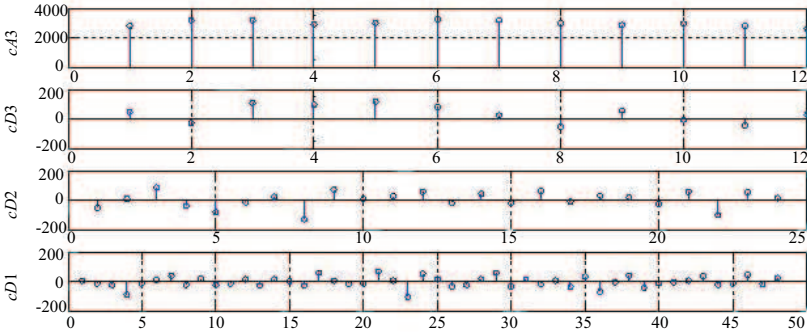


Рис. 4. Прямое вейвлет-преобразование.

Вектор F_j вместе с сигналом A_3 , восстановленным по коэффициентам аппроксимации cA_3 , а также сигналы D_j , восстановленные по коэффициентам cD_j , $j = \overline{1,3}$ изображены на рис. 5.

5. Вейвлет преобразование и метод главных компонент в задаче моделирования временных рядов электропотребления. Пусть $C = W \cdot F$ — матрица коэффициентов вейвлет-преобразования многомерного вектора F . Вводятся понятия ковариационной матрицы вейвлет-коэффициентов $KV_C = C^T \cdot C$ и ковариационной матрицы процесса $KV_F = F^T \cdot F$.

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} KV_C &= C^T \cdot C = (W \cdot F)^T \cdot (W \cdot F) = \\ &= F^T \cdot W^T \cdot W \cdot F = F^T \cdot E \cdot F = F^T \cdot F = KV_F. \end{aligned}$$

С другой стороны [4]

$$\begin{aligned}
 KV_C &= (W \cdot F)^T \cdot (W \cdot F) = \\
 &= (MA_L \cdot F)^T \cdot (MA_L \cdot F) + (MD_L \cdot F)^T \cdot (MD_L \cdot F) + \dots + \\
 &\quad + (MD_2 \cdot F)^T \cdot (MD_2 \cdot F) + (MD_1 \cdot F)^T \cdot (MD_1 \cdot F) = \\
 &= KV_{A_L} + KV_{D_L} + \dots + KV_{D_2} + KV_{D_1} = KV_F.
 \end{aligned}$$

Данное выражение можно интерпретировать как частотное разложение ковариационной матрицы многомерного вектора F . В такой интерпретации слагаемое, вычисляемое по коэффициентам аппроксимации $MA_L \cdot F$, содержит информацию о низкочастотных составляющих ковариационной матрицы KV_F , слагаемые $(MD_j \cdot F)^T \cdot (MD_j \cdot F)$ выполняют полосовое разложение высокочастотной части спектра ковариационной матрицы.

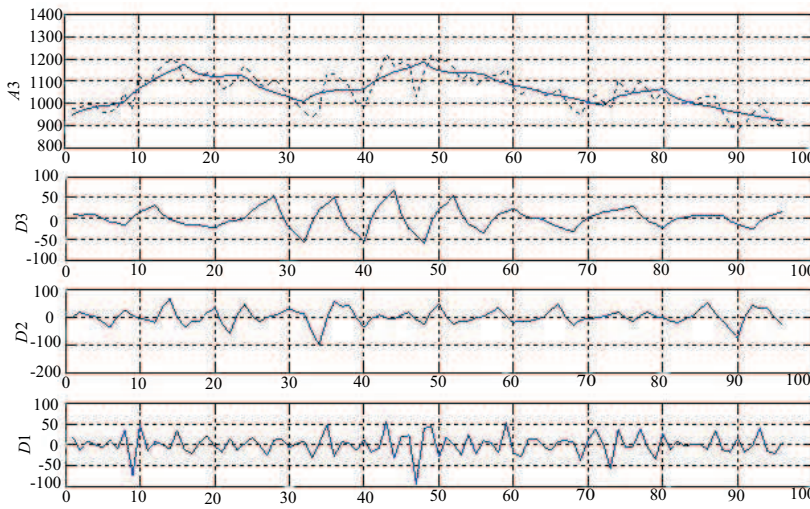


Рис. 5. Обратное вейвлет-преобразование.

Для каждой из матриц KV_{A_L} , KV_{D_j} , $j = \overline{1, L}$ справедливы следующие выражения [5]: $KV_{A_L} = V_{A_L} \cdot \Lambda_{A_L} \cdot V_{A_L}^T, \dots, KV_{D_j} = V_{D_j} \cdot \Lambda_{D_j} \cdot V_{D_j}^T$, где символом $V_\bullet$ обозначены матрицы собственных векторов соответствующих ковариационных матриц, $\Lambda_\bullet$ — диагональ-

ные матрицы собственных чисел вида

$$\Lambda_{\bullet} = \begin{pmatrix} \lambda_{1\bullet} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{2\bullet} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3\bullet} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n\bullet} \end{pmatrix}.$$

Метод главных компонент применяется для выявления в каждом из слагаемых ковариационной матрицы KV_F меньшего количества собственных чисел и собственных векторов, необходимых для восстановления ее с требуемой точностью. При этом собственные вектора, соответствующие наибольшим собственным числам, характеризуют детерминированную составляющую сигнала, а наименьшим — стохастическую.

Для каждого из слагаемых KV_{A_L} , KV_{D_j} ковариационной матрицы KV_F вычисляются новые матрицы:

$$\widetilde{KV}_{A_L} = V_{A_L} \cdot \tilde{\Lambda}_{A_L} \cdot V_{A_L}^T,$$

$$\widetilde{KV}_{D_j} = V_{D_j} \cdot \tilde{\Lambda}_{D_j} \cdot V_{D_j}^T,$$

где

$$\tilde{\Lambda}_{\bullet} = \begin{pmatrix} \lambda_{1\bullet} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{2\bullet} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{m\bullet} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число m определяется по формуле:

$$\frac{\sum_{i=m+1}^n \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \leq 0,05.$$

Также эффективным методом для выбора числа m является анализ скорости убывания собственных чисел λ_i (конечных разностей

$\lambda'_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i$). В этом случае m определяется по формуле

$$\lambda'_i \geq 0.05 \cdot \lambda'_1, \quad m = \max(i). \quad (4)$$

Таким образом, ковариационная матрица детерминированной составляющей многомерного вектора F определяется по формуле

$$\widetilde{KV}_F = \widetilde{KV}_{A_L} + \widetilde{KV}_{D_L} + \dots + \widetilde{KV}_{D_1}.$$

После этого процесс моделирования ГЭН включает следующие действия.

1) Вычисление матрицы собственных векторов $\widetilde{V}_F$ и собственных чисел $\widetilde{\Lambda}_F$ ковариационной матрицы $\widetilde{KV}_F$.

2) Вычисление по матрице $\widetilde{V}_F$, содержащей меньшее количество m собственных векторов (соответствующих наибольшим собственным числам матрицы $\widetilde{\Lambda}_F$), матрицы новых переменных P , характеризующей многомерный вектор F :

$$P = F \cdot \widetilde{V}_F,$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,m} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N,1} & p_{N,2} & \dots & p_{N,m} \end{pmatrix}.$$

3) Определение значений переменных $p_{N+1,j}$, $j = \overline{1, m}$ на основе прогнозных моделей, полученных по данным предыстории процесса потребления и внешних факторов. Переменные $p_{i,j}$ каждой строки P_i некоррелированы между собой, что позволяет моделировать каждый вектор-столбец P_j независимо от других вектор-столбцов.

4) Восстановление сигнала F по формуле $F \approx P \cdot \widetilde{V}_F^T$. Ошибка воспроизведения сигнала при этом равна $\varepsilon = F - P \cdot \widetilde{V}_F^T$.

Результаты численных экспериментов показали, что комбинирование вейвлет анализа и метода главных компонент для различных сигналов F приводит к увеличению среднеквадратичного значения ошибки воспроизведения ε на 0,4–0,5 %, но при этом максимальное

значение $\max(\varepsilon)$ уменьшается на 4–13%. В экспериментах применялись ортогональные вейвлеты Добеши второго порядка и циклическое повторение сигнала на границах выборки F . Выборка F размером 96×48 содержала суточные графики электропотребления, относящиеся к рабочим дням недели.

Выводы

В данной работе были изложены особенности применения вейвлет анализа при моделировании временных рядов электропотребления. В частности была предложена матричная форма записи дискретного вейвлет преобразования и разработана методика формирования матрицы преобразования W . Комбинирование метода главных компонент и вейвлет преобразования привело к уменьшению максимального значения ошибки воспроизведения ε , но среднеквадратичное значение ошибки при этом увеличилось.

Литература

1. *Mallat S.* A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Trans. Patt. Anal. and Mach. Intell.—1989.—Vol. 11, № 7.—P. 674–693.
2. *Cohen A., Daubechies I., Vial P.* Wavelet bases on the interval and fast algorithms // J. of Appl. and Comput. Harmonic Anal.—1993.—Vol 1.—P. 54–81.
3. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов.—М.: Мир, 2005.—С. 309–315.—[Пер. с англ.]
4. *Bhavik R. Bakshi.* Multiscale PCA with application to multivariate statistical process monitoring // AIChE J.—1998.—Vol. 44, № 7.—P. 1596–1610.
5. *Седов А. В., Надтока И. И.* Системы контроля, распознавания и прогнозирования электропотребления: модели, методы, алгоритмы и средства.—Ростов-на-Дону: Ростовский университет, 2002.—320 с.

Седов Андрей Владимирович
Южный научный центр РАН
Россия, 344006, Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41;
Южно-Российский государственный технический университет
(Новочеркасский политехнический институт)
Россия, 346428, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132
E-mail: Sedov_A.V@mail.ru

Тришечкин Евгений Владимирович
Южно-Российский государственный технический университет
(Новочеркасский политехнический институт)
Россия, 346428, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132
E-mail: 5tj@rambler.ru

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ СИСТЕМ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ АЭРОЗОЛЕЙ

В. В. Семенов, Н. Н. Постоловский

Развитие аэрозольных технологий, возрастание технологических и экологических требований к допустимому содержанию механических примесей в газах обусловила повышение интереса к анализу дисперсности взвешенных частиц, определению их размеров и концентраций. Информация о дисперсности частиц необходима в самых разных областях науки и техники — в электронной, оптической, химической промышленности, порошковой металлургии, физике атмосферы и т. д. Весьма широк спектр проблем, связанных с анализом параметров аэродисперсных систем.

Развитие аэрозольных технологий, возрастание технологических и экологических требований к допустимому содержанию механических примесей в газах обусловило повышение интереса к анализу дисперсности взвешенных частиц, определению их размеров и концентраций. Информация о дисперсности частиц необходима в самых разных областях науки и техники — в электронной, оптической, химической промышленности, порошковой металлургии и т. д. Весьма широк спектр проблем, связанных с анализом параметров аэродисперсных систем, и в физике атмосферы. Аналогичные проблемы, связанные с контролем биологических взвешенных частиц — форменных элементов крови, бацилл и т. д. — важны и для медицины, биологии, где, помимо определения размеров и концентрации частиц, весьма важной является и классификация частиц по их форме, позволяющая качественно оценивать природу частиц.

Эти и другие практические задачи стимулируют интерес к развитию методов определения концентрации, размеров и формы взвешенных частиц.

Среди различных методов определения размеров и формы взвешенных частиц наиболее информативными являются телевизионные методы.

Основной целью данной работы является рассмотрение характеристик аэрозолей с целью выявления их особенностей при цифровой обработке их изображений в системах телевизионного анализа аэрозолей.

Реализация поставленной цели предполагает решение следующих задач:

- обзор методов представления и определения геометрических размеров частиц;
- построение структурной схемы телевизионного анализатора размера и формы частиц;
- рассмотрение основных стадий цифровой обработки изображений;
- разработка алгоритмов функционирования телевизионного анализатора при различных формах и геометрических параметрах аэрозолей;
- программная реализация разработанных алгоритмов в MATLAB.

