

ЮМИ

FEDERAL AGENCY
FOR SCIENTIFIC ORGANIZATIONS
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTRE
OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

MATHEMATICAL ANALYSIS
AND
MATHEMATICAL MODELING

Proceedings
of the International Conference of Young Scientists
(Russia, Vladikavkaz, July 21–27, 2014)

Vladikavkaz
2015

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО
НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Труды X региональной
школы-конференции молодых ученых
«Владикавказская молодежная
математическая школа»
(Россия, Владикавказ, 21–27 июля 2014 г.)

Владикавказ
2015

ББК 22.16+я43
УДК 517.21+
М 34

Редакторы:

д. ф.-м. н. *Каменецкий Е. С.*,
д. ф.-м. н. *Кусраев А. Г.*

Ответственный секретарь: к. пед. н. *Абатурова В. С.*

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 4-31-10059 мол_г.

Математический анализ и математическое моделирование:
тр. X региональной шк.-конф. молодых учен. «Владикавказская
молодежная математическая школа» (Владикавказ, 21–27 июля
2014 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН, 2015.—172 с.

В сборник вошли конспекты обзорных лекций и тезисы секционных докладов
X региональной школы-конференции молодых ученых «Владикавказская моло-
дежная математическая школа», состоявшейся в г. Владикавказе с 21 по 27 июля
2014 г.

ISBN 978-5-904695-29-3

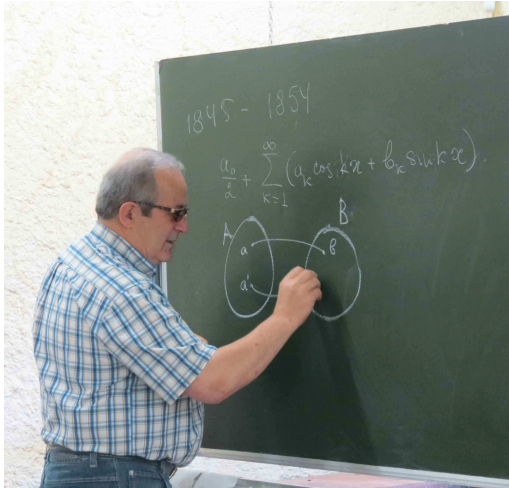
© Южный математический институт
ВНИЦ РАН, 2015

ПРЕДИСЛОВИЕ

В период с 21 по 27 июля 2014 г. в Республике Северная Осетия-Алания в рамках V Международного летнего математического научно-образовательного форума состоялась школа-конференция с международным участием «X Владикавказская молодежная математическая школа» (ВММШ-2014). Соорганизаторами ВММШ выступили Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказский научный центр Российской академии наук, Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова и Южный Федеральный университет.



В организационный комитет ВММШ-2014 вошли: к. пед. н. В. С. Абатурова (ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ) — ученый секретарь оргкомитета; д. ф.-м. н., профессор Е. С. Каменецкий (ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ); к. ф.-м. н., доцент М. И. Карякин (ЮФУ, ЮМИ ВНЦ РАН, Ростов-на-Дону); д. ф.-м. н., профессор А. Г. Курсраев (ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ) — председатель оргкомитета; к. ф.-м. н., З. А. Курсраева (ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ); д. ф.-м. н., профессор К. Ю. Осипенко (МАТИ РГТУ, Москва); к. ф.-м. н., С. Н. Табуев (ЮОГУ, Цхинвал); к. ф.-м. н., доцент М. З. Худалов (СОГУ, Владикавказ).



На пленарных и секционных заседаниях ВММШ были представлены доклады по современным разделам математического анализа и математического моделирования. В рамках секции «Математический анализ», проходившей под руководством д. ф.-м. н., профессора А. Г. Курсаева, были прочтены циклы лекций: «Методы решения аномальных

экстремальных задач», лектор — д. ф.-м. н., профессор А. В. Артюнов (МГУ, Москва); «Положительные решения интегральных уравнений», лектор — д. ф.-м. н., профессор С. Н. Асхабов (ЧГУ, Грозный); «Булевозначный анализ положительных операторов», лектор — д. ф.-м. н., профессор А. Г. Курсаев (ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ); «Теория приближений, оптимальное восстановление и выпуклый анализ», лектор — д. ф.-м. н., профессор Г. Г. Магарил-Ильяев (МГУ, Москва); «Некоторые проблемы в теории интеративных алгебр», лектор — д. ф.-м. н., профессор И. А. Мальцев (ИМ СО РАН, Новосибирск); «Оптимальное восстановление линейных операторов по неточным данным и приложения», лектор — д. ф.-м. н., профессор К. Ю. Осипенко (МАТИ РГТУ, Москва); «Модели и задачи математической физики», лектор — д. ф.-м. н., профессор А. Б. Шабат (КЧГУ, Карачаевск).

На секции математического моделирования, руководство которой осуществлял д. ф.-м. н., профессор Е. С. Каменецкий, были прочитаны следующие циклы лекций: «Точные решения уравнений гидродинамики», лектор — к. ф.-м. н., доцент А. Б. Моргулис (ЮФУ, Ростов-на-Дону); «Математические модели конвекции», лектор — д. ф.-м. н., профессор Цибулин В. Г. (ЮФУ, Ростов-на-Дону); «Математические модели гидро- и газовой динамики», лектор — к. ф.-м. н., доцент А. Е. Чистяков (ЮФУ, Таганрог).



чественный опыт формирования научных математических школ в системе Российской академии наук и показана роль Российской академии наук в процессе разработки «Концепции развития математического образования в РФ», принятой Распоряжением Правительства РФ № 2506-Р от 24.12.2013 г.

В обзорной лекции заместителя академика-секретаря Отделения математических наук РАН д. т. н., профессора Ю. С. Вишнякова «О системе организации математических исследований и проблемах математического образования» был представлен отечественный опыт формирования научных математических школ в системе Российской академии наук и показана роль Российской академии наук в процессе разработки «Концепции развития математического образования в РФ», принятой Распоряжением Правительства РФ № 2506-Р от 24.12.2013 г.



В ходе круглого стола «О реализации Концепции развития математического образования в РФ» были обсуждены проблемы школьного и высшего математического образования, оказания содействия подготовке и повышению квалификации учителей математики и преподавателей вузов. Были затронуты также про-

блемы приобщения школьников и студентов к исследовательской деятельности, развития научных математических школ Москвы, Новосибирска, Ростова-на-Дону, Владикавказа, Грозного, Карачаевска. Было предложено организовать в течение года на базе ЮМИ ВНИЦ РАН дистанционные научные семинары и консультации лекторов ВММШ с молодыми учеными-участниками школы-конференции. На конференции молодых ученых было представлено

20 докладов о результатах научно-исследовательской деятельности. Всего в работе ВММШ приняло участие 33 человека.

Участникам школы-конференции была предложена насыщенная культурно-экскурсионная программа, которая включала концерт академической музыки и экскурсии по Цейскому ущелью: к Святилищу Реком, Сказскому и Цейскому ледникам.



Материалы школы-конференции с международным участием «Х Владикавказская молодежная математическая школа», включая конспекты лекций и тезисы докладов молодых ученых, вошли в настоящий сборник.

Пленарные лекции

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В КОНУСАХ

С. Н. Асхабов¹

1. Введение

Рассматриваются интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью в конусах пространства $C[0, \infty)$, состоящих из неотрицательных непрерывных на положительной полуоси функций, что связано с их приложениями в теории фильтрации, ударных волн и других [3–6]. Дано уточнение некоторых результатов W. Okrasinski [4–6]. В отличие от этих работ, здесь упрощаются ограничения на область существования решений, даны другие доказательства основных априорных оценок и по-новому вводится метрика. Исследование основывается на некоторой модификации принципа сжимающих отображений (аналог метода А. Белецкого [2; 8; 9, с. 218]), позволяющей при удачном выборе метрики доказывать глобальные теоремы существования и единственности без ограничений на область определения решений. Особое внимание уделяется получению точных априорных оценок решений и способам нахождения решений, что важно с прикладной точки зрения.

2. Теорема о непрерывности свертки

Обозначим через M_0 множество всех неотрицательных на $[0, \infty)$ функций: $M_0 = \{f(x) : f(x) \geq 0 \forall x \geq 0\}$. Свертку функций $k(x), u(x) \in M_0$ обозначим через $(k * u)(x)$ и определим равенством

$$(k * u)(x) = \int_0^x k(x-t) u(t) dt. \quad (1)$$

Оператор $Ku = k * u$, определяемый правой частью (1), принято называть *оператором свертки*, а функцию $k(x)$ — *ядром* этого оператора. В случае необходимости продолжения $k(x)$ на всю ось

¹Россия, Грозный, Чеченский государственный университет.

$\mathbf{R}^1 = (-\infty, \infty)$ будем считать, что $k(x) = 0$ при $x < 0$. Отметим, что свертка обладает так называемым *свойством коммутативности*:

$$\int_0^x k(x-t) u(t) dt = \int_0^x k(t) u(x-t) dt.$$

Функция $f(x) \in M_0$ называется *локально ограниченной*, если она ограничена на любом конечном отрезке из $[0, \infty)$.

Теорема 1 (о непрерывности свертки [4]). Пусть функции $k(x)$ и $u(x)$ принадлежат классу M_0 . Если $k(x)$ — неубывающая функция, а $u(x)$ — локально ограниченная функция, то их свертка (1) есть непрерывная на $[0, \infty)$ функция, т. е. $(k * u)(x) \in C[0, \infty)$.

◁ Пусть $x_0 \in [0, \infty)$ — произвольная точка и последовательность положительных чисел x_n сходится к x_0 , т. е. $\{x_n\} \rightarrow x_0$. Нужно доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} [(k * u)(x_n)] = (k * u)(x_0)$. Так как $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена, т. е. $\exists A > 0 : x_n < A \forall n$. Поэтому для достаточно большого x^* такого, что $x^* > A > x_n$ и $x^* > x_0$, имеем (с учетом, что $k(x) = 0$ при $x < 0$)

$$(k * u)(x_n) = \int_0^{x_n} k(x_n - t) u(t) dt = \int_0^{x^*} k(x_n - t) u(t) dt, \quad (2)$$

$$(k * u)(x_0) = \int_0^{x_0} k(x_0 - t) u(t) dt = \int_0^{x^*} k(x_0 - t) u(t) dt. \quad (3)$$

Поскольку функция $k(x)$ — неубывающая, то она почти всюду непрерывна на $[0, x^*]$. Следовательно, для почти всех $t \in [0, x^*]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k(x_n - t) u(t) = k(x_0 - t) u(t).$$

Далее, так как $k(x)$ — неубывающая и $u(x)$ — локально ограниченная функция, т. е. $u(t) \leq M \forall t \in [0, x^*]$, где M — положительная постоянная, то $k(x_n - t)u(t) \leq Mk(x^*) \forall n$ и $\forall t \in [0, x^*]$.

Итак, последовательность $\{f_n(t)\} = \{k(x_n - t)u(t)\}$ сходится почти всюду к $f(t) = k(x_0 - t)u(t)$ и $|f_n(t)| \leq Mk(x^*) \in L_1[0, x^*]$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{x^*} k(x_n - t) u(t) dt = \int_0^{x^*} k(x_0 - t) u(t) dt. \quad (4)$$

Используя последовательно (2), (4) и (3), окончательно получаем

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (k * u)(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{x^*} k(x_n - t) u(t) dt = \\ &= \int_0^{x^*} k(x_0 - t) u(t) dt = (k * u)(x_0). \triangleright\end{aligned}$$

3. Интегральные неравенства Чебышева для свертки

В дальнейшем мы часто будем использовать следующую лемму.

Лемма 1 (неравенства Чебышева). *Если $v(x)$ и $w(x)$ неубывающие (или невозрастающие) на $[0, \infty)$ функции, то*

$$\int_0^x v(x-t) w(t) dt \leq \int_0^x v(t) w(t) dt \quad (\forall x \in [0, \infty)). \quad (5)$$

Если же одна из них не возрастает, а другая не убывает, то

$$\int_0^x v(x-t) w(t) dt \geq \int_0^x v(t) w(t) dt \quad (\forall x \in [0, \infty)). \quad (6)$$

$\triangleleft$ Так как

$$\begin{aligned}&\int_0^x v(x-t) w(t) dt - \int_0^x v(t) w(t) dt = \\ &= \int_0^x [v(x-t) - v(t)] w(t) dt = \\ &= \int_0^x [v(t) - v(x-t)] w(x-t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x [v(x-t) - v(t)] [w(t) - w(x-t)] dt,\end{aligned}$$

то неравенство (5) выполняется, если обе функции $v(x)$ и $w(x)$ не убывают (или не возрастают), а неравенство (6) выполняется, если одна из них не убывает, а другая не возрастает. $\triangleright$

4. Монотонность и непрерывность решения при $\alpha > 0$

Рассмотрим нелинейное уравнение типа свертки:

$$u^\alpha(x) = \int_0^x k(x-t) u(t) dt, \quad \alpha > 0, \quad x \in [0, \infty). \quad (7)$$

Уравнения такого вида возникают, например, при описании процессов инфильтрации жидкости через стенки цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду и распространения ударных волн в трубах, наполненных газом (см. [3–6]), причем с точки зрения этих приложений интерес представляют неотрицательные на $[0, \infty)$ решения этого уравнения. В связи с этим решения уравнения (7) будем разыскивать в классе M_0 .

Лемма 2 (о монотонности решения). *Пусть $k(x)$ — неотрицательная неубывающая на $[0, \infty)$ функция. Если $u(x) \in M_0$ есть решение уравнения (7), то $u(x)$ — неубывающая функция на $[0, \infty)$.*

$\triangleleft$ Пусть $x_1 < x_2$. Так как $k(x) \geq 0$ и не убывает, а $u(x) \geq 0$, то

$$\begin{aligned} u^\alpha(x_2) - u^\alpha(x_1) &\equiv \int_0^{x_2} k(x_2-t) u(t) dt - \int_0^{x_1} k(x_1-t) u(t) dt = \\ &= \int_0^{x_1} [k(x_2-t) - k(x_1-t)] u(t) dt + \int_{x_1}^{x_2} k(x_2-t) u(t) dt \geq 0. \end{aligned}$$

Значит, $u^\alpha(x_1) \leq u^\alpha(x_2)$ при $x_1 < x_2$. Но тогда (так как $u(x) \geq 0$) и $u(x_1) \leq u(x_2)$ при $x_1 < x_2$, т. е. $u(x)$ не убывает на $[0, \infty)$. $\triangleright$

Лемма 3 (о непрерывности решения). *Пусть $k(x)$ — неотрицательная неубывающая на $[0, \infty)$ функция. Если $u(x) \in M_0$ есть решение уравнения (7), то $u(x)$ является непрерывной на $[0, \infty)$ функцией, т. е. $u(x) \in C[0, \infty)$.*

$\triangleleft$ В силу леммы 2 $u(x)$ — неубывающая функция и, значит, $u(x)$ — локально ограниченная. Таким образом, функции $k(x)$ и $u(x)$

удовлетворяют всем требованиям теоремы 1, из которой вытекает, что $u^\alpha(x) \equiv (k * u)(x)$ есть непрерывная функция. Но поскольку $u(x) \geq 0$, то $u(x)$ также является непрерывной на $[0, \infty)$ функцией, т. е. $u(x) \in C[0, \infty)$. $\triangleright$

5. Априорные оценки решения при $\alpha > 1$

В дальнейшем всюду, где речь идет об уравнении (7), предполагается, что $\alpha > 1$ и ядро $k(x)$ удовлетворяет двум условиям:

- А) $k(x)$ — неубывающая на $[0, \infty)$ функция;
- Б) $k(0) > 0$.

Полагая в (7) $x = 0$, замечаем, что $u(0) = 0$, если $u(x)$ есть решение уравнения (7). В связи с тем, что нас интересует вопрос о существовании нетривиальных решений уравнения (7), введем множество $Q_0 = \{f(x) : f(x) \in C[0, \infty), f(0) = 0, f(x) > 0 \forall x > 0\}$.

Теорема 2. Если $u(x) \in Q_0$ есть решение уравнения (7), то функция $u(x)$ является неубывающей и удовлетворяет оценкам:

$$\begin{aligned} F(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} k(0) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} x^{\frac{1}{\alpha-1}} &\leq u(x) \leq \\ &\leq \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x k(t) dt \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \equiv G(x). \end{aligned} \quad (8)$$

$\triangleleft$ То, что функция $u(x)$ является неубывающей, следует из леммы 2. Так как при $x = 0$ утверждение (8) справедливо, то будем считать всюду далее, что $x > 0$.

Докажем сначала первое неравенство из (8). Так как $u(x)$ является решением уравнения (8) и $k(x)$ — неубывающая функция, то

$$u^\alpha(x) = \int_0^x k(x-t) u(t) dt \geq k(0) \int_0^x u(t) dt \quad (\forall x > 0),$$

или

$$u(x) \geq \left[k(0) \int_0^x u(t) dt \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\forall x > 0), \quad (9)$$

или, что то же самое,

$$\frac{k(0)u(t)}{\left[k(0)\int_0^t u(\tau) d\tau\right]^{\frac{1}{\alpha}}} \geq k(0) \quad (\forall t > 0).$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x , получим

$$\left[k(0)\int_0^x u(t) dt\right]^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}k(0)\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} x^{\frac{1}{\alpha-1}} \equiv F(x). \quad (10)$$

Таким образом, левое неравенство в (8) вытекает из (9) и (10).

Докажем теперь второе неравенство из (8). В силу неравенства Чебышева (5), имеем

$$u^\alpha(x) = \int_0^x k(x-t)u(t) dt \leq \int_0^x k(t)u(t) dt,$$

или

$$u(x) \leq \left[\int_0^x k(t)u(t) dt\right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\forall x > 0), \quad (11)$$

или, что то же самое,

$$\frac{k(t)u(t)}{\left[\int_0^t k(\tau)u(\tau) d\tau\right]^{\frac{1}{\alpha}}} \leq k(t) \quad (\forall t > 0).$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x , получим

$$\left[\int_0^x k(t)u(t) dt\right]^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x k(t) dt\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \equiv G(x). \quad (12)$$

Таким образом, второе неравенство в (8) вытекает из (11) и (12). $\triangleright$

Пример ядра $k(x) = C > 0$ показывает, что оценки в (8) неумлучшаемы, так как в этом случае

$$F(x) \equiv G(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}C\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} x^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

является решением уравнения (7).

6. Инвариантность класса P относительно оператора T

Из теоремы 2 следует, что решения уравнения (7) при $\alpha > 1$ естественно разыскивать в классе

$$P = \{u(x) : u(x) \in C[0, \infty), F(x) \leq u(x) \leq G(x)\}.$$

Рассмотрим нелинейный интегральный оператор свертки T :

$$(Tu)(x) = \left(\int_0^x k(x-t) u(t) dt \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Теорема 3 (об инвариантности P). *Класс P инвариантен относительно нелинейного оператора свертки T .*

◁ Пусть $u(x) \in P$. Нужно доказать, что тогда и $(Tu)(x) \in P$, т. е. $(Tu)(x) \in C[0, \infty)$ и $F(x) \leq (Tu)(x) \leq G(x)$.

1) То, что $(Tu)(x) \in C[0, \infty)$ вытекает из теоремы 1.

2) Покажем, что $(Tu)(x) \geq F(x)$. Так как $u(x) \geq F(x)$, то

$$\begin{aligned} [(Tu)(x)]^\alpha &= \int_0^x k(x-t) u(t) dt \geq \int_0^x k(x-t) F(t) dt \geq \\ &\geq k(0) \int_0^x F(t) dt = [F(x)]^\alpha, \end{aligned}$$

т. е.

$$(Tu)(x) \geq F(x).$$

3) Покажем, наконец, что $(Tu)(x) \leq G(x)$. Так как $u(x) \leq G(x)$, то применяя неравенство Чебышева (5), имеем

$$\begin{aligned} [(Tu)(x)]^\alpha &\leq \int_0^x k(x-t) G(t) dt \leq \int_0^x k(t) G(t) dt = \\ &= \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \int_0^x \left[\int_0^t k(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} d \left[\int_0^t k(\tau) d\tau \right] = [G(x)]^\alpha, \end{aligned}$$

т. е. $(Tu)(x) \leq G(x)$.

7. Метрическое пространство P_b и его полнота

Хорошо известно, что $C[0, \infty)$ не является полным метрическим пространством. Введем в связи с этим следующий класс функций:

$$P_b = \{u(x) : u(x) \in C[0, b], F(x) \leq u(x) \leq G(x)\},$$

где $b > 0$ — произвольное число.

В силу вольтерровости оператора T , из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. Класс P_b инвариантен относительно оператора свертки T .

Введем во множестве функций P_b расстояние по следующей формуле:

$$\rho_b(u_1, u_2) = \sup_{0 < x \leq b} \frac{|u_1(x) - u_2(x)|}{x^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x}}, \quad \beta > 0.$$

Теорема 4 (о полноте P_b). Множество P_b с метрикой ρ_b образует полное метрическое пространство.

◁ Выполнимость аксиом метрики очевидна. Докажем полноту P_b . Пусть $\{u_n(x)\}$ — любая фундаментальная последовательность из P_b . Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0 : \forall m, n \geq N$ выполняется неравенство $\rho_b(u_m, u_n) < \varepsilon$, т. е.

$$\frac{|u_m(x) - u_n(x)|}{x^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x}} < \varepsilon \quad (\forall m, n \geq N, \forall x \in (0, b]). \quad (13)$$

Так как

$$x^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x} \leq b^{1/(\alpha-1)} e^{\beta b} \equiv M,$$

то

$$\frac{|u_m(x) - u_n(x)|}{x^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x}} \geq \frac{1}{M} |u_m(x) - u_n(x)|.$$

Поэтому из (13) имеем $|u_m(x) - u_n(x)| \leq M\varepsilon \forall m, n \geq N, \forall x \in [0, b]$ (здесь учли, что $u_m(0) = u_n(0) = 0$), т. е. $\{u_n(x)\}$ — фундаментальная последовательность в $C[0, b]$. В силу полноты $C[0, b]$ существует $u(x) \in C[0, b]$ такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x). \quad (14)$$

Покажем, что $u(x) \in P_b$. Так как $\{u_n(x)\} \in P_b$, то $\forall n$ и $\forall x \in [0, b]$

$$\begin{aligned} F(x) &\equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} k(0) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} x^{\frac{1}{\alpha-1}} \leq u_n(x) \leq \\ &\leq \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x k(t) dt \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \equiv G(x). \end{aligned}$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, с учетом равенства (14) получаем $F(x) \leq u(x) \leq G(x)$, т. е. $u(x) \in P_b$.

Сходимость последовательности $\{u_n(x)\}$ к $u^*(x)$ по метрике ρ_b доказывается переходом в неравенстве (13) к пределу при $m \rightarrow \infty$.

8. Существование и единственность решения

Выше мы доказали, что если в классе P_b ввести метрику ρ_b , то P_b превращается в полное, причем нелинейное (так как, например, $-u(x) \notin P_b$, если $u(x) \in P_b$) метрическое пространство. Кроме того (см. следствие 1), нелинейный оператор свертки T , ядро которого удовлетворяет условиям А) и Б), действует из P_b в P_b .

Покажем, что если ядро $k(x)$ удовлетворяет еще условию:

В) существует $c \in (0, b)$ такое, что $k(c) < \alpha k(0)$;

и число β определяется по формуле

$$\beta = \frac{1}{k(0)} \sup_{c \leq x \leq b} \frac{k(x) - k(0)}{x}, \quad (15)$$

то оператор T является сжимающим. Для этого нам понадобится

Лемма 4 [4]. Для любого $x \in [0, b]$ справедливо неравенство

$$k(x) e^{-\beta x} \leq k(c),$$

где c и β определяются из условия В) и формулы (15).

◁ Рассмотрим отдельно два случая.

1) Пусть $0 \leq x \leq c$. Тогда, учитывая, что $k(x)$ не убывает и $\beta > 0$, имеем $k(x) e^{-\beta x} \leq k(x) \leq k(c)$ — что и требовалось.

2) Пусть, наконец, $c \leq x \leq b$. Так как $x \geq c > 0$, то

$$k(x) = k(0) + k(0) x \frac{1}{k(0)} \frac{k(x) - k(0)}{x} \leq k(0)[1 + x\beta].$$

Итак, $k(x) \leq k(0)[1 + \beta x] \forall x \in [c, b]$. Но $1 + \alpha \leq e^\alpha \forall \alpha \geq 0$ так, что $1 + \beta x \leq e^{\beta x}$. Следовательно, $k(x) \leq k(0)e^{\beta x} \leq k(c)e^{\beta x}$, откуда окончательно получаем $k(x)e^{-\beta x} \leq k(c) \forall x \in [c, b]$. $\triangleright$

Теорема 5. Оператор $T : P_b \rightarrow P_b$ и является сжимающим, при этом $\forall u_1(x), u_2(x) \in P_b$ выполняется неравенство

$$\rho_b(Tu_2, Tu_1) \leq \frac{k(c)}{\alpha k(0)} \rho_b(u_2, u_1), \quad (16)$$

где число c определяется из условия В).

