

ЮМИ

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTRE
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

MATHEMATICAL ANALYSIS
AND
MATHEMATICAL MODELING

Proceedings
of the International Conference of Young Scientists
(Russia, Vladikavkaz, July 25–30, 2011)

Vladikavkaz
2011

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Труды VII региональной
школы-конференции молодых ученых
«Владикавказская молодежная
математическая школа»
(Россия, Владикавказ, 25–30 июля 2011 г.)

Владикавказ
2011

ББК 22.16+я43
УДК 517.21+
М 34

Редакционная коллегия:

д. ф.-м. н. Абанин А. В., д. ф.-м. н. Ватульян А. О.,
д. ф.-м. н. Каменецкий Е. С., д. ф.-м. н. Кусраев А. Г.,
д. ф.-м. н. Наседкин А. В.

Ответственный секретарь: к. пед. н. Абатурова В. С.

Издание осуществлено при финансовой поддержке программ целевых расходов Президиума РАН «Поддержка молодых ученых» и «Общеакадемические мероприятия».

Математический анализ и математическое моделирование:
тр. VII региональной shk.-конф. молодых учен. «Владикавказская молодежная математическая школа» (Владикавказ, 25–30 июля 2011 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2011.—130 с.

В сборник вошли обзорные лекции и тезисы секционных докладов VII региональной школы-конференции молодых ученых «Владикавказская молодежная математическая школа», состоявшейся в г. Владикавказе с 25 по 30 июля 2011 г.

ISBN 978-5-904695-12-5

© Южный математический институт
ВНИЦ РАН и РСО-А, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
-------------------	---

ПЛЕНАРНЫЕ ЛЕКЦИИ

Абанин А. В. Основы теории двойственности	11
Бережной Е. И. Экстраполяция и обратные задачи в теории интерполяции	17
Ватульян А. О. Обратные задачи в математической физике	25
Kusraev A. G. Domination problem for positive operators in Banach lattices	33
Наседкин А. В. Механика и моделирование электроупругих материалов	41
Соловьёв А. Н., Спожакин А. С. Идентификация поврежденного состояния слоистых материалов	50

СЕКЦИЯ I МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Баркина У. В. Линейные непрерывные правые обратные к операторам свертки в пространствах функций, анали- тических на выпуклых множествах	67
Gönüllü U. Cyclically Compact Operators on Kaplansky– Hilbert Modules	69
Кузьмина А. В. Об операторе умножения в пространстве целых функций, определяемом двучленным весом	71
Кусраева З. А. О крайних продолжениях положительного ортогонально аддитивного полинома	73

Тасоев Б. Б. Замечания о конструкции Кальдерона — Лозановского	76
Фам Чонг Тиен Нетривиальность весовых пространств голоморфных функций	79

СЕКЦИЯ II МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Каргин М. А. Компьютерное моделирование некоторых задач остеосинтеза в программном комплексе ANSYS	83
Минасян Д. Г. Влияние проскальзывания на движение сыпучей среды в центробежной мельнице вертикального типа	85
Олейников А. О. Конечно-элементное моделирование осесимметричного многослойного пьезоэлектрического датчика ускорений	88
Орлова Н. С. Две двухжидкостные модели виброожижения	90
Плиева Л. Ю. Об одной квадратурной формуле для сингу- лярного интеграла с весовой функцией	92
Ремизов В. В., Шевцова М. С. Конечно-элементный расчет эффективных свойств пористой пьезокерамики с учетом неоднородности поляризации и кластерных моделей	94
Соболев С. Е. Некоторые закономерности измельчения доломита в центробежной мельнице вертикального типа	96
Хосаева З. Х. Постановка задачи о влиянии шоковых воздействий на общество	98

ПРИЛОЖЕНИЕ

Каменецкий Е. С. Решение уравнений в частных производных методом конечных разностей	103
Сведения об авторах	129

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящий сборник вошли материалы VII региональной школы-конференции молодых ученых «Владикавказская молодежная математическая школа», проводившейся в период с 25 по 30 июля 2011 г. Школа-конференция была организована Южным математическим институтом Владикавказского научного центра РАН совместно с Северо-Осетинским государственным университетом им. К. Л. Хетагурова на базе Молодежного краеведческо-туристического центра «Барс» (п. В. Фиагдон, Алагирский район РСО-А).



В работе школы-конференции приняли участие студенты магистратуры и аспирантуры зарубежных и российских вузов: Турция, г. Стамбул, Istanbul Kultur University; Россия, г. Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет, Южный научный центр, г. Владикавказ, Северо-Осетинский государственный университет

им. К. Л. Хетагурова, Северо-Кавказский горно-металлургический институт, а также аспиранты и молодые ученые Южного математического института ВНЦ РАН и РСО-А.

На Школе были прочитаны циклы лекций для молодых ученых: «Основы теории двойственности», лектор — д. ф.-м. н., профессор А. В. Абанин (ЮФУ, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, Ростов-на-Дону); «Теоремы экстраполяции операторов в идеальных пространствах», лектор — д. ф.-м. н., профессор Е. И. Бережной (ЯГУ им. П. Г. Демидова, Ярославль); «Модели механики деформируемого твердого тела», лектор — д. ф.-м. н., профессор А. О. Ватульян (ЮФУ, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, Ростов-на-Дону); «Линейные мажорируемые операторы», лектор — д. ф.-м. н., профессор А. Г. Кусраев (ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ); «Механика и моделиро-

вание электроупругих материалов», лектор — д. ф.-м. н., профессор А. В. Наседкин (ЮФУ, Ростов-на-Дону); «Модели теории упругости и модели разрушения твердых тел», лектор — д. ф.-м. н., профессор А. Н. Соловьев (ДГТУ, Ростов-на-Дону). Доклады лекторов обзорной тематики представлены в разделе «Пленарные лекции».



В рамках школы прошла научная конференция молодых ученых по научным направлениям «Математический анализ» и «Математическое моделирование». Тезисы секционных докладов представлены в соответствующих разделах настоящего сборника.

В ходе проведения школы-конференции осуществлялись индивидуальные консультации лекторов с аспирантами, магистрантами и молодыми учеными по актуальным научным направлениям.



Во время досуга участники Школы совершали пешие экскурсии по живописным местам Куртатинского ущелья, проводили спортивные соревнования по настольному теннису, играли в волейбол.

На закрытии школы лекторы и молодые участники выразили надежду на то, что школа будет проводиться и в последующие годы и заверили организаторов в необходимости проведения школы для повышения мотивации и оказания научно-методической поддержки молодым ученым в осуществлении научной деятельности.

Пленарные лекции

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ

А. В. Абанин¹

Введение

Изучение двойственности занимает основополагающее место в теории локально выпуклых пространств. Любой современный курс, в котором локально выпуклые пространства выступают объектом или главным инструментом исследования, по большому счету, сводится к изложению различных вопросов теории двойственности и ее применений в функциональном анализе, теории функций, дифференциальных уравнениях и других разделах математики. За подробностями мы отсылаем квалифицированного читателя к энциклопедическим книгам Н. Данфорда, Дж. Шварца [2] и Р. Эдвардса [6], а менее искушенного — к емкому сжатому курсу А. П. и В. Дж. Робертсонов [5]. Нас, прежде всего, интересует практический аспект теории двойственности, связанный с ее приложениями к решению одного типа линейных проблем анализа. Именно, мы подробно рассмотрим особенности технологии ее использования в тех случаях, когда изучаемая задача может быть переформулирована в терминах сюръективности некоторого линейного оператора, действующего из одного локально выпуклого пространства в другое. В подобных ситуациях применение общих положений теории двойственности оказывается едва ли не единственным инструментом получения функционального ключа к проблеме. В качестве одного из последних по времени примеров эффективного использования теории двойственности можно привести полное решение задачи об описании пространств ультрадифференцируемых функций типа Берлинга и Румье, допускающих аналоги теорем Бореля и Уитни о продолжении (см. [1, глава 7]). Отметим, что теория двойственности, с одной стороны, позволяет существенно упростить исследование, а с другой — вскрывает фундаментальные причины наличия или отсутствия изучаемого свойства. Без нее последнее, на наш взгляд, было бы сделать весьма и весьма затруднительно.

Общая технология, о которой пойдет речь, сводится к нескольким блокам, для реализации которых необходимо:

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А.

1. Переформулировать исходную задачу в терминах линейных операторов $L : E \rightarrow F$, действующих в некоторых локально выпуклых пространствах E и F .

2. Найти какое-либо изоморфное описание сопряженных E' и F' в виде пространств числовых последовательностей, функций, мер.

3. Иметь конструктивное описание действия сопряженного оператора $L' : F' \rightarrow E'$ (например, это может быть оператор умножения, сужения, интерполяции).

4. Решить соответствующую исходной задачу из теории последовательностей, функций, мер.

1. Сильное сопряженное

Одним из следствий теоремы Хана — Банаха является факт нетривиальности сопряженного E' с локально выпуклым пространством E . Более того, эта теорема влечет, что между пространствами E и E' , наделенными своими слабыми топологиями $\sigma(E, E')$ и $\sigma(E', E)$, имеется симметрия. Симметрия, в свою очередь, позволяет переформулировать свойства линейных непрерывных операторов в терминах сопряженных с ними. Прежде чем приводить типичный пример подобной переформулировки, напомним определение *сопряженного оператора*.

Пусть E, F — локально выпуклые пространства, $L : E \rightarrow F$ — линейный непрерывный оператор (достаточно его слабой непрерывности). Тогда *сопряженный оператор*, определяемый по правилу

$$\langle x, L'y' \rangle = \langle Lx, y' \rangle \quad (x \in E, y' \in F'),$$

действует линейно из F' в E' и является *слабо непрерывным*.

Теорема 1. Пусть E, F — локально выпуклые пространства, $L : E \rightarrow F$ — линейный непрерывный оператор. Оператор L сюръективен (т. е. $L(E) = F$) тогда и только тогда, когда L' — слабый изоморфизм из F' в E' .

Поскольку $L' : F' \rightarrow E'$ всегда слабо непрерывен, то применение этой теоремы (ее достаточной части) сводится к проверке инъективности L' и слабой непрерывности обратного к нему оператора из $L'(F')$ с индуцированной топологией $\sigma(E', E)$ в F' , со слабой топологией $\sigma(F', F)$. Как правило, именно второе условие — слабой непрерывности обратного — составляет основную трудность и определяет успех решения конкретной задачи. Однако, как показывает

практика, слабые топологии очень неудобны для исследования. Если иметь в виду упомянутую выше симметрию между локально выпуклым пространством и его сопряженным со слабой топологией, то теорема 1 в определенном смысле является тавтологией. Гораздо более продуктивным представляется использование топологии сильного сопряженного. Приведем в связи с этим некоторые определения и факты.

Начнем с общеизвестного напоминания о том, что в сопряженном E' с нормированным пространством E , $\|\cdot\|$ с единичным шаром B можно определить сопряженную норму

$$\|x'\|' := \sup_{x \in B} |\langle x, x' \rangle| \quad (x' \in E'),$$

относительно которой E' является банаховым пространством. В данном случае E' , $\|\cdot\|'$ — это и есть сильное сопряженное с E , $\|\cdot\|$ пространство. В общей ситуации сильное сопряженное вводится по аналогичному сценарию. Обозначим через $\mathcal{B}$ семейство всех ограниченных множеств в локально выпуклом пространстве E . Каждое множество $B \in \mathcal{B}$ порождает преднорму

$$p'_B(x') := \sup_{x \in B} |\langle x, x' \rangle| \quad (x' \in E')$$

на E' .

Топология $\beta(E', E)$ в E' , задаваемая набором преднорм $(p'_B : B \in \mathcal{B})$, называется *сильной топологией* в E' , а E' , ею наделенное, — *сильным сопряженным* с E . Сильное сопряженное обозначается символом E'_b (или E'_β).

Для пространств Фреше и сильных сопряженных к рефлексивным пространствам Фреше имеет место двойственная связь между замкнутостью образов линейного непрерывного оператора и его сопряженного.

Теорема 2. Пусть E, F — пространства Фреше или сильные сопряженные к рефлексивным пространствам Фреше, $L : E \rightarrow F$ — линейный непрерывный оператор. Множество $L(E)$ замкнуто в F тогда и только тогда, когда множество $L'(F')$ замкнуто в E'_b .

Отсюда и из теоремы 1 вытекает следующий критерий сюръективности оператора.

Теорема 3. Пусть E, F — пространства Фреше или сильные сопряженные к рефлексивным пространствам Фреше, $L : E \rightarrow F$ —

линейный непрерывный оператор. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $L(E) = F$;
- (ii) $L' : F' \rightarrow E'$ инъективен, и множество $L'(F')$ замкнуто в E'_b .

2. Сопряженное как индуктивный предел

Замена слабого сопряженного сильным, описанная в предыдущем пункте, даже в случае близких к банаховым пространствам Фреше имеет один существенный недостаток. Чтобы эффективно использовать сильное сопряженное, нужно знать описание всех ограниченных множеств в исходном пространстве (или хотя бы базы таких множеств). А это в ненормируемом случае бывает весьма непросто. С другой стороны, если опять же исходить из нормируемого случая как из первоосновы, то можно ввести другую, в какой-то мере более естественную, топологию в E' . Именно для нормированного пространства E , $\|\cdot\|$ сопряженная норма может быть записана в виде

$$\|x'\|' := \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, x' \rangle| \quad (x' \in E').$$

В общем случае локально выпуклого пространства E с топологией, задаваемой набором преднорм $\mathcal{P}$, поступают так. С каждой преднормой $p \in \mathcal{P}$ ассоциируют банаховое пространство

$$E'_p := \left\{ x' \in E' : p'(x') := \sup_{p(x) \leq 1} |\langle x, x' \rangle| < \infty \right\}.$$

Ясно, что $E' = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} E'_p$. Значит, E' можно наделить топологией $\lambda(E', E)$ внутреннего индуктивного предела семейства банаховых пространств $(E'_p : p \in \mathcal{P})$. Обозначим полученное локально выпуклое пространство символом E'_λ . Нетрудно видеть, что $\lambda(E', E)$ всегда мажорирует $\beta(E', E)$. Имеются примеры, когда $\lambda(E', E)$ строго сильнее $\beta(E', E)$. Поэтому просто так заменить в теореме 2 сильное сопряженное E'_b на E'_λ не удастся. Совпадение топологий $\lambda(E', E)$ и $\beta(E', E)$ имеет место, например, для рефлексивных пространств Фреше (подробнее можно ознакомиться с этим в [6, § 8.4]).

Самыми распространенными в приложениях рефлексивными пространствами Фреше являются пространства Фреше — Шварца. Класс этих пространств обозначают через (FS) , а двойственных с ними — через (DFS) . Компактное изложение свойств (FS)

и (DFS) пространств имеется в обзоре В. В. Жаринова [3]. В частности, известно, что эти классы взаимно двойственны друг к другу в том смысле, что сильное сопряженное к любому (FS) -пространству относится к классу (DFS) и наоборот. Более общие классы проективных и индуктивных спектров систематически изучались в работах Д. Фогта (см., например, [7]).

Приведем один из наиболее используемых в приложениях результатов о сюръективности оператора в (FS) пространствах.

Теорема 4. Пусть E, F — (FS) -пространства с топологиями, заданными упорядоченными по возрастанию наборами преднорм $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ соответственно. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $L(E) = F$;
- (ii) Для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$, что

$$q'_m(y') \leq Cp'_n(L'y') \quad (y' \in F').$$

3. Применения к линейным задачам анализа

Теорема 4 и подобные ей результаты имеют достаточно широкую сферу применений к линейным задачам анализа. Прежде всего, это относится к проблемам разрешимости уравнений свертки и в частных производных, разложений функций в ряды, продолжению бесконечно дифференцируемых функций с замкнутых множеств. В качестве примера приведем схематичное изложение доказательства одного из базовых результатов теории абсолютно представляющих систем, разработанной Ю. Ф. Коробейником (см. [4]).

Пусть E — полное отделимое локально выпуклое пространство с топологией, задаваемой набором преднорм $\mathcal{P}$. Последовательность $X = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ его элементов называется *абсолютно представляющей системой* в E , если любой элемент x из E может быть представлен в виде суммы ряда $\sum c_k x_k$ (c_k — скаляры), абсолютно сходящегося к x в E . С каждой последовательностью X свяжем пространство числовых последовательностей

$$A_2 := \left\{ c = (c_k)_{k=1}^{\infty} : q_p(c) := \sum |c_k| p(x_k) < \infty, \forall p \in \mathcal{P} \right\}$$

и наделим его топологией, определяемой набором преднорм $\{q_p : p \in \mathcal{P}\}$. Ясно, что X — абсолютно представляющая система в E в том

и только в том случае, когда оператор представления $L : A_2 \rightarrow E$, который действует по правилу $L(c) = \sum c_k x_k$, является сюръективным. Легко видеть, что этот оператор непрерывен, а сопряженный к нему представляет собой (при естественной реализации сопряженного с A_2 пространства в виде пространства числовых последовательностей ограниченных с весом) оператор «сужения»: $\varphi \in E' \mapsto (\varphi(x_k))$. Поэтому применение некоторого усиления теоремы 4 приводит к следующему функциональному критерию.

Теорема 5. Пусть E — пространство Фреше с топологией, заданной упорядоченным по возрастанию набором преднорм $(p_n)_{n=1}^\infty$. Для того чтобы последовательность $(x_k)_{k=1}^\infty$ его элементов являлась абсолютно представляющей системой в E , необходимо и достаточно, чтобы для любого $n \in \mathbb{N}$ существовали $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что

$$\sup_{x \in E} \frac{|\varphi(x)|}{p_m(x)} \leq C \sup_{k \geq 1} \frac{|\varphi(x_k)|}{p_n(x_k)} \quad (\forall \varphi \in E').$$

Литература

1. Абанин А. В. Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения.— М.: Наука, 2007.—222 с.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория.—М.: ИЛ, 1962.—896 с.
3. Жаринов В. В. Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, № 4.—С. 97–131.
4. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы: теория и приложения / отв. ред. Ю. А. Кирютенко.—Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2009.—336 с.—(Итоги науки. ЮФО. Мат. монография. Вып. 1).
5. Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—258 с.
6. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
7. Vogt D. Topics on projective spectra of (LB) -spaces // Advances in the Theory of Fréchet Spaces. NATO ASI Ser.—Dordrecht: Kluwer, 1989.—Vol. 287.—P. 11–27.

PRINCIPLES OF THE DUALITY THEORY

A. V. Abanin

We describe briefly a general scheme for how to apply the duality theory to linear problems of analysis.

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ¹

Е. И. Бережной²

1. Введение. После бурного развития теории интерполяции линейных операторов (см., например, [5, 12] или более ранние [4, 17, 20, 21]) наступило некоторое затишье. Это обусловлено, по-видимому, следующими факторами: в общей теории остались нерешенными лишь очень трудные проблемы; отсутствуют новые модельные задачи из гармонического анализа, которые могли бы дать новый толчок развития теории. Цель работы — обратить внимание на некоторые открытые вопросы, тесно связанные с классической теорией интерполяции. Отметим, что список литературы не претендует на полноту.

2. Предварительные сведения. В настоящем пункте мы опишем три важнейших интерполяционных функтора. Именно эти функторы определяют лицо теории интерполяции линейных операторов в настоящее время. Более детальное описание этих функторов и примеры их вычисления можно найти в цитируемых выше книгах.

Пусть задана интерполяционная пара банаховых пространств (A_0, A_1) , т. е. A_0 и A_1 непрерывно вложены в векторное топологическое пространство V . Для интерполяционной пары корректно определены пространства $A_0 + A_1$, $A_0 \cap A_1$, стандартные нормы в которых определены равенствами

$$\|a|A_0 + A_1\| = \inf\{\|a_0|A_0\| + \|a_1|A_1\| : a = a_0 + a_1\};$$

$$\|a|A_0 \cap A_1\| = \max\{\|a|A_0\|, \|a|A_1\|\}.$$

Для $t \in R_+$ на пространствах $A_0 + A_1$ и $A_0 \cap A_1$ естественным образом вводятся еще два семейства норм

$$K(t, a; A_0, A_1) = \inf\{\|a_0|A_0\| + t\|a_1|A_1\| : a = a_0 + a_1\}; \quad (1)$$

$$J(t, a; A_0, A_1) = \max\{\|a|A_0\|, t\|a|A_1\|\}. \quad (2)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-01-00321.

²Россия, Ярославль, Ярославский госуниверситет им. П. Г. Демидова.

Пусть X — идеальное пространство на R_+ , содержащее функцию $\min(1, t)$. Используя пространство $A_0 + A_1$ с набором норм (1), вводится пространство $(A_0, A_1)_{K, X}$, состоящее из тех элементов $A_0 + A_1$, для каждого из которых конечна норма

$$\|a|(A_0, A_1)_{K, X}\| = \|K(t, a; A_0, A_1)|X\|. \quad (3)$$

Пусть X — идеальное пространство на R_+ , содержащее функцию $\max(1, t)$. По аналогии с построением пространства $(A_0, A_1)_{K, X}$, используя пространство $A_0 \cap A_1$ с набором норм (2), вводится пространство $(A_0, A_1)_{J, X}$, состоящее из тех элементов $A_0 + A_1$, для каждого из которых конечна норма

$$\|a|(A_0, A_1)_{J, X}\| = \inf \left\{ \|J(t, a(t); A_0, A_1)|X\| : a = \int_0^\infty \frac{a(t)}{t} dt \right\}, \quad (4)$$

где интеграл в (4) понимается в смысле Бохнера и сходится в пространстве $A_0 + A_1$. Пространства $(A_0, A_1)_{K, X}$ и $(A_0, A_1)_{J, X}$ являются интерполяционными и представляют основу для K - и J -функторов (методов) интерполяции Петри.

Пусть задана интерполяционная пара банаховых пространств (A_0, A_1) над полем комплексных чисел. Через $H(A_0, A_1)$ обозначим пространство функций, определенных в полосе $\pi = \{z : \operatorname{Re} z \in [0, 1]\}$ и принимающих значения в $A_0 + A_1$, каждая из которых непрерывна в π , аналитична внутри π , стремится к нулю на бесконечности и $f(it) \in A_0$; $f(1+it) \in A_1$ при всех $t \in R$. Интерполяционное пространство $[A_0, A_1]_\theta$ ($\theta \in [0, 1]$) состоит из тех $a \in A_0 + A_1$, для каждого из которых найдется $f \in H(A_0, A_1)$ с $f(\theta) = a$. С введением нормы

$$\begin{aligned} \|a|[A_0, A_1]_\theta\| &= \\ &= \inf \left\{ \max \left\{ \sup_{t \in R} \|f(it)|A_0\|; \sup_{t \in R} \|f(1+it)|A_1\| \right\} : a = f(\theta) \right\} \end{aligned}$$

пространство $[A_0, A_1]_\theta$ становится банаховым. По пространствам $[A_0, A_1]_\theta$ стандартным образом строится функтор комплексного метода интерполяции.

Пусть задана интерполяционная пара банаховых пространств (A_0, A_1) . Обозначим через Φ множество квазивогнутых функций $\varphi : R_+ \rightarrow R_+$, для каждой из которых выполнены соотношения

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = 0.$$

Зафиксируем $\varphi \in \Phi$. Интерполяционное пространство $G(\varphi; A_0, A_1)$ состоит из тех $a \in A_0 + A_1$, для каждого из которых найдется представление $a = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k$ такое, что для всех $k \in Z$, $a_k \in A_0 \cap A_1$, ряд сходится в $A_0 + A_1$, и выполняются соотношения

$$\sup_n \left\{ \max_{\substack{\xi_k = \pm 1, \\ \forall k \in Z}} \left\| \sum_{-n}^n \frac{a_k}{\varphi(2^k)} \xi_k |A_0 \right\|; \max_{\substack{\xi_k = \pm 1, \\ \forall k \in Z}} \left\| \sum_{-n}^n \frac{2^k a_k}{\varphi(2^k)} \xi_k |A_1 \right\| \right\} < \infty.$$

С введением нормы

$$\begin{aligned} & \|a|G(\varphi; A_0, A_1)\| = \\ & = \inf \left\{ \sup_n \left\{ \max_{\substack{\xi_k = \pm 1, \\ \forall k \in Z}} \left\| \sum_{-n}^n \frac{a_k}{\varphi(2^k)} \xi_k |A_0 \right\|; \max_{\substack{\xi_k = \pm 1, \\ \forall k \in Z}} \left\| \sum_{-n}^n \frac{2^k a_k}{\varphi(2^k)} \xi_k |A_1 \right\| \right\} : \right. \\ & \quad \left. a = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k : a_k \in A_0 \cap A_1, \text{ ряд сходится в } A_0 + A_1 \right\} \end{aligned}$$

пространство $G(\varphi; A_0, A_1)$ становится банаховым. По пространствам $G(\varphi; A_0, A_1)$ также строится интерполяционный функтор.

3. ЗАДАЧА А (обратная задача теории интерполяции). Зафиксируем интерполяционную пару (A_0, A_1) , по которой с помощью некоторой конструкции F (под F можно понимать интерполяционный функтор) построено третье пространство $F(A_0, A_1)$. Можно ли с помощью конструкции F получить пространство $F(A_0, A_1)$ из других интерполяционных пар, обладающих дополнительными свойствами.

Конкретным примером данной задачи может рассматриваться классическая лемма Шура, которая в нужной нам редакции выглядит так.

Теорема (тест Шура). Пусть задан интегральный оператор $Kx(t) = \int k(t, s)x(s)ds$ с неотрицательным ядром $k(t, s)$. Оператор K является ограниченным в пространстве Лебега L^p тогда и только тогда, когда найдется положительная функция w (вес) такая, что оператор K ограничен как оператор из $L^\infty(w^{-q})$ в $L^\infty(w^{-q})$ и из $L^1(w^p)$ в $L^1(w^p)$ ($1/q + 1/p = 1$).

Здесь $L^p(w) = \{x : \|x|L^p(w)\| = (\int |x(s)w(s)|^p ds)^{1/p} < \infty\}$.

Различные обобщения теста Шура на класс позитивных операторов приведены в [6, 8, 11]. Там же показано, что распространить тест Шура на отличный от L^p класс пространств, вообще говоря, нельзя.

Таким же образом можно переформулировать знаменитую теорему П. Джона [13] о факторизации весов, удовлетворяющих A_p -условию Макенхаупта.

Конечно, в такой постановке обратная задача теории интерполяции выглядит трудно обозримой. Можно сузить постановку обратной задачи до следующего вида.

Задача A' . Рассмотрим произвольную интерполяционную пару (A_0, A_1) , по которой с помощью некоторой конструкции F построено третье пространство $F(A_0, A_1)$. Нужно описать все такие интерполяционные пары (A_0, A_2) , что с точностью до эквивалентных норм справедливо равенство $F(A_0, A_1) = F(A_0, A_2)$.

Даже в такой постановке задачи отсутствуют какие-либо общие результаты. Из имеющихся результатов отметим работу [7], в которой для вещественного метода интерполяции рассматривается задача A' для класса симметричных пространств.

Следующая проблема тесно связана с проблемой различения пространств с помощью конструкции F .

4. Задача В (задача Лионса). Рассмотрим произвольную интерполяционную пару (A_0, A_1) , по которой с помощью некоторой конструкции F (под F можно понимать интерполяционный функтор) построено третье пространство $F(A_0, A_1)$. Предположим, что с точностью до эквивалентных норм справедливо равенство $A_0 = F(A_0, A_1)$. Следует ли отсюда, что с точностью до эквивалентных норм выполняется равенство $A_0 = A_1$.

В случае, когда $F(A_0, A_1) = [A_0, A_1]_\theta$ ($\theta \in (0, 1)$), т. е. для пространств комплексного метода интерполяции, Стафни показал [19], что если пересечение $A_0 \cap A_1$ плотно в A_0 и A_1 , то из равенства $A_0 = [A_0, A_1]_\theta$ следует соотношение $A_0 = A_1$.

Пусть $F(A_0, A_1) = G(\varphi, A_0, A_1)$. В этом случае полный ответ на задачу Лионса дан в работе [10].

Для функтора вещественного метода интерполяции соответствующий результат известен как теорема Вольфа (см., например, [23]).