Геометрические (линейные) размеры характеризуют размеры частиц «в чистом виде», в отличие от разного рода эквивалентных размеров, в частности, оптического. Существенно, что несферические частицы — весьма распространенный объект исследования — наиболее полно можно описать лишь набором их геометрических размеров [1].

Частицы обычно удобнее представлять сферическими или близкими к ним по форме. Размер частицы обычно характеризуют радиусом или диаметром. Для частиц неправильной формы диаметр часто сильно отличается от характерного размера. Двумя характеристиками размеров частиц служат диаметр Ферета и диаметр Мартина. Эти понятия вводят при аппроксимации размера частицы, определяемого из проекций нескольких частиц неправильной формы. Диаметр Ферета — это максимальное расстояние между краями каждой частицы, а диаметр Мартина — длина линии, которая делит частицу на две равные части. Проблему измерения можно упростить, если вместо диаметра Ферета и Мартина использовать диаметр проектированной поверхности. Его определяют из площади круга, имеющего такую же площадь, как проекция частицы (рис. 1).

Методы определения геометрических размеров частиц (их формы) можно разделить на две группы.

К первой группе относятся фотоэлектрические методы, основанные либо на анализе индикатрисы рассеяния частиц, либо на амплитудно-временном анализе импульсов, возникающих при пролете частицы через световой пучок — как правило, измерения их длительности или глубины модуляции. В этих методах предельная ча-

стота анализа частиц может быть весьма высокой — до 10^3 – 10^4 с⁻¹, что весьма важно для некоторых задач. Однако другие характеристики не вполне соответствуют требованиям практики.



Рис. 1. Три характеристики размера частицы.

Так, в методах, основанных на измерении длительности сигнала, возникающего при пролете частицы через световой пучок, соответствующей оптикой формируется пучок с явно неоднородным профилем интенсивности, например, резкими границами «свет-тень», и измеряется длительность импульсов, возникающих при пересечении частицей указанных неоднородностей. Нижний предел измерений по размерам при этом определяется разрешающей способностью формирующей оптики, глубиной резкости и составляет примерно 5–10 мкм.

В методах, основанных на измерении глубины модуляции сигнала, возникающего при пролете частицы через область интерференции двух лазерных пучков, указанный нижний предел измерений — менее 1 мкм. Однако при этом динамический диапазон измерений по размерам невелик — как правило, не более 10, что ограничивает область применения этих методов лишь частицами, не сильно отличающимися от монодисперсных.

Следует отметить, что указанные методы информации о форме не дают, а частицы неявно полагаются сферическими.

Чем сложнее форма частиц, тем большим количеством параметров она характеризуется, соответственно, тем больше необходимо измеряемых параметров и тем сложнее методы измерений. Однако, несмотря на разнообразие возможных геометрических форм, в подавляющем большинстве случаев с приемлемой для практики точностью эти формы можно аппроксимировать эллипсоидами (в предельных случаях — «иглами» и «дисками») [4].

Ко второй группе относятся методы, основанные на формировании изображения частиц и последующем анализе этих изображений — эти методы обычно называют телевизионными. Основное их достоинство — высокая информативность, возможность определения формы проекции частицы на выделенную плоскость — так называемую плоскость наводки. При этом, однако, предельная частота анализа частиц сравнительно невелика, как правило, она не превосходит 50 с^{-1} . Кроме того, при анализе именно взвешенных частиц (не на подложке) для уменьшения погрешностей измерений требуется ограничение счетного объема вдоль оптической оси светового пучка допустимой глубиной резкости, что достигается весьма сложным путем.

Суть телевизионных методов состоит в том, что частицы освещают световым пучком и формируют соответствующей оптикой на ПЗС видеокамеры их изображения, по которым и судят о размерах частиц. При этом каждая частица дает лишь одно изображение, соответствующее проекции частицы лишь на одну плоскость (перпендикулярную оси светового пучка) [2].

Метод открывает возможность не только в реальном времени фиксировать положение частицы, но и производить измерение размеров и плотности.

В результате анализа существующих методов определения геометрических размеров частиц, структурную схему анализатора размера и формы частиц, находящихся в стационарном состоянии, можно представить в виде, изображенном на рис. 2.

Исследуемые частицы помещаются на подложку микроскопа, к окуляру которого прикреплена видеокамера. Увеличенное изображение частиц снимается видеокамерой и передается на плату видеозахвата, где происходит его оцифровка. После этого происходит обработка оцифрованного изображения соответствующим программным обеспечением, а результаты обработки заносятся в базу данных.

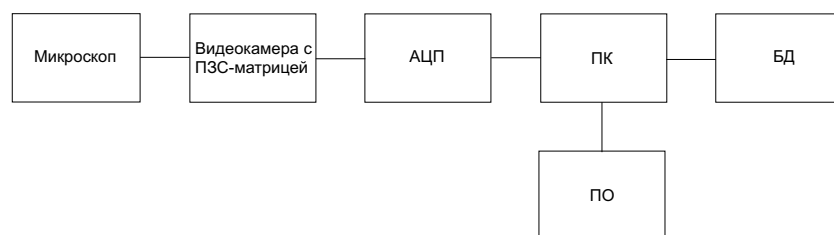


Рис. 2. Структурная схема анализатора частиц, находящихся в стационарном состоянии.

Информации, содержащейся только в одном изображении, недостаточно для однозначной оценки формы даже сфероидов, не говоря о трехслойных эллипсоидах. Чтобы получить второе изображение, соответствующее проекции частицы на перпендикулярную плоскость, частицу необходимо осветить вторым пучком, перпендикулярным первому. В обычных схемах для освещения частицы вторым пучком, перпендикулярным первому, требуется и второй регистратор, что существенно усложняет конструкцию прибора (поскольку необходимо обеспечить регистрацию изображений одной и той же частицы). В то же время в приборах подобного рода поле зрения обычно существенно превосходит размеры частиц, и в принципе возможно «полезное» использование этого обстоятельства. В разрабатываемом анализаторе световой пучок на выходе из потока разворачивают на 90° и вновь пропускают через поток. В результате каждая частица освещается двумя световыми пучками, перпендикулярными друг другу. При этом дополнительная оптическая система строит в области потока действительное изображение частицы, соответствующее ее освещению исходным пучком, а «свободная часть» развернутого пучка дает возможность получить второе изображение. Т. е. в данном случае достаточно лишь одного регистратора. Исходя из вышесказанного, структурная схема, соответствующая системе анализа взвешенных частиц, будет несколько отличаться от схемы, изображенной на рис. 2 [3].

Для исследования частиц, движущихся в потоке, необходим некий счетный объем, в пределах которого они будут наблюдаться, и оптическая система, состоящая из линз и зеркал, которая позволяет регистрировать изображения частиц во взаимно перпендикулярных плоскостях. Поэтому структурную схему анализатора взвешенных частиц можно представить в виде, изображенном на рис. 3.

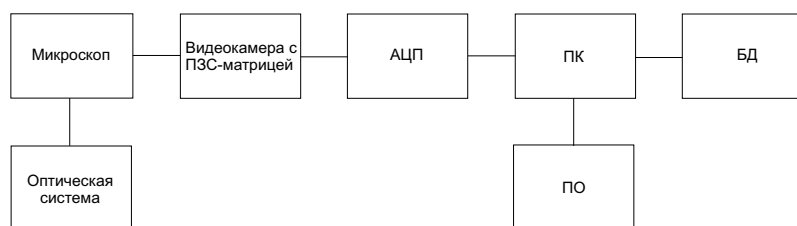


Рис. 3. Структурная схема динамического анализатора частиц.

При измерениях непосредственно в потоке для корректных измерений необходимо ограничить счетный объем вдоль оси светового пучка допустимой глубиной резкости, что является не простой задачей и решается, например, выбором определенной степени когерентности светового пучка и дополнительной нетривиальной обработкой изображений [4].

Теперь рассмотрим основные стадии цифровой обработки изображений. Обработку изображения можно разделить на две большие категории: методы, в которых на входе и на выходе имеются изображения, и методы, где на вход поступают изображения, а на выходе возникают признаки и атрибуты, выделенные на основании этих изображений [5, 6]. Такая организация сведена в схему, изображенную на рис. 4. Эта схема подразумевает принципы всех методов обработки, которые могут применяться к изображениям в различных целях и, возможно, с различными получаемыми результатами.

Регистрация изображения — первый из процессов, показанных на рис. 4. В общем случае стадия регистрации изображения включает некоторую предобработку, например, масштабирование.

Улучшение изображения входит в число наиболее простых и впечатляющих областей цифровой обработки изображений. По существу, за методами улучшения изображений стоит идея выявления плохо различимых деталей или просто подчеркивания интересных характеристик на исходном изображении. Известным примером улучшения является усиление контраста изображения, потому что в результате «оно выглядит лучше». Под контрастом обычно понимают разность максимального и минимального значений яркости. Преобразование уровней яркости осуществляется по формуле

$$g_i = a + bf_i, \quad (1)$$

где f_i — старое значение яркости i -го пиксела, g_i — новое значение, a, b — коэффициенты.



Рис. 4. Основные стадии цифровой обработки изображений.

Важно иметь в виду, что улучшение качества — весьма субъективная область в обработке изображений.

Восстановление изображений — это область, также связанная с повышением визуального качества изображения, однако, в отличие от собственно улучшения, критерии которого субъективны, восстановление изображения является объективным в том смысле, что методы восстановления изображений опираются на математические или вероятностные модели искажений изображения. Методы восстановления основаны на моделировании процессов искажения и применении обратных процедур для воссоздания исходного изображения.

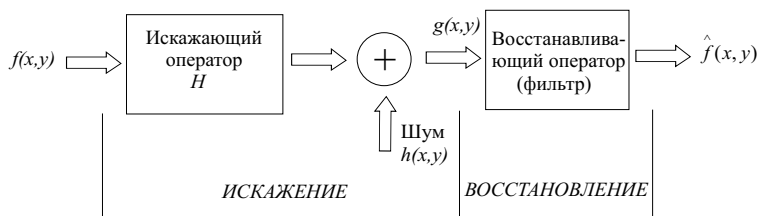


Рис. 5. Модель процесса искажения/восстановления изображения.

Как показано на рис. 5, модель процесса искажения предполагает действие некоторого искажающего оператора H на исходное изображение $f(x, y)$, что после добавления аддитивного шума дает искаженное изображение $g(x, y)$. Задача восстановления состоит в построении некоторого приближения $\hat{f}(x, y)$ исходного изображения по заданному (искаженному) изображению $g(x, y)$, некоторой информации относительно искажающего оператора H и некоторой информации относительно аддитивного шума $\eta(x, y)$. Мы хотим, чтобы наше приближение было как можно ближе к исходному изображению, и, в принципе, чем больше мы знаем об операторе H и о функции η , тем ближе будет функция $\hat{f}(x, y)$ к функции $f(x, y)$. В основе подхода лежит использование операторов (фильтров), восстанавливающих изображение.

Если H — линейный трансляционно-инвариантный оператор, то искаженное изображение может быть представлено в пространственной области в виде

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y), \quad (2)$$

где $h(x, y)$ — функция, представляющая искажающий оператор в пространственной области, а символ «*» используется для обозначения свертки. Свертка в пространственной области эквивалентна умножению в частотной области, поэтому задающее модель равенство может быть эквивалентным образом записано в частотной области:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v), \quad (3)$$

где обозначенные заглавными буквами функции суть фурье-образы соответствующих функций.

Также можно предположить, что H — это тождественный оператор, и мы имеем дело только с искажениями, вызванными наличием шума.

Основные источники шума на цифровом изображении — это сам процесс его получения (оцифровки), а также процесс передачи. Работа сенсоров зависит от различных факторов, таких как внешние условия в процессе видеосъемки и качество сенсоров. Например, в процессе получения изображения с помощью фотокамеры с ПЗС матрицей основными факторами, влияющими на величину шума, являются уровень освещенности и температура сенсоров. В процессе передачи изображения могут искажаться помехами, возникающи-

ми в каналах связи. Наконец, возможны геометрические искажения, изображение может быть расфокусировано.

