

ЮМИ

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTRE
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

MATHEMATICAL ANALYSIS
AND
MATHEMATICAL MODELING

Proceedings
of the International Conference of Young Scientists
(Russia, Vladikavkaz, July 12–19, 2010)

Vladikavkaz
2010

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ

Труды
международной конференции молодых ученых
(Россия, Владикавказ, 12–19 июля 2010 г.)

Владикавказ
2010

ББК 22.16+я43
УДК 517.21+
М 34

Редакционная коллегия:

д. ф.-м. н. Абанин А. В., д. ф.-м. н. Каменецкий Е. С.,
д. ф.-м. н. Кусраев А. Г., д. ф.-м. н. Наседкин А. В.,
к. ф.-м. н. Цибулин В. Г.

Издание осуществлено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № 02.741.11.2229.

Математический анализ и математическое моделирование:
тр. междунар. конф. молодых учен. (Владикавказ, 12–19 июля
2010 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2010.—184 с.

В сборник вошли пленарные лекции и тезисы секционных докладов, прочитанных на Международной конференции молодых ученых «Математический анализ и математическое моделирование», состоявшейся в г. Владикавказе с 12 по 19 июля 2010 г.

ISBN 978-5-904695-03-3

© Южный математический институт
ВНЦ РАН и РСО-А, 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	11
-------------------	----

ПЛЕНАРНЫЕ ЛЕКЦИИ

Абанин А. В. Весовые пространства непрерывных и голоморфных функций.....	15
Wickstead A. W. When are all bounded operators between classical Banach lattices regular?	21
Каменецкий Е. С. Решение уравнений в частных производных методом конечных разностей	27
Кусраев А. Г. Анализ, алгебра и логика во взаимодействии...	33
Магарил-Ильяев Г. Г. Принцип Лагранжа в теории экстремума и оптимальное восстановление	41
Наседкин А. В. Математическое моделирование, конечно- элементные технологии и компьютерный инженерный анализ. Опыт исследований и применений.....	47
Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций по их коэффициентам Фурье.....	55
Цибулин В. Г. Применение MATLAB для исследования нелинейной динамики.....	63

СЕКЦИЯ I МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Абанина Д. А. Представление частного решения уравнения свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа.....	71
---	----

Барагунова Л. А. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения	73
Баркина У. В., Мелихов С. Н. О характере разрешимости дифференциальных уравнений бесконечного порядка на неограниченных выпуклых множествах	75
Бесаева С. В. О спектральных свойствах разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах . . .	77
Богатырева Ф. Т. Нелокальная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с оператором Джрбашяна — Нерсесяна	79
Варзиев В. А. Линейный непрерывный правый обратный к оператору представления рядами экспонент аналитических функций полиномиального роста вблизи границы . . .	81
Gönüllü U. On positive operators without invariant sublattices . .	83
Гутнова А. К., Махнев А. А. О графах, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $GQ(3, t)$, $t \in \{3, 5\}$	87
Дильмухаметова А. М., Напалков В. В. Фундаментальный принцип Эйлера для дифференциальных операторов с частными обобщенными производными с постоянными коэффициентами	89
Зембатова М. А. О крайних точках выпуклых множеств и их приложениях	91
Иванов П. А. О полных системах в пространствах последовательностей	93
Иванова О. А. О проблеме моментов в пространстве Фреше без непрерывной нормы	94
Келехсаева С. В. О возмущениях спектральных операторов с кратным спектром	96

Кочуров Е. С. Об обратимости оператора дробного интегрирования переменного порядка в пространствах переменной гёльдеровости	98
Кусраева З. А. Однородные ортогонально аддитивные полиномы в векторных решетках	100
Лосанова Ф. М. Краевая задача для волнового уравнения с оператором Капуто в условии смещения	102
Масаева О. Х. Априорная оценка для уравнения с фрактальным оператором Лапласа в главной части	103
Михайлов К. А. Представление ультрадифференцируемых функций рядами экспонент	105
Новикова О. В., Редькина Т. В. Множество решений для нелинейного уравнения в частных производных в виде ряда Лорана и бегущих волн	107
Перетяцкий Ф. Г. Краевая задача Римана — Гильберта для уравнения Бельтрами в классе BMO	109
Петров С. В. Существование абсолютно представляющих систем экспонент в пространствах аналитических функций с заданной граничной гладкостью	112
Пирметова С. Я. Оценка функции Лебега для сумм Фурье — Лагерра	114
Тасоев Б. Б. Положительные операторы в пространствах Кальдерона — Лозановского	116
Türker M. S. Multi-norms	118
Фам Чонг Тиен. Описание сопряженного к пространству Фреше бесконечно дифференцируемых функций с весовыми оценками всех производных в $\mathbb{R}^N$	121
Филиппев И. А. Описание сопряженных пространств к пространствам ультрадифференцируемых функций	123

Хуштова Ф. Г. Краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа со знакопеременной характеристической формой	125
--	-----

Эфендиев Б. И. Нелокальная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной	127
--	-----

СЕКЦИЯ II МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Багов М. А. Математическое моделирование паводковых процессов	131
--	-----

Баззаев А. К. Локально-одномерная разностная схема для обобщенного уравнения параболического типа с дробной производной по времени в многомерной области с краевыми условиями первого рода	133
---	-----

Бекулова С. М. Краевая задача со смещением для уравнения влагопереноса	135
---	-----

Бесаева З. В. Увеличение точности квадратурных формул для сингулярных интегралов методом Эйлера	137
--	-----

Будянский А. В. Численное исследование динамики популяций с учетом миграции	139
--	-----

Домашенкина Т. В. Моделирование конструкции многоэлементных фазированных решеток для фокусирующих ультразвуковых пьезопреобразователей	141
---	-----

Зарини А. Г. Оценка влияния растворённых в подлёдной воде соединений серы на причины схода ледника Колка ...	143
---	-----

Карякин М. И., Сигаева Т. В. Об использовании генетических алгоритмов в задачах идентификации параметров математических моделей высокоэластичных материалов ...	145
--	-----

Копцева А. А. О применимости модельных потенциалов межчастичного взаимодействия для частиц наноразмерного масштаба.....	147
Кugno А. Ю. Разработка системы интерактивного речевого ответа на основе языка TSL	149
Мамчуев М. О. Моделирование упругих свойств ионных кристаллов вблизи точки фазового перехода «диэлектрик–металл»	151
Немцев А. Д. Численный анализ трехмерных режимов фильтрационной конвекции.....	153
Орлова Н. С. Гидродинамическая модель виброожижения...	155
Пантелеев Д. Г. Математическое моделирование облаков в горных ущельях.....	157
Плиева Л. Ю. Квадратурные формулы для интегралов типа Коши и ее производных на отрезке.....	159
Сухов Д. Ю., Шубчинская Н. Ю. Исследование устой- чивости чистого изгиба панели в среде компьютерной алгебры Maple.....	161
Трофимова А. В. Конечно-разностный метод расчета фильтрационной конвекции в полярных координатах	163
Устинов Ю. А., Курбатова Н. В., Чумакова Е. С. Спе- цифика построения конечно-элементного решения задачи Сен-Венана изгиба поперечной силой.....	165
Хацуков З. М. Анализ модели одномерного процесса фильтрации	167
Хосаева З. Х. Математическое моделирование взаимо- действия социальных слоев в обществе	169
Циунчик С. А. Разностная схема для одного класса нелинейных параболических задач.....	171

Шавлохов Г. Б. Архитектура и возможности портала «ГеоМЕТА»	173
Шоранова Д. А. Об одной краевой задаче для уравнения рождаемости Мак-Кендрика — фон Ферстера	175

ПРИЛОЖЕНИЕ

Кутателадзе С. С.	
Осанна человеку	179
Панацея России	181

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящий сборник вошли материалы Международной конференции молодых ученых «Математический анализ и математическое моделирование», состоявшейся в г. Владикавказе в период с 12 по 19 июля 2010 г. Конференция была организована Южным математическим институтом Владикавказского научного центра Российской академии наук на базе санатория-профилактория «Сосновая роща». В работе конференции приняли участие более 50 молодых ученых (в возрасте до 35 лет) из разных городов России (Владикавказа, Ростова-на-Дону, Уфы, Ставрополя, Нальчика), ближнего и дальнего зарубежья (Южной Осетии, Турции, Вьетнама).

В рамках конференции была проведена VI Владикавказская молодежная математическая школа, на которую в качестве лекторов были приглашены ведущие эксперты по научным направлениям конференции. Конспекты прочитанных циклов лекций представлены в разделе «Пленарные лекции». Секционные заседания проходили по двум направлениям: Секция 1. Математический анализ (28 докладов); Секция 2. Математическое моделирование (23 доклада). Тезисы докладов представлены в соответствующих разделах настоящего сборника.

Экспертный совет конференции выделил 9 лучших докладов молодых ученых и рекомендовал соответствующие работы к публикации в высокорейтинговых журналах (докладчики: Баззаев А. К., Дильмухаметова А. М., Кусраева З. А., Тасоев Б. Б., Трофимова А. В., Фам Тиен Чонг, Филиппев И. А., Хуштова Ф. Г., Чумакова Е. С.). Кроме того, на секции математического моделирования были отмечены 6 работ, в которых имеется существенный задел (докладчики: Бекулова С. М., Будянский А. В., Домашенкина Т. В., Пантелеев Д. Г., Шавлохов Г. Б., Шубчинская Н. Ю.).

На закрытии конференции состоялись яркие и запоминающиеся события. Профессор Королевского университета Белфаста (Queen's University Belfast, UK) Э. В. Викстед рассказал о системе подготовки кадров в этом университете. Большой интерес слушателей вызвали организация учебной и исследовательской работы, общественной

жизни, и особенно то, что в Королевском университете Белфаста учатся российские студенты и аспиранты.

С наименьшим интересом была встречена презентация только что вышедшей в свет книги профессора Новосибирского государственного университета С. С. Кутателадзе «Наука и люди», в которой собраны статьи и эссе автора последнего десятилетия о науке и ее месте в современном обществе. Присутствие автора вызвало оживленное и заинтересованное обсуждение, о содержании которого можно судить по двум эссе, включенным в раздел «Приложение».

Пленарные лекции

ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ И ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Абанин¹

Введение

Весовые шкалы пространств непрерывных, дифференцируемых и голоморфных функций широко используются в аппроксимации и интерполяции, теории роста целых функций, вопросах двойственности различных функциональных пространств, теории распределений и ее обобщениях, анализе Фурье, уравнениях в частных производных, в математической и теоретической физике (см., например, [1, 2, 5, 6]). Для эффективного изучения шкал пространств и операторов в них требуется оптимальным образом выбрать необходимый для данной шкалы класс эталонных весов. Именно, нужно взять такой максимально узкий класс весов с регулярными свойствами (гладкость, выпуклость какого-либо типа и т. п.), чтобы с его помощью можно было определить любое из пространств шкалы. Степень решения данной проблемы в значительной мере определяет успех решения большинства задач, исследуемых с помощью или в рамках весовых функциональных пространств. Во многих конкретных случаях априорные свойства весов позволяют судить об алгебраических и топологических свойствах пространств и, тем самым, полнее использовать мощные результаты современного функционального, вещественного и комплексного анализа.

Следует отметить, что исследований, посвященных проблеме описания оптимальных весовых систем, практически не проводилось, хотя для многих конкретных пространств функций разрозненные результаты о построении систем весов, задающих пространства и обладающих нужными для решения исследуемой задачи свойствами, имеются. Основная цель настоящего доклада — систематизировать известные на сегодняшний день результаты и изложить их с точки зрения оптимальных весов в основополагающих случаях весовых банаховых пространств непрерывных и голоморфных функций. Речь пойдет о следующих пространствах.

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет; Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН.

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^N$ или $\mathbb{C}$. Символами $C(G)$ и $H(G)$ обозначим пространства непрерывных и, соответственно, голоморфных в G функций. Для произвольной положительной в G функции v образуем пространство:

$$C_v(G) := \left\{ f \in C(G) : \|f\|_v := \sup_{x \in G} \frac{|f(x)|}{v(x)} < \infty \right\};$$

$$H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_v := \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\}.$$

Основные вопросы, которые нас будут интересовать и которые имеют первостепенное значение для весовых шкал пространств непрерывных и голоморфных функций, формулируются следующим образом: 1) какие веса считать эталонными? 2) для каких весов соответствующие пространства банаховы? 3) можно ли сформулировать критерии (непрерывного, компактного) вложения одного весового пространства в другое в терминах весов, их задающих?

1. Эталонные веса

Символ $E_v(G)$ используем для обозначения как $C_v(G)$, так и $H_v(G)$. Точки из G будем обозначать через x независимо от того, какое открытое множество, в $\mathbb{R}^N$ или в $\mathbb{C}$, имеется в виду. Будем говорить, что v — *вес на G* , если для любой точки из G в пространстве $E_v(G)$ имеется функция, отличная в этой точке от нуля. Нетрудно привести критерий веса для пространств непрерывных функций.

Предложение 1. *Функция v — вес на $G \subset \mathbb{R}^N$ в том и только в том случае, когда v локально отграничена от нуля в G , т. е. когда $\inf_{x \in K} v(x) > 0$ при любом $K \Subset G$.*

Как показывают простейшие примеры, вопрос об описании весов для пространств голоморфных функций является гораздо более сложным. Более того, полный ответ на него, насколько нам известно, до сих пор не получен. Простейшим достаточным условием веса на $G \subset \mathbb{C}$ является, очевидно, условие $\inf_{z \in G} v(z) > 0$. Оно эквивалентно тому, что $H_v(G)$ содержит все постоянные. Как показал Фам Чонг Тиен, оно же необходимо и достаточно для того, чтобы радиальная функция v (т. е. $v(z) = v(|z|)$) была весом на $G = \mathbb{C}$.

Основополагающее значение имеет понятие ассоциированного веса, которое формулируется следующим образом (см. [4, 7, 8]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть v — положительная на G функция и $B_v(G)$ — единичный шар в $E_v(G)$. Функция

$$\tilde{v}(x) := \sup \{ |f(x)| : f \in B_v(G) \}, \quad x \in G,$$

называется *ассоциированным* с v весом.

Предложение 2. Ассоциированный с v на G вес обладает следующими свойствами:

- (1) $0 \leq \tilde{v}(x) \leq v(x)$ для любого $x \in G$;
- (2) v — вес на $G \iff \tilde{v}(x) > 0$ для любого $x \in G$;
- (3) $\|f\|_{\tilde{v}} = \|f\|_v$;
- (4) $E_v(G) = E_{\tilde{v}}(G)$.

Из свойств (3) и (4) вытекает, что эталонные веса для пространств непрерывных и голоморфных функций следует искать среди верхних огибающих семейств модулей непрерывных и, соответственно, голоморфных функций. Отсюда, в частности, следует, что эталонные веса для пространств непрерывных функций полунепрерывны снизу. Наибольший интерес при этом представляют те веса, которые обеспечивают банаховость соответствующих пространств. В этом направлении известен такой результат.

Предложение 3. Если функция v локально ограничена сверху в G , то пространство $E_v(G)$ банахово. В случае, когда $G \subset \mathbb{R}^N$ и функция v полунепрерывна снизу в G , верно и обратное, т. е. из банаховости пространства $C_v(G)$ следует локальная ограниченность v сверху в G .

Таким образом, мы приходим к следующему выводу.

Вывод 1. Для определения весовых банаховых пространств непрерывных в $G \subset \mathbb{R}^N$ функций можно ограничиться положительными полунепрерывными снизу и локально ограниченными сверху в G весами. Семейство всех таких весов обозначим через $\mathcal{C}_G$.

В случае пространств голоморфных функций ассоциированные веса обладают важными дополнительными свойствами.

Предложение 4. Пусть v — локально ограниченный сверху вес в $G \subset \mathbb{C}$. Тогда ассоциированный с v вес $\tilde{v}$ обладает свойствами:

- (1) функция $\tilde{v}$ локально липшицева в G , т. е.

$$\forall K \Subset G \exists M_K > 0 : |\tilde{v}(z_1) - \tilde{v}(z_2)| \leq M_K |z_1 - z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in K;$$

(2) функция $\tilde{v}$ логарифмически субгармонична в G , т. е. v имеет вид $v(z) = e^{\varphi(z)}$, где φ — субгармоническая в G функция.

Вывод 2. Для определения весовых банаховых пространств голоморфных в $G \subset \mathbb{C}$ функций можно ограничиться положительными локально липшицевыми и логарифмически субгармоническими в G функциями. Семейство всех таких весов обозначим через $\mathcal{H}_G$.

Будем говорить, что вес v_1 на G эквивалентен другому весу v_2 на G ($v_1 \sim v_2$), если $E_{v_1}(G) = E_{v_2}(G)$. Ясно, что это отношение эквивалентности, которое разбивает все веса на классы, каждый из которых определяет свое весовое пространство $E_v(G)$. Из выводов 1 и 2 следует, что в случае, когда $G \subset \mathbb{R}^N$ (соответственно, $G \subset \mathbb{C}$) каждый такой класс содержит некоторую функцию из $\mathcal{C}_G$ (соответственно, из $\mathcal{H}_G$). Фам Чонг Тиеном показано, что для пространств непрерывных функций семейство $\mathcal{C}_G$ нельзя сузить. Именно, он построил пример полунепрерывного снизу и локально ограниченного сверху на оси веса, для которого соответствующее весовое пространство нельзя задать ни одним непрерывным весом. С этой точки зрения семейство $\mathcal{C}_G$ является оптимальным. Остается только решить вопрос о том, для каких v_1 и v_2 из $\mathcal{C}_G$ пространства $C_{v_1}(G)$ и $C_{v_2}(G)$ совпадают. Он решается, как и обычно, на основании теорем вложения, о которых пойдет речь в следующем параграфе. В заключение отметим, что вопрос об оптимальности семейства $\mathcal{H}_G$ пока остается открытым.

2. Теоремы вложения

Будем говорить, что вес v_1 подчинен весу v_2 ($v_1 \prec v_2$), если

$$\exists M > 0 : v_1(x) \leq M v_2(x) \quad \forall x \in G.$$

Предложение 5. Если $v_1 \prec v_2$, то $E_{v_1}(G) \subset E_{v_2}(G)$.

В случае пространств непрерывных функций с помощью теоремы Банаха о замкнутом графике доказывается следующий критерий.

Предложение 6. Пусть $v_1, v_2 \in \mathcal{C}_G$. Следующие условия эквивалентны:

- (1) $C_{v_1}(G) \subset C_{v_2}(G)$;
- (2) $C_{v_1}(G)$ непрерывно вложено в $C_{v_2}(G)$;
- (3) $v_1 \prec v_2$.

Отсюда следует, что два веса $v_1, v_2 \in \mathcal{C}_G$ эквивалентны (т. е. они определяют одно и то же весовое пространство непрерывных функций) в том и только в том случае, когда

$$0 < \inf_{x \in G} \frac{v_1(x)}{v_2(x)} \leq \sup_{x \in G} \frac{v_1(x)}{v_2(x)} < \infty.$$

Резюмируя сказанное выше, приходим к следующему заключению:

Оптимальным классом весов для пространств непрерывных функций в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^N$ является любое семейство S_G функций из $\mathcal{C}_G$, которое обладает следующими двумя свойствами:

(1) для любой функции $v \in \mathcal{C}_G$ имеется $w \in S_G$ с

$$0 < \inf_{x \in G} \frac{v(x)}{w(x)} \leq \sup_{x \in G} \frac{v(x)}{w(x)} < \infty;$$

(2) для любых двух функций $v_1, v_2 \in S_G$

$$\liminf_{x \rightarrow \partial G} \frac{v_1(x)}{v_2(x)} = 0 \quad \text{или} \quad \limsup_{x \rightarrow \partial G} \frac{v_1(x)}{v_2(x)} = \infty.$$

3. Компактные вложения

Как известно (см., например, обзорную статью В. В. Жаринова [3]), в теории весовых функциональных пространств особое значение имеют пространства, задаваемые с помощью компактных спектров (когда изучаемое пространство конструируется из весовых банаховых пространств, компактно вложенных одно в другое). С помощью теоремы Арцела — Асколи и ее следствия — теоремы Монтея — устанавливаются следующие два результата в данном направлении. Они, как нетрудно видеть, в какой-то мере противоположны друг другу.

Предложение 7. Ни для каких весов $v_1, v_2 \in \mathcal{C}_G$ пространство $C_{v_1}(G)$ не может быть компактно вложено в $C_{v_2}(G)$.

Предложение 8. Пусть v_1 и v_2 — два непрерывных веса в $G \subset \mathbb{C}$. Если

$$\lim_{x \rightarrow \partial G} \frac{v_1(z)}{v_2(z)} = 0,$$

то $H_{v_1}(G)$ компактно вложено в $H_{v_2}(G)$.

Известна следующая характеристика компактности вложения $H_{v_1}(G)$ в $H_{v_2}(G)$, которую можно извлечь из [8, теорема 2.1].

Предложение 9. Для того чтобы $H_{v_1}(G)$ было компактно вложено в $H_{v_2}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлась такая неотрицательная функция φ с компактным носителем в G , для которой

$$\left(v_1(z), \frac{1}{\varphi(z)}\right)^\sim \leq \varepsilon v_2(z) \quad \forall z \in G.$$

Ясно, однако, что фигурирующее в предложении 9 условие практически невозможно проверить, исключая тривиальный случай, приведенный в предложении 8. Имеется ли более удобное для применения условие — нам не известно.

Литература

1. Абанин А. В. Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения.— М.: Наука, 2007.—222 с.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1988.—512 с.
3. Жаринов В. В. Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, № 4.—С. 97–131.
4. Коробейник Ю. Ф. О мультипликаторах весовых функциональных пространств // Anal. Math.—1989.—Т. 15.—С. 105–114.
5. Смирнов А. Г., Соловьев М. А. Спектральные свойства виковых степенных рядов свободного поля с индефинитной метрикой // Теорет. и мат. физика.—2000.—Т. 125, № 1.—С. 57–73.
6. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I.—М.: Мир, 1986.—464 с.
7. Anderson J. M., Duncan J. Duals of Banach spaces of entire functions // Glasgow Math. J.—1990.—Vol. 32.—P. 215–220.
8. Bierstedt K. D., Bonet J., Taskinen J. Associated weights and spaces of holomorphic functions // Studia Math.—1998.— Vol. 127.—P. 137–168.

WEIGHTED SPACES OF CONTINUOUS AND HOLOMORPHIC FUNCTIONS

A. V. Abanin

We undertake a systematic study of optimal classes of weights using for spaces of continuous and holomorphic functions on an open set in $\mathbb{R}^N$ and $\mathbb{C}^N$, respectively. These classes play an important role in the theory of approximation and interpolation, entire functions, duality of function spaces, ultradistributions, Fourier analysis, theoretical and mathematical physics, etc.

WHEN ARE ALL BOUNDED OPERATORS BETWEEN CLASSICAL BANACH LATTICES REGULAR?

A. W. Wickstead^{1,2}

We refer the reader to [8] for the basic theory and terminology about Banach lattices. *Regular* operators are those that can be written as the difference of two positive operators. We write $\mathcal{L}(X, Y)$ for the space of bounded operators from X into Y and $\mathcal{L}^r(X, Y)$ for the corresponding space of regular operators. In 1936 Kantorovich, [5], proved that every regular operator must be bounded and made a start on asking when the converse is true. I. e. when is every bounded linear operator from X into Y regular? There is no simple answer to this question. In order to illustrate our current state of knowledge, I will tell you what happens when X and Y are selected from the classical Banach lattices ℓ_1 , $L_1([0, 1])$, ℓ_p ($1 < p < \infty$), $L_p([0, 1])$ ($1 < p < \infty$), c_0 , c , ℓ_∞ or $C([0, 1])$. In the course of doing this we will meet (at least versions of) many of the known results in this field. The bare facts are presented in the following table. Each cell in this array contains not only an indication of whether there is equality or not but also a number that is a reference to the justification of that statement in this note.

$X \backslash Y$	$L_q([0, 1])$ or ℓ_q ($1 \leq q < \infty$)	ℓ_∞	c_0	c	$C([0, 1])$
ℓ_1	= (2)	= (1)	= (3)	= (3)	= (3)
$L_1([0, 1])$	= (2)	= (1)	$\neq$ (13)	= (5)	= (5)
ℓ_p ($1 < p < \infty$)	$\neq$ (6)	= (1)	= (4)	= (4)	= (4)
$L_p([0, 1])$ ($1 < p < \infty$)	$\neq$ (6)	= (1)	$\neq$ (13)	$\neq$ (14)	$\neq$ (15)
c_0	$\neq$ (6)	= (1)	= (4)	= (4)	= (4)
c	$\neq$ (6)	= (1)	$\neq$ (8)	= (10)	= (10)
ℓ_∞	$\neq$ (6)	= (1)	$\neq$ (8)	$\neq$ (10)	$\neq$ (10)
$C([0, 1])$	$\neq$ (6)	= (1)	$\neq$ (8)	$\neq$ (10)	$\neq$ (10)

¹Northern Ireland, Belfast, Queen's University Belfast, Pure Mathematics Research Centre.

²This note is based on a talk that I gave at the International Conference of Young Scientists on «Mathematical Analysis and Mathematical Modeling» (Vladikavkaz, 12–19, July, 2010). I would like to thank the organizers for the opportunity to speak there.

All that remains is to justify all of these claims. We will start with the cases where there is equality. The earliest positive result is due to Kantorovich in 1936, [5], where he proved:

Theorem 1. *If Y is a Dedekind complete Banach lattice with a strong order unit then $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}^r(X, Y)$ for all Banach lattices X .*

Amongst our examples only ℓ_∞ has both of these properties. There are other Banach lattices Y for which the conclusion is true, see [2], but no other Dedekind complete Banach lattices, [4]. Another case that almost belongs to the pre-history of this subject is the following:

Theorem 2. *If X is an AL-space and Y has a Levi norm then $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}^r(X, Y)$.*

Kantorovich and Vulikh proved this with a slightly stronger assumption on Y in [6]. Synnatzschke formulated the current version in [11]. Again, it is shown in [4] that amongst Dedekind complete Banach lattices Y this is the best possible result. The spaces ℓ_p and $L_p([0, 1])$ have a Levi norm for any $p \in [1, \infty]$. The folk-lore of this topic also contains the result:

Theorem 3. *If X is an atomic AL-space then, for all Banach lattices Y , $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}^r(X, Y)$.*

Apart from changing the norm on X to an equivalent one, this is the best possible result, see van Rooij [10]. In a similar vein, in [12], Xiong proved:

Theorem 4. *If X is atomic with an order continuous norm and Y is an AM-space then $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}^r(X, Y)$.*

The class of AM-spaces can only be widened by allowing an equivalent norm. I suspect that the condition of being atomic with an order continuous norm cannot be weakened, but that remains an open problem. Our final positive result, which is rather elementary, is:

Theorem 5. *If X is an AL-space and Y has a strong order unit then $\mathcal{L}(X, Y)$ has a strong order unit and therefore $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}^r(X, Y)$.*

You may have noticed that, so far, all the results that guarantee that $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}^r(X, Y)$ involve either X being (up to an equivalent norm) an AL-space and/or Y being an AM-space. For some time it was thought that one of these conditions was necessary. In [1], Abramovich gave an example to show that this was not true. Nevertheless, there are results in that kind of vein. I won't give a precise definition of a Banach lattice

E being *finitely lattice representable* in F , but simply point out that it certainly holds if E is isometric to a sublattice of F .

Theorem 6. *If ℓ_p is finitely lattice representable in Y for $p \in [1, \infty)$ or ℓ_∞ is not finitely lattice representable in Y and $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}^r(X, Y)$ then X is (up to an equivalent norm) an AL-space.*

The first version was proved by Abramovich and Janovsky in [3], and the second by Ørno in [9]. A result of Krivine, [7], says that given any Banach lattice E , there is $p \in [1, \infty]$ such that ℓ_p is finitely lattice representable in E , so the two versions of Theorem 6 are actually equivalent.

Similarly we have:

Theorem 7. *If ℓ_p is finitely lattice representable in X for $p \in (1, \infty]$ or ℓ_1 is not finitely lattice representable in X and $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}^r(X, Y)$ then Y is (up to an equivalent norm) an AM-space.*

Again, the first version is due to Abramovich and Janovsky. In [12] Xiong investigated the subject matter of this talk and paid special attention to the case that $X = C(K)$ and $Y = C(\Omega)$ or $Y = c_0$.

Theorem 8. *If K is an infinite compact Hausdorff space then $\mathcal{L}(C(K), c_0) \neq \mathcal{L}^r(C(K), c_0)$.*

DEFINITION 9. A compact Hausdorff space K is an $X(n)$ space if it is the disjoint union of n open and closed subsets each of which is the one-point compactification of a discrete space. The interval $[0, 1]$ is not an $X(n)$ space for any $n \in \mathbb{N}$, nor is the Stone-Čech-compactification of $\mathbb{N}$.

Theorem 10 (Xiong). *If K is a compact Hausdorff space then the following are equivalent:*

- (1) *For some $p \in \mathbb{N}$, K is an $X(p)$ -space;*
- (2) *For every compact Hausdorff space Ω , $\mathcal{L}(C(K), C(\Omega)) = \mathcal{L}^r(C(K), C(\Omega))$;*
- (3) *$\mathcal{L}(C(K), C([0, 1])) = \mathcal{L}^r(C(K), C([0, 1]))$;*
- (4) *$\mathcal{L}(C(K), c) = \mathcal{L}^r(C(K), c)$.*

The implication (3) implies (4) follows from a special case of a general result of Xiong, [12, Corollary 1.3], that we will need again later:

Proposition 11. *If X is any Banach lattice and $\mathcal{L}(X, C([0, 1])) = \mathcal{L}^r(X, C([0, 1]))$ then $\mathcal{L}(X, c) = \mathcal{L}^r(X, c)$.*

The time has come when we must start looking at some actual examples of bounded operators that are not order bounded, to take care of the remaining cases.

DEFINITION 12. The *Rademacher* functions on $[0, 1]$ are defined by $r_n(t) = \text{sgn}(\sin(2^n \pi t))$ where sgn denotes the sign function.

The Rademacher functions lie in $L_p([0, 1])$ for all p (including $p = \infty$). They form an orthonormal sequence in the Hilbert space $L_2([0, 1])$. Furthermore for finite p the functionals that they define on $L_p([0, 1])$ by integration converge weak* to 0. I. e. for all $f \in L_p([0, 1])$, $\phi_n(f) = \int_0^1 r_n(t)f(t) dt \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, as long as $p \in [1, \infty)$. You can also see either by direct calculation or from the uniform boundedness principle that (ϕ_n) is a bounded sequence in $L_p([0, 1])^*$.

Proposition 13. *If $p \in [1, \infty)$ there is a bounded linear operator $T : L_p([0, 1]) \rightarrow c_0$ which is not regular.*

$\triangleleft$ Define an operator $T : L_p([0, 1]) \rightarrow c_0$ by $Tx = (\phi_n(x))$. T is certainly bounded. Note that for $n \geq 1$ $T(r_n) = e_n$, a basis vector in c_0 , because of the orthonormality of the Rademacher functions, and that $T(r_0) = 0$ so that $T(r_0 + r_n) = e_n$. As $0 \leq r_0 + r_n \leq 2r_0$, if we had $U \geq T$, 0 then

$$U(2r_0) \geq U(r_0 + r_n) \geq T(r_0 + r_n) = e_n$$

for all $n \in \mathbb{N}$, which is inconsistent with $U(2r_0)$ lying in c_0 . It follows that T is not regular after all. $\triangleright$

This kind of example won't deal with the case of operators from $L_p([0, 1])$ into c , though. Indeed, we already know that if $p = 1$ then all bounded operators are regular. An example in the case $p > 1$ is slightly more difficult.

Proposition 14. *If $1 < p < \infty$ then $\mathcal{L}^r(L_p([0, 1]), c) \neq \mathcal{L}^r(L_p([0, 1]), c)$.*

$\triangleleft$ A bounded linear operator T from any Banach space X into c may be described by a bounded weak* convergent sequence of functionals (f_n) in X^* , with limit $f \in X^*$ via the formula $Tx = (f_n(x))$.

Let $p^{-1} + q^{-1} = 1$, so that $1 < q < \infty$. If $n \in \mathbb{N}$, write $n = 2^j k$ where k is odd and then define

$$f_n(t) = \begin{cases} 2^{j/q} j^{-1/q} r_k(2^{-j}t), & t \in [0, 2^{-j}); \\ 0, & t \in (2^{-j}, 1], \end{cases}$$

so that $|f_n| = 2^{j/q} j^{-1/q} \chi_{[0, 2^{-j}]}$ and hence

$$\|f_n\|_q = (2^j j^{-1} 2^{-j})^{1/q} = j^{-1/q}.$$

The sequence (f_n) is certainly bounded, so we may define $T : L_p([0, 1]) \rightarrow \ell_\infty$ by the formula $Tx = \left(\int_0^1 f_n(t)x(t) dt \right)$. In fact, $Tx \in c_0 \subseteq c$ for all $x \in L_p([0, 1])$. To see this, pick any x with $\|x\| \leq 1$ and $\epsilon > 0$. First choose $j_0 \in \mathbb{N}$ such that $j > j_0$ implies that $j^{-1/q} < \epsilon$, so that (if k is odd) $|(Tx)_{2^j k}| \leq \|f_{2^j k}\|_q = j^{-1/q} < \epsilon$. For each $j \leq j_0$ there is k_j such that $k > k_j$ implies that $|(Tx)_{2^j k}| = |f_{2^j k}(x)| < \epsilon$. We now see that $|(Tx)_{2^j k}| < \epsilon$ except for the finite number of integers $2^j k$ with $j \leq j_0$ and $k \leq k_j$.

If T were regular, there would be $U : L_p([0, 1]) \rightarrow c$ with $U \geq \pm T$. Write $g_n(x) = (Ux)_n$ and $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$. As $U \geq \pm T$, $g_n \geq |f_n|$ for all $n \in \mathbb{N}$. If we fix j then we see that

$$|g_{2^j k}| \geq |f_{2^j k}| = 2^{j/q} j^{-1/q} \chi_{[0, 2^{-j}]}$$

for all odd integers k . Letting $k \rightarrow \infty$ through the odd integers, and using the fact that the usual positive cone in $L_q([0, 1])$ is weak*-closed, we see that $g \geq 2^{j/q} j^{-1/q} \chi_{[0, 2^{-j}]}$. This holds for all $j \in \mathbb{N}$, so that

$$\|g\|_q^q \geq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j-1} (2^{j/q} j^{-1/q})^q = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j} = \infty,$$

so that $g \notin L_q([0, 1])$, U does not exist and T is not regular. $\triangleright$

Recalling Proposition 11 we also see that

Proposition 15. *If $1 < p < \infty$ then $\mathcal{L}^r(L_p([0, 1]), C([0, 1])) \neq \mathcal{L}^r(L_p([0, 1]), C([0, 1]))$.*

References

1. Abramovič Ju. A. The space of operators that act between Banach lattices // Investigations on linear operators and the theory of functions, VIII. Zap. Nauch. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI).—1977.—Vol. 73.—P. 188–192.—(In Russian, with English summary).
2. Abramovič Ju. A., Gejler V. A. On a question of Fremlin concerning order bounded and regular operators // Colloq. Math.—1982.—Vol. 46, № 1.—P. 15–17.

3. Abramovič Ju. A., Janovskij L. P. Application of Rademacher systems to operator characterizations of Banach lattices // *Colloq. Math.*—1982.—Vol. 46, № 1.—P. 73–78.
4. Abramovich Y. A., Wickstead A. W. When each continuous operator is regular. II // *Indag. Math. (N.S.)*.—1997.—Vol. 8, № 3.—P. 281–294.
5. Kantorovich L. V. Concerning the general theory of operations in partially ordered spaces // *Dok. Akad. Nauk. SSSR.*—1936.—Vol. 1.—P. 271–274.—(In Russian).
6. Kantorovitch L., Vulich B. Sur la représentation des opérations linéaires // *Compositio Math.*—1938.—Vol. 5.—P. 119–165.—(In French).
7. Krivine J. L. Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés // *Ann. of Math. Ser. 2.*—1976.—Vol. 104, № 1.—P. 1–29.
8. Meyer-Nieberg P. *Banach Lattices*.—Berlin: Springer-Verlag, 1991.—xvi+395 p.—(Ser. Universitext).
9. Ørno P. On Banach lattices of operators // *Israel J. Math.*—1974.—Vol. 19.—P. 264–265.
10. van Rooij A. C. M. On the space of all regular operators between two Riesz spaces // *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*—1985.—Vol. 47, № 1.—P. 95–98.
11. Synnaëke Ju. The operator that is conjugate to a regular one, and certain applications of it to the question of the complete continuity and weak complete continuity of regular operators // *Vestnik Leningrad. Univ.*—1972.—№ 1.—P. 60–69.—(In Russian, with English summary).
12. Xiong H. Y. On whether or not $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}^r(E, F)$ for some classical Banach lattices E and F // *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*—1984.—Vol. 46, № 3.—P. 267–282.

КОГДА РЕГУЛЯРНЫ ВСЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ МЕЖДУ КЛАССИЧЕСКИМИ БАНАХОВЫМИ РЕШЕТКАМИ?

Э. В. Викстед

Изучается вопрос, сформулированный в названии. Дается полный ответ в случае, когда рассматриваемые банаховы решетки являются классическими: ℓ_1 , $L_1([0, 1])$, ℓ_p ($1 < p < +\infty$), $L_p([0, 1])$ ($1 < p < +\infty$), c_0 , c , ℓ_∞ или $C([0, 1])$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Е. С. Каменецкий¹

Подавляющее большинство дифференциальных уравнений в полных и частных производных не имеют решений в явном виде. Даже если их решение получено в виде ряда, суммирование этих рядов при различных значениях аргументов может оказаться достаточно трудоемким. В то же время для многих естественнонаучных и инженерных задач необходимо получение хотя бы приближенного решения дифференциальных уравнений. Поэтому уже давно стали разрабатываться численные методы решения. До появления ЭВМ такие методы использовались редко из-за их большой трудоемкости. Появление достаточно мощной вычислительной техники коренным образом изменило ситуацию. Возникло ощущение, что любое уравнение или система уравнений могут решаться с заданной точностью и ограничения связаны только с объемом памяти ЭВМ и приемлемым временем проведения расчетов. В настоящее время объем памяти вычислительных систем настолько велик, что практически не ограничивает возможности решения задач. Достаточно широкое распространение суперкомпьютеров с параллельными вычислениями дает возможность получать решение сложных задач за приемлемое время. Но широкое использование численных методов выявило много проблем, связанных с приближенностью задания искомой функции и ее производных. Для того чтобы получать решение с конечным объемом вычислений, приходится либо переходить от непрерывных функций к дискретным, либо представлять функции в виде конечных рядов. Рассмотрим первый способ представления функций, который приводит к замене производных конечными разностями.

Множество точек, в которых ищется решение, называется сеткой. Отдельные точки сетки называются узлами сетки. Расстояние между соседними узлами называется шагом сетки. Регулярные сетки представляют собой упорядоченную по определенным правилам структуру с явно выраженными сеточными направлениями, которые в общем случае представляют собой криволинейную систему координат. Расстояние между узлами сетки называется шагом сетки. При-

¹Россия, Владикавказ, Южный математический институт ВНИЦ РАН.

мер ортогональной сетки с постоянными шагами для двумерной стационарной задачи приведен на рис. 1. Отметим, что каждому узлу сетки соответствуют не только значения координат x, y , но и порядковые номера узла по соответствующим координатам i, j .