Представляет интерес и близкая к задаче Лионса

Задача B' . Рассмотрим произвольную интерполяционную пару (A_0, A_1) , по которой с помощью функтора F построено третье пространство $F(A_0, A_1)$, причем функтор F отличен от функтора пересечения. Предположим, что с точностью до эквивалентных норм справедливо равенство $A_0 \cap A_1 = F(A_0, A_1)$. Следует ли отсюда,

что с точностью до эквивалентных норм выполняется равенство $A_0 = A_1$. Аналогичный вопрос для случая выполнения равенства $A_0 + A_1 = F(A_0, A_1)$ в случае отличия функтора F от функтора суммы.

5. Задача экстраполяции. Рассмотрим произвольную интерполяционную пару (A_0, A_1) , по которой с помощью некоторой конструкции $F_\theta(A_0, A_1)$ построен набор банаховых пространств, $(\theta \in [0, 1])$ (под F_θ можно понимать набор интерполяционных функторов, зависящих от параметра θ), причем справедливо соотношение: если $\theta_0 > \theta_1$, то $F_{\theta_1}(A_0, A_1) \subseteq F_{\theta_0}(A_0, A_1)$. Пусть фиксировано пространство X и задан оператор $A : F_\theta(A_0, A_1) \rightarrow X$, положим $\|A|F_\theta(A_0, A_1) \rightarrow X\| = \xi(\theta)$. Пусть функция $\xi(\theta)$ конечна при всех $\theta \in [0, 1)$, но $\lim_{\theta \rightarrow 1} \xi(\theta) = \infty$. Нужно построить «максимальное» пространство $F_{\text{extr}}(\xi, A_0, A_1)$ такое, что $F_\theta(A_0, A_1) \subseteq F_{\text{extr}}(\xi, A_0, A_1)$, и тем не менее $\|A|F_{\text{extr}}(\xi, A_0, A_1) \rightarrow X\| < \infty$.

Сама постановка задачи экстраполяции инспирирована вопросом об ограниченности оператора максимальной функции Харди — Литльвуда в шкале L^p (см. [15] или [22]).

Общая теория экстраполяции построена лишь для функтора вещественной интерполяции [14, 16]. Желательно было бы построить теорию экстраполяции для функторов комплексного метода интерполяции и функтора $G(\varphi, A_0, A_1)$.

Отметим, что вычислению конкретных пространств, построенных на базе общих конструкций посвящены [1–3, 14, 16, 18].

Конечно, для приложений важна не только общая теория. Не менее важными являются примеры получения конкретных результатов. Короткое доказательство точной теоремы экстраполяции для шкалы L^p приведено в работе [9]. Из доказательства в [9] следует, что для экстраполяции в симметричных пространствах естественной будет постановка задачи в терминах пространств Лоренца. Напомним определение пространства Лоренца. Пусть ψ -квазивогнутая, равная нулю в нуле неотрицательная функция. Пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$ состоит из тех x , для которых конечна норма

$$\|x|\Lambda(\psi)\| = \int_0^1 x^*(s) d\psi(s).$$

Если $\psi(t) = t^\tau$ ($0 < \tau < 1$), то, как обычно, через Λ^τ обозначается соответствующее пространство Лоренца. Описание симметрич-

ных пространств, пространств Лоренца и их свойств можно найти в [17].

Задача экстраполяции для набора пространств Лоренца выглядит следующим образом.

Пусть на семействе пространств Λ^τ ($0 \leq \tau_0 < \tau_1 \leq 1$) задан линейный оператор $T : \Lambda^\tau \rightarrow X$, для которого выполняются условия $\|T|_{\Lambda^\tau} \rightarrow X\| = \xi(\tau)$, причем $\lim_{\tau \rightarrow \tau_1} \xi(\tau) = \infty$. Требуется охарактеризовать «наибольшее» пространство Λ_{ext} такое, что оператор ограниченно действует из Λ_{ext} в пространство X .

Сейчас мы приведем характеристику экстраполяционных пространств Лоренца.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$ является *точным экстраполяционным* для класса линейных операторов относительно параметров $\{(\tau_0, \tau_1); \xi(\tau)\}$, если для каждого линейного оператора $T : \Lambda^\tau \rightarrow X$, при всех (τ_0, τ_1) удовлетворяющего неравенству $\|T|_{\Lambda^\tau} \rightarrow X\| \leq c\xi(\tau)$, верно неравенство $\|T|_{\Lambda(\psi)} \rightarrow X\| < \infty$ и для каждого пространства Лоренца $\Lambda(\psi_0)$, фундаментальная функция которого удовлетворяет равенству $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_0(t)}{\psi(t)} = 0$, найдется банахово пространство X и линейный оператор $T : \Lambda^\tau \rightarrow X$, при всех (τ_0, τ_1) удовлетворяющий неравенству $\|T|_{\Lambda^\tau} \rightarrow X\| \leq c\xi(\tau)$, для которого верно равенство $\|T|_{\Lambda(\psi_0)} \rightarrow X\| = \infty$.

Теорема. Зафиксируем (τ_0, τ_1) . Пусть X — некоторое банахово пространство, T — линейный оператор, $T : \Lambda^\tau \rightarrow X$ и $\|T : \Lambda^\tau \rightarrow X\| \leq \xi(\tau)$. Для $t \in (0, 1)$ с помощью равенства

$$\psi_\xi(t) = \inf_{\tau \in (\tau_0, \tau_1)} \xi(\tau) t^\tau.$$

определим функцию $\psi_\xi(t)$.

Тогда пространство $\Lambda(\psi_\xi)$ является *точным экстраполяционным* пространством для класса линейных операторов и для класса квазилинейных операторов относительно параметров $\{(\tau_0, \tau_1); \xi(\tau)\}$.

Более того, если $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_0(t)}{\psi_\xi(t)} = 0$, то для любого банахова пространства X найдется линейный оператор $T : \Lambda^\tau \rightarrow X$, при всех (τ_0, τ_1) удовлетворяющий неравенству $\|T|_{\Lambda^\tau} \rightarrow X\| \leq c\xi(\tau)$, для которого верно равенство $\|T|_{\Lambda(\psi_0)} \rightarrow X\| = \infty$.

Было бы интересно получить аналог последней теоремы и для других наборов пространств.

Литература

1. Асташкин С. В. Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных действительным методом интерполяции // Сиб. мат. журн.—2005.—Т. 46, № 2.—С. 205–225.
2. Асташкин С. В., Лыков К. В. Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, «близких» к L^∞ // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 5.—С. 974–992.
3. Асташкин С. В., Лыков К. В. Сильно экстраполяционные пространства и интерполяция // Сиб. мат. журн.—2009.—Т. 50, № 2.—С. 250–266.
4. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение.—М.: Мир, 1980.—264 с.
5. Bennett C., Sharpley R. C. Interpolation of operators // Pure and Appl. Math.—Acad. Press, 1988.—Vol. 129.—467 p.
6. Бережной Е. И. Теоремы о представлении пространств и лемма Шура // Доклады РАН.—1995.—Т. 344, № 6.—С. 727–730.
7. Бережной Е. И. Обратная задача теории интерполяции операторов // Мат. заметки.—1996.—Т. 59, вып. 3.—С. 323–333.
8. Бережной Е. И., Малигранда Л. Об экстраполяции операторов и границах применимости теста Шура // Доклады РАН. Сер. Математика.—2003.—Т. 393, № 5.—С. 583–586.
9. Бережной Е. И., Перфильев А. А. Точная теорема экстраполяции для операторов // Функциональный анализ и его приложения.—2000.—Т. 74, вып. 3.—С. 329–330.
10. Bereznoi E. I., Mastyló M. The Lions's problem for Gustavsson–Peetre functor // Publ. Math.—1990.—Vol. 34.—P. 175–179.
11. Bereznoi E. I., Maligranda L. Representation of Banach ideal spaces and factorization of operators // Canadian J. of Math.—2005.—Vol. 57, № 5.—P. 897–940.
12. Brudnyi Yu. A., Kruglyak N. Ya. Interpolation functors and interpolation spaces.—Amsterdam: North-Holland, 1991.—718 p.
13. Garcia-Cuerva J., Rubio de Francia J. Weighted norm inequalities and related topics.—Amsterdam: North Holland, 1985.—431 p.
14. Jawerth B., Milman M. Extrapolation theory with applications // Memoirs of Amer. Math. Soc.—1991.—Vol. 89, № 440.—P. 1–82.
15. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1.—М.: Мир, 1965.—537 с.
16. Karadzhov G. E., Milman M. Extrapolation theory: new results and applications // J. Approx. Theory.—2005.—Vol. 133.—P. 38–99.
17. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1977.—400 с.
18. Martin J., Milman M. Sharp Gagliardo–Nirenberg inequalities via symmetrization // Math. Res. Lett.—2006.—Vol. 89, № 1.—P. 49–62.
19. Stafney J. D. Analytic interpolation of certain multiplier spaces // Pacific J. of Math.—1970.—Vol. 32, № 1.—P. 241–248.
20. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.—М.: Мир, 1980.—664 с.
21. Ovchinnikov V. I. The method of orbits in interpolation theory // Math. Rept.—1984.—Vol. 1.—P. 349–515.

- 22. *Yano S.* An extrapolation theorem // J. Math. Soc. Japan.—1951.—Vol. 3, № 2.—P. 296–305.
- 23. *Janson S., Nilsson P., Peetre J.* Notes on Wolff's note on interpolation spaces // Proc. London Math. Soc.—1984.—Vol. 48.—P. 283–299.

EXTRAPOLATION AND INVERSE PROBLEMS OF INTERPOLATION THEORY

E. I. Bereznoi

The article gives a short overview of the problem mentioned in the title. For the problem of extrapolation in Lorentz spaces give a construction of extrapolations space and shows that this space is exact.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

А. О. Ватульян¹

1. Введение. Обратные задачи — относительно новый раздел математической физики, требующий строгости математических формулировок, аккуратности при построении дискретных схем и некоторых специальных вычислительных приемов при численном анализе [1–8]. Расширение используемых классов моделей в математической физике требует для адекватного описания *объекта исследования* (ОИ) не только использования новых типов операторов (нелинейных, не обладающих сферической симметрией, имеющих переменные коэффициенты), но и способов определения из данных экспериментов или наблюдений параметров модели-постоянных или функций, характеризующих модель. Таким образом, для построения математической модели ОИ на основании установления связи между воздействием и откликом на первом этапе необходимо выбрать вид этой связи или определить структуру оператора, осуществляющего соответствующее отображение. Отметим, что одному ОИ может быть поставлено в соответствие несколько математических моделей, отличающихся числом и степенью учета различных факторов и порождающих некоторую иерархию моделей.

Очень часто на практике встречаются ситуации, когда объект исследования либо принципиально недоступен для наблюдения, либо проведение эксперимента по его изучению либо весьма дорого, либо практически неосуществимо. Примерами таковых могут служить эксперименты по изучению внутреннего строения Земли, на основе которых можно было бы прогнозировать месторождения полезных ископаемых, предсказывать время и место разрушительных землетрясений. Похожая ситуация возникает в проблемах неразрушающего контроля изделий и конструкций, когда требуется выявить дефект (трещину или полость) внутри работающего объекта (самолета, ракеты или ядерного реактора), причем очень часто это необходимо делать, не нарушая режима работы исследуемого объекта.

Таким образом, общим свойством приведенных выше примеров является то обстоятельство, что по некоторым проявлениям

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А.

ОИ (следствиям) требуется восстановить некоторые его характеристики (причины). Обычно для моделей математической физики причинами выступают начальные условия, граничные условия, коэффициенты дифференциальных операторов, область, занятая ОИ, а следствиями-характеристиками физических полей. Обращение причинно-следственных связей и составляет суть *обратных задач* (ОЗ), для которых в последнее время сложилась классификация, связанная с определением той или иной причины (или нескольких причин) — ретроспективные ОЗ, граничные ОЗ, коэффициентные ОЗ и геометрические ОЗ.

Задача определения оператора (идентификация ОИ) может быть разделена на два важных этапа: 1 этап — структурная идентификация, 2 этап — параметрическая идентификация. На первом этапе структурной идентификации определяется (или выбирается) структура оператора, которая зависит как от самого ОИ, так и от целей моделирования. На этапе параметрической идентификации определяются параметры или функции, входящие в описание оператора. На основе полной идентификации ОИ, например, возможно прогнозирование его дальнейшего поведения.

Отметим, что ОЗ имеют постоянно расширяющиеся области приложения в инженерной практике, среди которых отметим задачи об определении свойств материалов (механических, теплофизических, пьезоэлектрических), идентификация полимерных и композитных материалов, пьезокерамик, биологических тканей (твердых — костная ткань и мягких — мышцы, сухожилия, кожа), задачи геофизики и сейсморазведки (определение структуры и свойств литосферных плит, расположения и мощности залежей полезных ископаемых по отраженным от месторождения звуковым сигналам), прогнозирование землетрясений, задачи неразрушающего контроля (определение расположения и конфигурации дефекта, поля предварительных напряжений по измеренному полю упругих смещений на поверхности тела или по резонансным частотам), задачи идентификации движущихся объектов и т.д.

Заметим, что в современном инженерном образовании достаточно времени уделяется методам исследования прямых задач, однако методы исследования обратных и некорректных задач, возникающих в различных областях естествознания, в учебной литературе освещены недостаточно.

2. Основные особенности обратных задач. Некорректность. Обсудим формальную сторону проблемы при решении обратных задач. Отметим, что ОЗ обладают рядом неприятных с точки зрения обработки информации свойств. Во-первых, как правило, ОЗ являются нелинейными (линейными являются ретроспективные задачи и ряд граничных задач). Во-вторых, возможна неединственность при решении ОЗ, и, соответственно, возможно восстановление нескольких различных объектов, отвечающих одной и той же (или мало различающейся) входной информации. В-третьих, наиболее неприятным свойством ОЗ является их неустойчивость по отношению к малым изменениям входной информации. Это означает, что погрешность, присущая всем измерениям, может оказывать очень сильное влияние на погрешность восстановления ОИ, причем снижение уровня погрешности за счет совершенствования методики проведения эксперимента и повышения чувствительности измерительной аппаратуры не обязательно приводит к более точной реконструкции свойств ОИ. Задачи, обладающие такими свойствами, принято называть *некорректными*.

Понятие корректной и некорректной задачи в математическую физику было введено в начале 30 гг. XX века Ж. Адамаром.

2.1. Корректность по Адамару. Рассмотрим операторное уравнение, описывающее поведение некоторого ОИ

$$Au = f, \quad (1)$$

где $A : D_A \subseteq U \rightarrow F$ — линейный оператор с непустой областью определения, U, F — функциональные пространства, f — заданный элемент, u — искомый элемент.

Задача (1) нахождения элемента u называется *корректно поставленной* по Адамару, если

1. Область значений оператора A совпадает с F (решение операторного уравнения (1) существует для любой его правой части — условие разрешимости);
2. Равенство $Au_1 = Au_2$ для некоторых $u_1, u_2 \in D_A$ влечет за собой $u_1 = u_2$ — условие единственности;
3. Обратный оператор A^{-1} непрерывен на F .

Условия 1, 2 этого определения характеризуют математическую определенность, а условие 3 — физическую детерминированность задачи.

Для корректных задач можно установить соотношение корректности

$$\|u\| \leq c\|Au\|, \quad (2)$$

где c — постоянная. В силу соотношения корректности будет выполнено условие единственности, т. е. $\ker A = \{v \in D(A) \mid Av = 0\} = \{0\}$, устойчивости, поскольку из того, что $\|f\| \leq \varepsilon$, следует, что $\|u\| \leq c\varepsilon$. Если дополнительно предположить, что U, F банаховы, область значений A плотна в F , и A — замкнутый оператор, то можно обосновать и существование решения (1).

Выполнение условий корректности 1–3 по Адамару казалось настолько естественным для любой разумной математической задачи, что Адамар высказал мысль о нефизичности любой некорректной задачи, т. е. такой, для которой условия 1–3 не выполняются. В то же время Адамар привел пример некорректной задачи, ставший каноническим — задачу Коши для уравнения Лапласа. Как выяснилось впоследствии, именно к такой задаче сводятся многие проблемы математического моделирования. Так, например, к такой задаче сводится проблема продолжения аналитических и гармонических функций, ряд задач теории потенциала, биофизики и гидродинамики. Эта задача стала своеобразным эталоном в исследованиях по некорректным задачам, ее изучению и построению устойчивых методов решения и сегодня посвящаются работы в современных математических журналах.

В середине XX века интенсивно начали развиваться методы решения некорректных (неустойчивых) задач. В самом деле, понятия «неустойчивость решения по Ляпунову» и «нарушение 3 условия корректности по Адамару» (фактически отсутствие непрерывности обратного оператора) очень похожи. Если первое понятие относится к решениям канонической системы дифференциальных уравнений (операторным уравнениям специального вида), то второе — к общим операторным уравнениям. Научное направление, посвященное исследованию некорректных задач, связано с работами крупных советских математиков — А. Н. Тихонова, Г. И. Марчука, М. М. Лаврентьева, А. А. Самарского [9–12], оказавших значительное влияние на развитие теоретических основ методологии исследования некорректных задач и определивших пути развития этого раздела мате-

матики, тесно смыкающегося с современной вычислительной математикой.

Приведем ряд примеров операторных уравнений, корректных по Адамару.

1. Пусть A — матрица размерности $n \times n$, $U = F = R^n$ и $\det A \neq 0$, тогда задача решения линейной алгебраической системы вида (1) корректна.

2. Пусть функция $v(x, t)$ принадлежит пространству $C^2(\Omega)$, где $\Omega = [0, \pi] \times [0, T]$, и является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx}, & (x, t) \in \Omega, \\ v(x, 0) &= f(x), & x \in [0, \pi], \\ v(0, t) &= v(\pi, t) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $f \in C^2[0, T]$. Положим $u(x) = v(x, T)$. Определим оператор A по правилу $(Au)(x) = f(x)$, $x \in [0, \pi]$. Отметим, что область определения оператора A в этом примере задается неявно, как совокупность функций $u(x)$, допускающих представление вида $u(x) = v(x, T)$, где функция v есть решение задачи (4). В этом примере несложно получить оценку корректности исходной задачи

$$\int_0^\pi |u(x)|^2 dx \leq \int_0^\pi |f(x)|^2 dx, \quad (4)$$

3. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в области $\Omega \subset R^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$ состоит в нахождении функции $u \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющей следующей краевой задаче

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = f \quad (5)$$

Можно показать, что задача (5) корректна.

2.2. Некорректные задачи и причины некорректности.

Выше уже отмечалось, что обратные задачи как правило, некорректны. Задача (1) называется *некорректной*, если для нее нарушается хотя бы одно из условий 1–3 определения корректности.

Фактически для некорректных задач либо отсутствует решение в обычном смысле для заданной входной информации, либо оно неединственно, либо нет непрерывной зависимости решения от исходных данных задачи. Возникает вопрос, с чем же связаны эти

качества исследуемых задач. Для того чтобы разобраться в этом вопросе, рассмотрим несколько типичных примеров некорректных задач, возникающих как при решении различных задач.

При обработке результатов эксперимента очень часто проблема идентификации ОИ (особенно на основании метода наименьших квадратов) сводится к решению линейной алгебраической системы, которая может оказаться как плохообусловленной, так и вырожденной, в случае, например, если измерительные схемы составлены таким образом, что при наличии геометрической симметрии элементы дублируют друг друга, например, в некоторых схемах вибродиагностики.

Начнем рассмотрение примеров с простейшей алгебраической проблемы.

4. Рассмотрим линейную алгебраическую систему n -го порядка. Пусть A — квадратная матрица n -го порядка, $U = F = R_n$. Как известно из курса линейной алгебры, имеются две возможности.

(а) Определитель матрицы отличен от нуля, тогда при любой правой части существует единственное решение вида $u = A^{-1}f$, где A^{-1} — обратная к матрице.

(б) Если определитель матрицы равен нулю, система имеет решение не для любой правой части; если же оно существует, то неединственно. Таким образом, задача решения линейной алгебраической системы с вырожденной матрицей является некорректной.

Эта ситуация типична для приложений, когда матрица A находится либо из наблюдений, либо определяется в результате некоторых приближенных вычислений. Если в процессе расчетов получено, например, что $\det A = 10^{-40}$, то непонятно, к первому или ко второму случаю относится эта ситуация; они в принципе неразличимы на фоне всегда существующей вычислительной погрешности и требуется иной подход к решению подобной задачи.

5. Бесконечномерным аналогом рассмотренной в предыдущем примере алгебраической проблемы является задача решения уравнения Фредгольма первого рода с непрерывным ядром $K(x, s)$, к которому сводятся многие некорректные задачи.

Пусть

$$Au = \int_a^b K(x, s) u(s) ds = f(x), \quad x \in [c, d]. \quad (6)$$

В этом случае оператор A вполне непрерывен, и, соответственно, A^{-1} неограничен, и для такого оператора не выполняется третье условие корректности. Наконец заметим, что выполнение второго условия корректности зависит от конкретного вида ядра (это условие может как выполняться, так и нарушаться).

Таким образом, можно выделить две причины некорректности при решении задачи (1). Первая состоит в том, что обратный оператор A^{-1} не существует, а вторая — в том, что A^{-1} существует, но неограничен. Итак, для некорректных задач требуется некоторым образом изменить постановку, чтобы восстановить присущие корректным задачам свойства.

3. Основные способы регуляризации. Исторически первым методом регуляризации следует признать метод наименьших квадратов, разработанный Гауссом и Лежандром для переопределенных линейных алгебраических систем и с успехом применяющийся для решения более сложных операторных уравнений. Согласно этого метода необходимо отыскать минимум функционала невязки $J[u] = \|Au - f\|_F^2$,

Отметим, что если это метод позволяет указать оператор, заменяющий обратный, однако восстановить непрерывность решения от исходной информации таким образом не удастся.

Следующим кардинальным шагом в исследовании некорректных задач следует признать широко используемый в последние годы метод А. Н. Тихонова, связанный с нахождением минимума стабилизирующего функционала $M^\alpha[u] = \|Au - f\|_F^2 + \alpha\|u\|_U^2$, $\alpha > 0$.

Другие методы преодоления некорректности изложены в [4–11].

4. Основные методы исследования обратных задач. Современные способы исследования обратных задач можно условно разделить на две группы.

Первая связана с конечномерной аппроксимацией задачи и нахождением минимума функционала невязки в конечномерном пространстве. При этом важную роль играет построение ограниченных множеств (исходя из учета априорной информации о положительности, монотонности искомым функций), на которых отыскивается минимум. Здесь традиционные методы, основанные на идеологии метода Ньютона, далеко не всегда эффективны в силу сильной изрезанности линий уровня функционалов и в последние годы для минимизации (особенно для небольших размерностей) все чаще используют генетические алгоритмы.

Вторая группа методов опирается на итерационные процессы, на каждом шаге которого решается прямая задача, а поправки находятся из решения некоторой стандартной некорректной задачи-решения уравнения Фредгольма первого рода или задачи Коши для эллиптического оператора. Вычислительные схемы для этой группы гораздо более сложны и требуют привлечения различных вычислительных технологий, основанных как, например, на МКЭ, так и на регуляризованных методах решения некорректных задач [8, 13].

Литература

1. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики.—М.: Наука, 1984.—261 с.
2. Бухгейм А. Л. Введение в теорию обратных задач.—Новосибирск: Наука, 1988.—184 с.
3. Яхно В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости.—Новосибирск: Наука, 1990.—304 с.
4. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач.—М.: МГУ, 1994.—206 с.
5. Isakov V. Inverse Problems for partial differential equations.—Berlin: Springer, 2005.—262 p.
6. Gladwell G. M. L. Inverse problems in vibration.—Waterloo: Kluwer Acad. Publ., 2004.—471 p.
7. Bui H. D. Inverse problems in the mechanic of materials: An introduction.—CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.—224 p.
8. Ватулян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела.—М.: Физматлит, 2007.—223 с.
9. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.—М.: Мир, 1987.—311 с.
10. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1979.—288 с.
11. Латтес Р., Лионс Ж. Л. Метод квазиобращения и его приложения.—М.: Мир, 1970.—336 с.
12. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1988.—288 с.
13. Ватулян А. О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ.—2010.—№ 6.—С. 911–918.

INVERSE PROBLEMS IN MATHEMATICAL PHYSICS

A. O. Vatulyan

Various aspects of inverse and incorrect problems, the main stages of constructing solutions to such problems arising in various areas of mathematical physics are discussed. The elementary examples of correct and incorrect problems are given.

DOMINATION PROBLEM FOR POSITIVE OPERATORS IN BANACH LATTICES

A. G. Kusraev¹

1. The domination problem. Everywhere below E and F stand for arbitrary Banach lattices and Φ stands for a property of a positive operator between Banach lattices. The inclusion $T \in \Phi(E, F)$ means that a positive operator $T : E \rightarrow F$ has the property Φ . The *domination problem* (= DP, for short) asks whether or not the implication is true:

$$0 \leq S \leq T \text{ and } T \in \Phi(E, F) \implies S \in \Phi(E, F)?$$

In other words, given linear operators $S, T : E \rightarrow F$ with $0 \leq S \leq T$, does S inherit some property Φ of T ?

(Some important related problems should be also mentioned: the *power problem* [3, 9, 10] and the *converse domination problem* [3, 27, 28].)

The aim of this talk is to survey recent results on the domination problem, outline a general approach, and pose some open problems.

2. Banach lattices. A Banach lattice E is said to be: *order continuous* if $\lim_{\alpha} \|x_{\alpha}\| = 0$ for every downward directed net (x_{α}) with $\inf_{\alpha} x_{\alpha} = 0$; *order semicontinuous* if for every increasing net $(x_{\alpha}) \subset E_+$ with the supremum $x \in E$ it follows that $\|x\| = \lim_{\alpha} \|x_{\alpha}\|$; *monotonically complete* if every increasing norm bounded net in E_+ has the supremum.

A Banach lattice E is said to have: *property (P)* if there exists a positive contractive projection in E'' onto E [14, 21]; *subsequence splitting property* (SSP, for short) if every bounded sequence in E has a subsequence that splits into an E -equi-integrable sequence and a sequence with pairwise disjoint element [25]. A Banach lattice E is called *p-concave* ($1 \leq p < \infty$) if there exists a constant $C < \infty$ such that for every finite collection $\{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ the inequality holds [7]:

$$\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|.$$

A Banach lattice has cotype 2 if and only if it is 2-concave [7, 16.9].

¹Russia, Vladikavkaz, Southern Mathematical Institute of Vladikavkaz Science Center of the RAS.

Order continuity of a Banach lattice is often denoted as property (A). Denote by the same symbol (A), (P), or (SSP) the class of Banach lattices with the corresponding property. A Dedekind complete Banach lattice E has property (P) if and only if it is monotonically complete and order semicontinuous [14, Ch. X, § 5, Theorem 8]. For the theory of Banach lattices and positive operators we refer to the books [3, 15, 21].

3. Classes of operators. A linear operator $T : E \rightarrow F$ is called:

- ◊ *compact* (*weakly compact*) if T carries the closed unit ball of E into a norm relatively compact (weakly relatively compact) subset of F ;
- ◊ *AM-compact* if $T[-x, x]$ is relatively compact for every $x \in E_+$;
- ◊ *Dunford-Pettis* if $x_n \xrightarrow{w} 0$ in E implies $\lim_n \|Tx_n\| = 0$;
- ◊ *Banach-Saks* if every bounded sequence (x_n) in E has a subsequence (x_{n_k}) such that (Tx_{n_k}) is Cesàro convergent in F [11, 12];
- ◊ *strictly singular* (or *Kato*) if for every infinite dimensional (closed) subspace $M \subset E$, the restriction $T|_M$ is not an isomorphism into F [10];
- ◊ *disjointly strictly singular* if it is not invertible on any subspace of E generated by a disjoint sequence [8];
- ◊ *Radon-Nikodým* if for every probability space (Ω, Σ, μ) and every vector measure $\nu : \Sigma \rightarrow Y$ with values in an arbitrary Banach space Y that is μ -continuous and has finite variation, the measure $T \circ \nu$ has a Radon-Nikodým derivative in $L_1(\mu, Y)$ [19, 5];
- ◊ *Asplund* if $T' : F' \rightarrow E'$ is a Radon-Nikodým operator [19];
- ◊ *p-summing* ($1 \leq p < \infty$) if there is a constant $C < \infty$ such that for every finite collection $\{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ the inequality holds (see [7]):

$$\left(\sum_{k=1}^n \|Tx_k\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

- ◊ *narrow* if for every $x \in E_+$ and every $\varepsilon > 0$ there exists some $u \in E$ such that $|u| = x$ and $\|T(u)\| < \varepsilon$ [20].