Пусть $f(x, y)$ — некоторое изображение, x, y — координаты. Реальное растровое изображение имеет конечные размеры $A \leq x \leq B$, $C \leq y \leq D$ и состоит из отдельных пикселей, расположенных с некоторым шагом в узлах прямоугольной сетки. Линейное преобразование изображения можно описать выражением

$$g(x, y) = \iint (x', y') h_1(x, y, x', y') dx' dy'. \quad (4)$$

Выражение (4), где интегрирование ведется по всей области определения x и y , характеризует преобразование всего изображения целиком — глобальную фильтрацию. Ядро преобразования $h_1(x, y, x', y')$ в оптике именуют функцией рассеяния точки (ФРТ). Это изображение точечного источника на выходе оптической системы, которое уже является не точкой, а некоторым пятном. В соответствии с (4), все точки изображения $f(x', y')$ превращаются в пятна, происходит суммирование (интегрирование) всех пятен. Не следует думать, что эта процедура обязательно приводит к расфокусировке изображения, наоборот, можно подобрать такую ФРТ, которая позволит сфокусировать расфокусированное изображение.

На практике глобальная фильтрация применяется редко. Чаще используют локальную фильтрацию, когда интегрирование и усреднение проводится не по всей области определения x и y , а по сравнительно небольшой окрестности каждой точки изображения. Функция рассеяния точки при этом имеет ограниченные размеры. Достоинством такого подхода является хорошее быстроедействие. Линейное преобразование принимает вид:

$$g_{ij} = \sum_D a_{kI} f_{1+kj+1}. \quad (5)$$

При обработке растровых изображений, которые состоят из отдельных пикселей, интегрирование заменено суммированием. Проще всего реализовать ФРТ конечных размеров в виде прямоугольной матрицы форматом $N \times N$. N может быть равным 3, 5, 7 и т. д.

Обработка цветных изображений. Обработку цветных изображений можно условно разделить на две основные области: обработку изображений в натуральных цветах и обработку изображений в

псевдоцветов. В первом случае рассматриваемые изображения обычно формируются цветными устройствами регистрации изображения, такими, как цветная телевизионная камера или цветной сканер. Во втором случае задача состоит в присвоении цветов некоторым значениям интенсивности монохромного сигнала или некоторым диапазонам изменения его интенсивности.

Вейвлеты образуют фундамент для представления изображений с несколькими степенями разрешения одновременно. В частности, этот аппарат используется применительно к сжатию данных изображения, а также для построения пирамидального представления, при котором изображение поэтапно разбивается на все более мелкие фрагменты.

Сжатие, как следует из самого названия, относится к методам уменьшения объема памяти, необходимого для хранения изображения, или сужения полосы пропускания канала, требуемой для его передачи.

Морфологическая обработка связана с инструментами для извлечения таких компонент изображения, которые могут быть полезны для представления и описания формы.

Сегментация разделяет изображение на составные части или объекты. В целом автоматическая сегментация принадлежит к числу самых трудных задач цифровой обработки изображений.

Представление и описание почти всегда следуют непосредственно за этапом сегментации, на выходе которого обычно имеются лишь необработанные данные о пикселях, которые либо образуют границу области (т. е. дается множество пикселей, отделяющих одну область изображения от другой), либо представляют все точки самих областей. В обоих случаях необходимо преобразовать данные в форму, пригодную для компьютерной обработки.

Распознавание представляет собой процесс, который присваивает некоторому объекту идентификатор на основании его описателей. Мы считаем, что сфера цифровой обработки изображений заканчивается разработкой методов распознавания отдельных объектов.

Из указанных методов обработки необходимо для нашего случая применить алгоритм функционирования системы телевизионного анализа изображений.

Рассмотрим этот алгоритм. Наблюдаемые частицы могут иметь самые различные формы [7].

1. Изометрические частицы, для которых в первом приближении все три размера совпадают. К этому классу относятся сферы, правильные многогранники или частицы, близкие к ним по форме. Большинство научных представлений о поведении аэрозолей относятся к изометрическим частицам.

2. Пластины — частицы, имеющие два длинных размера и один короткий. К этому классу относятся лепестки или их кусочки, чешуйки, диски.

3. Волокна — частицы, вытянутые в одном направлении и имеющие сравнительно небольшие размеры в двух других. К их числу относятся призмы, иглы, нити или минеральные волокна, например, волокна асбеста.

Составим алгоритм (рис. 6), основываясь на размерах частиц.

Для начала нужно определить форму частицы. Если все три размера совпадают — это изометрическая (сферическая) частица, если нет — значит, частица либо пластина, либо волокно.

Далее каждый из классов разделим еще на две группы, распределив по размерам. С каждой из групп проведем следующие операции.

1. Считывание и отображение изображений.
2. Улучшение контраста изображений.
3. Пространственная (линейная) фильтрация: использование медианного фильтра для удаления шума на изображении.
4. Бинаризация изображений.
5. Устранение шума.
6. Сложение с изначальным изображением.
7. Построение гистограммы распределения объектов изображения, полученного в результате гранулометрической обработки.
8. Построение гистограммы распределения числовых значений площадей объектов.

Обзор программного обеспечения показал, что наиболее перспективным программным продуктом для телевизионного анализа изображений является программа MATLAB.

MATLAB является языком высокого уровня для выполнения технических и научных вычислений. В нем интегрированы вычисления, визуализация и программирование в удобной пользовательской среде, в которой задачи и их решения выражаются с помощью привычных математических обозначений [5].

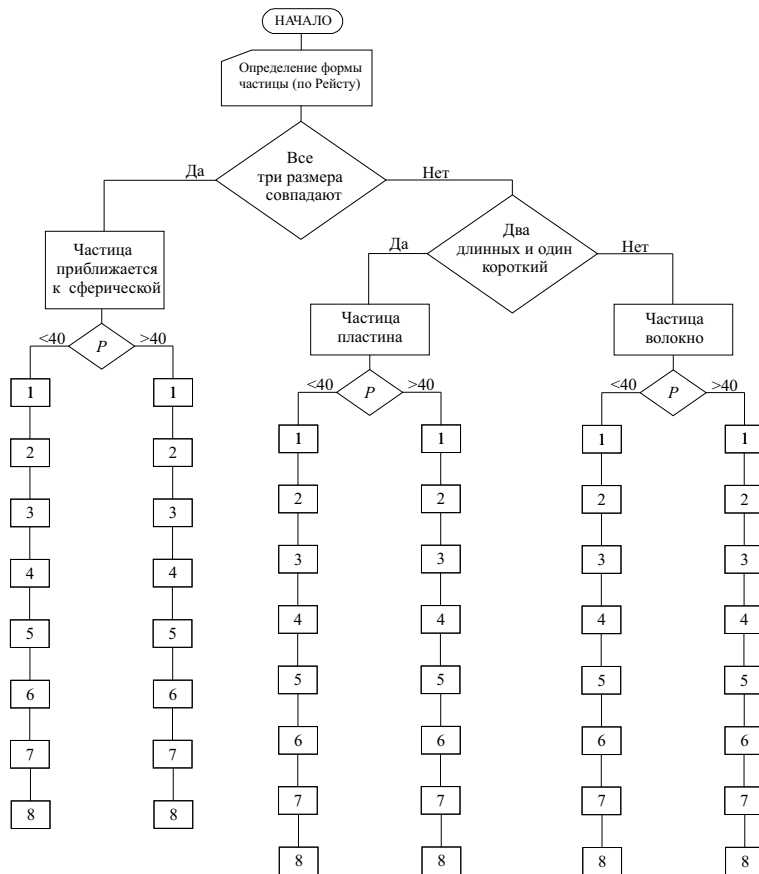


Рис. 6. Алгоритм функционирования телевизионного анализатора.

Многие функции приложения представляются в системе MATLAB в виде *M*-файлов. В них реализованы наиболее известные алгоритмы обработки изображений. Также существует возможность просмотра программных кодов функций, которые реализует данные алгоритмы. На примере ниже представлены частицы с большими размерами. Так же показан код и полученные результаты.

% Копия обработки файла изображения частиц.

% Очистим рабочее пространство MATLAB от всех переменных и закроем открытые окна отображений.

```
clear, close all;  
% Считывание и отображение изображений.  
I = imread('6.bmp');  
% Отображения считанного изображения.  
imshow(I);
```

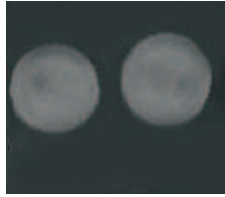


Рис. 7. Исходное изображение.

```
% Улучшение контраста изображений.  
figure, imhist(I);  
% Пространственная (линейная) фильтрация: использование ме-  
дианного фильтра для удаления шума на изображении.  
L = medfilt2(I,[6 6]);  
% Визуализация результата.  
figure, imshow(L);  
% Бинаризация по Лангранжу.  
BWdfill=L<46; figure, imshow(BWdfill);  
% Сохранение полученного изображения в файл.  
imwrite (BWdfill, 'qqq.png');
```



Рис. 8. Изображение после бинаризации.

```
% Соединение с изначальным изображением.  
BWoutline=bwperim(BWdfill);  
Segout=I;  
Segout(BWoutline)=255;  
figure, imshow(Segout), title('outlined original image');  
imwrite (Segout, 'qqq2.png');
```

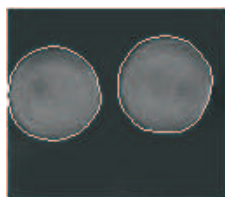


Рис. 9. Сложение изображений.

```
% Сегментация в 2 видах.
Q=bwlabel(BWdfill);
RGB=label2rgb(Q);
RGB2=label2rgb(Q, 'spring', 'c', 'shuffle');
figure, imshow(RGB);
figure, imshow(RGB2);
```



а) б)

Рис. 10. Сегментация изображения.

При решении задач гранулометрии результат измерения интенсивностей элементов исследуемого изображения представляется в виде функции. Эта функция привязана к размерам исходного изображения. Каждому объекту изображения присваиваются определенные параметры, основной из которых — размер. На основании этих параметров производится построение гистограммы распределения объектов по определенным признакам.

Вторым параметром, на основании которого осуществляется распределение, является интенсивность (яркость) объектов изображения.

```
for counter=0:22;
remain=imopen(BWdfill, strel('disk', counter));
intensity_area(counter+1)=sum(remain(:));
end figure,plot(intensity_area, 'm - *'), grid on;
```

```

title('Функция зависимости суммы пикселей раскрытого изобра-
жения от их радиуса');
xlabel('радиус раскрытия (в пикселях)');
ylabel('значение суммы пикселей раскрытых объектов (интен-
сивность)');

```

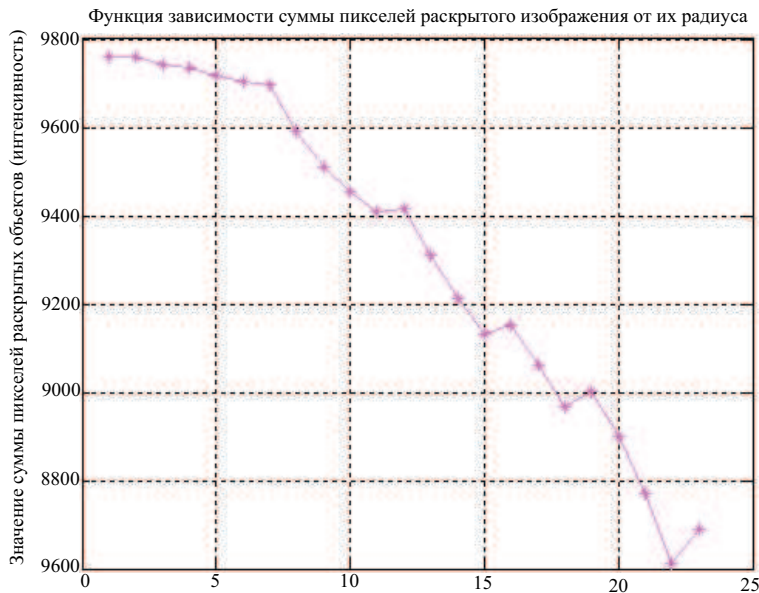


Рис. 11. Гистограммы распределения объектов по определенным признакам (размер и интенсивность (яркость) объектов изображения).