При использовании дискретных функций каждое дифференциальное уравнение в частных производных заменяется системой алгебраических уравнений, число которых равно числу внутренних узлов сетки.

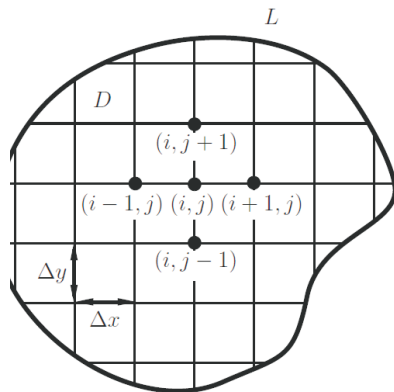


Рис. 1. Сетка для двумерной стационарной задачи в области D с границей L .

Отметим, что даже разностный аналог первой производной по одной из координат может быть получен многими способами, что приводит к большому разнообразию разностных выражений, соответствующих исходному уравнению в частных производных.

Возникает вопрос: как выбрать из множества разностных схем наилучшую для данной задачи? Существует много критериев, которые дают возможность оценить, какая схема лучше, но они часто противоречат друг другу, что делает выбор схемы неоднозначным.

Одним из важных критериев является сходимость разностной схемы, т. е. стремление решения разностного уравнения к решению соответствующего дифференциального уравнения при уменьшении шагов сетки. Как ни странно, этот критерий удовлетворяется далеко не всегда и некоторые разностные схемы соответствуют не исходному дифференциальному уравнению, а другому уравнению, в котором обычно появляются дополнительные члены.

Достаточно очевидно, что уменьшение шагов сетки должно увеличивать точность расчетов, но от вида разностной схемы зависит, насколько существенно это увеличение. Схемы высокого порядка точности аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение с локальной точностью, пропорциональной величине шагов в степени выше первой, но при этом следует иметь в виду, что оценки проводятся в предположении, что старшие производные не больше младших. Это предположение не всегда выполняется. Отметим, что при уменьшении шагов сетки при сохранении размеров расчетной области увеличивается количество вычислительных операций, что может привести к росту глобальной ошибки за счет ошибок округления при вычислениях на ЭВМ.

Важным требованием к разностной схеме является обеспечение устойчивости решения, т. е. непрерывной зависимости решения от начальных и граничных условий. При возникновении неустойчивости ошибка экспоненциально возрастает и очень быстро начинает намного превышать действительные значения искомой функции. Это приводит к переполнению ячеек памяти и остановке процесса вычислений. Некоторые разностные схемы являются абсолютно устойчивыми, т. е. при их использовании неустойчивость не возникает при любом выборе шагов сетки; некоторые — абсолютно неустойчивыми: при использовании таких схем неустойчивость возникает всегда; а некоторые — условно устойчивыми: возникновение неустойчивости зависит от соотношения шагов сетки и коэффициентов уравнения.

Весьма желательным свойством разностной схемы является консервативность, т. е. выполнение законов сохранения, связанных с исходными дифференциальными уравнениями. Трудности при этом связаны с тем, что преобразования дифференциальных уравнений сложно отобразить без искажений при записи соответствующих разностных уравнений. Наиболее целесообразно для построения консервативных разностных схем рассматривать конечные объемы, соответствующие каждому узлу сетки, и записывать разностные уравнения, исходя из интегральных уравнений, обеспечивающих выполнение законов сохранения. Если рассматриваются уравнения с переменными коэффициентами, такой подход тоже связан с определенными трудностями. Отметим, что для получения консервативных разностных схем удобнее использовать смещенные сетки, в которых для части переменных узлы сетки смещены на полшага по отношению к узлам основной сетки. Для обеспечения консервативности численного решения иногда используют методы частиц в ячейке и

крупных частиц. В этих методах отдельно рассматриваются изменение искомых функций в ячейке, соответствующей узлу сетки, за счет внешних воздействий и отдельно перенос значений функций из ячейки в ячейку движущейся средой.

Желательным свойством разностной схемы является также транспортность, т. е. перенос некоторой величины движущейся средой при отсутствии диффузии только в направлении перемещения среды.

Решение разностных уравнений должно также быть монотонным, т. е. разностная запись уравнений не должна приводить к появлению осцилляций, которых нет в решении исходного дифференциального уравнения. Обычно немонотонное поведение решения наблюдается там, где искомые функции быстро меняются. Чтобы ее избежать, в некоторых случаях в уравнение вводят дополнительные члены, которые представляют собой так называемую искусственную вязкость. Эти члены малы там, где искомые функции изменяются медленно, а при быстром изменении функции они замедляют этот процесс. В результате область, в которой происходит значительное изменение функций, расширяется, но осцилляции исчезают.

Реализация разностных схем, т. е. получение с их помощью численных значений искомой функции, также может вызывать определенные сложности. В некоторых случаях возмущения, возникающие в определенной точке, в дальнейшем распространяются только в точках сетки, расположенных в шахматном порядке. Для параболических и, в меньшей мере, эллиптических уравнений весьма существенно, является ли схема явной или неявной. В явных схемах каждое алгебраическое уравнение содержит одну неизвестную, а в неявных несколько. Соответственно, явные схемы легче реализуются, но они менее устойчивы. При реализации неявных схем приходится решать системы алгебраических уравнений, что увеличивает время расчетов, особенно в случае нелинейных уравнений. Обычно нелинейные уравнения линеаризуют и используют метод предикции–коррекции, т. е. несколько раз вычисляют каждое значение искомой функции. При решении эллиптических уравнений всегда приходится решать системы алгебраических уравнений. Как правило, они решаются методом итераций с использованием различных приемов для ускорения сходимости.

Отметим, что при разной скорости изменения искомых функций по координатам или разной скорости протекания процессов, опре-

деляющих ее изменение по времени, может использоваться метод расщепления по координатам или по физическим процессам, при котором последовательно решаются более простые уравнения.

При наличии пограничных слоев или других частей расчетной области, в которых предполагается быстрое изменение искомых функций, используют либо запись исходных уравнений в преобразованных координатах, либо так называемые телескопические сетки. В последнем случае решение сначала ищется на грубой сетке, а затем в определенной части расчетной области сетка измельчается. Граничные условия для получения решения на мелкой сетке получаются из решения на более грубой сетке.

Решение уравнений в частных производных определяется не только видом уравнения, но и граничными и начальными условиями. При использовании метода конечных разностей задание этих условий имеет ряд особенностей. Нередко возникают ситуации, когда необходимы дополнительные граничные условия, которых нет в исходной задаче. Если границы области не совпадают с координатными плоскостями, приходится либо использовать сетки с переменным шагом вблизи границы, либо преобразовывать координаты, либо использовать криволинейные сетки. Сетки с переменным шагом уменьшают точность решения, преобразование координат усложняет уравнения, а оптимальный выбор узлов криволинейной сетки является самостоятельной нетривиальной задачей. В случае быстрого изменения искомой функции вблизи границы обычно либо преобразуют координаты, растягивая их в окрестности границы, либо измельчают сетку, либо используют пристеночные функции, т. е. решения упрощенных уравнений или эмпирические зависимости. Отметим, что записать граничные условия в разностном виде так, чтобы точность такой записи была не ниже точности разностной записи уравнений, нередко достаточно сложно. Значительные сложности возникают при задании граничных условий в том случае, когда границы расчетной области не определены из условий задачи. Такая ситуация обычно возникает в случае, когда в математической физике граничные условия задаются на бесконечности. При этом часто на границах принимают равными нулю первые или вторые производные от искомых функций по нормали к границе или используют уравнения, в которых отброшены вторые или первые и вторые производные по нормали к границе. Для того чтобы избежать отражения возмущений от границы, иногда при разностной записи гранич-

ных условий применяют сглаживание. Иногда на начальных стадиях решения задают граничные значения искомых функций, а после окончания переходного процесса приравнивают нулю производные по нормали к границе. В ряде задач для уменьшения неопределенности при задании граничных условий на произвольно выбранных границах используют телескопические сетки.

Начальные условия чаще всего забываются решением и могут задаваться более или менее произвольно, но при неудачном их задании может возникнуть неустойчивость. Кроме того, время переходного процесса, в течение которого решение зависит от начальных условий, а значит, и полное время решения задачи существенно зависит от выбранных начальных условий.

В заключение заметим, что обилие возможных формально более или менее равноценных вариантов при решении одной и той же задачи методом конечных разностей делает процесс получения правильного решения в какой-то мере искусством.

Литература

1. Поттер Д. Вычислительные методы в физике.—М.: Мир, 1975.—392 с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.—М.: Мир, 1980.—616 с.
3. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. Т. 1.—М.: Мир, 1991.—502 с.
4. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. Т. 2.—М.: Мир, 1991.—552 с.
5. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики.—М.: Наука, 1992.—423 с.
6. Colella Ph., Puckett E. G. Modern numerical methods for fluid flow.—Berkeley, 1998.—148 p.
7. Самарский А. А., Вабишевич П. Н. Вычислительная теплопередача.—М.: УРСС, 2003.—782 с.
8. Encyclopedia of computational mechanics. Vol. 1.—Chichester: Wiley and Sons, 2004.—798 p.
9. Зализняк В. Е. Основы вычислительной физики. Введение в методы частиц. Ч. 2.—М.—Ижевск: РХД, 2006.—156 с.

FINITE DIFFERENCE METHODS FOR SOLVING PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

E. S. Kamenetsky

This is an overview of main concepts and difficulties which committed with finite difference solving of mathematical physic problems.

АНАЛИЗ, АЛГЕБРА И ЛОГИКА ВО ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

А. Г. Кусраев¹

1. Введение. В последние двадцать лет нестандартный анализ претерпевает качественные изменения: все больше внимания уделяется синтетическим стандартным и нестандартным методам, характеризующимся комбинированием разных идей и технических средств из анализа, алгебры и математической логики. Некоторые достижения в этом направлении отражены в монографиях [6, 10, 15]. Цель доклада — продемонстрировать такой подход на примере одной проблемы из теории операторов в векторных решетках. Необходимые сведения из теории векторных решеток можно найти в [6, 14]. Все рассматриваемые векторные решетки считаются *архимедовыми*.

2. Постановка задачи. Рассмотрим произвольную векторную решетку ($\equiv$ ВР) E . Элементы $x, y \in E$ называют *дизъюнктивными* и пишут $x \perp y$, если $|x| \wedge |y| = 0$. *Дизъюнктивное дополнение* непустого множества $M \subset E$ вводится так: $M^\perp := \{x \in E : (\forall y \in M) x \perp y\}$. Совокупность $\mathfrak{B}(E)$ всех подмножеств вида $M^\perp$ (называемых *полосами*), упорядоченная по включению, образует полную булеву алгебру, называемую *базой* E . Если E — пространство Канторовича ($\equiv K$ -пространство), то каждое множество вида $M^\perp$ допускает *порядковое проектирование* в E , следовательно, $\mathfrak{B}(E)$ изоморфна полной булевой алгебре $\mathfrak{P}(E)$ всех порядковых проекторов в E .

Предложение 1. Для линейного оператора $T : E \rightarrow E$ равносильны условия (1)–(3), а если E допускает порядковые проекторы, то — (1)–(4):

- (1) $Tx \in \{x\}^{\perp\perp}$ для любого $x \in E$;
- (2) $x \perp y$ влечет $Tx \perp y$, каковы бы ни были $x, y \in E$;
- (3) $T(K) \subset K$ для любой полосы $K \in \mathfrak{B}(E)$,
- (4) $\pi \circ T = T \circ \pi$ для любого порядкового проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор T называют *нерасширяющим*, если имеет место одно (а тогда и любое) из указанных условий (1)–(4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ВР назовем *решеткой Викстеда*, если в ней всякий нерасширяющий оператор является порядково ограниченным.

¹Россия, Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН.

Проблема Викстеда. Описать все решетки Викстеда.

В настоящем докладе ограничимся изучением проблемы Викстеда в классе *расширенных пространств Канторовича*.

3. Историческая справка. Проблема Викстеда была поставлена в работе Э. В. Викстеда [20] в 1977 г.¹ Вскоре (в 1978 г.) Ю. А. Абрамович, А. И. Векслер и А. В. Колдунов [1] анонсировали первый пример неограниченного нерасширяющего линейного оператора. Кроме того, выяснилось, что ответ на вопрос Викстеда зависит от пространства, в котором действуют операторы. В работах упомянутых трех авторов [1, 2] и П. Макполина и Э. В. Викстеда [19] были найдены классы векторных решеток, в которых нерасширяющий линейный оператор автоматически порядково ограничен. В этих же работах [2, 19] было установлено, что вопрос Викстеда имеет положительный ответ тогда и только тогда, когда рассматриваемое K -пространство *локально одномерно*. Тем самым, обсуждаемая задача свелась к строению локально одномерных K -пространств.

В 1980-х гг. была выдвинута гипотеза о том, что для K -пространства свойства локальной одномерности и дискретности равносильны. Ошибочные доказательства справедливости этой гипотезы и ее отрицания были опубликованы соответственно в [1] и [19]. В 1993 г. Э. В. Викстед [13] зафиксировал вопрос о справедливости этой гипотезы как открытый.

Кроме того, в булевозначном анализе хорошо известно, что локальная одномерность расширенного K -пространства связана со строением поля действительных чисел $\mathcal{R}$ внутри булевозначной модели $\mathbb{V}(\mathbb{B})$. Здесь также сложилось убеждение, что равенство $\mathbb{R}^\wedge = \mathcal{R}$ внутри $\mathbb{V}(\mathbb{B})$ связано с дискретностью K -пространства $\mathcal{R}\downarrow$ или, что то же самое, с дискретностью булевой алгебры $\mathbb{B}$.

В 1995 г. А. Е. Гутман в работе [16] установил, что существует непрерывное (безатомное) локально одномерное K -пространство. В этой же работе он получил описание баз расширенных локально одномерных K -пространств: ими оказались в точности σ -дистрибутивные полные булевы алгебры.

В 2004 г. в работе А. Г. Кусраева [7] был предложен булевозначный подход к изучению нерасширяющих операторов. При этом были обнаружены новые взаимосвязи. Развивая булевозначный подход, в [8] получены новые характеристики расширенных K -пространств с σ -дистрибутивной базой в терминах более узкого класса нерасширяющих линейных операторов. Подробный обзор см. в [9, 18].

4. Алгебра: σ -дистрибутивные булевы алгебры. Обозначим буквой Φ множество всех отображений $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Булеву σ -алгебру $\mathbb{B}$ называют *σ -дистрибутивной*, если для любой двойной последовательности $(b_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ в $\mathbb{B}$ выполнено условие (см. [11]):

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} b_{n,m} = \bigwedge_{\varphi \in \Phi} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} b_{n,\varphi(n)}.$$

¹Как сообщил автору А. И. Векслер, ранее аналогичный вопрос формулировал Г. Я. Лозановский на ленинградских математических семинарах.

ПРИМЕРЫ. (1) Алгебра $\mathcal{P}(A)$ всех подмножеств непустого множества A (булеан A) есть σ -дистрибутивная булева алгебра.

(2) Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой со свойством прямой суммы (ср. [6, 1.1.7 и 1.1.8]). Булева алгебра $\mathbb{B} := \mathbb{B}(\Omega, \Sigma, \mu)$ измеримых множеств по модулю множества нулевой меры будет σ -дистрибутивной в том и только в том случае, когда $\mathbb{B}$ атомна (а значит, изоморфна булеану непустого множества [18, 5.3.3]).

(3) Существуют безатомные σ -дистрибутивные полные булевы алгебры. Пусть $\mathbb{B} := \mathcal{P}(\mathbb{N})$ — булеан $\mathbb{N}$, а I — идеал $\mathbb{B}$, состоящий из конечных множеств. Тогда *порядковое пополнение* фактор-алгебры $\mathbb{B}/I$ будет безатомной σ -дистрибутивной булевой алгеброй [16].

Теорема 1. Справедливы утверждения: а) пространство Канторовича $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ будет решеткой Викстеда $\iff$ оно дискретно; б) существует безатомная решетка Викстеда.

$\triangleleft$ Утверждения (а) и (б) следуют из примеров (2) и (3). $\triangleright$

5. Анализ: функциональное уравнение Коши. *Функциональным уравнением Коши* ($\equiv$ ФУК) называют выражение

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

где в качестве неизвестной выступает функция f . Решения ФУК принято называть также *аддитивными* функциями. Решить ФУК означает найти все аддитивные функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Предложение 2. Решения ФУК — суть все $\mathbb{Q}$ -линейные эндоморфизмы $\mathbb{R}$, рассматриваемого как векторное пространство над $\mathbb{Q}$.

Итак, каждое решение ФУК удовлетворяет также уравнению $f(rx) = rf(x)$ ($r \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$), поэтому представляет интерес более общая ситуация. Пусть $\mathbb{F}$ — числовое поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}$ — подполе поля $\mathbb{F}$, содержащее $\mathbb{Q}$. Рассмотрим систему функциональных уравнений

$$(L) \quad \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & (x, y \in \mathbb{F}), \\ f(px) = pf(x) & (p \in \mathbb{P}, x \in \mathbb{F}), \end{cases}$$

где $p \in \mathbb{P}$ и $x, y \in \mathbb{F}$. Обозначим символом $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ поле $\mathbb{F}$, рассматриваемое как векторное пространство над полем $\mathbb{P}$. Как видно, решение системы (L) — суть $\mathbb{P}$ -линейные функции из $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ в $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{E}$ — базис Гамеля векторного пространства $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$, а $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathbb{F})$ — пространство всех функций из $\mathcal{E}$ в $\mathbb{F}$. Множество

всех решений системы (L) представляет собой векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, изоморфное $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathbb{F})$. Изоморфизм осуществляется сопоставлением решению f его ограничения $f|_{\mathcal{E}}$ на $\mathcal{E}$.

Теорема 3. Существует разрывное решение ФУК. Существует разрывное решение системы (L) , если $\mathbb{F} \neq \mathbb{P}$.

◁ Если $\mathbb{F} \neq \mathbb{P}$, то в базисе Гамеля $\mathcal{E}$ векторного пространства $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ имеются два различных элемента e_1 и e_2 . Подберем функцию $\tau : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ так, чтобы $\tau(e_1)/e_1 \neq \tau(e_2)/e_2$. Тогда соответствующее решение f_{τ} , $f_{\tau}|_{\mathcal{E}} = \tau$, ФУК удовлетворяет тому же равенству, следовательно, не может быть представлено в виде $f_{\tau}(x) = cx$ ($x \in \mathbb{R}$). Но тогда график $G(f_{\tau})$ плотен в $\mathbb{R}^2$, а сама функция f_{τ} не может быть непрерывной. Подробности см. в [3]. ▷

6. Алгебра: автоморфизмы и дифференцирования полей.

Рассмотрим еще две системы функциональных уравнений:

$$(A) \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y), \\ f(px) = pf(x), \\ f(xy) = f(x)f(y), \end{cases} \quad (D) \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y), \\ f(px) = pf(x), \\ f(xy) = f(x)y + xf(y). \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ненулевые решения системы уравнений (A) называются $\mathbb{P}$ -автоморфизмами поля $\mathbb{F}$, а решения системы (D) — $\mathbb{P}$ -дифференцированиями поля $\mathbb{F}$. Тожественный автоморфизм и нулевое дифференцирование принято называть *тривиальными*.

Анализ систем (A) и (D) требует более тонкого инструментария, а именно, *базиса трансцендентности* вместо базиса Гамеля.

Теорема Штейница. Всякое расширение L поля K допускает базис трансцендентности $\mathcal{E}$ над K . При этом L служит алгебраическим расширением чистого расширения $K(\mathcal{E})$ (где $K(\mathcal{E})$ — наименьшее подполе поля L , содержащее K и множество $\mathcal{E} \subset L$).

Теорема 4. Пусть $\mathbb{C}$ служит расширением некоторого алгебраически замкнутого поля $\mathbb{P}$. Равносильны утверждения:

- (1) $\mathbb{C} = \mathbb{P}$;
- (2) в $\mathbb{C}$ нет нетривиальных $\mathbb{P}$ -автоморфизмов;
- (3) в $\mathbb{C}$ нет нетривиальных $\mathbb{P}$ -дифференцирований.

◁ Известно, что любое дифференцирование поля $\mathbb{P}$ продолжается на расширение $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, причем такое продолжение однозначно

определяется заданием произвольных значений на базисе трансцендентности $\mathcal{E}$. Кроме того, дифференцирование поля $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ допускает и притом единственное продолжение до дифференцирования поля $\mathbb{C}$ (так как $\mathbb{C}$ служит сепарабельным алгебраическим расширением поля $\mathbb{P}(\mathcal{E})$) [4, 5]. Очевидно, что свобода в выборе значений дифференцирования на базисе трансцендентности позволяет построить нетривиальное дифференцирование. Аналогично нужно действовать и в случае автоморфизмов. $\triangleright$

7. Логика: булевозначные модели. Пусть $\mathbb{B}$ полная булева алгебра. Булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ определяется рекурсией

$$\mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})} = \left\{ x : (\exists \beta \in \alpha) \ x : \text{dom}(x) \rightarrow \mathbb{B}, \text{dom}(x) \subset \mathbb{V}_\beta^{(\mathbb{B})} \right\},$$

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} := \bigcup_{\alpha \in \text{On}} \mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})} \quad (\text{On} \text{ — класс всех ординалов}).$$

Для произвольных $x, y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ определяются *булевы оценки истинности* $\llbracket x = y \rrbracket \in \mathbb{B}$ и $\llbracket x \in y \rrbracket \in \mathbb{B}$. Следовательно, для любой формулы ZFC ($\equiv$ теории множеств Цермело — Френкеля), суженной на $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, вводится оценка истинности $\llbracket \varphi \rrbracket \in \mathbb{B}$. Говорят, что φ *истинна внутри* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и пишут $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi$, если $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$, где 1 — единица в $\mathbb{B}$.

Принцип переноса. Любая теорема теории множеств Цермело — Френкеля истинна внутри булевозначной модели: $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \text{ZFC}$.

Спуск элемента $x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — множество, определяемое формулой $x \downarrow := \{y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} : \llbracket y \in x \rrbracket = 1\}$. Спуск отображения $f : X \rightarrow Y$ — отображение $f \downarrow : X \downarrow \rightarrow Y \downarrow$, спуск предиката — предикат. *Подъем* действует в противоположном направлении. Спуск и подъем являются функторами [10]. Наряду с этими функторами важная роль принадлежит *каноническому вложению* $X \mapsto X^\wedge$ класса обычных множеств ($\equiv$ универсума фон Неймана $\mathbb{V}$) в булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ [10].

8. Логика: булевозначные числа. Пусть $\mathcal{R}$ — поле действительных чисел внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ т. е. $\mathcal{R} := (|\mathcal{R}|, \oplus, \odot, 0, 1, \leq)$ и $\llbracket \varphi(\mathcal{R}) \rrbracket = 1$, где $\varphi(\mathcal{R})$ — конъюнкция аксиом поля действительных чисел. Обозначим $\mathbf{R} := \mathcal{R} \downarrow := (|\mathbf{R}|, +, \cdot, 0, 1, \leq)$, где $|\mathbf{R}| := |\mathcal{R}| \downarrow$, $+$:= $\oplus \downarrow$, $\cdot$:= $\odot \downarrow$, $\leq$:= $\leq \downarrow$. Тогда $\mathbf{R}$ — алгебраическая система — *спуск* $\mathcal{R}$.

Теорема Гордона (1977). Алгебраическая система $\mathbf{R} = \mathcal{R} \downarrow$ (соответственно, $\mathbf{C} := \mathcal{C} \downarrow$) — вещественное (комплексное) расширенное пространство Канторовича, причем $\mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus i\mathbf{R}$. Более того,

внутри модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ справедливы утверждения: $\mathbb{R}^\wedge$ — плотное подполе поля $\mathcal{R}$ и $\mathbb{C}^\wedge$ — плотное подполе поля $\mathcal{C}$.

Итак, комплексное расширенное K -пространство в соответствии с теоремой Гордона [10, теорема 10.3.4] можно представить как спуск $\mathcal{C} \downarrow$ булевозначного поля комплексных чисел $\mathcal{C}$, а образом стандартного поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ (при каноническом вложении стандартного универсума $\mathbb{V}$ в булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$) служит подполе $\mathbb{C}^\wedge$ поля $\mathcal{C}$. При этом несложно убедиться, что $\mathcal{C} \downarrow$ локально одномерно в том и только в том случае, если $\mathbb{C}^\wedge = \mathcal{C}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Обозначим символом $\text{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})$ элемент $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающий пространство всех $\mathbb{C}^\wedge$ -линейных отображений из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}$. Тогда $\text{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})$ — векторное пространство над полем $\mathbb{C}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, а $\text{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C}) \downarrow$ — точный унитарный модуль над $\mathbb{C}$. Пусть $\text{End}_N(\mathbb{C})$ обозначает $\mathbb{C}$ -модуль нерасширяющих эндоморфизмов K -пространства $\mathbb{C}$.

Теорема 5. Модули $\text{End}_N(\mathbb{C})$ и $\text{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C}) \downarrow$ изоморфны. Изоморфизм устанавливается путем сопоставления нерасширяющему оператору его подъема.

Теорема 5 сводит изучение нерасширяющих операторов в расширенном пространстве Канторовича к изучению решений функционального уравнения Коши с дополнительным условием однородности. В частности, если $\mathbb{C}^\wedge \neq \mathcal{C}$, то, используя базис Гамеля векторного пространства $\mathcal{C}$ над $\mathbb{C}^\wedge$, можно построить разрывную $\mathbb{C}^\wedge$ -линейную функцию в $\mathcal{C}$, спуск которой и дает неограниченный линейный нерасширяющий оператор в $\mathbb{C} := \mathcal{C} \downarrow$ [7, 10, 18].

9. Логика: булевозначные автоморфизмы и дифференцирования. Введем следующие обозначения: $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ — множество всех дифференцирований, а $\mathcal{A}_N(\mathbb{C})$ — множество всех нерасширяющих автоморфизмов в f -алгебре (векторной решетке) $\mathcal{C} \downarrow$; далее, $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})$ и $\mathcal{A}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})$ — элементы $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающие множества всех $\mathbb{C}^\wedge$ -дифференцирований и всех $\mathbb{C}^\wedge$ -автоморфизмов в поле $\mathcal{C}$.

Теорема 6. Операции спуска и подъема осуществляют изоморфизм модулей $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C}) \downarrow \longleftrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{C})$, а также биекцию множеств $\mathcal{A}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C}) \downarrow \longleftrightarrow \mathcal{A}_N(\mathbb{C})$.

Теорема 6 сводит изучение дифференцирований и нерасширяющих автоморфизмов в расширенном пространстве Канторовича к изучению решений систем функциональных уравнений (D) и (A)

соответственно. В частности, если $\mathbb{C}^\wedge \neq \mathcal{C}$, то теорема 4 доставляет нетривиальные $\mathbb{C}^\wedge$ -дифференцирования и $\mathbb{C}^\wedge$ -автоморфизмы в $\mathcal{C}$, спуски которых и будут неограниченными дифференцированиями и нерасширяющими автоморфизмами в $\mathcal{C} \downarrow$ [8, 9, 18].

10. Синтез: характеристика решеток Викстеда. Собрав все указанные выше результаты (теоремы 3, 4, 5 и 6, а также результат А. Е. Гутмана из [6]), приходим к следующему.

Теорема 7. Пусть $\mathbb{B}$ — произвольная полная булева алгебра, $\mathcal{C}$ — поле комплексных чисел внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathbb{C} := \mathcal{C} \downarrow$. Равносильны следующие утверждения:

- (1) $\mathbb{B}(\mathbb{C})$ — решетка Викстеда;
- (2) $\mathbb{B}$ σ -дистрибутивна;
- (3) $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathcal{C} = \mathbb{C}^\wedge$;
- (4) $\mathbb{B}(\mathbb{C})$ локально одномерно;
- (5) в $\mathbb{B}(\mathbb{C})$ нет ненулевых дифференцирований;
- (6) в $\mathbb{B}(\mathbb{C})$ всякий нерасширяющий эндоморфизм является порядковым проектором;
- (7) в $\mathbb{B}(\mathbb{C})$ нет нетривиальных нерасширяющих автоморфизмов.

Литература

1. Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В. Операторы, сохраняющие дизъюнктивность // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 248, № 5.—С. 1033–1036.
2. Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В. Операторы, сохраняющие дизъюнктивность, их непрерывность и мультипликативное представление // Линейные операторы и их приложения. Межвуз. сб. науч. тр.—Л.: ЛГПИ, 1981.—С. 3–34.
3. Ацел Я., Домбр Ж. Функциональные уравнения с несколькими переменными.—М.: Физматлит, 2003.—432 с.
4. Бурбаки Н. Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы.—М.: Наука, 1965.—300 с.
5. Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра.—М.: ИЛ, 1963.—373 с.
6. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
7. Кусраев А. Г. О нерасширяющих операторах // Владикавказ. мат. журн.—2004.—Т. 6, № 3.—С. 48–58.
8. Кусраев А. Г. Автоморфизмы и дифференцирования в расширенной комплексной алгебре // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 1.—С. 97–107.
9. Кусраев А. Г. Анализ алгебра и логика в теории операторов // Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование / Под ред. Ю. Ф. Коробейника, А. Г. Кусраева.—Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2006.—С. 171–204.
10. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.—525 с.

11. Сикорский Р. Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.—375 с.
12. Шенфильд Дж. Р. Математическая логика.—М.: Наука, 1975.—520 с.
13. Abramovich Yu. A., Wickstead A. W. The regularity of order bounded operators into $C(K)$. II // Quart. J. Math. Oxford. Ser. 2.—1993.—Vol. 44.—P. 257–270.
14. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.—New York: Acad. Press, 1985.—xvi+367 p.
15. Gordon E. I., Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Infinitesimal Analysis.—Dordrecht a.o.: Kluwer, 2002.—422 p.
16. Gutman A. E. Locally one-dimensional K -spaces and σ -distributive Boolean algebras // Siberian Adv. Math.—1995.—Vol. 5, № 2.—P. 99–121.
17. Gutman A. E. Disjointness preserving operators // Vector Lattices and Integral Operators (Ed. S. S. Kutateladze).—Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1996.—P. 361–454.
18. Gutman A. E., Kusraev A. G., Kutateladze S. S. The Wickstead problem // Siberian Electronic Math. Rep.—2008.—Vol. 5.—P. 293–333.
19. McPolin P. T. N., Wickstead A. W. The order boundedness of band preserving operators on uniformly complete vector lattices // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.—1985.—Vol. 97, № 3.—P. 481–487.
20. Wickstead A. W. Representation and duality of multiplication operators on Archimedean Riesz spaces // Compositio Math.—1977.—Vol. 35, № 3.—P. 225–238.

ANALYSIS, ALGEBRA, AND LOGICS IN INTERACTION

A. G. Kusraev

The aim of this talk is to demonstrate an interaction between analysis, algebra, and logics by examining the Wickstead problem for universally complete vector lattice.

ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА В ТЕОРИИ ЭКСТРЕМУМА И ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ

Г. Г. Магарил-Ильяев¹

Введение

В середине XVIII века Лагранж сформулировал необходимые условия экстремума в задачах с ограничениями, задаваемыми системой равенств. Они заключаются в том, что надо составить функцию (функцию Лагранжа), которая есть сумма минимизируемого (или максимизируемого) функционала и функций, задающих равенства с неопределенными множителями, и тогда решение исходной задачи удовлетворяет необходимым условиям экстремума (т. е. минимума или максимума) в более простой задаче — в задаче на экстремум функции Лагранжа. Эта идея оказалась универсальной. Если рекомендации Лагранжа понимать чуть более расширительно, то легко заметить, что необходимые условия экстремума практически во всех задачах согласованы с этим принципом. При решении многих экстремальных задач достаточно владеть только принципом Лагранжа — точные формулировки не нужны (их может и не быть для рассматриваемой задачи). Данный подход здесь демонстрируется на типичном примере, связанным с одной задачей оптимального восстановления.

Постановка задачи и формулировка результата

Пусть $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}_+)$ — соболевское пространство функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ ($\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$), абсолютно непрерывных на каждом отрезке из $\mathbb{R}_+$, и $\dot{x}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$. Соболевский класс — это множество $W_2^1(\mathbb{R}_+) = \{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}_+) : \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1\}$. Мы хотим восстановить значения линейного функционала $l : \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$, $lx(\cdot) = x(0)$ (т. е. значение функции в нуле) на классе $W_2^1(\mathbb{R}_+)$ по следующей информации: о каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}_+)$ нам известна функция $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ такая, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta$, где $\delta > 0$. Под задачей оптимального восстановления функционала l на классе $W_2^1(\mathbb{R}_+)$

¹Россия, Москва, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Владикавказ, Южный математический институт ВНИЦ РАН.

по данной информации понимается нахождение величины

$$E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta) = \inf_m \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}_+), y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+) \\ \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta}} |x(0) - m(y(\cdot))|$$

(где нижняя грань берется по всем отображениям $m: L_2(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$), называемая *погрешностью оптимального восстановления*, и отображений $\hat{m}$, на которых эта нижняя грань достигается, называемых *оптимальными методами восстановления*.

Наша цель — доказать следующий результат.

Теорема 1.

$$E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta) = \sqrt{2\delta}$$

и линейный функционал $\hat{m}: L_2(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\hat{m}(y(\cdot)) = \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta} y(t) dt,$$

— *оптимальный метод восстановления*.

Доказательство

Покажем, прежде всего, что величина $E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta)$ не меньше значения задачи

$$x(0) \rightarrow \max, \quad \int_{\mathbb{R}_+} x^2(t) dt \leq \delta^2, \quad \int_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(t) dt \leq 1. \quad (1)$$

Действительно, пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в (1) (т. е. $x(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи); тогда, очевидно, функция $-x(\cdot)$ также допустима и мы имеем для любого $m: L_2(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2|x(0)| &\leq |x(0) - m(0)| + |-x(0) - m(0)| \leq \\ &\leq 2 \sup_{\substack{\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta, \\ \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1}} |x(0) - m(0)| \leq \\ &\leq 2 \sup_{\substack{\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta \\ y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+), \\ \|\dot{y}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1}} |x(0) - m(y(\cdot))|. \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (1), а справа — к нижней грани по всем отображениям m , получаем требуемое (учитывая еще, что в силу симметричности ограничений вместо $|x(0)|$ можно писать $x(0)$).

Найдем теперь решение задачи (1), опираясь на принцип Лагранжа. Сначала рассуждаем эвристически. Сопоставим (1) следующую функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda) = -x(0) + \lambda_1 \int_{\mathbb{R}_+} x^2(t) dt + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(t) dt.$$

Согласно принципу Лагранжа, если функция $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (1), то $\hat{x}(\cdot)$ должна удовлетворять необходимым условиям минимума в задаче минимизации функции Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda) \rightarrow \min.$$

Эти условия, очевидно, состоят в том, что производная функции Лагранжа в точке $\hat{x}(\cdot)$ равняется нулю, т. е. (при разумных предположениях) должно выполняться тождество

$$-x(0) + 2\lambda_1 \int_{\mathbb{R}_+} \hat{x}(t)x(t) dt + 2\lambda_2 \int_{\mathbb{R}_+} \dot{\hat{x}}(t)\dot{x}(t) dt = 0 \quad \forall x(\cdot). \quad (2)$$

Если во втором интеграле проинтегрировать по частям (считая, что функции на бесконечности стремятся к нулю), то тождество переписывается так:

$$-(2\lambda_2 \dot{\hat{x}}(0) + 1)x(0) + \int_{\mathbb{R}_+} (2\lambda_1 \hat{x}(t) - 2\lambda_2 \ddot{\hat{x}}(t))x(t) dt = 0 \quad \forall x(\cdot).$$

Так как это верно для любого $x(\cdot)$, то $\hat{x}(\cdot)$ есть решение такой задачи:

$$\lambda_2 \ddot{x} - \lambda_1 x = 0, \quad 2\lambda_2 \dot{x}(0) = -1. \quad (3)$$

Общее решение дифференциального уравнения (считая, что $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda_1/\lambda_2} t} + C_2 e^{\sqrt{\lambda_1/\lambda_2} t}.$$

Но $\hat{x}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ и поэтому $C_2 = 0$.

Теперь потребуем, чтобы функция $\hat{x}(t) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda_1/\lambda_2} t}$ была допустима в задаче (1), а именно, потребуем, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}_+} \hat{x}^2(t) dt = \delta^2, \quad \int_{\mathbb{R}_+} \dot{\hat{x}}^2(t) dt = 1.$$

Эти соотношения вместе со вторым условием в (3) приводят к тому, что

$$\hat{x}(t) = \sqrt{2\delta} e^{-t/\delta}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2\delta\sqrt{2\delta}}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{2}}.$$

Подставляя все это в (2), приходим к равенству

$$x(0) = \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta} x(t) dt - \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta} \dot{x}(t) dt. \quad (4)$$

Теперь начинаем рассуждать точно. Легко проверить, что (4) имеет место для всех функций из $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}_+)$. Действительно, ясно, что $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}_+)$ и, интегрируя во втором интеграле по частям с учетом того, что функции из $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}_+)$ ограничены¹, доказываем справедливость (4).

Пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в задаче (1). Тогда из (4) по неравенству Коши — Буняковского будем иметь:

$$\begin{aligned} x(0) &\leq \frac{1}{\delta} \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta} dt \right)^{1/2} \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta} dt \right)^{1/2} \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{\delta}{2}} \delta + \sqrt{\frac{\delta}{2}} = \sqrt{2\delta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Но $\hat{x}(0) = \sqrt{2\delta}$ и, следовательно, $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (1). Отсюда и из доказанной оценки снизу вытекает, что

$$E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta) \geq \sqrt{2\delta}. \quad (6)$$

¹Так как $\int_0^t x(\tau) \dot{x}(\tau) d\tau = x^2(\tau)|_0^t - \int_0^t x(\tau) \dot{x}(\tau) d\tau$, то $2 \int_0^t x(\tau) \dot{x}(\tau) d\tau = x^2(t) - x^2(0)$. Отсюда по неравенству Коши — Буняковского $x^2(t) \leq x^2(0) + 2 \left(\int_{\mathbb{R}_+} x^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Покажем теперь, что линейный функционал на $L_2(\mathbb{R}_+)$

$$\widehat{m} : y(\cdot) \rightarrow \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta} y(t) dt$$

есть оптимальный метод восстановления. Действительно, пусть $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}_+)$ и функция $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ такова, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta$. Тогда, используя (4), а затем делая такие же оценки, как в (5), будем иметь:

$$\begin{aligned} |x(0) - \widehat{m}(y(\cdot))| &= \left| x(0) - \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta} y(t) dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta} (x(t) - y(t)) dt - \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta} \dot{x}(t) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta} \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta} dt \right)^{1/2} \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta} dt \right)^{1/2} \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \sqrt{2\delta}. \end{aligned}$$

Так как это верно для всех указанных $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, то отсюда и (6) следует, что

$$\sup_{\substack{\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \delta \\ y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+), \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq 1}} |x(0) - \widehat{m}(y(\cdot))| \leq \sqrt{2\delta} \leq E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta).$$

Левая часть этого неравенства, очевидно, не меньше $E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta)$, и мы получаем все утверждения теоремы.

Литература

1. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О неравенствах для производных колмогоровского типа // Мат. сб.—1997.—Т. 188, № 12.—С. 73–106.
2. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения.—2-ое изд.—М.: Эдиториал УРСС, 2003.—176 с.