$\triangleleft$ То, что оператор T действует из P_b в P_b , вытекает из следствия 1. Докажем неравенство (16), т. е. что оператор T является сжимающим. Пусть $u_1(x), u_2(x) \in P_b$ и $x \in (0, b]$. В силу теоремы Лагранжа, известной из курса математического анализа, для любых $z_1, z_2 > 0$ имеем $z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha} \Theta^{1/\alpha-1} (z_1 - z_2)$, где Θ лежит между z_1 и z_2 . Поэтому, если $z_1 \geq z_0, z_2 \geq z_0$, то и $\Theta \geq z_0$. Значит,

$$\left| z_1^{\frac{1}{\alpha}} - z_2^{\frac{1}{\alpha}} \right| \leq \frac{1}{\alpha} \frac{|z_1 - z_2|}{\{z_0\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}.$$

Используя это неравенство и учитывая, что $(Tu_1)(x) \geq F(x)$, $(Tu_2)(x) \geq F(x)$, для всех $x \in (0, b]$ имеем

$$\begin{aligned} & |(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)| = \\ & = \left| \left(\int_0^x k(x-t) u_2(t) dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} - \left(\int_0^x k(x-t) u_1(t) dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{\alpha} \frac{\left| \int_0^x k(x-t) u_2(t) dt - \int_0^x k(x-t) u_1(t) dt \right|}{\{[F(x)]^\alpha\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \leq \\ & \leq \frac{1}{\alpha} \frac{\left| \int_0^x k(x-t) [u_2(t) - u_1(t)] dt \right|}{[F(x)]^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{\alpha} \frac{\int_0^x k(x-t) |u_2(t) - u_1(t)| dt}{\frac{\alpha-1}{\alpha} k(0) x}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} & |(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)| \leq \\ & \leq \frac{1}{(\alpha-1)k(0)x} \int_0^x k(x-t) |u_2(t) - u_1(t)| dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как

$$|u_2(x) - u_1(x)| = x^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x} \frac{|u_2(x) - u_1(x)|}{x^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x}} \leq x^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x} \rho_b(u_2, u_1),$$

то из (17), с учетом леммы 4, получим

$$\begin{aligned} & |(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)| \leq \\ & \leq \frac{1}{(\alpha-1)k(0)x} \rho_b(u_2, u_1) \int_0^x k(x-t) t^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta t} dt = \\ & = \frac{1}{(\alpha-1)k(0)x} \rho_b(u_2, u_1) e^{\beta x} \int_0^x k(x-t) e^{-\beta(x-t)} t^{\frac{1}{\alpha-1}} dt \leq \\ & \leq \frac{k(c)}{(\alpha-1)k(0)x} e^{\beta x} \rho_b(u_2, u_1) \frac{\alpha-1}{\alpha} x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{|(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)|}{x^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x}} \leq \frac{k(c)}{\alpha k(0)} \rho_b(u_2, u_1) \quad (\forall x \in (0, b]),$$

что равносильно неравенству (16). $\triangleright$

Итак, на основании принципа сжимающих отображений доказана

Теорема 6 (существования и единственности). Пусть $b > 0$ — любое число и ядро $k(x)$ удовлетворяет условиям А), Б) и В). Тогда нелинейное интегральное уравнение типа свертки (7) имеет единственное решение в пространстве P_b . Это решение можно найти методом последовательных приближений.

Нетрудно показать, что при условиях теоремы 6 уравнение типа свертки (7) имеет единственное решение в классе Q_0 .

Заметим, что уравнение $u^\alpha(x) = \int_0^x e^{x-t} u(t) dt$, $\alpha > 1$, имеет решение $u(x) = (e^{[(\alpha-1)/\alpha]x} - 1)^{1/(\alpha-1)}$ и оно единственно в классе Q_0 .

Дальнейшие сведения о развитии теории нелинейных уравнений типа свертки вида (7) можно найти в [1, 7].

Литература

1. Askhabov S. N. Integral equations of convolution type with power nonlinearity // Colloq. Math.—1991.—Vol. 62, № 1.—P. 49–65.
2. Corduneanu C. Bielecki's method in the theory of integral equations // Ann. UMCS. Sec. A.—1984.—Vol. 38.—P. 23–40.
3. Keller J. J. Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction // Z. Angew. Math. Phys.—1981.—Vol. 32, № 2.—P. 170–181.
4. Okrasinski W. On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain non-linear convolution equation // Ann. Polon. Math.—1979.—Vol. 36, № 1.—P. 61–72.
5. Okrasinski W. On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation // Ann. Polon. Math.—1980.—Vol. 37, № 3.—P. 223–229.
6. Okrasinski W. Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math.—1989.—Vol. 4, № 2.—P. 51–74.
7. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки.—М.: Физматлит, 2009.—304 с.
8. Белецкий А. Заметка о применении метода Банаха — Каччиополи — Тихонова в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Бюллетень Польской АН.—1956.—Т. 4.—Отд. III, № 5.—С. 255–258.
9. Эдвардс Р. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1969.—1072 с.

INTEGRAL EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE WITH POWER NONLINEARITY IN CONES

S. N. Askhabov

In the cone Γ of nonnegative continuous functions on $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ the solvability of the nonlinear equation $u^\alpha(x) = \int_0^x k(x-t)u(t)dt$, $\alpha > 1$, with the kernel $k \in \Gamma$, is considered. That equation appears in applications of filtration theory and arises in the theory propagation of nonlinear shock-waves in gas filled tubes with friction.

О ПРИНЦИПЕ ЛАГРАНЖА В ТЕОРИИ ЭКСТРЕМУМА

Г. Г. Магарил-Ильяев¹

Интерес к экстремальным задачам, т. е. задачам на максимум и минимум, проявился уже на заре развития математики. Основными стимулами для решения таких задач были, по-видимому, любознательность и стремление к совершенству. Позднее, уже в 18 веке, выяснилось, что многие законы природы основываются на вариационных (экстремальных) принципах (по этому поводу Эйлер (1707–1783) заметил: «В мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума»), и это стало важным поводом для исследования экстремальных задач. Нельзя не назвать также и прагматические причины, побуждающие решать экстремальные задачи. Человеку свойственно наилучшим образом использовать ресурсы, находящиеся в его распоряжении, и потому экстремальные задачи естественным образом возникают при управлении различными процессами, в экономике, инженерии.

Среди наиболее ранних, точно решенных задач — так называемая *изопериметрическая задача* — задача о форме кривой заданной длины, охватывающей наибольшую площадь² и задача о форме поверхности заданной площади, охватывающей наибольший объем. Ответы на эти задачи для мыслителей Древней Греции были символами совершенства человеческого разума. Крупнейшие их представители: Евклид, Архимед и Аполлоний — ставили и решали различные геометрические задачи на экстремум. Задача о параллелограмме наибольшей площади, который можно вписать в треугольник приводится в «Началах» Евклида (III в. до н. э.); задача о шаровом сегменте максимального объема при заданной площади шаровой части поверхности этого сегмента содержится в сочинениях Архимеда (тоже III в. до н. э.); задача о минимальном расстоянии от точки плоскости до эллипса и о нормалях к эллипсу из произвольной точки плоскости была поставлена и решена Аполлонием (III–II в. до н. э.) в его знаменитых «Кониках».

Первый экстремальный принцип в естествознании выдвинул П. Ферма (1601–1665) в 1662 г. Согласно этому принципу свет «из-

¹Россия, Москва, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН.

²Ответ в ней приводил в своих сочинениях еще Аристотель (IV в. до н. э.)

бирает» такую траекторию, вдоль которой время, затрачиваемое им на преодоление пути от одной точки до другой, минимально. Законы преломления света, установленные экспериментально, находятся, исходя из этого принципа, как решения соответствующих экстремальных задач.

Первой задачей инженерного содержания была так называемая *аэродинамическая задача Ньютона* (1643–1727) о теле вращения заданной ширины и высоты, испытывающем наименьшее сопротивление в некоей «редкой среде», поставленная и решенная Ньютоном в 1687 г. в «Математических началах натуральной философии».

В 1638 г. П. Ферма написал письмо Р. Декарту (1596–1650), в котором он описывает обнаруженное им следующее явление: в точке локального экстремума полинома линейная часть его приращения равна нулю. В терминах производной (в то время такого понятия еще не было, оно возникло позже в работах Ньютона и Лейбница (1646–1716)) это означает, что в точке локального экстремума производная равна нулю. Сейчас этот результат по праву называется *теоремой Ферма*, и он был первой попыткой понять структуру необходимых условий экстремума в достаточно общей ситуации. Поэтому начало теории экстремума обычно отсчитывают от 1638 г.

Затем, едва родившись, теория экстремума совершила неожиданный поворот: появились задачи, в которых требовалось найти минимум или максимум не функции одного переменного, а функционала, где сами функции являются переменными величинами. Это произошло в 1696 г., когда Иоганн Бернулли (1667–1748) в первом в истории научном журнале “Acta Eruditorum” опубликовал статью, озаглавленную «Новая задача, к решению которой приглашаются математики». В статье была поставлена задача о брахистохроне, т. е. задача о нахождении формы кривой, соединяющей две точки в вертикальной плоскости, вдоль которой тело под действием силы тяжести без трения проходит путь от одной точки до другой за кратчайшее время (постановка, возможно, была навеяна более ранними размышлениями Галилея (1564–1642) на эту тему). На призыв И. Бернулли откликнулись его брат Я. Бернулли (1654–1705), его учитель Лейбниц, Лопиталь (1661–1704) и Ньютон, при этом каждый из них решил задачу по своему. Примерно через четверть века И. Бернулли поставил перед своим учеником Леонардом Эйлером проблему нахождения общих методов решения задач, сходных с задачей о брахистохроне. Эйлер справился с этой проблемой и нашел аналог теоремы Фер-

ма — необходимое условие экстремума для экстремальной кривой. Им оказалось дифференциальное уравнение, получившее название *уравнения Эйлера*.

В 50-е гг. восемнадцатого столетия возшла звезда Жозеф-Луи Лагранжа (1736–1813), который разработал новый метод исследования задач, изучавшихся Эйлером, и получивший название *метода вариаций*. Это дало повод Эйлеру все направление, связанное с изучением подобного рода задач, назвать *вариационным исчислением*. Помимо этого Лагранж предложил прием исследования экстремальных задач с ограничениями, задаваемыми равенствами, который стали называть *правилом множителей Лагранжа*. Лагранж внес огромный вклад и в осознание того, что вариационное исчисление является основой многих глав естествознания. Само вариационное исчисление интенсивно развивалось вплоть до 40-х гг. двадцатого столетия.

В конце 30-х гг. родилось новое направление в теории экстремума, которое было стимулировано потребностями математического осмысления процессов и явлений экономики. Оно имеет точное время своего рождения — 1939 г., когда вышла брошюра Леонида Витальевича Канторовича (1912–1986). Это направление получило название *линейного программирования* и связано с изучением задач минимизации (или максимизации) линейных функций на выпуклых многогранниках. Затем, в 40-е гг. данное направление в значительной степени было поглощено разделом теории экстремума, которое стали называть *выпуклым программированием*. Здесь изучаются задачи минимизации выпуклых функций на выпуклых множествах, где сами множества задаются, как правило, функциональными ограничениями типа равенств, неравенств и включений. В те же времена стали изучаться и гладкие задачи с ограничениями типа равенств и неравенств.

В 40-е гг. возникло еще одно направление в теории экстремальных задач, вызванное разнообразными проблемами управления (производственными процессами, космической навигацией и т. п.). Оно получило название *оптимального управления*. Начала теории, связанной с изучением задач оптимального управления, были построены Львом Семеновичем Понтрягиным (1908–1988) и его коллегами.

Выше было сказано, что для гладких задач (с ограничениями типа равенств) Лагранж предложил метод их решения. Вот что он сам сказал по этому поводу: «Можно высказать следующий общий прин-

цип. Если ищется максимум или минимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одним или несколькими уравнениями, нужно прибавить к функции, о которой говорилось, функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители, и искать затем максимум и минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы. Полученные уравнения, присоединенные к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных». Иначе говоря, необходимое условие экстремума для таких задач состоит в том, что в точке локального экстремума в гладкой задаче с ограничениями типа равенств должно удовлетворяться необходимое условие экстремума построенной суммы (которая теперь называется функцией Лагранжа) в задаче без ограничений.

Впоследствии оказалось, что необходимые условия экстремума в самых различных задачах могут быть формально выведены, пользуясь рецептом Лагранжа, если придать ему чуть более расширенное толкование. Это явление впервые было обнаружено А. Д. Иоффе и В. М. Тихомировым при работе над своей книгой «Теория экстремальных задач» (М.: Наука, 1974), а само правило вывода необходимых условий экстремума было ими названо *принципом Лагранжа*.

Как работает принцип Лагранжа ниже будет объяснено на примере наиболее общей экстремальной задачи, а именно задачи оптимального управления. А сейчас более подробно рассмотрим ту постановку, относительно которой Лагранж сформулировал свой принцип.

Слова Лагранжа относились к задачам вида

$$f_0(x) \rightarrow \text{extr}, \quad f_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

где функции определены на $\mathbb{R}^n$, а extr означает либо максимум, либо минимум. Сама задача (представленная записью (1)) заключается в нахождении таких x , удовлетворяющих соотношениям $f_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, m$, на которых функция f_0 принимает максимальное и минимальное значения. Согласно рекомендациям надо составить функцию (функцию Лагранжа) данной задачи: $\mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x)$ (у Лагранжа $\lambda_0 = 1$), где $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ — набор «неопределенных множителей» (множителей Лагранжа). Далее надо искать максимум и минимум функции $\mathcal{L}$ по x «как если бы переменные были независимы», т. е. надо выписать необходимые условия экстремума в задаче без ограничений:

$$\mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) \rightarrow \text{extr},$$

которые даются уже упомянутой теоремой Ферма:

$$\mathcal{L}_x(x, \bar{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^m \lambda_i f'_i(x) = 0,$$

где $f'_i(x)$ — производные (градиенты) функций f_i , $0 \leq i \leq m$, в точке x .

Мы получим n уравнений. Относительно множителей λ_i эти уравнения однородны, и поэтому один из них можно считать, например, равным единице. В результате имеем $n + m$ уравнений (m уравнений связи) для нахождения $n + m$ неизвестных.

Теперь приведем точный результат, который был сформулирован и доказан значительно позже. Но сначала напомним определение локального экстремума. Точка $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ называется *локальным минимумом* (*максимумом*) в задаче (1), если найдется такая окрестность U этой точки, что $f_0(x) \geq f_0(\hat{x})$ ($f_0(x) \leq f_0(\hat{x})$) для всех $x \in U$ таких, что $f_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Теорема (правило множителей Лагранжа). Пусть $\hat{x}$ — локальный экстремум в задаче (1) и функции f_i , $i = 0, 1, \dots, m$, непрерывно дифференцируемы в $\hat{x}$. Тогда существует такой ненулевой набор множителей Лагранжа $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, что

$$\mathcal{L}_x(\hat{x}, \bar{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^m \lambda_i f'_i(\hat{x}) = 0,$$

где

$$f'_i(\hat{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\hat{x}), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\hat{x}) \right), \quad i = 0, \dots, m.$$

Многие результаты анализа, алгебры, геометрии, теории приближений могут быть получены как следствия правила множителей Лагранжа. К сожалению, это не вошло в стандартные курсы математики, хотя само это правило было сформулировано Лагранжем еще в 1797 г. Здесь, в качестве подтверждения сказанного, докажем с помощью правила множителей Лагранжа, что у симметричной матрицы собственные векторы образуют ортогональный базис. Этот факт лежит в основе многих утверждений (например, приведения квадратичной формы к главным осям).

Итак, пусть A — ненулевая симметричная матрица размера $n \times n$ и $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу

$$(Ax, x) \rightarrow \max, \quad (x, x) = 1. \quad (2)$$

Это задача вида (1), где $f_0(x) = (Ax, x)$, а $f_1(x) = (x, x) - 1$. Функция f_0 , очевидно, непрерывна, а множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, x) = 1\}$ ограничено и замкнуто, поэтому по теореме Вейерштрасса решение задачи (2) существует. Обозначим его через e^1 .

Функция Лагранжа задачи (1) имеет вид

$$\mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) = \lambda_0 (Ax, x) + \lambda_1 ((x, x) - 1).$$

Функции f_0 и f_1 непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$. Действительно, пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Для любого $h \in \mathbb{R}^n$, используя свойства скалярного произведения и симметричность матрицы A , имеем

$$f_0(x+h) - f_0(x) = (A(x+h), x+h) - (Ax, x) = (2Ax, h) + (Ah, h).$$

Пусть $|x| = \sqrt{(x, x)}$ — евклидова норма элемента $x \in \mathbb{R}^n$ и $\|A\| = \max_{|x| \leq 1} |Ax|$ — норма матрицы. Тогда ясно, что $|Ax| \leq \|A\||x|$ и, следовательно, по неравенству Коши — Буняковского

$$|(Ah, h)| \leq |Ah||h| \leq \|A\||h|^2.$$

Таким образом, $f_0(x+h) - f_0(x) = (2Ax, h) + o(|h|)$. Это означает, по определению, что $f'_0(x) = 2Ax$. Ясно, что эта производная непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Аналогично устанавливается, что $f'_1(x) = 2x$.

Согласно правилу множителей Лагранжа найдется такой ненулевой набор множителей Лагранжа $(\lambda_{01}, \lambda_{11})$, что

$$\mathcal{L}_x(e^1, \lambda_{01}, \lambda_{11}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{01} 2Ae^1 + \lambda_{11} 2e^1 = 0. \quad (3)$$

Покажем, что $\lambda_{01} \neq 0$. Действительно, если $\lambda_{01} = 0$, то $\lambda_{11} \neq 0$, и тогда из (3) следует, что $e^1 = 0$. Но это невозможно, так как $(e^1, e^1) = 1$ в силу (2). Итак, $\lambda_{01} \neq 0$ и из (3) получаем, что

$$Ae^1 = -\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{01}} e^1, \quad (4)$$

т. е. e^1 — собственный вектор матрицы A .

Рассмотрим теперь такую экстремальную задачу:

$$(Ax, x) \rightarrow \max, \quad (x, x) = 1, \quad (x, e^1) = 0. \quad (5)$$

По тем же соображениям, что и выше, у нее существует решение. Обозначим его через e^2 .

Функция Лагранжа задачи (5) имеет вид

$$\mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_0 (Ax, x) + \lambda_1 ((x, x) - 1) + \lambda_2 (x, e^1).$$

Снова, согласно правилу множителей Лагранжа (учитывая, что производная линейного отображения $x \mapsto (x, e^1)$ есть e^1), найдется ненулевой набор множителей Лагранжа $(\lambda_{02}, \lambda_{12}, \lambda_{22})$ такой, что

$$\mathcal{L}_x(e^2, \lambda_{02}, \lambda_{12}, \lambda_{22}) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_{02}Ae^2 + 2\lambda_{12}e^2 + \lambda_{22}e^1 = 0. \quad (6)$$

Покажем, что $\lambda_{22} = 0$. Действительно, умножая скалярно на e^1 выражение в (6), учитывая (4) и то что $(e^2, e^1) = 0$, а $(e^1, e^1) = 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_{02}(Ae^2, e^1) + \lambda_{12}(e^2, e^1) + \lambda_{22}(e^1, e^1) = \\ &= -(\lambda_{01}/\lambda_{11})(e^2, e^1) + \lambda_{22} = \lambda_{22}. \end{aligned}$$

Далее покажем, что $\lambda_{02} \neq 0$. Если бы это было так, то $\lambda_{12} \neq 0$. Но тогда из (6) следовало бы, что $e^2 = 0$, а это невозможно, поскольку $(e^2, e^2) = 1$. Из (6) получаем, что $Ae^2 = -\lambda_{12}/\lambda_{02}e^2$, т. е. e^2 — собственный вектор матрицы A , ортогональный e^1 .

Продолжая этот процесс, мы на k -ом шаге рассмотрим экстремальную задачу $(Ax, x) \rightarrow \max, (x, x) = 1, (x, e^i) = 0, i = 1, \dots, k-1$.

Рассуждая аналогично предыдущему, приходим к тому, что решение этой задачи, которое обозначим через e^k , есть собственный вектор матрицы A , ортогональный векторам $e^1, \dots, e^{k-1}$.

Таким образом, за n шагов мы построим ортонормированный базис $e^1, \dots, e^n$, состоящий из собственных векторов матрицы A .

Перейдем теперь к объяснению того, как работает принцип Лагранжа. Точнее говоря, рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} &= \varphi(t, x, u), \quad u(t) \in U, \\ x(t_0) &= x_1, \quad x(t_1) = x_1, \end{aligned} \quad (7)$$

и попробуем понять вид необходимых условий минимума в этой задаче, следуя формально рекомендациям Лагранжа.

В этой задаче f и φ — функции трех переменных, U — некоторое множество на прямой. Переменная u называется *управлением*, а x — *фазовой переменной*. Интерес к такого сорта задачам возник в 50-е гг. прошлого века в ответ на запросы практики: требовалось оптимально (в том или ином смысле) управлять различными процессами, учитывая естественную ограниченность ресурсов (материальных, энергетических и т. п.). В нашем случае процесс описывается

дифференциальным уравнением $\dot{x} = \varphi(t, x, u)$ (на «вход» подается управление $u(\cdot)$, на «выходе» получаем $x(\cdot)$). Мы хотим найти такое управление $\hat{u}(\cdot)$, чтобы соответствующая фазовая переменная $\hat{x}(\cdot)$ в начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1 принимала значения x_0 и x_1 , чтобы $\hat{u}(\cdot)$ для каждого $t \in [t_0, t_1]$ не выходило за пределы множества U (отражающего ограниченность наших возможностей) и, наконец, чтобы это управление было оптимально в том смысле, что интеграл на паре $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ принимал минимальное значение.

Необходимые условия минимума в подобной задаче были получены в 50-е гг. и получили название *принципа максимума Понтрягина*. Это одно из наиболее ярких достижений теории экстремальных задач.

Далее рассуждаем эвристически. Будем смотреть на задачу (7) как на задачу минимизации функции двух переменных $x(\cdot)$ и $u(\cdot)$, удовлетворяющих соответствующим ограничениям. Ограничение $\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$, можно воспринимать как континуум равенств, каждое из которых надо умножить на «неопределенный множитель», который обозначим (следуя традиции) через $p(t)$, и «сложить», т. е. проинтегрировать. Таким образом, функция Лагранжа задачи (7) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), \bar{\lambda}) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} (\lambda_0 f(t, x(t), u(t)) + p(t)(\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)))) dt + \\ + \mu_0(x(t_0) - x_0) + \mu_1(x(t_1) - x_1), \end{aligned}$$

где $\bar{\lambda} = (\lambda_0, p(\cdot), \mu_0, \mu_1)$ — набор множителей Лагранжа.

Пусть $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ — решение задачи. Выпишем необходимые условия минимума функции Лагранжа в этой точке отдельно по $x(\cdot)$ и по $u(\cdot)$. Пусть $u(\cdot) = \hat{u}(\cdot)$. Тогда задача минимизация функции Лагранжа по $x(\cdot)$ — это так называемая задача Больца — стандартная задача классического вариационного исчисления. Если обозначить через L подынтегральную функцию, т. е. функцию $L(t, x(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t), \lambda_0, p(t)) = \lambda_0 f(t, x(t), \hat{u}(t)) + p(t)(\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), \hat{u}(t)))$, то необходимые условия в такой задаче имеют вид

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{p}(t) = -p(t)\hat{\varphi}_x(t) - \lambda_0\hat{f}_x(t) \quad (8)$$

(где $\hat{L}_{\dot{x}}(t) = L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t), \lambda_0, p(t))$ и аналогично для остальных

функций с крышкой) и

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \mu_0, \quad \widehat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\mu_1 \Leftrightarrow p(t_0) = \mu_0, \quad p(t_1) = -\mu_1. \quad (9)$$

Пусть теперь $x(\cdot) = \widehat{x}(\cdot)$. Следуя логике, надо понять, что означает минимум функции Лагранжа по функциям $u(\cdot)$. Для этого надо описать тот запас таких функций (управлений), которыми мы располагаем. Наиболее простой вариант, который обычно рассматривается, это кусочно-непрерывные функции $u(\cdot)$ на $[t_0, t_1]$ такие, что $u(t) \in U$ в точках непрерывности $u(\cdot)$. Обозначим множество таких функций через $\mathcal{U}$.

Итак, «веря в принцип Лагранжа», функция $\widehat{u}(\cdot)$ должна доставлять минимум функции Лагранжа по всем $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, т. е. (при этом мы можем, очевидно, выбросить все слагаемые в функции Лагранжа, не зависящие от $u(\cdot)$)

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_{t_0}^{t_1} (\lambda_0 f(t, \widehat{x}(t), u(t)) - p(t) \varphi(t, \widehat{x}(t), u(t))) dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} (\lambda_0 f(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)) - p(t) \varphi(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t))) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Покажем, что отсюда следует, что в каждой точке t , где функция $\widehat{u}(\cdot)$ непрерывна, справедливо равенство

$$\begin{aligned} \min_{u \in U} (\lambda_0 f(t, \widehat{x}(t), u) - p(t) \varphi(t, \widehat{x}(t), u)) = \\ = \lambda_0 f(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)) - p(t) \varphi(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)). \end{aligned} \quad (11)$$

Действительно, допустим, что это соотношение не выполнено, т. е. существуют точка $\tau \in [t_0, t_1]$, в которой функция $\widehat{u}(\cdot)$ непрерывна, и элемент $v \in U$ такие, что

$$\begin{aligned} \lambda_0 f(\tau, \widehat{x}(\tau), v) - p(\tau) \varphi(\tau, \widehat{x}(\tau), v) < \\ < \lambda_0 f(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{u}(\tau)) - p(\tau) \varphi(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{u}(\tau)). \end{aligned}$$

Так как функции $t \mapsto \lambda_0 f(t, \widehat{x}(t), v) - p(t) \varphi(t, \widehat{x}(t), v)$ и $t \mapsto \lambda_0 f(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)) - p(t) \varphi(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t))$ непрерывны в некоторой окрестности точки τ , то найдется такое $\delta > 0$, что для всех $t \in [\tau - \delta, \tau + \delta]$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \lambda_0 f(t, \widehat{x}(t), v) - p(t) \varphi(t, \widehat{x}(t), v) < \\ < \lambda_0 f(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)) - p(t) \varphi(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)). \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $\tilde{u}(\cdot)$, равную v на отрезке $[\tau - \delta, \tau + \delta]$ и $\hat{u}(\cdot)$ за пределами этого отрезка. Тогда ясно, что

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} (\lambda_0 f(t, \hat{x}(t), \tilde{u}(t)) - p(t) \varphi(t, \hat{x}(t), \tilde{u}(t))) dt < \\ & < \int_{t_0}^{t_1} (\lambda_0 f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - p(t) \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))) dt \end{aligned}$$

в противоречие с (10). Тем самым равенство (11) справедливо.

Соотношения (8), (9) и (11) (последнее можно записать в форме максимума, поменяв знаки перед $\lambda_0 f$ и $p\varphi$ на противоположные) и есть принцип максимума Понтрягина для данной задачи. Точную формулировку не будем приводить, но суть ее (как и в правиле множителей Лагранжа) в том, что существует такой ненулевой набор множителей Лагранжа $\bar{\lambda} = (\lambda_0, p(\cdot), \mu_0, \mu_1)$, что выполняются условия (8), (9) и (11).