Распределение объектов изображения, полученное в результате гранулометрической обработки, характеризуется также рядом параметров.

Одним из них является первая производная, которая вычисляется при помощи функции *DIFF*.

```

intensity_area_prime=diff(intensity_area);
figure, plot(intensity_area_prime, 'm-*'), grid on;
title('Гранулометрия частиц');
set(gca, 'xtick', [0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22]);
xlabel('радиус частиц (в пикселях)');
ylabel('зависимость суммы пикселей частиц от радиуса');

```

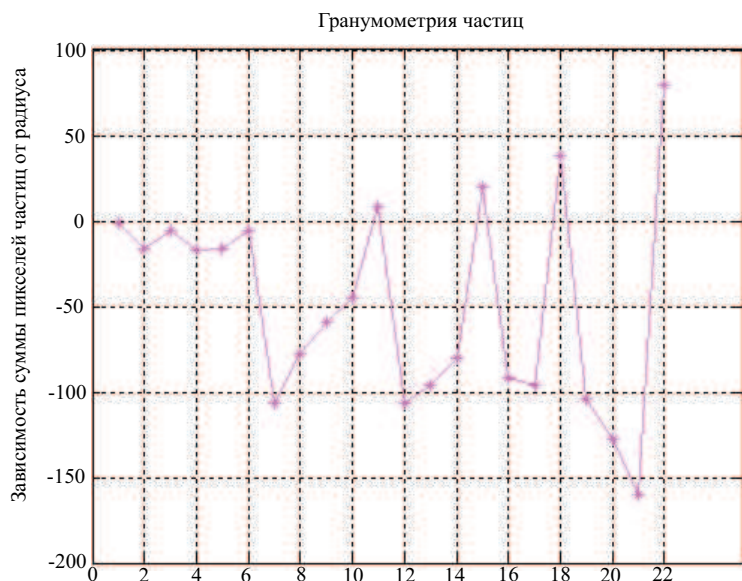


Рис. 12. Гистограммы распределения объектов по определенным признакам (радиус частиц (в пикселях) и «зависимость суммы пикселей частиц от радиуса»).

Проанализируем также распределение объектов интереса по площади (рис. 13). Для этого необходимо сначала также выполнить поиск объектов.

```
[B1 num]=bwlabel(BWdfill1,8);
```

Далее необходимо вычислить площади объектов

```
feats=imfeature(B1,'Area',8);
```

и построить гистограмму распределения числовых значений площадей объектов.

```
figure, hist([feats.Area]);
```

```
title('распределение объектов интереса по площади');
```

```
xlabel('x');
```

```
ylabel('y');
```

Таким образом, применяя вышеуказанные функции MATLAB, можно получать необходимую обработку цифровых изображений аэрозолей для формирования базы данных (знаний), характеризующих форму и оптические параметры промышленных аэрозолей.

В дальнейшем это позволит восстанавливать и визуализировать форму любой частицы, а также использовать данные знания для моделирования датчиков запыленности, основанных на рассеянии и ослаблении падающего на частицу излучения.

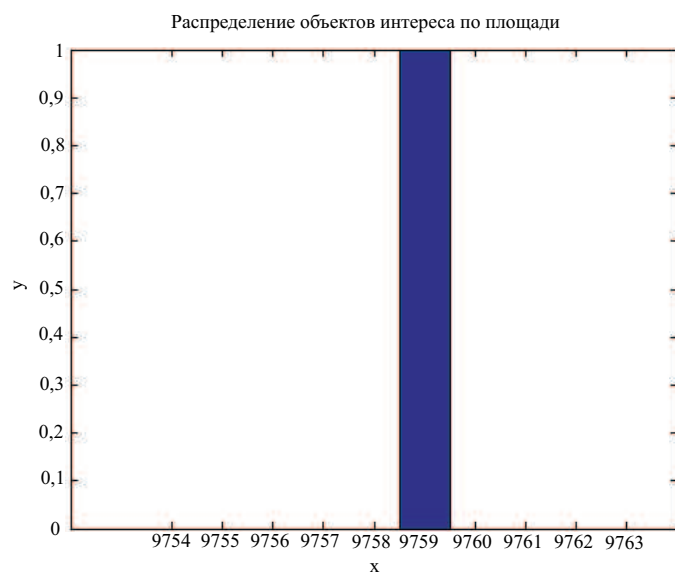


Рис. 13. Гистограмма распределения числовых значений площадей объектов.

Литература

1. Райст П. Аэрозоли. Введение в теорию.—М.: Мир, 1987.—200 с.—[Пер. с англ.].
2. Беляев С. П. Оптоэлектронные методы изучения аэрозолей.—М.: Энергоиздат, 1981.—232 с.
3. Смирнов В. В. Выделение и анализ характерных размеров и объектов методами телевизионной автоматики // Техника кино и телевидения.—1970.—№ 12.—С. 51–57.
4. Коломиец С. М. Устройство для измерения и концентрации взвешенных частиц // Бюллетень «Открытия, изобретения».—1991.—№ 15.—С. 49–56.
5. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB.—М.: Техносфера, 2006.—616 с.
6. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений.—М.: Техносфера, 2005.—1072 с.
7. Райст П. Аэрозоли. Введение в теорию.—М.: Мир, 1987.—278 с.

СЕМЕНОВ Владимир Владимирович
Южно-Российский госуниверситет экономики и сервиса
Россия, 346500, Шахты, ул. Шевченко, 147
E-mail: vvsemenov@mail.ru

Постоловский Николай Николаевич
Волгодонский институт сервиса (филиал) ГОУВПО ЮРГУЭС
Россия, 347375, Волгодонск, ул. Черникова, 6
E-mail: nik2183@mail.ru

УТОЧНЕНИЕ МЕТОДА РАСЧЕТА ИНФЛЯЦИОННОГО РОСТА ЦЕН НА УРОВНЕ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КОРЗИНЫ

В. П. Семенов, В. А. Попов

В работе предложен новый метод расчета инфляции, учитывающий непрерывность инфляционного процесса. Приведены формулы, позволяющие определить рост цены потребительской корзины на основе официальных данных о ежемесячной инфляции. Рассчитаны ставки инфляции по равномерно заполняемой потребительской корзине за период с января 1991 г. по январь 2008 г.

Традиционный метод расчета прироста индекса потребительских цен ориентируется на статистические данные, привязанные к началу и концу выбранного периода. При этом игнорируется то обстоятельство, что в течение самого периода при наличии заметной инфляции происходит практически непрерывный рост цены потребительской корзины. В невыгодном положении оказывается тот, кто заходит в магазин часто и покупает понемногу. Более экономным является покупатель, который закупает весь необходимый набор товаров в начале периода, пока цены выросли незначительно. Очевидно, что в условиях инфляции две эти тактики в денежном плане будут оцениваться по разному.

Обыватель, совершает покупки необходимых товаров и услуг m раз в течение одного периода, например месяца. Каждый раз, покупая некий стандартный набор, он замечает, что его цена увеличилась по сравнению с предыдущим разом в соответствии с соотношением $N_i = N_{i-1} \cdot \left(1 + \frac{H}{m}\right)$. (Здесь $i = 1, 2, \dots, m$ — номер покупки в течение одного периода.) Совершая покупку, обыватель каждый раз капитализирует цену потребительской корзины по ставке $\frac{H}{m}$. В соответствии с этим закон инфляционного роста цен выглядит следующим образом:

$$N(n) = N_0 \left(1 + \frac{H}{m}\right)^{mn}, \quad (1)$$

где связь между номинальной (H) и эффективной (h) ставками инфляции, определяется из соотношения

$$N_0 \left(1 + \frac{H}{m}\right)^{mn} = N_0(1 + h)^n.$$

Откуда

$$h = \left(1 + \frac{H}{m}\right)^m - 1; \quad H = m(\sqrt[m]{1+h} - 1). \quad (2)$$

При этом, если $m > 1$, то эффективная ставка в силу закона сложных процентов всегда будет больше номинальной.

По своей экономической сути инфляция представляет собой непрерывный процесс. В самом деле, товары и услуги приобретаются громадным количеством лиц, в разное время, с разной частотой, в различных регионах, расположенных зачастую в разных часовых поясах. Каждая такая покупка, как уже было отмечено, капитализирует цену товара, и усреднение этого процесса по всем участникам потребительского рынка приводит к необходимости считать « m » в соотношении (1) очень большим (а в пределе — бесконечно большим). Таким образом, рост цены потребительской корзины определяется условием $\lim_{m \rightarrow \infty} N_0 \left(1 + \frac{H}{m}\right)^{mn}$, что приводит к соотношению

$$N(n) = N_0 \cdot e^{Hn}. \quad (3)$$

При этом связь между номинальным и эффективным уровнями инфляции за рассматриваемый период определяется соотношением $N_0 e^{Hn} = N_0(1 + h)^n$ и имеет вид:

$$H = \ln(1 + h); \quad h = e^H - 1.$$

Подчеркнем, что измеряемым параметром здесь является h , а H — величина чисто расчетная.

До сих пор мы использовали упрощающее предположение, что инфляционная ставка h за рассматриваемый период остается неизменной. Однако более реалистичным является предположение считать ее зависящей от времени, т. е. $h = h(t)$; $H = H(t)$. В этом случае соотношение (3) обобщается, приобретая вид

$$N(n) = N_0 \cdot e^{\int_0^n H(t) dt}.$$

И это есть самый общий закон роста цен в условиях переменной инфляции и непрерывного спроса.

Рост стоимости реализуемой подобным образом потребительской корзины определяется ставкой инфляции X , равной

$$X = \frac{h}{H} - 1.$$

Назовем эту величину ставкой инфляции по равномерно заполняемой потребительской корзине (ставкой РЗК).

Пусть $m = 2$, т. е. обыватель посетил магазин дважды: в начале и середине периода. В этом случае

$$h = \left(1 + \frac{H}{2}\right)^2 - 1 \quad \text{и} \quad X = \frac{H}{4}.$$

Если $m = 3$, то

$$X = \frac{H}{3} + \frac{H^2}{9}.$$

Тем самым, видно, что чем чаще (и, следовательно, в меньших количествах) совершаются покупки, тем больше ставка РЗК.

Переходя в этих выражениях к пределу $m \rightarrow \infty$, приходим к соотношениям:

$$N_{\Sigma} = \frac{N_0(e^H - 1)}{H}; \quad X = \frac{(e^H - 1)}{H} - 1.$$

Или, если выразить все через эффективную ставку инфляции:

$$N_{\Sigma} = \frac{N_0 h}{\ln(1 + h)}; \quad X = \frac{h}{\ln(1 + h)} - 1.$$

В связи с вышеизложенным, представляет интерес выполнить аналогичные расчеты, используя данные по инфляции в России, предоставленные Госкомстатом. В качестве исследуемого рассмотрим период с начала января 1991 г. по конец декабря 2008 г. В следующей таблице с точностью до третьего знака после запятой приведены месячные ставки инфляции $h = \frac{P}{100}$ (где p — процент роста цен по отношению к предыдущему месяцу и непрерывные номинальные ставки $H = \ln(1 + h)$).

Данные опубликованы в ежемесячных изданиях Госкомстата России «Социально-экономическое положение России», а также в бюллетенях банковской статистики Центрального банка Российской Федерации.