4. The results. The domination problem has been the focus of attention for more than 30 years. Various solutions were found for different classes of linear operators under appropriate restrictions on underlying Banach lattices. The main results are presented in the following table.

Class of operators $E \rightarrow F$ between Banach lattices	The answer to DP is “YES” if	Author(s)	Year, Reference
Compact	$E', F \in (A)$	P. Dodds, D. Fremlin	1979, [6]
Weakly compact	$E' \in (A)$ or $F \in (A)$	A. W. Wickstead	1981, [26]
Dunford–Pettis	$F \in (A)$	N. Kalton, P. Saab	1985, [13]
Disjointly strictly singular	$F \in (A)$	J. Flores, F. L. Hernández	2001, [8]
Banach–Saks	$F \in (A)$	J. Flores, C. Ruiz	2006, [11]
Radon–Nikodým	$E, F \in (P)$ and $F \in (A)$	C. C. A. Labuschagne	2006, [19]
Asplund	$E \in (P)$ and $E' \in (A)$	C. C. A. Labuschagne	2006, [19]
AM -compact	$F \in (A)$ and E' is discrete	B. Aqzzouz, A. Elbour, R. Nounira, L. Zraoula	2007, [3, 4]
Strictly singular	$E \in (SSP)$ and $F \in (A)$	J. Flores, F. L. Hernández, P. Tradacete	2008, [9]
Narrow	$E, F \in (A)$ and E is atomless	O. D. Maslychenko, V. V. Mikhaylyuk, M. M. Popov	2009, [20]
p -Summing	E and F are of cotype 2	C. Parazuelos, E. A. Sánchez-Perez, P. Tradacete	2010, [23]

5. Building blocks. Now we are going to introduce and discuss a useful general approach to the domination problem based on approximation of a positive operator by means of simple components of the dominating operator. The idea behind this approach is fairly simple: “... the elementary components are the ‘building blocks’ for all components, and to a larger extent the building blocks for all positive operators in the ideal generated by T ” [3, p. 74]. More precisely, *if the elementary components of a positive operator possess some property then this property or a duly modification of this property belongs to every operator in the principal order ideal generated by the original operator.*

To justify this heuristic principle some tools are needed: Freudenthal’s spectral theorem, conception of a generating set of projections, and up-down theorem. In § 6, 7, and 8 E and F are Archimedean vector lattices with F Dedekind complete; $L^+(E, F)$ and $L^r(E, F)$ denote respectively the sets of positive and regular operators from E to F .

6. Freudenthal's spectral theorem. Given $S, T \in L^+(E, F)$, S is called a *component* of T whenever $S \wedge (T - S) = 0$. Let $\mathfrak{C}(T)$ denotes the set of all components of T . A regular operator $S \in L^r(E, F)$ is said to be a *T -step operator* if there exist pairwise disjoint $T_1, \dots, T_n \in \mathfrak{C}(T)$ with $T_1 + \dots + T_n = T$, and reals $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ satisfying $S = \sum_{k=1}^n \alpha_k T_k$.

Theorem 1. Let $S, T : E \rightarrow F$ be positive operators between two vector lattices, with F Dedekind complete. If $0 \leq S \leq T$ holds, then there exists a sequence $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of T -step operators satisfying

$$0 \leq S_n \uparrow S, \quad 0 \leq S - S_n \leq n^{-1}T \quad (n \in \mathbb{N}).$$

7. Generating sets of band projections. Denote by $\mathfrak{P}(Z)$ the Boolean algebra of all band projections in a vector lattice Z . A set of band projections $\mathcal{P} \subset \mathfrak{P}(L^r(E, F))$ is said to be *generating* if for all $T \in L^+(E, F)$ and $x \in E$ we have

$$Tx^+ = \sup\{pTx : p \in \mathcal{P}\}.$$

EXAMPLE 1. To each band projection $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ assign the band projection $\hat{\pi} : T \mapsto T \circ \pi$ in $L^r(E, F)$. If E has the projection property then the set of projections $\mathcal{P}^\circ := \{\hat{\pi} : \pi \in \mathcal{P}\}$ is generating.

EXAMPLE 2. The set of band projections $\mathcal{P}^\pi := \{\pi_e : e \in E_+\}$ in $L^r(E, F)$ is generating. Given $T \in L^+(E, F)$, the component $\pi_e(T)$ is defined by $\pi_e Tx = \sup_n T(ne \wedge x)$ on E_+ and then extends to E by differences. Thus π is defined on $L^+(E, F)$ and again extends by differences to $L^r(E, F)$.

Theorem 2. A set $\mathcal{P}$ of band projections in $L^r(E, F)$ is generating if and only if for all $S, T \in L^r(E, F)$ and $x \in E_+$ the following hold:

$$(T \wedge S)x = \inf\{pTx + p^\perp Sx : p \in \mathcal{P}\};$$

$$(T \vee S)x = \sup\{pTx + p^\perp Sx : p \in \mathcal{P}\}.$$

8. Up-down theorem. Denote by $\mathcal{P}^\vee(T)$ the set of components $\sum_{k=1}^n \pi_k \circ (\rho_k T)$ with pairwise disjoint $\pi_k \in \mathfrak{P}(F)$ and arbitrary $\rho_k \in \mathcal{P}$.

Clearly, it is possible to replace summation with the taking of the supremum and eliminate the condition for the band projections π_k to be disjoint in this definition. Put $\mathcal{A}(T) := \mathcal{P}^\vee(T)$ provided that $\mathcal{P} := \mathcal{P}^\circ$ (see Example 1); and $\mathcal{B}(T) := \mathcal{P}^\vee(T)$ provided that $\mathcal{P} := \mathcal{P}^\pi$ (see Example 2).

Given $M \subset Z$, denote $M^\uparrow := \{z \in Z : z = \sup_\alpha z_\alpha, (z_\alpha) \subset M, z_\alpha \uparrow\}$. The set $M^\downarrow$ is defined similarly and $M^{\uparrow\downarrow} := (M^\downarrow)^\uparrow$, $M^{\downarrow\uparrow} := (M^\uparrow)^\downarrow$.

Theorem 3. *For any generating set of projections $\mathcal{P} \subset L^r(E, F)$*

$$\mathfrak{E}(T) = \mathcal{P}^\vee(T)^{\uparrow\downarrow\uparrow}.$$

This general up-down theorem was proved in [18]. In particular, $\mathfrak{E}(T) = \mathcal{B}(T)^{\uparrow\downarrow}$ [1, 15]. If E has the principal projection property then we have $\mathfrak{E}(T) = \mathcal{A}(T)^{\uparrow\downarrow\uparrow}$, the first up-down theorem obtained in [22].

9. A general approach. The above prompts the following approach to the problem (variants of the method see in [3, 10, 13, 17]).

9.1. Show that Φ is true for elementary components of T :

◊ Choose $\mathcal{P} \subset \mathfrak{P}(L^r(E, F))$ and show that $\mathcal{P}$ is generating;

◊ Put $\mathcal{P}^\vee(T) := \{\sum_{k=1}^n \pi_k p_k T\}$ where $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ and $\pi_1, \dots, \pi_n \in \mathfrak{P}(F)$ with $\pi_i \circ \pi_j = 0$ ($i \neq j$), and demonstrate that $\Phi(S)$ holds true for every $S \in \mathcal{P}^\vee(T)$.

9.2. Show that Φ is preserved under the up-down procedure:

◊ If $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ is an increasing net in $L^+(E, F)$ and $\Phi(S_\alpha)$ is true for every $\alpha \in A$ and $S = \sup_{\alpha \in A} S_\alpha$, then so is $\Phi(S)$;

◊ If $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ is a decreasing net in $L^+(E, F)$ and $\Phi(S_\alpha)$ is true for every $\alpha \in A$ and $S = \inf_{\alpha \in A} S_\alpha$, then so is $\Phi(S)$.

9.3. Show that Φ is preserved under the linear combinations and *ru*-limits:

◊ If $\Phi(S_0)$ holds true for any $S_0 \in \mathcal{U}$, then so is $\Phi(S)$ for every S in linear span of $\mathcal{U}$;

◊ If a sequence $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is *ru*-convergent to S in $L^\sim(E, F)$ and $\Phi(S_k)$ is true for every $k \in \mathbb{N}$, then so is $\Phi(S)$.

9.4. It remains to apply Fredenthal's spectral theorem, since each operator $0 \leq S \leq T$ is the relatively uniform limit (and hence the limit in the operator norm) of some sequence of elements in the linear span of $\mathfrak{E}(T) = \mathcal{P}^\vee(T)^{\uparrow\downarrow\uparrow}$.

In the subsequent four sections we present some open problems and suggest to attack them by the above method or its improved version.

10. Multilinear domination. Let $E_1, \dots, E_n$ и F be Banach lattices. A multilinear operator $S : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ is called *positive* (in symbols $S \geq 0$), if $S(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ for all $0 \leq x_i \in E_i$ ($i = 1, \dots, n$). Conventionally, $S \leq T$ means that $T - S \geq 0$.

PROBLEM 1. Let Φ stands for a property of a positive multilinear operator and $T \in \Phi(E_1, \dots, E_n; F)$ means that an operator $T : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ has the property Φ . The *multilinear domination problem* is whether or not the following implication is true:

$$0 \leq S \leq T \text{ and } T \in \Phi(E_1, \dots, E_n; F) \implies S \in \Phi(E_1, \dots, E_n; F)?$$

11. Polynomial domination. A map $P : E \rightarrow F$ is called *n-homogeneous polynomial* if $P(x) = T(x, \dots, x)$ ($x \in E$) for some symmetric n -linear operator. Such T is unique and is called *generating*. A homogeneous polynomial is said to be *positive* (in symbols $P \geq 0$) if so is the generating multilinear operator. $Q \leq P$ means that $P - Q \geq 0$.

PROBLEM 2. Let Φ stands for a property of a positive homogeneous polynomial and $P \in \Phi(E, F)$ means that a polynomial $P : E \rightarrow F$ has the property Φ . The *polynomial domination problem* asks whether or not

$$0 \leq Q \leq P \text{ and } P \in \Phi(E, F) \implies Q \in \Phi(E, F)?$$

12. Sublinear domination. An operator $P : E \rightarrow F$ is *sublinear*, if $P(x + y) \leq P(x) + P(y)$, $P(\lambda x) = \lambda P(x)$, ($\lambda \in \mathbb{R}_+$, $x, y \in E$), and *increasing* if $x \leq y$ implies $P(x) \leq P(y)$ for all $x, y \in E$. Denote by $\text{Sbl}^+(E, F)$ the set of all increasing sublinear operators from E into F . The *support set* (the *subdifferential at zero*) ∂P of P is defined as [16]:

$$\partial P := \{T \in L(E, F) : (\forall x \in E) \ Tx \leq P(x)\}.$$

PROBLEM 3. Let Ψ stands for a property of an increasing sublinear operator and $P \in \Psi(E, F)$ means that $P \in \text{Sbl}^+(E, F)$ and P has the property Ψ . The *sublinear domination problem* asks whether or not

$$P \in \text{Sbl}^+(E, F) \text{ and } P \in \Psi(E, F) \implies \partial P \subset \Phi(E, F)?$$

The properties Φ and Ψ may differ but they are, of course, correlated.

13. Nonlinear domination. Fix $n, N \in \mathbb{N}$ with $n \leq N$. Consider positive operators $T_1, \dots, T_N$ from E to F and $S \in L(E, F)$. Assume that a function $\varphi : \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous and positively homogeneous (of degree one, i. e. $\varphi(\lambda \mathbf{t}) = \lambda \varphi(\mathbf{t})$ for all $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^N$).

PROBLEM 4. The *nonlinear domination problem* asks whether or not the implication is true:

$$0 \leq |Sx| \leq \varphi(T_1(|x|), \dots, T_N(|x|)) \quad (x \in E) \\ \text{and } T_1, \dots, T_n \in \Phi(E, F) \implies S \in \Phi(E, F)?$$

For the classes of compact, weakly compact, and Dunford–Pettis operators the above nonlinear domination problem was considered in [5].

References

1. Akilov G. P., Kolesnikov E. V., Kusraev A. G. The Lebesgue extension of a positive operator // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1988.—Vol. 298, № 3.—P. 521–524.
2. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive operators.—London etc.: Acad. Press Inc., 1985.—xvi+367 p.
3. Aqzzouz B., Nouria R., Zraula L. Compactness properties of operators dominated by AM-compact operators // Proc. Amer. Math. Soc.—2007.—Vol. 135.—P. 1151–1157.
4. Aqzzouz B., Elbour A. Erratum to: Compactness properties of operators dominated by AM-compact operators // Proc. Amer. Math. Soc.—2009.—Vol. 137.—P. 2813–2815.
5. Bukhvalov A. V. Nonlinear domination of linear operators // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1988.—Vol. 298 (1).—P. 14–17.
6. Dodds P., Fremlin D. Compact operators in Banach lattices // Israel J. Math.—1979.—Vol. 34.—P. 287–320.
7. Diestel J., Jarchow H., Tonge A. Absolutely summing operators.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.—(Cambridge Studies in Advanced Math. Vol. 43).
8. Flores J., Hernández F. L. Domination by positive disjointly strictly singular operators // Proc. Amer. Math. Soc.—2001.—Vol. 129.—P. 1979–1986.
9. Flores J., Hernández F. L., Tradacete P. Powers of operators dominated by strictly singular operators // Quart. J. Math. Oxford.—2008.—Vol. 59.—P. 324–334.
10. Flores J., Hernández F. L., Tradacete P. Domination problems for strictly singular operators and other related classes.—(to appear).
11. Flores J., Ruiz C. Domination by a positive Banach–Saks operator // Studia Math.—2006.—Vol. 173.—P. 185–192.
12. Flores J., Tradacete P. Factorization and domination of positive Banach–Saks operator // Studia Math.—2008.—Vol. 189.—P. 91–101.
13. Kalton N., Saab P. Ideal properties of regular operators between Banach lattices // Illinois J. Math.—1985.—Vol. 29.—P. 382–400.
14. Kantorovich L. V., Akilov G. P. Functional analysis.—Moscow: Nauka, 1984.—752 p.
15. Kusraev A. G. Dominated operators.—Dordrecht: Kluwer, 2000.—xiii+446 p.
16. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Subdifferentials: Theory and applications.—Dordrecht: Kluwer, 1995.—ix+398 p.
17. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. On the calculus of order bounded operators // Positivity.—2005.—Vol. 9.—P. 327–339.
18. Kutateladze S. S. Fragments of a positive operator // Sib. Math. Zh.—1989.—Vol. 30, № 5.—P. 111–119.
19. Labuschagne C. C. A. A Dodds–Fremlin property for Asplund and Radon–Nikodým operators // Positivity.—2006.—Vol. 10.—P. 391–407.
20. Maslyuchenko O. V., Mikhaylyuk V. V., Popov M. M. A lattice approach to narrow operators // Positivity.—2009.—Vol. 13.—P. 459–495.
21. Meyer-Nieberg P. Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1991.—xvi+395 p.

22. *Pagter de B.* The components of a positive operator // *Indag. Math.*—1983.—Vol. 48, № 2.—P. 229–241.
23. *Parazuelos C., Sánchez-Pérez E. A., Tradacete P.* Maurey–Rosenthal factorization for p -summing operators and Dodds–Fremlin domination.—Madrid, 2010.—20 p.—(Preprint).
24. *Reinov O. J.* Operators of type RN in Banach spaces // *Dokl. Akad. Nauk SSSR.*—1975.—Vol. 220.—P. 119–123.
25. *Weis L.* Banach lattices with the subsequence splitting property // *Proc. Amer. Math. Soc.*—1989.—Vol. 105.—P. 87–96.
26. *Wickstead A. W.* Extremal structure of cones of operators // *Quart. J. Math. Oxford.*—1981.—Vol. 32.—P. 239–253.
27. *Wickstead A. W.* Converses for the Dodds–Fremlin and Kalton–Saab theorems // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*—1996.—Vol. 120.—P. 175–179.
28. *Wickstead A. W.* Positive compact operators: some loose ends // *Positivity.*—1996.—Vol. 4.—P. 2313–2325.

ПРОБЛЕМА МАЖОРАЦИИ ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ РЕШЕТКАХ

А. Г. Кусраев

Дается обзор основных результатов по проблеме мажорации положительных операторов в банаховых решетках, излагается один общий подход к проблеме и формулируются нерешенные задачи о мажорации полилинейных, полиномиальных и сублинейных операторов.

МЕХАНИКА И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

А. В. Наседкин¹

1. Введение. В теории электроупругости или пьезоэлектричества основными объектами исследований являются активные диэлектрики, обладающие пьезоэлектрическими свойствами. Пьезоэффект состоит в линейной связи между электрическими и механическими полями. В течение многих лет со времени открытия пьезоэффекта в 1880 г. природные кристаллы были единственными доступными пьезоэлектрическими материалами, и на их основе были созданы многие пьезоэлектрические устройства. В дальнейшем, приблизительно с середины 60-х годов двадцатого века, стали разрабатываться искусственные пьезокерамические материалы. Было обнаружено, что материалы на основе титаната бария (BaTiO_3) обладают достаточно сильным пьезоэффектом. Последующие разработки показали, что материалы ЦТС или PZT на основе цирконата-титаната-свинца обладают еще большей чувствительностью и могут работать при достаточно больших температурах. В итоге возникла целая технология производства новых пьезокерамических материалов и пьезоэлектрических устройств на их основе. Современная пьезоэлектрическая керамика на порядки чувствительнее к электрическим и механическим воздействиям, чем природные пьезокристаллы. Варьируя исходные составы пьезокерамики, можно создавать материалы с различными свойствами, необходимыми потребителю. Пьезокерамика достаточно прочна, химически инертна и относительно дешева в производстве. Кроме того, из нее можно изготавливать пьезоэлектрические элементы практически любой требуемой формы и размеров.

В настоящее время на эффекте связности механических и электрических полей работают многочисленные пьезоэлектрические устройства, выполненные из различных специально разработанных составов пьезокерамики. Современное пьезоэлектрическое приборостроение имеет чрезвычайно широкое поле применений.

Пьезоэлектрические преобразователи преобразуют электрическое внешнее воздействие (электрическое напряжение или ток) в механические движения, как правило, в звуковые или ультразвуко-

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

вые колебания. Пьезопреобразователи, генерирующие ультразвуковые акустические колебания, используются в медицинской диагностике и терапии, для распыления жидкостей, для очистки поверхностей, как, например, в ультразвуковых стиральных машинах, в сварке, для повышения газо- и нефтеотдачи пластов и для многих других приложений. Обратимость пьезоэффекта позволяет пьезопреобразователю не только генерировать механические колебания, но и принимать их и регистрировать, преобразуя механические сигналы в электрические. Поэтому пьезоэлектрические преобразователи широко используются, как датчики расстояния, уровня жидкости, параметров среды и др. Другими типами устройств пьезотехники являются генераторы, пьезотрансформаторы напряжения и тока, пьезодатчики, сенсоры, актюаторы, пьезоэлектрические фильтры, линии задержки и др.

Математические модели пьезоэлектрических устройств базируются на уравнениях связанной теории электроупругости или пьезоэлектричества. Библиография по пьезоэлектричеству достаточно обширна и подразделяется на литературу физического характера; наиболее многочисленную литературу, посвященную прикладным или техническим вопросам пьезоэлектрического приборостроения; и, наконец, на работы, в которых рассматриваются механические, математические и вычислительные проблемы теории электроупругости. Классическими трудами, в которых прекрасно изложены физические и механические аспекты пьезоэлектричества, являются монографии [1, 2] и др. Различные проблемы теории электроупругости, как раздела механики, изложены в [3–5, 7], а численные методы решения задач электроупругости — в [6, 7]. Современные подходы к расчету пьезоэлектрических устройств базируются на конечно-элементных технологиях, алгоритмах триангуляции, ансамблирования и на мощных методах решения задач вычислительной математики с большими разреженными матрицами. Основой этих подходов являются слабые или вариационные постановки связанных задач электроупругости и их аппроксимации. Данные вопросы и являются предметом рассмотрения цикла лекций по механике и математическому моделированию электроупругих материалов.

2. Обзор основных особенностей задач электроупругости.

Классические постановки задач для электроупругого тела $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ относительно вектор-функции перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и функции электрического потенциала $\varphi(\mathbf{x}, t)$ включают си-

системы дифференциальных уравнений с динамическими уравнениями движения и уравнениями квазистатистики

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (1)$$

определяющие соотношения

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^E \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^S \cdot \mathbf{E} \quad (2)$$

и формулы связи $\boldsymbol{\varepsilon}$ с $\mathbf{u}$ и $\mathbf{E}$ с φ

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*)/2, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi. \quad (3)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — симметричные тензоры второго ранга механических напряжений и деформаций соответственно; $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ — векторы электрической индукции и напряженности электрического поля соответственно; $\mathbf{c}^E$ — полусимметричный тензор четвертого ранга упругих модулей, измеренных при постоянном электрическом поле; $\mathbf{e}$ — тензор пьезомодулей третьего ранга, симметричный по двум последним индексам; $\boldsymbol{\epsilon}^S$ — симметричный тензор второго ранга диэлектрических проницаемостей, измеренных при постоянных деформациях; ρ — плотность; $\mathbf{f}$ — вектор плотности массовых сил.

Можно отметить, что первое из уравнений (1) без учета связности механических и электрических полей, т. е. при $\mathbf{e} = 0$, является уравнением гиперболического типа, а второе уравнение при $\mathbf{e} = 0$ имеет эллиптический тип. В результате порядки старших производных по времени в уравнениях (1) различаются.

Краевые и начально-краевые задачи электроупругости характеризуются нестандартными электрическими граничными условиями, особенно, для электродов, запитываемых генераторами токов. При этом на отдельных электродированных поверхностях, запитываемых генераторами напряжений, электрический потенциал должен принимать одинаковые значения для всех точек электрода, и эти значения известны. На электродах, запитываемых генераторами токов, электрический потенциал также должен быть одинаков на каждом участке, но эти значения не известны, и для их нахождения задаются дополнительные интегральные условия, определяющие суммарные заряды на электродах.

Обобщенные или слабые постановки задач электроупругости, полученные в результате стандартных преобразований, приводят к вариационному принципу стационарности электрической энтальпии

(без свойства минимальности). Таким образом, для задач электроупругости не имеется обычного вариационного принципа виртуальных работ с варьированием полей перемещений и электрического потенциала, приводящего к минимуму функционала энергии.

Не совсем обычны и функциональные пространства, в которых определяются слабые решения задач электроупругости. Для пространства $H_\varphi^1 \subset W_2^1(\Omega)$ проекционные функции электрического потенциала должны принимать стационарные (не зависящие от $\mathbf{x}$), но произвольные значения на некоторых участках $\Gamma_{\varphi j} \subset \Gamma$, запитываемых генераторами тока. Стандартно, как, например, для пространства H_u^1 проекционных вектор-функций перемещений, ставятся лишь ограничения однородности для главных граничных условий ($\mathbf{u} = 0$; $\mathbf{x} \in \Gamma_u$; $\Gamma_u \subset \Gamma$). Здесь же главные граничные условия могут быть и неоднородными.

При численном решении нестационарных задач со слабыми постановками, соответствующими принципу виртуальных работ, по методу конечных элементов (или, в более общем случае, по методу Бубнова — Галёркина) ищутся полудискретные аппроксимации $\mathbf{u}_h \approx \mathbf{u}$, $\varphi_h \approx \varphi$ в форме

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N}_u^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t), \quad \varphi_h = \mathbf{N}_\varphi^*(\mathbf{x}) \cdot \Phi(t), \quad (4)$$

где $\mathbf{U}(t)$, $\Phi(t)$ — векторы констант (зависящих от времени) аппроксимаций, $\mathbf{N}_u^*(\mathbf{x})$ — матрица базисных функций для $\mathbf{u}_h$, $\mathbf{N}_\varphi^*(\mathbf{x})$ — вектор-строка базисных функций для φ_h .

Подстановка (4) и аналогичных представлений для проекционных функций в слабую постановку дает следующую систему:

$$\mathbf{M}_{uu} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \Phi = \mathbf{F}_u, \quad (5)$$

$$- \mathbf{K}_{u\varphi}^* \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \Phi = \mathbf{F}_\varphi. \quad (6)$$

где

$$\mathbf{M}_{uu} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_u \mathbf{N}_u^* d\Omega, \quad \mathbf{K}_{u\varphi} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^* \cdot \cdot \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{B}_\varphi d\Omega,$$

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^* \cdot \cdot \mathbf{c}^E \cdot \cdot \mathbf{B}_u d\Omega, \quad \mathbf{B}_u = \nabla \mathbf{N}_u^*,$$

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_\varphi^* \cdot \epsilon^S \cdot \mathbf{B}_\varphi d\Omega, \quad \mathbf{B}_\varphi = \nabla \mathbf{N}_\varphi^*,$$

а векторы $\mathbf{F}_u$, $\mathbf{F}_\varphi$ определяются внешними механическими и электрическими воздействиями.

Заметим, что каждая из матриц в (5), (6) отражает определенные материальные характеристики тела: $\mathbf{M}_{uu}$ — массу или плотность, $\mathbf{K}_{uu}$ — жесткость, $\mathbf{K}_{u\varphi}$ — пьезоэффект, $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$ — диэлектрическую проницаемость.

При решении статических задач электроупругости из (5), (6) получается связанная система уравнений относительно перемещений и потенциалов с общей матрицей, не являющейся положительно определенной. Матрице этой системы можно придать седловую структуру симметричного вида:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^* & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}.$$

При редукции значений электрических потенциалов можно получить системы уравнений для перемещений с положительно определенной матрицей $\bar{\mathbf{K}}_{uu} = \mathbf{K}_{uu} + \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{u\varphi}^*$, похожие на уравнения структурного анализа (для чисто упругой среды). При этом наличие пьезоэффекта лишь увеличивает свойства положительной определенности матрицы жесткости, поскольку $\bar{\mathbf{K}}_{uu} - \mathbf{K}_{uu} = \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{u\varphi}^*$ — неотрицательно определенная матрица.

Для пьезоэлектрических тел существенную роль играют специальные наборы собственных частот: частоты электрических резонансов f_{rj} и частоты электрических антирезонансов f_{aj} . Эти частоты являются собственными частотами, колебания на которых можно эффективно возбудить при изменяющихся по гармоническому закону электрических воздействиях, различных для частот f_{rj} и f_{aj} .

Для поиска собственных частот пьезоэлектрического тела нужно рассматривать режимы установившихся колебаний с круговой частотой ω ($\omega = 2\pi f$): $\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} \exp(i\omega t)$, $\Phi = \tilde{\Phi} \exp(i\omega t)$. Кроме того, для собственных частот рассматриваются однородные задачи с $\mathbf{F}_u = 0$, $\mathbf{F}_\varphi = 0$. Тогда, из (5), (6) получается обобщенная задача на собственные значения

$$\mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \Phi = \omega^2 \mathbf{M}_{uu} \cdot \mathbf{U}, \quad (7)$$

$$-\mathbf{K}_{u\varphi}^* \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \Phi = 0, \quad (8)$$

где знак « $\sim$ » у амплитудных значений $\tilde{\mathbf{U}}$, $\tilde{\Phi}$ опущен.