Решение конкретных задач на основе принципа Лагранжа происходит, как правило, по следующей схеме: выписываются необходимые условия экстремума, потом они анализируются и в результате находят «подозреваемый» на экстремум объект (скажем, функцию). После этого проверяют, что найденный объект действительно есть решение данной задачи. Важно при этом отметить, что зачастую нам нужна лишь структура необходимых условий, для чего вполне достаточно владения принципом Лагранжа, а не знанием соответствующего точного результата. Более того, иногда такого результата просто нет, а принцип Лагранжа дает правильные ориентиры для решения задачи.

ON THE LAGRANGE PRINCIPLE IN THE THEORY OF EXTREMUM

G. G. Magaril-Il'yayev

The lecture is devoted to a brief history of the theory of extremal problems and the emergence of the principle of Lagrange. Gives examples and shows how the principle of Lagrange works for the problem of optimal control.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТА НАНОСОВ В ПРИБРЕЖНЫХ ВОДНЫХ СИСТЕМАХ НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Сухинов А. И.¹, Чистяков А. Е.², Проценко Е. А.³

Введение

Среди разнообразия природных явлений особое место по сложности, многообразию и практической значимости принадлежит процессам, протекающим в прибрежных водных системах. В условиях возрастания антропогенной нагрузки на прибрежно-шельфовые зоны реализация концепции устойчивого развития возможна с учетом всех факторов и процессов, определяющих состояние берегов. Динамика берегов и прибрежного рельефа дна во многом определяется характером перемещения наносов в береговой зоне под воздействием волн и течений. При конструктивном преобразовании рельефов необходимо учитывать динамику профиля дна в прибрежной зоне водоема под воздействием волновых процессов. Необходимы обоснованные методы расчета для достоверного прогноза динамических процессов береговой зоны. Одним из наиболее эффективных методов исследования реальных процессов гидродинамики в настоящее время становится численное моделирование. Таким образом, проблема работы, а именно прогнозирование формирования профиля дна в прибрежной зоне водоема при образовании наносов средствами численного моделирования, является актуальной.

1. Задача транспорта наносов

Для описания динамики морских наносов в работе применяются уравнения, которые описывают переформирование прибрежной зоны водоемов, где вода и твердые частицы перемещаются в одном направлении. Уравнения процесса перемещения наносов [6–8, 19, 20] могут быть записаны в следующем виде:

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

^{1,3}Россия, Ростов-на-Дону, Ростовский государственный экономический университет (РИНХ).

²Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

$$\vec{Q} = \begin{cases} A\bar{\omega}d|\vec{\psi}|^{\beta-1}\vec{\psi}, & |\tau| \geq \tau_{bc}, \\ 0, & |\tau| < \tau_{bc}, \end{cases} \quad \vec{\psi} = \frac{\vec{\tau}}{(\rho_1 - \rho_0)gd},$$

где H — глубина дна, отсчитываемая от невозмущенной поверхности водоема, ω — пористость грунта, $\vec{Q} = \{Q_x, Q_y\}$ — расход наносов, $|\vec{Q}| = Q$, x, y — горизонтальные декартовы координаты, τ_b — касательное напряжение на дне, τ_{bc} — критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов, g — ускорение свободного падения, ρ — плотность жидкости, A и β — безразмерные постоянные ($A = 19,5$, $\beta = 3$), $\bar{\omega}$ — частота волны, d — характеристика осадков.

Запишем касательное напряжение для наклонной поверхности дна:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_b - \alpha \sin S \vec{n}, \quad (2)$$

где $S(x, y, t)$ — острый угол между вектором нормали к поверхности дна и вектором силы гравитации в момент времени t , $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный в сторону градиента глубины, $\alpha \sin S$ — дополнительное тангенциальное напряжение на дне водоема, вызываемое гравитационными силами. В случае $|\vec{t}_b| = 0$, $|\vec{\tau}| = \tau_{bc}$ имеет место равенство: $\tau_{bc} = \alpha \sin \varphi_0$, где φ_0 — угол естественного откоса грунта в воде.

Таким образом, система уравнений для параметра Шильдса принимает следующий вид:

$$\vec{\psi}_S = \frac{\vec{\tau}_b - \sin S \tau_{bc} \vec{n} / \sin \varphi_0}{(\rho_1 - \rho_0)gd}, \quad \vec{n} \operatorname{tg} S = \operatorname{grad}(H), \quad (3)$$

где $\vec{\psi}_S$ — параметр Шильдса для наклонного дна.

С учетом ограничений на касательные напряжения на дне расчетной области система уравнений (1)–(3) принимает вид [8, 19, 20]:

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div}(k \vec{\tau}_b) = \operatorname{div}(k(\tau_{bc} / \sin \varphi_0) \operatorname{grad}(H)), \quad (4)$$

$$k = \frac{A\bar{\omega}d}{((\rho_1 - \rho_0)gd)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad}(H) \right|^{\beta-1} \times \\ \times h \left(\left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad}(H) \right| - \tau_{bc} \right), \quad (5)$$

где $h(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ — функция Хевисайда.

Уравнение (4) дополняется начальным условием

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y). \quad (6)$$

На границе расчетной области отсутствует поток, вызванный влиянием гравитационных сил:

$$H'_0(x, y) = 0. \quad (7)$$

2. Численные эксперименты по переформированию дна с использованием двумерной модели гидродинамики

Для расчета тангенциальных напряжений в модели транспорта наносов необходима информация о поле вектора скорости на дне водоема. Для описания движения водной среды использована система уравнений мелкой воды [2, 9, 13, 25]. Исходными уравнениями модели гидродинамики являются

$$\begin{aligned} & ((H + \xi)u)'_t + (H + \xi)uu'_x + (H + \xi)vu'_y = \\ & = -g(H + \xi)\xi'_x + ((H + \xi)\mu u'_x)'_x + ((H + \xi)\mu u'_y)'_y + \frac{\tau_{x,p}}{\rho} - \frac{\tau_{x,b}}{\rho}, \\ & ((H + \xi)v)'_t + (H + \xi)uv'_x + (H + \xi)vv'_y = \\ & = -g(H + \xi)\xi'_y + ((H + \xi)\mu v'_x)'_x + ((H + \xi)\mu v'_y)'_y + \frac{\tau_{y,p}}{\rho} - \frac{\tau_{y,b}}{\rho}, \\ & \xi'_t + ((H + \xi)u)'_x + ((H + \xi)v)'_y = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где ξ — функция подъема уровня, $V = \{u, v\}$ — вектор скорости движения водной среды, μ — коэффициент турбулентного обмена, τ_b, τ_p — тангенциальное напряжение на поверхности и дне жидкости, H — глубина водоема.

Система уравнений (8) рассматривается при следующих граничных условиях:

$$u'_n = 0, \quad v'_n = 0, \quad \xi'_n = 0,$$

где n — вектор нормали к границе расчетной области.

На основе построенных алгоритмов был разработан комплекс программ, предназначенный для моделирования распространения наносов в мелководных водоемах [7, 8]. Разработанный комплекс программ используется для расчета двумерного вектора скорости

течения водной среды и учитывает турбулентный обмен, геометрию дна, ветровые течения и трение о дно.

На рис. 1, 2 приведены результаты численных экспериментов моделирования динамики изменения рельефа дна. При этом размер расчетной сетки равен 200×200 , шаг по пространственным переменным 0,1 м, шаг по времени 0,01 с, скорость движения ветра 5 м/с и направлена слева направо. На рис. 1 представлен начальный рельеф дна (снизу) и положение свободной поверхности (сверху).

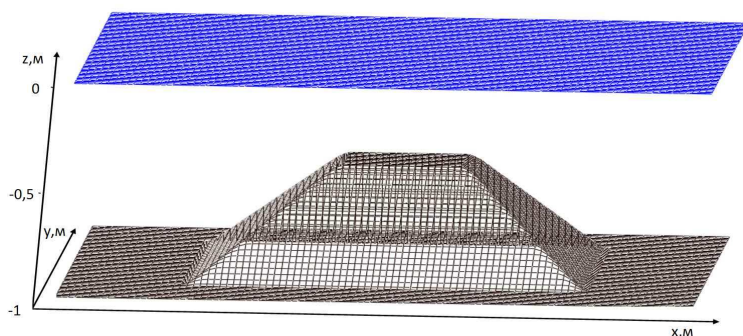


Рис. 1. Начальный рельеф дна и положение свободной поверхности.

Моделирование процесса транспорта наносов показало, что примерно через 20 минут геометрия дна начинает принимать коническую структуру. Скорость течения жидкости максимальна в пиковой части области (на минимальных глубинах). Функция возвышения уровня принимает положительные значения в левой части расчетной области (с наветренной стороны), и отрицательные — в правой.

Через 40 минут наблюдается присутствие волнообразной структуры функции возвышения уровня не только в левой части, но и в области пиковых значений глубины.

Через 60 минут усиливаются колебания функции возвышения уровня в левой своей части и в области пиковых значений глубины. На дне расчетной области образуются гряды.

Через 80 минут область с пиковыми значениями глубины продолжает смещаться влево, происходит расширение области в стороны, перпендикулярные движению ветра (рис. 2).

Через 100 минут область с пиковыми значениями глубины продолжает смещаться влево, происходит расширение области в сторо-

ны перпендикулярные движению ветра, функция возвышения уровня приобретает ярко выраженную колебательную структуру с наветренной стороны, а также происходит расширение области в стороны.

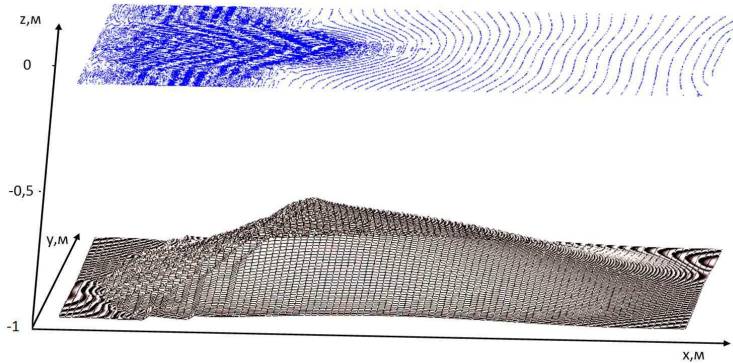


Рис. 2. Геометрия дна и функция возвышения уровня через 80 минут.

Результаты эксперимента позволяют проанализировать динамику изменения геометрии дна, функции возвышения уровня, образования волновых структур и наносов. Данная математическая модель и разработанный комплекс программ позволяют предсказать динамику изменения рельефа дна, появление морских гряд и кос, их рост и трансформацию.

3. Моделирование движения взвеси

В модели транспорта взвешенных частиц использована декартова система координат в горизонтальной плоскости и σ — координатная система в вертикальном направлении [1, 3, 4]:

$$\sigma = \frac{z - \eta}{h + \eta}, \quad x_\sigma = x, \quad y_\sigma = y, \quad t_\sigma = t,$$

здесь $\sigma = a = 0$ на свободной поверхности, $\sigma = b = -1$ на дне; $H = h + \eta$ — общая глубина до свободной поверхности, $h = h(x, y)$ — глубина водного объекта, $\eta = \eta(t, x, y)$ — возвышение свободной поверхности относительно геоида (уровня моря). Для описания транспорта

взвешенных частиц использовано уравнение диффузии-конвекции-реакции, которое может быть записано в следующем виде [14, 15, 22]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{a-b}{H} (w - w_s) \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_h \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_h \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \left(\frac{a-b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[D_v \frac{\partial C}{\partial \sigma} \right] + F, \end{aligned} \quad (9)$$

где C — концентрация осадка [г/л или кг/м²], $V = \{u, v, w\}$ — составляющие поля вектора скорости [м/с], w_s — гидравлическая крупность или скорость осаждения взвеси в вертикальном направлении [м/с], H — глубина [м], D_h , D_v — горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентной диффузии [м²/с], x , y — координаты в горизонтальном направлении, σ — координата в вертикальном направлении, t — временная переменная [с], F — функция, описывающая интенсивность распределения источников загрязняющих веществ.

На свободной поверхности Γ_s поток в вертикальном направлении равен нулю. Таким образом,

$$\left(\frac{a-b}{H} \right) D_v \frac{\partial C}{\partial \sigma} w_s C_k = 0. \quad (10)$$

Вблизи поверхности дна

$$\Gamma_b : \left(\frac{a-b}{H} \right) D_v \frac{\partial C}{\partial \sigma} = E - D + w_s C_k = 0, \quad (11)$$

где E — поток эрозии [кг/м²с], D — интенсивность осаждения осадка [кг/м²с], C_k — массовая концентрация взвеси [кг/м²], n — единичный вектор нормали к открытой границе Γ_{open} .

$$\begin{aligned} D &= \begin{cases} 0, & \tau_b > \tau_{kr}, \\ w_s C_k \left(1 - \frac{\tau_b}{\tau_{kr}} \right), & \tau_b \leq \tau_{kr}, \end{cases} \\ M &= \begin{cases} 0, & \tau_e < \tau_{krE}, \\ M \left(\frac{\tau_e}{\tau_{krE}} - 1 \right), & \tau_b \geq \tau_{krE}, \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

где τ — касательное напряжение сдвига у дна [Н/м²], τ_{kr} — критическое касательное напряжение у дна, которое оценивается на основе лабораторных испытаний как величина со значениями от 0,05 до 0,15 [Н/м²].

4. Трехмерная модель гидродинамики

Рассмотрим непрерывную модель гидродинамики жидкости водоема, исходные уравнения которой представляют собой следующие [13, 16–18, 21, 24]:

— уравнение Навье — Стокса (Рейнольдса):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a-b}{H} w \frac{\partial u}{\partial \sigma} = -\frac{P'_x}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_h \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_h \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \left(\frac{a-b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[D_v \frac{\partial C}{\partial \sigma} \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a-b}{H} w \frac{\partial v}{\partial \sigma} = -\frac{P'_y}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_h \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_h \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{a-b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[D_v \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{a-b}{H} w \frac{\partial w}{\partial \sigma} = -\frac{P'_\sigma}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_h \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_h \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{a-b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[D_v \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

— уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{a-b}{H} \frac{\partial (\rho w)}{\partial \sigma} = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a-b}{H} \frac{\partial w}{\partial \sigma} = 0. \quad (17)$$

Полное гидродинамическое давление связано с глубиной соотношением

$$P(x, y, z, t) = p(x, y, z, t) + \rho g(z - \eta). \quad (18)$$

Уравнения рассматриваются с учетом следующих граничных условий:

— на входе (боковая граница, на которой задается источник):

$$V'_n(x, y, \sigma, t) = 0, \quad p'_n(x, y, \sigma, t) = \frac{\rho \Pi}{\tau S};$$

— боковая граница без источника:

$$V'_n(x, y, \sigma, t) = 0, \quad p'_n(x, y, \sigma, t) = 0;$$

— на выходе (боковая граница):

$$V'_n(x, y, \sigma, t) = 0, \quad p(x, y, \sigma, t) = 0;$$

— на дне (нижняя граница):

$$\rho D_h(u')_n(x, y, \sigma, t) = -\tau_x(t), \quad \rho D_h(v')_n(x, y, \sigma, t) = -\tau_y(t);$$

$$w(x, y, \sigma, t) = 0, \quad p'_n(x, y, \sigma, t) = 0;$$

— верхняя граница (водная поверхность):

$$\rho D_h(u')_n(x, y, \sigma, t) = -\tau_x(t), \quad \rho D_h(v')_n(x, y, \sigma, t) = -\tau_y(t);$$

$$w(x, y, \sigma, t) = -\frac{p'_t}{\rho g}, \quad p'_n(x, y, \sigma, t) = 0;$$

где Π — поток вектора скорости через поверхность, S — площадь поверхности, $\tau_x(x, y, \sigma)$, $\tau_y(x, y, \sigma)$ — составляющие тангенциального напряжения (закон Ван-Дорна), $V = \{u, v, w\}$ — вектор скорости движения водной среды, g — ускорение свободного падения, P — давление, D_h — коэффициент турбулентного обмена по горизонтальным направлениям, D_v — коэффициент турбулентного обмена по вертикальному направлению, ρ — плотность жидкости.

Составляющие тангенциального напряжения для свободной поверхности [25]:

$$\tau_x = \rho_a C_p(|\vec{w}|) w_x |\vec{w}|, \quad \tau_y = \rho_a C_p(|\vec{w}|) w_y |\vec{w}|,$$

где $\vec{w}$ — вектор скорости ветра относительно воды, ρ_a — плотность атмосферы,

$$C_p(|\vec{w}|) = \begin{cases} 0,0088, & |\vec{w}| < 6,6, \\ 0,0026, & |\vec{w}| \geq 6,6, \end{cases}$$

— безразмерный коэффициент.

Составляющие тангенциального напряжения для дна, с учетом введенных обозначений, могут быть записаны следующим образом:

$$\tau_x = \rho C_p(|\vec{V}|)u|\vec{V}|, \quad \tau_y = \rho C_p(|\vec{V}|)\nu|\vec{V}|.$$

Рассмотренная ниже аппроксимация позволяет на основании измеренных пульсаций вектора скорости рассчитывать коэффициент вертикального турбулентного перемешивания, неоднородный по глубине:

$$\nu = X_x^2 \Delta^2 \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial z}\right)^2},$$

где $\bar{U}$, $\bar{V}$ — пульсации горизонтальных компонент скорости осредненные по времени, Δ — характерный шаг сетки, C_x — безразмерная эмпирическая константа, значение которой может быть определено на основе расчета процесса затухания однородной изотропной турбулентности.

5. Метод решения сеточных уравнений

Сеточные уравнения, полученные в результате конечно-разностных аппроксимаций, можно записать в матричном виде [19]:

$$Ax = f, \tag{19}$$

где A — линейный, положительно определенный оператор ($A > 0$). Для нахождения решения задачи (19) будем использовать неявный итерационный процесс [11]:

$$B \frac{x^{m+1} - x^m}{\tau_{m+1}} + Ax^m = f. \tag{20}$$

В уравнении (20) m — номер итерации, $\tau > 0$ — итерационный параметр, B — некоторый обратимый оператор, который называется предобуславливателем или стабилизатором. Обращение оператора B в (20) должно быть существенно проще, чем непосредственное обращение исходного оператора A в (19). При построении B исходили из аддитивного представления оператора A_0 — симметричной части оператора A :

$$A_0 = R_1 + R_2, \quad R_1 = R_2^*, \tag{21}$$

где $A = A_0 + A_1$, $A_0 = A_0^*$, $A_1 = -A_1^*$.

Оператор-предобуславливатель запишется в следующем виде:

$$B = (D + \omega R_1)D^{-1}(D + \omega R_2), \quad D = D^* > 0, \quad \omega > 0, \quad (22)$$

где D — некоторый оператор.

Соотношения (21)–(22) задают модифицированный попеременно-треугольный метод (МПТМ) решения задачи, если определены операторы R_1 , R_2 и указаны способы определения параметров τ_{m+1} и оператора D . Алгоритм адаптивного модифицированного попеременно-треугольного метода минимальных поправок для расчета сеточных уравнений с несамосопряженным оператором имеет следующий вид (см. [5, 10, 12, 23]):

$$r^m = Ax^m - f, \quad B(\omega_m)w^m, \quad \bar{\omega}_m = \sqrt{\frac{(Dw^m, w^m)}{(D^{-1}R_2w^m, R_2w^m)}}, \quad (23)$$

$$s_m^2 = 1 - \frac{(A_0w^m, w^m)^2}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)(Bw^m, w^m)},$$

$$k_m = \frac{(B^{-1}A_1w^m, A_1w^m)}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)}, \quad \theta_m = \frac{1 - \sqrt{\frac{s_m^2 k_m}{(1+k_m)}}}{1 + k_m(1 - s_m^2)},$$

$$\tau_{m+1} = \theta_m \frac{(A_0w^m, w^m)}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)},$$

$$x^{m+1} = x^m - \tau_{m+1}w^m, \quad \omega_{m+1} = \bar{\omega}_m,$$

где r^m — вектор невязки, w^m — вектор поправки, в качестве оператора D используется диагональная часть оператора A .

Оценка скорости сходимости разработанного метода имеет вид

$$\rho \leq \frac{v^* - 1}{v^* + 1}, \quad v^* = v(\sqrt{1+k} + \sqrt{k})^2, \quad k = \frac{(B^{-1}A_1w^m, A_1w^m)}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)},$$

где v — число обусловленности оператора C_0 , $C_0 = B^{-1/2}A_0B^{-1/2}$.

6. Параллельный вариант метода решения сеточных уравнений

Идея параллельного алгоритма метода решения сеточных уравнений заключается в следующем [10]. После разбиения исходной расчетной области на части по двум координатным направлениям каж-

дый процессор получает свою расчетную область, как показано на рис. 3, при этом смежные области перекрываются двумя слоями узлов по направлению, перпендикулярному плоскости разбиения.

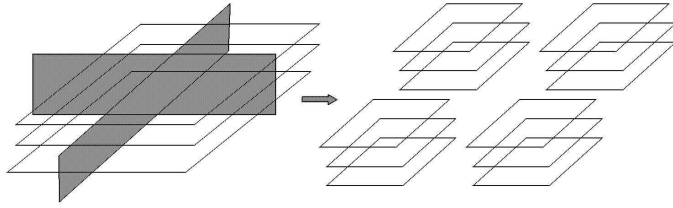


Рис. 3. Декомпозиция области.

После того как каждый процессор получит информацию для своей части области, рассчитывается вектор невязки и его равномерная норма. Затем каждый процессор определяет максимальный по модулю элемент вектора невязки и передает его значение всем оставшимся вычислителям. Теперь для вычисления равномерной нормы вектора невязки достаточно на каждом процессоре найти максимальный элемент.

Рассмотрим параллельный алгоритм расчета вектора поправки:

$$(D + \omega_m R_1)D^{-1}(D + \omega_m R_2)w^m = Dy^m.$$

где R_1 — ниже-треугольная матрица, а R_2 — выше-треугольная матрица. Для вычисления вектора поправки нужно последовательно решить два уравнения:

$$(D + \omega_m R_1)y^m = r^m, \quad (D + \omega_m R_2)w^m = Dy^m.$$

Вначале вычисляется вектор y^m , при этом расчет начинается в левом нижнем углу. Затем из правого верхнего угла начинается вычисление вектора поправки w^m . Схема расчета вектора y^m изображена на рис. 4. (Показана передача элементов после расчета двух слоев первым процессором.)

На первом шаге вычислений первый процессор обрабатывает верхний слой. Затем осуществляется передача перекрывающихся элементов смежным процессорам. На следующем шаге первый процессор обрабатывает второй слой, а его соседи — первый. Передача

элементов после расчета двух слоев первым процессором показана на рис. 4.

В схеме для расчета вектора y^m только первый процессор не требует дополнительной информации и может независимо от других процессоров вести обработку своей части области, остальные процессоры ждут результатов от предыдущего процессора, пока он не передаст вычисленные значения сеточных функций, для узлов сетки, располагающихся в предшествующих позициях данной строки. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут рассчитаны все слои.

Аналогичным образом можно решить СЛАУ с верхне-треугольной матрицей для расчета вектора поправки. Далее вычисляются скалярные произведения (23) и выполняется переход на следующий итерационный слой.

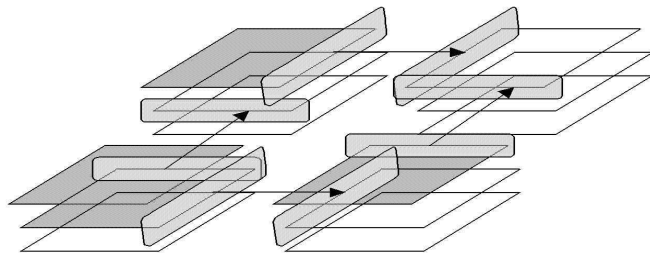


Рис. 4. Схема для расчета вектора y^m .

Алгоритм адаптивного попеременно-треугольного метода реализован многопроцессорной вычислительной системой (МВС) РОЦ НИТ ЮФУ. Пиковая производительность МВС составляет 18.8 TFlops. МВС включает в себя 8 компьютерных стоек. Вычислительное поле МВС построено на базе инфраструктуры HP BladeSystem c-class с интегрированными коммуникационными модулями, системами электропитания и охлаждения. В качестве вычислительных узлов используется 128 однотипных 16-ядерных Blade-серверов HP ProLiant BL685c, каждый из которых оснащен четырьмя 4-ядерными процессорами AMD Opteron 8356 2.3GHz и оперативной памятью в объеме 32ГБ. Общее количество вычислительных ядер в комплексе — 2048, суммарный объем оперативной памяти — 4 ТБ.

Результаты расчета ускорения и эффективности в зависимости от количества процессоров для параллельного варианта адаптивного попеременно-треугольного метода приведены в таблице 1.

Таблица 1

Зависимость ускорения и эффективности
от количества процессоров

Количество процессоров	Время, с	Ускорение	Эффективность
1	7,490639	1	1
2	4,151767	1,804	0,902
4	2,549591	2,938	0,734
8	1,450203	5,165	0,646
16	0,882420	8,489	0,531
32	0,458085	16,351	0,511
64	0,265781	28,192	0,44
128	0,171535	43,668	0,341

7. Численные эксперименты по осаждению взвеси и переформированию дна с использованием трехмерной модели гидродинамики

В качестве примера практического использования проблемно-ориентированного комплекса программ решается задача переформирования донной поверхности в результате осаждения взвеси на дне, а затем переноса осажденного материала по дну. В качестве исследуемого объекта рассматривался выделенный участок водного объекта в виде параллелепипеда длиной 5,0 км, шириной 5,0 км, глубиной 3,0 м. Средняя скорость течения составляла 1 м/с, размеры расчетной сетки $100 \times 100 \times 20$.

На рис. 5, 6 представлены результаты численного моделирования распределения концентрации взвешенного вещества. На рис. 5 — расчетный интервал 50 ч, на рис. 6 — расчетный интервал 150 ч.

На рис. 7, 8 представлены значения глубины и переформирования донной поверхности в расчетном интервале 50 ч, 150 ч соответственно.