	1991		1992		1993	
	h	H	h	H	h	H
Январь	0,062	0,06	2,453	1,239	0,258	0,23
Февраль	0,048	0,047	0,38	0,322	0,247	0,221
Март	0,063	0,061	0,299	0,262	0,201	0,183
Апрель	0,635	0,491	0,217	0,196	0,187	0,171
Май	0,03	0,029	0,119	0,112	0,181	0,166
Июнь	0,012	0,012	0,191	0,175	0,05	0,199
Июль	0,006	0,006	0,106	0,101	0,05	0,224
Август	0,005	0,005	0,086	0,083	0,04	0,26
Сентябрь	0,011	0,011	0,115	0,109	0,08	0,23
Октябрь	0,035	0,034	0,229	0,206	0,15	0,195
Ноябрь	0,089	0,085	0,261	0,232	0,14	0,164
Декабрь	0,121	0,114	0,252	0,225	0,16	0,125

	1994		1995		1996	
	h	H	h	H	h	H
Январь	0,179	0,165	0,178	0,164	0,041	0,04
Февраль	0,108	0,103	0,11	0,104	0,028	0,028
Март	0,074	0,071	0,089	0,085	0,028	0,028
Апрель	0,085	0,082	0,085	0,082	0,022	0,022
Май	0,069	0,067	0,079	0,076	0,016	0,016
Июнь	0,06	0,058	0,067	0,065	0,012	0,012
Июль	0,053	0,052	0,054	0,053	0,007	0,007
Август	0,046	0,045	0,046	0,045	0,00	0,0
Сентябрь	0,08	0,077	0,045	0,044	0,002	0,002
Октябрь	0,15	0,14	0,047	0,046	0,012	0,012
Ноябрь	0,146	0,136	0,046	0,045	0,019	0,019
Декабрь	0,164	0,152	0,032	0,031	0,014	0,014

	1997		1998		1999	
	H	H	h	H	h	H
Январь	0,023	0,023	0,015	0,015	0,084	0,081
Февраль	0,015	0,015	0,009	0,009	0,041	0,04
Март	0,014	0,014	0,006	0,006	0,028	0,028
Апрель	0,01	0,01	0,004	0,004	0,03	0,03
Май	0,009	0,009	0,005	0,005	0,022	0,022
Июнь	0,011	0,011	0,001	0,001	0,019	0,019
Июль	0,009	0,009	0,022	0,002	0,028	0,028
Август	0,000	0,000	0,37	0,36	0,012	0,012
Сентябрь	0,000	0,000	0,384	0,325	0,015	0,015
Октябрь	0,002	0,002	0,045	0,044	0,014	0,014
Ноябрь	0,006	0,006	0,057	0,055	0,012	0,012
Декабрь	0,01	0,01	0,116	0,11	0,013	0,013

	2000		2001		2002	
	h	H	h	H	h	H
Январь	0,023	0,023	0,028	0,028	0,031	0,031
Февраль	0,01	0,01	0,023	0,023	0,012	0,012
Март	0,006	0,006	0,019	0,019	0,011	0,011
Апрель	0,009	0,009	0,018	0,018	0,012	0,012
Май	0,019	0,019	0,018	0,018	0,017	0,017
Июнь	0,015	0,015	0,016	0,016	0,005	0,005
Июль	0,018	0,018	0,005	0,005	0,007	0,007
Август	0,01	0,01	0,0	0,0	0,001	0,001
Сентябрь	0,013	0,013	0,06	0,06	0,004	0,004
Октябрь	0,021	0,021	0,011	0,011	0,011	0,011
Ноябрь	0,012	0,012	0,014	0,014	0,016	0,016
Декабрь	0,015	0,015	0,01	0,016	0,016	0,015

	2003		2004		2005	
	h	H	h	H	h	H
Январь	0,024	0,024	0,018	0,018	0,026	0,026
Февраль	0,016	0,016	0,01	0,01	0,12	0,12
Март	0,011	0,011	0,008	0,008	0,013	0,013
Апрель	0,01	0,01	0,01	0,01	0,011	0,011
Май	0,008	0,008	0,007	0,007	0,008	0,008
Июнь	0,008	0,008	0,008	0,008	0,006	0,006
Июль	0,007	0,007	0,009	0,009	0,005	0,005
Август	0,0	0,0	0,004	0,004	0,0	0,0
Сентябрь	0,003	0,003	0,004	0,004	0,003	0,003
Октябрь	0,01	0,01	0,011	0,011	0,006	0,006
Ноябрь	0,01	0,01	0,011	0,011	0,007	0,007
Декабрь	0,011	0,011	0,011	0,011	0,008	0,008

	2006		2007		2008	
	h	H	h	H	h	H
Январь	0,024	0,024	0,017	0,017	0,023	0,023
Февраль	0,017	0,017	0,011	0,011	0,012	0,012
Март	0,008	0,008	0,006	0,006	0,012	0,012
Апрель	0,004	0,004	0,006	0,006	0,014	0,014
Май	0,005	0,005	0,006	0,006	0,014	0,014
Июнь	0,003	0,003	0,003	0,003	0,01	0,01
Июль	0,007	0,007	0,01	0,009	0,01	0,01
Август	0,002	0,002	0,0	0,001	0,004	0,004
Сентябрь	0,001	0,001	0,008	0,008	0,008	0,008
Октябрь	0,003	0,003	0,016	0,016	0,009	0,009
Ноябрь	0,006	0,006	0,012	0,012	0,008	0,008
Декабрь	0,008	0,008	0,011	0,011	0,007	0,007

Усредненная по времени месячная ставка инфляции за период с 1998 по 2008 гг., найденная в соответствии с (2), оказалась равной:

$$\bar{h} = \sqrt[132]{6020,039} - 1 \approx 0,017,$$

т. е. инфляция в течение этого времени составляла, в среднем $\approx 1,7\%$ в месяц.

Усредненная месячная ставка инфляции за весь рассмотренный период с 1991 по 2008 гг. равна $\bar{h} = \sqrt[216]{49535,455} - 1 \approx 0,0513$, т. е. инфляция в течение этого времени составляла, в среднем $5,13\%$ в месяц.

Выводы

Расчет темпа инфляции с учетом динамики наполнения потребительской корзины позволяет уточнить его величину. При этом ставка инфляции, вычисленная на основе концепции равномерно заполняемой потребительской корзины, всегда оказывается меньше таковой, рассчитанной в соответствии с методикой, используемой Роскомстатом. Различие является пренебрежительно малым при умеренных темпах инфляции (2–5% в год), и достигает величин, которыми уже нельзя пренебречь при галопирующей инфляции (20–100% в год) и тем более при наличии гиперинфляции в сотни и тысячи процентов. Поскольку подход, учитывающий, что потребитель даже при быстром удорожании товаров психологически менее готов закупать их заранее в большом количестве, а, скорее всего, будет регулярно посещать магазины, расчет роста цен потребительской корзины на основании концепции РЗК, по мнению авторов, является более реалистичным и точным.

СЕМЕНОВ Владимир Петрович
Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова
Россия, 115054, Москва, Стремянный пер., 28
E-mail: vlapopov@gmail.com

Попов Владимир Александрович
Финансовая академия при Правительстве РФ
Россия, 115093, Москва, Ленинградский пр-т, 49
E-mail: vlapopov@gmail.com

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О ПОВЕДЕНИИ ПОДВЕСНОГО БЛОКА СТИРАЛЬНОЙ МАШИНЫ, ПОДВЕРЖЕННОГО СЛУЧАЙНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ

В. Г. Фетисов, С. Н. Алехин, И. В. Фетисов

Решена слабо связанная система дифференциальных уравнений, описывающих динамический процесс колебаний неуравновешенного ротора в подвесном блоке стиральной машины барабанного типа и его устойчивого состояния при случайных воздействиях.

Большинство математических моделей динамики поведения подвесного блока стиральной машины основано на предположении о детерминированном воздействии и постоянстве параметров в рассматриваемой механической системе [1–3].

Решение же актуальной задачи о случайных колебаниях неуравновешенного ротора подвесного блока и его устойчивого состояния, обусловленных изменением пространственных координат центра масс отжимаемых изделий с учетом креплений упругих элементов и демпферов, их пространственной ориентации, коэффициентов жесткости и диссипации, все еще далеко от своего завершения [3–7].

Так как построение расчетной схемы необходимо для теоретического определения амплитудно-частотных характеристик подвесной части стиральных машин барабанного типа [3], то полагаем, что:

- подвесная часть представляет собой твердое тело, связанное с корпусом машины посредством упругих элементов, параллельно которым действуют гасители колебаний — демпферы;
- корпус машины, выполненный в виде пространственной конструкции, является абсолютно жесткой неподвижной системой (статор);
- внутреннее и внешнее трение отсутствует.

Для определения положения подвесной части в пространстве имеем неподвижную систему координатных осей $O\xi\eta\zeta$ и систему подвижных осей O_1XYZ . Последняя жестко связана с центром масс подвесной части. В начальный момент времени полюса обеих систем

совмещены. Ось X направлена по оси вращения барабана, а направления двух других осей Y и Z совпадают с направлениями главных центральных осей жесткости подвесной части.

В качестве обобщенных координат служат линейные перемещения центра масс всей подвесной части $q_1 = \xi$, $q_2 = \eta$, $q_3 = \zeta$ и три угла поворота тела относительно осей инерциальной (неподвижной) системы $q_4 = \alpha$, $q_5 = \beta$, $q_6 = \gamma$.

Упругий элемент и демпфер представляют собой на расчетной схеме параллельные элементы, которые расположены взаимно перпендикулярно, направлены по главным осям жесткости и образуют, таким образом, систему координатных осей $O_s X_s Y_s Z_s$, где s — номер спаренного элемента.

Координаты точки крепления s -го спаренного элемента обозначим через коэффициенты демпфирования и жесткости в направлении соответствующих осей через b_{X_s} , b_{Y_s} , b_{Z_s} и c_{X_s} , c_{Y_s} , c_{Z_s} .

Предполагалось также, что каждый демпфер и упругий элемент не воспринимают вращательных воздействий.

Как видим, данная расчетная схема соответствует всем конструктивным схемам подвески моечного узла машин барабанного типа.

Так, если упругая подвеска не имеет демпферов, то принимается, что все значения диссипации равны нулю $b_{X_s} = 0$, $b_{Y_s} = 0$, $b_{Z_s} = 0$. Если к тому же стиральная машина имеет упругую подвеску маятникового типа, то и соответствующие элементы жесткости могут быть равны нулю, кроме $c_{X_s} \neq 0$, $c_{Y_s} \neq 0$, $c_{Z_s} \neq 0$.

Исходной в расчетах служит следующая полученная в [3] система дифференциальных уравнений, имеющая вид:

$$\begin{aligned} M\ddot{\zeta} + 8b_z\dot{\zeta} + 8c_z\zeta &= U_1(t)\omega^2 \sin \omega t, \\ J_z\ddot{\gamma} + 8(b_y\varepsilon_1^2 + b_x\eta_1^2)\dot{\gamma} + 8(c_y\varepsilon_1^2 + c_x\eta_1^2)\gamma &= U_2(t)\omega^2 J_x \cos \omega t, \\ M\ddot{\varepsilon} + 8b_x\dot{\varepsilon} + 8c_x\varepsilon &= 0, \\ J_y\ddot{\beta} + 8(b_x\zeta_1^2 + b_z\varepsilon_1^2)\dot{\beta} + 8(c_x\zeta_1^2 + c_z\varepsilon_1^2)\beta &= U_2(t)\omega^2 J_x \sin \omega t, \\ M\ddot{\eta} + 8b_y\dot{\eta} + 8c_y\varepsilon &= U_1(t)\omega^2 \cos \omega t, \\ J_x\ddot{\alpha} + 8(b_z\eta_1^2 + b_y\zeta_1^2)\dot{\alpha} + 8(c_z\eta_1^2 + c_y\zeta_1^2)\alpha &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Однотипные первое, второе, четвертое и пятое уравнения исходной системы (1) описывают вынужденные случайные колебания подвесного неуравновешенного блока стиральной машины с одной сте-

пению свободы в заданном направлении, а третье и шестое из уравнений отвечают случаям свободных колебаний.