LAGRANGE PRINCIPLE IN THE EXTREMUM THEORY
AND OPTIMAL RECOVERY

G. G. Magaril-Il'yaev

Applications of Lagrange principle in the extremum theory are illustrated in studies of optimal recovery problem of linear functional on Sobolev class.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ,
КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И
КОМПЬЮТЕРНЫЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ АНАЛИЗ.
ОПЫТ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПРИМЕНЕНИЙ

А. В. Наседкин¹

1. Введение. Проекционно-разностные методы в настоящее время стали общепризнанной базой для создания наукоемкого программного обеспечения, ориентированного на решение широкого круга научно-технических задач. В свою очередь, среди различных вариантов проекционно-разностных методов наибольшее распространение, особенно для решения задач механики деформируемого твердого тела, получил метод конечных элементов (МКЭ). В контексте реальных практических применений следует говорить не просто о МКЭ, а о целом семействе математических, инженерных и компьютерных методов и технологий, позволяющих создавать мощные и высокоэффективные программные комплексы, доступные для использования широкому кругу научных работников и инженеров. В цикле лекций освещаются вопросы, связанные с использованием МКЭ в научных исследованиях и в компьютерной инженерной практике при математическом моделировании разнообразных научно-технических задач. В пленарном докладе отражен опыт исследований и применения конечно-элементных (КЭ) технологий в Южном федеральном университете (ЮФУ) и анонсированы ключевые вопросы последующих лекций.

2. Актуальность темы. В современный период в связи с интенсивным внедрением в производство новых технологий вновь стали востребованы высококвалифицированные инженерные кадры, способные проектировать и создавать приборы, устройства и элементы конструкций с привлечением современных компьютерных средств. САД/САЕ программные системы, т. е. современные компьютерные вычислительные средства проектирования и инженерного анализа, использующие МКЭ, занимают особое положение среди других приложений, поскольку являются индустриальными технологиями, направленными в наиболее важные области производства. Сейчас общепризнанна невозможность изготовления сложной наукоемкой про-

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

дукции без применения CAD/CAE-систем. Эти системы дают возможность не только сократить срок внедрения новых изделий, но и оказывают сильное влияние на саму технологию производства, позволяя существенно повысить качество и надежность выпускаемой продукции. Следует отметить, что решения о существенной поддержке развития материальной и программной базы, ориентированной на CAD/CAE-технологии, приняли многие ведущие вузы России, внедряющие новые инновационные образовательные программы.

3. Развитие направлений математического моделирования и компьютерного инженерного анализа в ЮФУ. За последнее время в ЮФУ был осуществлен комплекс взаимосвязанных мероприятий, направленных на существенное развитие новых современных направлений математического моделирования, вычислительной механики и CAD/CAE-технологий.

Сейчас в ЮФУ в учебном процессе и в научных исследованиях активно используются программные комплексы наукоемкого компьютерного инжиниринга (ANSYS, ABAQUS, Flow Vision, FemLab, MSC.Software Corporation и др.), а также разрабатываются собственные вычислительные пакеты. Сфера применения этих программных комплексов в научных работах в ЮФУ очень широка и связана со значительным кругом междисциплинарных направлений.

В 2007–2008 гг. было приобретено специальное наукоемкое лицензионное программное обеспечение. Теперь в сетевом доступе в ЮФУ имеются комплексы КЭ программ ANSYS, ABAQUS, Flow Vision, MSC.Software Corporation и др. Основные коммерческие и академические лицензии являются бессрочными и предоставляют возможности для проведения параллельных вычислений. Вместе с программным обеспечением с параллельной реализацией были приобретены и мощные вычислительные кластерные системы с общей пиковой производительностью 2,4 терафлопс.

4. Примеры решения оригинальных исследовательских задач в ANSYS. Современные программные КЭ комплексы являются не только средством решения важных практических задач для инженеров, но и мощным инструментом для научных исследований новых сложных задач математического моделирования и математической физики. Имеющиеся возможности пользовательского программирования позволяют создавать новые конечные элементы и моделировать нестандартные задачи. В этом аспекте особенно удо-

бен комплекс ANSYS, который имеет развитый командный язык программирования APDL. В данном разделе приведены в качестве примеров некоторые из исследовательских задач, решенных в ЮФУ за последние годы.

4.1. Моделирование пористых пьезоэлектрических материалов и расчет пьезоэлектрических ультразвуковых излучателей из пористой пьезокерамики. С использованием средств ANSYS был реализован метод эффективных модулей для расчета свойств неоднородных пьезоэлектрических сред [6, 9]. Для определения эффективных модулей пористой пьезокерамики здесь требуется моделировать структуры представительных объемов пористой среды и решать статические задачи теории пьезоэлектричества для неоднородного представительного объема со специальными граничными условиями. При реализации данной технологии существенно наличие средств программирования, предоставляемых макроязыком APDL ANSYS. В разработанных алгоритмах была учтена также возможность частичной поляризации керамики в окрестности пор.

Было осуществлено также решение в ANSYS связанной динамической задачи о возбуждении в акустической среде ультразвуковых гармонических волн сферическим пьезоэлектрическим излучателем из пористой пьезокерамики [8]. При решении данной задачи вводились конечные элементы с различными элементными системами координат для задания радиальных направлений поляризации элементов с пьезоэлектрическими свойствами. Проведен комплекс расчетов динамических характеристик пьезоизлучателя и ультразвуковых акустических волн в ближней и средней зонах.

4.2. Моделирование пьезоэлектрического вибрационного гироскопа, работающего на явлении «захвата энергии». Для моделирования вибрационных гироскопов с учетом внешней электрической нагрузки, работающих на эффекте захвата энергии толщинно-сдвиговых колебаний, была использована КЭ техника ANSYS вместе с асимптотическим разложением решения по малому параметру отношения частоты вращения к резонансной частоте [7]. При нулевом приближении решались задачи об определении собственных частот толщинно-сдвиговых колебаний и нахождении функции электрического импеданса вблизи резонансной частоты. Полученные значения перемещений в узлах КЭ сетки использовались на следующем шаге для решения задачи с учетом вращения и нахождения наведенного электрического потенциала.

4.3. Моделирование процесса гидрорасчленения угольного пласта. В содружестве с коллегами из геолого-географического факультета был проведен комплекс работ по КЭ моделированию связанных задач геомеханики деформируемых пористых пород с учетом фильтрации. Данные задачи описываются системами уравнений пороупругости, которые не могли моделироваться в ANSYS версии 11.0 напрямую. Между тем, между уравнениями пороупругости и термоупругости имеется достаточно полная аналогия, а в последних версиях ANSYS появился новый конечный элемент для решения связанной нестационарной нелинейной задачи термоупругости. Таким образом, используя новые возможности ANSYS и аналогию между задачами пороупругости и термоупругости, можно моделировать сложные связанные деформационные и фильтрационные процессы в реальных геомеханических средах. Как оказалось при проведении расчетов, для обеспечения численной сходимости и устойчивости конечно-элементных вычислений желательно осуществить безразмеривание уравнений с целью выравнивания порядков физических модулей и переменных. Предлагаемая техника была реализована при моделировании процесса гидродинамического расчленения трехслойного угольного пласта для активизации добычи угольного метана [10]. Используемые при расчетах входные параметры задачи соответствовали реальным условиям в Краснодонском угольном месторождении Восточного Донбасса.

4.4. Исследование задач механики контактных взаимодействий для неоднородных сред. В рамках совместных проектов с учеными из РГУПС был рассмотрен комплекс контактных задач для тел с кусочно-неоднородными и непрерывно-неоднородными материальными свойствами и дислокациями [2, 5]. Для решения задач данного типа была использована техника МКЭ и разработано специализированное программное обеспечение на языке APDL ANSYS. Для контактных задач с неоднородными свойствами реализованы следующие этапы решения: построение КЭ модели для однородных тел с заданным сгущением вблизи предполагаемой зоны контакта, модификация упругих конечных элементов путем переопределения их материальных свойств в соответствии с законом изменения неоднородности, определение контактных пар конечных элементов, численное решение и постпроцессорная обработка результатов контактных взаимодействий. Для тел с дислокациями в дополнение к указанной технике добавляется моделирование краевых дислокаций с векторами Бюргерса и реализация процедур учета дис-

локаций, приводящих к добавочным слагаемым в векторах правых частей разрешающих систем уравнений. Проведен комплекс расчетов для тестовых задач со сравнением с результатами, полученными ранее аналитическими методами. Изучены также задачи о контактном взаимодействии неоднородного колеса железнодорожного вагона с рельсом.

5. Опыт разработки пакета ACELAN для расчета пьезоэлектрических устройств. В ЮФУ в течение многих лет развивались различные научные и технические направления, связанные с пьезоэлектрическим приборостроением. Здесь можно отметить фундаментальные исследования в области физики и химии сегнетоэлектрических материалов, опытные производства, а также работы по математическому моделированию пьезоэлектрических материалов и устройств, выполняемые на факультете математики, механики и компьютерных наук.

Задачи моделирования и расчета пьезоэлектрических материалов и устройств относятся к классу связанных задач математической физики со своими специфическими особенностями. Математические модели реальных гидроакустических пьезопреобразователей должны включать модели пьезоэлементов, описываемые уравнениями пьезоэлектричества или электроупругости, модели упругих элементов, описываемые уравнениями теории упругости с учетом демпфирования, и модели жидких или газообразных сред, которые обычно достаточно описывать уравнениями акустики. Задачи данного типа можно отнести к классу связанных задач акустоэлектроупругости.

Как показала практика, комплекс необходимых расчетов для реальных пьезоустройств может быть эффективно проведен лишь с использованием программных продуктов, основанных на МКЭ. Важную роль здесь могут играть специальные алгоритмы МКЭ решения задач электроупругости, а также пре- и постпроцессоры, обеспечивающие ввод и вывод необходимых характеристик упругих, электрических и акустических полей. Поэтому, несмотря на то, что в настоящее время существуют КЭ пакеты общего назначения, имеющие средства анализа связанных задач, остается актуальной и разработка специализированных в акустоэлектроупругости программ. Специализированные программные комплексы для расчета пьезоэлектрических устройств разрабатывались во всех ведущих странах мира, например, известны КЭ пакеты PZFlex (США), SAPA (Германия, Австрия), АТИЛА (Франция) и др.

С 1996 г. на механико-математическом факультете Ростовского университета (ныне — ЮФУ) ведется работа над программным продуктом, получившим название ACELAN (ACoustoElectric ANalysis). Сейчас ACELAN является тщательно оттестированным действующим КЭ пакетом, предоставляющим возможности проведения всех вышеперечисленных видов анализа пьезоэлектрических устройств для двумерных плоских и осесимметричных составных областей, а также для трехмерных областей обобщенной цилиндрической формы. Развитие ACELAN, оригинальные методы и алгоритмы, заложенные в ACELAN, и ряд тестовых расчетов представлены в [1, 3, 4].

В основу ACELAN положен комплекс блочных симметричных алгоритмов для седловых матриц, характерных для КЭ задач электроупругости. Эти алгоритмы были разработаны как для статических, так и для нестационарных задач с применением схемы Ньюмарка интегрирования по времени в альтернативной форме. Данные симметричные седловые алгоритмы МКЭ были распространены и на задачи акустоэлектроупругости, т. е. на расчеты гидроакустических пьезопреобразователей с учетом рабочих акустических сред. В дальнейшем, анализируя метод разложения по модам для динамических задач электроупругости, была предложена новая модель учета демпфирования в пьезоэлектрических устройствах, согласованная с этим методом [4].

Приведенные расчеты различных пьезопреобразователей, а также сравнение результатов с аналогичными, полученными в ANSYS, показали эффективность и точность разработанной методологии и ее реализации в ACELAN.

6. Краткий обзор последующих лекций. Серия лекций автора посвящена методу конечных элементов и особенностям ее практического использования при математическом моделировании научно-технических задач и проведении расчетов.

Вначале дается краткое введение в теорию и технологию МКЭ. Здесь уделяется внимание математическим аспектам МКЭ в процессе моделирования: формулировка классических постановок краевых или начально-краевых задач, переход от классических постановок к обобщенным, снятие неоднородных главных граничных условий, математические свойства обобщенных решений, основные аппроксимации МКЭ, процесс ансамблирования, техника изопараметрических конечных элементов, использование формул численного интегрирования, основные типы конечных элементов, вопросы согласованно-

сти КЭ сеток, оценки погрешностей в МКЭ, свойства систем уравнений МКЭ.

Далее рассмотрены вопросы программной реализации МКЭ и алгоритмы препроцессоров, решателей и постпроцессоров. Отмечается, что именно эффективная и достаточно универсальная технология программной реализации делает МКЭ мощным средством решения самых разнообразных научно-технических задач и позволяет создавать программные комплексы для широких инженерных приложений.

В качестве примера рассмотрена стационарная задача теплопроводности для плоской неканонической области и продемонстрирована техника решения данной задачи в конечно-элементном пакете ANSYS. Здесь уделяется особое внимание сходимости КЭ решений, точности и поведению решений (полевых функций и их производных) в зонах различных особенностей и сингулярностей.

Достаточно подробно рассматриваются практические вопросы моделирования научно-технических задач по МКЭ: постановка задачи и планирование этапов решения, определение стратегий построения твердотельных и КЭ моделей и др. Данные вопросы иллюстрируются набором примеров с обсуждением получаемых результатов при различных способах моделирования задач и стратегий, принятых на ключевых этапах решения.

Таким образом, в серии лекций рассмотрены взаимосвязанные вопросы математических, инженерных и компьютерных методов и технологий, основанных на МКЭ. Дан обзор достижений в данном направлении, полученных в ЮФУ, и показано, что квалифицированное творческое использование МКЭ и соответствующих программных комплексов позволяет эффективно решать самые разнообразные задачи с достаточной точностью и за разумный временной период. Автор надеется, что данные лекции будут полезны молодым исследователям для их дальнейшей научной работы и практических применений при математическом моделировании и проведении вычислительных экспериментов при решении широкого круга научно-технических задач.

Литература

1. Акопов О. Н., Белокопъ А. В., Надолин К. А., Наседкин А. В., Скалиух А. С., Соловьев А. Н. Симметричные седловые алгоритмы конечно-элементного анализа составных пьезоэлектрических устройств // Мат. моделирование.— 2001.—Т. 13, № 2.—С. 51–60.

2. Айзикович С. М., Игнатьева Т. В., Наседкин А. В. Конечно-элементное моделирование контактного взаимодействия для трибомеханической системы с градиентными упругими свойствами // Проблемы прочности и пластичности.—Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2009.—Вып. 71.—С. 153–163.
3. Белоконов А. В., Еремеев В. А., Наседкин А. В., Соловьев А. Н. Блочные схемы метода конечных элементов для динамических задач акустоэлектроупругости // ПММ.—2000.—Т. 64, № 3.—С. 381–393.
4. Белоконов А. В., Наседкин А. В., Соловьев А. Н. Новые схемы конечно-элементного динамического анализа пьезоэлектрических устройств // ПММ.—2002.—Т. 66, № 3.—С. 491–501.
5. Игнатьева Т. В., Колосова Е. М., Наседкин А. В. Конечно-элементный анализ модельных контактных задач для упругих структур с неоднородностями, дислокациями и дефектами // Материалы IV Росс. научно-технич. конф. «Ресурс и диагностика материалов и конструкций».—Екатеринбург: ИМАШ УрО РАН, 2009.—11 с.
6. Наседкин А. В. К расчету эффективных модулей пористой пьезокерамики // Теоретич. и прикл. механика.—Донецк: Донецкий нац. ун-т, 2003.—Вып. 37.—С. 47–51.
7. Наседкин А. В. Поэтапный конечно-элементный расчет пьезоэлектрического вибрационного гироскопа на захвате энергии // Теоретич. и прикл. механика.—Донецк: Донецкий нац. ун-т, 2006.—Вып. 42.—С. 147–153.
8. Mogilevsky M., Rybjanetz A., Eshel Y., Kushkuley L., Nasedkin A. Analysis of a high intensity focusing ultrasound transducer using the finite element method // 9th Western Pacific Acoustics Conf. CD ROM Proc.—Seoul: The Acoust. Soc. Korea, 2006.—Paper 185.—8 p.
9. Nasedkin A., Rybjanets A., Kushkuley L., Eshel Y., Tasker R. Different approaches to finite element modelling of effective moduli of porous piezoceramics with 3-3 (3-0) connectivity // Proc. 2005 IEEE Ultrason. Symp.—Rotterdam, 2005.—P. 1648–1651.
10. Nasedkina A. A., Nasedkin A. V., Iovane G. A model for hydrodynamic influence on a multi-layer deformable coal seam // Comput. Mechanics.—2008.—Vol. 41, № 3.—P. 379–389.

MATHEMATICAL MODELING, FINITE ELEMENT TECHNOLOGIES AND COMPUTER ENGINEERING ANALYSIS. RESEARCH AND APPLICATION EXPERIENCE

A. V. Nasedkin

The series of lectures addresses the questions regarding to the use of the finite element method in scientific research and computer engineering for mathematical modeling of various scientific and technical problems. The plenary lecture describes experience of research and application of finite element technologies in Southern Federal University and also announces key topics for subsequent lectures.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПО ИХ КОЭФФИЦИЕНТАМ ФУРЬЕ

К. Ю. Осипенко¹

1. Введение

При изучении численных методов мы сталкиваемся с огромным числом алгоритмов. Например, для вычисления интеграла от функции по ее значениям в точках существует множество квадратурных формул. Для интерполяции функции по ее значениям в точках тоже можно применять различные методы: кусочно-линейная интерполяция, интерполяция сплайнами, наконец, можно воспользоваться интерполяционным многочленом Лагранжа. Как разобраться в этом множестве методов? Можно ли выбрать в каком-то смысле наилучший метод?

Как правило, при построении численного метода используются те или иные (часто довольно естественные) идеи, а затем исследуется полученный метод: выясняется его сходимость, устойчивость по отношению к неточным исходным данным и т. д. Мы будем использовать другой подход. Пользуясь некоторой априорной информацией о принадлежности функции некоторому множеству (классу), мы будем искать в определенном смысле самый лучший метод, перебирая все (!) возможные методы. На первый взгляд эта задача кажется очень сложной: как же перебрать все методы? Наша цель — показать, что во многих случаях такая постановка позволяет прийти к конкретным методам.

2. Постановка задачи оптимального восстановления

Предположим, нам надо решить некоторую задачу. Обозначим ее через p . Как правило, у нас есть некоторая исходная информация об этой задаче, которая может быть неполной и неточной. Будем обозначать ее через I_p . Предположим также, что у нас есть некоторый метод (алгоритм) для решения этой задачи m . Чтобы иметь возможность сравнивать различные методы, мы должны сопоставить каж-

¹Россия, Москва, МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского; Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН.

дому методу некоторое число, называемое погрешность решения для данного метода. Будем его обозначать через $e(p, I, m)$.

Обычно мы хотели бы, чтобы данный метод был применим не к одной задаче, а к целому множеству задач P подобного типа. Тогда погрешностью данного метода m на этом множестве естественно назвать величину

$$e(P, I, m) = \sup_{p \in P} e(p, I, m).$$

Если мы хотим найти хороший метод для решения множества задач P , то надо искать его таким, чтобы величина $e(P, I, m)$ была как можно меньше. Пусть M — множество допустимых методов. Тогда метод $\hat{m}$ такой, что

$$e(P, I, \hat{m}) = \inf_{m \in M} e(P, I, m) = E(P, I, M),$$

будет называться оптимальным методом восстановления, а величина $E(P, I, M)$ — погрешностью оптимального восстановления.

Еще один тип задач возникает, когда имеется возможность выбирать тип исходной информации о решаемых задачах. Конечно, при увеличении объема исходной информации следует ожидать более точного решения задач. Однако это ведет к все большим затратам, направленным на получение исходной информации. Поэтому, как правило, фиксируют объем исходной информации (например, число данных измерений) и сравнивают получаемые погрешности при различных типах исходной информации. Тем самым приходят к следующей задаче о нахождении информации оптимального типа

$$E(P, \mathcal{I}, M) = \inf_{I \in \mathcal{I}} E(P, I, M),$$

где $\mathcal{I}$ — множество возможных типов исходной информации.

3. Восстановление сигналов по точному спектру

Теперь займемся задачей о восстановлении периодической функции по ее набору коэффициентов Фурье. Ясно, что если эти коэффициенты измеряются с ошибкой, то не нужно брать их слишком много. Но даже если берется некоторый конечный набор точно измеренных коэффициентов Фурье, оказывается, что они не все нужны. С этого

примера, в котором не вся точно измеренная информация является полезной, мы и начнем.

Обозначим через $\mathbb{T}$ единичную окружность, реализованную как отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами. Через $L_2(\mathbb{T})$ обозначим совокупность 2π -периодических функций $x(\cdot)$ на $\mathbb{T}$, суммируемых с квадратом, с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Пусть $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$ — пространство абсолютно непрерывных 2π -периодических функций, для которых $x'(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$. Через $W_2^1(\mathbb{T})$ будем обозначать класс функций $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$, для которых $\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1$. Пусть о каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ мы располагаем следующей информацией: нам известен конечный набор ее коэффициентов Фурье

$$a_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} x(t) \cos kt dt, \quad k \in A,$$

$$b_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} x(t) \sin kt dt, \quad k \in B,$$

где $A \subset \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$, а $B \subset \mathbb{N}$. По этой информации мы хотим найти наилучший способ восстановления в метрике $L_2(\mathbb{T})$ функции $x(\cdot)$ сразу для всех функций $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$.

В это вкладывается следующий смысл. В качестве методов восстановления рассматриваются произвольные отображения

$$m : \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(\mathbb{T}), \quad N = \text{card } A + \text{card } B$$

($\text{card } M$ — число элементов в множестве M). *Погрешностью* данного метода m называется величина

$$e(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, m) = \sup_{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})} \|x(\cdot) - m(I_{A,B}x)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

где $I_{A,B}x = (\{a_k(x)\}_{k \in A}, \{b_k(x)\}_{k \in B})$. Нас интересует величина

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = \inf_{m: \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})} e(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, m),$$

называемая *погрешностью оптимального восстановления*, и метод $\hat{m}$, на котором достигается нижняя грань, называемый *оптимальным методом восстановления*, т. е. такой метод $\hat{m}$, что

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = e(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \hat{m}).$$

Положим

$$k_a = \min_{k \in \mathbb{N} \setminus A} k, \quad k_b = \min_{k \in \mathbb{N} \setminus B} k, \quad k_0 = \min\{k_a, k_b\}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если $0 \notin A$, то $E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = \infty$. Если $0 \in A$, то

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = \frac{1}{k_0},$$

и методы

$$\begin{aligned} m(I_{A,B}x)(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k_0-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + \\ &+ \sum_{k \in A_1} a_k \cos kt + \sum_{k \in B_1} b_k \sin kt, \end{aligned} \quad (1)$$

являются оптимальными.

Уже здесь мы сталкиваемся с ситуацией, когда оптимальных методов много. Возникает вопрос, какой из оптимальных методов выбрать. Один из естественных способов — выбирать метод, который использует наименьшее количество исходных данных (в нашем случае — коэффициентов Фурье). По этому критерию из множества методов (1) следует выбрать метод

$$\hat{m}(I_{A,B}x)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k_0-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

После выбора данного метода все остальные измеренные коэффициенты Фурье оказываются лишними (они не используются оптимальным методом $\hat{m}$). Тем не менее, если у нас есть возможность измерить фиксированное число коэффициентов Фурье, какие лучше всего измерять, чтобы погрешность оптимального восстановления была минимальной? Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. При всех $N \in \mathbb{N}$

$$\inf_{\text{card } A + \text{card } B \leq 2N-1} E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = \\ = \inf_{\text{card } A + \text{card } B \leq 2N} E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = \frac{1}{N},$$

причем нижняя грань достигается для

$$A = \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad B = \{1, \dots, N-1\}.$$

4. Восстановление функции по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью

Рассмотрим теперь задачу восстановления функции на том же классе $W_2^1(\mathbb{T})$, когда вместо точных значений коэффициентов Фурье известны их приближенные значения $\{\tilde{a}_k\}_{k \in A}$ и $\{\tilde{b}_k\}_{k \in B}$ такие, что

$$|a_k(x) - \tilde{a}_k| \leq \delta, \quad k \in A, \\ |b_k(x) - \tilde{b}_k| \leq \delta, \quad k \in B.$$

В этом случае *погрешностью* метода m называется величина

$$e(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta, m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}), \quad y \in l_\infty^N \\ \|I_{A,B}x - y\|_{l_\infty^N} \leq \delta}} \|x(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

где l_∞^N — векторы $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$, $N = \text{card } A + \text{card } B$, с нормой

$$\|y\|_{l_\infty^N} = \max_{1 \leq j \leq N} |y_j|.$$

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta) = \inf_{m: l_\infty^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})} e(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta, m),$$

а метод $\hat{m}$, на котором достигается нижняя грань, будем по-прежнему называть *оптимальным методом восстановления*.

Положим

$$p_0 = \max \left\{ p : 2\delta^2 \sum_{k=0}^p k^2 < 1, \quad 0 \leq p \leq k_0 - 1 \right\}.$$

Теорема 3. Если $0 \notin A$, то $E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta) = \infty$. Если $0 \in A$, то

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta) = \frac{1}{p_0 + 1} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{6}(p_0 + 1)(8p_0^2 + 13p_0 + 3)},$$

а метод

$$\begin{aligned} & \hat{m}((\{\tilde{a}_k\}_{k \in A}, \{\tilde{b}_k\}_{k \in B}))(t) = \\ & = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{p_0} \left(1 - \frac{k^2}{(p_0 + 1)^2}\right) (\tilde{a}_k \cos kt + \tilde{b}_k \sin kt) \end{aligned}$$

является оптимальным.

Здесь в оптимальном методе пришлось отбрасывать часть исходной информации и сглаживать оставшиеся данные — умножать их на величины

$$1 - \frac{k^2}{(p_0 + 1)^2},$$

которые убывают с ростом k , т. е. чем больше частота, тем сильнее соответствующую гармонику надо сглаживать.

Но, может быть, можно было обойтись и без этого, воспользовавшись «естественным» методом

$$m((\{\tilde{a}_k\}_{k \in A}, \{\tilde{b}_k\}_{k \in B}))(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k \in A} \tilde{a}_k \cos kt + \sum_{k \in B} \tilde{b}_k \sin kt?$$

У этого метода на функции $p^{-1} \cos pt \in W_2^1(\mathbb{T})$ при

$$p \geq \max_{k \in A \cup B} k$$

и $\tilde{a}_k = \delta$, $k \in A$, $\tilde{b}_k = \delta$, $k \in B$, квадрат погрешности равен величине

$$\frac{\delta^2}{2} + \delta^2(\text{card } A + \text{card } B) + \frac{1}{p^2},$$

которая неограниченно возрастает при увеличении исходных данных.

Если отбросить лишние данные, но не сглаживать оставшиеся, т. е. воспользоваться методом

$$m_0((\{\tilde{a}_k\}_{k \in A}, \{\tilde{b}_k\}_{k \in B}))(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{p_0} (\tilde{a}_k \cos kt + \tilde{b}_k \sin kt),$$

то квадрат погрешности такого метода на функции

$$\frac{1}{(p_0 + 1)} \cos(p_0 + 1)t \in W_2^1(\mathbb{T})$$

при $\tilde{a}_k = \delta$, $k = 0, 1, \dots, p_0$, $\tilde{b}_k = \delta$, $k = 1, \dots, p_0$, $\tilde{a}_k = \tilde{b}_k = 0$, $k > p_0$, равен величине

$$\frac{\delta^2}{2} + 2\delta^2 p_0 + \frac{1}{(p_0 + 1)^2},$$

что больше величины

$$\|\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \frac{\delta^2}{2} + 2\delta^2 p_0 + \frac{-2\delta^2 \sum_{k=0}^{p_0} k^2}{(p_0 + 1)^2}.$$

Тем самым, метод m_0 не является оптимальным.

Положим

$$N_\delta = \max \left\{ p : 2\delta^2 \sum_{k=0}^p k^2 < 1, p \geq 0 \right\}.$$

Аналогом теоремы 2 является

Теорема 4. При всех $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \inf_{\text{card } A + \text{card } B \leq 2N-1} E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta) = \\ & = \inf_{\text{card } A + \text{card } B \leq 2N} E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta) = \\ & = \frac{1}{\widehat{N}_\delta + 1} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{6} (\widehat{N}_\delta + 1)(8\widehat{N}_\delta^2 + 13\widehat{N}_\delta + 3)}, \end{aligned}$$

где $\widehat{N}_\delta = \min\{N_\delta, N - 1\}$, причем нижняя грань достигается для

$$A = \{0, 1, \dots, \widehat{N}_\delta\}, \quad B = \{1, \dots, \widehat{N}_\delta\}.$$

Ряд общих результатов о восстановлении функций и их производных по неточно заданному спектру можно найти в работах [1] и [2] (см. также обзорную статью [3]).

Литература

1. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Мат. сб.—2002.—Т. 193, № 3.—С. 79–100.
2. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прилож.—2003.—Т. 37.—С. 51–64.
3. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление операторов по неточной информации // Исследования по выпуклому анализу / Ред. В. М. Тихомиров.—Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2009.—С. 158–192.—(Итоги науки. ЮФО. Мат. форум. Т. 2).

OPTIMAL RECOVERY OF FUNCTIONS FROM THEIR FOURIER COEFFICIENTS

K. Yu. Osipenko

We consider the problem of optimal recovery of functions from a finite number of Fourier coefficients. The coefficients may be given incorrectly. We find optimal methods of recovery and those numbers of coefficients which should be measured to obtain the minimal error of recovery.

ПРИМЕНЕНИЕ MATLAB ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

В. Г. Цибулин¹

Представлен обзор краткого цикла лекций по применению пакета MATLAB в математическом моделировании. Рассмотрены следующие темы:

1. Графический анализ решений нестационарных задач.
2. Программирование вычислительного эксперимента с моделями пространственно-распределенных популяций.
3. Численные методы и взаимодействие MATLAB с пакетами аналитических вычислений и программными средами.
4. Моделирование и анализ динамических систем средствами MATLAB и Simulink.

1. Пакет MATLAB является одним из самых используемых вычислительных средств в области математического моделирования. Огромная библиотека хорошо реализованных методов, мощные графические средства и собственный язык программирования предоставляют широкие возможности для эффективного решения исследовательских и инженерных задач. Имеется большое количество информации по MATLAB: от документации фирмы-производителя (The MathWorks Inc.) [1] до быстро растущей библиотеки книг, описывающих возможности и приложения MATLAB.

В лекциях не обойтись без повторения уже известного («Повторение — мать учения»), но для подготовки специалиста важнее другое. Так, профессор В. И. Юдович говорил, что «Применение — мать учения» и академик А. Н. Несмеянов использовал близкое высказывание: «Применение — истинная мать учения». Чтобы научиться квалифицированно работать с программным обеспечением, нужно начать использовать его для решения задач.

Эти лекции иллюстрируют возможности среды MATLAB на примере исследования ряда проблем нелинейной динамики. Выбор области объясняется интересами автора и разнообразием средств MATLAB, которые могут быть применены для решения возникающих проблем. Для предварительного знакомства с пакетом MATLAB можно воспользоваться книгами [2–4].

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

2. Задачи нелинейной динамики возникают в самых разных областях математического моделирования. Анализ динамических систем входит в программы обучения прикладных математиков. На мехмате Ростовского государственного университета курс «Математические модели естественных наук» разработан В. И. Юдовичем, его лекции подготовлены к печати [5]. Электронный вариант лекций и задания практикума, сопровождающего курс, размещены на сайте ЮФУ [6]. Эти материалы используются в данном цикле лекций.

При исследовании динамических систем (ДС) удобна предложенная Д. В. Аносовым классификация: каскады и потоки. К каскадам относятся ДС с дискретным временем и отображения. Потоки или ДС с непрерывным временем включают обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. Бесконечномерные ДС (уравнения в частных производных гиперболического или параболического типа) в результате дискретизации по пространственным переменным обычно сводятся к системам дифференциальных уравнений. Используя тот или иной метод интегрирования (квантизация потока), получаем каскад — систему с дискретным временем.

Применяемые средства моделирования зависят от типа рассматриваемой задачи. Например, для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) можно написать программу непосредственно в среде MATLAB, подготовив функцию правой части системы, выбрав метод и организовав выдачу результата. Система может быть изучена с помощью Simulink, ассоциированного с MATLAB, или при помощи специализированных программ исследования динамических систем. Широкое распространение получил пакет Dynamics Solver [7], ориентированный на работу с отображениями и системами дифференциальных уравнений. Для среды MATLAB В. Н. Говорухиным (ЮФУ) развивается программа MatDS [8].

В том случае, когда рассматривается система со связями или требуются специальные режимы решения задачи и представления данных, удобно применять программирование в среде MATLAB. При этом нужно помнить, что опасно доверяться результату, полученному одним методом, одной программой. Поэтому в арсенале специалиста, занимающегося математическим моделированием, должно быть несколько программных сред. Универсальный математический пакет Maple (Waterloo Maple Inc.) [9] может служить для проверки результатов. Возможности Maple для проведения аналитических вы-

кладок можно использовать при дискретизации по пространственным переменным, а полученные уравнения сразу записывать в виде функции вычисления правых частей в MATLAB.

3. Модель Колмогорова — Петровского — Пискунова и Фишера (1937). Нелинейное параболическое уравнение

$$\dot{u} = u'' + u(1 - u), \quad ()' = \partial_x (), \quad \dot{()} = \partial_t (),$$

является моделью для различных биологических проблем. В экологии это уравнение описывает динамику относительной численности популяции $u(x, t)$, x — пространственная координата (положение на ареале), t — время.

Для изучения формирования распределений популяции на ареале при неравномерных жизненных условиях можно рассмотреть следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u'' + \mu u \left(1 - \frac{u}{p(x)}\right), \quad x \in [0, a], \\ u(x, 0) &= u_*(x), \quad u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $u_*(x)$ — начальное распределение популяции, μ — параметр роста, неравномерность предельной плотности популяции на ареале задается функцией $p(x)$.

Для численного исследования задачи применим метод прямых. Введем сетку $x_j = jh$, $j = 0, \dots, n+1$, $h = a/(n+1)$ и, аппроксимируя уравнение, получим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + \mu u_j \left(1 - \frac{u_j}{p(x_j)}\right), \quad j = 1, \dots, n, \\ u_J(0) &= u_*(x_j), \quad u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0. \end{aligned}$$

Для интегрирования полученной системы уравнений применим метод Рунге — Кутты.

Подготовку программы для решения задачи в среде MATLAB удобно проводить поэтапно.

1. Создать простую работающую версию, в которой реализованы основные функции (вычисления правой части системы ОДУ, метод Эйлера), заданы входные данные и имеется элементарный вывод.
2. Развить программу, добавив вывод графики в процессе расчета, организовав финальную выдачу и сохранение результатов.
3. Настроить программу для запланированного эксперимента.

4. Система Лоренца. Знаменитая система Лоренца (Е. Lorenz, 1963) получена как конечномерная аппроксимация уравнений гравитационной конвекции теплопроводной жидкости и дается системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{X} = Pr(Y - X), \quad \dot{Y} = -Y + rX - XZ, \quad \dot{Z} = -bZ + XY.$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени t , $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ — переменные, а вещественные константы Pr , r , b — параметры модели.

Имеется предложенное В. И. Юдовичем [10] преобразование системы Лоренца, сводящее систему трех дифференциальных уравнений к уравнению второго порядка для маятника с меняющейся формой потенциальной энергии и уравнению обратной связи. Исключим переменную Y :

$$\ddot{X} + (1 + Pr)\dot{X} + Pr(1 - r + Z)x = 0, \\ \dot{Z} = -bZ + X^2 + X\dot{X}/Pr,$$

и сделаем замену

$$y = \frac{\varepsilon x}{\sqrt{2Pr}}, \quad z = \varepsilon \left(Z - \frac{X^2}{2Pr} \right), \quad \tau = \frac{\sqrt{Pr}t}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{r-1}}.$$

Здесь

$$h = \frac{1 + Pr}{\sqrt{Pr}}, \quad \alpha = \frac{q}{\sqrt{Pr}}, \quad \beta = \frac{2Pr - b}{\sqrt{\alpha}}.$$

В результате получается уравнение колебаний маятника с переменной потенциальной ямой и уравнение обратной связи, которое определяет зависимость переменного параметра модели z от размаха колебаний переменной x

$$\ddot{y} + \varepsilon h \dot{y} + y^3 + (z - 1)y = 0, \quad \dot{z} = -\varepsilon \alpha z + \varepsilon \beta x^2.$$

Первое уравнение есть обобщенное уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial V}{\partial y} = -\varepsilon h \dot{y}$$

с кинетической $T = \dot{y}^2/2$ и потенциальной $V = (z - 1)y^2/2 + y^4/4$ энергиями.

Покажем, как из модели Лоренца получается нелинейное отображение — каскад. При $Pr \rightarrow \infty$ из системы Лоренца получаем $X = Y$. Применим для интегрирования по времени метод Эйлера с постоянным шагом h :

$$X_{n+1} = X_n + \tau [(r-1)X_n - X_n Z_n], \quad Z_{n+1} = Z_n + \tau (-bZ_n + X_n^2).$$

Полученное двумерное квадратичное отображение обладает интересной динамикой. К данному каскаду сводится отображение [11]

$$x_1 = x(\lambda + y), \quad y_1 = y + x^2 + dy^2,$$

если положить $d = 0$.

Заключение. Знаменитая апория Зенона утверждает, что Ахиллесу не догнать черепахи. Темпы, с которыми происходит развитие пакета MATLAB, далеко не черепахи, и с каждой версией вырастают возможности пакета. Однако исследователю, пусть он и не Ахиллес, не стоит унывать от неполноты своих знаний. Даже частичное освоение языка и команд MATLAB способно серьезно помочь при исследовании возникающих задач. Потраченное на освоение пакета время вернется сторицей.

Литература

1. URL: <http://www.mathworks.com/>.
2. Говорухин В. Н., Цибулин В. Г. Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB, LaTeX.—СПб.: Питер, 2001.—624 с.
3. Кетков Ю. Л., Кетков А. Ю., Шульц М. М. MATLAB 7: Программирование, численные методы.—СПб.: БХВ-Петербург, 2005.—752 с.
4. Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н. MATLAB 7.—СПб.: БХВ-Петербург, 2005.—1104 с.
5. Юдович В. И. Математические модели естественных наук.—СПб.: Лань, 2010.—324 с.
6. URL: <http://kvm.math.rsu.ru/mmen/>.
7. Aguirregabiria J. M. Dynamics Solver.—URL: <http://tp.lc.ehu.es/jma/ds/ds.html>.
8. URL: <http://kvm.math.rsu.ru/matds/>.
9. URL: <http://www.maplesoft.com/>.
10. Юдович В. И. Асимптотика предельных циклов системы Лоренца при больших числах Рэлея // Деп. в ВИНТИ, № 2611-78.—(см. Юдович В. И. Избранные труды. Т. 2.—Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2009.—312 с.).
11. Tsybulin V. G., Yudovich V. I. Invariant sets and attractors of quadratic mapping of plane: computer experiment and analytical treatment // Int. J. Diff. Eq. and Applic.—1998.—Vol. 4.—P. 397–423.