Результаты эксперимента позволяют проанализировать динамику изменения геометрии дна, образования структур и наносов, переноса взвесей в акватории. Данная математическая модель и разработанный проблемно-ориентированный комплекс программ позволяют

предсказать появление морских гряд и кос, их рост и трансформацию, прогнозировать изменение поля концентрации в случае выброса от источника, прогнозировать заиливание подходных судоходных каналов, заносимость гидротехнических конструкций и сооружений.

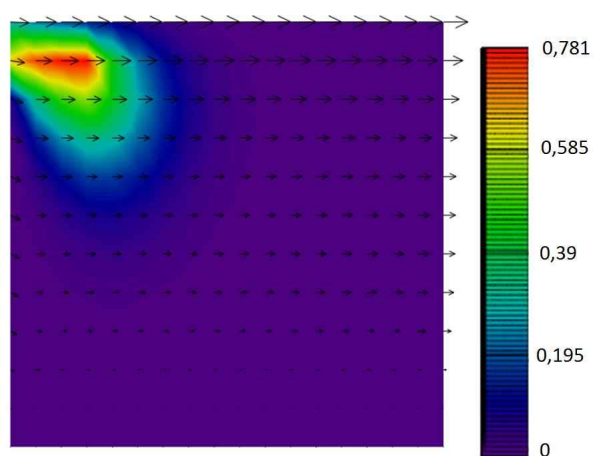


Рис. 5. Поле концентрации взвешенных частиц.

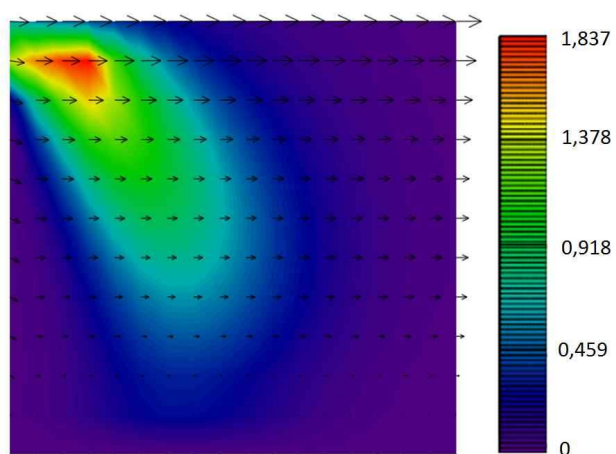


Рис. 6. Поле концентрации взвешенных частиц.

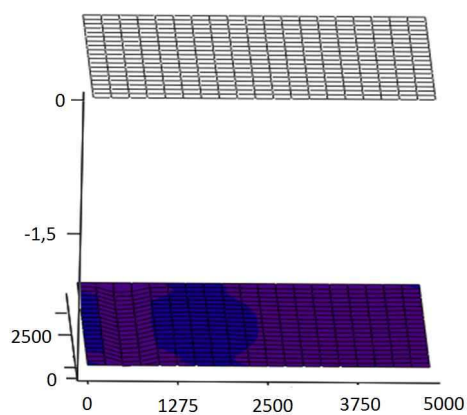


Рис. 7. Значение глубины в расчетном интервале 50 ч.

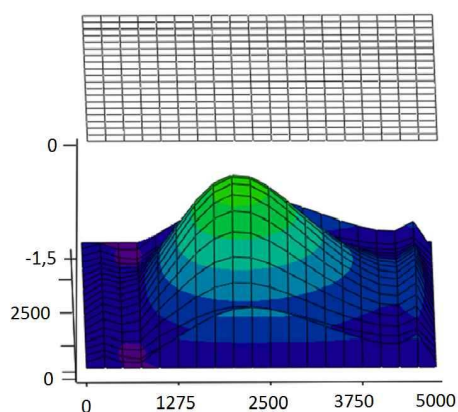


Рис. 8. Значение глубины в расчетном интервале 150 ч.

8. Пример практического использования комплекса программ для расчета переформирования донной поверхности при дноуглубительных работах

На основе разработанного комплекса для МВС был выполнен расчет ущерба рыбному хозяйству за период ремонтного черпания Подходного судоходного канала к причалам Архангельского терминала. Дноуглубительные работы на подходном канале выполняются самоотвозным землесосом типа ЗС-ТР 1300/2-2162, на акватории

причалов терминала — грейферным земснарядом (плавкран). Производительность оборудования по грунту составляет: грейферный земснаряд — $122,4 \text{ м}^3/\text{ч}$, самоотвозный землесос — $778 \text{ м}^3/\text{ч}$.

Самоотвозный землесос типа ЗС-ТР1300/2-2162: объем трюма при разработке песков — 1000 м^3 ; норма загрузки грунтового трюма — 741 м^3 , продолжительность сброса грунта на подводном отвале — $0,1 \text{ ч}$. Грейферный земснаряд: отвозка грунта на подводный отвал осуществляется двумя грунтоотвозными шаландами типа ШС-ТР500/2-442 с емкостью грунтового трюма 500 м^3 ; норма загрузки грунтового трюма разработанным грунтом составляет 455 м^3 .

Производилось моделирование распространения взвешенных частиц при выгрузке трюма самоотвозного землесоса в отвал.

Исходными данными являются: глубина водоема — 10 м ; объем загрузки — 741 м^3 ; скорость течения — $0,2 \text{ м/с}$; скорость оседания — $2,042 \text{ мм/с}$; плотность грунта — 1600 кг/м^3 ; процентное содержание пылеватых частиц (d меньше $0,05 \text{ мм}$) в песчаных грунтах — $26,83\%$.

Параметры расчетной области: длина — 3 км ; ширина — $1,4 \text{ км}$; шаг по горизонтальной пространственной координате — 20 м ; шаг по вертикальной пространственной координате — 1 м ; расчетный интервал — 2 ч .

На рис. 9 приведен результат расчета профиля горизонтальной составляющей вектора скорости движения водной среды.

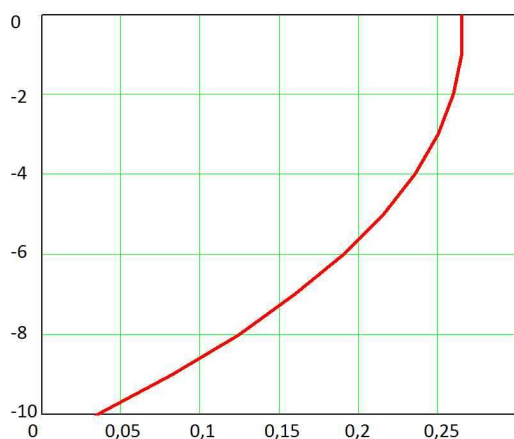


Рис. 9. Профиль вектора скорости движения водной среды.

На рис. 10 приведены зависимости от времени (ч) объемов воды (млн. м³) с содержанием взвешенных частиц (1 — более 100 мг/л, 2 — более 20 мг/л, 3 — более 0,75 мг/л).

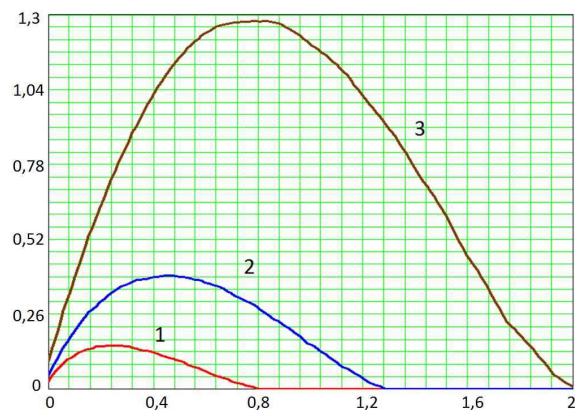


Рис. 10. Зависимости от времени объемов воды (млн. м³) с содержанием взвешенных частиц: 1 — более 100 мг/л, 2 — более 20 мг/л, 3 — более 0,75 мг/л.

На рис. 11 приведена функция рельефа дна после осаждения взвешенных частиц, образованных при выгрузке трюма самоотвозного землесоса. Палитрой показана глубина участка.

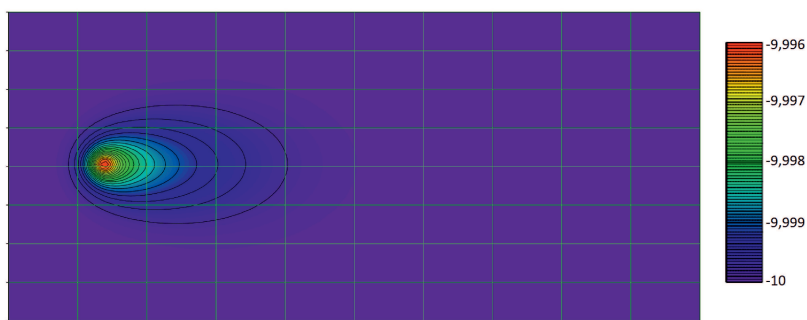


Рис. 11. Функция рельефа дна после осаждения взвешенных частиц, образованных при выгрузке трюма самоотвозного землесоса.

Результаты эксперимента позволяют проанализировать динамику изменения геометрии дна, образования структур и наносов, переноса взвесей в акватории, а также уровень загрязнения вод.

9. Заключение

Построена двумерная математическая модель транспорта наносов в мелководных водоемах, удовлетворяющая основным законам сохранения. Модель учитывает две пространственные переменные и следующие физические параметры и процессы: пористость грунта, критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов, турбулентный обмен, динамически изменяемую геометрию дна и функцию возвышения уровня, ветровые течения и трение о дно. Описаны программные комплексы и результаты их применения, использующие модели транспорта наносов в прибрежных водных системах, для расчета скорости движения водной среды использованы двумерная и трехмерная модели гидродинамики.

Рассмотренные модели и разработанный проблемно-ориентированный комплекс программ для МВС применимы для количественного прогноза процессов переформирования рельефа дна, береговой линии, переноса загрязнений и экологических изменений в прибрежных акваториях и могут быть полезны при строительстве и эксплуатации гидротехнических сооружений, создании проектов защиты берегов, обеспечении экологической безопасности и рекреационного режима пляжей.

Литература

1. *Ezer T., Mellor G. L.* Sensitivity studies with the North Atlantic sigma coordinate Princeton Ocean Model // *Dynamics of Atmospheres and Oceans.*—2000.—Vol. 32.—P. 155–208.
2. *Васильев В. С., Сухинов А. И.* Прецизионные двумерные модели мелких водоемов // *Мат. моделирование.*—2003.—Т. 15, № 10.—С. 17–34.
3. *Дегтярева Е. Е., Проценко Е. А., Чистяков А. Е.* Программная реализация трехмерной математической модели транспорта взвеси в мелководных акваториях // *Инженерный вестн. Дона.*—2012.—Т. 23.—С. 30.
4. *Дегтярева Е. Е., Чистяков А. Е.* Моделирование транспорта наносов по данным экспериментальных исследований в Азовском море // *Изв. ЮФУ. Технические науки.*—2012.—Т. 127, № 2.—С. 112–118.
5. *Коновалов А. Н.* К теории попеременно-треугольного итерационного метода // *Сиб. мат. журн.*—2002.—Т. 43, № 3.—С. 552–572.
6. *Леонтьев И. О.* Прибрежная динамика: волны, течения, потоки наносов.—М.: Геос, 2001.—272 с.
7. *Проценко Е. А.* Модель и алгоритмы решения задачи о транспорте наносов // *Изв. ЮФУ. Технические науки.*—2009.—Т. 97, № 8.—С. 71–75.

8. Проценко Е. А. Двумерная конечно-разностная модель формирования наносов в прибрежной зоне водоема и ее программная реализация // Инженерный вестн. Дона.—2010.—Т. 13, № 3.—С. 23–31.
9. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.—М.: Мир, 1980.—612 с.
10. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М.: Наука, 1989.—432 с.
11. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.—М.: Наука, 1978.—592 с.
12. Сухинов А. И. Двумерные схемы расщепления и некоторые их приложения.—М.: МАКС Пресс, 2005.—408 с.
13. Сухинов А. И. Прецизионные модели гидродинамики и опыт применения в предсказании и реконструкции чрезвычайных ситуаций в Азовском море // Изв. ТРГУ.—2006.—Т. 58, № 3.—С. 228–235.
14. Сухинов А. И., Никитина А. В. Математическое моделирование и экспедиционные исследования качества вод в Азовском море // Изв. ЮФУ. Технические науки.—2011.—Т. 121, № 8.—С. 62–73.
15. Сухинов А. И., Никитина А. В., Чистяков А. Е., Семенов И. С. Математическое моделирование условий формирования заморов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование.—2013.—Т. 14.—С. 103–112.
16. Сухинов А. И., Тимофеева Е. Ф., Чистяков А. Е. Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Изв. ЮФУ. Технические науки.—2011.—Т. 121, № 8.—С. 22–32.
17. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Алексеенко Е. В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Мат. моделирование.—2011.—Т. 23, № 3.—С. 3–21.
18. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Бондаренко Ю. С. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Изв. ЮФУ. Технические науки.—2011.—Т. 121, № 8.—С. 6–13.
19. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А. Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов // Изв. ЮФУ. Технические науки.—2011.—Т. 121, № 8.—С. 32–44.
20. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А. Двумерная гидродинамическая модель, учитывающая динамическое перестроение геометрии дна мелководных водоемов // Изв. ЮФУ. Технические науки.—2011.—Т. 121, № 8.—С. 159–167.
21. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Тимофеева Е. Ф., Шишени А. В. Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Мат. моделирование.—2012.—Т. 24, № 8.—С. 32–44.
22. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Фоменко Н. А. Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек // Изв. ЮФУ. Технические науки.—2013.—Т. 141, № 4.—С. 87–98.
23. Чистяков А. Е. Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Изв. ЮФУ. Технические науки.—2010.—Т. 106, № 6.—С. 237–249.
24. Чистяков А. Е. Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Изв. ЮФУ. Технические науки.—2010.—Т. 107, № 6.—С. 66–77.

25. Якушев Е. В., Сухинов А. И. Комплексные океанологические исследования Азовского моря в 28-м рейсе научно-исследовательского судна «Аква-навт» // Океанология.—2003.—Т. 43, № 1.—С. 44–53.

SEDIMENT TRANSPORT MATHEMATICAL MODELING IN A COASTAL ZONE USING MULTIPROCESSOR COMPUTING SYSTEMS

A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, E. A. Protsenko

A nonstationary two-dimensional model of sediment transport in a coastal zone of reservoirs is considered. The following physical parameters and processes are taken into account: the soil porosity; the critical value of the tangent tension for which the sediment movement begins; the turbulent exchange; the dynamically variable geometry of the bottom and the level elevation function; wind currents; and the friction on the bottom. Two-dimensional and three-dimensional models of hydrodynamics in a coastal zone of reservoirs as well as a transport model for weighted particles are constructed and are implemented on a distributed computing cluster. A number of numerical results are discussed.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ¹

В. Г. Цибулин²

При дискретизации нелинейных задач гидродинамики важно обеспечить наследование свойств дифференциальных операторов в конечномерных аналогах исходных уравнений [9]. Такие миметические (mimic — подражать) схемы позволяют успешнее моделировать стационарные и нестационарные конвективные движения, анализировать устойчивость течений, их бифуркации, неединственность режимов.

Особым является класс задач фильтрационной конвекции с законом трения Дарси, для которых обнаружено ответвление непрерывного семейства стационарных режимов от состояния механического равновесия [7]. Этот нетривиальный переход был объяснен с помощью теории косимметрии векторных полей [11]. Свойства семейств стационарных решений для задачи фильтрационной конвекции теплопроводной жидкости изучались в ряде работ [2–6, 8, 10, 12].

Для аппроксимации уравнений в естественных переменных используют конечно-разностные схемы с вычислением компонент скорости, температуры в узлах смещенных сеток. В [3] показано, что метод конечных разностей для плоской задачи фильтрационной конвекции позволяет получить конечномерные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые сохраняют свойство косимметрии исходной задачи.

С использованием миметической схемы проведен анализ сосуществования двумерных конвективных движений в контейнере прямоугольного сечения, заполненном вязкой несжимаемой теплопроводной жидкостью. Определены области устойчивости стационарных режимов в зависимости от параметра удлиненности контейнера и изучены переходы при изменении управляющих параметров для стационарных движений с различным числом конвективных валов.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-00470.

²Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

1. Уравнения фильтрационной конвекции многокомпонентной жидкости

В [12] выведены уравнения конвекции многокомпонентной жидкости на основе модели Дарси. При отсутствии массовых сил и внутренних источников тепла для конечного числа примесей (S) эти уравнения в безразмерных переменных можно записать в виде

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p - \vec{v} + \sum_{r=1}^{S+1} \lambda_r \theta^r \vec{k}, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$b_r \frac{\partial \theta^r}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta^r = \kappa_r \Delta \theta^r + \vec{v} \cdot \vec{k}.$$

Здесь $\vec{v}(x, y, z, t)$ — векторное поле скорости, $p(x, y, z, t)$ — давление, $\theta^1(x, y, z, t)$ — температура жидкости, отсчитываемая от среднего значения, $\theta^r(x, y, z, t)$ ($r = 2, \dots, S+1$) — отклонения массовых концентраций примесей от средних уровней, (x, y, z) — точка области D , занятой жидкостью, t — время, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ — орт, противоположный направлению силы тяжести.

Рассматриваемая задача имеет следующий набор безразмерных параметров: пористость ε , кинетические коэффициенты b_r , числа Прандтля κ_r , фильтрационные параметры Рэлея λ_r , $r > 1$.

Для плоских движений ($v_3 = 0$, $\partial_z(\dots) = 0$) уравнения конвекции могут быть записаны через функцию тока ψ , которая вводится соотношениями $v_1 = \partial_y \psi$, $v_2 = -\partial_x \psi$. В случае теплопроводной жидкости без примесей уравнения записываются следующим образом:

$$\theta_t = \Delta \theta + \lambda \partial_x \psi - J(\theta, \psi) \equiv F, \quad 0 = \Delta \psi - \partial_x \theta \equiv G. \quad (2)$$

Здесь $J(\theta, \psi)$ — функция Якоби:

$$J(\theta, \psi) = \partial_x \theta \partial_y \psi - \partial_y \theta \partial_x \psi. \quad (3)$$

Уравнения (2) получены в предположении несущественности учета инерции движения. Далее рассматривается конвекция в односвязной области D , на границе которой ставятся краевые условия для температуры и функции тока:

$$\theta|_{\partial D} = 0, \quad \psi|_{\partial D} = 0. \quad (4)$$

Начальные условия задаются только для температуры $\theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y)$, а функция тока во всей области D находится по начальному распределению температуры θ_0 из задачи Дирихле.

Косимметрией системы (2)–(4) будет векторное поле $(\psi, -\theta)$, ортогональное правой части системы (2),

$$\int_{\mathcal{D}} (F\psi - G\theta) dx dy = 0. \quad (5)$$

В том, что интегральное тождество (5) справедливо, можно убедиться непосредственной подстановкой выражений F и G из (2), интегрированием по частям и учетом краевых условий (4). При этом устанавливаются также следующие тождества для функции Якоби

$$\int_{\mathcal{D}} J(\psi, \theta) \psi dx dy = 0, \quad (6)$$

$$\int_{\mathcal{D}} J(\psi, \theta) \theta dx dy = 0. \quad (7)$$

2. Разностные уравнения плоской задачи фильтрационной конвекции

Для сохранения в разностных уравнениях свойства косимметрии использована схема Аракавы [1], обеспечившая сохранение разностных аналогов интегральных тождеств (6)–(7).

Для прямоугольника $\mathcal{D} = [0, a] \times [0, b]$ конечно-разностная аппроксимация строится на равномерной сетке $\{(x_n, y_m) \mid x_n = nh_1, n = 0, \dots, N+1, y_m = mh_2, m = 0, \dots, M+1\}$. Здесь $h_1 = a/N$, $h_2 = b/M$ — шаги сетки по x и y соответственно, температура θ и функция тока ψ вычисляются в узлах (x_n, y_m) .

На двухточечном шаблоне вводятся разностные операторы первых производных и вычисления среднего, охватывающие случаи целых и полуцелых n и m ,

$$\begin{aligned} (\delta_x f)_{n+1/2, m} &= \frac{f_{n+1, m} - f_{n, m}}{x_{n+1} - x_n}, \\ (\delta_y f)_{n, m+1/2} &= \frac{f_{n, m+1} - f_{n, m}}{y_{m+1} - y_m}, \\ (\delta_{0x} f)_{n+1/2, m} &= \frac{f_{n+1, m} + f_{n, m}}{2}, \\ (\delta_{0y} f)_{n, m+1/2} &= \frac{f_{n, m+1} + f_{n, m}}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

С использованием (8) задаются первые разностные производные на трехточечном шаблоне и дискретный аналог лапласиана

$$D_x = \delta_x \delta_{0x}, \quad D_y = \delta_y \delta_{0y}, \quad \Delta_h = \delta_x \delta_x + \delta_y \delta_y.$$

Для вычисления среднего и первых производных в четырехугольнике применяются следующие композиции разностных операторов:

$$d_0 = \delta_{0x} \delta_{0y} \equiv \delta_{0y} \delta_{0x}, \quad d_x = \delta_x \delta_{0y} \equiv \delta_{0y} \delta_x, \quad d_y = \delta_y \delta_{0x} \equiv \delta_{0x} \delta_y.$$

Для аппроксимации якобиана используется формула

$$J_{n,m}(\theta, \psi) = \beta [D_x (\theta D_y \psi) - D_y (\theta D_x \psi)]_{n,m} + \\ + (1 - \beta) [d_x (d_0 \theta d_y \psi) - d_y (d_0 \theta d_x \psi)]_{n,m},$$

которая сохраняет свойство косимметрии для всех значений параметра β и при $\beta = 1/3$ обеспечивает дополнительно сохранение условия гироскопичности для разностного аналога.

В результате получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений: $\dot{\theta}_{nm} = F_{nm} \equiv (\Delta_h \theta + \lambda D_x \psi - J)_{nm}$, $0 = G_{n,m} \equiv (\Delta_h \psi - D_x \theta)_{n,m}$.

Конечно-разностный аналог условия косимметрии (5) имеет вид

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (F\psi - G\theta)_{nm} = 0. \quad (9)$$

Справедливость тождества (9) устанавливается с использованием дискретных версий формулы Грина и суммирования по частям. При этом выполняются дискретные варианты тождеств (5)–(7)

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M J_{nm}(\theta, \psi) \psi_{nm} = 0, \quad \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M J_{nm}(\theta, \psi) \theta_{nm} = 0.$$

3. Аппроксимации уравнений в естественных переменных

Для исследования трехмерных задач фильтрационной конвекции в [2, 8] развиты аппроксимации с применением смещенных (разнесенных) сеток. В случае теплопроводной жидкости для дискретизации вводятся узлы пяти типов: для температуры θ , давления p и каждой

компоненты вектора скорости v . Чтобы обеспечить отсутствие конвективных членов в разностном аналоге уравнения тепловой энергии, используется следующая аппроксимация

$$\begin{aligned}
(\vec{v} \cdot \nabla \theta^r)_{i,j,k} &\approx J(\theta^r, v)_{i,j,k} = \\
&= \frac{1}{3} \left[\sum_{s=1}^3 d_s \delta_s \left(\theta^r \prod_{\substack{n=1, \\ s \neq n}}^3 \delta_n v^s \right) \right]_{i,j,k} + \\
&+ \frac{2}{3} \left[\sum_{s=1}^3 d_s \prod_{\substack{n=1, \\ s \neq n}}^3 \delta_n (\delta_0 \theta^r \delta_s v^s) \right]_{i,j,k}
\end{aligned} \tag{10}$$

Формула (10) применялась для расчета трехмерной конвекции теплопроводной жидкости в [2, 8], где были вычислены однопараметрические семейства плоских стационарных движений, отвечающие косимметрии задачи. Для плоской задачи из (10) следует формула, из которой после введения сеточной функции тока получается аппроксимация Аракавы.

4. Естественная конвекция в прямоугольнике

В приближении Обербека — Буссинеска двумерные уравнения конвекции в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\vec{V}_t + (\vec{V}, \nabla) \vec{V} &= -\nabla p + \Delta \vec{V} - \vec{g} Gr T, \\
T_t + (\vec{V}, \nabla) T &= \frac{1}{Pr} \Delta T, \quad \text{div } \vec{V} = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $\vec{V} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ — вектор скорости, p — давление, T — температура, t — время, $\vec{g} = (g_1, g_2)$ — вектор, задающий направление силы тяжести. В уравнения входят безразмерные параметры Прандтля Pr и Грасгофа Gr , через которые определяется число Рэлея $Ra = Gr Pr$. Рассматривается прямоугольный контейнер $D = \{x \in [0, L], y \in [0, 1]\}$ с твердыми стенками, заполненный вязкой несжимаемой теплопроводной жидкостью, на границе области задано линейное распределение температуры $T|_{\partial D} = 1 - y$.

Задача решалась численно в естественных переменных методом конечных разностей, для дискретизации по пространственным переменным применялись смещенные сетки. В расчетах использовалась

дискретизация с ячейками, близкими к квадратным, т. е. вычисления проводились на сетках размера $[Lm] \times m$, где m — число внутренних узлов по координате y . Приемлемая точность расчета самих движений и пороговых значений числа Рэлея Ra достигалась при $m \approx 30$.

Для классификации рассчитанных конвективных движений используются следующие обозначения: S_k и P_k — соответственно для стационарного и автоколебательного решения с k основными валами (ячейками), S_0 — состояние механического равновесия $\vec{V} = 0$, $T = 1 - y$. Основным далее называется вал, касающийся одновременно двух противоположных стенок контейнера. Обозначение S_k используется для стационарного состояния с вращением крайнего левого вала по часовой стрелке, а S_k^* — для режима с вращением левого вала против часовой стрелки.

5. Области устойчивости стационарных режимов

Расчеты конвективных режимов проведены для прямоугольников длины $1 \leq L \leq 4$ при числах Рэлея $0 < Ra < 10^6$ и числах Прандтля $Pr = 1, 3, 10$. Получены стационарные решения с числом валов от одного до одиннадцати. Для квадратной области реализуются стационарные движения S_1 и S_2 , с ростом L число режимов увеличивается, и при $L = 4$ для $Pr = 1$ существуют диапазоны чисел Рэлея Ra , для которых устойчивы режимы S_k , $k = 3, \dots, 7$, а для $Pr = 10$ — S_k , $k = 3, \dots, 11$.