Рассматриваемая задача сводится к нахождению вероятностных характеристик движения блока — обобщенных координат и их первых производных — при колебаниях, вызванных случайными отклонениями начальных данных, в рассматриваемом динамическом процессе.

В данной системе уравнений (1) случайные функции $U_1(t)$ и $U_2(t)$ являются гладкими, а значит, большинство теоретических вопросов, связанных с исследованием свойств изучаемого решения, можно рассматривать традиционными методами теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Учитывая постоянство параметров, общее решение третьего из уравнений системы (1), имеет следующий вид:

$$\varepsilon(t) = e^{-\frac{4b_x}{M}t} \left(C_1 \cos \frac{2\sqrt{2c_x M - 4b_x^2}}{M} t + C_2 \sin \frac{2\sqrt{2c_x M - 4b_x^2}}{M} t \right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Аналогичный результат имеет место для общего решения шестого уравнения в исходной системе (1):

$$\alpha(t) = e^{-\frac{4(b_z \eta_1^2 + b_y \zeta_1^2)}{J_x} t} \left(C_1 \cos \sqrt{p_0^2 - n^2} \cdot \frac{t}{2} + C_2 \sin \sqrt{p_0^2 - n^2} \cdot \frac{t}{2} \right),$$

где $n = \frac{4(b_z \eta_1^2 + b_y \zeta_1^2)}{J_x}$, а $p_0^2 = \frac{8(c_z \eta_1^2 + c_y \zeta_1^2)}{J_x}$.

Чтобы найти вероятностные характеристики общих решений неоднородных дифференциальных уравнений в системе (1) достаточно знать математическое ожидание правой части $P(t)$ уравнения, автокорреляционную функцию K_P , а также основные вероятностные характеристики одной из реализаций начальных данных [5] случайного воздействия.

Первое, второе, четвертое и пятое неоднородные дифференциальные уравнения в системе (1) однотипны и в общем виде выглядят так:

$$\ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) + c x(t) = P(t),$$

где $P(t)$ — случайное воздействие.

В частности, в первом уравнении $P(t) = U_1(t)\omega^2 \sin \omega t$ есть произведение стационарной случайной функций $U_1(t)$ на неслучайную $\omega^2 \sin \omega t$ (аналогично для других уравнений вынужденных колебаний).

При нахождении общего решения $x(t)$ уравнения вынужденных колебаний используем метод спектрального разложения правой части $P(t)$ в виде совокупности гармонических функций заданной частоты ω_k . Через p обозначим собственную частоту колебаний системы.

Учитывая однотипность уравнений вынужденных колебаний и вида их правых частей $P(t)$, можно найти:

- 1) частотную характеристику искомого решения $F_x(i\omega)$,
- 2) его спектральную функцию $S_x(\omega) = |F_x(i\omega)| S_p(\omega)$,
- 3) частотную характеристику скорости $\dot{x}(t)$ блока в заданном направлении, дисперсий $D_x(t)$ и $D_{\dot{x}}(t)$. Характер полученных нами формул соответствующих решений свидетельствует о неравномерности спектра колебаний при постоянной плотности воздействия. А именно, система усиливает колебания с частотами, близкими к ее собственной частоте и наоборот, ослабляет колебания высокой частоты.

Приведем итоговые результаты для дисперсии, решения $x(t)$ и его скорости $\dot{x}(t)$ уравнения с правой частью $P(t)$.

Например, частотная характеристика искомого решения $x = \eta(t)$ пятого уравнения системы (1), отвечающего правой части $P(t) = U_1(t)\omega^2 \cos \omega t$, будет равна:

$$F_x(i\omega) = \frac{1}{c - M\omega^2 + i\alpha\omega}.$$

Спектральная функция искомого решения $S_x(\omega) = |F_x(i\omega)| S_p(\omega)$, где $S_p(\omega)$ — спектральная функция возмущения. Это позволяет найти дисперсию решения D_x по формуле:

$$\begin{aligned} D_x &= \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = \int_0^\infty |F_x(i\omega)|^2 S_p(\omega) d\omega = \\ &= \frac{S_0}{c^2} \int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{(1 - \frac{\omega^2}{p^2})^2 + (\frac{2n}{p})^2 \frac{\omega^2}{p^2}} = \frac{S_0 p}{c^2} \int_0^{\frac{\omega_0}{p}} \frac{dz}{(1 - z^2)^2 + (\frac{2n}{p})^2 z^2}. \end{aligned}$$

Разлагая подинтегральную функцию $f(z)$ на элементарные дроби, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-z^2)^2 + \left(\frac{2n}{p}\right)^2 z^2} = \\ & = \frac{1}{4\sqrt{1-\gamma^2}} \left(\frac{z + 2\sqrt{1-\gamma^2}}{z^2 + 2z\sqrt{1-\gamma^2} + 1} - \frac{z - 2\sqrt{1-\gamma^2}}{z^2 - 2z\sqrt{1-\gamma^2} + 1} \right), \end{aligned}$$

где величина $\gamma = \frac{n}{p} = \frac{b_y \sqrt{2}}{\sqrt{c_y M}}$.

Окончательно получим следующий результат для дисперсии решения:

$$\begin{aligned} D_x = \frac{S_0 p}{c^2} & \left[\frac{1}{8\sqrt{1-\gamma^2}} \ln \frac{s^2 + 2s\sqrt{1-\gamma^2} + 1}{s^2 - 2s\sqrt{1-\gamma^2} + 1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\gamma} \left(\operatorname{arctg} \frac{s + \sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma} + \operatorname{arctg} \frac{s - \sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma} \right) \right], \end{aligned}$$

где величины $s = \frac{\omega_0}{p} = \frac{\omega_0 \sqrt{M}}{2\sqrt{2c_y}}$, $\gamma = \frac{b_y \sqrt{2}}{\sqrt{c_y M}}$.

Используя последнюю формулу дисперсии D_x решения, отражающую зависимость дисперсии от отношения $s = \frac{\omega_0}{p}$ частоты ω_0 среза спектра возмущения на участке $0 \leq \omega \leq \omega_0$ к собственной частоте p системы при данных значениях $\gamma = \frac{n}{p}$ (отношения n к p), можно построить схему графика дисперсии D_x искомого решения.

Как следует из поведения дисперсии D_x , она возрастает главным образом за счет колебаний системы с частотами, близкими к собственной частоте p системы: $\omega \rightarrow p$, причем при неограниченном спектре (т. е. при $\omega_0 \rightarrow \infty$) она остается ограниченной величиной.

Найдем теперь дисперсию скорости искомого решения $D_{\dot{x}}$, используя формулу вида:

$$D_{\dot{x}} = \int_0^\infty S_{\dot{x}}(\omega) d\omega = \int_0^\infty |F_{\dot{x}}(i\omega)|^2 S_p(\omega) d\omega = \int_0^\infty \omega^2 S_x(\omega) dx.$$

Опуская для краткости изложения промежуточные вычисления, получим итоговый результат:

$$D_{\dot{x}} = \frac{S_0 p^3}{c^2} \left[\frac{1}{4\gamma} \left(\operatorname{arctg} \frac{s + \sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma} + \operatorname{arctg} \frac{s - \sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma} \right) - \frac{1}{8\sqrt{1-\gamma^2}} \ln \frac{s^2 + 2s\sqrt{1-\gamma^2} + 1}{s^2 - 2s\sqrt{1-\gamma^2} + 1} \right],$$

где величины $s = \frac{\omega_0}{p} = \frac{\omega_0 \sqrt{M}}{2\sqrt{2c_y}}$, $\gamma = \frac{b_y \sqrt{2}}{\sqrt{c_y M}}$.

Из полученной формулы для $D_{\dot{x}}$ непосредственно следует тот факт, что в предельном случае при $\omega_0 \rightarrow \infty$ дисперсия скорости $D_{\dot{x}}$ также остается ограниченной величиной.

Можно видеть, что среднее квадратическое отклонение скорости $\sigma_{\dot{x}}$ будет тем меньше, чем больше коэффициент затухания b_y и чем больше масса груза M подвижной части.

В заключение заметим, что авторами также разработан действующий испытательный стенд для выполнения экспериментальной части работы.

Литература

1. Блехман И. И. Вибрационная механика.—М.: Физматлит, 1994.—400 с.
2. Справочник. Вибрации в технике. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И. И. Блехмана.—М.: Машиностроение, 1979.—351 с.
3. Алехин С. Н. Теоретические и экспериментальные исследования динамики стиральных машин барабанного типа: Дис... канд. техн. наук.—М: МГУС, 2000.—275 с.
4. Наймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания.—М.: Наука, 1987.—424 с.
5. Светлицкий В. А. Случайные колебания механических систем.—М.: Машиностроение, 1976.—215 с.
6. Кренделл С. Случайные колебания.—М.: Мир, 1967.—356 с.
7. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах.—М.: Мир, 1966.—230 с.
8. Светлицкий В. А. Статистическая механика и теория надежности.— М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004.—504 с.
9. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций.—М.: Наука, 1968.—449 с.

Фетисов Валерий Георгиевич

Южный математический институт ВНЦ РАН;

Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса

Россия, 346500, Шахты, ул. Шевченко, 147

E-mail: fetisov_vg@mail.ru

АЛЕХИН СЕРГЕЙ НИКОЛАЕВИЧ
Южно-Российский госуниверситет экономики и сервиса
Россия, 346500, Шахты, ул. Шевченко, 147
E-mail: alex_cn@mail.ru

ФЕТИСОВ ИГОРЬ ВАЛЕРЬЕВИЧ
Южно-Российский госуниверситет экономики и сервиса
Россия, 346500, Шахты, ул. Шевченко, 147
E-mail: fetisov @pneumax.ru

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Т. З. Чочиев

Любое линейное уравнение в частных производных второго порядка зависит от решения нелинейного уравнения первого порядка, названного Эйлером характеристическим. В работе построено условие, выполнимость которого гарантирует решение характеристического уравнения. Доказана выполнимость условия, построено множество решений, удовлетворяющих характеристическому уравнению. Решения, обходящие условие, но удовлетворяющие характеристическому уравнению, не входят в состав множества решений.

Многие физические процессы, в частности, связанные задачи термоупругости при высоких температурных возмущениях [1–5], плоские динамические задачи в компонентах смещения [4, 6, 7] и т. д., приводимы к линейным дифференциальным уравнениям в частных производных третьего и четвертого порядков с заданными переменными коэффициентами. Эти уравнения допускают понижение порядка производной до второго порядка. Поэтому подробно исследуем уравнения в частных производных второго порядка.

1. О способе понижения порядка производной. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в частных производных общего вида [7]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C \frac{\partial u}{\partial t} + D \frac{\partial u}{\partial x} + Eu = f(x, t) \quad (1.1)$$
$$(0 \leq t < \infty, \quad -\infty < x < \infty),$$

где $A(x, t)$, $B(x, t)$ допускают непрерывные частные производные до второго порядка, $C(x, t)$, $D(x, t)$ допускают непрерывные частные производные до первого порядка, а $E(x, t)$ и $f(x, t)$ суть непрерывные функции в заданной области. Уравнение (1.1) изучаем при

условиях

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x), \\ A^2 - 4B > 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $\varphi(x)$ и $F(x)$ — заданные функции ($\varphi(x)$ допускает производную).