При этом, в (7), (8) матрицы $\mathbf{K}_{u\varphi}$, $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$ для частот электрических резонансов и антирезонансов отличаются. Различие в задачах

о поиске собственных частот электрических резонансов и антирезонансов состоит в следующем. Для задачи о поиске частот электрических резонансов некоторые электроды $\Gamma_{\varphi j}$ считаются короткозамкнутыми ($\varphi = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi j}$), а для соответствующих задач о поиске частот электрических антирезонансов эти электроды считаются свободными ($\varphi = \Phi_{\Gamma j}, \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi j}; \int_{\Gamma_{\varphi j}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} d\Gamma = 0$). Таким образом, в двух соответствующих задачах на собственные значения следует рассматривать различные электрические граничные условия на некоторых электродированных поверхностях $\Gamma_{\varphi j}$.

Математически это отличие состоит в различной структуре матриц $\mathbf{K}_{u\varphi}$ и $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$. Если для электрических антирезонансов матрицы $\mathbf{K}_{u\varphi}$, $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$ и вектор Φ представить в блочных формах

$$\mathbf{K}_{u\varphi} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{u\varphi}^c & \mathbf{K}_{u\varphi}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{\varphi\varphi} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^c & \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{cs} \\ \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{cs*} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^s \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{Bmatrix} \Phi_c \\ \Phi_s \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

то для частот электрических резонансов матрицы $\mathbf{K}_{u\varphi}$, $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$ и вектор Φ будут иметь вид

$$\mathbf{K}_{u\varphi} = \mathbf{K}_{u\varphi}^c, \quad \mathbf{K}_{\varphi\varphi} = \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^c, \quad \Phi = \Phi_c. \quad (10)$$

В векторе Φ из (9) выделены отдельно степени свободы Φ_s , для которых при нахождении частот электрических антирезонансов считается, что суммарные электрические заряды на соответствующих электродах равны нулю, а при нахождении частот электрических резонансов — $\Phi_s = 0$.

Поэтому, для нахождения частот электрических резонансов и антирезонансов требуется решать два раза задачи (7), (8) с различными матрицами $\mathbf{K}_{u\varphi}$, $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$ и вектором Φ в формах (9) и (10).

Обозначим собственные частоты для задачи (7)–(9) через ω_{aj} , а собственные частоты для задачи (7), (8), (10) — через ω_{rj} . Отметим, что в силу положительной определенности матрицы $\mathbf{M}_{ui}$ и по меньшей мере неотрицательной определенности матрицы $\bar{\mathbf{K}}_{ui}$ все эти частоты вещественны и могут быть выбраны неотрицательными.

Если занумеровать частоты в порядке возрастания, то можно показать, что имеют место неравенства $\omega_{rj} \leq \omega_{aj}$, $j = 1, 2, \dots, m$, где m — порядок матрицы $\mathbf{M}_{ui}$ или $\bar{\mathbf{K}}_{ui}$.

Для практики важную роль играет динамический коэффициент электромеханической связи (КЭМС) k_{dj} для j -ой частоты, вычисля-

емый по формуле

$$k_{dj}^2 = 1 - \frac{\omega_{rj}^2}{\omega_{aj}^2}.$$

Динамический КЭМС определяет эффективность преобразования энергии на j -ой моде колебаний. Естественно, если k_{dj} отличен от нуля, то $\omega_{rj} \neq \omega_{aj}$, и именно такие частоты электрически активные. (Некоторые моды колебаний могут быть чисто упругими, и для них $\omega_{rj} = \omega_{aj}$.)

Таким образом, для анализа работы пьезоэлектрических устройств в режиме установившихся колебаний часто требуется находить частоты ω_{rj} , ω_{aj} , решая два раза немного отличающиеся обобщенные задачи на собственные значения, и при этом находить именно те частоты, для которых ω_{rj} и ω_{aj} отличаются. Данный тип задач также является отличительной особенностью анализа реальных пьезоэлектрических устройств.

Пьезопреобразователи могут представлять собой тела, составленные из набора упругих и пьезоэлектрических подобластей (пьезоизлучатель в корпусе). Кроме того, для некоторых устройств, например, для встречноштыревых преобразователей на поверхностных акустических волнах, нужно учитывать контакт пьезоэлектрического тела со внешней средой (с воздухом). В таких случаях имеем составные задачи для многослойной среды $\Omega = \cup \Omega_k$ с различными физико-механическими свойствами. Часть областей $\Omega_k = \Omega_k^p$ могут быть пьезоэлектрическими, часть областей $\Omega_k = \Omega_k^e$ — упругими, а часть областей $\Omega_k = \Omega_k^d$ — диэлектрическими. Для упругих и диэлектрических сред можно воспользоваться теми же моделями электроупругости при коэффициентах связности $\mathbf{e} = 0$ и применять либо механическую, либо диэлектрическую части модели. Условия сопряжения полей при переходе через границу раздела будут естественным образом входить в обобщенные постановки, и особенности задач для составных тел с различными физико-механическими свойствами будут состоять в реализации численных алгоритмов для сред с различными полевыми функциями ($\mathbf{u}$, φ — для пьезоэлектрических сред, $\mathbf{u}$ — для упругих, φ — для диэлектрических).

Здесь нужно отметить, что внешние диэлектрические среды (окружающая воздушная среда) могут быть сильно протяженными и моделироваться неограниченными областями. Тогда для неограниченных диэлектрических сред нужны условия поведения поля φ на

бесконечности и нужно иметь в арсенале численные методы решения задач для бесконечных областей.

Для медицинских и гидроакустических приложений важную роль играют задачи акустоэлектроупругости о взаимодействии твердых деформируемых упругих и пьезоэлектрических тел с акустическими средами. В этих задачах дополнительная связность возникает из-за граничных условий контакта между твердотельной структурой и акустической средой. Особенностью задач акустоэлектроупругости являются также импедансные граничные условия, моделирующие отток акустической энергии во внешние среды.

Таким образом, задачи электроупругости и акустоэлектроупругости имеют ряд существенных особенностей, вызванных как особенностями математических моделей, так и потребностями практики расчета реальных пьезоэлектрических устройств.

3. Некоторые направления развития исследований в электроупругости. В заключение отметим ряд перспективных направлений работ в современной теории электроупругости:

- разработка моделей с учетом различных механизмов затухания;
- моделирование неоднородной поляризации и расчет пьезопреобразователей с неоднородно поляризованными пьезоэлементами;
- разработка моделей и методов расчета пьезоэлектрических материалов с нелинейным поведением;
- исследования связанных задач с учетом температурных полей;
- разработка методов расчета пьезопреобразователей, включенных во внешние электрические цепи, в том числе с механизмами адаптивного управления;
- моделирование активных композиционных материалов.

Литература

1. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. Мэзона У. —М.: Мир, 1966.—Т. 1.—Ч. А.—С. 204–326.
2. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практические применения.—М.: Изд-во иностр. лит., 1949.—718 с.
3. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость.—Киев: Наукова думка, 1990.—223 с.
4. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах.—М.: Мир, 1986.—160 с.
5. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел.—М.: Наука, 1988.—472 с.

6. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел.—Киев: Наукова думка, 1990.—228 с.
7. Kaltenbacher M. Numerical simulation of mechatronic sensors and actuators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 2004.—311 p.

MECHANICS AND MODELING OF ELECTROELASTIC MATERIALS

A. V. Nasedkin

The lectures consider the general features of electroelastic problems for practical calculations of real piezoelectric devices. The statements of electroelastic problems and their finite element approximations are given. It is noted that piezoelectric materials are anisotropic materials; there are some peculiarities for boundary conditions on electrode surfaces; usually it is necessary to determine electric resonance and anti resonance frequencies, electromechanical coupling factors, taking into account external electric circuits; for ultrasonic piezoelectric emitter it is required to solve coupled dynamic acoustoelectroelastic problems, etc. In the conclusion some perspective directions of research in mechanics and modeling of electroelastic materials are mentioned.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОВРЕЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ¹

А. Н. Соловьёв², А. С. Спожакин³

Введение

Ранее были разработаны методы реконструкции трещин в упругих однородных телах или составных с дефектом, находящимся на известной границе раздела [1–5], и в слоистых композитах, когда интерфейсная граница, несущая трещину неизвестна [6]. Процесс реконструкции размера трещины особенно эффективен, если эта интерфейсная граница или плоскость, несущая трещину, известны. Основой реконструкции внутренних дефектов в упругих и теплопроводных телах могут служить механические или температурные поля, измеренные на поверхности тела. В случае вибрационного воздействия на элементы конструкций внутренние дефекты являются зонами повышенного тепловыделения, и это служит основой их определения с помощью температурного портрета поверхности элемента. В приведенных работах методы идентификации для однородных тел, основанные на применении неклассических граничных интегральных уравнений или применения теорем взаимности для поврежденного и неповрежденного состояния с применением набора пробных аналитических решений для установившихся колебаний или стационарного однородного уравнения теплопроводности. В случае неоднородных тел, например, слоистых композитов, набор таких решений ограничен, однако, если рассматривать частный случай дефектов, а именно расслоения, параллельные интерфейсным границам, то с помощью этой методики удастся провести их частичную реконструкцию.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №№ 10-08-01296-а, 10-01-00194-а, 10-08-00093-а.

²Россия, Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет, Южный федеральный университет, Южный научный центр РАН.

³Россия, Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет.

1. Статическое состояние композита с трещиной

1.1. Постановка обратной задачи реконструкции трещины. В декартовой прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ ($\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$) рассматривается конечное составное упругое тело, занимающее область $V = \bigcup_{k=1}^K V_k$ (рис. 1) и ограниченную поверхностью S .

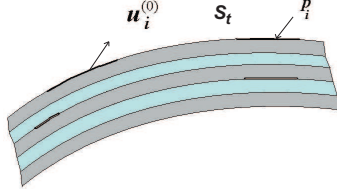


Рис. 1. Образец с дефектами

Подобласти V_k представляют собой слои, S_{int} — внутренние интерфейсные поверхности раздела подобластей. На поверхности S задан вектор напряжений. Имеется система непересекающихся трещин

$$\Gamma = \bigcup_{q=1}^M \Gamma_q, \quad (\Gamma_q = \Gamma_q^{(+)} \cup \Gamma_q^{(-)}),$$

которые расположены на внутренних поверхностях S_{int} (расслоения, см. рис. 1). Краевая задача, в которой кроме определения характеристик НДС требуется определить геометрию системы трещин Γ , формулируется следующим образом: она состоит из уравнений линейной теории упругости [7] в случае равновесия

$$\sigma_{ij,j}^{(k)} + f_i = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad \underline{x} \in V_k, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} = c_{ijml}^{(k)} u_{m,l}^{(k)}, \quad (2)$$

граничных условий прямой задачи

$$t_i^{(k)}|_S = \sigma_{ij}^{(k)} n_j|_S = p_i, \quad (3)$$

условий непрерывности на $S_{\text{int}} \setminus \Gamma$

$$\begin{aligned} u_i^{(k)}|_{S_{\text{int}} \setminus \Gamma} &= u_i^{(k+1)}|_{S_{\text{int}} \setminus \Gamma}, \\ t_i^{(k)}|_{S_{\text{int}} \setminus \Gamma} &= t_i^{(k+1)}|_{S_{\text{int}} \setminus \Gamma}, \end{aligned} \quad (4)$$

условий на берегах трещин

$$t_i^{(k)}|_{\Gamma_q^\pm} = 0, \quad q = 1, 2, \dots, M \quad (5)$$

и дополнительных условий, отвечающих измерению вектора смещений на S

$$u_i^{(k)}|_S = u_i^0, \quad (6)$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}$, $c_{ijml}^{(k)}$ — компоненты тензоров напряжений и упругих постоянных, $u_i^{(k)}$ — компоненты вектора смещений, f_i — массовые силы, n_j — компоненты единичных векторов внешней нормали к соответствующим поверхностям.

ЗАМЕЧАНИЕ. На практике обычно задается не распределение вектора перемещений всюду на S , а значения перемещений в некотором наборе точек, соответствующих местам установки датчиков, причем аналог (5) имеет вид

$$u_i^{(k)}(x_m) = u_{im}^0, \quad x_m \in S, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (7)$$

1.2. Пробные решения. Рассмотрим пробные решения уравнений равновесия (1) для тела без дефекта. Первый набор таких решений, удовлетворяющих однородным уравнениям определяется соотношениями для компонент вектора перемещений $U_i^{(k)}$, $i = 1, 2, 3$

$$U_i^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad U_3^{(k)} = a_k x_3 + b_k. \quad (8)$$

Коэффициенты a_k , b_k определяются из уравнений непрерывности на интерфейсных границах:

$$a_{k+1} = a_k \frac{c_{33}^{(k)}}{c_{33}^{(k+1)}}, \quad (9)$$

$$b_{k+1} = b_k + h_k(a_k - a_{k+1}).$$

Второй набор пробных решений, удовлетворяющих неоднородным уравнениям для тела без дефектов, определяется соотношениями для компонент вектора перемещений $Q_i^{(k)}$, $i = 1, 2, 3$

$$Q_i^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad Q_3^{(k)} = A_k x_3^2 + B_k, \quad (10)$$

массовые силы при этом определяются как

$$f_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad f_3 = -2c_{33}^{(k)} A_k \quad \text{при } x \in V_k. \quad (11)$$

Коэффициенты A_k , B_k определяются из уравнений непрерывности на интерфейсных границах:

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= A_k \frac{c_{33}^{(k)}}{c_{33}^{(k+1)}}, \\ B_{k+1} &= B_k + h_k^2 (A_k - A_{k+1}). \end{aligned} \quad (12)$$

1.3. Принцип взаимности работ и реконструкция трещины. Пусть имеются два напряженно деформированного состояния с компонентами векторов перемещений u_i и u_i^* , вызванного двумя наборами внутренних и поверхностных сил f_i , p_i и f_i^* , p_i^* соответственно. Для статики упругого тела имеет место теорема о взаимности работ [7]

$$\int_V (f_i u_i^* - f_i^* u_i) dV + \int_S (p_i u_i^* - p_i^* u_i) dS = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим далее задачу реконструкции единичной трещины с плоскими интерфейсными границами, перпендикулярными оси координат Ox_3 , и используем (13), когда в качестве второго набора внутренних сил взяты 0 и (11), а на поверхности — следы пробных решений (8) и (10) — P_i и T_i соответственно. В результате, учитывая (9) и (13), получим

$$-a_1 c_{33}^{(1)} I_1 + \int_S (p_i U_i - P_i u_i^0) dS = 0, \quad (14)$$

$$2c_{33}^{(1)} A_1 I_2 - 2c_{33}^{(1)} A_1 h I_1 + \int_S (p_i Q_i - T_i u_i^0) dS = 0, \quad (15)$$

где

$$I_1 = \int_{\Gamma_+} (u_3^+ - u_3^-) dS$$

— интегральный скачек третьей компоненты вектора перемещения на трещине,

$$I_2 = \int_V u_3 dV, \quad x_3 - h = 0$$

— уравнение плоскости с трещиной.

Из соотношения (14) находится I_1 , и его значение, отличное от нулевого, (с учетом погрешности измерений поля смещений на поверхности тела), показывает наличие скачка перемещений, а следовательно — наличие дефекта. Так как решается задача с силовыми граничными условиями, то равенство $I_2 = 0$ может быть принято в качестве условия однозначности перемещений по третьей оси, тогда из уравнения (15) может быть найдена координата плоскости с дефектом

$$h = \frac{a_1 \int_S (p_i Q_i - T_i u_i^0) dS}{2A_1 \int_S (p_i U_i - P_i u_i^0) dS}. \quad (16)$$

После того, как носитель трещины найден, реконструкцию ее размеров можно провести одним из методов, разработанных ранее и приведенных во введении.

2. Статическое состояние композита с внутренними напряжениями.

2.1. Постановка обратной задачи идентификации массовых сил. Рассматривается композит, в котором имеются внутренние массовые силы $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3)$ при условии, что $f_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ с плоскими носителями $\Phi = \bigcup_k \Phi_k$, параллельными интерфейсным границам. Краевая задача, в которой кроме определения характеристик НДС требуется определить геометрию носителя внутренних сил, формулируется следующим образом: она состоит из уравнений линейной теории упругости (1), соотношений (2), граничных условий прямой задачи (3), условий непрерывности на S_{int}

$$u_i^{(k)}|_{S_{\text{int}}} = u_i^{(k+1)}|_{S_{\text{int}}}, \quad t_i^{(k)}|_{S_{\text{int}}} = t_i^{(k+1)}|_{S_{\text{int}}} \quad (17)$$

и дополнительных условий (6) или (7), отвечающих измерению вектора смещений на S .

2.2. Пробные решения. В качестве набора пробных решений рассмотрим следующие наборы:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0; \quad (18)$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 0; \quad (19)$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 1; \quad (20)$$

$$u_1 = y, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0; \quad (21)$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = x, \quad u_3 = 0; \quad (22)$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = \varphi(x_3) = a_k x_3 + b_k, \quad x \in V_k. \quad (23)$$

Подстановка (18)–(23) в теорему взаимности (13) позволяет определить через поверхностные значения перемещений и усилий следующие величины:

$$\begin{aligned} J_{1i} &= \int_{\Phi} f_i dS, \quad i = 1, 2, 3; \quad J_{21} = \int_{\Phi} x_1 f_2 dS; \\ J_{22} &= \int_{\Phi} x_2 f_1 dS; \quad J_3 = \varphi(h) J_{13}. \end{aligned} \quad (24)$$

Соотношения (24) служат основой для определения координат внутренних точек области Φ

$$x_1^0 = \frac{J_{21}}{J_1}, \quad x_2^0 = \frac{J_{22}}{J_2}, \quad (25)$$

и координаты $x_3 = h$ плоскости содержащей Φ

$$\varphi(h) = \frac{J_3}{J_{13}}. \quad (26)$$

2.3. Пример реконструкции внутреннего силового источника. В численном примере рассматривается многослойный композиционный материал, в третьем сверху интерфейсном слое которого находится внутренний силовой источник $\bar{f} = (0, 0, f_3)$.

На рис. 2 представлено деформированное состояние тела.

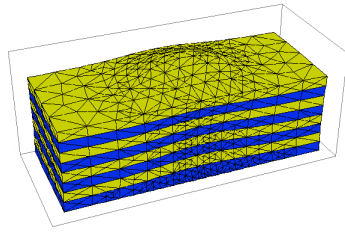


Рис. 2. Деформированное состояние композита

На рис. 3, 4 представлено рассчитанное с помощью МКЭ напряженное деформированное состояние в прямой задаче. На рис. 3 показано распределение вертикального смещения u_z , на рис. 4 — распределение напряжения σ_{zz} .

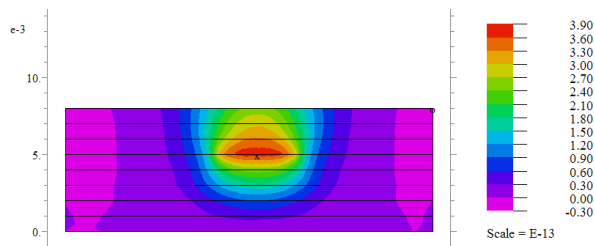


Рис. 3. Распределение u_z

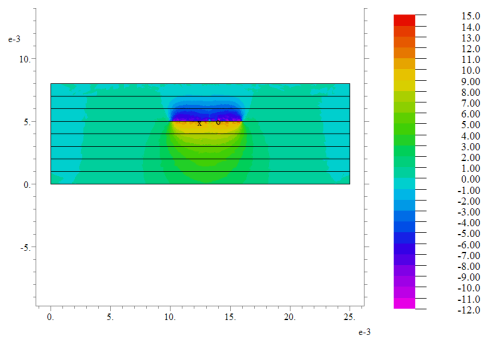


Рис. 4. Распределение σ_{zz}

Графическое решение уравнения (26) представлено на рис. 5, на котором цифрой 1 обозначена ломанная кривая, соответствующая

функции $\varphi(x_3)$, а прямая 2 соответствует найденному значению $\varphi(h)$. Очевидно, их пересечение определяет координату $x_3 = h$.

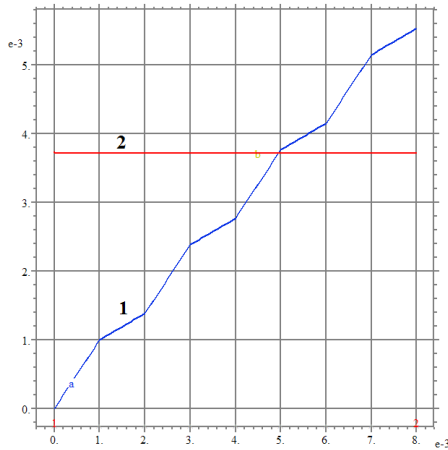


Рис. 5. Графическое решение

3. Стационарное распределение температуры.

3.1. Постановка обратной задачи идентификации внутренних источников. Пусть конечное составное упругое теплопроводное тело, занимающее область $V = \bigcup_{l=1}^L V_l$ с границей S (подобласти V_l представляют собой слои), совершает колебания под действием некоторой механической нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону с круговой частотой ω , причем тело ослаблено системой трещин $\Gamma = \bigcup_{p=1}^M \Gamma_p$ ($\Gamma_p = \Gamma_p^+ \cup \Gamma_p^-$), которые расположены на внутренних поверхностях (расслоения). Берега трещин взаимодействуют между собой, в результате чего происходит их разогрев. Таким образом, трещины могут моделироваться неизвестными источниками тепла. Предположим, что через некоторое время после начала колебаний в теле установился стационарный температурный режим, который определяется неизвестным источником тепла $W(x, \omega)$. Заметим, что источники тепла имеют компактный носитель, а формулировка прямой задачи по нахождению температуры в рассматриваемом теле определяется краевой задачей несвязанной теории термоупругости, причем, для определения распределения температуры

в теле получается обобщенное уравнение теплопроводности

$$k^{(l)}\Theta_{,ii} = -W, \quad i = 1, 2, 3, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad \underline{x} \in V_l, \quad (27)$$

где $k^{(l)}$ — коэффициент теплопроводности l -го слоя составного тела.

Краевые условия на внешней границе S , на которой происходит свободный теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру Θ_0

$$\varphi = k^{(l)}\Theta_{,i}n_i|_S = -h(\Theta - \Theta_0)|_S. \quad (28)$$

При постановке обратной задачи, в которой определяется геометрия «трещины-источника», будем считать, что на границе S известна температура Θ

$$\Theta|_S = \psi. \quad (29)$$

3.2. Регистрация «трещин-источников». Трещины в теле могут быть обнаружены по несогласованности между граничными распределениями температуры для тела с «трещинами-источниками» и без них. В качестве меры этой несогласованности введем в рассмотрение линейный функционал

$$F(\Theta^*) = \int_S (k^{(l)}\Theta_{,i}^*n_i\psi - \Theta^*\varphi) dS \quad (30)$$

на множестве пробных решений Θ^* , удовлетворяющих однородному уравнению (31) в области V без трещин и без источников

$$k^{(l)}\Theta_{,ii}^* = 0, \quad \underline{x} \in V. \quad (31)$$

Применяя теорему взаимности в термоупругости, нетрудно показать, что

$$\int_+ W(\underline{x}, \omega)\Theta^* dS = F(\Theta^*). \quad (32)$$

В случае, когда «трещины-источники» отсутствуют, функционал $F(\Theta^*)$ тождественно равен нулю.

3.3. Выбор пробных решений и определение местоположения дефекта. Из равенства (32) при различном выборе пробных решений может быть получена система уравнений для нахождения

носителя $W(x, \omega)$ источников тепла, моделирующих трещины с взаимодействующими берегами. Первым этапом этой процедуры является определение номера интерфейсной границы с дефектом (расстояния от начала координат до этой границы), вторым — нахождение координат центра тяжести теплового источника.

В качестве пробных решений, в случае, когда ось Ox_3 направлена перпендикулярно границам слоев, могут быть использованы следующие линейно независимые решения уравнения (31):

$$\Theta_1^* = 1, \quad \Theta_2^* = x_1, \quad \Theta_3^* = x_2, \quad \Theta_4^* = f(x_3). \quad (33)$$

Функция $f(x_3)$ является кусочно-линейной, причем, температура по слоям распределена по следующей зависимости:

$$T_i = a_i x_3 + b_i, \quad x_3 = V_i. \quad (34)$$

Условия стыковки на интерфейсных границах имеют вид

$$T_{i+1}|_{S_{\text{int}}} = T_i|_{S_{\text{int}}} \quad (35)$$

— равенство температур.

Поток тепла от слоя к слою одинаков

$$-k^{(i+1)} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial n} = -k^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial n}. \quad (36)$$

Условия (35), (36) определяют следующие зависимости между параметрами a_i, b_i :

$$a_{i+1} = a_i \frac{k^{(i)}}{k^{(i+1)}}, \quad b_{i+1} = b_i - h_i(a_{i+1} - a_i), \quad (37)$$

где h_i — расстояние от начала координат до i -ой интерфейсной границы.

Подставим пробные решения (34), используя теорему взаимности в (32), и обозначим

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_+ W ds, \quad H_4 = \int_+ W f(x_3) ds, \\ H_i &= \int_+ W x_{i-1} ds, \quad i = 2, 3, \end{aligned} \quad (38)$$

тогда координаты внутренней точки («центра тяжести» теплового источника)

$$x_1^0 = \frac{H_2}{H_1}, \quad x_2^0 = \frac{H_3}{H_1}, \quad (39)$$

а значение пробного решения Θ_4^* на интерфейсной границе $x_3 = c$, содержащей дефект, выразится с помощью отношения $\frac{H_4}{H_1}$. Таким образом, равенство

$$f(c) = \frac{H_4}{H_1} \quad (40)$$

служит уравнением для определения координаты c .

3.4. Численный пример реконструкции «трещины-источника». В качестве численной реализации предложенного метода рассматривается реконструкция «трещины-источника» в трехслойном композитном прямоугольнике размера 0.05×0.003 (м) при толщине слоев 0.001 м в плоской постановке. Неизвестный источник находится на первой интерфейсной границе и определяется отрезком $x_1 \in [0.02, 0.022]$; интенсивность источника задана функцией $W = W_0 \exp(-s(x_3 - h_1)^2)$. На верхней и нижней границах области происходит теплообмен с окружающей средой; на боковых сторонах задана постоянная температура, равная температуре внешней среды.

Прямая задача решается с помощью конечно-элементного пакета FlexPDE и моделирует измерение температурного портрета функций φ , ψ из (28) и (29) соответственно). Так, на рис. 6 представлено распределение температуры в теле.



Рис. 6

На рис. 7 представлены распределения температуры на верхней (слева) и нижней (справа) сторонах, моделирующие процесс измерения температурного портрета.

Определение координат внутренней точки источника $x_1^0 = 0.021$ с помощью соотношения (39) происходит с погрешностью менее 0.01%. Реконструкция интерфейсной границы с помощью соотношений (40) представлена графически на рис. 8 в виде пересечения линий a — заданное пробное решение $f(x_3)$ и прямой b — найденное значение температуры (40).