На рис. 1 представлена карта областей устойчивости стационарных режимов, рассчитанных для $Pr = 1$. На плоскости параметров Ra и L номерами k обозначены кривые, отвечающие границам устойчивости стационарных режимов S_k и S_k^* (для стационарных решений с одинаковым числом основных валов области устойчивости совпадают). При переходе параметра Рэлея Ra через нижнюю границу области устойчивости стационарных режимов реализуется режим теплопередачи S_0 , а в результате перехода Ra через верхнюю границу реализуется один из автоколебательных режимов P_k .

Для рассмотренных значений удлиненности контейнера ($1 < L < 4$) получено, что число Прандтля заметно влияет на количество существующих стационарных режимов и форму их областей устойчивости. С уменьшением числа Прандтля правые границы области устойчивости стационарного режима смещаются в сторону боль-

ших L и вырастает запас устойчивости по числу Ra . В то же время, области устойчивости режимов с различным числом валов имеют сходные черты.

Из рис. 1 видно, что для каждого стационарного режима S_k с увеличением L кривая верхней границы области устойчивости возрастает до максимума, который примерно одинаков для всех режимов. Затем следует понижение, но правая граница достигается при достаточно высоких значениях числа Рэлея. Кривая нижней границы вначале идет вниз, далее следует почти прямолинейный участок, а затем происходит ее резкое повышение после пересечения с нижней границей устойчивости режима S_{k+1} . Для каждого состояния S_k имеется длина контейнера L , при которой диапазон устойчивости по числу Рэлея максимален. Соответствующее отношение L/k при $Pr = 1$ не превосходит 1,6 и понижается с ростом k .

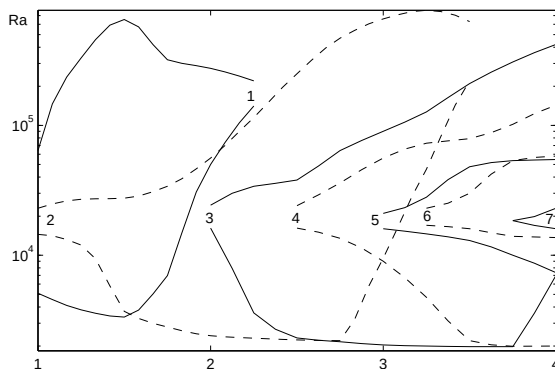


Рис. 1. Области устойчивости стационарных режимов, $Pr = 1$.

При увеличении числа Прандтля области устойчивости имеют более сложный вид, а их левые части для режимов S_k ($k > 5$) напоминают «рукава». Эти режимы существуют в контейнерах с длиной меньше той, что была определена в качестве правой границы при $Pr = 1$, и при этом мал диапазон значений Ra , при которых данный режим устойчив.

Стационарные движения с одинаковым числом основных валов не остаются полностью идентичными при изменении параметров L и Ra . Для одного и того же стационарного состояния наблюдаются значительные вариации в пропорциях валов.

На рис. 2 представлены распределения температуры и линий тока режима S_4 для области с $L = 3,75$, вычисленные при различных числах Рэлея.

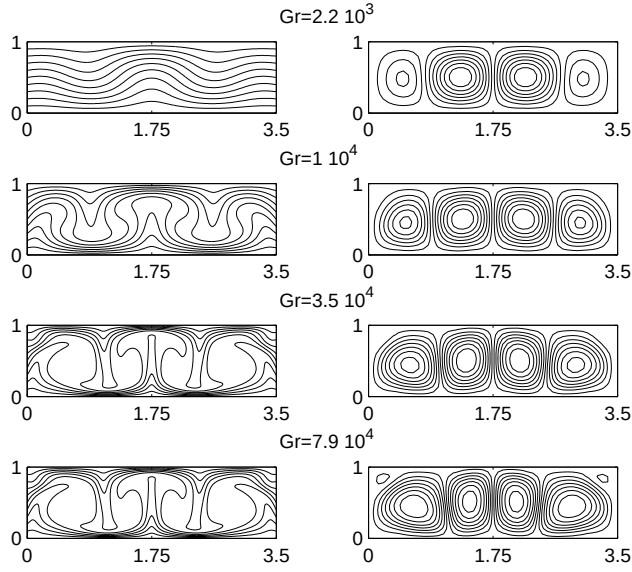


Рис. 2. Изотермы и линии тока стационарного режима S_4 , $L = 3,75$, $Pr = 1$.

6. Сосуществование стационарных режимов и переходы

С увеличением длины контейнера L растет число сосуществующих устойчивых стационарных решений, характеризующихся различным числом основных валов. Для контейнера длины L количество устойчивых стационарных режимов при $Pr = 10$ больше, чем при $Pr = 1$, а число сосуществующих режимов — меньше. Например, для $L = 2$ и $Pr = 1$ имеются диапазоны чисел Рэлея, при которых одновременно устойчивы режимы S_1 и S_2 , S_2 и S_3 . Для $Pr = 1$ и $L = 3$ есть интервал чисел Ra , при которых наблюдаются четыре стационарных решения S_k , $k = 2, \dots, 5$, при $L = 4$ одновременно могут существовать пять решений, а при $L = 5$ — целых шесть. С ростом числа Прандтля Pr число устойчивых стационарных состоя-

ний, которые могут быть получены в контейнере заданной длины, увеличивается; так, при $Pr = 10$ и $L = 4$ обнаружено девять стационарных движений с различным числом основных валов: от трех до одиннадцати.

При изменении параметра Ra , выводящем стационарный режим S_k из области устойчивости, наблюдается переходной процесс, в результате которого реализуется другой стационарный или автоколебательный режим. При уменьшении Ra (пересечение нижней границы устойчивости) устанавливаются только стационарные состояния, в частности, это может быть механическое равновесие S_0 (режим теплопередачи). При переходе через верхнюю границу устойчивости в зависимости от длины контейнера реализуется либо автоколебательный режим с тем же числом валов, либо стационарный режим с меньшим числом валов.

Для $Pr = 1$ в таблице 1 представлены данные о переходах стационарных решений S_k , $k = 1, \dots, 9$, при пересечении параметром Ra нижней и верхней границ области устойчивости. В зависимости от типа формирующихся режимов нижняя граница устойчивости стационарного решения S_k разбивается на несколько участков по L . При числе валов $k = 2, 3$ возможны три типа переходов: $S_k \rightarrow S_{k-1}$ (левый участок), $S_k \rightarrow S_0$ (центральный участок) и $S_k \rightarrow S_{k+1}$ (правый участок). С ростом числа сосуществующих устойчивых решений возрастает число возможных трансформаций для стационарных режимов. При выходе параметра Ra за нижнюю границу устойчивости для достаточно малых значений длины L режим S_k , $k > 3$, переходит в S_{k-2} и формируется конвективный режим с числом валов той же четности. Затем при увеличении L наблюдается следующий порядок реализующихся режимов: S_{k-1} , S_0 , S_{k+1} .

Таблица 1

Режимы, реализующиеся при переходе Ra через нижнюю/верхнюю границы области устойчивости решения S_k , $Pr = 1$

$S_k \backslash L$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
S_1	S_0/P_1^*	S_0/P_1	S_2/P_1	–	–	–	–
S_2	S_1/S_1	S_1/P_2^*	S_0/P_2^*	S_0/P_2	S_3/P_2	S_3/P_2	–
S_3	–	–	S_2/S_2	S_2/P_3^*	S_0/P_3	S_0/P_3	S_4/P_3
S_4	–	–	–	S_2/S_2	S_3/S_2	S_0/P_4	S_0/P_4
S_5	–	–	–	–	S_3/P_5	S_3/S_3	S_4/P_5
S_6	–	–	–	–	–	S_4/S_4	S_4/P_6
S_7	–	–	–	–	–	–	S_5/S_5

Верхняя граница устойчивости режима S_k , $k = 2, 3$, может быть разбита на три участка: при малых значениях L стационар S_k преобразуется в режим S_{k-1} , для центрального участка наблюдается переход к автоколебательному режиму P_k^* , основанному на периодических трансформациях $S_k \rightarrow S_k^* \rightarrow S_k$, а при больших значениях L формируется нестационарный режим P_k , для которого характерны колебания вертикальных осей валов влево-вправо и не меняется направление вращения валов. Состояния S_k , $k > 3$, трансформировались либо в стационарные движения с числом валов той же четности S_{k-2} , либо в автоколебательный режим P_k .

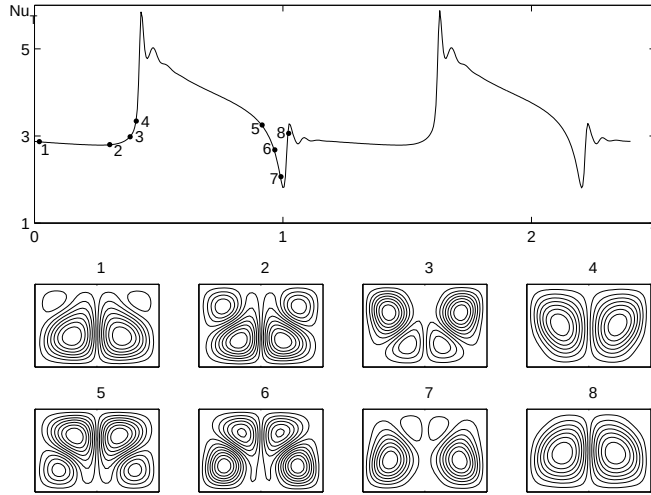


Рис. 3. Автоколебательный режим P_2 : график зависимости от времени числа Нуссельта на верхней стенке и линии тока; $L = 1, 5$, $Gr = 31 \cdot 10^3$, $Pr = 1$.

Стационарные состояния с малым числом валов переходят в автоколебательные режимы, основанные на переворотах валов. На рис. 3 представлен автоколебательный режим P_2 при $Pr = 1$, $L = 1, 5$ и $Ra = 3,1 \cdot 10^4$. Приведены график зависимости от времени числа Нуссельта на верхней границе $N_T(t) = \int_0^L T_y(x, 1, t) dx$, и линии тока для состояний в моменты времени, отмеченные на графике $N_T(t)$. Видно, что движение является симметричным относительно центрального вертикального сечения. Динамика этого режима носит релаксационный характер: достаточно долго основное движение состоит из двух

валов, а в верхней части контейнера медленно нарастают угловые вихри. Затем следует быстрый переход к состоянию, напоминающему S_2^* , после чего происходит медленная трансформация основных валов с нарастанием угловых вихрей в нижней части контейнера.

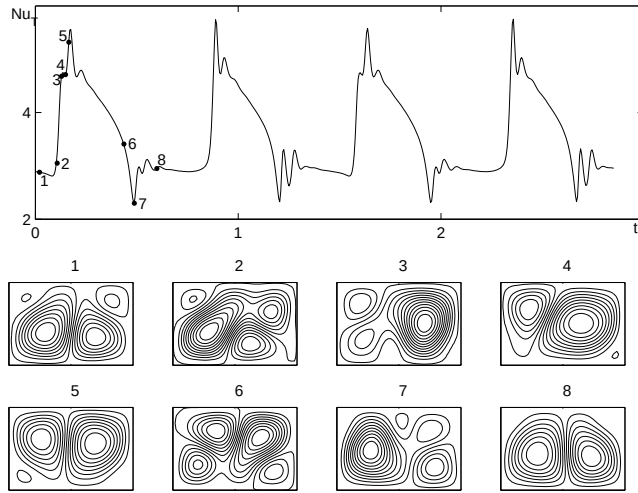


Рис. 4. Автоколебательный режим P_2^* : график зависимости от времени числа Нуссельта на верхней стенке и линии тока; $L = 1, 5$, $Gr = 35 \cdot 10^3$, $Pr = 1$.

При увеличении числа Рэлея Ra симметричный периодический режим теряет устойчивость и возникает режим с несимметричными переходами между практически симметричными состояниями, напоминающими движения S_2 и S_2^* . На рис. 4 приведен график зависимости от времени числа Нуссельта на верхней стенке и даны распределения линий тока данного режима в моменты времени, отмеченные на графике $N_T(t)$. Видно, что в результате «удвоения» цикла за тот же временной промежуток происходит четыре переворота. С ростом числа Рэлея период колебаний данного режима уменьшается. Здесь также реализуется сосуществование режимов: стационарные состояния S_1 и S_1^* устойчивы при тех же значениях Ra и L , для которых вычислены автоколебательные режимы.

Автор глубоко признателен ЮМИ за поддержку, а коллегам С. О. Соболеву и А. Д. Немцеву — за помощь.

Литература

1. Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow. Part 1 // J. Comput. Physics.—1966.—Vol. 1.—P. 119–143.
2. Karasözen B., Nemtsev A. D., Tsybulin V. G. Staggered grids for three-dimensional convection of a multicomponent fluid in a porous medium // Computers and Mathematics with Applications.—2012.—Vol. 64.—P. 1740–1751.
3. Karasözen B., Tsybulin V. G. Finite-difference approximation and cosymmetry conservation in filtration convection problem // Physics Letters A.—1999.—Vol. 262.—P. 321–329.
4. Karasözen B., Trofimova A. V., Tsybulin V. G. Natural convection in porous annular domains: mimetic scheme and family of steady states // J. Comp. Phys.—2012.—Vol. 231.—P. 2995–3005.
5. Говорухин В. Н. Численное исследование потери устойчивости вторичными стационарными режимами в задаче плоской конвекции Дарси // Докл. РАН.—1998.—Т. 363, № 6.—С. 772–774.
6. Кантур О. Ю., Цибулин В. Г. Расчет семейств стационарных режимов фильтрационной конвекции в узком контейнере // Прикладная механика и техническая физика.—2003.—Т. 44, № 2.—С. 92–100.
7. Любимов Д. В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ.—1975.—№ 2.—С. 131–137.
8. Немцев А. Д., Цибулин В. Г. Численное исследование первого перехода в трехмерной задаче фильтрационной конвекции // Изв. РАН. Механика жидкости и газа.—2007.—№ 4.—С. 144–150.
9. Полежаев В. И., Бунэ А. В., Вerezub H. A. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье — Стокса.— М.: Наука, 1987.—271 с.
10. Трофимова А. В., Цибулин В. Г. Фильтрационная конвекция в кольцевой области и ответвление семейства стационарных режимов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа.—2014.—№ 4.—С. 73–83.
11. Юдович В. И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки.—1991.—Т. 49, № 5.—С. 142–148.
12. Юдович В. И. Косимметрия и конвекция многокомпонентной жидкости в пористой среде // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Мат. моделирование.—2001.—С. 174–178.

NUMERICAL MODELING OF CONVECTIVE FLOWS

V. G. Tsybulin

Two themes are considered: preservation of cosymmetry for computational schemes and scenario of transition in natural convection. The brief review of corresponding author's results is given.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ¹

А. Б. Шабат²

1. Введение

Рассматривается задача о восстановлении потенциала $U(x, k)$ обобщенного уравнения Шредингера $\psi_{xx} = U\psi$ по вронскианам «функций Йоста». Вронскианы в спектральной задаче зависят только от k , а коэффициенты $U(x, k)$ — только от x . Переход к новой независимой переменной k аналогичен, в определенной мере, преобразованию Фурье, и задача рассеяния сводится к изучению свойств, играющих роль интегралов Фурье, мультипликативных интегралов, определяющих вронскианы.

В одномерной теории рассеяния краевые условия задаются на $\pm\infty$, и возникающие здесь варианты различного поведения решений можно проиллюстрировать следующим примером из хорошего (не облегченного) учебника [6]:

$$\psi'' = (p(x) + q(x))\psi, \quad \int_{x_0}^{\infty} |q(x)| dx < \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} |p'(x)| dx < \infty. \quad (1)$$

Второе из этих условий означает, что $p(x)$ имеет предел p^+ при $x \rightarrow \infty$. Предположив для определенности $p^+ > 0$, можно найти пару решений

$$\psi^{\pm}(x) \approx \exp \left[\pm \int_{x_0}^x \sqrt{p(s)} ds \right], \quad (2)$$

которые образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Одно из этих решений растёт, а другое стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$, и строятся они как решения двух разных интегральных уравнений. Функцию $q(x)$ в главном члене асимптотики можно игнорировать.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-12460-ОФИ-М-2013.

²Россия, Черногловка, Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН.

В работе [9] рассматривалась задача о функциях Йоста уравнения Шредингера с дельтаобразными потенциалами:

$$\psi_{xx} = (k^2 + q(x))\psi, \quad q(x) = \sum \gamma_j \delta(x - x_j). \quad (3)$$

При $k = 0$ условия на скачок производных $\psi' = \psi_x$ в точках $x = x_j$, $j \in \mathbb{Z}$, непрерывного в этих точках решения $\psi(x)$ уравнения (3) дают

$$f_j = \lim_{x \rightarrow x_j+0} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}, \quad f_{j+1} = \gamma_{j+1} + \frac{f_j}{1 + f_j \Delta_j}, \quad \Delta_j = x_{j+1} - x_j. \quad (4)$$

В общем случае при $k \neq 0$ имеем

$$\psi(x, k) = a_j e^{kx} + b_j e^{-kx}, \quad (a, b)_j = (a, b)_{j-1} S_j(k). \quad (5)$$

Явный вид этих матриц $S_j(k)$ приведен ниже в доказательстве леммы, где используются сокращенные обозначения: $x_{ij} = x_i - x_j$ ($x_j < x < x_{j+1}$), $\hat{\gamma}_j = \gamma_j/2k$.

Лемма 1. Пусть матрица $S(k) = S(k; n)$ является упорядоченным произведением n элементарных матриц рассеяния $S_j(k)$. Тогда функция $kS(k)$ является целой и ее значение в нуле определяется формулой

$$\lim_{k \rightarrow 0} 2k \prod_{j=1}^n S_j(k) = \alpha(n) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha(n) = \sum \gamma_j + \sum_{i < j} \gamma_i \gamma_j x_{ji} + \sum_{i < j < l} \gamma_i \gamma_j \gamma_l x_{ji} x_{lj} + \dots$$

◁ Доказательство проводится индукцией по числу n сомножителей в формуле

$$S(k; n) = \prod_{j=1}^n \begin{pmatrix} 1 + \hat{\gamma}_j & -e_j \hat{\gamma}_j \\ \bar{e}_j \hat{\gamma}_j & 1 - \hat{\gamma}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(n, k) & b(n, k) \\ b(n, -k) & a(n, -k) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{cases} e_j = \exp(2kx_j), \\ \bar{e}_j = \exp(-2kx_j), \end{cases}$$

из которой получаем, опуская для краткости зависимость от k , что

$$S(n) = S(n-1) \begin{pmatrix} 1 + \hat{\gamma}_n & -e_n \hat{\gamma}_n \\ \bar{e}_n \hat{\gamma}_n & 1 - \hat{\gamma}_n \end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a(n) = (1 + \hat{\gamma}_n)a(n-1) + \hat{\gamma}_n \bar{e}_n b(n-1), \\ b(n) = -\hat{\gamma}_n e_n a(n-1) + (1 - \hat{\gamma}_n)b(n-1). \end{cases} \quad (7)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 2k \begin{cases} a(n-1, k) = \alpha + 2k\alpha_0 + \dots \\ b(n-1, k) = -\alpha + 2k\beta_0 + \dots \end{cases} &\rightarrow \\ 2k \begin{cases} a(n, k) = \alpha(1 + \gamma_n x_n) + \gamma_n(\alpha_0 + \beta_0) + \dots \\ b(n, k) = -\alpha(1 + \gamma_n x_n) - \gamma_n(\alpha_0 + \beta_0) + \dots \end{cases} \end{aligned}$$

и, независимо от конкретных значений α_0, β_0 , сумма $a(n, k) + b(n, k)$ остается регулярной в точке $k = 0$. $\triangleright$

Таким образом, в случае общего положения $S(k; n)$ имеет в нуле полюс и условие его отсутствия записывается в виде уравнения $\alpha_n = 0$. При $n = 3$

$$a(3, k) + b(3, k)\bar{e}_3 = 1 + \hat{\gamma}_1 E_{13} + \hat{\gamma}_2 E_{23} + \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 E_{12} E_{23}, \quad (8)$$

$$a(3, k) = 1 + \sum_j \hat{\gamma}_j + \sum_{i < j} \hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_j E_{ij} + \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 E_{12} E_{23}, \quad (9)$$

где $E_{ij} = 1 - e^{2k(x_i - x_j)}$. Аналогичная (4) проективная форма рекуррентных соотношений является следствием (7) и записывается в терминах отношений $c(n) = \bar{e}_n b(n)/a(n)$ следующим образом:

$$\left(c(n) + 1 - \frac{2k}{\gamma_n}\right) \left(c(n-1)e^{2k(x_n - x_{n-1})} + 1 + \frac{2k}{\gamma_n}\right) + \frac{4k^2}{\gamma_n^2} = 0. \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полученные выше формулы применимы и к задачам с периодическими коэффициентами. Например, в случае (4), обезразмерив периодическое решение и полагая $x_j = j$, мы получаем

$$\frac{1}{f(x)} = \beta + x - j - \frac{1}{2}, \quad \beta^2 = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{4}, \quad j \leq x \leq j+1.$$

Спектр соответствующего уравнения Шредингера рассматривался в книге [3, с. 323].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для уравнения (3) с вещественным потенциалом в виде конечной суммы δ -функций число собственных значений конечно и, в силу осцилляционных теорем Штурма, совпадает с числом перемен знака в последовательности $\varphi(x_j)$, где решение $\varphi(x)$

(см. [9]) отвечает нулевому значению $k = 0$ в уравнении (3). Формула (лемма 1) $\varphi(x_4) = 1 + \gamma_1 x_{41} + \gamma_2 x_{42} + \gamma_3 x_{43} + \gamma_1 \gamma_2 x_{21} x_{42} + \dots + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 x_{21} x_{32} x_{43}$ демонстрирует структуру элементов этой последовательности $\varphi(x_j)$ в общем случае.

2. Квазиклассика

Для уравнения Шредингера с финитным потенциалом

$$L\psi = \lambda\psi \leftrightarrow \psi_{xx} = (q(x) + k^2)\psi, \quad \lambda \equiv -k^2, \quad (11)$$

в качестве функций Йоста выбираются решения $\psi^\pm(x, k)$ с асимптотикой $e^{\pm kx}$ (см. (2)) на соответствующей бесконечности. В рассматриваемом нами случае (3), обозначив $a(k) = a(n, k)$, $n \gg 1$, и $b(k) = b(n, k)$, $n \gg 1$, мы получаем (см. доказанную выше лемму), что

$$\psi^+(x, k) = \begin{cases} e^{kx}, & x < -h \ (h \gg 0), \\ a(k)e^{kx} + b(k)e^{-kx}, & x > h, \end{cases}$$

$$\psi^-(x, k) = \begin{cases} e^{-kx}, & x > h \ (h \gg 0), \\ -b(-k)e^{kx} + a(k)e^{-kx}, & x < -h. \end{cases}$$

Вронскиан этих функций Йоста

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} fg' - f'g \Rightarrow \langle \psi^+, \psi^- \rangle = -2ka(k), \quad (12)$$

как показано в работе [9] (см. также [4]), является целой функцией экспоненциального типа, обладающей следующей асимптотикой в правой полуплоскости спектрального параметра:

$$a(k) \approx \prod_{j=1}^N \left(1 + \frac{\gamma_j}{2k}\right), \quad \operatorname{Re} k > 0, \quad |k| \gg 1. \quad (13)$$

Таким образом [9], для восстановления коэффициентов $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ в формуле для потенциала

$$u(x) = \sum_{j=1}^N \gamma_j \delta(x - x_j), \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < x_N \quad (14)$$

достаточно, в силу (13), найти коэффициенты асимптотического разложения вронскиана $ka(k)$ при $k \rightarrow +\infty$. Дополнительную информацию о носителе потенциала можно извлечь из аналогичных (13)

асимптотических разложений для нормированных на экспоненту коэффициентов $b(k) \equiv b(N, k)$:

$$-e^{-2kx_N} b(k) \approx \gamma_N \prod_{j=1}^{N-1} \left(1 + \frac{\gamma_j}{2k}\right), \quad k \rightarrow +\infty,$$

$$-e^{-2kx_1} b(k) \approx \gamma_1 \prod_{j=2}^N \left(1 - \frac{\gamma_j}{2k}\right), \quad k \rightarrow -\infty.$$

Все остальные параметры потенциала (14), т. е. расстояния между узлами, можно извлечь из формулы (см. лемму 1)

$$\alpha(n) = \sum \gamma_j + \sum_{i < j} \gamma_i \gamma_j x_{ji} + \sum_{i < j < l} \gamma_i \gamma_j \gamma_l x_{ji} x_{lj} + \dots \quad (15)$$

В общем случае $\alpha(n+1)$ представляет собой многочлен от $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, и при $\gamma_n = 0$ многочлен $\alpha(n+1)$ переходит в многочлен $\alpha(n)$ от $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ и т. д. Таким образом, используя рекуррентные формулы леммы 1, мы получаем следующее утверждение об эффективном способе решения обратной задачи рассеяния.

Теорема 2. В классе δ -образных потенциалов (14) в квазиклассическом приближении вронскиан функций Ёоста является многочленом степени $N+1$ по обратным степеням параметра k , нули которого совпадают с параметрами γ_j , $j = 1, \dots, N$, потенциала.