Если в соотношении

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 u \right) + C_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 u \right) + \\ + D_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + E_1^* u \right) = f, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \left(A - \sqrt{A^2 - 4B} \right), \quad B_1 = \frac{-D + CA_1 + \frac{\partial A_1}{\partial t} + C_1 \frac{\partial A_1}{\partial x}}{A_1 - C_1}, \\ C_1 &= \frac{1}{2} \left(A + \sqrt{A^2 - 4B} \right), \quad D_1 = \frac{D - \frac{\partial A_1}{\partial t} - C_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} - CC_1}{A_1 - C_1}, \\ D_1 E_1^* &= E - \frac{\partial B_1}{\partial t} - C_1 \frac{\partial B_1}{\partial x}, \end{aligned}$$

выполнить указанную операцию, сгруппировать, то придем к уравнению (1.1). С другой стороны, (1.3) есть система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 u = v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + C_1 \frac{\partial v}{\partial x} + D_1 v = D_1 (B_1 - E_1^*) u + f \end{cases} \quad (1.4)$$

относительно функций u и v . Система (1.4) сложная, поэтому составим другую, эквивалентную систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + [B_1 - lD_1(B_1 - E_1^*)] u = \rho, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + C_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \left(D_1 - \frac{1}{l} \right) v = f - \frac{\rho}{l}, \\ lD_1(B_1 - E_1^*) u + \rho = v, \end{cases} \quad (1.5)$$

если ρ удовлетворяет третьему уравнению, а l — некоторое решение нелинейного уравнения [8, 9]

$$\frac{\partial l}{\partial t} - D_1(B_1 - E_1^*) l^2 + (B_1 - D_1) l + 1 = 0 \quad (l|_{t=0} = 1). \quad (1.6)$$

Докажем эквивалентность систем (1.4) и (1.5).

Считая ρ заданной, из первых двух уравнений (1.5) будем иметь:

$$u = e^{-\int_0^t [B_1 - lD_1(B_1 - E_1^*)]dt} \left(u_0(\tau) + \int_0^t \rho e^{\int_0^t [B_1 - lD_1(B_1 - E_1^*)]dt} dt \right), \quad (1.7)$$

$$v = e^{-\int_0^t (D_1 - \frac{1}{l})dt} \left(v_0(\sigma) + \int_0^t \left(f - \frac{\rho}{l} \right) e^{\int_0^t (D_1 - \frac{1}{l})dt} dt \right), \quad (1.8)$$

где $u_0(\tau)$ и $v_0(\sigma)$ — неизвестные функции, $d\tau = \mu(dx - A_1 dt)$, $d\sigma = \tilde{\mu}(dx - C_1 dt)$.

Если l удовлетворяет уравнению (1.6), то имеет место тождественное равенство:

$$\frac{1}{l} e^{\int_0^t (D_1 - \frac{1}{l})dt} = e^{\int_0^t [B_1 - lD_1(B_1 - E_1^*)]dt}, \quad (1.6)_1$$

в силу чего (1.7) и (1.8) принимают вид

$$u = e^{-\int_0^t [B_1 - lD_1(B_1 - E_1^*)]dt} (u_0(\tau) + \phi), \quad (1.7)_1$$

$$v = e^{-\int_0^t [B_1 - lD_1(B_1 - E_1^*)]dt} \frac{1}{l} \left(v_0(\sigma) + \int_0^t f e^{\int_0^t (D_1 - \frac{1}{l})dt} dt - \phi \right), \quad (1.8)_1$$

где через ϕ обозначено

$$\phi = \int_0^t \rho e^{\int_0^t [B_1 - lD_1(B_1 - E_1^*)]dt} dt. \quad (1.9)$$

Подставив значения u и v в третье уравнение системы (1.5), относительно функции ϕ получим уравнение

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left[lD_1(B_1 - E_1^*) + \frac{1}{l} \right] \phi = L, \quad (1.10)$$

где

$$L = \frac{1}{l} \left(v_0(\sigma) + \int_0^t f e^{\int_0^t (D_1 - \frac{1}{l})dt} dt \right) - lD_1(B_1 - E_1^*) u_0(\tau). \quad (1.10)_1$$

Из (1.10) для ϕ следует:

$$\phi = e^{-\int_0^t (lD_1(B_1 - E_1^*) + \frac{1}{t})dt} \left(C(x) + \int_0^t L e^{\int_0^t (lD_1(B_1 - E_1^*) + \frac{1}{t})dt} dt \right).$$

Но, согласно (1.9) при $t = 0$ верно $\phi = 0$, поэтому в последней формуле для любого x допускаем $C(x) = 0$ и, следовательно,

$$\phi = e^{-\int_0^t (lD_1(B_1 - E_1^*) + \frac{1}{t})dt} \int_0^t L e^{\int_0^t (lD_1(B_1 - E_1^*) + \frac{1}{t})dt} dt. \quad (1.11)$$

Эта формула обеспечивает выполнимость третьего уравнения (1.5) и позволяет определить ρ ,

$$\rho = e^{-\int_0^t [B_1 - lD_1(B_1 - E_1^*)]dt} \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Этим доказана эквивалентность систем (1.5) и (1.4). Но из выполнимости (1.4) следует выполнимость соотношения (1.3), или, что то же самое, уравнения (1.1).

Таким образом, u в развернутой форме имеет вид:

$$u(\tau, t) = e^{-\int_0^t [B_1 - lD_1(B_1 - E_1^*)]dt} \left[u_0(\tau) + e^{-\int_0^t (lD_1(B_1 - E_1^*) + \frac{1}{t})dt} \int_0^t L e^{\int_0^t (lD_1(B_1 - E_1^*) + \frac{1}{t})dt} dt \right], \quad (1.12)$$

где L выражается через $(1.10)_1$.

Из первого начального условия (1.2) при $t = 0$ находим: $u_0(\tau) = \varphi(x)$.

Чтобы правую часть сделать функцией от τ , замечаем, что при $t = 0$ из $dx = \frac{1}{\mu} d\tau$ следует $x = \int \frac{d\tau}{\mu} = x(\tau)$.

Следовательно,

$$u_0(\tau) = \varphi[x(\tau)]. \quad (1.13)$$

Далее, для того чтобы удовлетворялось второе условие, нужно заметить, что u зависит от t и τ явно. Поэтому

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} - \mu A_1 \frac{\partial u}{\partial \tau},$$

где $\frac{\partial u}{\partial t} = -[B_1 - lD_1(B_1 - E_1^*)]u + e^{-\int_0^t [B_1 - lD_1(B_1 - E_1^*)]dt} \frac{\partial \phi}{\partial t}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} = & -\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^t [B_1 - lD_1(B_1 - E_1^*)]dt \cdot u + \\ & + e^{-\int_0^t [B_1 - lD_1(B_1 - E_1^*)]dt} \left(u'_0(\tau) + \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right), \end{aligned}$$

а ϕ есть (1.11). Отсюда второе условие (1.2) принимает вид:

$$F(x) = L - \mu A_1 \varphi'(\tau) - \mu A_1 \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \quad \text{при } t = 0.$$

В силу произвольности функции $v_0(\sigma)$ легко показать, что

$$F(x) + \mu \varphi'(\tau) A_1 - \frac{v_0(\sigma)}{l} + D_1(B_1 - E_1^*) u_0(\tau) = 0.$$

Следовательно,

$$v_0(\sigma) = l^2 D_1(B_1 - E_1^*) \varphi(\tau(\sigma)) + l F(\sigma) + l \mu A_1 \frac{d\varphi}{d\sigma}. \quad (1.14)$$

Таким образом, подставляя в правую часть (1.10)₁ вместо неизвестных функций $u_0(\sigma)$ и $v_0(\sigma)$ их соответствующие значения из (1.13) и (1.14), мы получим точное решение уравнения (1.1). Однако нами допущено, что l задана.

2. Характеристическое уравнение (1.6). Известно, что любое линейное уравнение в частных производных второго порядка сопровождается нелинейным уравнением первого порядка [8]:

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} + Al^2 + Bl + C = 0 \quad (l = l(\sigma, \tau)), \quad (2.1)$$

названным Эйлером характеристическим, соответствующим упомянутому линейному уравнению, l — искомая функция, A, B, C — заданные функции. (2.1) относится к классу Риккати и учитывая, что $\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ ($B^2 - 4AC > 0$). Оно допускает представление [8]:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \ln \left| \frac{l - \lambda_1}{l - \lambda_2} \right| + \frac{1}{l - \lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} - \frac{1}{l - \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} = -A(\lambda_1 - \lambda_2), \quad (2.2)$$

для которого имеет место следующее весьма важное положение.

Если выполнено равенство

$$\begin{aligned} & e^{-\int A\lambda_1 d\sigma} \int A\alpha \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} e^{\int A\lambda_1 d\sigma} d\sigma - \\ & - e^{-\int A\lambda_2 d\sigma} \int A\alpha \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} e^{\int A\lambda_2 d\sigma} d\sigma = A\alpha(\lambda_1 - \lambda_2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где α — неизвестна, то формулы

$$\begin{cases} l - \lambda_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\Delta} e^{-\int A\lambda_1 d\sigma} \int A\alpha \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} e^{\int A\lambda_1 d\sigma} d\sigma, \\ l - \lambda_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\Delta} e^{-\int A\lambda_2 d\sigma} \int A\alpha \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} e^{\int A\lambda_2 d\sigma} d\sigma, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\Delta = e^{-\int A\lambda_2 d\sigma} \int A\alpha \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} e^{\int A\lambda_2 d\sigma} d\sigma - e^{-\int A\lambda_1 d\sigma} \int A\alpha \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} e^{\int A\lambda_1 d\sigma} d\sigma,$$

обращают (2.2) в тождество [8]. Доказательство следует непосредственно подстановкой формул (2.4) в (2.2). Далее, интегралы:

$$u = \int A\alpha \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} e^{\int A\lambda_1 d\sigma} d\sigma, \quad v = \int A\alpha \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} e^{\int A\lambda_2 d\sigma} d\sigma, \quad (2.5)$$

которые содержатся в (2.3), разные ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), поэтому (2.3) можем представить как систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} u = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} e^{\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} v, \\ \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} v = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} u. \end{cases} \quad (2.6)$$

Но она сложная, поэтому составляем другую, более упрощенную

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} + l^* \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} \right) u = \rho, \\ \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} + \frac{1}{l^*} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} \right) v = -\frac{\rho}{l}, \\ \frac{l^*}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} u + \rho = \\ = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} e^{\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} v \end{cases} \quad (2.7)$$

эквивалентную (2.6), если ρ — решение третьего уравнения, а l^* — некоторое решение нелинейного уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial l^*}{\partial \sigma} - \frac{\frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} l^{*2} - \\ & - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\partial(\lambda_1 + \lambda_2)}{\partial \sigma} l^* - \frac{\frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Таким образом, если (2.3) удовлетворяет, то формулы (2.4) обращают уравнение (2.2) в тождество, но (2.3) всегда удовлетворяет, если удовлетворяет система (2.7), где l^* — некоторое решение уравнения (2.8).

3. Исследование уравнения (2.8). Уравнение (2.8) вкратце представляется в виде

$$\frac{\partial l^*}{\partial \sigma} + A_1 l^{*2} + B_1 l^* + C_1 = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma}, \quad B_1 = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\partial(\lambda_1 + \lambda_2)}{\partial \sigma}, \\ C_1 &= -\frac{\frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma}. \end{aligned}$$

Через λ^* обозначим $\lambda^* = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4A_1 C_1}}{2A_1}$ ($B_1^2 - 4A_1 C_1 > 0$).

Также как и в п. 2, уравнение (3.1) можно записать:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \ln \left| \frac{l^* - \lambda_1^*}{l^* - \lambda_2^*} \right| + \frac{1}{l^* - \lambda_1^*} \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \sigma} - \frac{1}{l^* - \lambda_2^*} \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma} = -A(\lambda_1^* - \lambda_2^*). \quad (3.2)$$

Доказывается, что если выполняется равенство [1]:

$$\begin{aligned} & e^{-\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} \int A_1 \alpha^* \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} d\sigma - \\ & - e^{-\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} \int A_1 \alpha^* \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} d\sigma = A_1 \alpha^* (\lambda_1^* - \lambda_2^*), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где α^* — неизвестна, то формулы:

$$\begin{cases} l^* - \lambda_1^* = \frac{\lambda_1^* - \lambda_2^*}{\Delta^*} e^{-\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} \int A_1 \alpha^* \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} d\sigma, \\ l^* - \lambda_2^* = \frac{\lambda_1^* - \lambda_2^*}{\Delta^*} e^{-\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} \int A_1 \alpha^* \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} d\sigma, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}\Delta^* &= e^{-\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} \int A_1 \alpha^* \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} d\sigma - \\ &\quad - e^{-\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} \int A_1 \alpha^* \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} d\sigma,\end{aligned}$$

обращают (3.2) в тождество.