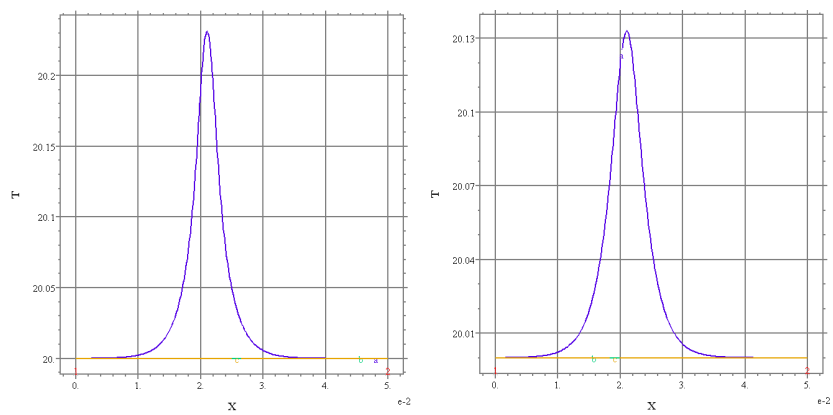


Рис. 7

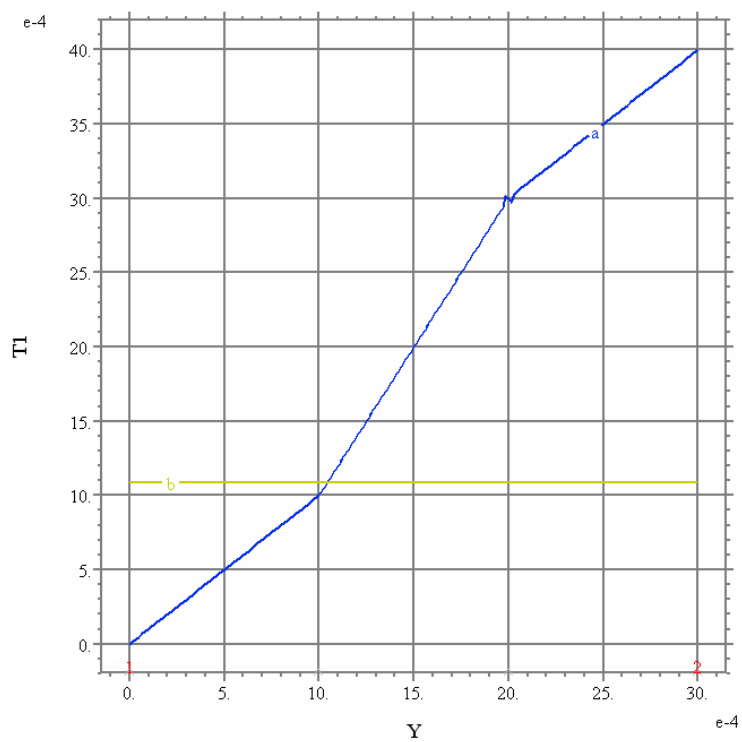


Рис. 8

Литература

1. Соловьев А. Н. Идентификация интерфейсной трещины // Современные проблемы МСС: тр. VIII междунар. науч. конф.—Ростов н/Д., 2002.—Т. 1.—С. 163–169.
2. Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Некоторые полувывные алгоритмы реконструкции интерфейсных трещин // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естесств. науки.—2003.—№ 3.—С. 20–24.
3. Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Определение ориентации плоских трещин в упругом теле // Теоретическая и прикладная механика.—2003.—Вып. 37.—С. 141–145.
4. Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Об определении дефектов в составном упругом теле // Дефектоскопия.—2004.—№ 5.—С. 15–23.
5. Ватульян А. О., Соловьев А. Н. О реконструкции трещин с взаимодействующими берегами // Дефектоскопия.—2004.—№ 10.—С. 62–69.
6. Соловьев А. Н., Ватульян А. О., Спожакин А. С., Шевцов С. Н. Реконструкция дефектов в слоистых композитах // Вестн. ДГТУ.—2009.—Т. 9, № 2.—С. 3–14.
7. Новацкий В. Теория упругости.—М.: Мир, 1975.—872 с.

IDENTIFICATION OF THE DAMAGES STATE OF LAMINATES

A. N. Soloviev, A. S. Spogakin

The method of reconstruction of flaws in stratified composite materials is offered. By means of use of theorems of reciprocity for a skew field with damages and without them, and also some analytical trial solutions formulas for definition of number of the interface boundary containing an damages and co-ordinates of an interior point of an damage are received. Two approaches in the first are offered the static problem of the theory of elasticity and flaw boundary is considered do not interact among themselves, the additional information is the field of displacements measured on the boundary; in the second the account of interaction grounded on simulation by their interior sources of heat and measurement of a boundary temperature portrait is made.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Секция I

Математический анализ

ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРАВЫЕ ОБРАТНЫЕ
К ОПЕРАТОРАМ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ,
АНАЛИТИЧЕСКИХ НА ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

У. В. Баркина¹

Пусть Q — выпуклое множество в $\mathbb{C}$ (отличное от $\mathbb{C}$) с непустой внутренностью $\text{int } Q$. Предположим, что Q обладает следующими свойствами:

- (1) $Q \cap (\partial Q)$ компактно (∂Q — граница Q);
- (2) если $Q_0 := (\text{int } Q) \cup ((\partial Q) \setminus (Q \cap (\partial Q)))$, то пересечение Q_0 со всякой опорной прямой к $\overline{Q}$ (замыканию Q) компактно.

Условия (1) и (2) необходимы и достаточны для того, чтобы множество Q обладало счетным базисом окрестностей, состоящим из выпуклых областей.

Далее, зафиксируем счетный базис окрестностей $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ множества Q , где Q_n — выпуклые области такие, что $Q_{n+1} \subseteq Q_n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $A(Q)$ — пространство ростков всех функций, аналитических на Q с естественной топологией индуктивного предела: $A(Q) := \text{ind}_{n \rightarrow} A(Q_n)$, где $A(Q_n)$ — пространство Фреше всех функций, аналитических в Q_n .

Пусть K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$. Множество $Q + K$ имеет счетный базис окрестностей $(Q_n + K)_{n \in \mathbb{N}}$. Положим $A(Q + K) := \text{ind}_{n \rightarrow} A(Q_n + K)$. Для $\mu \in A(K)'$ линейный непрерывный оператор свертки $T_\mu : A(Q + K) \rightarrow A(Q)$ определяется следующим образом:

$$T_\mu(f)(z) := \mu_t(f(z + t)), \quad z \in Q.$$

Пусть $\hat{\mu}(z) := \mu_t(\exp(z t))$, $z \in \mathbb{C}$, — преобразование Лапласа функционала μ . Из результатов статьи [1] вытекает

Лемма. Пусть $\hat{\mu} \neq 0$ — функция вполне регулярного роста. Тогда оператор свертки $T_\mu : A(Q + K) \rightarrow A(Q)$ сюръективен.

Для ограниченного множества $M \subseteq \mathbb{C}$ символом H_M обозначим опорную функцию M , т. е. $H_M(z) := \sup_{t \in M} \text{Re}(zt)$, $z \in \mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, φ — конформное отображение единичного круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

на G . Для $r \in (0, 1)$ компакты $G_r := \varphi(\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\})$ выпуклы. Положим $H_r := H_{G_r}$, $r \in (0, 1)$. Определена функция

$$D_G(z) := \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{H_G(z) - H_r(z)}{1 - r} \in (0, +\infty], \quad |z| = 1.$$

Пусть G — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, отличный от точки, ψ — конформное отображение $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ на $\mathbb{C} \setminus G$ такое, что $\psi(\infty) = \infty$. Для $r > 1$ компакты $G_r := \mathbb{C} \setminus \psi(\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\})$ выпуклы. Пусть $H_r = H_{G_r}$, $r > 1$. Определена функция

$$D_G(z) := \lim_{r \rightarrow 1+0} \frac{H_r(z) - H_G(z)}{r - 1} \in [0, +\infty), \quad |z| = 1.$$

Положим $\omega := (\partial Q) \cap Q$, $\omega_0 := (\partial Q) \setminus \omega$; $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $S_0 := \{z \in S \mid \operatorname{Re}(tz) = H_Q(z) \text{ для некоторого } t \in \omega_0\}$, $S_\omega := S \setminus S_0$.

Пусть $V(\hat{\mu})$ — множество всех нулей $\hat{\mu}$; $A_{\hat{\mu}}$ — множество всех предельных точек последовательности $(z/|z|)_{z \in V(\hat{\mu})}$. Справедлива

Теорема. Пусть $\hat{\mu} \neq 0$ — функция вполне регулярного роста и множество Q ограничено. Оператор свертки $T_\mu : A(Q + K) \rightarrow A(Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный тогда и только тогда, когда функция $D_{\operatorname{int} Q}$ ограничена на каждом компакте в $S_0 \cap A_{\hat{\mu}}$, и функция $1/D_{\bar{Q}}$ ограничена в некоторой окрестности $A_{\hat{\mu}} \cap S_\omega$ в $A_{\hat{\mu}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема, как выше, была доказана ранее в [2, теорема 2.4] для $K = \{0\}$.

Литература

1. Мальцев И. М. Об условиях эпиморфности оператора свертки в комплексной области // Изв. ВУЗов.—1994.—№ 11 (390).—С. 43–52.
2. Мелихов С. Н. Аналитические решения дифференциальных уравнений бесконечного порядка на выпуклых множествах с препятствием, открытым на границе // Исслед. по комплексному анализу, теории операторов и мат. моделированию / под ред. Ю. Ф. Коробейника и А. Г. Кусраева.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2004.—С. 141–162.

CYCLICALLY COMPACT OPERATORS ON KAPLANSKY–HILBERT MODULES

U. Gönüllü¹

Kaplansky–Hilbert module is object like a Hilbert space except that inner product is not scalar-valued, but take its values in a commutative C^* -algebra which is order complete vector lattice. Kaplansky–Hilbert module appeared in the paper [1] of I. Kaplansky. We will define the Hilbert-Schmidt operators and the Trace class operators on Kaplansky–Hilbert module and give some characterization about Hilbert–Schmidt class. For all unexplained notation and terminology, we refer to [2].

A C^* -module over the Stone algebra Λ is a Λ -module X equipped with a Λ -valued inner product $\langle \cdot | \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \Lambda$ satisfying the following conditions:

- (1) $\langle x | x \rangle \geq 0$; $\langle x | x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- (2) $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle^*$;
- (3) $\langle ax | y \rangle = a \langle x | y \rangle$;
- (4) $\langle x + y | z \rangle = \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle$;
- (5) X is complete with respect to the norm $\|x\| := \sqrt{\|\langle x | x \rangle\|}$.

As well as its scalar-valued norm $\| \cdot \|$, a C^* -module X has a vector norm, given by $|x| := \sqrt{\langle x | x \rangle}$. Since $|x|$ is regarded as a function on some extremal compact space Q , it follows that the Cauchy–Bunyakovskii–Schwarz inequality $|\langle x | y \rangle| \leq |x| |y|$. On taking norms in the above inequality we have $\|\langle x | y \rangle\| \leq \|x\| \|y\|$. Moreover, $\|x\| = \| |x| \|$ holds. Therefore $\| \cdot \|$ is a mixed norm on X .

Theorem 1 [2, 7.4.4.]. *Let X be a C^* -module. The pair $(X, \| \cdot \|)$ is a B -cyclic Banach space if and only if $(X, | \cdot |)$ is a Banach–Kantorovich space over $\Lambda := \mathcal{S}(B)$.*

DEFINITION 1. A *Kaplansky–Hilbert module* or an *AW*-module* over Λ is a unitary C^* -module satisfying each of the equivalent of above theorem.

Let X, Y be Kaplansky–Hilbert modules over Λ . By a bounded operator T from X into Y we mean a mapping of X into Y which is not only linear and continuous as usual, but also a module homomorphism. Let $B_\Lambda(X, Y)$ denote the set of all bounded operators from X into Y . If $X = Y$, then $B_\Lambda(X) := B_\Lambda(X, X)$ is a C^* -algebra [2, 7.5.8. Theorem].

¹Turkey, İstanbul, İstanbul Kültür University.

A subset $C \subset X$ is said to be cyclically compact if C is mix-complete and every sequence in C has a cyclic subsequence that converges (in norm) to some element of C . A subset in X is called relatively cyclically compact if it is contained in a cyclically compact set. An operator $T \in B_\Lambda(X, Y)$ is called cyclically compact if the image $T(C)$ of any bounded subset $C \subset X$ is relatively cyclically compact in Y . Using [2, 8.5.6. Theorem], we can define the Trace class and Hilbert–Schmidt class, which are defined in a Hilbert space, in Kaplansky–Hilbert module as following:

DEFINITION 2. Let X and Y be a Kaplansky–Hilbert modules over Λ .

(1) $S_1(X, Y)$ consists of cyclically compact operators T such that $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is o -summable and set $v_1(T) := o - \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n$.

(2) $S_2(X, Y)$ consists of cyclically compact operators T such that $(\mu_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ is o -summable and set $v_2(T) := \sqrt{o - \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n^2}$, where $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is sequence in Λ and satisfies the condition of [2, 8.5.6. Theorem].

The elements of $S_2(X, Y)$ and $S_1(X, Y)$ are called the Hilbert–Schmidt operators and the Trace class operators, respectively.

Proposition 1. Let X and Y be a Kaplansky–Hilbert modules over Λ and T be an operator in $B_\Lambda(X, Y)$. If the sum $o - \sum_{\xi \in \mathcal{E}} |T\xi|^2$ exists for some projection basis $\mathcal{E}$ of X , then the sum is same for all projection basis of X . If the sum exists for a cyclically compact T , then the sum equals to the following sum

$$o - \sum_{n \in \mathbb{N}} |Te_n|^2 = o - \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n^2.$$

Proposition 2. Let X and Y be a Kaplansky–Hilbert modules over Λ and $S, T \in S_2(X, Y)$. Then $o - \sum_{e \in \mathcal{E}} \langle Se | Te \rangle$ is absolutely convergent for projection basis $\mathcal{E}$ of X and the sum is same for all projection basis of X . Let

$$\langle S, T \rangle = o - \sum_{e \in \mathcal{E}} \langle Se | Te \rangle.$$

Then $\langle S, T \rangle$ is Λ -valued inner product on $S_2(X, Y)$ for which $\langle T, T \rangle = v_2^2(T)$ for all $T \in S_2(X, Y)$.

References

1. *Kaplansky I.* Modules over operator algebras // Amer. J. Math.—1953.—Vol. 75, № 4.—P. 839–858.
2. *Kusraev A. G.* Dominated operators.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000.—446 p.

ОБ ОПЕРАТОРЕ УМНОЖЕНИЯ
В ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ,
ОПРЕДЕЛЯЕМОМ ДВУЧЛЕННЫМ ВЕСОМ

А. В. Кузьмина¹

Пусть u и v — весовые функции, т. е. непрерывные неотрицательные неубывающие на $[0, \infty)$ функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} \ln t = o(u(t)), \quad t \rightarrow \infty; & \quad v(2t) = O(v(t)), \quad t \rightarrow \infty; \\ u(2t) = O(u(t)), \quad t \rightarrow \infty; & \quad v(t) \text{ выпукла на } [0, \infty); \\ u(e^x) \text{ выпукла на } [0, \infty); & \quad u(t) = o(v(t)), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для $z \in \mathbb{C}$ положим $u(z) := u(|z|)$ и $v(z) := v(|z|)$.

Пусть, далее, p — заданное положительное число. Возьмем последовательность $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ такую, что $0 < p_n \uparrow p$. При каждом $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим банахово пространство целых функций, определяемое двучленным весом $p_n u(\operatorname{Re} z) + n v(\operatorname{Im} z)$:

$$H_n = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_n = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{p_n u(\operatorname{Re} z) + n v(\operatorname{Im} z)}} < \infty \right\}.$$

Положим

$$H_{u,v}^{p,\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

и наделим пространство $H_{u,v}^{p,\infty}$ естественной топологией внутреннего индуктивного предела пространств H_n . В пространстве $H_{u,v}^{p,\infty}$ будем рассматривать оператор умножения $\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$ на фиксированную целую функцию μ . В связи с этим напомним, что μ называется *мультипликатором* $H_{u,v}^{p,\infty}$, если $\mu H_{u,v}^{p,\infty} \subset H_{u,v}^{p,\infty}$. Мультипликатор μ считается непрерывным, если оператор Λ_μ действует непрерывно в $H_{u,v}^{p,\infty}$. На основании результатов из [1] установлено следующее

Предложение. Множество всех мультипликаторов пространства $H_{u,v}^{p,\infty}$ совпадает с

$$M(H_{u,v}^{p,\infty}) = \left\{ \mu \in H(\mathbb{C}) : \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{e^{\varepsilon u(\operatorname{Re} z) + n v(\operatorname{Im} z)}} < \infty \right\},$$

причем каждый мультипликатор μ является непрерывным.

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

Основным результатом работы является функциональный критерий замкнутости образа оператора Λ_μ .

Теорема. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) Образ оператора Λ_μ замкнут в $H_{u,v}^{p,\infty}$;
- (ii) Λ_μ — топологический изоморфизм $H_{u,v}^{p,\infty}$ на образ $\Lambda_\mu(H_{u,v}^{p,\infty})$;
- (iii) Если семейство $B \subset H_{u,v}^{p,\infty}$ таково, что μB содержится и ограничено в некотором H_n , то существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что B содержится и ограничено в H_m ;
- (iv) для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что при всех $f \in H_{u,v}^{p,\infty}$

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{p_m u(\operatorname{Re} z) + m v(\operatorname{Im} z)}} \leq C \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\mu(z)f(z)|}{e^{p_n u(\operatorname{Re} z) + n v(\operatorname{Im} z)}}.$$

Ранее аналогичные результаты были получены для индуктивных пространств целых функций, задаваемых последовательностями $(nu(\operatorname{Re} z) + nv(\operatorname{Im} z))_{n=1}^\infty$ (см. [2]), $(nu(\operatorname{Re} z) + q_n v(\operatorname{Im} z))_{n=1}^\infty$, где $0 < q_n \uparrow q < \infty$ (см. [3]). Отметим, что в случае, когда $v(t) = t$, рассматриваемое пространство $H_{u,v}^{p,\infty}$ является двойственным с пространством ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на числовой прямой [4].

Литература

1. Коробейник Ю. Ф. О мультипликаторах весовых функциональных пространств // Anal. Math.—1989.—Т. 15, № 2.—С. 105–114.
2. Momm S. Closed principal ideals in nonradial Hörmander algebras // Arch. Math.—1992.—Vol. 58.—Р. 47–55.
3. Абанин А. В. О мультипликаторах пространства целых функций, задаваемого нерадиальным двучленным весом // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, вып. 4.—С. 10–16.
4. Абанин А. В., Абанина Д. А. Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, вып. 3.—С. 3–20.

О КРАЙНИХ ПРОДОЛЖЕНИЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНОГО ПОЛИНОМА

З. А. Кусраева¹

Рассматривается вопрос о крайнем продолжении однородных ортогонально аддитивных полиномов, действующих в векторных решетках. В [1, теорема 14] установлен вариант теоремы Канторовича о продолжении для однородных положительных полиномов, т. е. возможность продолжения однородного положительного полинома с мажорирующей подрешетки на всю векторную решетку с сохранением положительности и однородности. Если рассматриваемый полином ортогонально аддитивен, то его однородное положительное продолжение можно выбрать также ортогонально аддитивным [4]. Крайние точки выпуклого множества всех положительных однородных ортогонально аддитивных продолжений этого полинома называют *крайними продолжениями*. Ниже дается характеристика крайних продолжений положительного ортогонально аддитивного однородного полинома. Необходимые сведения о полиномах и векторных решетках имеются в книгах [2, 3] соответственно.

Пусть E, F — векторные решетки и $s \in \mathbb{N}$. Отображение $P: E \rightarrow F$ называется *однородным полиномом степени s* (или *s -однородным полиномом*), если существует s -линейный оператор $\varphi: E^s \rightarrow F$ (называемый *порождающим* для P) такой, что

$$P(x) = \varphi(x, \dots, x) \quad (x \in E).$$

Для каждого полинома существует и притом лишь один симметричный порождающий оператор.

Однородный полином $P: E \rightarrow F$ называют *ортогонально аддитивным*, если $|x| \wedge |y| = 0$ влечет $P(x + y) = P(x) + P(y)$ для любых $x, y \in E$.

Полилинейный оператор $\varphi: E^s \rightarrow F$ называется *ортосимметричным*, если $\varphi(x_1, \dots, x_s) = 0$, как только $|x_i| \wedge |x_j| = 0$ для некоторых $1 \leq i, j \leq s, i \neq j$ и *положительным*, если $\varphi(x_1, \dots, x_s) \geq 0$ для любых $0 \leq x_1, \dots, x_s \in E$.

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А.

Однородный полином $P : E \rightarrow F$ степени s называют *положительным*, когда положителен порождающий его полилинейный оператор.

Можно показать, что порядково ограниченный s -однородный полином ортогонально аддитивен в том и только в том случае, когда порождающий его полилинейный оператор ортосимметричен [4].

Пусть $P : G \rightarrow F$ — положительный ортогонально аддитивный s -однородный полином. Обозначим символом $\mathcal{E}(P)$ множество всех положительных ортогонально аддитивных s -однородных продолжений P на все E . Тогда $\mathcal{E}(P)$ — непустое выпуклое множество. Крайние точки множества $\mathcal{E}(P)$ называют *крайними продолжениями* полинома P .

Рассмотрим функцию $\vartheta_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определяемую формулой $\vartheta_s(t) := t|t|^{s-1}$. Положим $\varphi(r, t) := \vartheta_s^{-1}(\vartheta_s(r) + \vartheta_s(t))$. Функция $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ положительно однородна ($\varphi(\lambda r, \lambda t) = \lambda \varphi(r, t)$, $\lambda \geq 0$) и непрерывна, поэтому для любых $x, u \in E$ существует $\varphi(x, u)$ в смысле однородного функционального исчисления. Положим по определению $(x^s + u^s)^{1/s} := \varphi(x, u) \in E$.

Теорема. Пусть E, F и G — векторные решетки, причем F порядково полна, E , и G равномерно полны и G — подрешетка E . Предположим, что множество $\mathcal{E}(P)$ непусто для некоторого положительного ортогонально аддитивного s -однородного полинома $P : E \rightarrow F$. Тогда полином $\hat{P} \in \mathcal{E}(P)$ является крайним продолжением полинома P в том и только в том случае, когда для любого $x \in E$ выполняется

$$\inf \{ \hat{P}(|(x^s + u^s)^{\frac{1}{s}}|) : u \in G \} = 0.$$

Линейный положительный оператор P можно рассматривать как однородный полином первой степени ($s = 1$). В этом случае характеристика крайних продолжений $\hat{P} \in \mathcal{E}(P)$ имеет вид

$$\inf \{ \hat{P}(|x + u|) : u \in G \} = 0.$$

Это хорошо известный результат Липецкого — Плашки — Томсена (см. [3, теорема 2.7]).

Литература

1. Loan J. Polynomials on Riesz spaces // J. Math. Anal. and Appl.—2010.—Vol. 364.—P. 71–78.

2. *Dineen S.* Complex analysis on infinite dimensional spaces.—Berlin: Springer, 1999.—550 p.
3. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators.—Orlando: Acad. Press, 1985.
4. *Кусраева З. А.* О продолжении ортогонально аддитивных регулярных полиномов // Владикавк. мат. журн.—2011.—(в печати).

ЗАМЕЧАНИЯ О КОНСТРУКЦИИ КАЛЬДЕРОНА — ЛОЗАНОВСКОГО

Б. Б. Тасоев¹

В современном функциональном анализе большое внимание уделяется исследованию пространств Кальдерона — Лозановского, представляющих собой важный и интересный класс банаховых решеток. Рассмотрим функцию $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ такую, что $\varphi(\cdot, \mathbf{s})$ измерима для любого $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N) \in \mathbb{R}_+^N$, а $\varphi(\omega, \cdot)$ суперлинейна для всех $\omega \in \Omega$, и набор идеальных пространств $\bar{X} = (X_1, \dots, X_N)$ над пространством с мерой (Ω, Σ, μ) . Пространство Кальдерона — Лозановского $\varphi(\bar{X}) = \varphi(X_1, \dots, X_N)$ состоит из всех функций $x(\cdot) \in L^0(\mu)$, удовлетворяющих оценке $|x(\cdot)| \leq \lambda \varphi(\cdot, |x_1(\cdot)|, \dots, |x_N(\cdot)|)$ для некоторых $x_i \in X_i$, ($i = 1, \dots, N$) и $0 < \lambda \in \mathbb{R}$. Норма в этом пространстве вводится формулой

$$\|x\|_{\varphi(\bar{X})} = \inf \{ \lambda > 0 : |x(\cdot)| \leq \lambda \varphi(\cdot, |x_1(\cdot)|, \dots, |x_N(\cdot)|), \\ \|x_i\| \leq 1 \ (i = 1, \dots, N) \}.$$

В случае, когда $\varphi(s, t) = s^{1-\theta}t^\theta$ ($s, t \in \mathbb{R}_+$) для некоторого $0 < \theta < 1$, пространства $\varphi(X_1, X_2)$ были введены Кальдероном [3]. Более общий случай, когда $\varphi(\omega, \cdot) = \varphi(\cdot)$ для почти всех $\omega \in \Omega$, пространства $\varphi(X_1, X_2)$ исследовал Г. Я. Лозановский в большом цикле работ (см., например, [1, 2]). Частным случаем пространства Кальдерона — Лозановского являются известные пространства Орлича и Муселяка — Орлича [4]. Из многочисленных работ на эту тему укажем еще [5].

Цель настоящей заметки — показать, что базовая конструкция Кальдерона — Лозановского допускает естественное обобщение в терминах суперлинейного оператора, действующего в векторных решетках, а основные результаты сводятся к известным фактам из теории двойственности выпуклых функций.

Пусть X — банахова решетка, Y — равномерно полная векторная решетка. Оператор $\Phi : X_+ \rightarrow Y_+$ называют *суперлинейным*, если он удовлетворяет следующим двум условиям:

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова.

(1) $\Phi(x+y) \geq \Phi(x) + \Phi(y)$ для всех $x, y \in X_+$ (супераддитивность);

(2) $\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x)$ для всех $x \in X_+$ и $\lambda \in \mathbb{R}_+$ (положительная однородность).

Оператор Φ называют *разложимым*, если для любых $y_1, y_2 \in Y_+$, удовлетворяющих неравенству $y_1 + y_2 \leq \Phi(x)$, существуют $x_1, x_2 \in X_+$ такие, что $x = x_1 + x_2$, $\Phi(x_i) \geq y_i$, $i = 1, 2$.

Обозначим через $\Phi(X)$ — порядковый идеал в Y , порожденный множеством $\Phi(X_+) = \{\Phi(x) : x \in X_+\}$. Супераддитивность оператора влечет $\Phi(X) = \bigcup_{x \in X_+} [-\Phi(x), \Phi(x)]$ или, что то же самое, $\Phi(X) = \{y \in Y : (\exists x \in X_+) |y| \leq \Phi(x)\}$.

Определим функционал $\|\cdot\|_\Phi : \Phi(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ формулой

$$\|z\|_\Phi := \inf \{ \|x\| : x \in X_+, \Phi(x) \geq |z| \} \quad (z \in \Phi(X)). \quad (41)$$

Теорема 1. Пусть X — банахова решетка, Y — равномерно полная векторная решетка, $\Phi : X_+ \rightarrow Y_+$ — суперлинейный оператор. Тогда $\|\cdot\|_\Phi$ есть монотонная норма на $\Phi(X)$, и пара $Z = (\Phi(X), \|\cdot\|_\Phi)$ является банаховой решеткой.

◁ Пусть $Z = (\Phi(X), \|\cdot\|_\Phi)$ из теоремы 1, причем, Φ обладает свойством разложимости. Каждому элементу x^* поставим в соответствие функционал $\Phi^*(x^*) : Z_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, действующий по правилу

$$\langle z, \Phi^*(x^*) \rangle := \inf \{ \langle x, x^* \rangle : x \in X_+, \Phi(x) \geq z \} \quad (z \in Z_+). \quad (42)$$

Оказывается, что $\Phi^*(x^*)$ — положительный функционал на $\Phi(X)$, а оператор $\Phi^* : X^* \rightarrow \Phi(X)^*$, действующий по правилу $x^* \mapsto \Phi^*(x^*)$, суперлинеен и положительно однороден. Тем самым, к оператору Φ^* применяется теорема 1 и получаем банахову решетку $\Phi^*(X^*)$ с нормой $\|\cdot\|_{\Phi^*}$. ▷

Теорема 2. Справедлива формула $\Phi(X)^* = \Phi^*(X^*)$, причем равенство означает совпадение банаховых решеток $\Phi(X)^*$ и $\Phi^*(X^*)$ как по составу элементов, так и по норме.

Литература

1. Лозановский Г. Я. О некоторых банаховых структурах // Сиб. мат. журн.—1969.—Т. 10, № 3.—С. 584–598.

2. *Лозановский Г. Я.* Преобразование банаховых идеальных пространств с помощью вогнутых функций // Качественные и приближенные методы исслед. операторных уравнений.—Ярославль: Изд-во Яросл. гос. ун-та, 1978.—№ 3.—С. 122–148.
3. *Calderon A. P.* Intermediate spaces and interpolation, the complex method // *Studia Math.*—1964.—Vol. 24.—P. 113–190.
4. *Musielak J.* Orlicz spaces and modular spaces.—Berlin: Springer-Verlag, 1983.—P. 1034.
5. *Raynaud Y.* On duals of Calderon–Lozanovsky intermediate spaces // *Studia Math.*—1997.—Vol. 124, № 1.—P. 9–36.