Нули $k = k_j$ вронскиана (12), расположенные в правой полуплоскости, отвечают собственным значениям уравнения (11). Соответствующие собственные функции пропорциональны функциям Ёоста $\psi^\pm(x, k_j)$ и стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Дополнительный спектр, играющий важную роль в обратной задаче, образуют зависящие от x как от параметра нули $k = K_j(x)$ произведения функций Ёоста [9]:

$$\begin{aligned} A(x, k) &= \psi^-(x, k) \psi^+(x, k), \quad \operatorname{Re} k > 0; \\ A(x, k) &\rightarrow a(k), \quad |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (16)$$

Переход от линейного уравнения второго порядка $\psi'' = U\psi$ к уравнению третьего порядка

$$A_{xxx} = 4U A_x + 2U_x A, \quad (17)$$

для «произведений» предоставляет дополнительные возможности в теории рассеяния. Можно проверить, что при $\operatorname{Re} k > 0$, $a(k) \neq 0$

решение краевой задачи (16) для уравнению третьего порядка (17) вполне определяется выбором $a(k)$. При $U(x, k) = k^2 + q(x)$ особый интерес представляет специальное решение уравнения (17) в виде формального ряда по обратным степеням $\lambda = -k^2$:

$$A(x, k) \sim 1 + \frac{1}{2\lambda}q(x) + \frac{1}{8\lambda^2}(3q^2 - q_{xx})(x) + \dots \quad (18)$$

Этот формальный ряд является производящей функцией бесконечного набора «высших» симметрий спектральной задачи (11).

3. Обобщения

Функции Йоста более общего вида (2) возникают в акустической задаче рассеяния:

$$c^2(x)\psi_{xx} = k^2\psi, \quad c(x) \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (19)$$

Предполагая «скорость» $c(x)$ кусочно-постоянной с разрывами в точках $x = x_j$, найдем формулы, описывающие для уравнения (19) переход с отрезка $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ на соседние отрезки. Пусть $c(x) = c_j$, $x \in I_j$. Представив решение $\psi = \psi(x, k)$ на отрезке I_j в виде линейной комбинации экспонент

$$\psi = a_j e^{k_j x} + b_j e^{-k_j x}, \quad x_j < x < x_{j+1}, \quad k_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k}{c_j}, \quad (20)$$

и обозначив $\vec{\psi}_j = [a_j e^{k_j x_j}, b_j e^{-k_j x_j}]$, аналогично (5) находим

$$\vec{\psi}_j E_j = \vec{\psi}_{j-1} E_{j-1} S_j, \quad E_j = \begin{pmatrix} e^{y_j} & 0 \\ 0 & e^{-y_j} \end{pmatrix}, \quad y_j = k_j(x_{j+1} - x_j). \quad (21)$$

Таким образом, для акустической задачи элементарные матрицы рассеяния $S_j(k)$ (см. лемму 1) имеют следующий вид:

$$S_j = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_j & \bar{b}_j & \beta_j & \bar{a}_j \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} a_j = (1 + \alpha_j)e^{y_j}, & \bar{a}_j = a_j e^{-2y_j}, \\ b_j = (1 - \alpha_j)e^{y_j}, & \bar{b}_j = b_j e^{-2y_j}, \end{cases} \quad (22)$$

где $\alpha_j = c_j/c_{j-1}$. Обозначив через $\alpha(n) = 2^{-n} \prod (1 + \alpha_j) \exp \sum y_j$, мы получаем легко обобщаемые явные выражения для элементов рассматриваемого матричного произведения:

$$a(2) = \alpha(2) \left(1 + \frac{\bar{b}_1 b_2}{a_1 a_2} \right), \quad b(2) = \alpha(2) \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{\bar{a}_1 b_2}{a_1 a_2} \right),$$

$$\begin{aligned}
a(3) &= \alpha(3) \left(1 + \frac{\bar{b}_1 b_2}{a_1 a_2} + \frac{\bar{b}_2 b_3}{a_2 a_3} + \frac{\bar{b}_1 \bar{a}_2 b_3}{a_1 a_2 a_3} \right), \\
b(3) &= \alpha(3) \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{\bar{a}_1 b_2}{a_1 a_2} + \frac{\bar{a}_1 \bar{a}_2 b_3}{a_1 a_2 a_3} + \frac{b_1 \bar{b}_2 b_3}{a_1 a_2 a_3} \right), \\
a(4) &= \alpha(4) \left(1 + \frac{\bar{b}_1 b_2}{a_1 a_2} + \frac{\bar{b}_2 b_3}{a_2 a_3} + \frac{\bar{b}_3 b_4}{a_3 a_4} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\bar{b}_1 \bar{a}_2 b_3}{a_1 a_2 a_3} + \frac{\bar{b}_2 \bar{a}_3 b_4}{a_2 a_3 a_4} + \frac{\bar{b}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 b_4}{a_1 a_2 a_3 a_4} + \frac{\bar{b}_1 b_2 \bar{b}_3 b_4}{a_1 a_2 a_3 a_4} \right).
\end{aligned}$$

Вообще, коэффициенты $a_j = a_j(n)$ в этих формулах содержат только четные мономы от b/a , а коэффициенты $b_j = b_j(n)$ — только нечетные. Нули $a(n) = a_j(n)$, $j \gg 1$, дают собственные значения акустической задачи рассеяния с разрывами в точках $x = x_1 < x_2 < \dots < x_n$. В частности, при $n = 2$

$$a(2) = 0 \leftrightarrow \exp(2y_2 - 2y_1) + \frac{1 - \alpha_1}{1 + \alpha_1} \frac{1 - \alpha_2}{1 + \alpha_2} = 0.$$

Рассмотрим связь акустической задачи рассеяния с известной спектральной задачей

$$\frac{d}{dx} \Psi = W(x, k) \Psi, \quad W(x, k) = \sigma k + V(x) = \begin{pmatrix} k & u(x) \\ v(x) & -k \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где Ψ — вектор-функция с компонентами ψ^1 и ψ^2 , а $\sigma = \text{diag}(1, -1)$. Отметим, что решения системы уравнений первого порядка (23) можно умножать на экспоненты, так как $\psi^1 = \tilde{\psi}^1 e^{x\alpha}$, $\psi^2 = \tilde{\psi}^2 e^{x\beta} \rightarrow \tilde{u}(x) = u(x) e^{(\beta - \alpha)x}$, $\tilde{u}(x) \tilde{v}(x) = u(x) v(x)$. Таким образом, уравнения не меняют своего вида при этой замене $\Psi \rightarrow \tilde{\Psi}$ и все сводится к сдвигу спектрального параметра $k = \tilde{k} + \alpha$ при $\alpha + \beta = 0$. Исходная формула (2) теории рассеяния, в соответствии с учебником [6], принимает теперь следующий вид:

$$\Psi^\pm(x) \approx E^\pm(x) \exp \left[\pm \int_{x_0}^x \mu(s) ds \right], \quad \mu^2(x) = k^2 + u(x) v(x). \quad (24)$$

При этом предполагается, что $\int_{x_0}^\infty |V'(x)| dx < \infty$ и что в пределе $x \rightarrow \infty$ собственные значения матрицы $W(\infty, k)$ являются простыми.

Ограничимся здесь случаем $k = 0$. В этом случае указанная выше формула для собственных значений $\pm\mu(x)$ матрицы $W(x, k)$ упрощается и обозначаем: $\alpha^2 = uv$. Важно отметить, что даже для комплексной функции $V(x)$ переменная $\alpha(x) = \sqrt{u(x)v(x)}$ редуцируется к вещественнозначной при выполнении условия

$$u = \pm \bar{v} \rightarrow \alpha^2 = uv = \pm |v|^2, \quad (25)$$

заменяющего условие вещественности потенциала для уравнения Штурма — Лиувилля (11).

Для приведения $W(x, 0) = V(x)$ к диагональному виду мы будем использовать следующую формулу:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ h & h \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} h & 1 \\ -h & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{\alpha}{h}, \\ v = \alpha h. \end{cases} \quad (26)$$

Найдем элементарные матрицы рассеяния для кусочно-постоянного потенциала:

$$V(x) = V_j = \begin{pmatrix} 0 & u_j \\ v_j & 0 \end{pmatrix}, \quad x_j < x < x_{j+1}, \quad (27)$$

используя α^2 и h вместо uv и v соответственно. Например, в случае с двумя точками разрыва при $x = x_1, x_2$ в этих обозначениях получаем

$$h(x) = \begin{cases} h_0, & x < x_1, \\ h_1, & x \in [x_1, x_2], \\ h_2, & x > x_2, \end{cases} \quad v(x) = \begin{cases} \alpha_0 h_0, \\ \alpha_1 h_1, \\ \alpha_2 h_2, \end{cases} \quad u(x) = \begin{cases} \alpha_0/h_0, \\ \alpha_1/h_1, \\ \alpha_2/h_2. \end{cases} \quad (28)$$

Считая заданным матричное решение $\Psi_0(x)$ при $x < x_1$, найдем матричные решение $\Psi_n = \Psi_n(x)$ на отрезках $x \in [x_n, x_{n+1}]$, используя условия склейки этих решений $\Psi_j(x) = \Psi_{j-1}(x)$ в точках $x = x_j$. Записав $\Psi_j(x)$ в виде, аналогичном (20), получаем

$$\Psi_j(x) = H_j E_j(x) C_j, \quad (29)$$

$$E_j(x) = e^{x\alpha_j\sigma} = \begin{pmatrix} e^{x\alpha_j} & 0 \\ 0 & e^{-x\alpha_j} \end{pmatrix}, \quad H_j = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ h_j & h_j \end{pmatrix}.$$

Условие $\Psi_1(x) = \Psi_0(x) = H_0 E_0(x) C$ при $x = x_1$ дает

$$E_1(x_1) C_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \beta & \beta - 1 \\ \beta - 1 & 1 + \beta \end{pmatrix} E_0(x_1) C_0, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h_0}{h_1}. \quad (30)$$

Перепишав следующие условия склейки в виде

$$E_j(x_j)C_j|_{j=n+1} = H_{n+1}^{-1}H_n E_n(x_{n+1} - x_n)E_n(x_n)C_n,$$

получаем рекуррентные формулы для вычисления $\tilde{C}_n = E_n(x_n)C_n$:

$$E_j(x_j)C_j|_{j=n+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \beta_n)\gamma_n & \gamma_n^{-1}(\beta_n - 1) \\ \gamma_n(\beta_n - 1) & (1 + \beta_n)\gamma_n^{-1} \end{pmatrix} E_n(x_n)C_n, \quad (31)$$

где $\beta_n \stackrel{\text{def}}{=} h_n/h_{n+1}$, $\gamma_n = \exp \alpha_n(x_{n+1} - x_n)$.

ПРИМЕР. Поясним структуру приведенных выше общих формул на примере потенциала $V(x)$ с двумя точками разрыва (28). Полагая, не ограничивая общности $x_1 = 0$, $\alpha = \alpha_2 = 1$, и применяя формулы (30), (31), находим

$$E_2(x_2)C_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \beta_1)\gamma_1 & \gamma_1^{-1}(\beta_1 - 1) \\ \gamma_1(\beta_1 - 1) & (1 + \beta_1)\gamma_1^{-1} \end{pmatrix} C_1,$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \beta & \beta - 1 \\ \beta - 1 & 1 + \beta \end{pmatrix} C_0,$$

где

$$E_2(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{h_0}{h_1}, \quad \beta_1 = \frac{h_1}{h_2}, \quad \gamma_1 = \exp(\alpha_1 x_2).$$

Рекуррентные формулы (31) можно переписать следующим образом (см. (21)):

$$E_j(x_j)C_j|_{j=n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} a_n & \tilde{b}_n \\ b_n & \tilde{a}_n \end{pmatrix} E_1(x_1)C_1,$$

$$\begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m \gamma_m & \gamma_m^{-1} \delta_m \\ \gamma_m \delta_m & \sigma_m \gamma_m^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{m-1} \\ b_{m-1} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Здесь a_n и b_n (равно как и $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$) являются однородными многочленами степени n переменных $\gamma_j^\pm = \exp[\pm \alpha_j(x_{j+1} - x_j)]$, причем $\tilde{a}, \tilde{b}$ означает замену $\gamma_j^+ \leftrightarrow \gamma_j^-$ и введены переобозначения $\sigma_m = \beta_m + 1$, $\delta_m = \beta_m - 1$. В частности,

$$a_1 = \sigma_1 \gamma_1^+, \quad \tilde{a}_1 = \sigma_1 \gamma_1^-, \quad b_1 = \delta_1 \gamma_1^+, \quad \tilde{b}_1 = \delta_1 \gamma_1^-,$$

и в силу (32)

$$a_2 = \sigma_1 \sigma_2 \gamma_1^+ \gamma_2^+ + \delta_1 \delta_2 \gamma_1^+ \gamma_2^-, \quad b_2 = \sigma_1 \delta_2 \gamma_1^+ \gamma_2^+ + \delta_1 \sigma_2 \gamma_1^+ \gamma_2^-,$$

$$\tilde{a}_2 = \sigma_1 \sigma_2 \gamma_1^- \gamma_2^- + \delta_1 \delta_2 \gamma_1^- \gamma_2^+, \quad \tilde{b}_2 = \sigma_1 \delta_2 \gamma_1^- \gamma_2^- + \delta_1 \sigma_2 \gamma_1^- \gamma_2^+.$$

Сравнив эти формулы с аналогичными формулами (22) для акустической задачи рассеяния, мы обнаруживаем их совпадение с точностью до обозначений. Это интересное наблюдение приводит, например, к вопросу о спектральных характеристиках кусочно-постоянных потенциалов (27), соответствующих дискретному спектру акустической задачи.

Литература

1. Beals R., Sattinger D. H. Acoustic scattering and the extended KdV hierarchy // Adv. Math.—1998.—Vol. 140.—P. 190–206.
2. Адлер В. Э., Шабат А. Б. Одевающая цепочка акустической спектральной задачи // Теоретическая и мат. физика.—2006.—Т. 149, № 1.—С. 1324–1337.
3. Альбеверио С., Гестези Ф., Хёгг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике.—М.: Мир, 1991.—568 с.
4. Бадахов М. Ш., Веремеенко О. Ю., Шабат А. Б. Об асимптотике обобщенных собственных значений оператора Шредингера // Владикавказ. мат. журн.—2014.—Т. 16, вып. 4.—С. 9–15.
5. Захаров В. Е., Шабат А. Б. О взаимодействии солитонов в устойчивой среде // Журн. экспериментальной и теоретической физики.—1973.—Т. 64, № 5.—С. 1627–1639.
6. Коддингтон Э., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Мир, 1958.—475 с.
7. Шабат А. Б. Обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений // Функции. анализ и его прил.—1975.—Т. 9, № 3.—С. 75–78.
8. Шабат А. Б. Рациональная интерполяция и солитоны // Теоретическая и мат. физика.—2014.—Т. 179, № 3.—С. 303–316.
9. Шабат А. Б. Теория рассеяния для δ -образных потенциалов // Теоретическая и мат. физика.—2015.—Т. 183, № 1.—С. 105–119.

AN INTRODUCTION TO THE THEORY OF INVERSE SCATTERING PROBLEM

A. B. Shabat

A problem of reconstruction of the potential $U(x, k)$ of the generalized Schrödinger equation by wronskians of “Jost functions” is discussed.

BOOLEAN VALUED ANALYSIS¹

A. G. Kusraev²

The ascending-and-descending machinery based on the principles and functors of Boolean valued set theory is outlined, a general scheme of applying the method to problems of functional analysis is presented, and a list of problems solved by means of Boolean valued transfer principle is given.

1. Introduction. In 1963 P. Cohen discovered his *method of ‘forcing’* and also proved the independence of the Continuum Hypothesis. A comprehensive presentation of the Cohen forcing method gave rise to the *Boolean valued models of set theory*, which were first introduced by D. Scott and R. Solovay (see Scott [26]) and P. Vopěnka [32]. A systematic account of the theory of Boolean valued models and its applications to independence proofs can be found in [4, 27, 31]. A brief and nice overview see in [21].

D. Scott [26] forecasted in 1969: “We must ask whether there is any interest in these nonstandard models aside from the independence proof; that is do they have any mathematical interest? The answer must be yes, but we cannot yet give a really good arguments.”

The development of Boolean valued analysis started at the end of the seventies have shown that Scott was perfectly right (see [17, 18, 20]). The term *Boolean valued analysis*, coined by G. Takeuti (see [29]), signifies the technique of studying properties of an arbitrary mathematical object by means of comparison between its representations in two different set-theoretic models whose construction utilizes principally distinct Boolean algebras. As these models, the classical Cantorian paradise in the shape of the von Neumann universe $\mathbb{V}$ and a specially-trimmed Boolean valued universe $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ are usually taken. Comparative analysis is carried out by means of some interplay between $\mathbb{V}$ and $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Boolean valued analysis starts with the fact that each internal field of reals of a Boolean valued model descends into a universally complete vector lattice. This remarkable fact was discovered by E. Gordon in [6], see also [7]. In the same period, two important particular cases

¹This is a synopsis of the lectures given at the Conference of Young Scientists (Russia, Vladikavkaz, July 21–27, 2014).

²Russia, Vladikavkaz, Southern Mathematical Institute of Vladikavkaz Science Center of the Russian Academy of Sciences.

were independently studied by G. Takeuti, who observed that a vector lattice of (equivalence classes of) measurable function and a commutative algebra of (unbounded) self-adjoint operators in a Hilbert space can be considered as instances of Boolean valued reals [28, 29, 30].

2. The universe of Boolean valued sets. Throughout the sequel $\mathbb{B}$ is a complete Boolean algebra with the operations meet $\wedge$, join $\vee$, and complementation $(\cdot)^*$, with distinguished elements unit $\mathbb{1}$ and zero $\mathbb{0}$. Given $\alpha \in \text{On}$, put (with On standing for the class of all ordinals):

$$V_\alpha^{(\mathbb{B})} := \{x : x \text{ is a function,} \\ (\exists \beta \in \text{On})(\beta < \alpha, \text{ dom}(x) \subset V_\beta^{(\mathbb{B})}, \text{ im}(x) \subset \mathbb{B})\}.$$

After this recursive definition the *Boolean valued universe* $V^{(\mathbb{B})}$ or, in other words, the *class of $\mathbb{B}$ -sets* is introduced as

$$V^{(\mathbb{B})} := \bigcup_{\alpha \in \text{On}} V_\alpha^{(\mathbb{B})}.$$

In case of the two element Boolean algebra $\mathbb{2} := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ this procedure yields a version of the classical *von Neumann universe* V (cp. [18, Theorem 4.2.8]).

Let φ be an arbitrary formula of ZFC, Zermelo–Fraenkel set theory with choice. The *Boolean truth value* $\llbracket \varphi \rrbracket \in \mathbb{B}$ is introduced by induction on the complexity of φ by naturally interpreting the propositional connectives and quantifiers in the Boolean algebra $\mathbb{B}$ (for instance, $\llbracket \varphi_1 \vee \varphi_2 \rrbracket := \llbracket \varphi_1 \rrbracket \vee \llbracket \varphi_2 \rrbracket$ and $\llbracket \forall x \varphi(x) \rrbracket = \bigwedge \{\llbracket \varphi(u) \rrbracket : u \in V^{(\mathbb{B})}\}$) and taking into consideration the way in which a formula is built up from atomic formulas. The Boolean truth values of the *atomic formulas* $x \in y$ and $x = y$ (with $x, y \in V^{(\mathbb{B})}$) are defined by means of the following recursion schema:

$$\begin{aligned} \llbracket x \in y \rrbracket &= \bigvee_{t \in \text{dom}(y)} (y(t) \wedge \llbracket t = x \rrbracket), \\ \llbracket x = y \rrbracket &= \bigvee_{t \in \text{dom}(x)} (x(t) \Rightarrow \llbracket t \in y \rrbracket) \wedge \bigvee_{t \in \text{dom}(y)} (y(t) \Rightarrow \llbracket t \in x \rrbracket). \end{aligned}$$

The sign $\Rightarrow$ symbolizes the implication in $\mathbb{B}$; i. e., $(a \Rightarrow b) := (a^* \vee b)$.

Say that the *statement* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *is valid or the elements* $x_1, \dots, x_n$ *possess the property* φ *within (inside)* $V^{(\mathbb{B})}$ if $\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket = \mathbb{1}$. In this event, we write also $V^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$.

The universe $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ with the Boolean truth value mapping $\varphi \mapsto \llbracket \varphi \rrbracket$ is a model of set theory in the sense that the following statement is fulfilled:

Transfer Principle. *If $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ is a theorem of ZFC then*

$$(\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}) \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

is also a theorem of ZFC.

Maximum Principle. *Let $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ be a formula of ZFC. Then the following is provable in ZFC: for an arbitrary finite collection $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ there exists $x_0 \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ such that*

$$\llbracket (\exists x) \varphi(x) \rrbracket = \llbracket \varphi(x_0) \rrbracket.$$

3. Ascending and descending. As was mentioned above, a smooth mathematical toolkit for revealing interplay between the interpretations of one and the same fact in the two models $\mathbb{V}$ and $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ is needed. The relevant *ascending-and-descending technique* rests on the functors of *canonical embedding* (or *standard name*), *descent*, and *ascent*.

The standard name functor. Given $X \in \mathbb{V}$, we denote by $X^\wedge \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ the *standard name* of X . The standard name is an embedding of $\mathbb{V}$ into $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Moreover, the standard name sends $\mathbb{V}$ onto $\mathbb{V}^{(2)}$, i. e., $\mathbb{V} \simeq \mathbb{V}^{(2)} \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, where $2 := \{0, 1\} \subset \mathbb{B}$.

A formula is called *bounded* or *restricted* if each bound variables in it is restricted by a bounded quantifier, i. e., each of its quantifiers occurs in the form $(\forall x \in y)$ or $(\exists x \in y)$ for some y , or it can be proved equivalent in ZFC to a formula of this kind.

Restricted Transfer Principle. *For each bounded set-theoretic formula φ the following is provable in ZFC:*

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \iff \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge)$$

for each finite collection $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}$.

The descent functor. Given an arbitrary element X of the Boolean valued universe $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, we define the *descent* $X \downarrow$ of X as $X \downarrow := \{y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} : \llbracket y \in x \rrbracket = 1\}$. The class $X \downarrow$ is a set, i. e., $X \downarrow \in \mathbb{V}$ for all $X \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. If $\llbracket X \neq \emptyset \rrbracket = 1$ then $X \downarrow$ is nonempty.

Suppose that $X, Y, f \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ are such that $\llbracket f : X \rightarrow Y \rrbracket = 1$, i. e., f is a mapping from X into Y inside $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Then $f \downarrow$ is a unique mapping

from $X\downarrow$ into $Y\downarrow$, the descent of f , satisfying $\llbracket f\downarrow(x) = f(x) \rrbracket = 1$ for all $x \in X\downarrow$. The descent of a mapping is *extensional*:

$$\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \leq \llbracket f(x_1) = f(x_2) \rrbracket \quad (x_1, x_2 \in X\downarrow).$$

Assume that P is an n -ary relation on X inside $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$; i.e., $X, P \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ and $\llbracket P \subset X^{n\wedge} \rrbracket = 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Then there exists an n -ary relation P' on $X\downarrow$ such that

$$(x_1, \dots, x_n) \in P' \iff \llbracket (x_1, \dots, x_n)^B \in P \rrbracket = 1.$$

We denote the relation P' by $P\downarrow$ and call it the *descent* of P .

The ascent functor. Let $X \in \mathbb{V}$ and $X \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$; i.e., let X be some set composed of $\mathbb{B}$ -valued sets or, in other words, $X \in \mathcal{P}(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})})$. There exists a unique $X\uparrow \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ such that $\llbracket y \in X\uparrow \rrbracket = \bigvee \{ \llbracket x = y \rrbracket : x \in X \}$ for all $y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. The element $X\uparrow$ is called the *ascent* of X . Observe that the ascent extends the standard name in the sense that $Y^\wedge$ is the ascent of $\{y^\wedge : y \in Y\}$ whenever $Y \in \mathbb{V}$.

Let $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})})$, and $f : X \rightarrow Y$. There exists a unique function $f\uparrow$ from $X\uparrow$ to $Y\uparrow$ inside $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, the ascent of f , such that $f\uparrow(A\uparrow) = f(A)\uparrow$ is valid for every subset $A \subset X$ if and only if f is extensional.

4. Vector lattices. A *vector lattice* is a vector space over the reals that is equipped with a partial order $\leq$ for which the *supremum* $x \vee y$ and the *infimum* $x \wedge y$ exist for all vectors $x, y \in X$, and such that the positive cone $X_+ := \{x \in X : 0 \leq x\}$ is closed under addition and multiplication by non-negative real numbers.

A subset $U \subset X$ is called *order bounded* if U is contained in an *order interval* $[a, b] := \{x \in X : a \leq x \leq b\}$ for some $a, b \in X$. A vector lattice X is said to be *Dedekind complete* if every non-empty order bounded set in X has the least upper bound $\sup(U) \in X$ and the greatest lower bound $\inf(U) \in X$.

The *absolute value* is defined by $|x| := x \vee (-x)$. A *band* in a vector lattice X is a subset of the form $B := A^\perp := \{x \in X : (\forall a \in A) |x| \wedge |a| = 0\}$ for a nonempty $A \subset X$. Clearly, $B \cap B^\perp = \{0\}$. A band B in X which satisfies $X = B \oplus B^\perp$ is referred to as a *projection band*, while the associated projection (onto B parallel to $B^\perp$) is called a *band projection*. Let $\mathbb{B}(X)$ and $\mathbb{P}(X)$ stand respectively for the complete Boolean algebras of all bands and band projections in X . More details about vector lattices can be found in the books [2, 3, 22, 33, 34].

Most of the vector spaces that appear naturally in analysis (L^p , l^p , $C(K)$, c , c_0 , etc.) are vector lattices. The vector lattice $C([0, 1])$ is not Dedekind complete. Moreover, given a compact topological space K , the vector lattice $C(K)$ is Dedekind complete if and only if K is extremally disconnected. Consider two important examples.

EXAMPLE 1. Assume that a measure space (Ω, Σ, μ) is semi-finite, that is, if $A \in \Sigma$ and $\mu(A) = \infty$ then there exists $B \in \Sigma$ with $B \subset A$ and $0 < \mu(B) < \infty$. The vector lattice $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ (of μ -equivalence classes) of μ -measurable functions on Ω is Dedekind complete if and only if (Ω, Σ, μ) is localizable. In this event $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ is also Dedekind complete. (A measure space (Ω, Σ, μ) is *localizable* or *Maharam* if it is semi-finite and, for every $\mathcal{A} \subset \Sigma$, there exists a $B \in \Sigma$ such that (i) $A \setminus B$ is negligible for every $A \in \mathcal{A}$; (ii) if $C \in \Sigma$ and $A \setminus C$ is negligible for every $A \in \mathcal{A}$, then $B \setminus C$ is negligible, see [5, 241G].) Observe that $\mathbb{P}(L^0(\Omega, \Sigma, \mu)) \simeq \Sigma/\mu^{-1}(0)$.