APPLICATIONS USING MATLAB TO STUDIES IN NONLINEAR DYNAMICS

V. G. Tsybulin

This is an introduction to the study of discrete and continuous dynamical systems with the aid of the numerical software MATLAB. Several examples (maps, ordinary and partial differential equations) are chosen to illustrate the following topics: visualization of nonstationary problem solutions, computer experiment for models with spatial distributed populations, numerical analysis in MATLAB and links to computer algebra systems and other scientific software, modeling with dynamical systems using MATLAB and Simulink.

Секция I

Математический анализ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ
УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ
БЕРЛИНГА НОРМАЛЬНОГО ТИПА

Д. А. Абанина¹

Пусть $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(\mathbb{R})$ — пространство ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа, задаваемое неквазианалитическим весом ω ; $H_{(\omega)}^1(\mathbb{C})$ — аналитическая реализация пространства $(\mathcal{E}_{(\omega)}^1(\mathbb{R}))'_\beta$, сильного сопряженного с $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(\mathbb{R})$ (по поводу определений см. [1]). Если $\mu(z)$ — произвольный мультипликатор пространства $H_{(\omega)}^1(\mathbb{C})$, то оператор свертки T_μ в $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(\mathbb{R})$ вводится как сопряженный к оператору умножения $\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$, действующему в $H_{(\omega)}^1(\mathbb{C})$.

В соответствии с [1], для того чтобы уравнение свертки

$$T_\mu f = g$$

имело решение в классе $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(\mathbb{R})$ при любой правой части g из $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы характеристическая функция μ этого уравнения была делителем пространства $H_{(\omega)}^1(\mathbb{C})$.

С помощью метода, применявшегося ранее А. Ф. Леонтьевым, В. Х. Мусояном, Ю. Ф. Коробейником, Ю. Н. Фроловым и др. (см. [2, 3]), на основе теории слабо достаточных множеств и абсолютно представляющих систем (определение абсолютно представляющей системы см. в [3]) установлена следующая теорема о существовании у рассматриваемого уравнения свертки частного решения определенного вида.

Теорема. Пусть ω — неквазианалитический вес, μ — произвольный делитель пространства $H_{(\omega)}^1(\mathbb{C})$. Тогда существует абсолютно представляющая в $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(\mathbb{R})$ система экспонент $\{e^{-i\lambda_j x}\}_{j=1}^\infty$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots$, обладающая свойством: если правая часть g уравнения свертки $T_\mu f = g$ разложена в абсолютно сходящийся в $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(\mathbb{R})$ ряд по этой системе

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j e^{-i\lambda_j x}, \quad g_j \in \mathbb{C},$$

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет; Владикавказ, Южный математический институт ВЦ РАН.

то функция

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{\mu(\lambda_j)} e^{-i\lambda_j x}$$

является решением этого уравнения.

Литература

1. Абанин А. В., Абанина Д. А. Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, № 3.—С. 3–21.
2. Леонтьев А. Ф. Об одном способе решения уравнения бесконечного порядка // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1968.—Т. 32.—№ 3.—С. 687–708.
3. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1978.—Т. 42.—№ 2.—С. 325–355.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕГЛАДКОЙ ЛИНИЕЙ ВЫРОЖДЕНИЯ

Л. А. Барагунова¹

Рассмотрим уравнение

$$|y|^k u_{xx} + \operatorname{sign}(xy) |x|^k u_{yy} = 0, \quad k > 0, \quad (1)$$

в конечной односвязной области Ω , ограниченной кривой Жордана σ с концами в точках $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, расположенной в первом квадранте $x > 0$, $y > 0$, и характеристиками AD , BC , CD уравнения (1). Обозначим через Ω_1 и Ω_2 гиперболические части смешанной области Ω , где $x > 0$ и $x < 0$ соответственно, а Ω_3 — эллиптическая часть области Ω ; I_1 (I_2) — интервал $0 < x < 1$ ($0 < y < 1$) прямой $y = 0$ ($x = 0$).

ЗАДАЧА. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, y) = \varphi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \sigma, \quad (2)$$

$$a_1(x) D_{0x}^{1-\beta} u[\theta_0^1(x)] + b_1(x) D_{x1}^{1-\beta} u[\theta_1^1(x)] + \\ + c_1(x) u_y(x, 0) + d_1(x) u(x, 0) = f_1(x) \quad \forall x \in I_1, \quad (3)$$

$$a_2(y) D_{0y}^\beta y^{2\beta-1} u[\theta_0^2(y)] + b_2(y) D_{y1}^\beta (1-y)^{2\beta-1} u[\theta_1^2(y)] + \\ + c_2(y) u_x(0, y) + d_2(y) u(0, y) = f_2(y) \quad \forall y \in I_2, \quad (4)$$

где $\beta = k/(2k+4)$, $\theta_0^i(t)$ и $\theta_1^i(t)$ — аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $(x, 0) \in I_1$ и $(0, y) \in I_2$ с характеристиками OD , AD и OC , BC соответственно; $\varphi(x, y)$, $a_i(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t)$, $d_i(t)$, $f_i(t)$ — заданные непрерывные функции, причем

$$a_i^2(t) + b_i^2(t) + c_i^2(t) + d_i^2(t) \neq 0, \quad t \in I_i, \quad i = 1, 2,$$

$$\varphi(x, y) \in C^1(\sigma), \quad a_i(t), b_i(t), c_i(t), d_i(t), f_i(t) \in C^{(2,h)}(\bar{I}), \quad h > 0,$$

D_{0x}^l и D_{x1}^l — операторы дробного, в смысле Римана — Лиувилля, интегро-дифференцирования [1].

¹Россия, Нальчик, Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.

Под регулярным в области Ω решением уравнения (1) будет пониматься функция $u(x, y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3)$, удовлетворяющая уравнению (1), такая, что $u_y(x, 0)$ и $u_x(0, y)$ на концах интервалов I_1, I_2 могут обращаться в бесконечность порядка не выше $1 - 2\beta$.

Поставленная задача относится к классу краевых задач со смещением, сформулированных А. М. Нахушевым [2].

Методом интегралов энергии доказана теорема единственности. Вопрос существования решения задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений.

Литература

1. Hardy G., Littlewood J. Some properties of fractional integrals // Math. Z.—1928.—Vol. 27.—P. 565–606.
2. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения.—1969.—Т. 5, № 1.—С. 44–59.

О ХАРАКТЕРЕ РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА НА
НЕОГРАНИЧЕННЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

У. В. Баркина¹, С. Н. Мелихов¹

Пусть Q — выпуклое множество в $\mathbb{C}$ (отличное от $\mathbb{C}$) с непустой внутренностью $\text{int } Q$. Предположим, что Q обладает следующими свойствами:

- (1) $Q \cap (\partial Q)$ компактно (∂Q — граница Q);
- (2) если $Q_0 := (\text{int } Q) \cup ((\partial Q) \setminus (Q \cap (\partial Q)))$, то пересечение Q_0 со всякой опорной прямой к $\overline{Q}$ (замыканию Q) компактно.

Условия (1) и (2) необходимы и достаточны для того, чтобы множество Q обладало счетным базисом окрестностей, состоящим из выпуклых областей.

Далее зафиксируем счетный базис окрестностей $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ множества Q , где Q_n — выпуклые области такие, что $Q_{n+1} \subseteq Q_n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $A(Q)$ — пространство ростков всех функций, аналитических на Q , с естественной топологией индуктивного предела: $A(Q) := \text{ind}_{n \rightarrow} A(Q_n)$, где $A(Q_n)$ — пространство Фреше всех функций, аналитических в Q_n .

Для ограниченного множества $M \subseteq \mathbb{C}$ символом H_M обозначим опорную функцию M , т. е. $H_M(z) := \sup_{t \in M} \text{Re}(zt)$, $z \in \mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, φ — конформное отображение единичного круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на G . Для $r \in (0, 1)$ пусть $G_r := \varphi(\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\})$. Компакты G_r выпуклы. Положим $H_r := H_{G_r}$, $r \in (0, 1)$. Определена функция

$$D_G(z) := \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{H_G(z) - H_r(z)}{1 - r} \in (0, +\infty], \quad |z| = 1.$$

Пусть G — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, отличный от точки, ψ — конформное отображение $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ на $\mathbb{C} \setminus G$ такое, что $\psi(\infty) = \infty$. Для $r > 1$ компакты $G_r := \mathbb{C} \setminus \psi(\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\})$ выпуклы. Пусть $H_r = H_{G_r}$, $r > 1$. Определена функция

$$D_G(z) := \lim_{r \rightarrow 1+0} \frac{H_r(z) - H_G(z)}{r - 1} \in [0, +\infty), \quad |z| = 1.$$

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

Положим $\omega := (\partial Q) \cap Q$, $\omega_0 := (\partial Q) \setminus \omega$; $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $S_0 := \{z \in S : \operatorname{Re}(tz) = H_Q(z) \text{ для некоторого } t \in \omega_0\}$, $S_\omega := S \setminus S_0$.

Возьмем ненулевую целую функцию $a(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ нулевого типа при порядке 1. Пусть $V(a)$ — множество нулей a . Оператор $a(D)f := \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}$, $f \in A(Q)$, линейно и непрерывно отображает $A(Q)$ на $A(Q)$. В докладе идет речь о необходимых и достаточных условиях того, что (фиксированный) дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами $a(D) : A(Q) \rightarrow A(Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный. Эти условия формулируются в терминах существования специального семейства субгармонических функций и множества всех предельных точек последовательности $(z/|z|)_{z \in V(a)}$. Кроме того, из полученных результатов вытекает

Теорема. Пусть $0 \in \operatorname{int} Q$. Всякий ненулевой оператор $a(D) : A(Q) \rightarrow A(Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный тогда и только тогда, когда Q ограничено, функция $D_{\operatorname{int} Q}$ ограничена на каждом компакте в S_0 и функция $1/D_{\overline{Q}}$ ограничена в некоторой окрестности S_ω в S .

ЗАМЕЧАНИЕ. а) В статье [1] установлен критерий того, что фиксированный ненулевой оператор $a(D)$ имеет линейный непрерывный правый обратный в случае, когда Q ограничено.

б) Задача о наличии линейного непрерывного правого обратного к дифференциальному оператору $a(D)$ решена в [2] для класса выпуклых множеств $Q \subseteq \mathbb{C}$, обладающих фундаментальной последовательностью компактных подмножеств.

Литература

1. Мелихов С. Н. Аналитические решения дифференциальных уравнений бесконечного порядка на выпуклых множествах с препятствием, открытым на границе // Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2004.—С. 141–162.
2. Melikhov S. N., Momm S. Analytic solutions of convolution equations on convex sets with obstacle in the boundary // Math. Scand.—2000.—Vol. 86.—P. 293–319.

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РАЗНОСТНЫХ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. В. Бесаева¹

Пусть X — конечномерное линейное нормированное пространство, $LB(X)$ — алгебра линейных операторов, действующих в X . Через $l_\alpha^p = l_\alpha^p(\mathbb{Z}, X)$, где $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство (двусторонних) последовательностей $x : \mathbb{Z} \rightarrow X$ векторов из X , суммируемых с весом (весовой функцией) $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow (0, \infty)$ с нормой $\|x\|_{p, \alpha} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)} \right)^p \right)^{1/p}$ при $p \in [1, \infty)$, и ограниченных относительно α с нормой $\|x\|_{\infty, \alpha} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)}$ при $p = \infty$.

Пусть весовая функция α удовлетворяет условию $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha(n-1)}{\alpha(n)} < \infty$. Это условие эквивалентно ограниченности разностного оператора (оператора взвешенного сдвига)

$$\mathcal{K} : l_\alpha^p \rightarrow l_\alpha^p, \quad (\mathcal{K}x)(n) = Bx(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l_\alpha^p,$$

где оператор $B \in LB(X)$. По весу α определим следующие величины:

$$\begin{aligned} \varkappa_{\text{out}}(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)} \right)^{1/n}, \\ \varkappa_{\text{int}}(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)} \right)^{1/n}. \end{aligned}$$

Пусть $\sigma(B) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ — спектр оператора B . Рассмотрим модули $|\lambda_j|$, $1 \leq j \leq n$, собственных значений оператора B и упорядочим их по возрастанию: $0 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_m$.

Теорема 1. Спектр $\sigma(\mathcal{K})$ оператора $\mathcal{K} \in LB(l_\alpha^p)$ представим в виде

$$\sigma(\mathcal{K}) = \bigcup_{j=1}^m [r_j \varkappa_{\text{int}}(\alpha), r_j \varkappa_{\text{out}}(\alpha)] \mathbb{T} = \bigcup_{j=1}^m [\varkappa_{\text{int}}(\alpha), \varkappa_{\text{out}}(\alpha)] \mathbb{T}(r_j),$$

где $\mathbb{T}(r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r\}$ и $\mathbb{T} = \mathbb{T}(1)$.

¹Россия, Владикавказ, Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dt} + A : D(\mathcal{L}) \subset L_{\tilde{\alpha}}^p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L_{\tilde{\alpha}}^p(\mathbb{R}, X), \quad p \in [1, \infty],$$

где $A \in LB(X)$, $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ — весовая функция, представимая в виде $\tilde{\alpha}(t) = \exp a(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и a — дифференцируемая функция с $\dot{a} = b \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Теорема 2. *Спектр оператора $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset L_{\tilde{\alpha}}^p \rightarrow L_{\tilde{\alpha}}^p$ допускает представление вида $\sigma(\mathcal{L}) = \bigcup_{j=1}^m \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda_{\min}(b) + \operatorname{Re} \mu_j \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \lambda_{\max}(b) + \operatorname{Re} \mu_j\}$, если $\sigma(A) = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$.*

Литература

1. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Изв. РАН. Сер. Мат.—2009.—Т. 73, № 2.—С. 3–68.
2. Баскаков А. Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функци. анализ и его прил.—1996.—Т. 30, № 3.—С. 1–11.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА
С ОПЕРАТОРОМ ДЖРБАШЯНА — НЕРСЕЯНА

Ф. Т. Богатырева¹

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}} u(x) - \lambda u(x) = f(x), \quad (1)$$

где $D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}} = D_{0x}^{\gamma_n-1} D_{0x}^{\gamma_{n-1}} D_{0x}^{\gamma_{n-2}} \dots D_{0x}^{\gamma_0}$ — оператор дробного дифференцирования Джрбашяна — Нерсеяна порядка α [1], $D_{0x}^{\gamma_k}$ — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана — Лиувилля [2, с. 9], $\alpha = \sum_{k=0}^n \gamma_k - 1$, $0 < \gamma_k \leq 1$, $x \in]0, 1[$, $\lambda = \text{const}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Регулярным решением* уравнения (1) называется функция $u = u(x)$ из класса

$$D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k\}} u(x) \in C[0, 1], \quad 0 \leq k \leq n-1, \\ D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}} u(x) \in C]0, 1[,$$

удовлетворяющая уравнению (1) в интервале $]0, 1[$.

ЗАДАЧА. Найти регулярное решение уравнения (1) в интервале $]0, 1[$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k\}} u(x) = u_k, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad k \neq l, \quad (2)$$

$$u(1) = \int_0^1 K(t) u(t) dt, \quad (3)$$

где $K(t) \in C[0, 1]$ — заданная функция, $l \in \{0, \dots, n-1\}$, $u_k = \text{const}$.

Теорема. Пусть $f(x) \in C]0, 1[\cap L]0, 1[$ и выполняется условие

$$E_{\alpha, \gamma_l}(\lambda) - \int_0^1 K(t) t^{\gamma_l-1} E_{\alpha, \gamma_l}(\lambda t^\alpha) dt \neq 0.$$

¹Россия, Нальчик, Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.

Тогда существует и единственно регулярное решение задачи (2), (3) для уравнения (1). Решение определяется формулой

$$u(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(x-t)^\alpha) dt + \sum_{j=0}^{n-1} x^{\mu_j-1} E_{\alpha,\mu_j}(\lambda x^\alpha) u_j,$$

где $\mu_j = \sum_{i=0}^j \gamma_i$, $j = n-1$,

$$\begin{aligned} u_l = & \left[E_{\alpha,\gamma_l}(\lambda) - \int_0^1 K(t)t^{\gamma_l-1} E_{\alpha,\gamma_l}(\lambda t^\alpha) dt \right]^{-1} \times \\ & \times \left[\int_0^1 f(\xi) \int_\xi^1 K(t)(t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\xi)^\alpha) dt d\xi - \right. \\ & \left. - \int_0^1 f(t)(1-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(1-t)^\alpha) dt + \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{n-1} u_j \left(\int_0^1 K(t)t^{\mu_j-1} E_{\alpha,\mu_j}(\lambda t^\alpha) dt - E_{\alpha,\mu_j}(\lambda) \right) \right]. \end{aligned}$$

Литература

1. Джрбашян М. М., Нерсисян А. Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР.— 1968.—Т. 3, № 1.—С. 3–28.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.

ЛИНЕЙНЫЙ НЕПРЕРЫВНЫЙ ПРАВЫЙ ОБРАТНЫЙ К ОПЕРАТОРУ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

В. А. Варзиев¹

В настоящем докладе идет речь о характере зависимости коэффициентов разложений в ряды экспонент функций f , аналитических в ограниченной выпуклой (плоской) области и полиномиального роста вблизи ее границы, от f . В терминах операторов соответствующая задача является проблемой существования линейного непрерывного правого обратного к оператору представления рядами экспонент. Для функций, аналитических в выпуклой ограниченной области в $\mathbb{C}$ (без ограничений на их рост) эта «проблема коэффициентов» решена в статье [1].

Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$. Определим (LB) -пространство $A^{-\infty}(G)$ аналитических функций полиномиального роста вблизи границы G :

$$A^{-\infty}(G) := \left\{ f \in A(G) \mid \exists n \in \mathbb{N} : \|f\|_n := \sup_{z \in G} |f(z)| (\text{dist}(z, \partial G))^n < \infty \right\}.$$

Пусть K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$; L — целая функция экспоненциального типа, обладающая следующими свойствами:

- (а) все нули λ_j , $j \in \mathbb{N}$, функции L простые;
- (б) существует $d > 0$ такое, что найдется последовательность попарно непересекающихся кругов $S_j := \{z : |z - \mu_j| < d\}$, $j \in \mathbb{N}$ ($|\mu_j| \rightarrow \infty$), таких, что каждый круг S_j содержит ровно один нуль функции L и вне $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j$ имеет место асимптотическое равенство

$$\ln |L(z)| = H_{G+K}(z) + O(\ln(1 + |z|)), \quad |z| \rightarrow \infty$$

(H_{G+K} — опорная функция $G + K$).

¹Россия, Владикавказ, Южный математический институт ВНИЦ РАН.

Пусть $e_\lambda(z) := \exp(\lambda z)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$. Для $n \in \mathbb{N}$ введем (LB) -пространство последовательностей

$$\Lambda_G^{-\infty} := \left\{ c = (c_j) \subset \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} : \|c\|_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|c_j| \exp H_G(\lambda_j)}{(1 + |\lambda_j|)^n} < \infty \right\}$$

($\Lambda_G^{-\infty}$ — пространство всех последовательностей c , для которых ряд $\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{\lambda_j}$ абсолютно сходится в $A^{-\infty}(G)$). Оператор представления $R(c) := \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{\lambda_j}$ линейно и непрерывно отображает $\Lambda_G^{-\infty}$ в $A^{-\infty}(G)$.

Теорема 1. Оператор представления $R : \Lambda_G^{-\infty} \rightarrow A^{-\infty}(G)$ сюръективен, т. е. $(e_{\lambda_j})_{j \in \mathbb{N}}$ — абсолютно представляющая система в $A^{-\infty}(G)$.

Ответ на вопрос о существовании линейного непрерывного правого обратного к сюръективному оператору представления $R : \Lambda_G^{-\infty} \rightarrow A^{-\infty}(G)$ дает

Теорема 2. Если $\text{int } K \neq \emptyset$, то оператор $R : \Lambda_G^{-\infty} \rightarrow A^{-\infty}(G)$ имеет линейный непрерывный правый обратный.

Литература

1. Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 1.—С. 70–84.

ON POSITIVE OPERATORS WITHOUT INVARIANT SUBLATTICES

U. Gönüllü¹

1. Introduction

There are many positive results in [1, ch. 10] whether a positive operator on an infinite-dimensional Banach lattice has a non-trivial, closed invariant subspace. Specially, every positive compact operator on Banach lattice has a non-trivial invariant closed sublattice. So, we can ask whether a positive operator on an infinite-dimensional Banach lattice has a non-trivial, closed invariant sublattice. But, A. K. Kitover and A. W. Wickstead have constructed in [3] examples of positive operators on the Banach lattices c_0 , c , ℓ_p , and L^p ($1 \leq p < \infty$) without non-trivial closed invariant sublattices. It should be noted that the operators constructed by Kitover and Wickstead have non-trivial closed invariant subspaces. The purpose of this short note is to slightly modify some of the examples given in [3] and obtain further examples of positive operators without invariant sublattices. We will also show, via an example again, that our approach of taking a multiple of one of the shift operators does not work for both shifts. Moreover, these operators have no invariant closed infinite-dimensional sublattices, [4]. It should also be noted that in the proofs of the main results of the present paper, two well-known facts, namely the Kakutani — Krein Representation Theorem and that any sublattice of the spaces ℓ_p ($1 \leq p < \infty$), c_0 , and c is characterized, are intrinsically used. Throughout the paper the term «operator» will be synonymous with «linear operator», and by a non-trivial subspace/sublattice is meant one that is different from $\{0\}$ and the whole space. For all unexplained notation and terminology, we refer to [1].

2. Definitions and heuristics

Before seeing the main results, we shall need some classical representation theorems from operator theory along with their consequences. That the space of all convergent sequences and the space of all continuous functions on the one-point compactification of the natural numbers are

¹Turkey, İstanbul, İstanbul Kültür University.

lattice isometric is a very well-known fact, which we only state here as the subject matter of the following proposition. Its proof can be found in a standard functional analysis book.

Proposition 2.1. *The Banach lattices c and $C(\mathbb{N}^*)$, where $\mathbb{N}^*$ is the one-point compactification of the naturals $\mathbb{N}$, are lattice isometric.*

Using [2, Theorem 3] and Proposition 2.1, the closed sublattices of c can easily be characterized as follows.

Corollary 2.2. *Let H be a closed vector sublattice of c . Then one of the following holds for all $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$:*

- (1) *there exist $\alpha \geq 0$ and $m, n \in \mathbb{N}$ such that $x_m = \alpha x_n$;*
- (2) *there exist $\alpha \geq 0$ and $m \in \mathbb{N}$ such that $x_m = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;*
- (3) *there exist $\alpha \geq 0$ and $m \in \mathbb{N}$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha x_m$.*

Conversely, if some $x \in c$ satisfies the equalities given in the constraints (1), (2) and (3) above, then x belongs to H .

On the other hand, for the closed sublattices of ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) or c_0 , we have the following result. Recall that two vectors x and y in a Riesz space X are called **disjoint** if $|x| \wedge |y| = 0$.

Theorem 2.3 [4, Theorem 5.2]. *Every closed sublattice of ℓ_p with $1 \leq p < \infty$ or c_0 is the closed span of a finite or infinite sequence of disjoint positive vectors.*

Since c_0 is a closed ideal in c , Corollary 2.2 and Theorem 2.3 readily imply that for every $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$, where H is a proper closed sublattice of ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) or c_0 , there exist $\alpha \geq 0$ and $m, n \in \mathbb{N}$ such that $x_m = \alpha x_n$.

3. Main results

We will give now the main results of this note, following the same lines of thought as in [3] in their proofs. It should be noted, and is straightforward to check, that all the operators constructed in the following theorems are positive. The operator given in Example 3.5 in [3] is the sum of a backward and a forward shift operator. We will show below that the conclusion therein still holds true if the forward shift operator is made into a weighted forward shift operator, with a constant weight is greater than or equal to 1.

EXAMPLE 3.1. Let $X = \ell_p$ ($1 \leq p < \infty$) or c_0 , $\alpha \geq 1$, and T be the operator on X defined by

$$(Tx)_n = \begin{cases} \alpha x_{n-1} + x_{n+1}, & \text{if } n > 0; \\ x_1, & \text{if } n = 0. \end{cases}$$

Then there is no non-trivial closed T -invariant sublattice of X .

◁ By Example 3.5 in [3], one can assume that $\alpha > 1$. We will show that T does not have a positive eigenvector. Each element $x \in X$ defines a function $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ that is analytic on the open unit disc in the complex plane. The action of T on X corresponds to the mapping taking f to $\alpha z f(z) + (f(z) - f(0))/z$. If x is positive and $Tx = \lambda x$, then $0 \leq \lambda \leq 1 + \alpha$ since $\|T\| = 1 + \alpha$. We also have

$$\alpha z f(z) + \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lambda f(z)$$

so that

$$f(z) = \frac{f(0)}{\alpha z^2 - \lambda z + 1}.$$

Thus, by scaling and taking $f(0) = \alpha$, one has $f(z) = (z^2 - (\lambda/\alpha)z + 1/\alpha)^{-1}$. For $0 \leq \lambda \leq 1 + \alpha$, since at least one of the roots of $z^2 - (\lambda/\alpha)z + 1/\alpha = 0$ lies inside it, f has a pole in the open unit disc, contradicting the fact that f is analytic. This shows that T has no positive eigenvector.

Now suppose that H is a non-trivial closed T -invariant sublattice of X . First we show that there is no m such that $x_m = 0$ for all $x \in H$. If $m = 0$ then $(Tx)_0 = x_1 = 0$ for all $x \in H$ so we may suppose that $m > 0$. If there were such an m , then take $x \in H^+$ and observe that $(Tx)_m = \alpha x_{m-1} + x_{m+1} = 0$ so (as $x \geq 0$) $x_{m-1} = x_{m+1} = 0$. This must also hold for all $x = x^+ - x^- \in H$. Proceeding inductively we see that $x_p = 0$ for all non-negative integers p so that $H = \{0\}$. Otherwise, if $H \neq X$, there are $m, n \geq 0$ with $m > n$ and $\gamma > 0$ such that $x_m = \gamma x_n$ for all $x \in H$. We claim that if $x \in H$ and $x_1, x_2, \dots, x_m$ are known then x is specified uniquely. Consider the statement $P(p)$ that we can express x_k uniquely as a linear combination of term x_j , with $1 \leq j \leq m$, for all $k \leq p$. This is trivially true for $p = m$. Let us assume $P(p)$. Note that $T^{p+1-m}x \in H$ as H is T -invariant and that $(T^{p+1-m}(x))_m$ is a linear combination of x_k for $k \leq p+1$ with the coefficient of x_{p+1} being 1. Similarly, $(T^{p+1-m}(x))_n$ is a linear combination of x_k for $k \leq$

$p+n+1-m$. As $(T^{p+1-m}(x))_m = \gamma(T^{p+1-m}(x))_n$ we can solve for x_{p+1} in terms of x_k for $k \leq p$ and hence express x_{p+1} as a linear combination of x_k for $1 \leq k \leq m$. That is, we have proved $P(p+1)$. It follows that H is finite-dimensional. But now Theorem 8.11 of [1] tells us that T has a positive eigenvector, which we already know to be false. $\triangleright$

The argument in Example 3.1 is no longer true if $X = c$, as c_0 is a non-trivial closed ideal in that case. Interestingly, if the backward shift operator becomes a weighted backward shift with a constant weight is greater than 1, the conclusion of Example 3.1 still cease to exist. The following result illustrates this fact.

EXAMPLE 3.2. Let $X = \ell_p$ ($1 \leq p < \infty$) or c_0 , $\alpha > 1$, and T be the operator on X defined by

$$(Tx)_n = \begin{cases} x_{n-1} + \alpha x_{n+1}, & \text{if } n > 0; \\ \alpha x_1, & \text{if } n = 0. \end{cases}$$

Then T has a positive eigenvector, and consequently T has a non-trivial closed invariant sublattice.

$\triangleleft$ We can easily show that $2\sqrt{\alpha}$ is an eigenvalue of T with the corresponding eigenvector $x = \{(n+1)/\alpha^{\frac{n+2}{2}}\}$. Therefore $\text{span}\{x\}$ is a non-trivial closed T -invariant sublattice of X . $\triangleright$

The following is a weighted-shift-variant of Example 3.6 in [3] and technique of the proof is same.

EXAMPLE 3.3. Let $X = c$, $\alpha \geq 1$, and T be the operator on X defined by

$$(Tx)_n = \begin{cases} \alpha x_{n-1} + x_{n+1} + x_0, & \text{if } n > 0; \\ x_1 + x_0, & \text{if } n = 0. \end{cases}$$

Then there is no non-trivial closed T -invariant sublattice of X .

References

1. Abramovich Y. A., Aliprantis C. D. An invitation to operator theory.—Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2002.—530 p.—(Grad. Stud. in Math; Vol. 50).
2. Kakutani S. Concrete representation of abstract (M) -spaces // Ann. of Math. (2).—1941.—Vol. 42, № 4.—P. 994–1024.
3. Kitover A. K., Wickstead A. W. Invariant sublattices for positive operators // Indag. Math. (N.S.).—2007.—Vol. 18, № 1.—P. 39–60.
4. Radjavi H., Troitsky V. Invariant sublattices // Illinois J. Math.—2009.—Vol. 52, № 2.—P. 437–462.

О ГРАФАХ, В КОТОРЫХ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИН
ЯВЛЯЮТСЯ ПСЕВДОГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ
ГРАФАМИ ДЛЯ $GQ(3, t)$, $t \in \{3, 5\}$

А. К. Гутнова¹, А. А. Махнев²

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup \Gamma(a)$. Если граф Γ зафиксирован, то вместо $\Gamma(a)$ будем писать $[a]$. Для множества вершин X графа Γ через $X^\perp$ обозначим $\bigcap_{x \in X} x^\perp$. Если не оговорено противное, то слово «подграф» будет означать «индуцированный подграф». Пусть $k_i = |\Gamma_i|$.

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс графов. Граф Γ назовем *локально $\mathcal{F}$ -графом*, если $[a]$ лежит в $\mathcal{F}$ для любой вершины a графа Γ .

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным* степени k , если степень любой вершины a из Γ равна k . Граф Γ назовем *реберно регулярным* с параметрами (v, k, λ) , если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф* с параметрами (v, k, λ, μ) , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b , находящихся на расстоянии 2 в Γ . Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным графом*, если он имеет диаметр 2.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется *α -частичной геометрией порядка (s, t)* , если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой и для любого антифлага $(a, L) \in (P, \mathcal{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$ или pG_α). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s, t)$. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s-1+t(\alpha-1)$,

¹Россия, Владикавказ, Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова.

²Россия, Екатеринбург, Институт математики и механики УРО РАН.

$\mu = \alpha(t + 1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$.

В работе [1] рассматривались графы, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_{s-2}(s, t)$. В этой работе остались неисследованными случаи $t = 3$, $t = 5$. Заметим, что локально $GQ(3, t)$ -графы были классифицированы в работе [2]. В таких графах окрестность любой вершины — объединение изолированных многоугольников с числом вершин, кратным 3. В данной работе классифицированы связные вполне регулярные локально псевдо $GQ(3, 3)$ - и $GQ(3, 5)$ -графы.

Теорема 1. Пусть Γ является связным вполне регулярным графом, в котором окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $GQ(3, 3)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) диаметр Γ равен 2, и Γ имеет параметры $(176, 40, 12, 8)$ или $(95, 40, 12, 20)$;
- (2) диаметр Γ равен 3, и либо $\mu = 10$ и $|\Gamma| = 151$, либо $\mu = 12$ и $|\Gamma| = 133$.

Теорема 2. Пусть Γ является связным вполне регулярным графом, в котором окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $GQ(3, 5)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) диаметр Γ равен 2, Γ имеет параметры $(245, 64, 18, 16)$ и собственные значения 8, -6 кратностей 100, 144;
- (2) $\mu = 20$, $k_2 = 144$ и $k_3 \leq 4$;
- (3) $\mu = 18$, $k_2 = 160$ и $k_3 \leq 16$.

Литература

1. Гутнова А. К., Махнев А. А. О графах, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_{s-2}(s, t)$ // Докл. РАН.—2010.—Т. 431, № 3—С. 471–475.
2. Haemers W., Spence E. The pseudo-geometric graphs for generalized quadrangles of order $(3, t)$ // Eur. J. Comb.—2001.—Vol. 22, № 6.—Р. 839–845.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП ЭЙЛЕРА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ОБОБЩЕННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. М. Дильмухаметова¹, В. В. Напалков²

В работе Л. Эйлера [1] для случая обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами $\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)u$, где $\mathcal{P}$ — нетривиальный многочлен, показано, что любой элемент из ядра такого оператора есть конечная сумма экспоненциально-полиномиальных решений:

$$u(x) = \sum_{\substack{\mathcal{P}(\lambda)=0, \\ \lambda \in \mathbb{C}}} q_\lambda(x) \exp \lambda x, \quad x \in (R),$$

где q_λ — многочлен степени строго меньшей кратности корня λ . Этот результат принято называть фундаментальным принципом Эйлера. В 1960 г. Л. Эренспрайс [2] перенес этот результат на дифференциальные операторы с частными производными с постоянными коэффициентами. Для таких операторов указанный принцип также рассматривался в работах [3, 4].

Нами введены и изучаются дифференциальные операторы с обобщенными частными производными с постоянными коэффициентами, и для таких операторов рассматривается фундаментальный принцип.

Обобщенной частной производной порядка $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, порожденной набором многочленов $\{p_j(w)\}_{j=0}^n$ целой функции $f(z) = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} a_k z^k$ назовем оператор, действующий по правилу:

$$D^l f = \frac{1}{z^l} \sum_{k_1=l_1}^{\infty} \sum_{k_2=l_2}^{\infty} \dots \sum_{k_n=l_n}^{\infty} a_k P_1^{l_1}(k_1) P_2^{l_2}(k_2) \dots P_n^{l_n}(k_n),$$

где $P_j^{l_j}(w) = p_j(w)p_j(w-1)p_j(w-l_j+1)$.

¹Россия, Уфа, Башкирский государственный университет.

²Россия, Уфа, Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН.

Собственными функциями оператора D^l являются функции

$$g(\lambda, z) = g_1(\lambda_1 z_1) g_2(\lambda_2 z_2) \dots g_n(\lambda_n z_n) = \\ = \prod_{j=1}^n \left(1 + \sum_{k_j=1}^{\infty} \frac{(z_j \lambda_j)^{k_j}}{p_j(1) p_j(2) \dots p_j(k_j)} \right).$$

Выберем нехарактеристический вектор $N \in \mathbb{C}^n$ для $\mathcal{P}$. ∂_N — дифференциальный оператор, действующий на голоморфную в области $U \in \mathbb{C}^n$ функцию f :

$$(\partial_N f)(z) = \frac{d}{d\lambda} f(z + \lambda N) \Big|_{\lambda=0}, \quad z \in U.$$

Разложим $\mathcal{P}$ на неприводимые многочлены: $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1^{l_1} \mathcal{P}_2^{l_2} \dots \mathcal{P}_r^{l_r}$. $V_i = \{z \in \mathbb{C}^n : \mathcal{P}_i(z) = 0, (\partial_N \mathcal{P}_i)(z) \neq 0, \mathcal{P}_j(z) \neq 0, j \neq i\}$ — нулевое многообразие многочлена $\mathcal{P}_i$.

$H_K(\xi) = \max\{\langle x, \xi \rangle, x \in K, \xi \in \mathbb{R}^n\}$ — опорная функция компакта K .

Теорема. Функция u принадлежит $\ker \mathcal{P}(D_x)$ тогда и только тогда, когда она представляется в виде:

$$u(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{l_i-1} \int_{V_i} \partial_N g(x, z) d\mu_{ij}(z), \quad x \in \Omega,$$

с мерами Радона, которые имеют носителями V_i и для некоторой положительной непрерывной функции w на $\mathbb{C}^n$ такой, что $(1 + |z|)^M \exp\{H_K\{\operatorname{Re} z\}\} = o(w(z))$, $|z| \rightarrow \infty$ для любого M и любого компактного множества $K \subset \subset \Omega$, удовлетворяет условию $\int_{V_i} w(z) d\mu_{ij}(z) < +\infty$, $i = 1, \dots, r$, $j = 0, 1, \dots, l_i - 1$.

Литература

1. Euler L. Determinatio orbitae cometae qui mense Martio huius anni 1742 potissimum fuit observatus // Miscellanea Berolinensis.—1743.—Vol. 7.—P. 1–90.
2. Ehrenpreis L. A Fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients, and some of its applications // Proc. Intern. Symp. Linear Spaces.—Jerusalem, 1960.—P. 161–174.
3. Паламодов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.—М.: Наука, 1967.—488 с.
4. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.—М.: Мир, 1986.—455 с.

О КРАЙНИХ ТОЧКАХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

М. А. Зембатова¹

Важное место в современном анализе занимает задача описания выпуклого множества как совокупности всех взвешенных сумм (барицентров) некоторого малого и удобно описываемого подмножества. Такое описание дает единообразный подход к ряду задач, установленных первоначально в классическом анализе различными методами, затемняющими их общее происхождение. Для теории оптимизации значение крайних точек связано с тем, что выпуклая функция может достигать своего максимума на выпуклом множестве не в произвольной точке, а только в крайних точках этого множества. Крайние точки часто используются и в геометрии банаховых пространств, так как вид крайних точек замкнутого единичного шара содержит важную информацию о геометрическом строении банахова пространства.

Цель работы — получить обобщение теоремы Биркгофа о представлении дважды стохастических матриц, использующее теорему Минковского и явный вид крайних точек этого множества матриц.

1. Множество $M \subset X$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими двумя точками оно содержит соединяющий их отрезок, т. е. для любых $x_1, x_2 \in M$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, верно $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in M$. Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих данное множество M , называют *выпуклой оболочкой* множества M и обозначают $\text{co}(M)$. Теорема Каратеодори утверждает, что в пространстве $X = \mathbb{R}^n$ любую точку $\text{co}(M)$ можно представить в виде выпуклой комбинации не более чем $n + 1$ точек из M [3].

2. Точка x выпуклого множества M называется *крайней точкой*, если не существует таких точек $x_1, x_2 \in M$, $x_1 \neq x_2$, что $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = x$ (т. е. крайняя точка выпуклого множества не может быть серединой отрезка, концы которого лежат в этом множестве). Множество крайних точек M обозначают $\text{ext}(M)$.

Теорема Минковского. Компактное выпуклое множество C в $\mathbb{R}^N$ совпадает с совокупностью выпуклых комбинаций своих крайних точек: $C = \text{co}(\text{ext}(C))$.

¹Россия, Владикавказ, Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова.

3. Квадратная матрица $A = [a_{ij}]$ n -го порядка называется *дважды стохастической*, если все ее строчные и столбцовые суммы равны 1, т. е. $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ ($j = 1, \dots, n$) и $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ ($i = 1, \dots, n$).

Следующая теорема — следствие теоремы Минковского [2].

Теорема Биркгофа. Матрица $A \in M_n = M_n(\mathbb{R})$ является дважды стохастической в том и только в том случае, когда для некоторого $N < \infty$ существуют матрицы перестановки $P_1, \dots, P_N \in M_n$ и положительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ такие, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = 1$ и $A = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_N P_N$. При этом $N \leq n^2 - 2n + 2$.