НЕТРИВИАЛЬНОСТЬ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Фам Чонг Тиен¹

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{C}$, и $v : G \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная положительная в G функция, называемая *весом*. Образует следующее весовое пространство голоморфных функций на G :

$$H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_v := \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < +\infty \right\},$$

которое является банаховым с нормой $\|\cdot\|_v$.

Пространства такого вида представляют значительный интерес, широко используются в различных задачах и являются предметом исследований многих математиков. К настоящему времени хорошо известны простейшие достаточные условия на веса, при которых соответствующие пространства обладают некоторым свойством (например, нетривиальность, компактность вложения одного пространства в другое и т. д. [1, 2]). Однако завершенных результатов крайне мало даже для простейших свойств. При этом полные ответы как правило даются с помощью таких условий, которые практически невозможно проверить.

Данный доклад посвящен вопросу о нетривиальности пространства $H_v(G)$. В связи с этим напомним, что для аналогичных пространств непрерывных функций критерий нетривиальности весьма прост [1]. Это связано с тем, что пространства непрерывных функций устроены локально, в то время как пространства голоморфных функций — глобально (в силу теорем единственности). Мы представим новые результаты в указанном направлении, а для некоторых специальных семейств весов — критерии нетривиальности $H_v(G)$. Сразу отметим, что в общем случае ответ пока получить не удастся.

Прежде всего напомним, что класс $E \subset H(G)$ называется *неисчезающим* в точке $z_0 \in G$, если существует функция $f \in E$ с $f(z_0) \neq 0$. Назовем E *неисчезающим* на G , если он не исчезает в любой точке $z \in G$.

В качестве отправной точки изучения нетривиальности $H_v(G)$ нами установлена следующая теорема.

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

Теорема 1. Рассмотрим утверждения:

- (1) Пространство $H_v(G)$ нетривиально;
- (2) Пространство $H_v(G)$ является неисчезающим на G ;
- (3) Пространство $H_v(G)$ содержит функцию без нулей на G ;
- (4) Существует такая гармоническая функция h в G , что $e^{h(z)} \leq v(z)$, $z \in G$.

Тогда имеют место следующие импликации: (1) $\iff$ (2); (3) $\implies$ (2); из (2) не всегда следует (3); (4) $\implies$ (3); (3) $\implies$ (4) в случае, когда G — односвязная область.

Для семейств весов специального вида удастся доказать такой критерий.

Теорема 2. Пусть $G = \mathbb{C}$ или $G = \mathbb{D}$ — единичный открытый круг в $\mathbb{C}$. Пусть, далее, вес имеет вид $v(z) = e^{h(z)}w(z)$, где $h(z)$ — вещественная часть некоторой функции $u(z)$ из $H(G)$ и $w(z)$ — непрерывный радиальный вес (т. е. $w(z) = w(\lambda z)$ для любых $z, \lambda \in \mathbb{C}$ такого, что $|\lambda| = 1$). Тогда пространство $H_v(G)$ нетривиально в том и только в том случае, когда $\inf_{z \in G} w(z) > 0$.

Литература

1. Абанин А. В. Весовые пространства непрерывных и голоморфных функций // Мат. анализ и мат. моделирование: тр. междунар. конф. молодых учен. (Владикавказ, 12–19 июля 2010 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2010.—С. 15–20.
2. Bierstedt K. D., Bonet J., Taskien J. Associated weights and spaces of holomorphic functions // Studia Math.—1998.—Vol. 32.—P. 137–168.

Секция II

**Математическое
моделирование**

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОСТЕОСИНТЕЗА В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ANSYS

М. А. Каргин¹

Как известно [1], остеосинтезом называется соединение отломков костей с целью обеспечения их прочной фиксации до полной консолидации. Различают два основных вида остеосинтеза — *погружной остеосинтез*, при котором различные, соединяющие костные отломки фиксаторы располагаются в зоне перелома, и *наружный чрескостный остеосинтез*, когда костные отломки соединяют с помощью дистракционно-компрессионных аппаратов. Накостный остеосинтез выполняют с помощью пластинок различной длины, ширины, формы и толщины, в которых сделаны отверстия. Через них пластину соединяют с костью при помощи винтов.

Металлические пластины широко используются в заживлении переломов длинных костей человека. Однако пластины из металла, которые в основном состоят из нержавеющей стали и сплавов титана, вызывают такие проблемы, как несовместимость, коррозия, эффект магнетизма, реакции катода-анода и т. д. При применении пластин из металла также отмечаются явления уменьшения массы кости (остеогенез), увеличения пористости кости (остеопороз) и задержки заживления перелома (формирование костной мозоли, огрубление).

В течение последних лет велись исследования по поиску альтернативных материалов для пластин. Перспективными были признаны композиционные материалы, которые менее жесткие, чем металлы, и имеют свойства, близкие к механическим свойствам кости.

Цель работы состояла в том, чтобы сравнить фиксирующие конструкции из металлов и композиционных материалов, используемые в заживлении переломов большеберцовой кости, сравнить их воздействие на кость и на место перелома, а также их поведение при условии сжатия под действием собственного веса человека. В работе используется техника метода конечных элементов, в программном комплексе ANSYS строятся трехмерные конечно-элементные (КЭ) модели и решаются соответствующие трехмерные статические задачи теории упругости. Статическое сжатие, которое вызвано действи-

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

ем собственного веса человека, рассматривается как условие нагрузки. Металлические пластины считались выполненными из нержавеющей стали и сплава титана, композитные пластины — из карбона/эпоксиды и карбона/гидроксиапатита. Винты, используемые для соединения костей и пластин, моделировались из нержавеющей стали. Механические свойства кости и места перелома были взяты из данных [2] по свойствам большеберцовой кости.

Геометрическая модель конструкции «кость и пластина» моделировалась из пяти основных элементов: корковой и внутренней частей кости, места перелома, пластины, фиксирующей место перелома и соединительных винтов. Предполагалось, что материалы корковой части кости, места перелома и пластины из композитов являлись ортотропными, а материалы внутренней части кости, пластины из металла и винтов — изотропными. Твердотельные модели конструкции «кость и пластина» были построены методом снизу-вверх путем последовательного задания опорных точек, линий, областей и объемов. КЭ модели были получены из твердотельных с помощью специальных алгоритмов ANSYS при заданных параметрах КЭ сеток.

Из результатов статического анализа КЭ модели конструкции «кость и пластина» было получено, что в случае, когда пластина моделируется из композитного материала карбона/эпоксиды, максимальные напряжения в пластине, в корковой части кости, в месте перелома и в соединительных винтах были меньше, чем в случаях с другими типами материалов. Таким образом, данные расчетов подтвердили выводы о преимуществах пластин из композитных материалов при использовании для заживления переломов. Отметим также, что с помощью созданных программ на языке APDL ANSYS путем варьирования некоторых параметров имеется возможность решения различных близких задач из рассматриваемой проблемной области.

Автор выражает благодарность А. В. Наседкину за внимание к работе.

Литература

1. <http://bioimplantat.ru/1/osteosintez.html>
2. Kim S. H., Chang S. H., Son D. S. Finite element analysis of the effect of bending stiffness and contact condition of composite bone plates with simple rectangular cross-section on the bio-mechanical behaviour of fractured long bones // Composites: Part B.—2011.—Vol. 2, № 3.—P. 20–22.

ВЛИЯНИЕ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА ДВИЖЕНИЕ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ В ЦЕНТРОБЕЖНОЙ МЕЛЬНИЦЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ТИПА

Д. Г. Минасян¹

Для повышения эффективности работы центробежной мельницы вертикального типа [1, 2] необходимо знать закономерности измельчения материала в мельнице, на основе которой определяются показатели, полезные при разработке и проектировании этих машин.

В настоящей работе проведено исследование влияния проскальзывания сыпучего материала на стенках мельницы с помощью компьютерного моделирования движения сыпучей среды в полости центробежной мельницы вертикального типа с использованием пакета OpenFOAM. В данной трехмерной задаче сыпучая среда рассматривалась как неньютоновская жидкость с коэффициентом вязкости $\mu = \nu + kp$, где ν — эквивалентный коэффициент вязкости среды. В полость ротора центробежной мельницы вставлены шесть радиальных ребер, диаметр мельницы принимался равным 200 мм, высота столба материала над верхней кромкой ребер — 180 мм, частота вращения ротора — 580 мин⁻¹.

Измерения проводились вдоль радиусов на разной высоте от верхней кромки ротора [2].

Движение сыпучей среды предполагалось ламинарным. Решались уравнения Навье — Стокса:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho (\bar{v} \nabla) \bar{v} = -\nabla p + \nabla (\mu \nabla \bar{v}),$$

где $\mu = \nu + kp$.

Цилиндрическая обечайка мельницы неподвижна, и на ней сначала задавалось условие прилипания, а затем условие частичного проскальзывания, которое задается коэффициентом проскальзывания, меняющимся в диапазоне от 0 до 1. На роторе мельницы задавались условия прилипания $u = 0$, $v = \omega r$, $w = 0$.

На верхней свободной поверхности сыпучей среды, которая принималась горизонтальной, вертикальная составляющая скорости ма-

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А.

териала считалась равной нулю, а для горизонтальных составляющих использовались условия

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Результаты измерений представлены в виде графиков. На рис. 1 представлен график для давления вдоль горизонтальной линии проходящей от оси мельницы до стенки. Видно, что в случае с проскальзыванием перепад давления приблизительно в два раза выше, чем в случае с прилипанием на стенке мельницы. На рис. 2 представлен график скорости движения сыпучей среды в мельнице вдоль линии проходящей от ее оси до стенки. Значения скорости также значительно выше в случае с проскальзыванием.

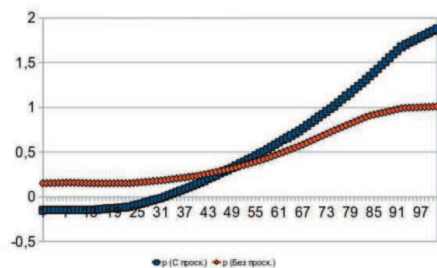


Рис. 1. Значение давления для разных моделей

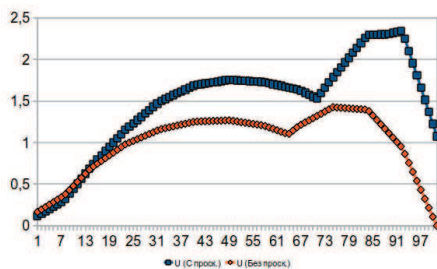


Рис. 2. Значение скорости для разных моделей

Расчеты показали, что время выхода на стационарный режим работы в случае с проскальзыванием заметно меньше. В первом случае, когда задавалось условие прилипания, потоки устанавливаются

на 39–40 минуте, во втором случае гораздо раньше — на 23–24. Таким образом, проскальзывание сыпучего материала существенно влияет на результаты расчетов и должно учитываться. Одной из возможностей учета проскальзывания является аппроксимация граничных условий для составляющих скорости на поверхности обечайки и ротора, предложенная в работе [3].

Литература

1. Хетагуров В. Н., Ильяшик В. П., Чужинов А. И. Мельница. Патент РФ № 2084787 // Оpubл. в Б. И.—1997.—№ 20.
2. Хетагуров В. Н. Разработка и проектирование центробежных мельниц вертикального типа.—Владикавказ: Терек, 1999.—225 с.
3. Zamankhan P., Soleymani A., Polashensky W., Zamankhan P. Flow dynamics of grains in spinning bucket at high frequencies // Chemical Engineering Science.—2004.—Vol. 59.—P. 235–246.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО МНОГОСЛОЙНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДАТЧИКА УСКОРЕНИЙ

А. О. Олейников¹

В работе построена конечно-элементная модель осесимметричного многослойного пьезоэлектрического акселерометра в пакете ANSYS. Акселерометр состоял из двух наборов пьезоэлектрических дисков со стальными дисковыми вставками, сжатых болтовым соединением. При этом наборы были электрически отделены от основания, друг от друга и от шляпки болта тонкими дисковыми прокладками из слюды. Пьезоэлектрические диски выполнены из пьезокерамики ЦТС-19, поляризованы по толщине и покрыты электродами по торцам. Электрическая схема соединения электродов способствовала изгибным колебаниям каждого из двух наборов пьезоэлектрических дисков со стальными вставками аналогично стандартным биморфным конструкциям. Строение данного устройства с двумя изолированными пакетами электродов предполагает работу датчика в двух полосах частот. Принцип работы данного акселерометра, разрабатываемого в НКТБ «Пьезоприбор» ЮФУ, основан на следующем. При подаче колебательных смещений на основание всей конструкции происходят изгибные колебания и вследствие пьезоэлектрического эффекта появляются электрические заряды на свободных электродах. Регистрация этих наведенных зарядов и позволяет оценить ускорения точек основания. Конструкция акселерометра позволяет обеспечить достаточно высокую чувствительность в контролируемом направлении при практически полном отсутствии откликов по другим направлениям, что позволяет обеспечить высокую достоверность информации при эксплуатации.

Для возможностей оптимизации модели были разработаны программы на командном языке APDL ANSYS, обеспечивающие возможности варьирования конструктивных параметров, пьезоэлектрических констант и упругих моделей материалов. Данные программы позволяют определять частоты электрических резонансов и антирезонансов, вычислять коэффициенты электромеханической связи, получать амплитудно-частотные характеристики и исследовать напряженно-деформированное состояние. Вышеперечисленные

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

данные получаются при проведении гармонического и модального анализа в конечно-элементном пакете ANSYS.

Можно отметить, что при построении амплитудно-частотных характеристик для моделирования воздействия ускорений на основание нужно задавать частотно зависимые смещения точек опор. Такой вид граничных условий был реализован в программах на языке APDL посредством использования решателя ANSYS в цикле по частоте с изменяемыми в теле цикла значениями смещений точек опор. Были проведены многочисленные расчеты, позволившие оценить влияние размеров различных элементов составной конструкции на коэффициенты электромеханической связи и чувствительность датчика. Оптимизация конструкции проводилась по коэффициенту преобразования и по рабочему диапазону частот. Учитывалось, что рабочий частотный диапазон должен перекрывать диапазон анализируемых колебаний, а коэффициент преобразования должен быть максимальным. Таким образом, задача оптимизации состояла в следующем: найти такие вариации конструктивных параметров устройства, чтобы соответствующие резонансные частоты обеспечивали достаточный рабочий диапазон, и при этом сохранялась чувствительность датчика на необходимом уровне.

Проведенные вычислительные эксперименты показали эффективность конечно-элементного моделирования с использованием командного языка APDL ANSYS пьезоэлектрических датчиков ускорений сложной составной структуры. Ввиду сложности расчета таких устройств аналитическими методами, моделирование по методу конечных элементов оказалось самой достойной альтернативой для того, чтобы вычислить основные характеристики датчика и найти нужные зависимости до работы с реальным опытным образцом. Разница в результатах при моделировании устройства и испытании опытного образца оказалась в пределах погрешности тестовой аппаратуры. Разработанный набор программ можно использовать как основу для моделирования устройств данного класса.

Автор выражает благодарность А. В. Наседкину и В. К. Доле за постановку задачи и внимание к работе.

ДВЕ ДВУХЖИДКОСТНЫЕ МОДЕЛИ ВИБРООЖИЖЕНИЯ

Н. С. Орлова¹

Исследуются две двухжидкостные модели виброожижения [1, 2]. Обе модели содержат уравнения неразрывности и импульса для газовой и твердой фаз в одномерном приближении. В первой модели уравнения имеют вид (1–4):

$$\frac{\partial(\rho_s \alpha_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_s \alpha_s V_s)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho_s \alpha_s V_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_s \alpha_s V_s V_s)}{\partial z} = \beta_B (V_g - V_s) - G(\alpha_g) \frac{\partial \alpha_s}{\partial z} - (\rho_s - \rho_g) \alpha_s g, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho_g \alpha_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_g \alpha_g V_g)}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho_g \alpha_g V_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_g \alpha_g V_g V_g)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \beta_B (V_g - V_s) - \rho_g g. \quad (4)$$

Во второй модели уравнение неразрывности для твердой фазы такое же, как и в (1), а в уравнении импульса для твердой фазы учитывается влияние давления газа. Кроме того, уравнения для газовой фазы получены с учетом закона Дарси (5–7):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_s \alpha_s V_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_s \alpha_s V_s V_s)}{\partial z} = \\ & = -\alpha_s \frac{\partial P}{\partial z} - G(\alpha_g) \frac{\partial \alpha_s}{\partial z} + \beta_B (V_g - V_s) - \rho_s \alpha_s g, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} = \frac{1}{\alpha_g \mu_g} \cdot \frac{\partial(\rho_g \alpha_g k \frac{\partial P}{\partial z})}{\partial z} - \frac{\rho_g}{\alpha_g} \cdot \frac{\partial V_s}{\partial z} - V_s \frac{\partial \rho_g}{\partial z}, \quad (6)$$

$$V_g = V_s - \frac{k}{\mu_g} \cdot \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (7)$$

На рис. 1 представлены графики изменения положения нижней границы слоя частиц, толщиной от 20 до 50 мм, при частоте колебаний полки 50 Гц. Амплитуда колебаний равна 1,42 мм; диаметр частиц — 0,13 мм. Кривая 1 соответствует колебанию полки, кривая 2 — экспериментальным данным [3], кривая 3 — расчетам, полученным по модели 1, кривая 4 — расчетам, полученным по модели 2.

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А.

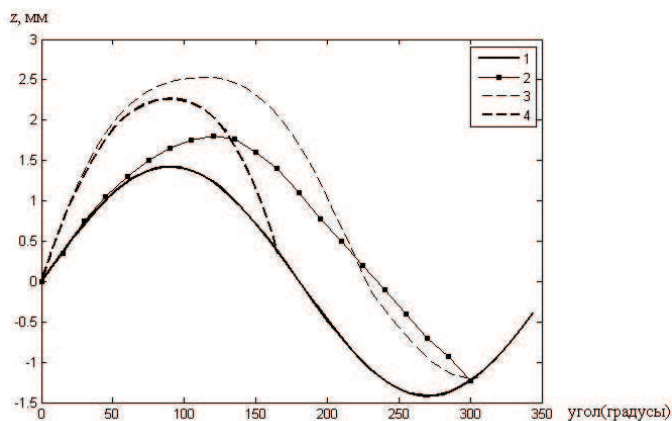


Рис. 1. Изменение положения нижней границы слоя частиц при частоте колебаний полки 50 Гц

Из рис. 1 видно, что обе модели качественно верно описывают эксперимент. Но по расчетам, полученным по модели 2, слой сталкивается с полкой раньше, чем это наблюдается в экспериментах, а по модели 1 позже.

Литература

1. Орлова Н. С. Исследование двухфазной модели виброожижения на основе подхода Эйлера // Методы дискретных особенностей в задачах мат. физики: тр. XV междунар. симп.—Харьков–Херсон, 2011.—С. 313–316.
2. Русанов С. А., Луняка К. В., Клюев О. І., Глухов Г. М. Математичне моделювання робочого процесу в апаратах з віброкиплячим шаром та розробка систем автоматизованого моделювання гідродинаміки віброкиплячих шарів // Електротехнічні комплекси і системи. Автоматика. Автоматизація.—2009.—№ 1 (23).—С. 15–24.
3. Kroll W. Über das Verhalten von Schüttgut in lotrecht schwingenden Gefäßen // Forschung.—1954.—Bd. 20, Heft 1.—P. 2–15.

ОБ ОДНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ
ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА
С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Л. Ю. Плиева¹

Рассмотрим сингулярный интеграл с весовой функцией

$$S(\varphi, x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{\varphi(t)}{t-x} dt, \quad x \in (-1, 1), \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ — плотность, удовлетворяющая условию Гёльдера.

Интегралы такого вида находят широкое применение в задачах математической физики и аэродинамики [1, 2].

Построим для интеграла (1) квадратурную формулу наивысшей алгебраической степени точности. Для этого приблизим $\varphi(t)$ ее интерполяционным многочленом Лагранжа с узлами $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+1} \pi$, $k = 1, 2, \dots, n$:

$$L_n(\varphi, x) = \sum_{k=1}^n \frac{C_n(x)}{(x-x_k)C'_n(x_k)} \varphi(x_k),$$

где

$$C_n(x) = \frac{\cos \frac{2n+1}{2} \vartheta}{\cos \frac{\vartheta}{2}}, \quad \vartheta = \arccos x. \quad (2)$$

Также воспользуемся следующими формулами обращения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{C_n(t)}{t-x} dt &= S_n(x), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{S_n(t)}{t-x} dt &= -C_n(x), \\ -1 < x < 1, \quad n &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А.

где

$$S_n(x) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \vartheta}{\sin \frac{\vartheta}{2}}, \quad C_n(x) = \frac{\cos \frac{2n+1}{2} \vartheta}{\cos \frac{\vartheta}{2}}, \quad (4)$$

— ортогональные многочлены соответственно по весам $p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $p(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Используя формулы (3) для сингулярного интеграла (1), мы получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{\varphi(t)}{t-x} dt &= \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \sqrt{1-x_k^2}}{x-x_k} \cos \frac{2k-1}{2(2n+1)} \pi \times \\ &\times (S_n(x) - A_k C'_n(x_k)) \varphi(x_k) + R_n(\varphi; x), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+1} \pi, \quad A_k = \frac{4}{2n+1} \cos^2 \frac{2k-1}{2(2n+1)} \pi,$$

Справедлива

Теорема. Если плотность $\varphi(t)$ имеет производные до r -го ($r > 1$) порядка включительно и $\varphi^{(r)}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера $H(\alpha)$ ($0 < \alpha \leq 1$), то для квадратурных формул (5) справедлива оценка

$$|S(\varphi, x) - S_n(\varphi, x)| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\gamma-1}}\right),$$

равномерная для всех $-1 \leq x \leq 1$, $\gamma \in (1/2, 1]$, где $S_n(\varphi, x)$ — соответствующая квадратурная сумма.

Литература

1. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО Янус, 1995.—520 с.
2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.—Киев: Наукова думка, 1976.—444 с.
3. Ахизер Н. И. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов // Изв. АН СССР. Математика.—1945.—Т. 9.—С. 275–290.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ ПОРИСТОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ И КЛАСТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

В. В. Ремизов¹, М. С. Шевцова²

Пористые пьезокерамические материалы находят эффективные применения в качестве активных элементов в ультразвуковых излучателях. Пористая пьезокерамика имеет меньший импеданс по сравнению с плотной, что дает лучшее акустическое согласование пьезокерамики с акустической средой. С другой стороны, удивительным свойством пористой пьезокерамики является то, что ее пьезомодуль d_{33} , определяющий эффективность преобразований механической и электрической энергий при толщинных колебаниях поперечно поляризованной пьезокерамики, остается практически тем же, что и для плотной пьезокерамики, что и позволяет создавать излучатели мощного ультразвука. При этом по современным технологиям можно получать достаточно прочную пьезокерамику даже очень большой пористости. Как оказывается, объяснить постоянство пьезомодуля d_{33} и убывание пьезомодуля d_{31} с ростом пористости можно, привлекая гипотезу о неоднородности поля поляризации в окрестности пор.

В работе для расчета эффективных модулей пористых пьезокомпозигов различного типа связности использован подход, основанный на методах эффективных модулей механики композитов, моделировании представительных объемов и применении конечно-элементных технологий. Разработаны новые компьютерные модели представительных объемов пьезоматериалов для пористой пьезокерамики различного типа связности. Созданы конечно-элементные модели высокопористых керамик (с порами открытого и закрытого типов) с использованием новых кластерных моделей, основанных на положениях теории перколяции и учитывающих неоднородность направлений вектора поляризации для различных пьезоэлектрических конечных элементов. При расчетах использованы следующие методы генерации представительных объемов двухфазного пьезокомпозигов в виде

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

²Россия, Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН.

куба с кубическими элементами: случайный, метод начальной концентрации, метод ОДА (ограниченная диффузией агрегация) Виттена — Сандера, метод ОДА «Рост из плоскости» и др. Данные методы позволили моделировать структуры пористой пьезокерамики различного типа.

Для учета неоднородной поляризации предварительно решались задачи электростатики для диэлектрического композита и находилось электрическое поле, определяющее поле поляризации. Далее, по найденному электрическому полю определялись направления и значения вектора поляризации для пьезокерамической матрицы. В результате получался представительный объем пьезокомпозита с неоднородными свойствами пьезокерамической матрицы (как правило, вблизи пор).

Для определения эффективных модулей численно с использованием специально разработанных программ для конечно-элементного пакета ANSYS решались наборы задач электроупругости для представительных объемов при специальных граничных условиях.

В результате были определены эффективные модули пористой пьезокерамики ПКР-8. Проанализировано влияние различных структур представительных объемов и учета неоднородной поляризации на эффективные модули. Проведено сравнение вычисленных основных характеристик пористых пьезокомпозитов с известными экспериментальными данными, полученными в НИИ физики ЮФУ. Получено, что для пористой пьезокерамики ПКР-8 наиболее соответствующие экспериментальным данным значения эффективного пьезомодуля d_{33} дал метод начальной концентрации, а для пьезомодуля d_{31} — метод ОДА Виттена — Сандера, причем учет неоднородной поляризации приводит к улучшению результатов.

Таким образом, учет неоднородной поляризации помогает получать результаты, более близкие к экспериментальным. Кроме того, структуры представительных объемов влияют на значения эффективных модулей, и для моделирования структуры пористых пьезокомпозитных материалов можно рекомендовать методы начальной концентрации и метод ОДА Виттена — Сандера.

Авторы выражают благодарность А. В. Наседкину за внимание к работе.

НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ ДОЛОМИТА В ЦЕНТРОБЕЖНОЙ МЕЛЬНИЦЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ТИПА

С. Е. Соболев¹

Известна центробежная мельница вертикального типа, работа которой характеризуется отсутствием мелющих тел, совмещением операций мелкого дробления и измельчения, малой металлоемкостью, отсутствием специальных фундаментов, высокой удельной производительностью, малым удельным расходом электроэнергии, низким уровнем шума в работе, простотой конструкции и др. [1, 2].

Для повышения долговечности рабочих элементов центробежной мельницы была осуществлена блокировка кольцевого горизонтального зазора между подвижными и неподвижными элементами, а для снижения переизмельчения готового продукта — размещение в корпусе центробежной мельницы, в зоне над вращающимся ротором, дополнительных кольцевых просеивающих поверхностей.

В связи с этим, при проведении экспериментальных исследований была поставлена задача получить зависимости производительности и удельного расхода электроэнергии мельницы от давления материала на ротор, частоты вращения ротора, количества ребер, установленных в полости ротора. Для этого использовался метод планирования экспериментов, а именно полный факторный эксперимент типа 2^k , где k — число факторов [3]. Измельчаемый материал был представлен доломитом крупностью $-12 + 9$ мм. Интервал варьирования факторов принимался, исходя из возможных реальных пределов режимов центробежной мельницы.

Для производительности мельницы и удельного расхода электроэнергии получены коэффициенты в уравнении регрессии вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2,$$

где x_1 — кодированное значение давления столба материала на ротор, а x_2 — кодированное значение частоты вращения ротора.

¹Россия, Владикавказ, Северо-Кавказский горно-металлургический институт (государственный технологический университет).

Для производительности коэффициенты регрессии в случае установки в полости ротора трех ребер равны

$$b_0 = 4,77, \quad b_1 = 0,20, \quad b_2 = 0,86, \quad b_{12} = -0,22,$$

а для шести ребер —

$$b_0 = 4,58, \quad b_1 = 0,11, \quad b_2 = 0,68, \quad b_{12} = 0,05.$$

Для удельного расхода электроэнергии коэффициенты регрессии в случае трех ребер равны

$$b_0 = 0,88, \quad b_1 = 0,13, \quad b_2 = -0,05, \quad b_{12} = 0,06,$$

а для шести ребер —

$$b_0 = 0,93, \quad b_1 = 0,22, \quad b_2 = -0,07, \quad b_{12} = -0,04.$$

Полученные уравнения регрессии показывают, что при уменьшении количества ребер, установленных в полости ротора, повышается производительность мельницы и уменьшается удельный расход электроэнергии. При этом наибольшее влияние на производительность мельницы оказывает частота вращения ротора и в меньшей степени высота столба материала над ротором, а на удельный расход электроэнергии на измельчение — высота столба материала над ротором и в меньшей степени частота вращения ротора.