EXAMPLE 2. Given a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$ of projections in a Hilbert space H , denote by $\mathfrak{S}(\mathbb{B})$ the space of all self-adjoint operators on H whose spectral decompositions are in $\mathbb{B}$, i. e. $A \in \mathfrak{S}(\mathbb{B})$ if and only if $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda$ and $E_\lambda \in \mathbb{B}$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$. For $A, B \in \mathfrak{S}(\mathbb{B})$ put $A \leq B$ if and only if $(Ax, x) \leq (Bx, x)$ for all $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$. Then $\mathfrak{S}(\mathbb{B})$ is a Dedekind complete vector lattice and $\mathbb{B} \simeq \mathbb{P}(\mathfrak{S}(\mathbb{B}))$, see [22] and [33].

5. Boolean valued reals. Recall the well-known assertion of ZFC: *There exists a field of reals that is unique up to isomorphism.* Denote by $\mathbb{R}$ the field of reals (in the sense of $\mathbb{V}$). Successively applying the transfer and maximum principles, we find an element $\mathcal{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ for which $\llbracket \mathcal{R} \text{ is a field of reals} \rrbracket = 1$. Moreover, if an arbitrary $\mathcal{R}' \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ satisfies the condition $\llbracket \mathcal{R}' \text{ is a field of reals} \rrbracket = 1$ then $\llbracket \text{the ordered fields } \mathcal{R} \text{ and } \mathcal{R}' \text{ are isomorphic} \rrbracket = 1$. In other words, there exists an internal field of reals $\mathcal{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ which is unique up to isomorphism. We call $\mathcal{R}$ the *internal reals* in $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Consider another well-known assertion of ZFC: *If $\mathbb{P}$ is an Archimedean ordered field then there is an isomorphic embedding h of the field $\mathbb{P}$ into $\mathbb{R}$ such that the image $h(\mathbb{P})$ is a subfield of $\mathbb{R}$ containing the subfield of rational numbers. In particular, $h(\mathbb{P})$ is dense in $\mathbb{R}$.*

Note also that $\varphi(\cdot)$, presenting the conjunction of the axioms of an Archimedean ordered field, is bounded; therefore, $\llbracket \varphi(\mathbb{R}^\wedge) \rrbracket = 1$ by the Restricted Transfer Principle, i. e., $\llbracket \mathbb{R}^\wedge \text{ is an Archimedean ordered field} \rrbracket = 1$. ‘Pulling’ the above assertion through the transfer principle,

we conclude that $\llbracket \mathbb{R}^\wedge \text{ is isomorphic to a dense subfield of } \mathcal{R} \rrbracket = 1$. We further assume that $\mathbb{R}^\wedge$ is a dense subfield of $\mathcal{R}$. It is easy to see that the elements $0^\wedge$ and $1^\wedge$ are the zero and unity of $\mathcal{R}$.

Look now at the descent $\mathbf{R} := \mathcal{R} \downarrow$ of the algebraic structure $\mathcal{R} := (\mathbf{R}, \oplus, \odot, \leq, 0, 1)$ within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. In other words, $\mathbf{R} := (\mathbf{R} \downarrow, \oplus \downarrow, \odot \downarrow, \leq \downarrow, 0, 1)$ is considered as the descent $\mathbf{R} \downarrow$ of the underlying set $\mathbf{R}$ together with the descended operations $\oplus \downarrow$ and $\odot \downarrow$ and order $\leq \downarrow$ of the structure $\mathcal{R}$. For simplicity, we will denote the operations and order relation in $\mathcal{R}$ and $\mathcal{R} \downarrow$ by the conventional symbols $+$, $\cdot$, and $\leq$.

The fundamental result of Boolean valued analysis is the Gordon Theorem which describes an interplay between $\mathbb{R}$, $\mathcal{R}$, and $\mathbf{R}$: *Each universally complete vector lattice is an interpretation of the reals in an appropriate Boolean valued model.*

Theorem (Gordon [6]). *Let $\mathbb{B}$ be a complete Boolean algebra, $\mathcal{R}$ be a field of reals in $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, and $\mathbf{R} = \mathcal{R} \downarrow$. Then the following hold:*

- (1) *The internal field $\mathcal{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ can be chosen so that*

$$\llbracket \mathbb{R}^\wedge \text{ is a dense subfield of the field } \mathcal{R} \rrbracket = 1.$$

- (2) *The algebraic structure $\mathbf{R}$ (with the descended operations and order) is an universally complete vector lattice.*

- (3) *There is a Boolean isomorphism χ from $\mathbb{B}$ onto $\mathbb{P}(\mathbf{R})$ such that*

$$\begin{aligned} \chi(b)x &= \chi(b)y \iff b \leq \llbracket x = y \rrbracket, \\ \chi(b)x &\leq \chi(b)y \iff b \leq \llbracket x \leq y \rrbracket \\ &\quad (x, y \in \mathbf{R}; b \in \mathbb{B}). \end{aligned}$$

There is a strong relationships between the properties of an internal field $\mathcal{R}$ and the corresponding external vector lattice $\mathbf{R}$. Clarify, as an illustration, the meaning of the least upper and greatest lower bounds in $\mathbf{R}$. For $\emptyset \neq A \subset \mathcal{R} \downarrow$ and all $a \in \mathbf{R}$ and $b \in \mathbb{B}$ the equivalences hold:

$$\begin{aligned} b \leq \llbracket a = \sup(A \uparrow) \rrbracket &\iff \chi(b)a = \sup \chi(b)(A); \\ b \leq \llbracket a = \inf(A \uparrow) \rrbracket &\iff \chi(b)a = \inf \chi(b)(A). \end{aligned}$$

6. Vector lattices within Boolean valued reals. The converse to Gordon Theorem is essentially true: An Archimedean vector lattice is representable as a vector sublattice of the internal reals $\mathcal{R}$ in an

appropriate Boolean valued universe considered as a vector lattice over the field of standard reals $\mathbb{R}^\wedge$.

Theorem (Kusraev [10]). *Let X be an Archimedean vector lattice, let $\mathcal{R}$ be the reals in the model $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, and let j be a Boolean isomorphism of $\mathbb{B}$ onto the Boolean algebra $\mathbb{B}(X)$. Then there exists an element $\mathcal{X}$ of the Boolean valued universe $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ satisfying the conditions:*

- (1) $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models$ “ $\mathcal{X}$ is a vector sublattice of the field $\mathcal{R}$ considered as a vector lattice over the subfield $\mathbb{R}^\wedge$.”
- (2) $X' := \mathcal{X} \downarrow$ is a laterally complete vector sublattice of $\mathcal{R} \downarrow$ which is majorizing and invariant under each band projection $\chi(b)$ ($b \in \mathbb{B}$).
- (3) $\iota(X)$ is an order dense sublattice in $\mathcal{R} \downarrow$ for some σ -continuous lattice isomorphism $\iota : X \rightarrow X'$.
- (4) for every $b \in \mathbb{B}$ the band projection in $\mathcal{R} \downarrow$ onto $\{\iota(j(b))\}^{\perp\perp}$ coincides with $\chi(b)$.

7. Transfer principle in action. According to above two results the theorems about real numbers can be “externalized” by transfer so as to yield results about universally complete vector lattices. Depending on which Boolean algebra $\mathbb{B}$ (the algebra of measurable sets, open regular sets, or projections in a Hilbert space, etc.) forms the base for constructing a Boolean valued model $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, we obtain various vector lattices (the spaces of measurable functions, semicontinuous functions, or selfadjoint operators, etc.). Thereby the remarkable opportunity opens up to expand the treasure-trove of knowledge about the reals to a profusion of classical objects of analysis.

A general scheme of applying the method is as follows. Assume $\mathbf{X} \subset \mathbb{V}$ and $\mathbb{X} \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ are two classes of mathematical objects. Suppose we are able to prove the following

Boolean Valued Representation Result: Every $X \in \mathbf{X}$ embeds into an Boolean valued model, becoming an object $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Boolean Valued Transfer Principle then tells us that every theorem about $\mathcal{X}$ within ZFC has its counterpart for the original object X interpreted as a Boolean valued object $\mathcal{X}$.

Boolean Valued Machinery enables us to perform some translation of theorems from $\mathcal{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ to $X \in \mathbb{V}$ making use of appropriate general operations (ascending–descending) and principles of Boolean valued analysis.

8. Some long standing problems solved by means of Boolean valued analysis are listed in the following table.

Problem	Stated (author/year)	Reduced to (by means of BA):	Solved (author/year)	References
Internal characterization of subdifferentials	S. S. Kutateladze 1976	Weakly compact convex sets of functionals	Kusraev Kutateladze 1982	[16]; see [19] for details
Desintegration in Dedekind complete vector lattice	A. D. Ioffe V. L. Levin M. Neumann 1972/1977	Combination of Hahn–Banach and Radon–Nikodým theorems	Kusraev 1984	[12]; see [11] and [19] for details
The Kaplansky problem: homogeneity of type I AW^* -algebras	I. Kaplansky 1953	Homogeneity of $B(H)$ (H is a Hilbert space)	Ozawa 1984	[23, 24]
The Wickstead Problem: Order boundedness of d -homomorphisms	A. Wickstead 1983	Cauchy functional equation	Gutman, 1995 Kusraev, 2006	[8] and [13]; see [20] for details
Maharam extension of a positive operator	W. Luxemburg A. Schep 1978	Daniell method of integration	Akilov Kolesnikov Kusraev, 1988	[1]; see [11] and [20] for details
Classification of injective Banach lattices	H. P. Lotz D. I. Cartwright 1975	Classification of AL -spaces (L_1 spaces)	Kusraev 2012	[14, 15]

References

1. Akilov G. P., Kolesnikov E. V., Kusraev, A. G. The Lebesgue extension of a positive operator // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1988.—Vol. 298, № 3.—P. 531–524.
2. Akilov G. P., Kutateladze S. S. Ordered Vector Spaces.—Novosibirsk: Nauka, 1978.
3. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.—London etc.: Acad. Press Inc., 1985.—xvi+367 p.
4. Bell J. L. Set Theory: Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—Oxford: Clarendon Press, 2005.—xxii+191 p.—(Oxford logic guides 47).
5. Fremlin D. H. Measure Theory.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.—672 p.—(Broad Foundation; Vol. 2).
6. Gordon E. I. Real numbers in Boolean valued models of set theory and K -spaces // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1977.—Vol. 237, № 4.—P. 773–775.
7. Gordon E. I. K -spaces in Boolean valued models of set theory // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1981.—Vol. 258, № 4.—P. 777–780.
8. Gutman A. E. Locally one-dimensional K -spaces and σ -distributive Boolean algebras // Siberian Adv. Math.—1995—Vol. 5, № 2.—P. 99–121.
9. Kantorovich L. V., Vulikh B. Z., Pinsker A. G. Functional Analysis in Semiorde-
red Spaces.—Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1950.—548 p.—(in Russian).
10. Kusraev A. G. Numeric systems in Boolean valued models of set theory // Proce-
edings of the VIII All-Union Conference on Math. Logic (Moscow).—1986.—P. 99.
11. Kusraev A. G. Dominated Operators.—Dordrecht: Kluwer, 2000.—xiii+446 p.
12. Kusraev A. G. Abstract disintegration in Kantorovich spaces // Sibirsk. Mat.
Zh.—1984.—Vol. 25, № 5.—P. 79–89.
13. Kusraev A. G. Automorphisms and derivations in extended complex f -algebras // Siberian Math. J.—2006.—Vol. 47, № 1.—P. 97–107.
14. Kusraev A. G. The classification of injective Banach lattices // Dokl. Ross.
Akad. Nauk.—2013.—Vol. 453, № 1.—P. 12–16; Engl. transl.: Dokl. Math.—2013.—
Vol. 88, № 3.—P. 1–4.
15. Kusraev A. G. Injective Banach lattices: A survey // Eurasian Math. J.—2014.—
Vol. 5, № 3.—P. 57–78.
16. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Analysis of subdifferentials via Boolean valued
models // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1982.—Vol. 265, № 5.—P. 1061–1064.
17. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Boolean Valued Analysis.—Novosibirsk: Nauka,
1999; Engl. transl.—Dordrecht: Kluwer, 1999.
18. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Introduction to Boolean Valued Analysis.—
Moscow: Nauka, 2005.—526 p.—(in Russian).
19. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Subdifferential Calculus: Theory and Applica-
tions.—Moscow: Nauka, 2007.—(in Russian).
20. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—
Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—iv+400 p.—(Trends in Science: The South
of Russia. A Math. Monograph. Iss. 6).
21. Kutateladze S. S. What is Boolean Valued Analysis // Siberian Electronic Math.
Reports.—2006.—Vol. 3.—P. 402–427;
Engl. transl.: URL: <http://math.nsc.ru/LBRT/g2/english/ssk/preprint178.pdf>.
22. Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 1.—Amsterdam–London:
North-Holland, 1971.—514 p.

23. *Ozawa M.* Boolean valued interpretation of Hilbert space theory // J. Math. Soc. Japan.—1983.—Vol. 35, № 4.—P. 609–627.
24. *Ozawa M.* A classification of type I AW^* -algebras and Boolean valued analysis // J. Math. Soc. Japan.—1984.—Vol. 36, № 4.—P. 589–608.
25. *Scott D. S.* Boolean valued models for set theory // Mimeographed notes for the 1967 American Math. Soc. Symposium on axiomatic set theory.—1967.
26. *Scott D. S.* Boolean-Valued Models and Nonstandard Analysis // Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability / Ed. by W. A. J. Luxemburg.—N. Y. etc.: Holt, Rinehart, and Winston.—1969.—P. 87–92.
27. *Solovay R., Tennenbaum S.* Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math.—1972.—Vol. 94, № 2.—P. 201–245.
28. *Takeuti G.* Two Applications of Logic to Mathematics.—Tokyo–Princeton: Iwanami and Princeton Univ. Press, 1978.—137 p.
29. *Takeuti G.* A transfer principle in harmonic analysis // J. Symbolic Logic.—1979.—Vol. 44, № 3.—P. 417–440.
30. *Takeuti G.* Boolean valued analysis // Appl. of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—P. 714–731.—(Lect. Notes in Math.; Vol. 753).
31. *Takeuti G., Zaring W. M.* Axiomatic set Theory.—N. Y.: Springer-Verlag, 1973.—238 p.
32. *Vopěnka P.* General theory of ∇ -models // Comment. Math. Univ. Carolin.—1967.—Vol. 8, № 1.—P. 147–170.
33. *Vulikh B.Z.* Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces.—Moscow: Fizmatgiz, 1961—407 p.—(in Russian).
34. *Zaanen A. C.* Riesz Spaces. Vol. 2.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—xi+720 p.

БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ АНАЛИЗ

А. Г. Кусраев

Статья представляет собой конспект миникурса лекций, прочитанных на Владикавказской молодежной математической школе (Владикавказ, 21–27 июля, 2014). Дается обзор основных принципов и приемов булевозначного моделирования, дается общая схема применения булевозначного принципа переноса к задачам функционального анализа и приводится небольшой список проблем, решенных с помощью булевозначных моделей.

OPTIMAL RECOVERY OF LINEAR OPERATORS FROM INACCURATE INFORMATION¹

K. Yu. Osipenko²

1. Introduction

What does it mean to solve a problem in an optimal way? Assume that we have a problem p to be solved. Usually we have some information about this problem. This information as a rule is incomplete and/or inaccurate. We denote it by $I(p)$. Suppose we have a method (algorithm) m to solve this problem. The method m uses the information $I(p)$. To compare the quality of different methods with each method m we have to associate a number indicating the error of the solution of the problem. We denote this number by $e(p, I, m)$.

Usually we want to have a method that can be applied to several problems of the same type. Assume that we have a set of problems $\mathcal{P}$. Then for the set $\mathcal{P}$ the error of the given method m may be defined as follows

$$e(\mathcal{P}, I, m) = \sup_{p \in \mathcal{P}} e(p, I, m).$$

If we want to find a good method for problems $\mathcal{P}$ we have to find a method for which the value $e(\mathcal{P}, I, m)$ is as small as possible. Denote by $\mathcal{M}$ the set of admissible methods. Then we want to find a method $\hat{m}$ such that

$$e(\mathcal{P}, I, \hat{m}) = \inf_{m \in \mathcal{M}} e(\mathcal{P}, I, m) =: E(\mathcal{P}, I, \mathcal{M}).$$

We call the method $\hat{m}$ an *optimal method* and the value $E(\mathcal{P}, I, \mathcal{M})$ is called an *optimal error*.

It may appear that $E(\mathcal{P}, I, \mathcal{M})$ is not sufficiently small. Then we may try to find another type of information about problems from $\mathcal{P}$ that

¹This research was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research, grant №№ 14-01-00456, 14-01-00744.

²Russia, Moscow, MATI — Russian State Technological University of K. E. Tsiolkovsky; Moscow, Institute for Information Transmission Problems, Russian Academy of Sciences; Vladikavkaz, Southern Mathematical Institute of Vladikavkaz Science Center of the Russian Academy of Sciences.

can provide a better error of solutions. In other words, we can consider the following problem

$$\inf_{I \in \mathcal{I}} E(\mathcal{P}, I, \mathcal{M}),$$

where $\mathcal{I}$ is some set of information.

Let us consider some examples.

2. Optimal interpolation

Let W be some class of functions defined on a domain D . Denote by p_f the problem of finding $f(t)$, $t \in D$, for a function $f \in W$. Put

$$I(p_f) = I(f) = (f(t_1), \dots, f(t_n)), \quad t_j \in D, \quad j = 1, \dots, n.$$

Let $\mathcal{M}$ be the set of all mappings $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. We put

$$e(p_f, I, m) = |f(t) - m(I(f))|.$$

Here $\mathcal{P} = \{p_f : f \in W\}$. Thus,

$$e(\mathcal{P}, I, m) = \sup_{f \in W} |f(t) - m(I(f))| =: e(t, W, I, m).$$

To find an optimal method we have to consider the following problem

$$E(t, W, I, \mathcal{M}) = \inf_{m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} e(t, W, I, m).$$

This problem is called the problem of optimal recovery of a function $f \in W$ at a fixed point t from the information about the values $f(t_1), \dots, f(t_n)$.

3. Optimal integration

Let p_f be the problem of finding the integral $Lf = \int_a^b f(t) dt$ for a function $f \in W$. With the same $I(f)$, $\mathcal{P}$, and $\mathcal{M}$ we obtain the problem of optimal integration on the class W from the information about values of f at a fixed system of nodes

$$E(L, W, I, \mathcal{M}) = \inf_{m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} \sup_{f \in W} \left| \int_a^b f(t) dt - m(I(f)) \right|.$$

Note that if instead of $\mathcal{M}$ we consider the set $\mathcal{M}_0$ containing only linear functions m , that is,

$$m(I(f)) = \sum_{j=1}^n a_j f(t_j), \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n,$$

then we obtain the well-known problem of finding optimal quadrature formula for the class W and a fixed system of nodes.

One may ask how to choose such points $a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b$ for which the optimal error will be minimal. In this case we obtain the following problem

$$E(L, W, \mathcal{J}, \mathcal{M}) = \inf_{I \in \mathcal{J}} E(L, W, I, \mathcal{M}),$$

where $\mathcal{J} = \{I : a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b\}$.

4. Optimal numerical differentiation

In notation of the first example this is the following problem

$$E'(t, W, I, \mathcal{M}) = \inf_{m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} \sup_{f \in W} |f'(t) - m(I(f))|.$$

5. Optimal interpolation for W_∞^1

We consider complete solutions of some previous problems for simple classes.

Denote by W_∞^1 the class of real functions f defined on the interval $[-1, 1]$, absolutely continuous, and satisfying the condition

$$|f'(t)| \leq 1 \quad \text{almost everywhere on } [-1, 1].$$

Following the first example we put

$$e(t, W_\infty^1, I_{\bar{t}}, m) = \sup_{f \in W_\infty^1} |f(t) - m(I_{\bar{t}}(f))|,$$

$$E(t, W_\infty^1, I_{\bar{t}}) = \inf_{m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} e(t, W_\infty^1, I_{\bar{t}}, m),$$

$$I_{\bar{t}}(f) = (f(t_1), \dots, f(t_n)), \quad \bar{t} = (t_1, \dots, t_n), \\ -1 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1.$$

Denote by $\alpha(t)$ the nearest point to t from the set of nodes $\{t_1, \dots, t_n\}$ (in the case when t is in the middle between t_j and t_{j+1} we set for definiteness $\alpha(t) = t_j$). Thus,

$$\alpha(t) = \begin{cases} t_1, & -1 \leq t \leq \frac{t_1+t_2}{2}, \\ t_j, & \frac{t_{j-1}+t_j}{2} < t \leq \frac{t_j+t_{j+1}}{2}, j = 2, \dots, n-1, \\ t_n, & \frac{t_{n-1}+t_n}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Put $\hat{f}(t) = |t - \alpha(t)|$ (see Fig. 1).

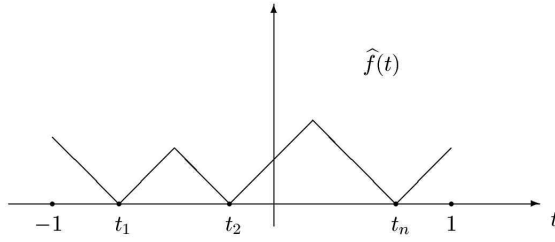


Fig. 1.

It is obvious that $\hat{f} \in W_\infty^1$ and $-\hat{f} \in W_\infty^1$. Moreover, $I_{\bar{t}}(\hat{f}) = I_{\bar{t}}(-\hat{f}) = 0$. For any method m we have

$$\begin{aligned} 2\hat{f}(t) &= |\hat{f}(t) - m(0) - (-\hat{f}(t) - m(0))| \leq \\ &\leq |\hat{f}(t) - m(0)| + |-\hat{f}(t) - m(0)| \leq 2e(t, W_\infty^1, I_{\bar{t}}, m). \end{aligned}$$

Consequently, for all m

$$e(t, W_\infty^1, I_{\bar{t}}, m) \geq \hat{f}(t).$$

Hence

$$E(t, W_\infty^1, I_{\bar{t}}) \geq \hat{f}(t). \quad (1)$$

We obtain the lower bound. Now let us obtain the upper bound.

Define the method $\hat{m}$ by the equality $\hat{m}(I_{\bar{t}}(f)) = f(\alpha(t))$. Then

$$f(t) - f(\alpha(t)) = \int_{\alpha(t)}^t f'(\tau) d\tau.$$

Since $|f'(\tau)| \leq 1$ we have

$$|f(t) - f(\alpha(t))| \leq |t - \alpha(t)| = \widehat{f}(t).$$

Thus, for all $f \in W_\infty^1$

$$|f(t) - \widehat{m}(I_{\bar{t}}(f))| \leq \widehat{f}(t).$$

We have

$$E(t, W_\infty^1, I_{\bar{t}}) \leq e(t, W_\infty^1, I_{\bar{t}}, \widehat{m}) \leq \widehat{f}(t).$$

Taking into account the lower bound (1), we obtain that

$$E(t, W_\infty^1, I_{\bar{t}}) = \widehat{f}(t)$$

and $\widehat{m}$ is an optimal method. Consequently, if we have function values $f(t_1), \dots, f(t_n)$, then an optimal method of recovery of $f(t)$ on the class W_∞^1 is the following $f(t) \approx f(\alpha(t))$ (see Fig. 2).

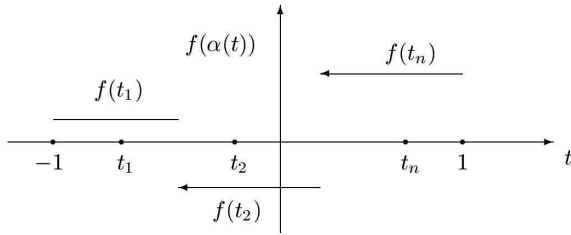


Fig. 2.

There may be several optimal methods. Among them there is one which has good properties. It is called the *central method*. We construct the central method for the above problem. Let $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Put

$$W_y = \{f \in W_\infty^1 : I_{\bar{t}}f = y\}.$$

Consider the set

$$A_y = \{f(t) : f \in W_y\}.$$

For the fixed t the set A_y is an interval on $\mathbb{R}$ and

$$c_y = \frac{\sup_{f \in W_y} f(t) + \inf_{f \in W_y} f(t)}{2}$$

is the middle of it.

For any y , such that $W_y \neq \emptyset$ and for all $f \in W_y$ we have

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{f \in W_y} |f(t) - c| = \sup_{f \in W_y} |f(t) - c_y|.$$

Thus for any method m and for any y , $W_y \neq \emptyset$,

$$\sup_{f \in W_y} |f(t) - m(y)| \geq \sup_{f \in W_y} |f(t) - c_y|.$$

Consequently, the method $\hat{m}_c(I_{\bar{t}}f) = c_{I_{\bar{t}}f}$ is the optimal method which is the best for any fixed information $I_{\bar{t}}f$. Such methods are called central methods.

The explicit form for the method $\hat{m}_c$ may be found using the following picture

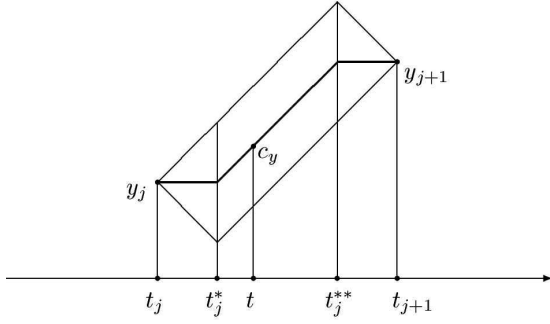


Fig. 3.

$$\hat{m}_c(I_{\bar{t}}f)(t) = \begin{cases} y_1, & -1 \leq t \leq t_1, \\ y_j, & t_j \leq t \leq t_j^*, \\ \frac{y_j + y_{j+1}}{2} + \text{sign}(y_{j+1} - y_j) \left(t - \frac{t_j + t_{j+1}}{2} \right), & t_j^* \leq t \leq t_j^{**}, \\ y_{j+1}, & t_j^{**} \leq t < t_{j+1}, \\ y_n, & t_n \leq t \leq 1; \end{cases} \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, n-1, \\ j = 1, \dots, n-1, \\ j = 1, \dots, n-1, \end{matrix}$$

$$t_j^* = \frac{t_j + t_{j+1}}{2} - \frac{|y_{j+1} - y_j|}{2}, \quad t_j^{**} = \frac{t_j + t_{j+1}}{2} + \frac{|y_{j+1} - y_j|}{2}.$$

6. Optimal recovery of the minimum

Now for the same class W_∞^1 and the same information $I_{\bar{t}}$ we consider the problem of optimal recovery of the (nonlinear!) functional

$$Lf = \min_{t \in [-1,1]} f(t).$$

The error of any method $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is

$$e(L, W_\infty^1, I_{\bar{t}}, m) = \sup_{f \in W_\infty^1} |Lf - m(I_{\bar{t}}f)|,$$

The problem is to find

$$E(L, W_\infty^1, I_{\bar{t}}) = \inf_{m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} e(L, W_\infty^1, I_{\bar{t}}, m)$$

and an optimal recovery method.