Необходимо установить выполнимость уравнения (3.3). Поскольку входящие в него интегралы неизвестны, то составляем подобное (3.3) уравнение

$$\begin{aligned}&e^{-\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} \int A_1 \alpha^* \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} d\sigma - \\ &- e^{-\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} \int A_1 \alpha^* \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} d\sigma = -A_1 \alpha^* (\lambda_1^* - \lambda_2^*) \gamma,\end{aligned}\tag{3.5}$$

где

$$\gamma = \frac{\frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \sigma}}{\frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma}} \left(e^{\int A_1 (\lambda_1^* - \lambda_2^*) d\sigma} - \int \frac{\frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma} e^{-\int A_1 (\lambda_1^* - \lambda_2^*) d\sigma}}{\lambda_1^* - \lambda_2^*} d\sigma \right).$$

Относительно системы (3.3) и (3.5) справедлива следующая теорема.

Теорема. Если неизвестные интегралы, содержащиеся в (3.3) и (3.5), определены соответственно

$$\begin{aligned}&\int A_1 \alpha^* \frac{\partial \lambda^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda^* d\sigma} d\sigma = \\ &= \begin{cases} e^{\int \frac{r e^{-\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} - e^{-\int A_1 \lambda_2^* d\sigma}}{\lambda_1^* - \lambda_2^*} \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} d\sigma}, & \text{когда } \lambda^* = \lambda_2^*, \\ e^{-\int \frac{r e^{-\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} - e^{-\int A_1 \lambda_1^* d\sigma}}{r(\lambda_1^* - \lambda_2^*)\gamma} \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} d\sigma}, & \text{когда } \lambda^* = \lambda_1^*, \end{cases}\end{aligned}\tag{3.6}$$

где r — решение нелинейного уравнения

$$\begin{aligned}&\frac{\partial r}{\partial \sigma} + \frac{e^{-\int A_1 (\lambda_1^* - \lambda_2^*) d\sigma} \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma}}{\lambda_1^* - \lambda_2^*} r^2 - \\ &- \frac{\gamma \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma} - e^{\int A_1 (\lambda_1^* - \lambda_2^*) d\sigma} \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \sigma}}{(\lambda_1^* - \lambda_2^*)\gamma} r - \frac{\frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \sigma}}{(\lambda_1^* - \lambda_2^*)\gamma} = 0,\end{aligned}\tag{3.7}$$

то (3.6) систему равенств (3.3) и (3.5) обращает в тождество.

Пока исследуем уравнение (3.7), которое коротко выглядит так:

$$\frac{\partial r}{\partial \sigma} + A^* r^2 + B^* r + C^* = 0,\tag{3.8}$$

где

$$A^* = \frac{e^{-\int A_1(\lambda_1^* - \lambda_2^*)d\sigma}}{\lambda_1^* - \lambda_2^*} \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma}, \quad B^* = -\frac{\gamma \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma} - e^{\int A_1(\lambda_1^* - \lambda_2^*)d\sigma} \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \sigma}}{(\lambda_1^* - \lambda_2^*)\gamma},$$

$$C^* = -\frac{\frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \sigma}}{(\lambda_1^* - \lambda_2^*)\gamma},$$

а потом докажем теорему.

Преобразование вида

$$r = \frac{1}{\int A^* d\sigma - v_1}, \quad (3.9)$$

уравнение (3.8) переводит к разрешимому классу:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \sigma} - \left(B^* + 2C^* \int A^* d\sigma \right) v_1 + C^* v_1^2 + \left(B^* + C^* \int A^* d\sigma \right) \int A^* d\sigma = 0.$$

Так как в нем свободный член равен нулю,

$$B^* + C^* \int A^* d\sigma = 0, \quad (3.9)_1$$

а оставшееся соотношение относится к классу Бернулли,

$$\frac{\partial v_1}{\partial \sigma} + C^* v_1^2 - C^* \int A^* d\sigma v_1 = 0,$$

из которого сразу находим v_1 (в выполнимости $(3.9)_1$ убеждаемся непосредственной проверкой). Но, если r — решение (3.8), то соотношение,

$$\begin{aligned} & e^{-\int \frac{r e^{-\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} - e^{-\int A_1 \lambda_1^* d\sigma}}{r(\lambda_1^* - \lambda_2^*)\gamma} \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} d\sigma} = \\ & = r e^{\int \frac{r e^{-\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} - e^{-\int A_1 \lambda_2^* d\sigma}}{\lambda_1^* - \lambda_2^*} \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} d\sigma} \end{aligned} \quad (3.10)$$

есть тождество [8]. Перейдем теперь к упомянутой выше теореме.

В равенство (3.3) подставим значение интегралов согласно формуле (3.6), получим:

$$\begin{aligned} & e^{-\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} e^{-\int \frac{r e^{-\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} - e^{-\int A_1 \lambda_1^* d\sigma}}{r(\lambda_1^* - \lambda_2^*)\gamma} \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} d\sigma} - \\ & - e^{-\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} e^{\int \frac{r e^{-\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} - e^{-\int A_1 \lambda_2^* d\sigma}}{\lambda_1^* - \lambda_2^*} \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} d\sigma} = A_1 \alpha^* (\lambda_1^* - \lambda_2^*). \end{aligned}$$

Воспользовавшись тождеством (3.10), после группировки будем иметь:

$$\frac{re^{-\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} - e^{-\int A_1 \lambda_2^* d\sigma}}{\lambda_1^* - \lambda_2^*} e^{\int \frac{re^{-\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} - e^{-\int A_1 \lambda_2^* d\sigma}}{\lambda_1^* - \lambda_2^*} \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} d\sigma} = A\alpha.$$

Обе части равенства умножим на $\frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_2^* d\sigma}$ и в правой части примем во внимание (3.6), когда $\lambda = \lambda_2$. Очевидно, придем к тождеству

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \sigma} e^{\int \frac{re^{-\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} - e^{-\int A_1 \lambda_2^* d\sigma}}{\lambda_1^* - \lambda_2^*} \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} d\sigma} = \\ & = \frac{\partial}{\partial \sigma} e^{\int \frac{re^{-\int A_1 \lambda_1^* d\sigma} - e^{-\int A_1 \lambda_2^* d\sigma}}{\lambda_1^* - \lambda_2^*} \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial \sigma} e^{\int A_1 \lambda_2^* d\sigma} d\sigma}. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается выполнимость (3.5). Что и требовалось.

Таким образом, уравнение (3.3) удовлетворяет; формулами (3.4) удовлетворяет и уравнение (3.2), или уравнение (3.1) (что тоже самое, уравнение (3.8)). Но из выполнимости (3.8) следует тождественное равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l^*} e^{\int \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} + \frac{1}{l^*} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} e^{\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} \right) d\sigma} = \\ & = e^{-\int \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} + l^* \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} \right) d\sigma}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

которым воспользуемся дальше.

4. Эквивалентность систем (2.6) и (2.7). Систему (2.6) составим из уравнения (2.3), выполнимость которого дает выполнимость уравнения (2.2). Но (2.6) поддается изучению [9]. Действительно, из первых двух уравнений для u и v имеем соответственно:

$$\begin{aligned} u = & e^{\int \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} + l^* \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} \right) d\sigma} \times \\ & \times \left(u_0 + \int \rho e^{-\int \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} + l^* \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} \right) d\sigma} d\sigma \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = & e^{-\int \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} + \frac{1}{l^*} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} e^{\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} \right) d\sigma} \times \\ & \times \left(v_0 - \int \frac{\rho}{l^*} e^{\int \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} + \frac{1}{l^*} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} e^{\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} \right) d\sigma} d\sigma \right), \end{aligned}$$

где u_0 и v_0 — неизвестные функции (постоянные). Так как имеет место соотношение (3.11), то приняв обозначение

$$\Phi = \int \rho e^{-\int \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} + l^* \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} \right) e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma}} d\sigma, \quad (4.1)$$

значения u и v коротко представляются так

$$\begin{cases} u = e^{\int \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} + l^* \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} \right) e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma}} d\sigma (u_0 + \Phi), \\ v = \frac{1}{l^*} e^{\int \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} + l^* \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} \right) e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma}} d\sigma (v_0 - \Phi). \end{cases} \quad (4.2)$$

Остается удовлетворить третьему уравнению системы (2.7). Если внести формулы (4.2) в третье уравнение (2.7), сгруппировать относительно неизвестной функции Φ , то после принятия обозначений, придем к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + M_0 \Phi = L_0, \quad (4.3)$$

где

$$M_0 = \frac{l^*}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} + \frac{1}{l^*(\lambda_1 - \lambda_2)} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} e^{\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma},$$

$$L_0 = - \left(\frac{l^*}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} u_0 + \frac{1}{l^*(\lambda_1 - \lambda_2)} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} e^{\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma} v_0 \right),$$

из которого для Φ имеем:

$$\Phi = e^{-\int M_0 d\sigma} \left(\Phi_0 + \int L_0 e^{\int M_0 d\sigma} d\sigma \right) \quad (\Phi_0 = \text{const}), \quad (4.4)$$

а вслед за ней, на основании (4.1), сразу находим ρ ,

$$\rho = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} e^{\int \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} + l^* \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} \right) e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2) d\sigma}} d\sigma, \quad (4.5)$$

где под $\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}$ подразумеваем значение частной производной формулы (4.4). Этим не только доказана эквивалентность двух систем (2.6)

и (2.7), но и построены формулы (4.2), дающие общее решение (2.7), или что тоже самое, системы (2.6). Согласно (2.5) определяются значение независимых интегралов, обеспечивающих выполнимость соотношений (2.3) или выполнимость уравнения (2.2), т. е. (2.1).

Литература

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений.—М.: Мир, 1964.—518 с.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости.—Киев: Наука думка, 1970.—302 с.
3. Новацкий В. Вопросы термоупругости.—М.: Изд. АН СССР, 1962.—364 с.
4. Тимошенко С. П., Войновский С., Кригер С. Курс теории упругости.—Киев: Наука думка, 1972.—472 с.
5. Чочиев Т. З. Температурные возмущения с учетом взаимодействия полей деформации и температуры // Тр. XIII международного симпозиума МДОЗМФ.—Харьков, 2007.—С. 327–330.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.—М.: Наука, 1966.—708 с.
7. Чочиев Т. З. Термоупругость и линейные уравнения в частных производных высшего порядка // Вестник Харьковского нац. ун-та.—2007.—№ 780.—С. 175–186.
8. Чочиев Т. З. Температурные напряжения в однородном упругом полупространстве и соответствующее характеристическое уравнение // Тр. ИПММ НАН Украины.—2004.—Вып. 9.—С. 209–220.
9. Чочиев Т. З. О методах решения дифференциальных уравнений математической физики и их приложения. Ч. II.—Владикавказ: Изд. СОГУ, 2004.—С. 116.

ЧОЧИЕВ ТИМОФЕЙ ЗАХАРОВИЧ
Южный математический институт ВНЦ РАН
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: nata503@mail.ru

Научное издание

**ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
И МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ**

ответственные редакторы

*С. Б. Климентов,
Е. С. Каменецкий*

Утверждено к печати

Ученым советом

Южного математического института

Владикавказского научного центра

Российской академии наук

*и Советом Факультета математики,
механики и компьютерных наук*

Южного федерального университета

Компьютерная верстка

Кибизова В. В.

Подписано в печать 02.12.2009. Формат бумаги 60×84¹/₁₆.

Усл. п. л. 9,07. Тираж 200 экз. Заказ № 456.

Владикавказский научный центр РАН и РСО-А
362008, г. Владикавказ, пр. Коста, 93.

Отпечатано в ИПО СОИГСИ им. В. И. Абасова
362040, г. Владикавказ, пр. Мира, 10.