4. Пусть теперь E — произвольное K -пространство с единицей $\mathbb{1}$ и будем рассматривать пространство $M_n(E)$ всех квадратных матриц размера $n \times n$ над E (см. [1]). Таким образом, $A = [a_{ij}] \in M_n(E)$ означает, что $a_{ij} \in E$ ($i, j = 1, \dots, n$). Матрицу A назовем *дважды стохастической*, если она положительна ($a_{ij} \geq 0$) и

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = \mathbb{1} \quad (j = 1, \dots, n), \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = \mathbb{1} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Набор $e_1, \dots, e_m \in E$ попарно дизъюнктивных элементов называют *конечным разложением единицы* в E , если $e_1 + \dots + e_m = \mathbb{1}$. Дважды стохастическую матрицу над E назовем *матрицей перемешивания*, если в ней строки и столбцы являются конечными разложениями единицы в E .

5. Обобщенная теорема Биркгофа. Матрица $A \in M_n(E)$ является дважды стохастической в том и только в том случае, когда для некоторого $N \in \mathbb{N}$ существуют матрицы перемешивания $P_1, \dots, P_N \in M_n(E)$ и положительные ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(E)$ такие, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = I_E$ и $A = \alpha_1 \circ P_1 + \dots + \alpha_N \circ P_N$, где $\alpha \circ [a_{ij}] = [\alpha(a_{ij})]$.

Литература

1. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения.—М.: Наука, 2007.—560 с.
2. Ланкастер П. Теория матриц.—М.: Наука, 1973.—280 с.
3. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ.—М.: Мир, 1973.—469 с.

О ПОЛНЫХ СИСТЕМАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

П. А. Иванов¹

Через $\Lambda_1(\alpha)$ обозначим пространство степенных рядов конечного типа

$$\Lambda_1(\alpha) := \left\{ (c_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|c_k\|_m := \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| e^{-\alpha_k/m} < +\infty \forall m \in \mathbb{N} \right\},$$

где $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — монотонно возрастающая последовательность вещественных чисел, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_k = +\infty$. $\Lambda_1(\alpha)$ — пространство Фреше с фундаментальной системой непрерывных преднорм $\|\cdot\|_m$, $m \in \mathbb{N}$.

Введем последовательности

$$(X_q)_k := e^{-qk}, \quad \operatorname{Re} q > 0, q \in \mathbb{C}, \\ (Y_n)_k := k^{n-1} e^{-k}, \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Справедлива следующая

Лемма 1. $X_q \in \Lambda_1(\alpha)$ для любого q такого, что $\operatorname{Re} q > 0$, и $Y_n \in \Lambda_1(\alpha)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Согласно [1] подмножество X локально выпуклого пространства E называется *полным (фундаментальным)* в E , если замыкание линейной оболочки X в E совпадает с E .

Приведем результаты о полноте семейств $(X_q)_{\operatorname{Re} q > 0}$ и $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в пространстве $\Lambda_1(\alpha)$.

Теорема 1. Множества $(X_q)_{\operatorname{Re} q > 0}$, и $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ полны в пространстве $\Lambda_1(\alpha)$.

При доказательстве этой теоремы использовался известный критерий Банаха полноты [1]:

Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, E' — топологическое сопряженное к E . Множество $Q \subseteq E$ полно в E тогда и только тогда, когда выполняется следующая импликация: если $f \in E'$, $f|_Q = 0$, то $f \equiv 0$.

Литература

1. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1071 с.

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

О ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ФРЕШЕ БЕЗ НЕПРЕРЫВНОЙ НОРМЫ

О. А. Иванова¹

Символом ω обозначим пространство Фреше всех числовых последовательностей с топологией покоординатной сходимости, заданной фундаментальной системой преднорм

$$r_k(x) := \max_{1 \leq n \leq k} |x_n|, \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \omega, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для локально выпуклого пространства E через E' обозначим топологическое сопряженное к E пространство.

Пусть E — пространство Фреше, $\varphi_n \in E'$, $n \in \mathbb{N}$. В 1936 г. Айдельхайт [1] установил необходимые и достаточные условия существования для любой последовательности чисел $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \omega$ элемента $x \in E$ такого, что

$$\varphi_n(x) = c_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

С тех пор последовательности $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ линейных непрерывных функционалов с таким свойством стали называть *последовательностями Айдельхайта*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ([2, 3]). Пусть E — пространство Фреше, $\varphi_n \in E'$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ называется *последовательностью Айдельхайта* (в E'), если для любого $a \in \omega$ существует $x \in E$ такое, что $\varphi_n(x) = a_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Если $\varphi_n \in E'$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность Айдельхайта, то оператор $R : x \mapsto (\varphi_j(x))_{j=1}^\infty$ является линейным непрерывным сюръективным отображением E в ω .

Так как простейшим необходимым условием наличия линейного непрерывного правого обратного (ЛНПО) к оператору R является сюръективность R , то естественным образом возникает вопрос о существовании ЛНПО к $R : E \rightarrow \omega$, т. е. такого линейного непрерывного оператора $\Pi : \omega \rightarrow E$, что $R \circ \Pi(c) = c$ для любого $c \in \omega$.

Из результатов работы [1] следует, что каждое небанахово пространство Фреше E обладает фактор-пространством, изоморфным пространству ω .

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

Имеет место

Теорема 1. Пусть E — пространство Фреше. Последовательность Айдельхайта $\varphi_n \in E'$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что оператор R имеет ЛНПО, существует тогда и только тогда, когда в E не существует непрерывной нормы.

Из этой теоремы вытекает

Следствие 1. Если в пространстве Фреше E не существует непрерывной нормы, то E обладает дополняемым подпространством, изоморфным ω .

ЗАМЕЧАНИЕ. В. П. Кондаков обратил внимание автора на то, что в работах [4, 5] фактически доказано (другим способом) следствие 1. Анализ доказательства, приведенного в [4], показывает, что теорема 1 может быть доказана также методом, использованным в [4].

Литература

1. Eidelheit M. Zur theorie der systeme linearer gleichungen // Studia Math.—1936.—№ 6.—P. 139–148.
2. Vogt D. On two problems of Mityagin // Math. Nachr.—1989.—№ 141.—P. 13–25.
3. Митягин Б. С. Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах // Успехи мат. наук.—1961.—Т. 16, № 4.—С. 63–132.
4. Bessaga C., Pelczynski A. On a class B_0 -spaces // Bull. Acad. Pol. Sci. Cl.—1957.—Vol. III, № 5.—P. 375–377.
5. Rolewicz S. Metric linear spaces.—Warszawa: PWN — Polish Sci. Publ., 1984.

О ВОЗМУЩЕНИЯХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КРАТНЫМ СПЕКТРОМ

С. В. Келехсаева¹

Понятие спектрального оператора введено в монографии [1]. В этой же работе сформулирована и доказана основная теорема о возмущениях неограниченных спектральных операторов ограниченными. Существенную роль в этой теореме играет то, что спектр возмущаемого спектрального оператора, начиная с некоторого номера, простой, т. е. каждому собственному значению соответствует только один собственный вектор.

Пусть $T : D(T) \subset \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ — спектральный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, бесконечное число собственных значений которого может иметь корневые подпространства размерностью большей единицы. Через λ_k будем обозначать различные собственные значения оператора T , т. е. $\sigma(T) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Введем величины $d_k = \rho(\lambda_k, \sigma(T) \setminus \lambda_k)$ — расстояние от λ_k до остальной части спектра. Рассмотрим возмущение оператора T произвольным ограниченным оператором B . Верна

Теорема 1. Пусть $\varkappa_k = \dim(\mathfrak{L}_k)$ — размерность корневого подпространства $\mathfrak{L}_k$, соответствующего собственному значению λ_k . Пусть выполнены условия

$$\varkappa = \sup_k \varkappa_k < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{-2} < +\infty.$$

Тогда корневые подпространства оператора $T + B$ образуют базис Рисса [2] из подпространств в $\mathfrak{H}$, т. е. он является спектральным.

Доказательство этой теоремы является модификацией доказательства основной теоремы о возмущениях спектральных операторов в монографии [1].

В качестве примера рассмотрим дифференциальный оператор T , определяемый равенствами

$$Ty = -y'', \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = y'(1). \quad (1)$$

¹Россия, Владикавказ, Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова.

Спектральные свойства оператора (1) изучены в работе [3]. В частности, установлено, что спектр $\sigma(T)$ оператора T состоит из последовательности собственных значений $\lambda_k = (2k\pi)^2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), которой соответствует набор собственных и присоединенных функций: $\varphi_0(x) = x$, $\varphi_{2k-1}(x) = \sin(2\pi kx)$, $\varphi_{2k}(x) = x \cos(2\pi kx)$, $k \in \mathbb{N}$. Причем, $T\varphi_{2k-1} = \lambda_k \varphi_{2k-1}$, $T\varphi_{2k} = \lambda_k \varphi_{2k} + p_k \varphi_{2k-1}$, $p_k = 4k\pi$. Т. е. собственному значению $\lambda_0 = 0$ соответствует одна собственная функция φ_0 , а каждому ненулевому собственному значению λ_k , $k \in \mathbb{N}$, соответствует одна собственная φ_{2k-1} и одна присоединенная функция φ_{2k} .

Для сопряженной задачи $T^*y = -y''$, $y'(1) = 0$, $y(0) = y(1)$, имеем $\psi_0 = 2$, $\psi_{2k-1}(x) = 4(1-x)\sin(2\pi kx)$, $\psi_{2k} = 4x\cos(2\pi kx)$, $k \in \mathbb{N}$, где $T^*\psi_{2k} = \lambda_k \psi_{2k}$, $T^*\psi_{2k-1} = \lambda_k \psi_{2k-1} + p_k \psi_{2k}$, $p_k = 4k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, т. е. через ψ_{2k-1} обозначен присоединенный вектор, а через ψ_{2k} — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_k . При такой нумерации выполнены соотношения биортогональности $(\varphi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$. Справедлива [3]

Теорема 2. Последовательность функций $\varphi_0, \varphi_{2k-1}, \varphi_{2k}$ ($k \in \mathbb{N}$) образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$.

Таким образом, оператор (1) является спектральным. Спектральным, согласно теореме 1, будет также и оператор

$$Ty = -y'' + q, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = y'(1), \quad (2)$$

где $q \in L_2(0, 1)$.

На самом деле оператор (1) удовлетворяет более жестким требованиям, чем спектральность: система его корневых векторов образует базис Рисса. С учетом этого обстоятельства верна

Теорема 3. Система корневых векторов оператора (2) образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$.

Литература

1. Данфорд Н., Шварц Д. Теория операторов. Т. III. Спектральные операторы.—М.: Мир, 1974.—663 с.
2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.—М.: Наука, 1965.—448 с.
3. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения.—1977.—Т. 13, № 2.—С. 294–304.

ОБ ОБРАТИМОСТИ ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО
ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА В
ПРОСТРАНСТВАХ ПЕРЕМЕННОЙ ГЁЛЬДЕРОВОСТИ

Е. С. Кочуров¹

В данной работе рассматриваются дробные интегралы

$$I_{a+}^{\alpha(\cdot)} f(x) = \frac{1}{\Gamma[\alpha(x)]} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha(x)}}$$

и дробные производные

$$D_{a+}^{\alpha(\cdot)} f(x) = \frac{f(x)}{\Gamma[1-\alpha(x)](x-a)^{\alpha(x)}} + \frac{\alpha(x)}{\Gamma[1-\alpha(x)]} \int_a^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha(x)}} dt$$

переменного порядка $\alpha(x)$. Везде далее символом $H_0^{\lambda(x)}([a, b])$ мы будем обозначать класс функций, принадлежащих пространству Гёльдера $H^{\lambda(x)}([a, b])$ переменного порядка и обращающихся в нуль в точке a .

В работе были получены теоремы о действии операторов дробного интегрирования и дифференцирования в пространствах Гёльдера $H_0^{\lambda(x)}([a, b])$, $0 < \min_{x \in [a, b]} \lambda(x) \leq \lambda(x) \leq 1$, и показано, что имеет место следующее представление:

$$D_{a+}^{\alpha(\cdot)} I_{a+}^{\alpha(\cdot)} = I + L,$$

где L — компактный в $H_0^{\lambda(x)}([a, b])$ оператор. А именно, справедлива следующая

Теорема. При выполнении условий:

$$1) 0 < \inf_{x \in [a, b]} \alpha(x) \leq \sup_{x \in [a, b]} \alpha(x) \leq \inf_{x \in [a, b]} \lambda(x) \leq \lambda(x) \leq 1 \text{ для любого}$$

то $x \in [a, b]$;

$$2) \alpha \in C^1([a, b]);$$

$$3) |\lambda(y) - \lambda(x)| \leq \frac{A}{\ln \frac{N}{|x-y|}}, \quad x, y \in [a, b], \quad A > 0, \quad N > b - a;$$

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

4) $\sup_{x \in [a, b]} [\lambda(x) + \alpha(x)] < 1$,
имеет место равенство

$$D_{a+}^{\alpha(\cdot)} I_{a+}^{\alpha(\cdot)} = I + L,$$

где L — компактный в $H_0^{\lambda(x)}([a, b])$ оператор.

Другими словами, при выполнении условий теоремы оператор $I_{a+}^{\alpha(\cdot)}$ обратим в пространстве $H_0^{\lambda(x)}([a, b])$ с точностью до компактного в $H_0^{\lambda(x)}([a, b])$ оператора.

Полученный результат является обобщением известного ранее (см., например, [1]) аналогичного результата для дробных интегралов и дробных производных постоянного порядка в пространствах переменной гёльдеровости. В работах [2] и [3] аналогичное представление было получено в случае пространств L_p .

Литература

1. Гинзбург А. И., Карапетянц Н. К. Дробное интегриродифференцирование в гёльдеровских классах переменного порядка // Докл. РАН.—1994.—Т. 339, № 4.—С. 439–441.
2. Samko S. G. Fractional integration and differentiation of variable order // Anal. Mat.—1995.—Vol. 21.—С. 213–236.
3. Samko S. G. Differentiation and integration of variable order and the spaces $L^{p(x)}$ // Contemporary Math.—1998.—Vol. 212.—С. 203–219.

ОДНОРОДНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫЕ ПОЛИНОМЫ В ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ

З. А. Кусраева¹

Цель данной работы — показать, что любой ортогонально аддитивный ограниченный однородный полином, действующий из равномерно полной векторной решетки в квазиполное локально выпуклое пространство, может быть представлен как композиция отображения степенного типа и ограниченного линейного оператора. Необходимые сведения из теории векторных решеток имеются в [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть E и F — векторные пространства и s — целое число, $s \geq 1$. Отображение $P : E \rightarrow F$ называется *однородным полиномом степени s* (или *s -однородным полиномом*), если существует s -линейный оператор $\varphi : E^s \rightarrow F$ (называемый *порождающим для P*) такой, что $P(x) = \varphi(x, \dots, x)$, $x \in E$.

Всюду ниже E — архимедова векторная решетка, а F — вещественное векторное пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Однородный полином $P : E \rightarrow F$ называют *ортогонально аддитивным*, если для любых $x, y \in E$ из $|x| \wedge |y| = 0$ следует $P(x + y) = P(x) + P(y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. s -Линейный оператор $\varphi : E_1 \times \dots \times E_s \rightarrow G$, где G — еще одна векторная решетка, называется *решеточным s -морфизмом*, если отображение $x_i \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_s)$ ($x_i \in E_i$) есть решеточный гомоморфизм из E_i в G для каждого $i = 1, \dots, s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пара $(E^{\odot_s}, \odot_s)$ называется *s -ой степенью E* ($1 < s \in \mathbb{N}$), если выполнены следующие три условия [3]:

- (1) $E^{\odot_s}$ — векторная решетка;
- (2) $\odot_s : E^s \rightarrow E^{\odot_s}$ — симметричный решеточный s -морфизм;
- (3) для любой архимедовой векторной решетки G и любого симметричного решеточного s -морфизма $\varphi : E^s \rightarrow G$ существует единственный решеточный гомоморфизм $S : E^{\odot_s} \rightarrow G$ такой, что $S \circ \odot_s = \varphi$ (см. [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Локально выпуклое пространство называют *квазиполным*, если в нем полно всякое ограниченное замкнутое множество [4].

¹Россия, Владикавказ, Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова, Южный математический институт ВНЦ РАН.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Оператор P из векторной решетки E в локально выпуклое пространство F назовем *ограниченным*, если образ $P(B)$ любого порядково ограниченного множества $B \subset E$ является ограниченным множеством в F .

Пространство всех ограниченных линейных операторов из E в F обозначим символом $L_b(E, F)$, а пространство всех ограниченных s -однородных ортогонально аддитивных полиномов из E в F — символом $\mathcal{P}_o(^sE, F)$. Сформулируем основной результат данной работы, который является обобщением [2, теорема 2.3].

Теорема. Пусть E — равномерно полная векторная решетка, F — квазиполное локально выпуклое пространство. Тогда для любого ортогонально аддитивного порядково ограниченного s -однородного полинома $P : E \rightarrow F$ существует единственный ограниченный линейный оператор $S := S_P$ из $E^{s\odot}$ в F такой, что $P = S \circ \odot_s \circ D_s$:

$$P(x) = S(x^{s\odot}) = S(\underbrace{x \odot \cdots \odot x}_{s \text{ раз}}) \quad (x \in E).$$

Отображение $P \mapsto S_P$ является изоморфизмом векторных пространств $\mathcal{P}_o(^sE, F)$ и $L_b(E^{s\odot}, F)$.

Литература

1. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.—London: Academic Press, 1985.—xvi+367 p.
2. Benyamini Y., Lassalle S., Llavona J. G. Homogeneous orthogonally additive polynomials on Banach lattices // Bull. London Math. Soc.—2006.—Vol. 38, № 3.—P. 459–469.
3. Boulabier K., Buskes G. Vector lattice powers: f -algebras and functional calculus // Communic. in Algebra.—2006.—Vol. 34.—P. 1435–1442.
4. Шефер Х. Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1971.—354 с.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ КАПУТО В УСЛОВИИ СМЕЩЕНИЯ

Ф. М. Лосанова¹

Рассмотрим волновое уравнение

$$u_{xx}(x, t) - u_{tt}(x, t) = 0 \quad (1)$$

в области Ω , ограниченной характеристиками $AC : x + t = 0$ и $BC : x - t = l$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0, 0)$, $B(l, 0)$, и отрезком AB прямой $t = 0$. Пусть $I = \{x : 0 < x < l\}$; $\Theta_0(x)$ — абсциссы точки пересечения характеристики, выходящей из точки $(x, 0)$ с характеристикой AC .

ЗАДАЧА. Найти решение $u(x, y)$ уравнения (1) в области Ω из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup I)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$\partial_{0x}^\delta u[\Theta_0(x)] = \beta(x) u[\Theta_0(x)] + \psi(x), \quad x \in I, \quad (3)$$

где ∂_{0t}^δ — оператор Капуто [1], $\beta(x) \neq 0$ — заданная функция, $0 < \delta < 1$.

Доказана следующая

Теорема. Пусть $\beta(x) \in C[0, l]$, $\tau(x), \psi(x) \in C^1[0, l]$. Тогда задача (2)–(3) для уравнения (1) имеет, и притом единственное, решение.

Литература

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—301 с.

¹Россия, Нальчик, Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ФРАКТАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

О. Х. Масаева¹

Рассмотрим уравнение

$$\Delta_{x,y}^{\alpha,\beta} u(x,y) + c(x,y)u(x,y) = f(x,y), \quad 1 < \alpha, \beta < 2, \quad (1)$$

где

$$\Delta_{x,y}^{\alpha,\beta} \equiv D_{0x}^{\{1,\alpha-1,1\}} + D_{0y}^{\{1,\beta-1,1\}},$$

$D_{0t}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_r\}} = D_{0t}^{\gamma_r-1} D_{0t}^{\gamma_{r-1}} \dots D_{0t}^{\gamma_0}$ — оператор дробного дифференцирования Джрбашяна — Нерсесяна порядка $\gamma = \sum_{k=0}^r \gamma_k - 1$, $\gamma_k \in (0, 1]$, $k = \overline{0, r}$ (см. [1]), $D_{0t}^{\gamma_k}$ — операторы дробного дифференцирования Римана — Лиувилля [2]. Отметим, что $\Delta_{x,y}^{\alpha,\beta}$ при $\alpha = \beta = 2$ обращается в оператор Лапласа $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

В работе [3] методом Радона найдено фундаментальное решение трехмерного уравнения Лапласа дробного порядка и рассмотрены основные граничные задачи для этого уравнения. В работе [4] доказана корректность по Адамару аналога задачи Дирихле для уравнения

$$D_{0y}^{\alpha} u = au_{xx}, \quad a < 0, \quad 1 < \alpha \leq 2,$$

в прямоугольной области.

Первая краевая задача для уравнения (1) с производной Капуто по переменной y при $c(x,y) \equiv 0$, $f(x,y) \equiv 0$, $\alpha = 2$ исследована в работе [5].

В данной работе доказана единственность решения задачи Дирихле для уравнения (1).

Обозначим через Ω область, лежащую в первом квадранте, ограниченную кусочно-гладкой кривой Жордана и обладающую свойством: если точка $(x,y) \in \Omega$, то и прямоугольник $(0,x) \times (0,y) \in \Omega$. Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x,y)$ такую, что $u \in C(\overline{\Omega})$, $D_{0x}^{\{1,\alpha-1,1\}} u, D_{0y}^{\{1,\beta-1,1\}} u \in C(\Omega)$, $D_{0x}^{\alpha-2} u_x, D_{0y}^{\beta-2} u_y \in C(\overline{\Omega})$.

¹Россия, Нальчик, Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.

Задача Дирихле. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u(x, y)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Теорема. Пусть $c(x, y) \in C(\overline{\Omega})$, $c(x, y) \leq \mu_0 < 0$, $f(x, y) \in L^2(\Omega)$. Тогда для регулярного решения задачи (1), (2) справедлива оценка

$$\|u\|_0 \leq \mu \|f\|_0, \quad (3)$$

где μ — некоторая положительная постоянная, зависящая только от μ_0 , $\|\cdot\|_0$ означает норму в пространстве $L^2(\Omega)$.

Следствие. Задача (1), (2) не может иметь более одного регулярного решения.

Литература

1. Джрбашян М. М., Нерсисян А. Б. Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР.—1968.—Т. 3, № 1.—С. 3–28.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
3. Лопушанская Г. П. Основные граничные задачи для одного уравнения в дробных производных // Укр. мат. журн.—1999.—Т. 51, № 1.—С. 48–59.
4. Еремин А. С. Краевые задачи для дифференциального уравнения, содержащего оператор дробного дифференцирования // Междунар. Российско-Казахский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» и Материалы Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики».—Нальчик, 2004.—С. 73–75.
5. Масаева О. Х. Задача Дирихле для фрактального уравнения Лапласа в прямоугольной области // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. АН.—2008.—Т. 10, № 2.—С. 26–29.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ

К. А. Михайлов¹

Данная работа посвящена абсолютно представляющим системам экспонент в пространствах ультрадифференцируемых функций типа Румье. Согласно [1] последовательность элементов $X = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ будем называть абсолютно представляющей системой в локально выпуклом пространстве F , если любой x из F представим в виде суммы ряда $x = \sum_{k=1}^\infty c_k x_k$, абсолютно сходящегося в F к x .

Пусть $\rho \in (0, 1)$, $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок. Для каждой пары m, n и весовой функции $\omega(t) = |t|^{\rho(|t|)}$ положим

$$\mathcal{E}_{m,n}^\omega := \left\{ g \in C^\infty(-1, 1) : \|g\|_{m,n}^\omega := \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0} \sup_{|x| \leq 1-1/m} \frac{|g^{(\alpha)}(x)|}{e^{\frac{1}{n}\varphi_\omega^*(\alpha n)}} < \infty \right\},$$

где $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\varphi_\omega^*(y) := \sup_{x \geq 0} (xy - \varphi_\omega(x))$ — сопряженная по Юнгу с функцией $\varphi_\omega(x) = \omega(e^x)$.

Образует пространство $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(-1, 1) := \text{proj}_m \text{ind}_n \mathcal{E}_{m,n}^\omega$ ультрадифференцируемых на интервале $(-1, 1)$ функций типа Румье, которое по своей топологической структуре является пределом приведенного проективного спектра (DFS) -пространств.

Основной результат работы составляет следующая теорема.

Теорема. Последовательность экспонент $\{e^{-i\lambda x}\}_{\lambda \in \Lambda}$, где $\Lambda = \{\pm \pi k\}_{k=1}^\infty \cup \{\pm i\pi k\}_{k=1}^\infty$, является абсолютно представляющей системой в пространстве $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(-1, 1)$.

Доказательство основано на полученных ранее автором и А. В. Абаниным в работе [2] достаточных условиях того, что данная последовательность элементов является абсолютно представляющей системой в пределе приведенного проективного спектра (DFS) -пространств. При этом используется и частично корректируется схема доказательства теоремы 2 из [3], предложенная А. В. Абаниным для случая обычного порядка.

¹Россия, Шахты, Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса; Владикавказ, Южный математический институт ВНИЦ РАН.

Литература

1. Коробейник Ю. Ф. Об одной двойственной задаче. I. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше // Мат. сб.—1975.—Т. 97, № 2.—С. 193–229.
2. Абанин А. В., Михайлов К. А. Достаточные условия для абсолютно представляющих систем подпространств в (DFS) -спектрах // Исследования по математическому анализу. Сер. Мат. форум / ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев.—Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2009.—Т. 3.—С. 9–21.
3. Абанин А. В., Шершнева О. В. Об одной системе экспонент в пространствах Жеврея // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2001.—№ 3.—С. 3–6.

МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ВИДЕ РЯДА ЛОРАНА И БЕГУЩИХ ВОЛН

О. В. Новикова¹, Т. В. Редькина¹

С помощью метода, предложенного М. Абловиц, Х. Сигур [1] для нелинейного уравнения, полученного в [2], доказаны теорема 1 и теорема 2.

Теорема 1. Уравнение $\bar{p}_t - ip_{xx} + 2ip(p^2 + \bar{p}^2) = 0$ обладает свойством Пенлеве и имеет решение в виде ряда

$$p(x, t) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(t)(x - \varsigma(t))^n + i \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t)(x - \varsigma(t))^n,$$

где $\varsigma(t)$, $b_2(t)$, $a_3(t)$ — произвольные функции; $a_0(t) = b_1(t) = 0$,

$$b_0 = \pm \frac{\varsigma'(t)}{2\sqrt{2}}, \quad a_1(t) = \pm \frac{(\varsigma'(t))^2}{12\sqrt{2}}, \quad a_2(t) = \pm \frac{\varsigma''(t)}{8\sqrt{2}}, \quad b_3(t) = \pm \frac{\varsigma''(t)\varsigma'(t)}{12\sqrt{2}},$$

остальные коэффициенты определяются рекуррентной формулой

$$\begin{aligned} b_{n+2} = \frac{1}{n^2 + 3n} & \left[-a'_n + (n+1)a_{n+1}\varsigma' + 8a_{-1} \sum_{j=0}^{n+1} a_j b_{n+1-j} + \right. \\ & \left. + 4 \sum_{j=0}^n b_j \sum_{k=0}^{n-j} (a_k a_{n-j-k} - b_k b_{n-j-k}) \right], \\ a_{n+2} = \frac{1}{n^2 + 3n - 4} & \left[(n+1)b_{n+1}\varsigma' + 4a_{-1} \sum_{j=0}^{n+1} (3a_j a_{n+1-j} - b_j b_{n+1-j}) + \right. \\ & \left. + 4 \sum_{j=0}^n a_j \sum_{k=0}^{n-j} (a_k a_{n-j-k} - b_k b_{n-j-k}) - b'_n \right]. \end{aligned}$$

План-тезисы доказательства

1. Определение порядка полюса для действительной и мнимой части ($M = 0$ и $N = 1$).

¹Россия, Ставрополь, Ставропольский государственный университет.

2. Определение степеней при которых возникают произвольные функции ($r = 0; 1$).

3. Определение рекуррентной формулы и коэффициентов ряда Лорана.

Теорема 2. Дифференциальное уравнение

$$\bar{p}_t - ip_{xx} + 2ip(p^2 + \bar{p}^2) = 0 \quad (1)$$

имеет частные решения в виде

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \operatorname{sh}(\alpha x - (4 + \alpha^2)t + \delta) + i \operatorname{ch}(\alpha x - (4 + \alpha^2)t + \delta), \\ p(x, t) &= \operatorname{ch}(\alpha x + (4 - \alpha^2)t + \delta) + i \operatorname{sh}(\alpha x + (4 - \alpha^2)t + \delta). \end{aligned}$$

◁ Представив $p = u + iv$, $\bar{p} = u - iv$, где $i^2 = -1$, $u, v \in Re$, и выделив в разложении (1) действительную и мнимую части, получим, что уравнение (1) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} u_t + v_{xx} - 4v(u^2 - v^2) = 0, \\ v_t + u_{xx} - 4u(u^2 - v^2) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим первый случай. Положим $u = \operatorname{sh} f(x, t)$, $v = \operatorname{ch} f(x, t)$. Подставив функции u и v и их частные производные в систему (2), получим

$$\begin{cases} (f'_t + (f'_x)^2 + 4) \operatorname{ch} f + f''_{xx} \operatorname{sh} f = 0, \\ (f'_t + (f'_x)^2 + 4) \operatorname{sh} f + f''_{xx} \operatorname{ch} f = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) совместна, если выполняется условие $f(x, t) = \alpha x + \beta t + \delta$, где $\beta = -4 - \alpha^2$.

Аналогично теорема доказывается и для второго случая ($v = \operatorname{sh} f(x, t)$, $u = \operatorname{ch} f(x, t)$). ▷

Литература

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи.—М.: Мир, 1987.—480 с.
2. Редькина Т. В., Карюк К. И., Лушникова Г. А. Нелинейные уравнения в частных производных, имеющие операторную структуру изоспектральной деформации // Системы обработки информации.—2008.—Вып. 2 (69).—С. 18–28.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ В КЛАССЕ $ВМО$

Ф. Г. Перетятыкин¹

В работе решается краевая задача Римана — Гильберта для уравнения Бельтрами в классе $ВМО$ со свободным членом из $ВМО$.

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг комплексной z -плоскости, $z = x + iy$, $i^2 = -1$, $\Gamma = \partial D$ — граница круга D , $q(z) \in C_\alpha(\overline{D})$, $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим в $\overline{D}$ эллиптическую систему Бельтрами в комплексной записи:

$$\partial_{\bar{z}}\omega + q(z)\partial_z\omega = 0, \quad (1)$$

где $\omega = \omega(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, $\partial_{\bar{z}}\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\partial_z\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ — производные в смысле Соболева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что решение системы удовлетворяет классу $H_p(q)$, $p > 0$, если оно для некоторой положительной постоянной $M_p(\omega) < +\infty$ удовлетворяет условию:

$$\mu(\rho, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\omega(\rho e^{i\sigma})|^p d\sigma \leq M_p(\omega) \\ \forall \rho : 0 \leq \rho < 1, \rho e^{i\sigma} = z \in D.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вещественная функция $\varphi \in L_1(\Gamma)$, $\varphi = \varphi(e^{i\theta}) \equiv \varphi(\theta)$ называется функцией класса $ВМО$, если

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I| d\theta = \|\varphi\|_* < \infty, \quad (2)$$

где $I \subset \Gamma$ — произвольный интервал на Γ , $|I|$ — его длина,

$$\varphi_I = \int_I \varphi d\theta.$$

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что решение $\omega(z)$ системы (1) принадлежит классу $BMO(q)$, если $\omega(z) \in H_2(q)$ и его некасательные предельные значения $\omega(t)$ на Γ принадлежат классу BMO .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $\omega(z) \in BMO(q)$ будем называть решением краевой задачи Римана для уравнения Бельтрами (1), если ее некасательные предельные значения на Γ $\omega^+(t) \equiv \omega(t)$ в области D^+ и $\omega^-(t) \equiv \omega(t)$ в области D^- удовлетворяют на Γ почти всюду краевому условию

$$\omega^+(t) = G\omega^-(t) + g, \quad (3)$$

где $g \in BMO$, $G \in C_\alpha(\Gamma)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Класс функций $\rho(t)$, которые порождают ограниченные операторы

$$T_\varphi = \rho(t) \int_{\Gamma} \rho^{-1}(\tau) \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t}, \quad \varphi \in L_p(\Gamma),$$

в пространстве $L_p(\Gamma)$ будем называть классом A_p , $p > 0$.

Ведем в рассмотрение следующие функции:

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln(\tau^{-\chi G(\tau)})}{\tau - z} d\tau \quad \text{и} \quad X(z) = \begin{cases} X^+(z) = e^{\gamma^+(z)}, \\ X^-(z) = z^{-\chi} e^{\gamma^-(z)}. \end{cases}$$

Известно, что существует по крайней мере один гомеоморфизм $\omega_0(z) = (z + T\varphi)e^{f(z) + T_0\psi - i\beta} = \xi$ уравнения Бельтрами, отображающий единичный круг на себя, удовлетворяющий нормировке $\omega_0(0) = 0$, $\omega_0(1) = 1$, причем

$$\omega = \Phi(\xi(z)) \quad (4)$$

— аналитическая функция, отображающая конформно образ $\omega_0(D)$ области D на круг $|\omega| < 1$.

Тогда краевое условие (3) запишется в виде

$$\Phi^+(\xi) = \tilde{G}(\xi)\Phi^-(\xi) + \tilde{g}(\xi), \quad (5)$$

где Φ — голоморфная функция, $\tilde{G} \in C_\alpha(\tilde{D})$, $\tilde{g} \in BMO$, так как $\tilde{G} = G(\omega^{-1}(\xi))$ — композиция гёльдеровской и голоморфной функций, $\tilde{g}(\xi) = g(\omega^{-1}(\xi))$ — композиция функции BMO и голоморфной.

Таким образом, решение нашей основной задачи Римана свелось к решению задачи Римана (5) для круга в классе H_p со свободным членом из BMO , т. е. $\Phi^\pm \in H_p(D^\pm)$.

Пусть $\chi = \text{Ind } \tilde{G}(\xi)$ — индекс задачи Римана (5). Тогда имеет место следующая

Теорема. В случае $\chi > 0$ краевая задача Римана (5) разрешима, ее решение зависит от χ произвольных комплексных постоянных и имеет вид:

$$\Phi^\pm(\xi) = \frac{X^\pm(\xi)}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{\tilde{g}(\tau) d\tau}{X^+(\tau)(\tau - \xi)} + X^\pm(\xi) P_{\chi-1}(\xi), \quad (6)$$

где $\tilde{\Gamma} = \partial \tilde{D}$,

$$X(\xi) = \begin{cases} X^+(\xi) = e^{\gamma^+(\xi)}; \\ X^-(\xi) = z^{-\chi} e^{\gamma^-(\xi)}, \end{cases} \quad \gamma(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{\ln(\tau^{-\chi} \tilde{G}(\tau))}{\tau - \xi} d\tau,$$

$P_{\chi-1}(\xi)$ — полином степени $\chi - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами.

В случае $\chi < 0$ задача Римана (5) разрешима лишь при выполнении $-\chi$ условий разрешимости:

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \frac{\tilde{g}(t)}{X^+(t)} t^k dt = 0$$

($k = 0, 1, \dots, -\chi - 1$), и имеет единственное решение, получаемое из формулы (6) при

$$P_{\chi-1} \equiv 0. \quad (7)$$

В случае $\chi = 0$ также имеем единственное решение, которое задается формулой (6) при условии (7).

Переходя теперь к функции ω посредством обратного гомеоморфизма, получаем решение краевой задачи Римана для уравнения Бельтрами в классе BMO со свободным членом из BMO .

Литература

1. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений.—Новосибирск: Наука, 1977.—424 с.
2. Каляниченко С. И., Климентов С. Б. Классы Харди решения уравнения Бельтрами // Изв. вузов. Сев-Кавк. регион. Естеств. науки.—2008.—№ 1.—С. 7–10.

СУЩЕСТВОВАНИЕ АБСОЛЮТНО ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ГЛАДКОСТЬЮ

С. В. Петров¹

Обозначим через V семейство всех неубывающих выпуклых на $[0, \infty)$ функций φ , для которых $t = o(\varphi(t))$ при $t \rightarrow \infty$.

Пусть $A^\infty(\overline{D})$ — пространство всех функций, аналитических в ограниченной односвязной области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и бесконечно дифференцируемых вплоть до ее границы ∂D . С каждой функцией φ из V свяжем банахово пространство

$$A_\varphi(\overline{D}) := \left\{ f \in A^\infty(\overline{D}) : \|f\|_\varphi = \sup_{z \in D} \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|f^{(k)}(z)|}{k! e^{\varphi(k)}} < \infty \right\}.$$

Возьмем произвольную последовательность $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty$ функций из V , для которой существуют такие $C_n \geq 0$, что

$$\varphi_{n+1}(t+1) + t \leq \varphi_n(t) + C_n \quad (t \geq 0; n \in \mathbb{N}). \quad (1)$$

Тогда $A_{\varphi_{n+1}}(\overline{D})$ непрерывно вложено в $A_{\varphi_n}(\overline{D})$, и поэтому естественно образовать пространство $A_\Phi(\overline{D}) = \bigcap_{n=1}^\infty A_{\varphi_n}(\overline{D})$ и наделить его топологией, задаваемой набором норм $(\|\cdot\|_{\varphi_n})_{n=1}^\infty$. Из условия (1) следует, что $A_\Phi(\overline{D})$ является (FS) -пространством.

Пространство $A_\Phi(\overline{D})$ занимает промежуточное положение между классическими пространствами $A(D)$ и $A(\overline{D})$ всех функций, аналитических в D и на $\overline{D}$ соответственно. А именно, $A(\overline{D}) \hookrightarrow A_\Phi(\overline{D}) \hookrightarrow A(D)$, где $\hookrightarrow$ — символ непрерывного вложения. Как известно (см., например, [1]), в случае, когда D — выпуклая область, в $A(D)$ и $A(\overline{D})$ существуют абсолютно представляющие системы экспонент $\mathcal{E}_\Lambda := \{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^\infty$, где $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность попарно различных комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности. Основная цель настоящей работы — доказать существование а.п.с. экспонент в пространстве $A_\Phi(\overline{D})$ для любой выпуклой ограниченной области D . В силу отмеченных выше вложений

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

$A(\overline{D}) \hookrightarrow A_{\Phi}(\overline{D}) \hookrightarrow A(D)$ такие системы обладают тем свойством, что мы можем разлагать по ним функции из более широкого, чем $A(\overline{D})$, пространства по более сильной, чем в $A(D)$, топологии.

Решающую роль в исследовании играют результаты Ю. Ф. Коробейника о взаимосвязи между а.п.с. вида $\{f(\lambda_k z)\}_{k=1}^{\infty}$ в пространствах аналитических функций и дискретными слабо достаточными множествами в изоморфной реализации сопряженных пространств [2, теорема К] и О. В. Епифанова о дискретизации слабо достаточных множеств [3], а также установленное ранее А. В. Абаниным и автором удобное для приложений описание сопряженного с $A_{\Phi}(\overline{D})$ пространства [4].

Основной результат работы содержится в следующей теореме.

Теорема. Пусть D — ограниченная выпуклая область комплексной плоскости. Пусть, далее, $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций из V , для которой выполнено (1), и известно, что $\varphi_n(t) = O(t^2)$ при $t \rightarrow \infty$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек из $\mathbb{C}$ такая, что каждую функцию f из $A_{\Phi}(\overline{D})$ можно представить в виде ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k z}$ ($c_k \in \mathbb{C}$), сходящегося абсолютно в $A_{\Phi}(\overline{D})$.