Литература

1. Хетагуров В. Н. Способ измельчения материалов. Патент РФ № 2078613 // Оpubл. в Б. И.—1997.—№ 13.
2. Хетагуров В. Н. Разработка и проектирование центробежных мельниц вертикального типа.—Владикавказ: Терек, 1999.—225 с.
3. Евдокимов Ю. А., Колесников В. И., Тетерин А. И. Планирование и анализ экспериментов при решении задач трения и износа.—М.: Наука, 1980.—228 с.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ВЛИЯНИИ ШОКОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ОБЩЕСТВО

З. Х. Хосаева¹

Попытка учесть с помощью математической модели, описывающей изменение напряженности в полиэтническом обществе [1], влияние шоковых воздействий оказалась неудачной в связи с большой инерционностью модели. В этой модели слабые шоковые воздействия практически не влияют на состояние общества, а результаты сильного воздействия проявляются с запаздыванием. По-видимому, протестная активность не всегда пропорциональна уровню напряженности. Можно предположить, что протестная активность связана не только с напряженностью, но и с другими факторами, в частности, с разобщенностью общества и ее влияние, по аналогии с исследованием тюремных бунтов, может быть описано в виде катастрофы «ласточкин хвост» [2]. Она описывается уравнением состояния

$$r^5 + ar^3 + br^2 + cr + d = 0,$$

где r — протестная активность, а a, b, c, d — параметры, одним из которых является напряженность. Уравнение при различных значениях параметров имеет либо одно, либо три действительных решения. Возможный вид поверхности, отражающей зависимость протестной активности (r) от напряженности и разобщенности, представлен на рис. 1. В нашей модели общество делится на два слоя: управляющую элиту и трудящихся. Каждый слой, в свою очередь, делится на две группы, одну из которых составляет титульная национальность, а другую — все остальные национальности. Таким образом, должны рассматриваться два уравнения состояния для трудящихся титульной и других национальностей, поскольку предполагается, что напряженность элитных слоев не связана с ее непосредственным участием в протестных акциях. По-видимому, напряженности в уравнениях состояния соответствует параметр d , а параметр c — разобщенности общества, которая связана с восприятием соответствующей группой силы воздействия власти (т. е. возможности властей подавлять протестную активность). В тоталитарном обществе

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А.

разобщенность наименьшая, поскольку любые протестные действия подавляются, а при недееспособной государственной власти разобщенность предполагается наибольшей. Возможно, a и b связаны с уровнем *социальности* соответствующей группы и особенностями ее культуры [3].

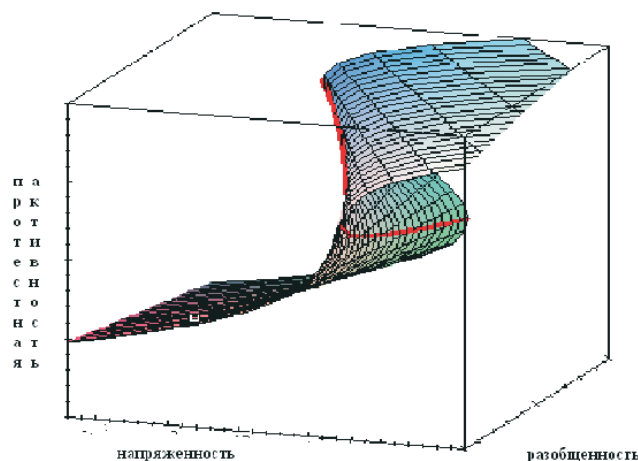


Рис. 1. Поверхность, отражающая протестную активность

При рассмотрении процессов в обществе переход с нижнего листа бифуркационного множества на верхний может осуществляться не только при достижении предельного значения напряженности для нижнего листа, но и раньше при достаточно интенсивном воздействии на общество. Кроме того, обратный переход с верхнего листа на нижний, т. е. падение протестной активности происходит достаточно быстро, если внешнее воздействие кратковременно и нет сил, поддерживающих дестабилизацию обстановки в обществе.

Литература

1. Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х., Челпалина Д. Д. Математическое моделирование напряженности общества в РСО-А и ее связи с протестной активностью населения // Теория операторов, комплексный анализ и мат. моделирование: тезисы докл. междунар. науч. конф. (Волгодонск, 4–8 июля 2011 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011.—С. 108–109.

2. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения.—М.: Мир, 1980.—607 с.
3. Математические модели социальных систем: учеб. пособие.—Омск: Омский гос. ун-т, 2000.—256 с.

Приложение

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ.

Е. С. Каменецкий¹

Лекция 1

Основные понятия теории разностных схем. Сходимость, точность, устойчивость, консервативность, транспортированность.

Подавляющее большинство дифференциальных уравнений в полных и частных производных не имеют решений в явном виде. Даже если их решение получено в виде ряда, суммирование этих рядов при различных значениях аргументов может оказаться достаточно трудоемким. В то же время, для большого числа естественнонаучных и инженерных задач необходимо получение хотя бы приближенного решения дифференциальных уравнений. Поэтому уже давно стали разрабатываться численные методы решения. До появления ЭВМ такие методы использовались редко из-за их большой трудоемкости. Появление достаточно мощной вычислительной техники коренным образом изменило ситуацию. Возникло ощущение, что любое уравнение или система уравнений могут решаться с заданной точностью и ограничения связаны только с объемом памяти ЭВМ и приемлемым временем проведения расчетов. В настоящее время объем памяти вычислительных систем настолько велик, что практически не ограничивает возможности решения задач. Широкое распространение суперкомпьютеров с параллельными вычислениями дает возможность получать решение сложных задач за приемлемое время. Но широкое использование численных методов выявило достаточно много проблем, связанных с приближенностью задания искомой функции и ее производных. Для того, чтобы получать решение с конечным объемом вычислений приходится либо переходить от непрерывных функций к дискретным, либо представлять функции в виде конечных рядов. В настоящих лекциях мы рассмотрим только

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А.

первый способ представления функций, который приводит к замене производных конечными разностями.

Введем некоторые определения. Множество точек, в которых ищется решение называется *сеткой*. Отдельные точки сетки называются *узлами сетки*. Расстояние между соседними узлами называется *шагом сетки*. Регулярные сетки представляют собой упорядоченную по определенным правилам структуру с явно выраженными сеточными направлениями, которые, в общем случае, представляют собой криволинейную систему координат. Пример ортогональной сетки с постоянными шагами для двумерной стационарной задачи приведен на рис. 1. Отметим, что каждому узлу сетки соответствуют не только значения координат x, y , но и порядковые номера узла по соответствующим координатам i, j .

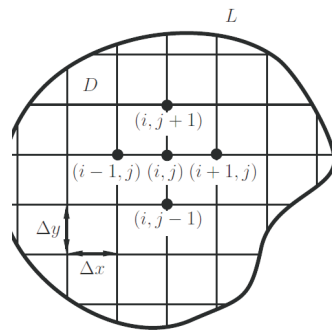


Рис. 1. Сетка для двумерной стационарной задачи в области D с границей L

При использовании дискретных функций каждое дифференциальное уравнение в частных производных заменяется системой алгебраических уравнений, число которых равно числу внутренних узлов сетки.

Отметим, что даже разностный аналог первой производной по одной из координат может быть получен многими способами, что приводит к большому разнообразию разностных выражений, соответствующих в каждом узле сетки исходному уравнению в частных производных. Так, первую частную производную по координате x можно записать через разности вперед

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}$$

и назад

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x}.$$

Такая запись является, по сути дела, следствием линейной интерполяции.

Можно использовать и интерполяцию полиномами более высокого порядка, что приведет к увеличению точности записи производной. В случае полинома второго порядка производная может быть записана в виде центральной разности

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x},$$

а также разностей вперед

$$\frac{du}{dx} = \frac{-u_{i+2,j} + 4u_{i+1,j} - 3u_{i,j}}{2\Delta x}$$

и назад

$$\frac{du}{dx} = \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{2\Delta x}.$$

Применение полиномов более высокого порядка еще более увеличивает число возможных вариантов записи производных любого порядка. В разностных выражениях возможна также запись значений функции в узлах сетки как среднего из ее значений в нескольких соседних узлах. Если уравнение содержит несколько производных и саму искомую функцию, то возникает множество вариантов его разностной записи, и выбор лучшего из них для данной задачи представляется нетривиальным.

Каким требованиям должна удовлетворять разностная запись дифференциального уравнения? Представляется очевидным, что в пределе при стремлении шагов сетки к нулю, решение конечно-разностного уравнения должно стремиться к решению исходного дифференциального уравнения, т. е. должна выполняться аппроксимационная сходимость. Но иногда можно использовать разностные схемы, которые в действительности аппроксимируют другое дифференциальное уравнение. Такие схемы могут оказаться вполне приемлемыми для некоторого класса задач, например для задач с разрывными значениями искомой функции.

Так как при решении любой задачи шаги сетки остаются конечными, желательно, чтобы разностная запись уравнений и граничных

условий обеспечивала максимально высокую локальную точность. Для оценки точности используют разложение в ряд искомой функции в точке, для которой дифференциальные уравнения записываются в разностном виде. Так, для первой производной по координате x в точке i , записанной через разность назад, после подстановки значения функции в точке $i - 1$ в виде

$$u_{i-1} = u_i - \left(\frac{du}{dx}\right)_i \Delta x + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_i \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots$$

получим, что

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = \left(\frac{du}{dx}\right)_i - \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i \frac{\Delta x}{2!} + \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_i \frac{(\Delta x)^2}{3!} + \dots$$

Сумма членов в правой части этого выражения, начиная со второго, является ошибкой. Полагая, что старшие производные в точке i не больше младших, и учитывая, что шаг сетки много меньше единицы, получим, что ошибка определяется вторым членом в правой части, т. е. она пропорциональна величине шага сетки. Говорят, что в этом случае разностная запись производной первого порядка точности.

Измельчение шагов сетки увеличивает точность, но одновременно увеличивается время решения задачи. что для сложных задач может быть крайне нежелательно. Кроме того, могут стать существенными ошибки округления чисел в ЭВМ. Поэтому желательно, чтобы разностные схемы были по крайней мере второго порядка точности, т. е. локальная ошибка аппроксимации была порядка квадрата шагов. Однако, схемы высокого порядка точности могут оказаться менее эффективными, если в каких-либо частях расчетной области старшие производные будут больше, чем младшие.

При последовательном решении разностных уравнений ошибка может возрастать и становиться настолько большой, что решение перестает зависеть от начальных и граничных условий. Такое явление называют *неустойчивостью*. Неустойчивые разностные схемы, как правило, не могут использоваться при решении задач. Некоторые разностные схемы абсолютно устойчивы, т. е. их устойчивость не зависит от величины шагов сетки и численного значения констант в уравнении и граничных или начальных условиях. Другие условно устойчивы, т. е. при определенных значениях констант можно подобрать такое соотношение шагов, которое обеспечит получение устойчивого решения. И существуют абсолютно неустойчивые схемы, при

применении которых ошибка всегда возрастает в ходе решения задачи. Рост ошибки происходит экспоненциально, и неустойчивость решения, как правило, видна сразу. Но для того, чтобы определить можно ли подобрать соотношение шагов, обеспечивающее устойчивость, или разностную схему обязательно нужно изменить, используют априорные методы оценки устойчивости. В них либо пытаются показать, что наибольшее значение функции при решении разностных уравнений находится на границах расчетной области, либо оценивают изменение суммы квадратов значений функции в ходе решения разностных уравнений, либо представляют решение в виде произведения экспонент, показатели которых должны иметь отрицательную или нулевую действительную часть для того, чтобы решение было устойчивым. В последнем случае с точностью до постоянного множителя записывают значение искомой функции в точке k, j в виде $u_{k,j} = q^j e^{ik\theta}$. Это выражение подставляют в разностное уравнение и оценивают модуль q . Если он оказывается больше единицы, схема будет неустойчивой. Полученный критерий является необходимым, но не достаточным. Отметим, что все методы оценки устойчивости разностных схем трудно применять в случае нелинейности решаемых уравнений.

Желательно, чтобы время решения разностных уравнений и систем уравнений было не слишком велико. Обычно наиболее значительные затраты времени связаны с итерациями, которые могут оказаться необходимыми для получения решения. Для решения параболических и гиперболических уравнений можно использовать как явные схемы, в которых в каждом разностном уравнении содержится одна неизвестная, так и неявные схемы, в которых в каждом разностном уравнении содержится несколько неизвестных, и замкнута только система разностных уравнений на слое. При решении параболических уравнений с использованием явных схем условием устойчивости является пропорциональность величины шага сетки по одной из переменных, квадрату шага — по другой, что, как правило, приводит к чересчур маленьким шагам и, соответственно, к увеличению времени решения. Переход к неявным схемам снимает это ограничение, но в случае нелинейных или многомерных линейных уравнений приводит к итерациям для получения решения на каждом слое, что также увеличивает время решения. Кроме того, неявные схемы приводят к бесконечной скорости распространения возмущений, что не физично. Правда возмущения в этом случае достаточно быстро за-

тухают с удалением от их источника так же, как в аналитическом решении уравнения теплопроводности.

Другим желательным свойством разностной схемы является *консервативность*, т. е. выполнение законов сохранения для элементарного объема, соответствующего узлу сетки. Из-за того, что преобразования дифференциальных уравнений не всегда эквивалентно воспроизводятся в разностном виде, законы сохранения при переходе от дифференциальных уравнений к разностным могут нарушаться. Для того, чтобы величины, для которых известны законы сохранения, при определенных условиях сохранялись, целесообразно перейти к интегральным уравнениям, описывающим их изменение в контрольном объеме и записать потоки этих величин через границы объема, а также источниковые члены в виде конечных разностей. Отметим, что в случае переменных коэффициентов уравнения, консервативная разностная схема может оказаться для него менее точной, чем неконсервативная.

Поскольку узлы сетки находятся в центрах объемов, при записи потоков обычно возникает необходимость в интерполяции коэффициентов уравнения, которые сами определяются в ходе решения. Интерполяция коэффициентов возможна как с использованием полиномов, так и с помощью интегро-интерполяционного метода. В последнем случае выражение для потока интегрируется вдоль соответствующей координаты на протяжении шага сетки, а затем предполагается, что поток на поверхности ячейки является средним на этом участке. Например, выражение для диффузионного потока

$$q = -D(x) \frac{dc}{dx}$$

можно записать в виде

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{q}{D(x)} dx = - \int_{c_{i-1}}^{c_i} dc.$$

Принимая величину потока под интегралом в левой части уравнения в среднем равной его значению на поверхности ячейки, т. е. в точке $i - 1/2$, получим для этого потока выражение

$$q_{i-1/2} = \frac{c_{i-1} - c_i}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{D(x)}}.$$

Для того, чтобы избежать интерполяции, можно определять часть неизвестных величин в узлах вспомогательной сетки, смещенной относительно основной на половину шага вдоль каждой координаты.

Отметим также, что при переходе от дифференциальных уравнений к конечно-разностным возникает дисперсионная ошибка. Если в точном решении все фурье-компоненты переносятся за счет конвекции с одной и той же скоростью, то в решении конечно-разностных уравнений остаются все компоненты точного решения, но различные компоненты переносятся с различными скоростями. Эта ошибка больше для более коротких волн.

Желательным является также свойство транспортности разностных уравнений. Оно заключается в том, что при переносе некоторой величины движущейся средой и отсутствии в уравнениях диффузионных членов, а также членов, связанных с дальнодействием, изменение этой величины не должно распространяться против направления движения среды.

Лекция 2

Искусственная вязкость. Методы разностного решения параболических уравнений. Решение уравнений конвекции-диффузии. Решение гиперболических уравнений первого порядка.

При быстром изменении искомой функции решение конечно-разностных уравнений нередко становится немонотонным, т. е. возникают осцилляции. Они не увеличиваются в процессе решения, но существенно искажают получаемые результаты. Избежать немонотонности или, по крайней мере, существенно ее уменьшить можно, используя схемы более низкого порядка точности, так как одной из причин колебательного поведения решения является аппроксимация функций полиномами высоких степеней.

Для подавления осцилляций можно также вводить в уравнение искусственную вязкость, т. е. дополнительный член, который велик там, где функция меняется быстро, и мал (по возможности порядка $(\Delta x)^p$, где p — точность схемы) там, где функция меняется медленно. Одна из возможных видов записи этого члена имеет вид

$$\omega = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2,$$

где μ — произвольный коэффициент. Можно также использовать идею Лакса о записи значений функции в некоторых точках в виде полусуммы ее значений в соседних точках. Например, вместо $u_{k,j}$ можно записать $(u_{k+1,j} + u_{k-1,j})/2$. Такой подход для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

приводит в точке k, j к разностному уравнению

$$\frac{u_{k,j+1} - (u_{k+1,j} + u_{k-1,j})/2}{\Delta t} + a \frac{u_{k+1,j} - u_{k-1,j}}{2\Delta x} = 0.$$

При этом для устойчивости численного решения необходимо, чтобы число Курранта

$$C = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$$

было меньше или равно единице. Такая запись разностного уравнения приводит к тому, что значение искомой функции в некоторой точке на следующем временном слое $u_{k,j+1}$ не зависит от значения этой функции в той же точке на предыдущем временном слое $u_{k,j}$, что не соответствует реальности. Для устранения этого недостатка идею Лакса применяют дважды. Сначала определяют значение искомой функции во вспомогательных точках с полуцелыми индексами, т. е. $u_{k+1/2,j-1/2}$ и $u_{k+1/2,j+1/2}$, а затем, используя полученные на промежуточном временном слое результаты, в точках на следующем временном слое:

$$\begin{aligned} \frac{u_{k,j+1} - u_{k,j}}{\Delta t} + a \frac{u_{k+1,j} - u_{k-1,j}}{2\Delta x} - \frac{a^2\Delta t}{2} \frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{(\Delta x)^2} = \\ = \frac{f_{k,j+1} + f_{k,j}}{2} - \frac{a\Delta t}{4\Delta x} (f_{k+1,j} - f_{k-1,j}). \end{aligned}$$

В этой схеме, называемой *схемой Лакса — Вендроффа*, третий член в левой части представляет собой искусственную вязкость, зависящую от шагов сетки и коэффициента исходного уравнения.

Запись разностных уравнений и методы решения получающейся системы алгебраических уравнений существенно зависят от типа исходных дифференциальных уравнений.

Так для численного решения параболического уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

можно использовать метод прямых, в котором дискретизация осуществляется только по пространственной переменной:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_k = D \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{(\Delta x)^2} + f_k,$$

а затем решать полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений одним из известных методов, например, методом Рунге — Кутты.

Чаще используют неявную схему Кранка — Николсона

$$\begin{aligned} \frac{u_{k,j+1} - u_{k,j}}{\Delta t} = D \left(\frac{u_{k+1,j+1} - 2u_{k,j+1} + u_{k-1,j+1}}{2(\Delta x)^2} + \right. \\ \left. + \frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{2(\Delta x)^2} \right) + \frac{f_{k+1} + f_k}{2}. \end{aligned}$$

Поскольку исходное дифференциальное уравнение линейно, решение на следующем $(j+1)$ временном слое легко находится методом прогонки. Схема абсолютно устойчива и при определенном соотношении временного и пространственного шагов обеспечивает локальную точность порядка квадрата этих шагов.

Другую возможность получения решения с такой же локальной точностью дает явная трехслойная схема «чехарда»

$$\frac{u_{k,j+1} - u_{k,j-1}}{2\Delta t} = D \frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{2(\Delta x)^2} + f_k.$$

Эта схема требует дополнительного начального условия, которого нет в исходной постановке задачи, и, кроме того, абсолютно неустойчива.

Неустойчивость устраняется путём перехода к схеме Дюфорты — Франкеля — Саульева с использованием приема, предложенного Лаксом:

$$\frac{u_{k,j+1} - u_{k,j-1}}{2\Delta t} = D \frac{u_{k+1,j} - (u_{k+1,j} + u_{k-1,j}) + u_{k-1,j}}{2(\Delta x)^2} + f_k,$$

но при этом в решение вводится искусственная вязкость.

Эту схему можно использовать и для многомерных нестационарных задач. Но чаще такие задачи решаются методом переменных направлений. В разностной записи уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f$$

на одном временном слое применяют схему

$$\frac{u_{k,j,\nu+1} - u_{k,j,\nu}}{\Delta t} = D \left(\frac{u_{k+1,j,\nu+1} - 2u_{k,j,\nu+1} + u_{k-1,j,\nu+1}}{(\Delta x)^2} + \right. \\ \left. + \frac{u_{k,j+1,\nu} - 2u_{k,j,\nu} + u_{k,j-1,\nu}}{(\Delta y)^2} \right) + \frac{f_{\nu+1} + f_{\nu}}{2},$$

а на другом — вторую производную по x записывают на временном слое ν , а вторую производную по y — на временном слое $\nu + 1$.

Другой возможностью является использование схемы, называемой *классики*, в которой точки на следующем временном слое разделяются на две группы в шахматном порядке (рис. 2).

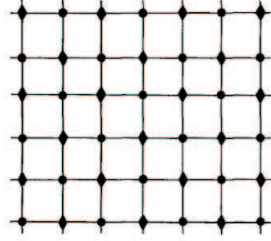


Рис. 2. Распределение точек на следующем временном слое

Первоначально по явной схеме вычисляются значения искомой функции в точках, обозначенных кружками:

$$\frac{u_{k,j,\nu+1} - u_{k,j,\nu}}{\Delta t} = D \left(\frac{u_{k+1,j,\nu} - 2u_{k,j,\nu} + u_{k-1,j,\nu}}{(\Delta x)^2} + \right. \\ \left. + \frac{u_{k,j+1,\nu} - 2u_{k,j,\nu} + u_{k,j-1,\nu}}{(\Delta y)^2} \right) + \frac{f_{\nu+1} + f_{\nu}}{2},$$

а затем по неявной схеме в точках, обозначенных ромбиками:

$$\frac{u_{k,j,\nu+1} - u_{k,j,\nu}}{\Delta t} = D \left(\frac{u_{k+1,j,\nu+1} - 2u_{k,j,\nu+1} + u_{k-1,j,\nu+1}}{(\Delta x)^2} + \right. \\ \left. + \frac{u_{k,j+1,\nu+1} - 2u_{k,j,\nu+1} + u_{k,j-1,\nu+1}}{(\Delta y)^2} \right) + \frac{f_{\nu+1} + f_{\nu}}{2}.$$

При вычислениях по неявной схеме каждое уравнение решается отдельно так как значения искомой функции в соседних точках нового временного слоя уже вычислены.

При дальнейшем продвижении по временным слоям порядок вычислений в точках, обозначенных кружками и ромбиками, меняется на противоположный.

Если уравнение нелинейное, целесообразно линеаризовать те его члены, которые записываются на следующем временном слое. Другой возможностью является использование явной схемы. При этом для того, чтобы обеспечить устойчивость решения, надо выбирать маленький шаг по времени. Увеличить этот шаг можно применяя метод *предикции-коррекции*, т. е. предварительно вычисляется значение неизвестной функции по явной схеме, а затем несколько раз это значение уточняется по неявной схеме. При применении неявной схемы в правой части уравнения используются результаты предыдущей итерации.

Часто встречаются уравнения параболического типа, которые содержат как первые, так и вторые производные по пространству и первую производную по времени. Такие уравнения широко распространены в гидродинамике. В частности можно рассмотреть уравнение переноса вихря с учетом конвекции и диффузии

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = D \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}.$$

Проекция скорости U и V зависят от значений вихря ω , и уравнение нелинейно. На этапе коррекции можно использовать схему Кранка — Николсона. При одинаковых шагах по пространственным координатам разностные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{k,j,\nu+1} - \omega_{k,j,\nu}}{\Delta t} = & -U_{k,j,\nu+1} \frac{\omega_{k+1,j,\nu+1} - \omega_{k-1,j,\nu+1}}{2\Delta x} - V_{k,j,\nu+1} \times \\ & \times \frac{\omega_{k,j+1,\nu+1} - \omega_{k,j-1,\nu+1}}{2\Delta y} + D \frac{\omega_{k+1,j,\nu+1} - 2\omega_{k,j,\nu+1} + \omega_{k-1,j,\nu+1}}{(2\Delta x)^2} + \\ & + D \frac{\omega_{k,j+1,\nu+1} - 2\omega_{k,j,\nu+1} + \omega_{k,j-1,\nu+1}}{2(\Delta y)^2} - U_{k,j,\nu} \frac{\omega_{k+1,j,\nu} - \omega_{k-1,j,\nu}}{2\Delta x} - \\ & - V_{k,j,\nu} \frac{\omega_{k,j+1,\nu} - \omega_{k,j-1,\nu}}{2\Delta y} + D \frac{\omega_{k,j+1,\nu} - 2\omega_{k,j,\nu} + \omega_{k,j-1,\nu}}{2(\Delta y)^2}. \end{aligned}$$

Отметим, что схема имеет второй порядок точности по пространству, но она не консервативна и, в случае быстрого изменения значения вихря вдоль координат, может быть немонотонной. Поэтому чаще используют схему первого порядка точности, записывая первые производные односторонними против потока.

Если рассматривается перенос скалярной функции, не влияющей на поле скоростей и коэффициент диффузии, например, пассивной примеси C , то можно использовать значения этой функции на полуцелом временном слое, определяя их с использованием значений функции на предыдущем временном слое в линейном приближении. Полагая, что скорости не зависят от времени, а коэффициент диффузии постоянен, получим дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}.$$

Разностная запись конвективных членов

$$\frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y}$$

в этом случае имеет вид

$$\frac{U_{k+1/2,j}C_{k+1/2,j,\nu+1/2} - U_{k-1/2,j}C_{k-1/2,j,\nu+1/2}}{\Delta x} + \frac{V_{k,j+1/2}C_{k,j+1/2,\nu+1/2} - V_{k,j-1/2}C_{k,j-1/2,\nu+1/2}}{\Delta y},$$

где искомая функция в точках с полуцелыми индексами представляется в виде

$$C_{k,j+1/2,\nu+1/2} = C_{k,j,\nu} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial C}{\partial t},$$

который преобразуется с использованием исходного уравнения.

Окончательно получается выражение

$$C_{k,j+1/2,\nu+1/2} = C_{k,j,\nu} + \frac{\Delta x}{2} \left(1 - \frac{\Delta t U_{i,j}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_{k,j,\nu} - \frac{\Delta t}{2} C_{k,j,\nu} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{k,j} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial VC}{\partial y} \right)_{k,j,\nu} + \frac{\Delta t}{2} \left(D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right)_{k,j,\nu}.$$

Если искомая функция изменяется в расчетной области поразному (где-то быстро, а где-то медленно), можно использовать сетку с переменными шагами, измельчая их там, где предполагается быстрое изменение этой функции. При этом для разностной записи

конвективных членов иногда используют комбинацию двухсторонней и односторонней противопоточной разностной записи с весами. Слагаемое $U \partial C / \partial x$ при положительных U записывается в этом случае как

$$\theta U_{k,j} \frac{C_{k+1,j,\nu} - C_{k-1,j,\nu}}{h_{i+1} + h_i} + (1 - \theta) U_{k-1/2,j,\nu} \frac{C_{k,j,\nu} - C_{k-1,j,\nu}}{h_k},$$

где $h_k = x_k - x_{k-1}$, $\theta = 1/(1 + r_k)$, а $r_k = (U_k h)/(2D)$. Величина h выбирается большей из h_k и h_{k+1} .

Для решения гиперболического уравнения первого порядка с постоянным коэффициентом a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f$$

можно использовать разностную схему первого порядка точности

$$\frac{u_{k,j+1} - u_{k,j}}{\Delta t} + a \frac{u_{k,j} - u_{k-1,j}}{\Delta x} = f_{k,j}.$$

Для устойчивости такой схемы необходимо, чтобы число Курранта было меньше или равно единице.