Литература

1. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, вып. 1.—С. 73–126.
2. Коробейник Ю. Ф. Индуктивные и проективные топологии. Достаточные множества и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. Мат.—1986.—Т. 50, № 3.—С. 539–565.
3. Епифанов О. В. Вариации слабо достаточных множеств в пространствах аналитических функций // Изв. вузов. Математика.—1986.—№ 7.—С. 50–56.
4. Абанин А. В., Петров С. В. Пространства аналитических функций с заданной граничной гладкостью и их сопряженные // Исследования по математическому анализу. Сер. Мат. форум / ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев.—Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2008.—Т. 1.—С. 16–23.

ОЦЕНКА ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА ДЛЯ СУММ ФУРЬЕ — ЛАГЕРРА

С. Я. Пирметова^{1, 2}

Будем рассматривать функции вида $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, для которых r -тая производная $f^{(r)}(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$e^{-x/2}|f^{(r)}(x)| \leq 1 \quad (0 \leq x < \infty). \quad (1)$$

Множество всех таких функций мы обозначим через $W^r(0, \infty)$.

Если $f \in W^r(0, \infty)$, то мы можем рассматривать смешанный ряд по полиномам Лагерра, имеющий следующий вид [1]:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} + x^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{r,k}^0}{(k+1)_r} L_k^r(x). \quad (2)$$

Мы рассмотрим частичные суммы следующего вида:

$$\mathcal{L}_{n+r}^0(f, x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} + x^r \sum_{k=0}^n \frac{f_{r,k}^0}{(k+1)_r} L_k^r(x). \quad (3)$$

В настоящей работе исследуется задача о приближении функции f смешанными суммами вида (3).

Введем следующую величину:

$$E_m^r(f) = \inf_{p_m} \max_{x \in [0, \infty)} e^{-x/2} x^{-r/2+1/4} |f(x) - p_m(x)| \quad (4)$$

— наилучшее приближение функции $f(x)$ алгебраическими полиномами степени m в рассматриваемой метрике, удовлетворяющими условиям

$$(p_m(x)) \Big|_{x=0}^{(\nu)} = f^{(\nu)}(0) \quad (0 \leq \nu \leq r-1). \quad (5)$$

Тогда можно установить следующее неравенство:

$$\begin{aligned} e^{-x/2} x^{-(r-m)/2+1/4} \left| f^{(m)}(x) - (\mathcal{L}_{n+r}^0(f, x))^{(m)} \right| &\leq \\ &\leq E_{n+r-m}^{r-m}(f^{(m)}) \left[1 + x^{(r-m)/2+1/4} l_n^{r-m}(x) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

¹Россия, Махачкала, Дагестанский государственный университет.

²Выражаю благодарность своему научному руководителю И. И. Шарипудинову за поставленную задачу, а также за ряд полезных замечаний.

где

$$l_n^r(x) = \int_0^\infty t^{r/2-1/4} e^{-\frac{t+x}{2}} |K_n^r(x, t)| dt.$$

В связи с этим результатом возникает задача об исследовании поведения величины $l_n^r(x)$ при $n \rightarrow \infty$, $s/2 \leq x < 3s/2$. Нами получена следующая оценка.

Теорема. Пусть $s = s_n = 4n + 2r + 2$, $r \geq 1$. Тогда имеет место оценка

$$l_n^r(x) \leq c(r) x^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \left[\ln(n+1) + \left(\frac{x}{s^{\frac{1}{3}} + |x-s|} \right)^{\frac{1}{4}} \right], \quad s/2 \leq x \leq 3s/2.$$

Литература

1. Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения.—Махачкала: Изд-во ДНЦ РАН, 2004.—276 с.

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ КАЛЬДЕРОНА — ЛОЗАНОВСКОГО

Б. Б. Тасоев¹

Рассмотрим конструкцию Кальдерона — Лозановского. Пусть Q — экстремальный компакт, X и Y — идеальные банаховы K -пространства, являющиеся фундаментами в $C_\infty(Q)$. Для $0 < s < 1$ обозначим через $X^{1-s}Y^s$ множество всех таких $z \in C_\infty(Q)$, что

$$|z| \leq \lambda |x|^{1-s} |y|^s$$

для некоторого числа $\lambda > 0$ и каких-нибудь $x \in X$, $y \in Y$ с $\|x\|_X \leq 1$, $\|y\|_Y \leq 1$. Через $\|z\|_{X^{1-s}Y^s}$ будем обозначать инфимум всевозможных λ в последнем неравенстве. Тогда $X^{1-s}Y^s$ с нормой $\|\cdot\|_{X^{1-s}Y^s}$ есть банахово K -пространство и фундамент в $C_\infty(Q)$.

В 1964 г. Лозановским была рассмотрена конструкция функционала $f^{1-s}g^s$, позволяющая описать сопряженное пространство $(X^{1-s}Y^s)^*$. В данной работе приведена аналогичная конструкция оператора $T^{1-s}R^s$, позволяющая описать некоторый класс операторов, действующих из пространства Кальдерона — Лозановского в произвольное K -пространство.

Итак, пусть F — некоторое K -пространство, Q — экстремальный компакт, X и Y — идеальные банаховы K -пространства, являющиеся фундаментами в $C_\infty(Q)$. Возьмем положительные операторы $T \in L(X, F)_+$ и $R \in L(Y, F)_+$. Для $0 < s < 1$ построим оператор $T^{1-s}R^s$, действующий из пространства Кальдерона — Лозановского $X^{1-s}Y^s$ в F . Именно, пусть $z \in X^{1-s}Y^s$. Тогда найдутся $u \in X_+$, $v \in Y_+$ и $\lambda \geq 0$ такие, что $|z| \leq \lambda u^{1-s} v^s$. Обозначим через Q_z носитель функции $z \in C_\infty(Q)$, $C^0(Q_z)$ будет обозначать множество вида $\{z \in C(Q) : z(t) = 0, t \in Q \setminus Q_z\}$. На множестве $C^0(Q_z)$ рассмотрим операторы T_u и R_v , действующие в F по правилу:

$$T_u(w) = T(w \cdot u), \quad R_v(w) = R(w \cdot v) \quad (w \in C^0(Q_z)).$$

Возьмем оператор $\Phi : C^0(Q_z) \rightarrow F$ такой, что $\Phi \geq T_u, R_v$. Обозначим через $Z := C^0(Q_z)$. Имеет место следующая

¹Россия, Владикавказ, Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова.

Теорема 1 [1, с. 183]. Пространство $\{\Phi\}^{\perp\perp} \subset L(Z, F)$ изоморфно идеалу $Z' := \{u \in m\bar{Z} : u \cdot \bar{Z} \subset \bar{Z}\}$. Изоморфизм устанавливается сопоставлением элементу $u \in Z'$ оператора $S_u \in L(Z, F)$ по формуле

$$S_u(w) = \bar{\Phi}(u \cdot \iota w) \quad (w \in Z),$$

где $m\bar{Z}$ — максимальное расширение некоторого K -пространства $\bar{Z}$, ι — вложение Z в $\bar{Z}$, $\bar{\Phi}$ — оператор Магарам (магарамово расширение оператора Φ), действующий из $\bar{Z}$ в F .

Следовательно, для операторов T_u и R_v найдутся единственные элементы α и β из максимального расширения $m\bar{Z}$ такие, что

$$T_u(x) = \bar{\Phi}(\alpha \cdot \iota(w)), \quad R_v(w) = \bar{\Phi}(\beta \cdot \iota(w)) \quad (w \in Z).$$

Положим теперь

$$(T^{1-s}R^s)z := \bar{\Phi}\left(\alpha^{1-s} \cdot \beta^s \cdot \iota\left(\frac{z}{u^{1-s}v^s}\right)\right). \quad (1)$$

Теорема 2. Элемент $(T^{1-s}R^s)z$ не зависит от выбора $u \in X_+$, $v \in Y_+$ и оператора Φ . Тем самым, формула (1) корректно определяет отображение $T^{1-s}R^s$ из $X^{1-s}Y^s$ в F .

Теорема 3. Отображение $T^{1-s}R^s$ является линейным положительным оператором из $X^{1-s}Y^s$ в F .

Литература

1. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—624 с.
2. Лозановский Г. Я. О некоторых банаховых структурах // Сиб. мат. журн.—1969.—Т. 10, № 3.—С. 589–592.

MULTI-NORMS

M. S. Türeci¹

In [2], H. G. Dales and M. E. Polyakov studied Banach lattices as important special examples. As pointed out by A. W. Wickstead in [4], multi-norm theory would be simplified if the following problem has an affirmative answer.

PROBLEM 1. Let E be a Banach lattice with an algebraic direct sum decomposition $E = E_1 \oplus E_2$ and with the property that

$$\| |x_1| \vee |x_2| \| = \|x_1 + x_2\|$$

for all $x_1 \in E_1$ and $x_2 \in E_2$. Is $E_1 \perp E_2$?

It is known [4] that for real scalars this fails: a simple example can be seen by taking $E = \mathbb{R}^2$ with the supremum norm, $E_1 = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$, and $E_2 = \{(y, -y) : y \in \mathbb{R}\}$.

For special Banach lattices there is an affirmative answer in [2]. For $E = C(\Omega)$ the answer is given by combining Example 3.82 and Theorem 7.34 and for the case $E = \ell^p$ the answer can be obtained via Example 3.81 and Example 7.35.

The main goal of this talk is to go through the above-mentioned problem for the case $E = L^p(\mathbb{I})$. In this regard, our main observation is the subject matter of the following example.

EXAMPLE 2. Let $E = L^p(\mathbb{I})$ with $1 \leq p \leq q < \infty$ and let $\{E^n : n \in \mathbb{N}\}$ have the standard (p, q) -multi-norm $(\|\cdot\|_n : n \in \mathbb{N})$.

Let $k \in \mathbb{N}$, and let $S_1, \dots, S_k$ be measurable subsets of $\mathbb{I}$ with $\lambda(S_j) \neq 0$ for $j = 1, \dots, k$, $\bigcup_{j=1}^k S_j = \mathbb{I}$ and $\lambda(S_m \cap S_n) = 0$ for $m, n \in \mathbb{N}_k$ with $m \neq n$. And define,

$$E_j := \{f \in E : \text{supp } f \subseteq S_j\}.$$

Then we have E_j is a band for each $j \in \mathbb{N}_k$, and $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$. Further, since E is Dedekind complete, we have by [1, Theorem 3.8], E_j is a projection band for each $j \in \mathbb{N}_k$.

We first claim that $\{E_1, \dots, E_k\}$ is an orthogonal decomposition of E with respect to the standard (p, q) -multi-norm if and only if $p = q$.

¹Turkey, İstanbul, İstanbul Kültür University.

To see this, first suppose $p = q$ then the fact that the decomposition is orthogonal follows from [2, Equation 3.17].

Now fix $p \geq 1$ and $q \in [p, \infty)$, then take $f_j = m_j \chi_{S_j}$ where $m_j = \left(\frac{1}{\lambda(S_j)}\right)^{1/p}$ for $j \in \mathbb{N}_k$. We have

$$\begin{aligned} \|(f_1, \dots, f_k)\|_k &= (\|f_1\|^q + \dots + \|f_k\|^q)^{1/q} = \\ &= (\text{by [2, Equation 3.16]}) = \left(\sum_{j=1}^k (m_j^p \lambda(S_j))^q\right)^{1/q} = k^{1/q}. \end{aligned}$$

Further, we have

$$\begin{aligned} \|f_1 + \dots + f_k\| &= \left(\int_{[0,1]} |m_1 \chi_{S_1} + \dots + m_k \chi_{S_k}|^p\right)^{1/p} = \\ &= \left(\int_{[0,1]} |m_1 \chi_{S_1}|^p + \dots + \int_{[0,1]} |m_k \chi_{S_k}|^p\right)^{1/p} = \\ &= (\text{since } \lambda(S_m \cap S_n) = 0) = k^{1/p}, \end{aligned}$$

thus $p = q$ as desired.

We next claim that the only possible non-trivial orthogonal decomposition of E have the above form.

Indeed, suppose that $E = E_1 \oplus E_2$ is a non-trivial orthogonal decomposition of E .

Let $f_1 \in E_1$. Suppose $|f| \leq |f_1|$ for $f \in E$. Then we have $\text{supp } f \subseteq \text{supp } f_1$. Define,

$$E_1^{\text{supp}} := \{x \in [0, 1] : x \in \text{supp } f \text{ for some } f \in E_1\}$$

and

$$E_2^{\text{supp}} := \{x \in [0, 1] : x \in \text{supp } f \text{ for some } f \in E_2\}.$$

Consider the constant function $1 \in E$, let P_1 and P_2 be the projections on E_1 and E_2 , respectively. We have $P_1(\mathbf{1})(\mathbb{I}) \subseteq E_1^{\text{supp}}$ and $P_2(\mathbf{1})(\mathbb{I}) \subseteq E_2^{\text{supp}}$, since $E = E_1 \oplus E_2$, we have $E_1^{\text{supp}} \cup E_2^{\text{supp}} = \mathbb{I}$.

Further, let $x \in E_1^{\text{supp}} \cap E_2^{\text{supp}}$ then for all $f_i \in E_i$ we have $|f_i|(x) > 0$ for $i = 1, 2$. Since $E = E_1 \oplus E_2$ is a non-trivial orthogonal decomposition of E , we have $|f_1| \wedge |f_2| = 0$, and so $\lambda(E_1^{\text{supp}} \cap E_2^{\text{supp}}) = 0$.

Since $\text{supp } f \subseteq \text{supp } f_1 \subseteq E_1^{\text{supp}}$, there exists $g \in E_1$ such that $\text{supp } f = \text{supp } g$. Thus $f \in E_1$, so E_1 (similarly E_2) is an ideal of E . So, E_1 and E_2 are bands by [1, Theorem 3.6].

But we know that all bands of E have of the form above (see [3, p. 263]). This gives the second claim.

Finally we conclude that, when $E = L^p(\mathbb{I})$ has the standard (p, q) -multi-norm, if $p \neq q$ then there are no non-trivial orthogonal decomposition of E , and if $p = q$ then the only non-trivial orthogonal decompositions of E are

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k,$$

where $\{E_1, \dots, E_k\}$ as above. Thus regarding $E = L^p(\mathbb{I})$ as a Banach lattice, we have

$$E = E_1 \perp \cdots \perp E_k.$$

If $E = L^p(\mathbb{I})$ has the standard (p, p) -multi-norm, and if $\mathcal{K}$ be the family of all orthogonal decompositions of E , then each member of $\mathcal{K}$ has the above form. Clearly the multi-normed space is orthogonal with respect to the family $\mathcal{K}$. $\triangleright$

Added in proof. We have been informed [5] in the course of presentation of the results of the present paper that Nigel Kalton has solved Problem 1 in its full generality.

References

1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators.—New York: Academic Press, 1985.—xvi+367 p.—(Pure and Appl. Math.; Vol. 119).
2. *Dales H. G., Polyakov M. E.* Multi-normed spaces.—URL: <http://www.amsta.leeds.ac.uk/~pmt6hgd/preprints/AMSmultinorms.pdf>.—(Preprint).
3. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc: Springer-Verlag, 1991.—xvi+395 p.—(Ser. Universitext).
4. *Wickstead A. W.* Open problems // Positivity.—2009.—Vol. 13, № 1.—P. 299–306.
5. *Wickstead A. W.* Private communication.

ОПИСАНИЕ СОПРЯЖЕННОГО К ПРОСТРАНСТВУ ФРЕШЕ
БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ
С ВЕСОВЫМИ ОЦЕНКАМИ ВСЕХ ПРОИЗВОДНЫХ В $\mathbb{R}^N$

Фам Чонг Тиен¹

Задача об удобном для приложений описании пространств бесконечно дифференцируемых функций с весовыми оценками всех производных на прямой или в пространстве ранее рассматривалась Б. А. Тейлором, С. В. Попеновым, И. Х. Мусиным [1]. В докладе будет представлен новый более общий результат в этом направлении.

Пусть $\nu > 1$, $\mu \in (1, \nu]$, $\sigma \in \left[1, \frac{\nu}{\nu-1}\right]$. Обозначим через $\Psi_{\nu, \mu}$ совокупность всех последовательностей $\Psi = (\psi_n)_{n=1}^\infty$ выпуклых функций в $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $\|x\|^\mu = O(\psi_n(x))$ и $\psi_n(x) = O(\|x\|^\nu)$ при $x \rightarrow \infty$ и любом $n \in \mathbb{N}$;

(2) существуют $a > 0$ и $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что $\psi_n(x) - \psi_{n+1}(x) \geq a \log(1 + \|x\|) - b_n$ при любом $x \in \mathbb{R}^N$.

Пусть W — множество всех функций $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ таких, что:

- (α) ω не убывает на $[0, \infty)$, (β) $\omega(1) = 0$,
(γ) $\omega(e^x)$ выпукла на $\mathbb{R}$, (δ) $\log t = o(\omega(t))$, $t \rightarrow \infty$.

Пусть $W_\sigma := \{\omega \in W : \omega(t) = O(t^\sigma), t \rightarrow \infty\}$ и символом $\Omega_\sigma^\dagger$ обозначается множество всех последовательностей $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$ функций из W_σ таких, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists C_n > 0 : \omega_n(t) + \log(1+t) \leq \omega_{n+1}(t) + C_n \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Положим $\varphi_n(t) := \omega_n(e^t)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для $\Omega \in \Omega_\sigma^\dagger$ выполняется условие

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists C_n > 0 : \varphi_n(t) + t \leq \varphi_{n+1}(t) + C_n \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Пусть $\tilde{\psi}(x) := \psi^*(-x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, где ψ^* — сопряженная по Юнгу к функции ψ . Для $\Psi \in \Psi_{\nu, \mu}$ и $\Omega \in \Omega_\sigma^\dagger$ образуем следующие функциональные пространства:

$$G_{(\omega_n)}(\psi_n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \|f\|_n := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^N \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^N}} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{\exp(\varphi_n^*(|\alpha|) + \psi_n(x))} < \infty \right\},$$

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

$$P_{(\omega_n)}(\psi_n) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}^N) : p_n(f) := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(z)|}{\exp\left(\tilde{\psi}_n(\operatorname{Im} z) + \omega_n(\|z\|)\right)} < \infty \right\},$$

$$G_{(\Omega)}(\Psi) := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{(\omega_n)}(\psi_n), \quad P_{(\Omega)}(\Psi) := \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{(\omega_n)}(\psi_n).$$

Отметим, что $G_{(\omega_n)}(\psi_n)$ и $P_{(\omega_n)}(\psi_n)$ — банаховы пространства. Наделим пространство $G_{(\Omega)}(\Psi)$ топологией проективного предела банаховых пространств $G_{(\omega_n)}(\psi_n)$, т. е. топологией, задаваемой семейством норм $(\|\cdot\|_n, n \in \mathbb{N})$, а пространство $P_{(\Omega)}(\Psi)$ — топологией индуктивного предела банаховых пространств $P_{(\omega_n)}(\psi_n)$.

Преобразование Фурье — Лапласа $\hat{T}$ функционала $T \in (G_{(\Omega)}(\Psi))'$ определим по формуле $\hat{T}(z) := T(e^{i\langle \cdot, z \rangle})$, $z \in \mathbb{C}^N$. В настоящей работе доказывается следующий результат.

Теорема 1. *Для любых весовых последовательностей $\Psi \in \Psi_{\nu, \mu}$ и $\Omega \in \Omega_{\sigma}^{\dagger}$ отображение*

$$\mathcal{F} : T \in (G_{(\Omega)}(\Psi))'_b \longmapsto \hat{T}$$

устанавливает топологический изморфизм между пространствами $(G_{(\Omega)}(\Psi))'_b$ и $P_{(\Omega)}(\Psi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что пространства, исследованные в [1] И. Х. Мусиным, являются частными случаями пространств, рассмотренных в настоящей работе.

Литература

1. Мусин И. Х. О преобразовании Фурье — Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^N$ // Мат. сб.— 2004.—Т. 195, № 10.—С. 83–108.

ОПИСАНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ К ПРОСТРАНСТВАМ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

И. А. Филиппев¹

В докладе освещены результаты, которые позволяют с помощью преобразования Фурье — Лапласа функционалов получить естественное описание пространств, сопряженных к пространствам $\mathcal{E}_\Phi(K)$ ультрадифференцируемых на компакте K функций, задаваемым весовой последовательностью Φ . Используемые без дополнительных пояснений обозначения можно найти в [1] (см. также [2]).

Задача об аналитической реализации сопряженного пространства для неквазианалитических и квазианалитических классов $\mathcal{E}_\Phi(K)$ изучалась ранее в работах М. Neumark'a, В. А. Taylor'a, Н. Komatsu, R. Meise, Т. Meyer'a, Т. Rösner'a, И. Х. Мусина, А. В. Абанина и автора. В них в качестве удобной и естественной реализации сопряженного пространства участвуют пространства целых функций $\mathcal{H}_\Phi(K)$. Все упомянутые авторы формулировали некоторые конкретные ограничения на Φ , при которых удается реализовать определенную схему рассуждений и доказать тем самым, что преобразование Фурье — Лапласа $\mathcal{F}$ устанавливает изоморфизм между $(\mathcal{E}_\Phi(K))'_b$ и $\mathcal{H}_\Phi(K)$. В докладе будет показано, что формулируемое ниже свойство регулярности весовых последовательностей является определяющим для двойственности $(\mathcal{E}_\Phi(K))'_b \stackrel{\mathcal{F}}{\simeq} \mathcal{H}_\Phi(K)$. Основополагающими для выделения этого свойства были работы [3, 4] (см. также [5]).

Для выпуклой функции φ и числа $m \in \mathbb{N}_0$ обозначим через $\mathcal{A}_{\varphi,m}(K)$ линейное пространство всех целых в $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ функций $G(z, \zeta)$, удовлетворяющих при некотором $C = C(G) > 0$ оценке

$$|G(z, \zeta)| \leq C(1 + \|z\|)^m e^{h_K(\operatorname{Im} z) + \varphi(\ln^+ |\zeta|)}, \quad z, \zeta \in \mathbb{C}^N.$$

Для возрастающей (убывающей) последовательности выпуклых функций $\Phi := \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ положим

$$\mathcal{A}_{(\Phi)}(K) := \bigcup_{m=0}^\infty \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{A}_{\varphi_n,m}(K)$$

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

(соответственно

$$\mathcal{A}_{\{\Phi\}}(K) := \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\varphi_n, m}(K).$$

Последовательность Φ будем называть *регулярной относительно выпуклого компакта K* , если:

1) для любой функции $g \in \mathcal{H}_{\Phi}(K)$ найдется функция $G \in \mathcal{A}_{\Phi}(K)$, для которой равенство $G(z, z) = g(z)$ верно всюду в $\mathbb{C}^N$;

2) для любой функции $G \in \mathcal{A}_{\Phi}(K)$, которая удовлетворяет условию $G(z, z) = 0$ ($z \in \mathbb{C}^N$), найдутся функции $G_j \in \mathcal{A}_{\Phi}(K)$, для которых всюду в $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ верно равенство $G(z, w) = \sum_{j=1}^N (z_j - w_j)G_j(z, w)$.

Следующая теорема показывает, что при некоторых либеральных ограничениях на весовую последовательность ее регулярность достаточна для двойственности $(\mathcal{E}_{\Phi}(K))'_b \stackrel{\mathcal{F}}{\simeq} \mathcal{H}_{\Phi}(K)$.

Теорема 1. Пусть K — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^N$; Φ — весовая последовательность из $W_{\uparrow}$ или $W_{\downarrow}$, для которой при каждом $n \in \mathbb{N}$ и некоторых постоянных A_n

$$|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \geq \|t\| + A_n \quad \forall t \in [0, \infty)^N$$

и

$$\sum_{\alpha} e^{-|\varphi_{n+1}^*(t) - \varphi_n^*(t)|} < \infty.$$

Если Φ регулярна относительно K , то преобразование Фурье — Лапласа функционалов устанавливает линейный топологический изоморфизм между $(\mathcal{E}_{\Phi}(K))'_b$ и $\mathcal{H}_{\Phi}(K)$.

Литература

1. Абанин А. В., Филиппев И. А. Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространствам бесконечно дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 3.—С. 485–500.
2. Абанин А. В. Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения.— М.: Наука, 2007.—222 с.
3. Neymark M. On the Laplace transform of functionals on classes of infinitely differentiable functions // Ark. Mat.—1968.—Band 7, № 44.—P. 577–594.
4. Taylor B. A. Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions // Comm. Pure Appl. Math.—1971.—Vol. 24.—P. 39–51.
5. Напалков В. В. Преобразование Лапласа и продолжение аналитических функций // Исследования по теории приближений: Сборник статей.—Уфа, 1989.—С. 86–91.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ

Ф. Г. Хуштова¹

В области $\Omega = \{(x, y) : \alpha < x < \beta, 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - p \frac{\partial u}{\partial x} + qu = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (1)$$

где

$$\bar{u}(y) = -\frac{1}{\alpha} \int_{\alpha}^0 u(x, y) dx + \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} u(x, y) dx \quad (2)$$

— сумма средних значений функции $u = u(x, y)$ по переменной x на сегментах $[\alpha; 0]$ и $[0; \beta]$ в момент времени y ; $p, q = \text{const}$, $0 \leq p < 1$, $q > 0$, $\alpha < 0$, $\beta > 0$.

Уравнение (1) в области Ω является уравнением со знакопеременной характеристической формой [1, с. 69].

В работе [2] предложен метод приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений, основанный на редукции к нагруженным уравнениям. В работе [3] решена задача Коши со смешанным негладким носителем для уравнения $u_{xx} + \omega^2 u = \delta'(y)$, где $\delta(y) = \frac{1}{l} \int_0^l u(x, y) dx$, $\omega = \text{const}$.

Уравнение вида (1) при $p = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ рассматривалось в работе [4].

Обозначим через $\Omega^+ = \Omega \cap \{x > 0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{x < 0\}$,

$$u(x, y) \equiv \begin{cases} u^+(x, y), & (x, y) \in \Omega^+; \\ u^-(x, y), & (x, y) \in \Omega^-, \end{cases}$$

$$\delta_1(y) = -\frac{1}{\alpha} \int_{\alpha}^0 u^-(x, y) dx, \quad \delta_2(y) = \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} u^+(x, y) dx.$$

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x, y)$ такую, что $u \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx} \in C(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, $\delta_1(y), \delta_2(y) \in$

¹Россия, Нальчик, Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.

$C^1(0, T)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках (x, y) области Ω , и для которой справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-p} [u_x^+(\varepsilon, y) - u_x^-(-\varepsilon, y)] = 0, \quad \varepsilon > 0, \quad 0 < y < T. \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u^-(\alpha, y) = \varphi_1(y), \quad u^+(\beta, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (4)$$

$$\delta_1(T) = \delta_T, \quad \delta_2(0) = \delta_0, \quad (5)$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ — заданные функции, $\delta_0, \delta_T = \text{const}$.

Вопрос существования и единственности решения задачи (1), (4), (5) эквивалентным образом редуцируется к вопросу существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение поставленной задачи выписывается в явном виде.

Литература

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—301 с.
2. Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения.—1982.—Т. 18, № 1.—С. 72–81.
3. Карданов Р. Г., Нахушев А. М. Об одном методе регуляризации задачи Коши со смешанным негладким носителем для уравнения параболического типа // Математические методы в мелиорации. Межвузовский сб.—Нальчик, 1981.—С. 126–130.
4. Токова А. А. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения со знакопеременной характеристической формой // Материалы Международ. Российско-Абхазского симпозиума «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы анализа и информатики».—Нальчик, 2009.—С. 217–218.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КONTИНУАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ¹

Б. И. Эфендиев²

Рассмотрим уравнение

$$u''(x) + \lambda D_{0x}^{[\alpha, \beta]} u(x) = f(x), \quad (1)$$

где $D_{0x}^{[\alpha, \beta]}$ — оператор интегро-дифференцирования континуального порядка $[\alpha, \beta]$ (см. [1, с. 33]); $\alpha, \beta, \lambda — \text{const}, 0 \leq \alpha < \beta < 1, 0 < x < l$.

В работах [2, 3] решены задачи Дирихле и Неймана для уравнения (1), для которых построены соответствующие функции Грина. В работе [4] выписано решение задачи Коши для уравнения (1).

В данной работе построено решение нелокальной задачи для уравнения (1). Найдены условия однозначной разрешимости исследуемой задачи.

Обозначим через

$$G(x) \equiv G(x; \lambda, \alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \nu_n(x),$$

$$\nu_0(x) = x, \quad \nu_n(x) = \int_0^x \nu_{n-1}(x-t) \frac{1}{t} Vi(2-\beta, 2-\alpha, t) dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$Vi(\gamma, \delta, x) = \int_{\gamma}^{\delta} \frac{x^s}{\Gamma(s)} ds, \quad x \geq 0, \quad 0 \leq \gamma \leq \delta,$$

$\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера,

$$\mathcal{G}(x, t) = H(x-t)G(x-t) + \frac{G'(x)G'(l-t)}{1/\mu - G''(l)},$$

$H(x)$ — функция Хевисайда.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-96510.

²Россия, Нальчик, Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Регулярным решением уравнения (1) в интервале $]0, l[$ назовем функцию $u = u(x)$, принадлежащую классу $C[0, l] \cap C^2]0, l[$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $x \in]0, l[$.

ЗАДАЧА. Найти регулярное решение $u = u(x)$ уравнения (1) в интервале $]0, l[$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u'(0) = u_0, \quad u(0) = \mu u'(l), \quad (2)$$

где $u_0, \mu = \text{const}$.

Теорема. Пусть $f(x) \in L]0, l[\cap C]0, l[$ и выполнено условие $G''(l) \neq 1/\mu$. Тогда регулярное решение задачи (2) для уравнения (1) определяется формулой

$$u(x) = u_0 \mathcal{G}(x, 0) + \int_0^l \mathcal{G}(x, t) f(t) dt.$$

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. Эфендиев Б. И. Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной // Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. АН.—2005.—Т. 8, № 1.—С. 99–103.
3. Эфендиев Б. И. Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной // Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. АН.—2006.—Т. 8, № 2.—С. 97–99.
4. Эфендиев Б. И. Задача Коши и задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной // Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. АН.—2008.—Т. 10, № 1.—С. 83–84.

Секция II

Математическое моделирование

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАВОДКОВЫХ ПРОЦЕССОВ

М. А. Багов¹

Надо подчеркнуть, что изучение стихийных процессов, возникающих при формировании речного стока (селей, паводков), всегда относилось к наиболее интенсивно развивающимся научным направлениям. Главной особенностью подобных процессов является внезапность появления и относительная кратковременность действия. Как правило, в зону поражения попадают промышленные и социальные объекты, нередко большие разрушения связаны с человеческими жертвами. Несмотря на значительное число проведенных исследований в области моделирования паводковых процессов, можно констатировать существенный разрыв между достижениями физико-математического моделирования, позволяющего достаточно адекватно описывать паводковые процессы, и применяемыми на практике методами, большинство из которых основано на статистической обработке громадного объема метеорологических и гидрологических данных.

Если говорить о синтезе математического и компьютерного моделирования, необходимо подчеркнуть, что на сегодняшний день разработано достаточное количество программных продуктов, выступающих в качестве программных модулей при решении задач, связанных с моделированием паводковых явлений. Среди таких программных продуктов выделяются: ArcGIS, FlowVision, ГРИС, RIVER, FLOOD, АКВАРИУС и т. д. Как правило, программные продукты и экспериментальные данные такого рода имеют высокую стоимость и находятся в ведении скорее коммерческих организаций, чем научных институтов [1]. Отсутствие эффективной координации приводит к недоступности новых разработок для большинства организаций, занимающихся исследованиями в рассматриваемой области.

При моделировании речных русел важно адекватно выбрать исходные уравнения движения, которые диктуются гидрологическими характеристиками реки. К сожалению, потоки в незарегулированных реках по большей части криволинейны, поскольку русла меандрируют. Бассейн реки, как правило, имеет сложные очертания, он

¹Россия, Нальчик, Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.

расширяется и сужается бессистемно, имеет понижения и т. д. [2]. При паводке примыкающая к руслу пойменная долина затопляется так, как диктует топография. Помимо сказанного необходимо также учитывать влияние различных гидрологических сооружений, таких как плотины, противоселевые лотки, водозаборы для оросительных систем и т. д. В таких условиях невозможно описать движение воды во всей русловой сети на основе лишь одной системы уравнений.

Целью предлагаемой вниманию работы является создание более доступного с финансовой точки зрения и конкурентоспособного программного обеспечения для проектных организаций, МЧС, государственных организаций, принимающих решение о мероприятиях, направленных на предотвращение и ликвидацию последствий экстремальных природных явлений.

Разработана база данных морфологических характеристик бассейна реки Баксан, включающая в себя данные о рельефе и произошедших экстремальных явлениях. Предложена схема разбиения разветвленной русловой системы (включая притоки и ответвления) на основе модифицированной камерной модели реки. Русло реки представляется в виде графа вершины и ребра, который образуют расчетные ячейки, в центре которых определяются уровни воды, для каждой ячейки записывается уравнение неразрывности, расход определяется на ребрах графа в соответствии с динамическим уравнением движения.

Река представляет из себя сложную разветвленную сеть (со сложной геометрией), в которой присутствуют различные гидрологические сооружения. В процессе построения компьютерной модели реки предлагается осуществлять дополнительное разбиение реки на отдельные сегменты. Разбиение осуществляется на основе заложенных в базу данных географических характеристик реки (уклон, скорость течения, рельеф и т. д.) и прилегающей поймы, а также с учетом наличия гидрологических сооружений на участке.

Литература

1. Виноградов Ю. Б. Математическое моделирование процессов формирования стока.—Л.: Гидрометеиздат, 1988.—312 с.
2. Кюнж Ж. А., Холли Ф. М., Вервей А. Численные методы в задачах речной гидравлики.—М.: Энергоатомиздат, 1985.—250 с.

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА
ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО
ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ
В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ С КРАЕВЫМИ
УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО РОДА

А. К. Баззаев¹

В цилиндре $Q_T = G \times (0, T]$, основанием которого служит p -мерный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_\beta < \ell_\beta, \beta = \overline{1, p}\}$ с границей Γ , рассмотрим задачу:

$$\partial_{0t}^\alpha u = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u|_\Gamma = \mu(x, t), \quad t \geq 0, \quad \overline{G} = G + \Gamma, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad (3)$$

$$Lu = \sum_{\beta=1}^p L_\beta u, \quad L_\beta u = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(k_\beta(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) + r_\beta(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} - q_\beta(x, t) u,$$

$$0 < c_1 \leq k_\beta(x, t) \leq c_2, \quad 0 \leq q_\beta(x, t) \leq c_3, \quad |r_\beta(x, t)| \leq c_4,$$

$$\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0, T], \quad \overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 \leq x_\beta \leq \ell_\beta, \beta = \overline{1, p}\},$$

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{u}(x, \eta)}{(t-\eta)^\alpha} d\eta, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \text{— дробная производная по Капуто порядка } \alpha, \quad \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_β с шагом $h_\beta = \ell_\beta / N_\beta, \beta = \overline{1, p}$:

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_\beta^{(i_\beta)} = i_\beta h_\beta : i_\beta = 0, 1, \dots, N_\beta, h_\beta = \ell_\beta / N_\beta, \beta = \overline{1, p} \right\}.$$

На отрезке $[0, T]$ введем сетку

$$\overline{\omega}'_\tau = \left\{ 0, t_{j+\frac{\beta}{p}} = \left(j + \frac{\beta}{p} \right) \tau, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1; \beta = 1, 2, \dots, p \right\},$$

содержащую наряду с узлами $t_j = j\tau$ фиктивные узлы $t_{j+\frac{\beta}{p}}, \beta = 1, 2, \dots, p-1$; ω'_τ — множество узлов сетки $\overline{\omega}'_\tau$, для которых $t > 0$.

¹Россия, Владикавказ, Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова.

Для задачи (1)–(3) строим цепочку p одномерных разностных уравнений

$$\frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+\beta} \left(t_{j+\frac{\beta-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{\beta-s}{p}}^{1-\alpha} \right) y_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} =$$

$$= \tilde{\Lambda}_{\beta} y^{j+\frac{\beta}{p}} + \varphi_{\beta}^{j+\frac{\beta}{p}}, \quad x \in \omega_h, \quad (4)$$

$$\tilde{\Lambda}_{\beta} y = \kappa_{\beta} \left(a_{\beta} y_{\bar{x}_{\beta}}^{j+\frac{\beta}{p}} \right)_{x_{\beta}} + b_{\beta,i}^{+} a_{\beta}^{(+1)} y_{x_{\beta}}^{j+\frac{\beta}{p}} +$$

$$+ b_{\beta,i}^{-} a_{\beta} y_{\bar{x}_{\beta}}^{j+\frac{\beta}{p}} - d_{\beta} y^{j+\frac{\beta}{p}}, \quad \beta = \overline{1, p},$$

$$y^{j+\frac{\beta}{p}} \Big|_{\gamma_{h,\beta}} = \mu^{j+\frac{\beta}{p}}, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad (5)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad \beta = \overline{1, p}, \quad (6)$$

где

$$\bar{t} = t_{j+1/2}, \quad a_{\beta} = A_{\beta}[a_{\beta}(x_{\beta} + i_{\beta} h_{\beta}, \bar{t})], \quad d_{\beta} = F_{\beta}[q_{\beta}(x_{\beta} + i_{\beta} h_{\beta}, \bar{t})],$$

$$b_{\beta}^{\pm} = F_{\beta} \left[\hat{r}_{\beta}^{\pm}(x_{\beta} + i_{\beta} h_{\beta}, \bar{t}) \right], \quad a_{\beta}^{(+1\beta)} = a_{\beta}(x_{\beta} + i_{\beta} h_{\beta}, \bar{t}),$$

$$\hat{r}_{\beta}^{\pm} = \frac{r_{\beta}^{\pm}}{k_{\beta}}, \quad r_{\beta}^{+} = 0, 5(r_{\beta} + |r_{\beta}|) \geq 0, \quad r_{\beta}^{-} = 0, 5(r_{\beta} - |r_{\beta}|) \leq 0,$$

A_{β} и F_{β} — шаблонные функционалы, используемые для вычисления коэффициентов d_{β} и φ_{β} и обеспечивающие второй порядок аппроксимации. Например, можно положить $b_{\beta}^{\pm} = r_{\beta}^{\pm}/k_{\beta}$.

Для решения разностной задачи (4)–(6) с помощью принципа максимума [1] получена априорная оценка, из которой следует сходимость разностной схемы при условии $1/2 < \alpha \leq 1$.

Литература

1. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656 с.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА

С. М. Бекулова¹

Рассмотрим уравнение влагопереноса

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} + u_x = 0 \quad (1)$$

в конечной области Ω , ограниченной характеристиками $AC : x - \frac{1}{2}y^2 = 0$, $BC : x + \frac{1}{2}y^2 = 1$, $AD : x - \frac{1}{2}(-y)^2 = 0$, $BD : x + \frac{1}{2}(-y)^2 = 1$ уравнения (1).

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$, J — интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

ЗАДАЧА. Найти решение $u(x, y)$ уравнения (1) в области Ω из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega_1 \cup J) \cap C^1(\Omega_2 \cup J) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} a_1(x) D_{0x}^{\frac{1}{2}} u_1 [\theta_0^1(x)] + b_1(x) u_y(x, 0) &= c_1(x) \quad \forall x \in \bar{J}, \\ a_2(x) x^{-\frac{1}{2}} u_2 [\theta_0^2(x)] + b_2(x) D_{0x}^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} u_2 [\theta_1^2(x)] &= c_2(x), \end{aligned}$$

и условию сопряжения

$$u_{1y}(x, 0) = \alpha(x) u_{2y}(x, 0) + \beta(x),$$

где $a_i(x)$, $b_i(x)$, $c_i(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — заданные функции, причем $a_i^2(x) + b_i^2(x) \neq 0$, $a_i(x)$, $b_i(x)$, $c_i(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^3(J)$, $i = 1, 2$; $\theta_0^i(x)$ — аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0)$, с характеристиками AC , AD ; $\theta_1^2(x)$ — аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x, 0)$ с характеристикой BD ; D_{ax}^α — операторы дробного в смысле Римана — Лиувилля интегрирования порядка $|\alpha|$ с началом в точке a , определяемые по формулам [1]

$$D_{ax}^\alpha = \begin{cases} \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \varphi(x), & \alpha = 0, \\ \text{sign}(x-a) \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1}, & \alpha > 0, \end{cases}$$

¹Россия, Нальчик, Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.

Задача относится к классу краевых задач со смещением [1, 2]. Методом интегралов энергии доказана теорема единственности поставленной задачи. Методом интегральных уравнений вопрос существования решения задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости сингулярного интегрального уравнения относительно производной от следа искомого решения. Выписано условие нормальной разрешимости полученного уравнения, которое гарантирует приведение его к уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого заключается из единственности решения задачи.

Литература

1. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных.—М.: Наука, 2006.—287 с.
2. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения.—1969.—Т. 5, № 1.—С. 101–110.

УВЕЛИЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

З. В. Бесаева¹

Рассмотрим задачу увеличения точности квадратурной формулы с равноотстоящими узлами для сингулярных интегралов на отрезке $[a, b]$ вида:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0} dx = \sum_{k=1}^n A_k(x_0) f(x_k) + R(f; x_0),$$

$$R(f; x_0) = \int_a^b \frac{w(x) f^{(n)}(\xi)}{n!} dx. \quad (1)$$

Для этого функцию f представим следующей формулой Тейлора:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i + \int_a^x f^{(m)}(t) \frac{(x - t)^{m-1}}{(m-1)!} dt =$$

$$= P_{m-1}(x) + \int_a^b f^{(m)}(t) E(x - t) \frac{(x - t)^{m-1}}{(m-1)!} dt.$$

Подставим выражение $f(x)$ в (1) и, так как $R(P_{m-1}) = 0$, то $R(f)$ будет совпадать с остатком квадратуры интеграла в последнем равенстве:

$$R(f; x_0) = \int_a^b f^{(m)}(t) \left[\int_a^b \frac{E(x - t)}{(x - x_0)} \frac{(x - t)^{m-1}}{(m-1)!} dx - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^n A_k(x_0) E(x_k - t) \frac{(x_k - t)^{m-1}}{(m-1)!} \right] dt.$$

¹Республика Южная Осетия, Цхинвал, Юго-Осетинский государственный университет.

Далее, по методу Эйлера выделяем главную часть от остатка $R_n(f; x_0)$ [1]:

$$R(f; x_0) = C_0(x_0) \int_a^b f^{(m)}(t) dt + \int_a^b f^{(m)}(t) [K(t, x_0) - C(x_0)] dt.$$

В результате мы получим следующую более точную квадратурную формулу

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0} dx &= \sum_{k=1}^n A_k(x_0) f(x_k) + \\ &+ (b-a)^{-1} \int_a^b K(t, x_0) dt [f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)] + \\ &+ \sum_{i=1}^{s-1} \frac{(b-a)^{i-1}}{i!} \int_a^b K(t, x_0) B_i\left(\frac{t-a}{b-a}\right) dt [f^{(m+i-1)}(b) - f^{(m+i-1)}(a)] - \\ &- \frac{(b-a)^{s-1}}{s!} \int_a^b K(t, x_0) \int_a^b f^{(m+s)}(x) \left[B_s^*\left(\frac{t-x}{b-a}\right) - B_s^*\left(\frac{t-a}{b-a}\right) \right] dt dx. \end{aligned}$$

Таким образом, точность квадратурной формулы (1) повысилась от степени точности m до $m + s$.

Литература

1. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов.—М.: Наука, 1967.—500 с.
2. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО «Янус», 1995.—520 с.
3. Хубежты Ш. С. О квадратурных формулах для сингулярных интегралов // Владикавк. мат. журн.—2001.—Т. 3.—С. 49–57.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ С УЧЕТОМ МИГРАЦИИ

А. В. Будянский¹

Для изучения сосуществования близких режимов в биологических системах полезным оказывается подход, основанный на рассмотрении косимметрии задачи [1], которая может приводить к появлению семейств стационарных решений. Для системы уравнений $\dot{Y} = F(Y)$ в гильбертовом пространстве H косимметрия представляет собой нетривиальный оператор L , который ортогонален F в каждой точке фазового пространства.

Рассматривается модель взаимодействия двух популяций в виде системы двух уравнений параболического типа:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial q_1}{\partial x} + f_1, & q_1 &= -\varepsilon_1(u, v)\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_1 u \frac{\partial p}{\partial x} + \beta_1 u \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial q_2}{\partial x} + f_2, & q_2 &= -\varepsilon_2(u, v)\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_2 v \frac{\partial p}{\partial x} + \beta_2 v \frac{\partial u}{\partial x}.\end{aligned}$$

Здесь $u(x, t)$, $v(x, t)$ — плотности популяций, q_1 , q_2 — миграционные потоки. Естественный прирост плотности популяций задается «логистическим» законом: $f_1 = \mu_1 u f_0$, $f_2 = \mu_2 v f_0$, $f_0 = \left(1 - \frac{u+v}{p}\right)$, где μ_1 , μ_2 — параметры роста популяций. Функция $p(x)$ определяет предельную плотность популяций. Диффузионные коэффициенты зависят от плотностей популяций:

$$\varepsilon_1(u, v) = k_1 + \gamma_1 g(u, v), \quad \varepsilon_2(u, v) = k_2 + \gamma_2 g(u, v).$$

Коэффициенты k_1 , k_2 , γ_1 , γ_2 являются константами. Учет миграции, вызванной неравномерностью жизненных условий [2] и неравномерностью распределения популяции-соседа, производится слагаемыми с параметрами α_1 , α_2 , β_1 , β_2 .

Краевые и начальные условия выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= v(x, t) = 0, & x &\in \partial\Omega, \\ u(x, 0) &= u^0(x), & v(x, 0) &= v^0(x).\end{aligned}$$

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

Система обладает линейной косимметрией вида $L = (\xi_1 v, -\xi_2 u)^T$ с параметрами ξ_1 и ξ_2 , если $k_1 \xi_1 = k_2 \xi_2$, $\gamma_1 \xi_1 = \gamma_2 \xi_2$, $\mu_1 \xi_1 = \mu_2 \xi_2$ и коэффициенты α_1 , α_2 , β_1 , β_2 равны нулю. Для численного исследования применяется метод конечных разностей, а для интегрирования по времени — метод Рунге — Кутты четвертого порядка. В ходе вычислительного эксперимента было изучено формирование распределений популяций. В таблице 1 приведены данные для некоторых расчетов (значения параметров, финальные значения средних популяций, элементы спектра, наиболее близкие к мнимой оси). Рассчитанный спектр устойчивости показывает, что при различных коэффициентах миграции происходит выход на устойчивые стационарные распределения.

Таблица 1

Финальные средние плотности популяций и спектр устойчивости

α_1	α_2	β_1	β_2	U_{mid}	V_{mid}	Спектр		
0	0	0	0	0,38	0,18	$-2,2 \cdot 10^{-6}$	-0,07	-0,92
0,15	0,01	0	0	0,29	0,27	-0,12	-0,21	-0,81
0	0	-0,06	-0,06	0,40	0,16	-0,01	-0,23	-0,69
0,15	0,01	-0,06	-0,06	0,38	0,18	-0,18	-0,39	-0,58

Литература

1. Юдович В. И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки.—1991.—Т. 49, № 5.—С. 142–148.
2. Murray J. D. Mathematical biology. II. Spatial models and biomedical applications. 3rd ed.—New York: Springer-Verlag, 2003.—xxvi+811 p.—(Interdisciplinary Appl. Math.; Vol. 18).

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИИ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ ФАЗИРОВАННЫХ РЕШЕТОК ДЛЯ ФОКУСИРУЮЩИХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ^{1, 2}

Т. В. Домашенкина³

Хирургическая техника, которая в перспективе могла бы заменить традиционный скальпель, должна обеспечивать воспроизводимость и управляемость разрушения тканей, воздействовать только на четко ограниченную область, быть быстродействующей и вызывать минимальную потерю крови. Фокусированный ультразвук высокой интенсивности обладает большинством из этих качеств. Фокусирование ультразвука может быть достигнуто несколькими способами, но самый простой из них — это использование преобразователя, излучающая поверхность которого по форме представляет собой вогнутую сферическую оболочку, изготовленную из пьезоэлектрического материала. Фокус такого излучателя лежит на его оси и располагается вблизи центра кривизны оболочки. Хотя таким образом можно нагревать области с четко очерченными границами, регулировать радиус зоны поражения в этом случае оказывается непросто. Появление технологии фазированных решеток в различных применениях мощного ультразвука привело к разработке преобразователей, которые позволяли электронным образом сканировать ультразвуковой пучок и, таким образом, нагревать большие, в сравнении с локализованной фокальной областью, объемы ткани. Существенно расширяются возможности формирования пучков, если контролируемым образом изменять фазовые соотношения в пределах активной поверхности преобразователя. Практически этого можно добиться, если разбить поверхность преобразователя на ряд отдельных элементов и ввести относительные фазовые сдвиги между электрическими сигналами, подаваемыми или снимаемыми с этих элементов (фазированная решетка преобразователей).

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-00875, и Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № П401.

²Автор выражает благодарность А. В. Наседкину и А. Н. Рыбянцу за постановку задачи и внимание к работе.

³Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

В настоящей работе представлена модель фокусирующего пьезо-преобразователя с фазированными решетками в виде секторов. На сектора подается сигнал с различным взаимным сдвигом во времени, в результате чего изменяется форма ультразвукового луча. Такая конструкция позволяет формировать различные дискретные фокальные структуры ультразвукового поля. Каждый сектор пьезо-электрического преобразователя поляризован по толщине и покрыт специальным образом секционированными электродами. В качестве метода моделирования был использован метод конечных элементов для связанного пьезоэлектрического-акустического анализа. Для исследования пьезоизлучателя был создан комплекс программ для конечно-элементного пакета ANSYS на языке APDL ANSYS. Разработанные программы предназначены для построения трехмерных геометрических и конечно-элементных моделей, расчета частот толщинных электрических резонансов и антирезонансов, амплитудно-частотных характеристик, полей перемещений, деформаций, напряжений в преобразователе, а также акустического давления в окружающей преобразователь жидкой среде.

В результате серии конечно-элементных расчетов были определены все искомые характеристики исследуемого ультразвукового пьезоизлучателя и дано их сравнение с полученными ранее для аналогичного фокусирующего преобразователя, но со сплошным электродным покрытием [1, 2]. Показано, что многоэлектродность покрытия рассмотренной пьезокерамической полусферы позволяет управлять видом фокальной зоны рабочей акустической среды и, таким образом, повысить эффективность пьезоизлучателя мощного ультразвука.

Литература

1. Наседкин А. В., Рыбьянец А. Н. Конечно-элементный расчет в ANSYS акустического пучка, генерируемого сферическим фокусирующим пьезоизлучателем // Сб. тр. II конф. пользователей программного обеспечения CAD-FEM GmbH / под ред. А. С. Шадского.—М.: Изд-во «Барс», 2002.—С. 312–317.
2. Домашенкина Т. В. Конечно-элементное моделирование фокусирующего ультразвукового пьезопреобразователя // Тр. XI Межд. симп. «Порядок, беспорядок и свойства оксидов».—Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, 2008.—С. 136–139.

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ РАСТВОРЁННЫХ В ПОДЛЁДНОЙ ВОДЕ СОЕДИНЕНИЙ СЕРЫ НА ПРИЧИНЫ СХОДА ЛЕДНИКА КОЛКА

А. Г. Зарини¹

Катастрофический сход ледника Колка в сентябре 2002 г. вызвал интерес в научной среде к проблеме пульсирующих ледников и факторам, описывающим процесс схода ледовой массы. Существует несколько гипотез, описывающих механизм схода ледника. В пользу значительной роли растворенных газов в динамике подвижки ледника говорит наличие остаточных газовых фумарол в тыльной части ложа ледника наблюдавшихся в течении первых суток после схода, наличие значительных (в тысячи раз превосходящих фоновые) концентраций сульфат ионов в водах реки Колка и озере образовавшемся на месте ледника.

Рассмотрим возможную роль газов в динамике температуры и давления в области подлёдной водяной прослойки. Наличие огромного содержания сульфат-ионов, растворенных в воде свидетельствует о поступлении большого количества сернистого ангидрида в подледную область в течении продолжительного времени. Согласно экспериментальным данным [1, 2] при растворении сернистого ангидрида в воде образуются соединения гидрата двуокиси серы, который с течением времени окисляется до серной кислоты. Если принять во внимание оценку Л. В. Десинова о толщине льда в тыльной части ледника около 30 м [3], то подлёдная область оказывается под давлением 3,84 атм. Однако для прорыва растворенных газов во внешнюю среду потребовались бы концентрации сернистых соединений, растворенных в воде, близкие к предельным при значительных температурах. Согласно данным [4] давление насыщенного пара даже над жидким сернистым ангидридом достигает указанных величин только при 25° С. Кроме того, необходимо учитывать, что водный раствор, содержащий растворенный сернистый ангидрид в концентрации свыше 8,2 весовых процентов, кристаллизуется при положительных температурах. При этом выход сернистого ангидрида в газовую фазу сопровождается неизбежным охлаждением, что привело бы к замерзанию подлёдной водяной прослойки. Таким

¹Россия, Владикавказ, Южный математический институт ВНИЦ РАН.

образом, возможность прорыва растворенного газа во внешнюю среду даже в тыльной части ледника представляется сомнительной. По мнению В. М. Котлякова [5], в результате необычно высокой сейсмической активности летом 2002 г. концентрация растворённых в подледном водном слое сернистых соединений достигла столь высоких значений, что тепло, выделяемое при химических реакциях, привело к значительному подтаиванию нижней части ледника и отрыву его от ложа с последующим скольжением на водяной подушке под влиянием силы тяжести. В процессе растворения сернистого ангидрида в воде протекают три реакции:

- 1) растворение сернистого ангидрида в воде с образованием соединений сернистой кислоты;
- 2) частичная диссоциация сернистой кислоты;
- 3) разложение сернистых соединений с образованием солей серной кислоты.

Все эти реакции протекают с выделением тепла. При парциальном давлении сернистого ангидрида 100 мм рт. ст. концентрация раствора составит 38,04 г/л при этом выделится 28,64 кДж/моль теплоты. При низких температурах доля диссоциации первой ступени для сернистой кислоты составляет 11,9 процентов, при этом тепловыделение составляет 18,54 кДж/моль. Окисление сульфитных соединений до сульфатных сопровождается еще более значительным тепловыделением 96,3 кДж/моль. Таким образом, значительное тепловыделение, сопровождающее реакции растворения сернистого газа и превращения сернистых соединений в серные, может содействовать накоплению большой массы подледной воды и отрыву ледника от грунта с последующим скольжением под действием собственной силы тяжести.

Литература

1. Ахметов Н. С. Общая и неорганическая химия.—М.: Высш. шк., 1998.—743 с.
2. Васильев Б. Т., Отвагина М. И. Технология серной кислоты.—М.: Химия, 1985.—384 с.
3. Десинов Л. В. Пульсация ледника Колка в 2002 г. // Вестн. ВНИЦ РАН.—2004.—Т. 4, № 3.—С. 72–87.
4. Справочник сернокислотчика / Под ред. К. М. Малина.—М.: Химия, 1971.—744 с.
5. Котляков В. М., Рототаева О. В., Осокин Н. И. Пульсирующие ледники // Вестн. ВНИЦ РАН.—2004.—Т. 4, № 3.—С. 65–71.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВЫСОКОЭЛАСТИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ¹

М. И. Карякин², Т. В. Сигаева²

В настоящее время существует множество материалов, которые обладают ярко выраженными нелинейными свойствами: высокоэластичные резиноподобные материалы, вязкоупругие полимеры, разнообразны композиты, биологические ткани. Создание математических моделей, которые в полной мере описывали бы поведение таких материалов при учете их нелинейности, является важной задачей современной науки. Определение значений материальных параметров для этих моделей на основе моделирования классических экспериментов, описывающих простую деформацию тел (растяжение, кручение, изгиб и т. д.) представляется определяющей и важнейшей частью подобных задач.

Одним из способов определения параметров модели материала является применение генетического алгоритма (ГА). Для получения ответа на вопрос — можно ли получить достаточно хорошее совпадение величин материальных параметров, полученных опытным путем, и вычисляемых материальных параметров, было проведено исследование возможностей ГА, в частности для решения обратной задачи нахождения коэффициентов моделей материала Блейтца и Ко и материала Мурнагана.

В работе материальные параметры определялись для нелинейно-упругой модели на основе ГА и сравнивались с данными, полученными «экспериментальным» путём. С помощью компьютерной программы моделировался эксперимент с простейшими деформациями тел, такими как растяжение или сжатие, изгиб, кручение. При этом предусматривалась возможность изменения модели материала. Полученные результаты условно воспринимаются как исходные данные обратной задачи. Разработана программа, которая с помощью

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № П–361.

²Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

механизмов эволюции и наследования подбирает параметры для выбранной нелинейно-упругой модели материала, аппроксимирующие экспериментальные данные. Проведен сравнительный анализ исходных данных прямой задачи с полученными результатами обратной.

Основываясь на проведенных исследованиях, можно утверждать о достаточно высокой эффективности генетического алгоритма и его перспективности для разработки схемы определения параметров математических моделей нелинейно-упругого поведения твердых тел и их верификации на основе экспериментальных данных.

О ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ
МЕЖЧАСТИЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЧАСТИЦ
НАНОРАЗМЕРНОГО МАСШТАБА

А. А. Копцева¹

Изучение наноразмерных объектов является актуальной задачей современной физики, так как свойства наноразмерных кластеров существенно отличаются как от кристаллического, так и от аморфного состояния вещества. Развитие нанотехнологий требует создания моделей, позволяющих описать теплофизические свойства кристаллических нанообъектов. Несмотря на значительные успехи в области нанотехнологий, в большинстве существующих теоретических моделей принимается, что основные динамические, термодинамические и механические характеристики нанообъектов совпадают со своими значениями, полученными из макроскопических экспериментов.

Термодинамический потенциал ионного кристалла с учетом вклада поверхностной энергии записывается в виде [1]:

$$G = \sum_{k=1}^7 N_k U_k(a_k R) - V \frac{\partial}{\partial V} \left[\sum_{k=1}^7 N_k U_k(a_k R) \right] - \frac{\alpha_\mu}{R} + \\ + 4\pi r^2 b \sigma_\infty \left(1 - \frac{2(r_e - r)}{r} \right), \quad (1)$$

где α_μ — постоянная Маделунга; R — расстояние между ближайшими соседями; V — объем элементарной ячейки в $B1$ -фазе; $\alpha_k = R_k/R_0$ — отношение радиуса k -ой координационной сферы к радиусу первой координационной сферы; N_k — координационное число; b — численный коэффициент, учитывающий отклонение формы кристалла от сферической ($b = 1$); $U(R)$ — потенциал парного взаимодействия, а последнее слагаемое описывает вклад поверхностной энергии. Выбор вида модельного потенциала играет важную роль при моделировании свойств наноразмерных ионных кристаллов.

Вклад поверхностной энергии в термодинамический потенциал для массивного образца составляет порядка 6 % от полной энергии,

¹Россия, Нальчик, Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.

но если рассматривать нанокристаллические объекты, то величина поверхностного вклада резко увеличивается.

У наночастиц практически все атомы находятся на поверхности. Колебания поверхностных атомов ограничены соседями слабее внутренних, так что они могут сильнее отклоняться от своих равновесных положений. Это приводит к изменениям в структуре частицы [2]. Поверхность наночастицы рассматривается как совокупность атомов (или молекул), и потенциал взаимодействия каждой молекулы с поверхностными молекулами ищется в виде суммы потенциалов данной молекулы со всеми молекулами поверхности.

В большинстве случаев парные потенциалы вводят феноменологическим образом, учитывая, конечно, квантово-механические эффекты.

Существует много различных моделей парных потенциалов взаимодействия, среди которых наиболее распространены потенциалы Ленарда-Джонса, Морзе, причем в численном моделировании и в расчетах чаще всего используется первый.

Численные расчеты показали, что кластеры с гранецентрированной структурой нестабильны для потенциалов Леннарда-Джонса и Морзе; они спонтанно переходят в икосаэдрическую форму [2].

Строго говоря, почти все виды существующих сегодня межатомных парных потенциалов представляют собой эффективные феноменологические потенциалы из-за приближений, неизбежных при решении многочастичных задач с взаимодействием [3].

Существующие на данный момент модельные потенциалы межатомного взаимодействия применимы только для описания инертных газов. Поэтому актуальна проблема построения потенциалов для широкого круга веществ. А в случае наночастиц необходимо еще и учитывать поверхностный вклад.

Литература

1. Копцева А. А. Учет размерной зависимости поверхностной энергии кристаллов ионных диэлектриков наноразмерного масштаба // Материалы VIII Междунар. науч. конф. «Химия твердого тела и современные микро- и нанотехнологии». — Кисловодск: СевКавГТУ, 2008. — С. 244–246.
2. Пул Ч., Оуэнс Ф. Нанотехнологии. — М.: Техносфера, 2007. — 375 с.
3. Рит М. Наноконструирование в науке и технике. Введение в мир нанорасчета. — М. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. — 160 с.

РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ ИНТЕРАКТИВНОГО РЕЧЕВОГО ОТВЕТА НА ОСНОВЕ ЯЗЫКА TCL

А. Ю. Кugno¹

Системы, о которых пойдет речь в докладе, представляют собой семейство систем компьютерной телефонии. Системы интерактивного речевого ответа (IVR — Interactive Voice Response), включают в себя традиционные системы предварительного диалога с абонентом, автоматизированные справочно-информационные системы, системы речевой почты, системы телеголосования.

Задача такого рода систем, применяющих оборудование IVR, — не только автоматически получать информацию от абонента, но и, по возможности, автоматически сообщать ему необходимые сведения. Самой распространенной является ситуация, когда абоненту необходимо получить информацию, которая может быть представлена в виде стандартных фраз с изменяющимися сегментами (как правило, числительными). Таковой является, например, информация о состоянии счета, выбор дальнейшего действия и т. п. В этом случае абонент вводит в режиме DTMF-дтонабора номер своей карты или личный номер, указанный в договоре. Система передает запрос к базе данных, откуда извлекается и передается обратно в систему компьютерной телефонии необходимая цифровая информация, которая вставляется в стандартную фразу, а затем готовая фраза «произносится» абоненту.

Функции, реализуемые системами IVR, как правило, определяются областью применения той или иной системы. Системы IVR могут быть реализованы на основе различных платформ, одна из них — реализация IVR на основе языка TCL (Tool Command Language) на платформе Cisco IOS (Integrated Operation System).

Далее хочу привести основные концептуальные положения для упрощения понимания всей структуры и взаимодействия программного обеспечения и аппаратных средств, используемых для реализации основных направлений в системах интерактивного речевого ответа.

Телефонный сигнал с двухпроводной абонентской линии поступает на дифференциальную систему, которая разделяет приемную и передающую части канала. Далее сигнал передачи вместе с «просочившейся» частью сигнала приема подается на аналого-цифровой

¹Россия, Владикавказ, Южный математический институт ВЦ РАН.

преобразователь (ADC) и превращается либо в стандартный 12-разрядный сигнал, либо в 8-разрядный сигнал. Дальнейшая обработка входного сигнала происходит в речевом кодере (Speech Coder). В анализаторе кодера сигнал сегментируется на отдельные фрагменты определенной длительности (в зависимости от метода кодирования) и каждому входному блоку сопоставляется информационный кадр соответствующей длины. Наличие информационного кадра включает речевой декодер, на выходе которого формируется речевой сигнал.

Конечного пользователя (клиента некоего оператора VoIP) интересует получение возможности сделать междугородний или международный звонок по несколько более выгодным тарифам, чем те, которые готов предоставить ему городской узел связи. Среди множества способов реализации такого сервиса особую популярность занимает так называемая IP-карта. Приобретая ее, клиент может позвонить по местному (городскому) телефонному номеру, указанному на карте, и, перейдя в тональный режим, ввести по запросу системы пин-код, указанный на карте, и непосредственно код страны, города и номер телефона, куда он желает сделать звонок. Когда клиент дозванивается по номеру, указанному на карточке, начинает работать IVR (Interactive Voice Response) — специальное приложение, подгружаемое или частично встроенное в голосовой шлюз, и обеспечивающее интерактивное «общение» с клиентом: запрос необходимых данных для авторизации, получение информации о том, куда клиент желает сделать звонок, выдача сведений об ошибках и балансе карты.

Свою концепцию по созданию устройств, осуществляющих интеграцию различных типов данных и голоса (голосовые шлюзы) компания Cisco Systems окрестила AVVID (Architecture for Voice, Video and Integrated Data). Основная идея Cisco при разработке оборудования — создание специализированных модулей и развитие возможностей операционной системы уже существующих моделей.

Для своих модульных маршрутизаторов и серверов доступа компания Cisco выпустила специализированные модули расширения, которые осуществляют компрессию и декомпрессию голоса. Сервера доступа Cisco со специализированной операционной системой IOS, которая способна выполнять не только задачи IVR систем, и передачи голоса через IP, но и осуществлять доступ в Интернет, связывать локальные сети и т. д. Для каждого семейства оборудования Cisco существует несколько разновидностей операционной системы, выбор которых зависит от конкретной задачи.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ ИОННЫХ КРИСТАЛЛОВ ВБЛИЗИ ТОЧКИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА «ДИЭЛЕКТРИК–МЕТАЛЛ»

М. О. Мамчуев¹

В отсутствие внешнего давления щелочно-галлоидные кристаллы имеют структуру типа $NaCl$ (1-структура), под действием высокого давления энергетически выгоднее оказывается более плотноупакованная структура типа $CsCl$ (2-структура). При дальнейшем увеличении давления возможен переход кристалла в металлизированное состояние. Важную информацию о природе сил связи в полиморфных модификациях щелочно-галлоидных кристаллов может дать изучение трех упругих констант C_{11} , C_{12} и C_{44} . Данные величины зависят от первой и второй производных от потенциала парного взаимодействия ионов $U(R)$. Потенциал парного взаимодействия ионов $U(R)$ описывается в рамках теории функционала плотности.

При расчетах упругих постоянных оказывается полезным разделить вклады кулоновских и короткодействующих сил, т. е.

$$C_{11} = C_{11}^{kr} + C_{11}^{kul}, \quad (1)$$

и аналогично для C_{12} и C_{44} . Кулоновский вклад определяется путем суммирования взаимодействий всех ионов кристалла, тогда как короткодействующий вклад ограничивается вкладами ионов семи координационных сфер. Блекменом, развившим и дополнившим подход Фуча и О'Конора, получены следующие соотношения для определения упругих констант кубических ионных кристаллов:

$$C_{11}^{kr} = \frac{1}{V} \sum_i [Q(x^i)^4 + P(x^i)^2], \quad (2)$$

$$C_{12}^{kr} = \frac{1}{V} \sum_i [Q(x^i)^2(y^i)^2 - P(x^i)^2], \quad (3)$$

$$C_{44}^{kr*} = \frac{1}{V} \sum_i [Q(x^i)^2(y^i)^2 + P(x^i)^2], \quad (4)$$

¹Россия, Нальчик, Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.

$$C_{44} = C_{44}^{\text{kr}*} - \frac{c^2}{D}, \quad (5)$$

$$c = \frac{1}{V} \sum_i x^i y^i z^i Q, \quad (6)$$

$$D = \frac{1}{V} \sum_i [Q(x^i)^2 + P(x^i)], \quad (7)$$

где V — объем элементарной ячейки ($2R^3$ — для фазы 1); x/R , y/R , z/R — кристаллографические координаты, а суммирование производится по всем ионам решетки. Входящие в выражения (2)–(6) величины P и Q определяются следующим образом:

$$P = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} U_{B1}^i(r) \right) \Big|_R, \quad (8)$$

$$Q = \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dU_{B1}^i(r)}{dr} \right) \right] \Big|_R, \quad (9)$$

где R — равновесное межионное расстояние; индекс i нумерует обе фазы ($i = 1$ для фазы 1, $i = 2$ для фазы 2). Для вычисления кулоновских составляющих упругих констант применялся метод суммирования быстро сходящихся рядов, подробно описанный Този и Хантингтоном. Ниже приведены результаты расчетов, выполненных по схеме Този:

$$\begin{aligned} C_{11}^{\text{kul}} &= -2,55604/2R^4, & C_{12}^{\text{kul}} &= 0,11298/2R^4, \\ C_{44}^{\text{kul}} &= 1,24802/2R^4, & D^{\text{kul}} &= -4,189/2R^6. \end{aligned} \quad (10)$$

Модули всестороннего сжатия B рассчитывались по формуле

$$B = \frac{1}{3} (C_{11} + 2C_{12}).$$

В работе проводится расчет зависимости упругих постоянных C_{11} , C_{12} и C_{44} от давления (сжатие считается всесторонним). Модули упругости C_{11} и C_{12} для всех исследованных кристаллов увеличиваются с ростом давления, тогда как C_{44} могут как возрасть (для большинства кристаллов), так и убывать (KCl , $RbCl$ и $RbBr$). Причем значение упругой постоянной C_{44} зависит от давления гораздо слабее, чем C_{11} и C_{12} .

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ТРЕХМЕРНЫХ РЕЖИМОВ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

А. Д. Немцев¹

На основе схемы смещенных сеток [1] исследуются решения трехмерной задачи фильтрационной конвекции многокомпонентной жидкости в параллелепипеде со смешанными краевыми условиями на боковых гранях при подогреве снизу.

Модель Дарси. Уравнения конвекции многокомпонентной жидкости с S примесями можно записать в безразмерном виде:

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p - \vec{v} + \sum_{r=1}^{S+1} \lambda_r \theta^r \vec{k}, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0,$$
$$b_r \frac{\partial \theta^r}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta^r = \kappa_r \Delta \theta^r + \vec{v} \cdot \vec{k}, \quad r = 1, \dots, S+1.$$

Здесь $\vec{v}(x, y, z, t)$ — векторное поле скорости, $p(x, y, z, t)$ — давление, $\theta^1(x, y, z, t)$ — температура, отсчитываемая от среднего значения, $\theta^r(x, y, z, t)$ ($r = 2, \dots, S+1$) — отклонения массовых концентраций примесей от средних уровней, t — время, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ — орт, направленный вертикально вверх.

Безразмерными параметрами задачи являются: пористость ε , кинетические коэффициенты b_r , числа Прандтля κ_r , фильтрационное λ_1 и концентрационные числа Рэлея λ_r ($r > 1$). На двух противоположных гранях параллелепипеда ($y = 0$, $y = L_y$) ставятся условия отсутствия теплового и концентрационных потоков, а на остальной границе поддерживаются равновесные распределения температуры и примесей.

Результаты вычислений. Для дискретизации краевой задачи применяется метод смещенных сеток с узлами пяти типов: единые узлы для температуры θ^1 и всех примесей θ^r ($r = 2, \dots, S+1$), узлы для давления p и для каждой компоненты вектора скорости $\vec{v}$ [1]. Интегрирование полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений проводилось при помощи метода Рунге — Кутты.

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

В численном эксперименте установлено, что в зависимости от глубины области L_y могут формироваться трехмерные или плоские движения. При малом расстоянии между теплоизолированными гранями ($L_y < 1$) существуют устойчивые плоские стационарные движения с полем скорости $(v^1, 0, v^3)$. Плоские движения образуют непрерывное семейство стационарных режимов, что соответствует сильной неединственности решений рассматриваемой задачи.

Анализ устойчивости режимов из семейства к трехмерным возмущениям проводился для теплопроводной жидкости без примесей ($S = 1$). Глубина изменялась в диапазоне $0,5 < L_y < 0,6$. Эксперимент состоял в том, что начальное распределение температуры задавалось в виде $\Theta = \Theta_s + \Theta_p$, где Θ_s — температура, соответствующая стационарному режиму, а $\Theta_p = d \sin \frac{k\pi y}{L_y}$ — возмущение. В таблице приведены результаты эксперимента для $k = 2$.

L_y	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56
P_1	P_1	P_1	P_1	P_1	A
P_2	$\widetilde{P_2}$	$\widetilde{P_2}$	P_1	P_1	A
P_3	$\widetilde{P_3}$	P_1	P_1	A	A
P_4	$\widetilde{P_4}$	$\widetilde{P_4}$	P_5	P_5	A
P_5	P_5	P_5	P_5	P_5	A

Здесь через $P_1, \dots, P_5$ обозначены плоские конвективные режимы из семейства, буква A соответствует трехмерному конвективному движению. Волной помечены режимы, получающиеся смещением вдоль кривой семейства. Например, при возмущении несимметричного режима P_2 в случае глубины $L_y = 0,53$ установление приводит к близкому несимметричному режиму $\widetilde{P_2}$, а при $L_y = 0,54$ в результате установления реализуется симметричный конвективный режим P_1 .

Расчеты показывают, что в параллелепипеде с двумя теплоизолированными боковыми гранями имеются такие глубины L_y , при которых возможно сосуществование устойчивых плоских и существенно трехмерных режимов.

Литература

1. Немцев А. Д., Цибулин В. Г. Математическое моделирование конвекции многокомпонентной жидкости в пористой среде // Вестник ЮНЦ.—2009.—Т. 4, № 5.—С. 23–26.

Виброожижение очень часто используется при очистке газов, сушке и сепарировании зернового материала. Существуют разные математические модели виброожижения. Например, для тонких слоев при определенных значениях частоты и амплитуды колебания полки подходит модель «газа крупных частиц». Данная модель правильно описывает изменение объемной доли частиц с высотой в виброожиженном слое. В случае виброожижения относительно толстых слоев больше подходит гидродинамическая модель, которая учитывает взаимодействие частиц между собой и с газом.

Исследуется двухфазная модель виброожижения, в которой рассматривается взаимопроникающее движение двух взаимодействующих континуумов, связанных с газом и частицами (подход Эйлера). Дисперсная фаза (псевдогаз частиц) представляется в виде сплошной среды с непрерывно распределенной в пространстве плотностью [1]. В модели для обеих фаз используются уравнения неразрывности и преобразованные уравнения изменения момента количества движения [2]. Рассматривается одномерный случай.

Уравнения неразрывности и изменения момента количества движения для обеих фаз имеют следующий вид [2]:

$$\frac{\partial(\rho_g \alpha_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_g \alpha_g \vec{V}_g)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho_s \alpha_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_s \alpha_s \vec{V}_s)}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho_g \alpha_g \vec{V}_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_g \alpha_g \vec{V}_g \cdot \vec{V}_g)}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} - \beta_B (\vec{V}_g - \vec{V}_s), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_s \alpha_s \vec{V}_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_s \alpha_s \vec{V}_s \cdot \vec{V}_s)}{\partial z} = \\ & = \beta_B (\vec{V}_g - \vec{V}_s) - G(\alpha_g) \frac{\partial \alpha_s}{\partial z} + (\rho_s - \rho_g) \alpha_s \vec{g}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\beta_B = \frac{\beta_A}{\alpha_g} \frac{\rho_s}{(\rho_s - \rho_g)}, \quad (5)$$

¹Россия, Владикавказ, Южный математический институт ВЦ РАН.

$$\beta_A = 150 \frac{\alpha_s^2 \mu_g}{\alpha_g d_p^2} + 1,75 \frac{\rho_g \alpha_s |\vec{V}_g - \vec{V}_s|}{d_p} \quad (0,2 \leq \alpha_g < 0,8), \quad (6)$$

$$G(\alpha_g) = 10^{-8,76\alpha_g + 5,43}, \quad (7)$$

где ρ_g , $\vec{V}_g$, α_g — плотность, скорость, объемная доля газа; ρ_s , $\vec{V}_s$, α_s ($\alpha_s = 1 - \alpha_g$) — плотность, скорость, объемная доля твердых частиц соответственно; P — давление газовой фазы; β_B — функция сопротивления (коэффициент обмена импульсами на поверхности раздела двух фаз); $G(\alpha_g)$ — модуль упругости твердой фазы (коэффициент межчастичного взаимодействия); $\vec{g}$ — ускорение свободного падения; μ_g — динамическая вязкость газа; d_p — диаметр частицы.

Плотность частиц считается величиной постоянной (равна плотности используемого материала), а плотность газа находится через уравнение состояния для идеального газа.

В связи с тем что движение смеси рассматривается в период между подбрасыванием частиц и их столкновением с полкой, граничные условия будут иметь следующий вид:

$$\alpha_{g0} = 1; \quad \alpha_{s0} = 0; \quad V_{g0} = V; \quad V_{s0} = 0; \quad (8)$$

$$\alpha_{g\infty} = 1; \quad \alpha_{s\infty} = 0; \quad V_{g\infty} = 0; \quad V_{s\infty} = 0, \quad (9)$$

где V — скорость полки.

Вследствие подбрасывания слоя между частицами и полкой образуется зазор, поэтому объемная доля частиц в этой зоне будет равна нулю, а значение давления будет постоянным. В зоне выше поверхности оживленного слоя давление газа равно атмосферному, а температура газа равна 22° С.

Литература

1. Волков К. Н., Емельянов В. Н. Течения газа с частицами.—М.: Физматлит, 2008.—600 с.
2. Cabezas-Gomez L., Milioli F. E. Gas-solid two-phase flow in the riser of circulating fluidized beds: mathematical modelling and numerical simulation // J. Braz. Mech. Soc. Sci.—Rio de Janeiro, 2001.—Vol. 23, № 2.—P. 170–200.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЛАКОВ В ГОРНЫХ УЩЕЛЬЯХ

Д. Г. Пантелеев¹

Рассматривалась двумерная численная модель эволюции тумана под влиянием орографии Кармадонского ущелья, расположенного на территории Республики Северная Осетия-Алания. Поле скоростей воздуха и распределение температуры в поперечном сечении ущелья задавались и принимались не меняющимися во времени. В модели не учитывается влияние фазовых переходов на скорость воздуха и его температуру. Также не учитывалось возможное наличие в атмосфере твердых частиц.

Туман характеризовался двумя величинами: q — удельной влажностью (массой водяного пара в единичной массе воздуха) и δ — удельной водностью (массой жидкой фазы в единичной массе воздуха). Для их определения численно решалась система уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial t} &= -u \frac{\partial q}{\partial x} - w \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial q}{\partial z} \right) - \alpha, \\ \frac{\partial \delta}{\partial t} &= -u \frac{\partial \delta}{\partial x} - w \frac{\partial \delta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \delta}{\partial z} \right) + \alpha,\end{aligned}$$

где α — слагаемое, описывающее фазовый переход жидкость–пар для мелких капель [1]:

$$\alpha = 4\pi \frac{q_g}{\rho_g} N_c r_c \frac{S_w - 1}{F_k + F_d}.$$

Профиль ущелья на том участке, для которого выполнялся расчет, выглядит следующим образом (рис. 1).