Следует отметить, что в случае, когда число Курранта меньше единицы, в такой схеме возникает искусственная вязкость.

Для такого уравнения схема Кранка — Николсона

$$\frac{u_{k,j+1} - u_{k,j}}{\Delta t} + a \frac{u_{k+1,j} - u_{k-1,j} + u_{k+1,j+1} - u_{k-1,j+1}}{4\Delta x} = \frac{f_{k,j+1} + f_{k,j}}{2}$$

абсолютно устойчива и обеспечивает точность порядка квадрата шагов по времени и по координате. Надо отметить, что она требует двух граничных условий при $x = 0$.

Лекция 3

Схема Аракавы. Решение гиперболических уравнений второго порядка. Решение эллиптических уравнений. Метод расщепления. Метод частиц в ячейке.

Стремление обеспечить высокую точность и выполнение законов сохранения приводит к значительному усложнению разностных

уравнений. Так схема Аракавы для уравнения переноса вихря без учета диффузии

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad U = \frac{\partial \psi}{\partial y}, V = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

обеспечивающая сохранение вихря, квадрата вихря, количества движения и кинетической энергии, имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_{k,j,\nu+1} = & \omega_{k,j,\nu} + \frac{6\Delta t}{\Delta x \Delta y} \left((\psi_{k+1,j,\nu} - \psi_{k-1,j,\nu})(\omega_{k,j+1,\nu} - \omega_{k,j-1,\nu}) - \right. \\ & - (\psi_{k,j+1,\nu} - \psi_{k,j-1,\nu})(\omega_{k+1,j,\nu} - \omega_{k-1,j,\nu}) + \psi_{k+1,j,\nu}(\omega_{k+1,j+1,\nu} - \\ & - \omega_{k+1,j-1,\nu}) - \psi_{k-1,j,\nu}(\omega_{k-1,j+1,\nu} - \omega_{k-1,j-1,\nu}) - \psi_{k,j+1,\nu} \times \\ & \times (\omega_{k+1,j+1,\nu} - \omega_{k-1,j+1,\nu}) - \psi_{k,j-1,\nu}(\omega_{k+1,j-1,\nu} - \omega_{k-1,j-1,\nu}) - \\ & \left. - \psi_{k+1,j,\nu}(\omega_{k+1,j+1,\nu} - \omega_{k+1,j-1,\nu}) + \psi_{k-1,j,\nu}(\omega_{k-1,j+1,\nu} - \omega_{k-1,j-1,\nu}) \right). \end{aligned}$$

Для гиперболического уравнения второго порядка с постоянным коэффициентом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

обычно используют разностную схему, имеющую вид

$$\frac{u_{k,j+1} - 2u_{k,j} + u_{k,j-1}}{(\Delta t)^2} = a^2 \frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{(\Delta x)^2}.$$

Эта схема устойчива, если число Курранта меньше или равно единице, и имеет точность порядка квадрата шагов по времени и координате.

Для увеличения точности можно применять более сложную схему

$$\begin{aligned} & u_{k+1,j+1} - 10u_{k,j+1} + u_{k-1,j+1} - 2(u_{k+1,j} - 10u_{k,j} + u_{k-1,j}) + \\ & + u_{k+1,j-1} - 10u_{k,j-1} + u_{k-1,j-1} = 12 \frac{a^2(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} (u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}). \end{aligned}$$

Такая схема менее устойчива. Для её устойчивости необходимо, чтобы число Курранта было меньше или равно корню квадратному из двух третьих.

Типичным эллиптическим уравнением является уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Чаще всего для его решения используют схему Якоби, которая при одинаковых шагах по обеим координатам приводит в каждой точке сетки к разностным уравнениям

$$u_{k+1,j} + u_{k,j+1} - 4u_{k,j} + u_{k-1,j} + u_{k,j-1} = 0.$$

Система таких уравнений для всех внутренних точек сетки решается методом итераций. Основной проблемой при этом является ускорение сходимости итерационного процесса.

Отметим, что при задании в качестве начального приближения значений искомой функции, распределенных в шахматном порядке, решение с использованием схемы Якоби сохраняет такое распределение значений функции при последующих итерациях (рис. 3), что нереалистично.

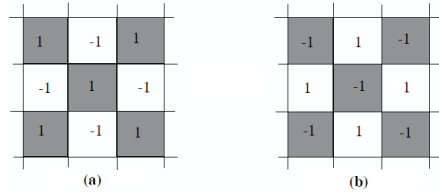


Рис. 3. Значения функции при решении с использованием схемы Якоби на предыдущей (а) и последующей (б) итерациях

Можно также записать разностное уравнение с использованием значений функции не в четырех, а в девяти узлах сетки:

$$4u_{k+1,j} + 4u_{k,j+1} - 20u_{k,j} + 4u_{k-1,j} + 4u_{k,j-1} + u_{k+1,j+1} + u_{k+1,j-1} + u_{k-1,j+1} + u_{k-1,j-1} = 0.$$

Итерации при этом сходятся быстрее.

Для ускорения сходимости можно также применять метод последовательной верхней релаксации. Если при этом используется аналог схемы Якоби, то значение искомой функции на следующей итерации определяется по формуле

$$u_{k,j} = u_{k,j} + \omega \frac{u_{k+1,j} + u_{k,j+1} - 4u_{k,j} + u_{k-1,j} + u_{k,j-1}}{4},$$

где параметр релаксации ω больше единицы.

По сути дела, та же идея реализуется в методе установления, когда к уравнению Лапласа добавляется частная производная по времени

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

и полученное уравнение решается до тех пор, пока функция не становится стационарной. При этом шаг по времени является аналогом параметра релаксации.

Отметим, что при решении эллиптических уравнений быстрее сходятся коротковолновые компоненты разложения искомой функции. Это позволяет ускорить процесс сходимости путем получения решения на грубой сетке, а затем повторения итерационной процедуры на сетке с вдвое меньшими шагами и дальнейшего измельчения сетки при необходимости.

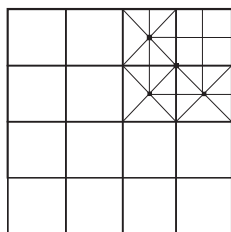


Рис. 4. Построение решения на телескопической сетке

Уменьшение шагов сетки или, иными словами, построение телескопических сеток целесообразно производить следующим образом. Сначала искомая функция определяется в точках, находящихся в центрах квадратов, образованных узлами более грубой сетки (выделенные точки на рис. 4). При этом уравнение решается на сетке, повернутой на 45 градусов. Затем находятся значения функции в точках, находящихся между узлами более грубой сетки.

При решении многомерных нестационарных задач часто используют метод расщепления. Этот метод позволяет на каждом этапе решать более простые уравнения. Расщепление может осуществляться либо по координатам, либо по физическим процессам. При расщеплении по координатам уравнение конвекции-диффузии с переменным по координате z коэффициентом диффузии и источниковыми членами при условии, что скорость и коэффициент диффузии не зависят

от времени, имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + A_1 C + A_2 C = f,$$

где

$$A_1 C = \frac{\partial UC}{\partial x} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2},$$

$$A_2 C = \frac{\partial VC}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \sigma C,$$

и решается за несколько шагов по схеме Кранка — Николсона

$$\frac{C_{k,j,\nu+1/4} - C_{k,j,\nu}}{\Delta t} + \Delta_1 \left(\frac{C^{\nu+1/4} + C^\nu}{2} \right) = 0,$$

$$\frac{C_{k,j,\nu+2/4} - C_{k,j,\nu+1/4}}{\Delta t} + \Delta_2 \left(\frac{C^{\nu+2/4} + C^{\nu+1/4}}{2} \right) = \frac{f_{k,j,\nu+1/2}}{2},$$

$$\frac{C_{k,j,\nu+3/4} - C_{k,j,\nu+2/4}}{\Delta t} + \Delta_2 \left(\frac{C^{\nu+3/4} + C^{\nu+2/4}}{2} \right) = \frac{f_{k,j,\nu+1/2}}{2},$$

$$\frac{C_{k,j,\nu+1} - C_{k,j,\nu+3/4}}{\Delta t} + \Delta_1 \left(\frac{C^{\nu+1} + C^{\nu+3/4}}{2} \right) = 0.$$

При этом $\Delta_1 \left(\frac{C^{\nu+1/4} + C^\nu}{2} \right)$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{U_{k+1,j} C_{k+1,j,\nu+1/4} - U_{k-1,j} C_{k-1,j,\nu+1/4}}{2\Delta x} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{U_{k+1,j} C_{k+1,j,\nu} - U_{k-1,j} C_{k-1,j,\nu}}{2\Delta x} \right) - \\ & - \frac{1}{2} \left(D \frac{C_{k+1,j,\nu+1/4} - 2C_{k,j,\nu+1/4} + C_{k-1,j,\nu}}{(\Delta x)^2} + \right. \\ & \quad \left. + D \frac{C_{k+1,j,\nu} - 2C_{k,j,\nu} + C_{k-1,j,\nu}}{(\Delta x)^2} \right), \end{aligned}$$

а $\Delta_2 \left(\frac{C^{\nu+3/4} + C^{\nu+2/4}}{2} \right)$ вид —

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{V_{k,j+1} C_{k,j+1,\nu+3/4} - V_{k,j-1} C_{k,j-1,\nu+3/4}}{2\Delta y} + \right. \\ & \left. + \frac{V_{k,j+1} C_{k,j+1,\nu+2/4} - V_{k,j-1} C_{k,j-1,\nu+2/4}}{2\Delta y} \right) - \\ & - \frac{1}{2\Delta y} \left(\gamma_{k,j+1/2} \frac{C_{k,j+1,\nu+3/4} - C_{k,j,\nu+3/4}}{\Delta y} - \gamma_{k,j-1/2} \times \right. \\ & \times \frac{C_{k,j,\nu+3/4} - C_{k,j-1,\nu+3/4}}{\Delta y} + \gamma_{k,j+1/2} \frac{C_{k,j+1,\nu+2/4} - C_{k,j,\nu+2/4}}{\Delta y} - \\ & \left. - \gamma_{k,j-1/2} \frac{C_{k,j,\nu+2/4} - C_{k,j-1,\nu+2/4}}{\Delta y} \right) + \frac{\sigma_{k,j}}{2} (C_{k,j,\nu+3/4} + C_{k,j,\nu+2/4}). \end{aligned}$$

Аналогично записываются $\Delta_1 \left(\frac{C^{\nu+1} + C^{\nu+3/4}}{2} \right)$ и $\Delta_2 \left(\frac{C^{\nu+2/4} + C^{\nu+1/4}}{2} \right)$.

Иногда используют расщепление по физическим процессам. Так уравнение конвекции диффузии с постоянным коэффициентом диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \sigma C = f$$

можно решать в два этапа. На первом отдельно рассматривается конвекция, т. е. решается уравнение

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} = 0,$$

а на втором учитывается влияние диффузии, а также источников членов

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \sigma C = f.$$

Такой подход может оказаться эффективным, если характерное время физических процессов существенно различно. При этом уравнение для медленных процессов можно решать с большими временными шагами.

Некоторым аналогом метода расщепления является метод частиц в ячейке. В этом методе жидкость представляется в виде набора дискретных частиц (рис. 5). Плотность и скорость жидкости в некотором объеме меняется в зависимости от числа частиц в этом объеме, их массы и скорости.

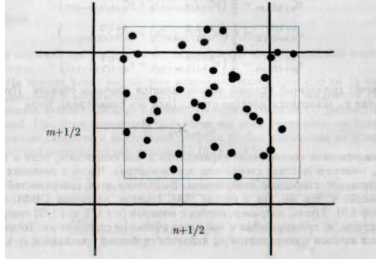


Рис. 5. Частицы в ячейке

Решается уравнение количества движения идеальной жидкости в проекциях на оси координат. Для двумерного случая эти проекции имеют вид

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial U}{\partial t} &= -\rho U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \frac{\partial V}{\partial t} &= -\rho V \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}.\end{aligned}$$

Процесс решения разделяется на следующие этапы. Сначала частицы жидкости перемещаются в новое положение:

$$x_{s,\nu+1} = x_{s,\nu} + U(x_{s,\nu}; y_{s,\nu}) \Delta t,$$

$$y_{s,\nu+1} = y_{s,\nu} + V(x_{s,\nu}; y_{s,\nu}) \Delta t,$$

где s — номер частицы, $U(x_{s,\nu}; y_{s,\nu})$ и $V(x_{s,\nu}; y_{s,\nu})$ — проекции скорости жидкости на оси координат в соответствующих точках пространства. Эти проекции определяются путем интерполяции по их значениям в узлах сетки.

Затем, в соответствии с числом частиц, определяется плотность жидкости в ячейке с полуцелыми индексами:

$$\rho_{k+1/2,j+1/2,\nu+1} = \frac{\sum m_s}{Q_{k+1/2,j+1/2}},$$

где m_s — масса частицы с номером s , а $Q_{k+1/2,j+1/2}$ — объем соответствующей ячейки.

Из условия постоянства энтропии находится давление

$$\frac{p_{k+1/2,j+1/2,\nu+1}}{\rho_{k+1/2,j+1/2,\nu+1}^\gamma} = \frac{p_{k+1/2,j+1/2,\nu}}{\rho_{k+1/2,j+1/2,\nu}^\gamma}.$$

После этого за два шага получаются значения проекций скорости жидкости в узлах сетки с полуцелыми индексами. На первом шаге учитывается изменение скорости за счет переноса импульса движущимися частицами:

$$U_{k+1/2,j+1/2,\nu+1/2} = \frac{\Sigma m_s U(x_s, \nu; y_s, \nu)}{\rho_{k+1/2,j+1/2,\nu+1} Q_{k+1/2,j+1/2}},$$

$$V_{k+1/2,j+1/2,\nu+1/2} = \frac{\Sigma m_s V(x_s, \nu; y_s, \nu)}{\rho_{k+1/2,j+1/2,\nu+1} Q_{k+1/2,j+1/2}}.$$

На втором шаге — изменение скорости под действием давления:

$$U_{k+1/2,j+1/2,\nu+1} = U_{k+1/2,j+1/2,\nu+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{p_{k+1,j+1/2,\nu+1} - p_{k,j+1/2,\nu+1}}{\rho_{k+1/2,j+1/2,\nu+1}},$$

$$V_{k+1/2,j+1/2,\nu+1} = V_{k+1/2,j+1/2,\nu+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \frac{p_{k+1/2,j+1,\nu+1} - p_{k+1/2,j,\nu+1}}{\rho_{k+1/2,j+1/2,\nu+1}}.$$

Давление в точках с целыми индексами определяется интерполяцией.

Лекция 4

Метод крупных частиц. Конечноразностная запись граничных условий. Порядок решения систем разностных уравнений.

Модификацией метода частиц является метод крупных частиц. В нем роль частицы играет вся ячейка. Она перемещается в новое положение, частично попадая в соседние ячейки (рис. 6).

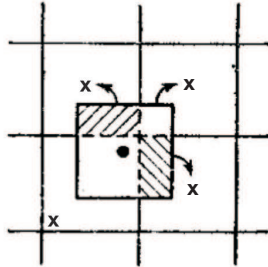


Рис. 6. Смещение ячейки в методе крупных частиц

При этом, предполагая, что масса ячейки равномерно распределена по ее объему (или площади для двумерной задачи), можно определить массу ячеек на новом временном слое. При этом принимается, что часть смещенной ячейки, попавшая в соседнюю ячейку (заштрихованные области на рисунке), отдает свою массу этой соседней ячейке. Аналогично вычисляется перенос импульса при смещении ячеек. Определение плотности жидкости, давления и изменения скорости под действием давления производится так же, как и в методе частиц.

Следует подчеркнуть важность правильной записи граничных условий. Они могут содержать как значения искомых функций на границе расчетной области, так и производные от этих функций по нормали к границе. Даже в самом простом случае, когда на границе заданы значения функций, при наличии криволинейных участков границ с записью граничных условий возникают определенные сложности. Простейшим способом их преодоления является уменьшение шагов сетки вблизи границы, как показано на рис. 7.

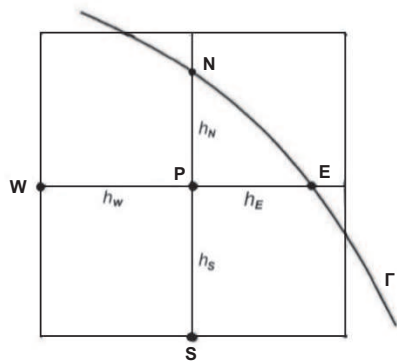


Рис. 7. Сетка вблизи криволинейной границы

Шаги в различных направлениях от точки P обозначены на этом рисунке буквой h с соответствующим индексом. Видно, что шаги по направлению к границе h_N и h_E меньше, чем шаги внутрь расчетной области h_W и h_S . Записать соответствующие разностные выражения для производных нетрудно, но точность записи при этом уменьшается тем сильнее, чем больше отношение величин двух соседних шагов.

Можно также добавлять к расчетной области фиктивные части так, чтобы получающиеся при этом границы совпадали со слоями

сетки. Значения искомой функции в фиктивных частях должны задаваться. Если в задачах о переносе тепла или вещества граничные условия однородны, их можно переносить в ближайшие внешние узлы сетки, принимая, что коэффициенты переноса вне расчетной области очень велики.

Если на криволинейной границе области заданы производные по нормали к границе, то можно найти значение функции в точке N по величине производной в точке U и значению функции в точке T , симметричной N относительно границы (рис. 8). При этом значение функции в точке T получается путем интерполяции между точками P , N , W и NW .

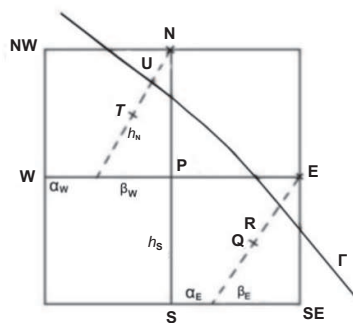


Рис. 8. Схема определения значения функции в точке N , если на границе задана производная по нормали

Отметим, что неудачно заданные граничные условия могут дестабилизировать решение. В частности, резкое изменение значения функции на границе при мелкой сетке может привести к потере устойчивости или осцилляциям.

Кроме того, необходимо согласование разностной записи граничных условий с разностной записью уравнений. Если граничные условия имеют более низкий порядок точности, то точность решения будет определяться ими. И обратно, при низкой точности записи уравнений нет смысла увеличивать точность записи граничных условий.

Если дифференциальные уравнения описывают движение жидкости, разностная запись граничных условий, содержащих производные, имеет ряд особенностей. На плоскости симметрии функции имеют экстремум, и, в случае когда эта плоскость является границей области, добавляется еще один слой, в узлах которого значения

функций такие же, как и на слое ближайшем к плоскости симметрии. На оси симметрии в цилиндрических координатах возникает неопределенность вида $0/0$. В этом случае можно либо располагать граничные узлы на расстоянии, равном половине шага по радиусу от оси, либо определять значения функций на оси с использованием полиномиальной аппроксимации функций вблизи границы.

Сложности, возникающие при задании граничных условий на поверхности раздела фаз, т. е. на твердых поверхностях, обтекаемых жидкостью или газом, а также на границах раздела газ-жидкость, возникают из-за возникновения на этих границах пограничных слоев, т. е. слоев, в которых значения функций меняются быстро. Это вынуждает либо существенно измельчать шаги сетки вблизи границы, либо использовать так называемые пристеночные функции. Так, в задачах аэродинамики атмосферы для определения профилей, составляющих скорости ветра вблизи поверхности земли, часто используют пристеночные функции

$$\frac{\kappa z}{u_* \cos \alpha} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} = \varphi(z/L),$$

$$\frac{\kappa z}{u_* \sin \alpha} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} = \varphi(z/L),$$

где κ — постоянная Кармана, u_* — скорость трения, α — угол между направлением ветра на высоте z и осью x , L — масштаб Монина — Обухова, с помощью которого учитывается влияние стратификации, т. е. изменения потенциальной температуры с высотой. Вид функции $\varphi(z/L)$ определяется из результатов наблюдений и экспериментов. При нейтральной стратификации, когда потенциальная температура не зависит от высоты эта функция становится константой. При этом вблизи поверхности скорость описывается логарифмической функцией.

Отметим, что пристеночные функции можно использовать только при наличии достаточно больших однородных участков границы.

Другим возможным способом является преобразование координаты, направленной по нормали к границе, при котором шаги сетки вблизи границы увеличиваются. Это увеличивает точность решения, но усложняет вид уравнений. Преобразование координат также часто используется для того, чтобы перейти от области со сложной границей к области, ограниченной плоскостями. В аэродинамике ат-

мосферы часто используют преобразование вертикальной координаты, имеющее вид

$$z = \frac{Z - z_g(x, y)}{H - z_g(x, y)},$$

где Z — высота точки над уровнем моря, $z_g(x, y)$ — высота поверхности земли, H — высота верхней границы расчетной области.

В случае, если на твердой границе задается производная по нормали, определенные трудности возникают при определении граничных условий в угловых точках из-за неопределенности направления нормали. Чаще всего принимают, что нормаль направлена вдоль биссектрисы угла, либо в угловой точке принимают несколько граничных условий, рассматривая нормали к поверхностям, образующим угловую точку.

В задачах механики жидкости существенные трудности возникают в том случае, когда расчетная область не включает в себя всю область течения. При этом появляются части границы, через которые жидкость втекает в область; части границы, через которые она вытекает и части, вдоль которых жидкость движется. Нередко эти части меняются в процессе решения. Чаще всего, на той части границы, через которую жидкость втекает, значения искомых функций задаются. Это неявно предполагает, что мы знаем, что влияет на течение жидкости вне расчетной области. Иногда на этой границе решают одномерную задачу, описывающую изменение искомых функций вдоль границы. Там, где жидкость вытекает из расчетной области, значения функции задают редко. Обычно используют так называемые мягкие граничные условия, т. е. равной нулю первую или вторую производную по нормали к границе. Приравнивание нулю первой производной предполагает, что влияние процессов внутри расчетной области на течение вблизи границы пренебрежимо мало, т. е. граница находится достаточно далеко от тех объектов, обтекание которых нас интересует. Если же нулю приравнивается вторая производная, то предполагается, что искомые функции вблизи границы меняются линейно, что трудно обосновать. Отметим, что при задании на выходной границе производных для достижения установившегося процесса, т. е. того момента, когда начальные условия, которые задаются достаточно произвольно, забываются, необходимо выполнить большее число итераций. Поэтому иногда на границах, через которые жидкость вытекает из расчетной области, задают значения искомых функций, а после определенного количества

итераций переходят к мягким граничным условиям. Иногда предполагают, что течение периодически по пространству и период равен размеру расчетной области. Тогда результаты, полученные при мягких граничных условиях в выходном сечении, т. е. там, где жидкость вытекает, переносят во входное сечение. При этом решение может стать неустойчивым. И, наконец, на границах могут решаться уравнения, описывающие движение жидкости, с отброшенными вторыми производными по нормали к границе и первыми производными по этой нормали, записанными как односторонние внутрь расчетной области.

Иногда значения функций на всех границах, через которые протекает жидкость, определяют по формуле

$$\phi = C\phi_n + (1 - C)(2\phi_{n-1} - \phi_{n-2}),$$

где ϕ_n — предшествующее значение функции на границе, ϕ_{n-1} и ϕ_{n-2} — рассчитанные значения этой функции в соседних с границей узлах, C — положительная константа, значение которой меньше единицы.

В аэродинамике атмосферы горизонтальные размеры расчетной области обычно существенно больше вертикальных. При этом на верхней границе чаще всего значения искомых функций задаются. Для того, чтобы избежать отражения волн, возникающих вблизи поверхности земли, от верхней границы, иногда используют демпфирующую функцию вида

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\phi_i - \phi_0}{\tau},$$

где ϕ_i — вычисленное при решении уравнений значение искомой функции, ϕ_0 — ее начальное значение, τ — масштаб времени, уменьшающийся в демпфирующем слое с приближением к границе.

Для параллельных вычислений расчетную область разбивают на пересекающиеся подобласти. Граничные условия для каждой подобласти определяются из решений для других подобластей.

Целесообразно также сделать несколько замечаний о порядке решения разностных уравнений. При решении нестационарных задач, которые описываются системами уравнений, включающими как уравнения, содержащие производные по времени (*прогностические*), так и уравнения, не содержащие таких производных, как правило,

эллиптического типа (*диагностические*), порядок решения следующих: после каждого шага по времени в решении прогностических уравнений решаются все диагностические уравнения до достижения сходимости, а затем делается следующий шаг по времени. При использовании метода предикции-коррекции перед коррекцией диагностические уравнения можно не решать.

Литература

1. Поттер Д. Вычислительные методы в физике.—М.: Мир, 1975.—392 с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.—М.: Мир, 1980.—616 с.
3. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. Т. 1.—М.: Мир, 1991.—502 с.
4. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. Т. 2.—М.: Мир, 1991.—552 с.
5. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики.—М.: Наука, 1992.—423 с.
6. Colella Ph., Puckett E. G. Modern numerical methods for fluid flow.—California: Berkeley, 1998.—148 p.
7. Самарский А. А., Вабишевич П. Н. Вычислительная теплопередача.—М.: УРСС, 2003.—782 с.
8. Encyclopedia of Computational Mechanics. Vol. 1.—Chichester, Wiley and Sons, 2004.—798 p.
9. Зализняк В. Е. Основы вычислительной физики. Введение в методы частиц. Ч. 2.—М.-Ижевск: РХД, 2006.—156 с.

Сведения об авторах

Баркина Ульяна Витальевна
Южный федеральный университет,
аспирант 2-го года обучения
E-mail: barkinauv@mail.ru

Плиева Любовь Юрьевна
ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, младший
научный сотрудник
E-mail: plieva-21@mail.ru

Каргин Михаил Александрович
Южный федеральный университет,
студент 5 курса
E-mail: misha_kargin@list.ru

Соболев Сергей Евгеньевич
СКГМИ(ГТУ), аспирант 3-го года
обучения
E-mail: exclusize86@mail.ru

Кузьминова Алина Витальевна
Южный федеральный университет,
студент магистратуры 1-го года
обучения
E-mail: kuzminova.alina@rambler.ru

Тасоев Батрадз Ботазович
ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, стажер-
исследователь
E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru

Кусраева Залина Анатольевна
ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, стажер-
исследователь
E-mail: zali13@mail.ru

UGUR GONULLU
Istanbul Kultur University, research
assistant
E-mail: u.gonullu@iku.edu.tr

Минасян Давид Григорьевич
ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, стажер-
исследователь
E-mail: davidmd@yandex.ru

Фам Чонг Тиен
Южный федеральный университет,
студент магистратуры 2-го года обу-
чения
E-mail: phamtien@mail.ru

Олейников Антон Олегович
Южный федеральный университет,
студент 5 курса
E-mail: oleinikov@akvist.ru

Хосаева Зарина Хетаговна
ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, ведущий
специалист
E-mail: hzaia83@mail.ru

Орлова Наталья Сергеевна
ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, стажер-
исследователь
E-mail: norlova.umi.vnc@gmail.com

Шевцова Мария Сергеевна
Южный научный центр РАН, млад-
ший научный сотрудник
E-mail: mariamarcs@bk.ru

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Труды VII региональной
школы-конференции молодых ученых
«Владикавказская молодежная
математическая школа»
(Россия, Владикавказ, 25–30 июля 2011 г.)

Редакционная коллегия:
*А. В. Абанин, А. О. Ватульян,
Е. С. Каменецкий, А. Г. Курсаев,
А. В. Наседкин*

Зав. редакцией *В. В. Кибизова*
Компьютерная верстка *И. С. Гаприндашвили*

Подписано в печать 23.12.2011.
Формат бумаги $60 \times 84^{1/16}$. Усл. п. л. 7,56.
Тираж 200 экз. Заказ № 176.

ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано в ИПО СОИГСИ им. В. И. Абаева
362040, г. Владикавказ, пр. Мира, 10.

ISBN 978-5-904695-12-5



9 785904 695125