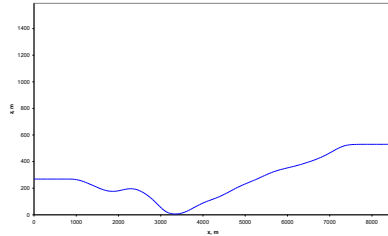


Рис. 1. Профиль поперечного сечения ущелья.

¹Россия, Владикавказ, Южный математический институт ВЦ РАН.

На верхней и боковых границах области принимались равными нулю первые производные от влажности и водности по нормали к соответствующим границам. На поверхности земли влажность принималась постоянной, причем водяной пар был пересыщенным, а водность была равна нулю.

Начальные условия: $q(x) = \text{const}$ и $\delta(x) = 0$.

Использованные в расчетах распределения вязкости и температуры воздуха в ущелье соответствуют утренним часам [2]. Ветер над ущельем направлен слева направо.

По истечении 159 минут физического времени были получены установившиеся распределения влажности и водности, приведенные ниже. Отметим, что на этих графиках система координат преобразована, для того чтобы расчетная область стала прямоугольной. Более темные области соответствуют большему значению влажности или водности.

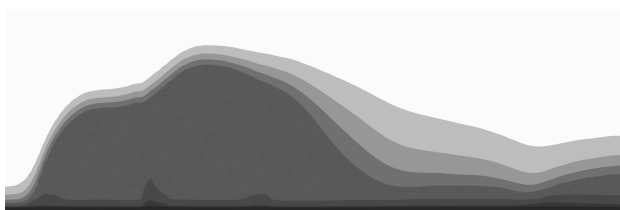


Рис. 2. Установившееся распределение влажности в поперечном сечении ущелья.

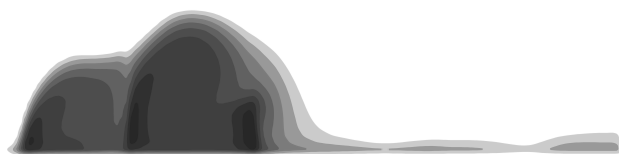


Рис. 3. Установившееся распределение водности в поперечном сечении ущелья.

Литература

1. Herzog M., Graf H.-F., Textor C., Oberhuber J. M. The effect of phase changes of water on the development of volcanic plums // J. of Volcanology and Geometrical Research.—1998.—Vol. 87—P. 55–74.
2. Радионов А. А. Течение воздуха и распространение загрязняющих веществ в горных ущельях: Дис. . . канд. физ.-мат. наук.—Владикавказ, 2002.—163 с.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Л. Ю. Плиева¹

В работе рассматриваются квадратурные формулы интерполяционного типа для приближенного вычисления интегралов типа Коши вида [1]:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt \quad (1)$$

на отрезке $[-1, 1]$ с весом и для их производных до 2 порядка включительно:

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt, \quad (2)$$

$$\Phi''(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^3} dt, \quad (3)$$

где $z \notin [-1, 1]$ и $\varphi(t)$ — достаточно гладкая функция, определенная на отрезке $[-1, 1]$.

Для построения квадратурной формулы интерполяционного типа в интеграле (1) заменим плотность $\varphi(t)$ ее интерполяционным многочленом с узлами $x_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi$ (см. [2]):

$$L_n(\varphi, t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} T_n(t)}{t - x_j} \sqrt{1 - x_j^2} \varphi(x_j), \quad (4)$$

где $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ — многочлен Чебышева первого рода.

После вычисления соответствующих коэффициентов получим следующую квадратурную формулу:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &\approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} \sqrt{1 - x_j^2}}{z - x_j} \mu_j(z) \varphi(x_j), \\ \mu_j(z) &= \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} - \frac{1}{2i} U_{n-1}(x_j), \end{aligned} \quad (5)$$

где $U_{n-1}(t) = \frac{\sin(n \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}$ — многочлен Чебышева второго рода.

¹Россия, Владикавказ, Южный математический институт ВЦ РАН.

Для данной квадратурной формулы была получена следующая оценка погрешности

$$|R_n(\phi, t)| < \frac{\varepsilon}{4\rho}$$

где $\varepsilon = \max_{t \in [-1, 1]} \frac{|\varphi^{n+1}(\xi)|}{(n+1)!}$, $\min_{t \in [-1, 1]} |t - z| = \rho$.

Вычисляя компоненты напряжений и смещений при решении различных задач плоской теории упругости, мы сталкиваемся не только с интегралами типа Коши, но и с их производными, что подчеркивает необходимость построения и для них квадратурных формул. В связи с этим были построены квадратурные формулы для интегралов (2) и (3)

$$\begin{aligned}\Phi'(z) &\approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} \sqrt{1-x_j^2}}{(z-x_j)^2} \mu_j(z) \varphi(x_j), \\ \mu_j(z) &= \frac{1}{2i} U_{n-1}(x_j) - \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}} \left(1 + (z-x_j) \frac{n\sqrt{z^2-1}+z}{z^2-1} \right), \\ \Phi''(z) &\approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} \sqrt{1-x_j^2}}{(z-x_j)^3} \mu_j(z) \varphi(x_j), \\ \mu_j(z) &= i \frac{(z - \sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}} \left(1 + (z-x_j) \frac{n\sqrt{z^2-1}+z}{z^2-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(z-x_j)^2}{2} \frac{n^2(z^2-1) + 3nz\sqrt{z^2-1} + 2z^2+1}{(z^2-1)^2} \right) - \frac{1}{2i} U_{n-1}(x_j).\end{aligned}$$

Вычисление многочисленных примеров показывают эффективность метода.

Литература

1. Пыхтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов тип Коши.—Новосибирск: Наука, 1980.—119 с.
2. Плиева Л. Ю., Хубежты Ш. С. К численному решению сингулярных интегральных уравнений первого рода на отрезках // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2008.—№ 4.—С. 13–16.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСТОГО ИЗГИБА ПАНЕЛИ В СРЕДЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MARLE¹

Д. Ю. Сухов², Н. Ю. Шубчинская²

Исследование задач устойчивости трехмерных тел базируется на нелинейной теории упругости и представляет собой достаточно сложный процесс даже для тел простой геометрии. В то же время во многих случаях сам процесс анализа устойчивости достаточно алгоритмичен и допускает автоматизацию основных его этапов с помощью современных средств компьютерной алгебры. В работе представлена реализация основных этапов процесса анализа устойчивости в системе компьютерной алгебры Maple на примере решения задачи об устойчивости изгиба панели в сектор цилиндра.

Использованы две модели сжимаемых материалов: полулинейный материал Джона и материал Блейтца и Ко. В рамках плоской деформации с использованием полуобратного метода нелинейной теории упругости исходная трехмерная задача изгиба сведена к одномерной, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением для функции, описывающей радиус точки в деформированном состоянии, численный анализ которой выполнялся также в среде Maple. Анализ решения краевой задачи для рассматриваемых моделей показал, что на диаграмме изгиба (график зависимости изгибающего момента от параметра, характеризующего отношение длины бруса и угла сектора, в который он деформируется) четко видна точка экстремума, за которой следует падающий участок. Существование этого участка означает возможность потери устойчивости процесса деформации при чистом изгибе.

Для изучения устойчивости на основе бифуркационного подхода разработан самостоятельный блок Maple-кода, реализующий аналитически линеаризацию уравнений равновесия. Для различных вариантов рассмотренных моделей материалов получена линейная однородная краевая задача с параметром, пропорциональным приложенному к торцам панели изгибающему моменту. Поиск значений параметра, при которых существуют нетривиальные решения этой

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № П-361.

²Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

задачи, отождествляемых с точками потери устойчивости, также реализован в среде Maple. Приведены основные результаты о расположении точек бифуркации на диаграмме нагружения.

Использование более сложных моделей материалов может приводить, во-первых, к весьма громоздким уравнениям даже на первом этапе определения основного напряженно-деформированного состояния, а во-вторых — к существенному падению скорости вычислений. Важной частью расширенного пакета является, поэтому, блок «внешнего решателя» — система автоматического генерирования файлов на языке C в среде Maple, их компиляции, выполнения и передачи результатов расчетов назад в среду Maple для обработки и анализа. Результаты использования данного решателя показали существенное (от 10 до 20 раз) ускорение вычислений, что позволяет существенно расширить класс рассматриваемых задач.

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

А. В. Трофимова¹

Рассматривается плоская задача фильтрационной конвекции несжимаемой жидкости в кольцевом сегменте при подогреве снизу. На основе уравнений в полярных координатах и метода сеток развита численная схема расчета конвективных движений. Для аппроксимации применяются специальные формулы, сохраняющие в разностных уравнениях свойства исходной задачи [1, 2].

Постановка задачи. Система безразмерных уравнений для функции тока ψ и температуры θ имеет вид:

$$\partial_t \theta = \Delta \theta + G(\psi) - J(\theta, \psi) \equiv F_1(\theta, \psi), \quad (1)$$

$$0 = \Delta \psi - \lambda G(\theta) \equiv F_2(\theta, \psi), \quad (2)$$

$$\theta|_{\partial D} = 0, \quad \psi|_{\partial D} = 0, \quad (3)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0(r, \varphi). \quad (4)$$

Здесь t — время, r, φ — полярные координаты, λ — фильтрационное число Рэлея и

$$J(\theta, \psi) = \frac{\partial_r(\theta \partial_\varphi \psi) - \partial_\varphi(\theta \partial_r \psi)}{r}, \quad G(\theta) = \frac{\cos \varphi \partial_\varphi \theta + r \sin \varphi \partial_r \theta}{r}.$$

Интегрированием по частям, использованием формулы Грина и учетом краевых условий устанавливается, что вектор-функция $L = (\psi, -\theta)$ является косимметрией для задачи (1)–(3):

$$\int_D [F_1(\theta, \psi) \psi - F_2(\theta, \psi) \theta] r dr d\varphi = 0. \quad (5)$$

Конечно-разностный метод. По координатам r и φ вводились равномерные сетки. На двухточечных шаблонах задавались операторы вычисления среднего и разностные производные, по которым

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

вычислялись операторы на трехточечных (D_1, D_2) и четырехточечных шаблонах (d_0, d_1, d_2). При аппроксимации якобиана применялся аналог формулы Аракавы:

$$J(\theta, \psi)|_{(r_i, \varphi_j)} \approx J_{i,j}(\theta, \psi) = \frac{\alpha}{r_i} [D_1(\theta D_2 \psi) - D_2(\theta D_1 \psi)]_{i,j} + \frac{(1-\alpha)}{r_i} [d_1(d_0 \theta d_2 \psi) - d_2(d_0 \theta d_1 \psi)]_{i,j}, \quad (6)$$

а для аппроксимации $G(\theta)$ использовалась формула, сохраняющая косимметрию для системы разностных уравнений:

$$G(\theta)|_{(r_i, \varphi_j)} \approx G_{i,j}(\theta) = \frac{\beta}{r_i} (\cos \varphi D_2 \theta + r \sin \varphi D_1 \theta)_{i,j} + \frac{(1-\beta)}{r_i} (D_2(\cos \varphi \theta) + D_1(r \sin \varphi \theta))_{i,j}. \quad (7)$$

Выбор параметров α и β в формулах (6)–(7) производился из условия выполнения разностного аналога тождества (5). При $\alpha = 1/3$ и $\beta = 1/2$ конечно-разностная схема системы сохраняет косимметрию исходной задачи.

Результаты вычислений. Расчеты конвективных режимов задачи (1)–(4) проводились для различных сегментов и сеток. Для полукольца $D = [1, 2] \times [\pi/2, 3\pi/2]$ было найдено, что семейство устойчивых стационарных конвективных режимов ответвляется при $\lambda_{\text{ст}} \approx 42$. В численном эксперименте изучена эволюция этого семейства с ростом числа Рэлея и найдено, что при $\lambda > 97$ на семействе появляются участки неустойчивых стационарных режимов. В спектре каждого режима присутствует нулевое собственное значение, что соответствует нейтральному направлению вдоль кривой семейства, а неустойчивость определяется по спектру для трансверсального многообразия. Расчетами подтверждено, что при аппроксимациях, не обеспечивающих сохранение разностного аналога (5), происходит разрушение семейства стационарных решений.

Литература

1. Karasözen B., Tsybulin V. G. Finite-difference approximation and cosymmetry conservation in filtration convection problem // Phys. Let. A.—1999.—Vol. 262, № 4.—Р. 321–329.
2. Трофимова А. В., Цибулин В. Г. Расчет конвективных режимов в пористой трапециевидной области // Изв. вузов. Сев-Кавк. Регион. Естеств. Науки. Спецвыпуск.—2009.—С. 211–215.

СПЕЦИФИКА ПОСТРОЕНИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЕН-ВЕНАНА ИЗГИБА
ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ¹

Ю. А. Устинов², Н. В. Курбатова², Е. С. Чумакова²

Под естественно закрученным стержнем (ЕЗС) понимают трехмерное тело, которое закручивается в результате винтового движения некоторой плоской фигуры вдоль прямолинейной оси.

В настоящей работе строится конечно-элементное решение в перемещениях задачи Сен-Венана ЕЗС, соответствующее изгибу поперечной силой ЕЗС с прямоугольным сечением, боковая поверхность которого свободна от напряжений. Здесь задача Сен-Венана в трехмерной постановке сводится к решению двумерной краевой задачи на сечении [1].

Обобщенное решение краевой задачи однозначно определяется из вариационного уравнения плотности потенциальной энергии системы, единственность решения обеспечивается выполнением условия ортогональности собственного и присоединенного (искомого) векторов с помощью множителей Лагранжа. Вариационное уравнение является основой для построения конечно-элементной дискретизации. Сечение разбивается на прямоугольные конечные элементы (КЭ), в качестве базисных функций используются билинейные.

Решение задачи изгиба ищется в виде $\mathbf{u} = C_4 \mathbf{u}_4 + \bar{C}_4 \bar{\mathbf{u}}_4$, где C_4 — произвольная постоянная, которая определяется при удовлетворении граничным условиям.

$$\mathbf{u}_4(\xi_1, \xi_2, \xi) = e^{i\tau\xi} \left(\frac{\xi^3}{6} \mathbf{a}_1 + \frac{\xi^2}{2} \mathbf{a}_2 + \xi \mathbf{a}_3(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{a}_4(\xi_1, \xi_2) \right), \quad (1)$$

где $\mathbf{a}_1 = \{1, i, 0\}$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$, $\mathbf{a}_2 = \{0, 0, -\zeta\}$ — собственный и присоединенный векторы спектральной задачи [1]; $\mathbf{a}_3(\xi_1, \xi_2)$ — присоединенный вектор, являющийся решением задачи чистого изгиба на сечении, полученном с помощью метода конечных элементов; $\mathbf{a}_4(\xi_1, \xi_2)$ — искомый присоединенный вектор, определенный на сечении.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-00065а.

²Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

Решение является комплекснозначным, причем задача не распадается на две, вещественную и мнимую, поэтому с каждым узлом связывается двенадцать неизвестных: a_{ji}^e — обобщенные перемещения задачи изгиба поперечной силой, b_{ji}^e — известные узловые обобщенные перемещения задачи чистого изгиба, индекс j соответствует компонентам вектора узлового перемещения ($j = 1, 2, 3$), $i = 1, 2$ — его вещественной и мнимой части. Для применения эффективного алгоритма учета ранее построенного КЭ-решения задачи чистого изгиба, будем считать b_{ji}^e — известными скалярами, а a_{ji}^e — функциями от искусственно введенной переменной y . Такой прием позволяет заменить процедуру варьирования энергетического уравнения и получения СЛАУ относительно вариаций узловых неизвестных $a_{ji}^{ek}(y)$ ($k = 1, \dots, 4$) и множителей Лагранжа процедурой дифференцирования по y , а также привлечь аппарат символьных преобразований MatLab. Специфика задачи заключается в том, что значения элементов локальных матриц зависят от положения КЭ в сетке при интегрировании. В результате ансамблирования по элементам получаем расширенную матрицу системы. Заметим, что условия единственности, реализованные с помощью множителей Лагранжа, нарушают ленточную структуру матрицы.

В ходе анализа был исследован характер напряженно-деформированного состояния серии сечений ЕЗС для различных значений крутки.

Литература

1. Устинов Ю. А. Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров.—М.: Физматлит, 2003.—128 с.

З. М. Хацук¹
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$
$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2)$$

$$u(0, t) = f_1(t),$$

$$u(L, t) = f_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

Численное решение задачи (2), (3) для уравнения (1) может быть реализовано по неявной схеме, как решение системы линейных алгебраических уравнений [2]

[illegible]

где h, k — шаги разбиения по x и t соответственно, $\lambda = \frac{k}{h^2}$, $u_{i,j} = u(ih, jk)$.

В данной работе был проведен вычислительный эксперимент. Движение почвенной влаги в пористых средах напоминает модель макроскопического движения при стохастическом переносе. Очень

¹Россия, Нальчик, Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.

часто предсказания теории фильтрации, основанные на моделях порового пространства в рамках обычной евклидовой геометрии, расходятся с экспериментальными данными [3].

Литература

1. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод.—М.: Наука, 1977.—664 с.
2. *Охорзин В. А.* Прикладная математика в системе MATHCAD.—СПб.: Лань, 2008.—352 с.
3. *Сербина Л. И.* Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах.—М.: Наука, 2007.—167 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СОЦИАЛЬНЫХ СЛОЕВ
В ОБЩЕСТВЕ

З. Х. Хосаева¹

Рассматривается модель изменения состояния общества под влиянием внешнего воздействия и взаимодействия между частями общества. Под внешним воздействием понимается внешняя информация и экономическая ситуация. Общество делится на 2 группы: управляющую элиту и трудящихся.

Изменение состояния общества описывается уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = -k_1 P_1 - (a_1 + b_1 P_1^2 - \xi_1 P_1^4)(c_{B1} I_B + c_{12} P_2), \\ \frac{dP_2}{dt} = -k_2 P_2 - (a_2 + b_2 P_1^2 - \xi_2 P_2^4)(c_{B2} I_B + c_{21} P_1), \end{cases}$$

переменной в которых является напряженность в соответствующем слое. Напряженность может быть как положительной, так и отрицательной. Большие положительные значения напряженности соответствуют большим усилиям слоя по укреплению существующей системы, а большие отрицательные — большей активности, направленной на разрушение существующей системы.

Первые члены в правых частях уравнений определяют релаксационные коэффициенты в обществе, т. е. учитывают тот факт, что большие значения напряженности не могут сохраняться в обществе без дополнительных внешних воздействий. Второе слагаемое состоит из двух сомножителей. Второй сомножитель отражает влияние внешних воздействий и другого слоя на данный. Эти воздействия предполагаются линейно зависящими от соответствующих внешних факторов. Первый сомножитель отражает влияние внутреннего состояния соответствующего слоя на восприятие внешних воздействий. Он записан таким образом, что при малых по абсолютной величине значениях напряженности влияние внешних воздействий усиливается, а начиная с некоторой величины влияние внешних воздействий начинает уменьшаться. Т. е. при больших значениях напряженности состояние слоя перестает зависеть от внешних факторов.

В расчетах коэффициенты k_1 и k_2 определяются в соответствии с полученным по результатам социальных опросов спадом напряженности в обществе после событий в Беслане [1]. Коэффициенты в первом сомножителе второго слагаемого взяты из работы [2].

¹Россия, Владикавказ, Южный математический институт ВЦ РАН.

Отношение коэффициентов c_1 и c_2 , характеризующих воздействия одного слоя на другой, принималось пропорциональным частоте контактов, определенных эмпирически в статье [3]. Коэффициент, учитывающий влияние информации, первоначально брался из [2] и затем увеличивался. Воздействие внешней информации на оба слоя предполагалось одинаковым и первоначальная внешняя информация не менялась со временем.

При близких к нулю начальных значениях напряженности обоих слоев система за довольно короткий срок приходит к стационарному состоянию. При изменении внешних воздействий по синусоидальному закону $\sin 3t$ и низких значениях коэффициентов система также приходила почти в стационарное состояние, а при больших коэффициентах возникают периодические колебания (рис. 1).

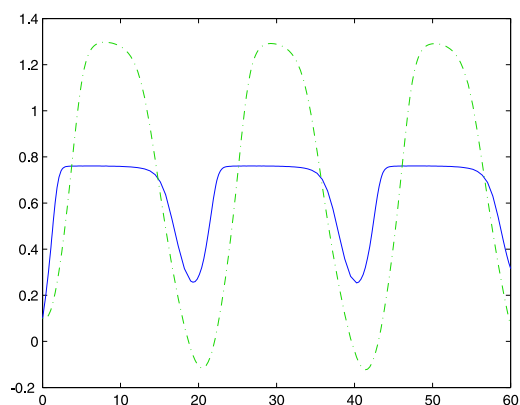


Рис. 1.

Литература

1. Дзакоев З. Л., Дзудцова А. С., Хамицаева З. А. Оценка населением РСО-А уровня безопасности в республике // Вестник ВНИЦ.—2009.—Т. 9, № 1.—С. 24–29.
2. Хосаева З. Х. Моделирование воздействия информации на общество.—URL: http://vncran.ru/index.php/news_sltd/150.
3. Гаврилец Ю. Н. Стохастическое моделирование межгрупповых информационных взаимодействий // Экономика и мат. методы.—2003.—Т. 39, № 2.—С. 106–116.

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

С. А. Циунчик¹

Рассмотрим в области $D = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[1 + \int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 d\tau \right] \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (2)$$

Задачи такого типа возникают при построении математических моделей для процесса диффузии магнитного поля в вещество при условии нагрева тела [1]. Разрешимость рассматриваемой задачи была исследована в работах [1, 2]. В работе [3] исследована разрешимость уравнений, являющихся обобщением уравнения (1).

Для решения задачи (1), (2) построим неявную разностную схему.

Введем в замкнутой области $\bar{D} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ равномерную сетку

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{h\tau} &= \bar{\omega}_h \times \omega_\tau = \{(ih, j\tau), i = 0, 1, \dots, N, j = 1, \dots, j_0\}, \\ \bar{\omega}_h &= \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}, \quad \omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 1, \dots, j_0\}. \end{aligned}$$

Для дифференциальной задачи (1), (2) поставим в соответствие разностную схему:

$$\begin{aligned} y_{t,i}^j - \frac{3}{2}\tau \left(y_{x,i}^j \right)^2 y_{\bar{x}x,i}^j - 2y_{x,i}^j S_{1i}^j - y_{\bar{x}x,i}^j S_{2i}^j - f_i^j &= 0, \\ i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, j_0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} y_i^0 &= \varphi(x_i), \quad i = 0, 2, \dots, N, \\ y_0^j &= \mu(0, t_j), \quad y_N^j = \mu(1, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, j_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$S_{1i}^j = \frac{\tau}{2} \left(y_{x,i}^0 y_{\bar{x}x,i}^0 + 2 \sum_{k=1}^{j-1} y_{x,i}^k y_{\bar{x}x,i}^k \right),$$

¹Россия, Владикавказ, Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова.

$$S_{2i}^j = 1 + \frac{\tau}{2} \left((y_{x,i}^0)^2 + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (y_{x,i}^k)^2 \right),$$

$$S_{1i}^1 = S_{2i}^1 = 0.$$

Разностная схема (3), (4) аппроксимирует дифференциальную задачу (1), (2) с порядком $O(h + \tau)$.

Для нахождения значений функции y_i на j -м слое имеем нелинейную систему уравнений:

$$F_i^j = y_i^j - \frac{3}{2} \tau (y_x^j)^2 y_{\bar{x}x}^j - 2y_x^j S_1^j - y_{\bar{x}x}^j S_2^j - f^j. \quad (5)$$

Применяя итерационный процесс Ньютона, переходим от (5) к линейной относительно y_i^{k+1} системе уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_{i-1}} y_{i-1}^{k+1} + \frac{\partial F_i}{\partial y_{i+1}} y_{i+1}^{k+1} + \frac{\partial F_i}{\partial y_{i+1}} y_{i+1}^{k+1} = -D_i, \quad i = 2, \dots, N-1, \quad (8)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} y_1^{k+1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} y_2^{k+1} = -D_1,$$

$$\frac{\partial F_{N-1}}{\partial y_{N-2}} y_{N-2}^{k+1} + \frac{\partial F_{N-1}}{\partial y_{N-1}} y_{N-1}^{k+1} = -D_{N-1},$$

где

$$D_i = -f_i + (F(y))_i - (F'(y))_i.$$

Литература

1. Гордезиани Д. Г., Джангвеладзе Т. А., Коршия Т. К. О существовании и единственности решения одного класса нелинейных параболических задач // Дифференц. уравнения.—1983.—Т. 19, № 7.—С. 1197–1207.
2. Джангвеладзе Т. А. Исследование первой краевой задачи для некоторых нелинейных интегро-дифференциальных уравнений параболического типа.—Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1983.
3. Лаптев Г. И. Квазилинейные параболические уравнения, содержащие в коэффициентах оператор Вольтерры // Мат. сб.—1988.—Т. 136(178), № 4(8).—С. 530–545.

Портал «ГеоМЕТА» создавался с использованием онтологического подхода и технологии Semantic Web для решения задач в сфере наук о Земле, таких как: каталогизация геопространственных данных и приложений, проведение экспериментов, визуализация результатов, распределенный поиск метаданных в соответствии с правами доступа, гибкий уровень детализации при описании ресурсов. В мире имеется достаточно большое количество информационных систем для работы с научными данными, наукоемкой информацией. Практически каждое научное учреждение представляет в электронной форме данные о публикациях сотрудников, о проводившихся или ведущихся научных исследованиях и проектах, о результатах исследований. Многие из учреждений имеют собственные информационные системы для наукоемкой информации, которые в каком-то виде ее хранят и предоставляют. Однако при создании их описаний недостаточное внимание уделяется вопросам переносимости (интероперабельности) — слабо применяются соглашения по стандартизации электронного представления информационных ресурсов и соответствующие средства, призванные поддерживать интеграцию информационных ресурсов, повышение полноты и точности поиска и т. п. Также такие проекты ставили целью создание централизованных систем, что в силу огромного динамизма научных исследований очень быстро приводило к невозможности обеспечить приемлемую полноту и актуальность данных, представляемых такими замкнутыми системами. Основным принципом построения системы «ГеоМЕТА» является выделение единой (базовой) схемы метаданных, реализованной в виде OWL-онтологии на основе стандартов ISO 19115 : 2003 «Географическая информация. Метаданные» [1] и ISO 19119 : 2005 «Географическая информация. Сервисы» [2]. Был разработан простой, но в то же время достаточно полный профиль метаданных для пространственных данных и сервисов, ориентированный на максимальную совместимость, адаптируемость и расширяемость как для российских, так и для зарубежных поставщиков и потребителей геоинформационных данных, что и привело к онтологическому подходу формирования метаданных [3]. В результате анализа различных

¹Россия, Владикавказ, Южный математический институт ВЦ РАН.

стандартов и профилей пространственных метаданных в качестве основы для разработки схемы метаданных были взяты стандарты ISO 19115 [1] и полностью ГОСТ Р 52573 для описания пространственных данных.

Портал «GeoMETA» представляет собой платформу для создания распределенной среды интеграции неоднородных источников геоинформационных данных и сервисов и предоставления к этой среде единой точки входа (Web-портала), которая позволит ученым в сфере наук о Земле:

- легко находить специализированные данные и приложения;
- производить вычислительные эксперименты;
- визуализировать результаты деятельности.

Одной из важнейших задач развития информационных технологий становится интеграция приложений. Все возрастающая потребность в получении «обобщенного» взгляда на программные ресурсы различных систем привела к формированию механизмов интеграции распределенных приложений. Вторая часть — Научно-вычислительный портал — представляет собой программный комплекс, предназначенный для интеграции данных. Научно-вычислительный портал является самостоятельным решением, предназначенным для информационного обеспечения деятельности ученых, нуждающихся в решении сложных вычислительных задач. Разработанная онтология геопространственных данных GeoMETA v3.0 : 2007 получила свое применение в портале <http://geometa.ru>. Портал обеспечивает каталогизацию, сбор и поиск геопространственных метаданных и метаданных сервисов, предоставляет удобный пользовательский интерфейс для блочного ввода, редактирования, просмотра метаданных, и визуализации геопространственных данных, для которых указан стандартизованный источник OGC WMS. Также портал обеспечивает разделение прав доступа и аудит действий пользователей.

Литература

1. ISO 19115:2003 — Geographic information. Metadata.—URL: <https://committees.standards.org.au/COMMITTEES/IT-004/PRIVATE/I0028/ISO%2019115%20.pdf>.
2. ISO 19119:2005 — Geographic information. Services.—URL: http://www.iso.org/iso/iso_catalogue/catalogue_tc/catalogue_detail.htm?csnumber=39890.
3. W3C: OWL Web Ontology Language Semantics and Abstract Syntax.—URL: <http://www.w3.org/TR/2004/REC-owl-semantics-20040210>.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РОЖДАЕМОСТИ МАК-КЕНДРИКА — ФОН ФЕРСТЕРА

Д. А. Шоранова¹

Пусть $u(x, t) dx$ — количество клеток в единице объема в возрастном интервале от $x \geq 0$ до $x + dx$ в момент времени t [1]. Если убыль клеток определяется естественной гибелью, вымыванием в случае проточного культивирования и убылью из данного возраста x при делении родительской клетки, то при интуитивно ясных предположениях относительно других характеристик популяции можно записать:

$$u_t(x, t) + r(x)u_x(x, t) = c(x)u(x, t). \quad (1)$$

Вводя вместо $u_t(x, t)$ производную Капуто [2], из уравнения (1) получим

$$\partial_{0t}^\alpha u(x, t) + r(x)u_x(x, t) = c(x)u(x, t). \quad (2)$$

Будем считать, что $r(x) > 0$, $c(x) \geq 0$, $r(x), c(x) \in C[0, l]$.

В работе получено решение уравнения (2) в области G , удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

и граничному условию

$$u(0, t) = \int_0^l \gamma(x, t)u(x, t) dx,$$

где $\varphi(x) \in C[0, l]$, $\gamma(x, t)$ непрерывна в замыкании области $G = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ и интегрируема по x на $[0, l]$, $\gamma(x, t) \neq 0$.

Доказана единственность полученного решения.

Введение дробной производной позволяет регуляризовать функцию $u(x, t)$ и получить эффективную формулу скорости развития популяции.

¹Россия, Нальчик, Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—301 с.
2. *Псху А. В.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка.—Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2005.—186 с.

Приложение

ОСАННА ЧЕЛОВЕКУ

Человек талантлив генетически. Талант — атрибут популяции *homo sapiens*. Все те, кто уже здесь, несут переданные им предками гены таланта. Глупо губить талант ленью. Долг человека — раскрыть свою индивидуальность, отдать талант людям, обогатить культуру.

Homo vulgaris — человек биологический — не меняется в том смысле, что приобретенные признаки потомкам не передает. *Homo vulgaris* скромен и простоват. *Homo socialis* — человек общественный — передает накопленные навыки и знания. *Homo socialis* самоотвержен и оптимистичен. *Homo vulgaris* смертен. *Homo socialis* не вечен, но способен к воскрешению и бессмертию. *Homo vulgaris* — идеал Ницше. *Homo socialis* — потомок Кохелета. Эго — мера *homo vulgaris*. Мера *homo socialis* — личность. Формула Льва Толстого: человек = личность/эго.

Вздорен как миф об ускоряющемся прогрессе, так и миф о человеческой деградации. Жизнь и ярче, и фантастичнее, и сложнее любых мифов. Вопреки расхожим суждениям люди со временем не становятся ни хуже, ни лучше. Биологически мы одни и те же, пока остаемся *homo sapiens*. Социальное формирование каждого человека зависит от генов популяции и мемов окружения. *Homo vulgaris* готов превратиться в агрессивное самодостаточное животное, разрушающее все вокруг для утоления своих звериных инстинктов и пожирающее себе подобных. Единственный тормоз каннибализма — мемотип *homo socialis*.

Не зная жизни, мы экспериментируем годами. Человек для близких — сопереживание. Человек для других — это его дело. Человек для себя — инструментарий жизни. Когда говорят, что человек — это его дело, имеют в виду личность, ограниченную общественными отношениями. Профессия — атрибут главный, но далеко не единственный. Личность не сводится к профессии, а человек — к личности. Личность — своего рода спектральная характеристика человека. Спектр имеет непрерывные и дискретные компоненты. Профессиональные и биологические признаки относятся к спектру дискрет-

¹Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева.

ному, а личность — к непрерывному. Человек жив тем, что внес в культуру. Нет культуры — нет и человека.

Нельзя ни стать, ни быть человеком без других людей. Человек не одинок и в камере смертника, и на необитаемом острове. Свобода — это многоместный предикат, и потому быть свободным в одиночку невозможно. Человек свободен, пока остается человеком среди людей. Свободу денег и признание люди обычно получают за свои заслуги в качестве непризнанных нищих. Свобода денег проигрывает свободе от денег и противостоит свободе аскезы.

Наука — душа свободы и гавань свободного слова. Арена науки — весь мир человека. Особое мастерство человека — распространение идей за привычные рамки. Понять трудное по чередке битов человеку не дано. Не зря лучшие законы и привлекательные теории немногословны. Специализация обречена создавать уродов, лишенных перспективы и поклоняющихся процедуре. Процедура и традиция — не худшая защита от людских пороков и слабостей. Процедура — призрачный оазис.

Глупости противостоит только ее отрицание — острота ума. Слово «глупость» недаром синонимично слову «тупость». Острота ума и гений — гораздо шире, чем простой антоним тупости. «Гений чистой красоты» вряд ли «кристально ясный ум». Пушкин в дамах разбирался.

«Умный, но дурак» — типичная кулуарная оценка яркого экспериментатора слабым теоретиком. В сердцах серый экспериментатор точно так же квалифицирует выдающегося теоретика. «Умный дурак» или «умный глупец» — довольно типичные констатации подлинных или воображаемых различий в подходе к стоящим перед нами проблемам. Интересно, что комбинации «дурацкий умник» и «глупый умник» в практике разговорного русского языка почти не встречаются. «Мудрый дурак» — еще более редкий оксюморон. Это не случайно. Мудрость — качество особое, не стоящее в ряду с умом и глупостью. Ум связан с критичностью, а дурость — с ее отсутствием. Мудрость человека пропорциональна пониманию, сочувствию и терпимости, живущим в нем.

Счастье состоит в гармонии между мечтами и желаниями, а отнюдь не в гармонии желаний и возможностей, как многие полагают. Библия налагает ограничения на желания, а не на мечты. Были бы желания, а возможности найдутся. Редкая удача пройти между Сциллой мечтаний и Харибдой желаний.

Счастье — сохранение достоинства. Достоинство — правильное позиционирование себя по жизни. Злосчастье человека унижает, если не элиминирует. Каждый человек — уникальный феномен природы. Человек может быть и обязан стать счастливым. Счастье делает человека неповторимым шедевром культуры.

ПАНАЦЕЯ РОССИИ

Культура — вторая природа. Русская культура — часть второй природы, относящаяся к России.

Сначала люди думают, а после делают. Горькие пропойцы, наивные идиоты и безмозглые дураки заметного созидательного вклада в культуру не вносят. Мышление осуществляется в языке. Львиная доля русской культуры создана людьми, думавшими и писавшими на русском языке. Русский язык — основа русской культуры. Нет никаких оснований считать Россию и русский язык исключениями из общих правил. Похожие, если не те же в точности, соображения можно высказать и о других великих нациях, о роли национальных языков в их национальной культуре.

Стержневой элемент материальной и духовной культуры — наука. Как система знаний и основанных на них представлений наука интернациональна и в этом не знает рас и не имеет границ. Наука как элемент национальной культуры, как финальный продукт и среда обитания национальных научных школ и национальной системы образования связана с нацией, ее языком, менталитетом и традициями. Развитие науки в России немыслимо без научной литературы и образования на русском языке. Русская наука — это наука на русском языке.

Эйлер не писал по-русски и влияние его идей на русскую культуру проявилось усилиями Ломоносова и Остроградского. Эпохальная математика Эйлера, созданная в России на русские деньги, но написанная на французском, немецком и латыни, долго не могла стать элементом русской культуры. Воспитанные до революции старые учителя корифеев советской математики помогали своим ученикам писать первые статьи по-французски и по-немецки, интернализируя русскую мысль с помощью тогдашних мировых языков науки. Молодые гении вскоре прославили Россию в математике статьями, написанными по-русски — на том языке, на котором они творили.

Не исключено, что расцвет математики в России связан с особенностями русской ментальности, сохраненной в русском языке.

Востребованность русских ученых другими культурами — свидетельство жизненной силы системы функционирования науки на русском языке. Русская диаспора обязана русской культуре своими позициями за рубежом. Русский язык не имеет долгов перед диаспорой, не вносящей вклад в культуру России. Не стоит увлекаться филиппиками о преследовании инакомыслия в России, о массовых исходах элиты в царские, советские и постсоветские времена. Нет оснований относить самовластье, тиранию, экстремизм, глупость и порожденные ими катаклизмы в России к исключительным феноменам русского духа и традиции. Курбский, Герцен, Плеханов, Бунин, Горький, Керенский, Набоков, Шувальгин, Бродский, Солженицын всегда были и остаются знаковыми фигурами русской культуры.

Примат русского языка в образовании и науке России не исключает, а подразумевает серьезное отношение к обучению и использованию иностранных языков и, прежде всего, английского языка, ставшего инструментом межнациональной интеграции в науке. Самоизоляция и окукливание крайне губительны для здоровья родного языка. Представители научной русской диаспоры в англоязычных странах нередко говорят и пишут по-английски с безобразными ошибками. Между тем именно это обстоятельство выводит русскую диаспору за пределы интеллектуальной элиты страны обитания, доставляя нашим соотечественникам немалый дискомфорт. Горько наблюдать на международных конференциях слайды выдающихся научных докладов, написанные представителями русской культуры с недопустимыми для мало-мальски грамотного человека ошибками. Еще печальнее распространенное суждение о том, что безграмотность — вещь третьестепенная, лишь бы доклад был неглупым по содержанию. Пренебрежительное отношение к чужому языку — заурядная фанаберия. Неуважение к культуре делает человека бескультурным. Какую культуру невежа игнорирует, значения при этом не имеет.

Спасением науки в России не станут ни англофильство, ни западничество, ни космополитизм, ни ура-патриотизм, ни шапкозакидательство, ни призывы к мировому сообществу учить русский язык и штудировать православных мыслителей. Прогресс невозможен без постоянной канализации мировой науки в русскую ментальность. Лучшие духовные достижения человеческого гения должны

быть общедоступны на русском языке. Не следует апеллировать к внешним силам и преувеличивать роль диаспоры. Диаспора — механизм ассимиляции русского духа в иную среду обитания. Источник русской культуры — Россия. Панацея России — русский язык.

При забвении и деградации русского языка регресс России неизбежен. Модернизация России требует укрепления позиций русского языка как главного инструмента отечественной науки и образования.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Труды международной
конференции молодых ученых

Редакционная коллегия:
*А. В. Абанин, Е. С. Каменецкий,
А. Г. Кусраев, А. В. Наседкин,
В. Г. Цибулин*

Зав. редакцией *В. В. Кибизова*
Компьютерная верстка *М. Д. Бичкаева*

Подписано в печать 20.08.2010.
Формат бумаги $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Усл. п. л. 10,70.
Тираж 200 экз. Заказ № 223.

Южный математический институт ВНЦ РАН
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано в ИПО СОИГСИ им. В. И. Абаева
362040, г. Владикавказ, пр. Мира, 10.

ISBN 978-5-904695-03-3



9 785904 695033