We construct the central method in this problem. For the fixed $y \in \mathbb{R}^n$ we again deal with the set $W_y = \{f \in W_\infty^1 : I_{\bar{t}}f = y\} \neq \emptyset$. All functions from W_y are between two piecewise linear functions. The upper function we denote by $Z_y(t)$ and the lower function by $z_y(t)$.

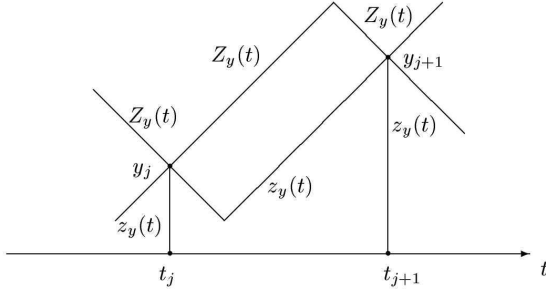


Fig. 4.

Thus for all $f \in W_y$

$$\min_{t \in [-1,1]} Z_y(t) \leq \min_{t \in [-1,1]} f(t) \leq \min_{t \in [-1,1]} z_y(t).$$

It is clear that

$$\min_{t \in [-1,1]} Z_y(t) = \min_{1 \leq j \leq n} y_j.$$

It may be shown that

$$\min_{t \in [t_j, t_{j+1}]} z_y(t) = \frac{y_{j+1} + y_j}{2} - \frac{t_{j+1} - t_j}{2}.$$

Taking into account intervals $[-1, t_1]$ and $[t_n, 1]$ we obtain

$$\begin{aligned} & \min_{t \in [-1, 1]} z_y(t) = \\ & = \min \left\{ y_1 - h_0, \frac{y_2 + y_1}{2} - \frac{h_1}{2}, \dots, \frac{y_n + y_{n-1}}{2} - \frac{h_{n-1}}{2}, y_n - h_n \right\}, \end{aligned}$$

where $h_0 = t_1 + 1$, $h_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 1, \dots, n-1$, $h_n = 1 - t_n$.

Thus the method

$$\begin{aligned} \hat{m}_L(I_{\bar{t}}f) &= \frac{1}{2} \left(\min_{t \in [-1, 1]} Z_y(t) + \min_{t \in [-1, 1]} z_y(t) \right) = \frac{1}{2} \min_{1 \leq j \leq n} y_j + \\ &+ \frac{1}{2} \min \left\{ y_1 - h_0, \frac{y_2 + y_1}{2} - \frac{h_1}{2}, \dots, \frac{y_n + y_{n-1}}{2} - \frac{h_{n-1}}{2}, y_n - h_n \right\} \end{aligned}$$

is the central method for recovery of minimum. It may be shown that

$$E(L, W_{\infty}^1, I_{\bar{t}}) = \frac{1}{2} \min \left\{ h_0, \frac{h_1}{2}, \dots, \frac{h_{n-1}}{2}, h_n \right\}.$$

For the equidistant system of points $\hat{t}_j = -1 + \frac{2j-1}{n}$, $j = 1, \dots, n$. We have

$$\hat{m}_L(I_{\bar{t}}f) = \frac{1}{2} \min_{1 \leq j \leq n} y_j + \frac{1}{2} \min \left\{ y_1, \frac{y_2 + y_1}{2}, \dots, \frac{y_n + y_{n-1}}{2}, y_n \right\} - \frac{1}{2n}.$$

7. Optimal recovery from Fourier coefficients

Let f be a periodic function on $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ and the Fourier series

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

where

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \cos kt \, dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \sin kt \, dt, \quad k = 1, 2, \dots,$$

converges uniformly to f .

Suppose that instead of precise values of the Fourier coefficients of f we know their inaccurate values $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ such that

$$\frac{(a_0 - \tilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} ((a_k - \tilde{a}_k)^2 + (b_k - \tilde{b}_k)^2) \leq \delta^2,$$

where $\delta > 0$. The problem is to recover f at some point τ .

We cannot take as approximation the series

$$\frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k \cos k\tau + \tilde{b}_k \sin k\tau)$$

since it may differ from $f(\tau)$ as much as desired or even be nonconvergent.

A. N. Tikhonov proposed to take the following series

$$\tilde{f}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha k^2} (\tilde{a}_k \cos k\tau + \tilde{b}_k \sin k\tau),$$

where α has the same order of smallness as δ (in particular, it is possible to put $\alpha = \delta$). He proved that if $f \in L_2(\mathbb{T})$ and f is continuous at τ , then $\tilde{f}(\tau) \rightarrow f(\tau)$ as $\delta \rightarrow 0$.

$L_2(\mathbb{T})$ is the linear space of functions for which

$$\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 \, dt < \infty.$$

This method are known as Tikhonov regularization.

There are several questions to this method.

1. Are there any better method? How to compare various methods?
2. What is the error of approximation when δ is fixed?
3. Do we need to know all inaccurate values $\tilde{a}_k$ and $\tilde{b}_k$?

We try to answer these questions and construct a family of optimal methods for this problem. We call the approach that we use Kolmogorov regularization since it based on ideas of A. N. Kolmogorov.

We begin with the setting of the problem in terms of optimal recovery theory.

Let $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{T})$ be the space of 2π -periodic functions with absolutely continuous $x^{(n-1)}$ and $x^{(n)} \in L_2(\mathbb{T})$. Set

$$W_2^n(\mathbb{T}) = \left\{ x \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{T}) : \|x^{(n)}\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1 \right\}.$$

Suppose that for every $x \in W_2^n(\mathbb{T})$ we know the Fourier coefficients

$$a_j(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} x(t) \cos jt \, dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_j(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} x(t) \sin jt \, dt, \quad j = 1, 2, \dots,$$

given inaccurately.

Suppose that we know $y = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \dots)$ such that $\|Ix - y\|_{l_2} \leq \delta$, where $Ix = (a_0(x), a_1(x), b_1(x), \dots)$. Here the norm in l_2 is defined by the inner product

$$\langle u, v \rangle_{l_2} = \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k c_k + b_k d_k),$$

$$u = (a_0, a_1, b_1, \dots), \quad v = (c_0, d_1, c_1, \dots).$$

Using this information we would like to find the best method of recovery of $x(\tau)$ at some point $\tau \in \mathbb{T}$. For every method of recovery $m : l_2 \rightarrow \mathbb{R}$ we define the error of the method by

$$e(W_2^n(\mathbb{T}), I, \delta, m) = \sup_{\substack{x \in W_2^n(\mathbb{T}), y \in l_2, \\ \|Ix - y\|_{l_2} \leq \delta}} |x(\tau) - m(y)|.$$

We are interested in the optimal error of recovery

$$E(W_2^n(\mathbb{T}), I, \delta) = \inf_{m: l_2 \rightarrow \mathbb{R}} e(W_2^n(\mathbb{T}), I, \delta, m),$$

and the method for which this value is attained.

Let a be the solution of the equation

$$\frac{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+ak^{2n})^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2n}}{(1+ak^{2n})^2}} = \delta^2$$

(it may be shown that for every $\delta > 0$ there exists the unique solution of this equation).

Theorem. *The method*

$$\widehat{m}(y) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + ak^{2n}} (\widetilde{a}_k \cos k\tau + \widetilde{b}_k \sin k\tau)$$

is optimal and

$$E(W_2^n(\mathbb{T}), I, \delta) = \lambda_1(a + \delta^2),$$

where

$$\lambda_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2n}}{(1 + ak^{2n})^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

8. Optimal recovery by finite number of Fourier coefficients

We begin with the case when we know exact values of Fourier coefficients. Let $A \subset \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ and $B \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ be finite sets and for every $x \in W_2^n(\mathbb{T})$ we know the Fourier coefficients $\{a_k\}_{k \in A}$ and $\{b_k\}_{k \in B}$. That is for every x we know the vector $F_{A,B}x = (\{a_k\}_{k \in A}, \{b_k\}_{k \in B})$ from $\mathbb{R}^N$, $N = \text{card } A + \text{card } B$.

Using the information $F_{A,B}x$ we want to find a function which approximate $x^{(r)}$, $0 \leq r \leq n-1$, in $L_2(\mathbb{T})$ in the best way. Now the error of method $m : \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ is defined as follows

$$e_r(W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, m) = \sup_{x \in W_2^n(\mathbb{T})} \|x^{(r)} - m(F_{A,B}x)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

The error of optimal recovery is defined by

$$E_r(W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) = \inf_{m: \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})} e_r(W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, m).$$

Since for every $c \in \mathbb{R}$ $x = c \in W_2^n(\mathbb{T})$, it is easy to show that in the case when $0 \notin A$ $E_0(W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) = \infty$.

Put

$$k_0 = k_0(A, B) = \min \left\{ \min_{k \in \mathbb{N} \setminus A} k, \min_{k \in \mathbb{N} \setminus B} k \right\}.$$

It means that $\{0, 1, \dots, k_0 - 1\} \in A$, $\{1, \dots, k_0 - 1\} \in B$, and $k_0 \notin A$ or $k_0 \notin B$.

Put $\chi_0 = 1$ and $\chi_r = 0$ for $r \geq 1$.

Theorem. Let $1 \leq r \leq n-1$ or $r = 0$ and $0 \in A$. Then $E_r(W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) = k_0^{-(n-r)}$ and for all $\alpha = \{\alpha_k\}_{k \in A}$ and $\beta = \{\beta_k\}_{k \in B}$ such that

$$|\alpha_k - 1| \leq \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n-r}, \quad k \in A, \quad |\beta_k - 1| \leq \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n-r}, \quad k \in B,$$

the method

$$\begin{aligned} \widehat{m}(F_{A,B}x)(t) &= \frac{a_0}{2} \chi_r + \sum_{k \in A \setminus \{0\}} k^r \alpha_k a_k \cos(kt + \pi r/2) + \\ &+ \sum_{k \in B} k^r \beta_k b_k \sin(kt + \pi r/2) \end{aligned}$$

is optimal

Let us consider the case when $r = 0$. Note that we may take as an optimal method the method

$$\widehat{m}(F_{A,B}x)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \in A \setminus \{0\}} a_k \cos kt + \sum_{k \in B} b_k \sin kt.$$

But the method

$$\widehat{m}(F_{A,B}x)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k_0-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

is also optimal and it does not use coefficients a_k and b_k if $k \geq k_0$.

9. Optimal recovery by finite number of inaccurate Fourier coefficients

Now we consider the case when for every $x \in W_2^n(\mathbb{T})$ we know $y \in \mathbb{R}^N$ such that $\|F_{A,B}x - y\|_\infty \leq \delta$, where $\|y\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq N-1} |y_j|$, $y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$.

It means that instead of exact values of Fourier coefficients we know $\{\widetilde{a}_k\}_{k \in A}$ and $\{\widetilde{b}_k\}_{k \in B}$ such that

$$|a_k - \widetilde{a}_k| \leq \delta, \quad k \in A, \quad |b_k - \widetilde{b}_k| \leq \delta, \quad k \in B.$$

Again we want to recover $x^{(r)}$ in $L_2(\mathbb{T})$ -metric.

Here we define the error of m by

$$e_r(W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, m) = \sup_{\substack{x \in W_2^n(\mathbb{T}), y \in l_\infty^N, \\ \|F_{A,B}x - y\|_\infty \leq \delta}} \|x^{(r)} - m(y)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

The error of optimal recovery is

$$E_r(W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \inf_{m: l_\infty^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})} e_r(W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, m).$$

Set

$$\hat{p} = \max \left\{ p \in \mathbb{Z}_+ : 2\delta^2 \sum_{k=0}^p k^{2n} < 1 \right\}, \quad p_0 = \min\{\hat{p}, k_0 - 1\}.$$

Theorem. *If $1 \leq r \leq n - 1$ or $r = 0$ and $0 \in A$, then*

$$\begin{aligned} E_r(W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) &= \\ &= \sqrt{\frac{1}{(p_0 + 1)^{2(n-r)}} + \frac{\delta^2}{2} \chi_r + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{p_0} k^{2r} \left(1 - \left(\frac{k}{p_0 + 1} \right)^{2(n-r)} \right)} \end{aligned}$$

and the method

$$\begin{aligned} \hat{m}(\{\tilde{a}_k\}_{k \in A}, \{\tilde{b}_k\}_{k \in B})(t) &= \frac{\tilde{a}_0}{2} \chi_r + \sum_{k=1}^{p_0} \left(1 - \left(\frac{k}{p_0 + 1} \right)^{2(n-r)} \right) \times \\ &\times k^r (\tilde{a}_k \cos(kt + \pi r/2) + \tilde{b}_k \sin(kt + \pi r/2)) \end{aligned}$$

is optimal.

10. Hadamard three-circle theorem and inequalities for derivatives

We begin with one extremal problem which is known as the Hadamard three-circle theorem. Let $f(z)$ be a holomorphic function on the annulus

$$r_1 \leq |z| \leq r_2.$$

Put

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Then $\log M(r)$ is a convex function of the $\log r$. The conclusion of the theorem can be restated as

$$M(r) \leq M(r_1)^{\frac{\log r_2/r}{\log r_2/r_1}} M(r_2)^{\frac{\log r/r_1}{\log r_2/r_1}}.$$

for any three concentric circles of radii $r_1 < r < r_2$.

The history of this theorem is the following. A statement and proof for the theorem was given by J. E. Littlewood in 1912, but he attributes it to no one in particular, stating it as a known theorem. H. Bohr and E. Landau claim the theorem was first given by J. Hadamard in 1896, although Hadamard had published no proof.

The Hadamard three-circle theorem gives an estimate in the following extremal problem

$$M(r) \rightarrow \max, \quad M(r_1) \leq \delta_1, \quad M(r_2) \leq \delta_2.$$

The exact solution of this problem which is expressed in terms of elliptic functions was given by R. M. Robinson in 1943.

In 1913 E. Landau considered a very similar problem. He took derivatives instead of circles. He proved that for all functions $x \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ with the first derivative locally absolutely continuous on $\mathbb{R}_+$ and $x'' \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ the following exact inequality

$$\|x'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq 2\|x\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}^{1/2} \|x''\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}^{1/2}$$

holds (the exactness means that the constant 2 could not be replaced by some other constant which is less than 2). That is he found the exact solution of the extremal problem

$$\|x'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \max, \quad \|x\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_1, \quad \|x''\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_2.$$

Then in 1914 Hadamard solved the analogous problem for $\mathbb{R}$.

In 1939 A. N. Kolmogorov obtained the general result in this field. He found the exact solution of the problem

$$\|x^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|x\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \delta_1, \quad \|x^{(r)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \delta_2.$$

The value of this problem is

$$\frac{K_{r-k}}{K_r^{1-\frac{k}{r}}} \delta_1^{1-k/r} \delta_2^{k/r},$$

where

$$K_m = \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s(m+1)}}{(2s+1)^{m+1}}$$

are the Favard constants.

These types of extremal problems are known as Landau–Kolmogorov inequalities for derivatives and they all are similar to the initial extremal problem formulated by Hadamard.

11. Hardy–Littlewood–Pólya inequality and optimal recovery of derivatives

One more example of Landau–Kolmogorov type inequalities is the Hardy–Littlewood–Pólya inequality.

In 1939 Hardy, Littlewood, and Pólya proved that for all integer $0 < k < r$ and all $x \in L_2(\mathbb{R}) \cap W_2^r(\mathbb{R})$

$$\|x^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \|x\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{R})}^{k/r},$$

This result may be formulated in the same form as Hadamard's theorem.

Theorem. $\log \|x^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R})}$ is a convex function of k .

It is possible to define fractional derivatives then k will be continuous argument.

We may consider more than three circles in Hadamar's theorem and more than three derivatives in the Hardy–Littlewood–Pólya inequality. The more values of convex function we know the more precise we can estimate the function.

Let $k_1 < \dots < k_n$ and $k_1 \leq k \leq k_n$. Consider the following extremal problem

$$\|x^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|x^{(k_j)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad x \in \mathcal{W}_2^{k_n}(\mathbb{R}).$$

Let

$$M = \text{co} \{ (k_j, \log \delta_j), \quad j = 1, \dots, n \}$$

be a set in $\mathbb{R}^2$. Put

$$\theta(x) = \min \{ y : (x, y) \in M \}.$$

Theorem.

$$\sup_{\substack{x \in \mathcal{W}_2^{k_n}(\mathbb{R}), \\ \|x^{(k_j)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j, \\ j=1, \dots, n}} \|x^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R})} = e^{\theta(k)}.$$

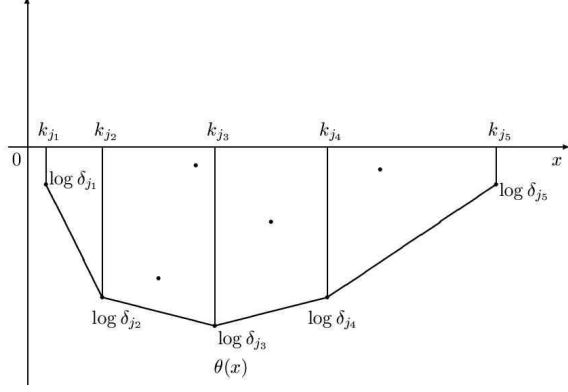


Fig. 5.

12. Optimal recover of derivatives

Suppose that we know functions $y_1, \dots, y_n \in L_2(\mathbb{R})$ such that

$$\|x^{(k_j)} - y_j\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

We want to recover $x^{(k)}$.

Any recovery method is a map $m : (L_2(\mathbb{R}))^n \rightarrow L_2(\mathbb{R})$.

The error of method m is defined as

$$e(D^k, K, \delta, m) = \sup_{\substack{x \in \mathcal{W}_2^{k_n}(\mathbb{R}), \\ \|x^{(k_j)} - y_j\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j, \\ j=1, \dots, n}} \|x^{(k)} - m(y)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

here $K = (k_1, \dots, k_n)$, $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ and $y = (y_1, \dots, y_n)$.

The error of optimal recovery is defined by

$$E(D^k, K, \delta) = \inf_{m: (L_2(\mathbb{R}))^n \rightarrow L_2(\mathbb{R})} e(D^k, K, \delta, m).$$

The method for which the lower bound is attained is called optimal method of recovery.

Let $k_{j_1}, \dots, k_{j_r}$ be the points of break of polygonal line θ . Denote by Fx the Fourier transform of x .

Theorem. For all $k_1 \leq k \leq k_n$

$$E(D^k, K, \delta) = e^{\theta(k)}.$$

If $k_{j_s} < k < k_{j_{s+1}}$, $1 \leq s \leq r-1$, then the method

$$\widehat{m}(y) = (L_s * y_{j_s}) + (R_{s+1} * y_{j_{s+1}}),$$

where

$$FL_s(\tau) = (i\tau)^k \frac{(k_{j_{s+1}} - k)\delta_{j_{s+1}}^2 (-i\tau)^{k_{j_s}}}{(k_{j_{s+1}} - k)\delta_{j_{s+1}}^2 \tau^{2k_{j_s}} + (k - k_{j_s})\delta_{j_s}^2 \tau^{2k_{j_{s+1}}}},$$

$$FR_{s+1}(\tau) = (i\tau)^k \frac{(k - k_{j_s})\delta_{j_s}^2 (-i\tau)^{k_{j_{s+1}}}}{(k_{j_{s+1}} - k)\delta_{j_{s+1}}^2 \tau^{2k_{j_s}} + (k - k_{j_s})\delta_{j_s}^2 \tau^{2k_{j_{s+1}}}},$$

is optimal. For $k = k_{j_s}$, $1 \leq s \leq r-1$, the method $\widehat{m}(y) = y_{j_s}$ is optimal.

13. Analog of the Hadamard theorem for the heat equation

For the heat equation we will consider the problem which is analogous to the Hadamard three-circle theorem.

Let u be the solution of the heat equation in $\mathbb{R}^d$

$$u_t = \Delta u, \quad u|_{t=0} = f(x), \quad f \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Theorem. Let $u(t, x)$ be the solution of the heat equation. Then $\log \|u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ is a convex function of t .

In other words, for all $t_1 < \tau < t_2$

$$\|u(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u(t_1, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{t_2 - \tau}{t_2 - t_1}} \|u(t_2, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{\tau - t_1}{t_2 - t_1}}.$$

Now we consider the similar problem with $n+1$ "circles". Namely, we want to solve the following extremal problem

$$\|u(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \quad \|u(t_j, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j,$$

$$j = 1, 2, \dots, n, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^d),$$

where $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ and $\delta_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

To formulate the result we consider the set

$$M = \text{co} \{(t_j, \log \delta_j), 1 \leq j \leq n\} + \{(t, 0) \mid t \geq 0\},$$

where $\text{co } A$ is a convex hull of A . Define the function $\theta(t)$, $t \in [t_1, \infty)$ as follows $\theta(t) = \min\{y : (t, y) \in M\}$. It is clear that θ is a polygonal line on $[t_1, \infty)$.

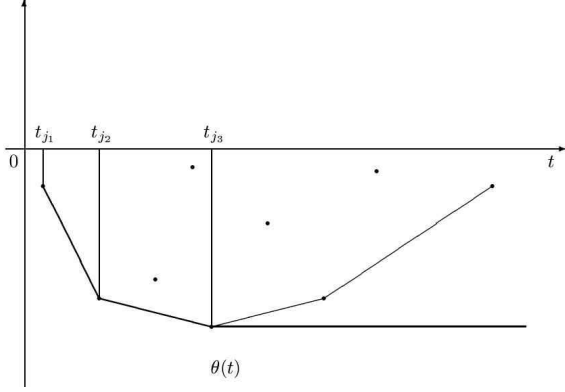


Fig. 6.

Theorem. For all $\tau \geq t_1$

$$\sup_{\substack{f \in L_2(\mathbb{R}^d), \\ \|u(t_j, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, \\ j=1,2,\dots,n}} \|u(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = e^{\theta(\tau)}.$$

14. Optimal recovery of the solution of the heat equation

The considered extremal problem is closely connected with the problem of optimal recovery of the solution of the heat equation from inaccurate observations of the solution at time moments $t_1, \dots, t_n$.

Assume that we know functions $y_j \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, \dots, n$, such that

$$\|u(t_j, \cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

What is the best way to use this information to recover the temperature distribution at the time $\tau \neq t_j$, $1 \leq j \leq n$, that is to recover the function $u(\tau, \cdot)$?

We admit as recovery methods arbitrary maps $m : (L_2(\mathbb{R}^d))^n \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$. For a fixed method m the quantity

$$e_\tau(L_2(\mathbb{R}^d), \delta, m) = \sup_{\substack{f, y_1, \dots, y_n \in L_2(\mathbb{R}^d), \\ \|u(t_j, \cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, \\ j=1, \dots, n}} \|u(\tau, \cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

where u is the solution of the heat equation with the initial function f , $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, and $y = (y_1, \dots, y_n)$, is called the error of the method m .

We are interested in the value

$$E_\tau(L_2(\mathbb{R}^d), \delta) = \inf_{m: (L_2(\mathbb{R}^d))^n \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} e_\tau(L_2(\mathbb{R}^d), \delta, m),$$

which is called the error of optimal recovery and in the method $\hat{m}$, for which the infimum is attained that is in the method $\hat{m}$ for which

$$E_\tau(L_2(\mathbb{R}^d), \delta) = e_\tau(L_2(\mathbb{R}^d), \delta, \hat{m}).$$

We call this method the optimal recovery method.

Let t_{s_j} , $j = 1, \dots, r$, be points of break of θ . For $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$ put

$$\lambda_{s_j} = \frac{t_{s_{j+1}} - \tau}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{\frac{2(\tau - t_{s_j})}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}},$$

$$\lambda_{s_{j+1}} = \frac{\tau - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}} \right)^{\frac{2(t_{s_{j+1}} - \tau)}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}}.$$

Theorem. For all $\tau \geq t_1$ $E_\tau(L_2(\mathbb{R}^d), \delta) = e^{\theta(\tau)}$. If $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, then for all γ_j such that

$$\lambda_{s_{j+1}} |\gamma_j(\xi)|^2 e^{2|\xi|^2(t_{s_j} - \tau)} + \lambda_{s_j} |1 - \gamma_j(\xi)|^2 e^{2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - \tau)} \leq \lambda_{s_j} \lambda_{s_{j+1}},$$

all methods

$$m(y)(t) = (K_j * y_{s_j})(t) + (L_{j+1} * y_{s_{j+1}})(t),$$

where

$$FK_j(\xi) = \gamma_j(\xi) e^{|\xi|^2(t_{s_j} - \tau)}, \quad FL_{j+1}(\xi) = (1 - \gamma_j(\xi)) e^{|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - \tau)},$$

are optimal. For $\tau = t_{s_j}$, $j = 1, \dots, r$, methods $m(y)(t) = y_{s_j}(t)$ are optimal and for $\tau > t_{s_r}$ the method

$$m(y) = F^{-1}\left(e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_r})} F y_{s_r}(\xi)\right)(x)$$

is optimal.

The condition

$$\lambda_{s_{j+1}} |\gamma_j(\xi)|^2 e^{2|\xi|^2(t_{s_j} - \tau)} + \lambda_{s_j} |1 - \gamma_j(\xi)|^2 e^{2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - \tau)} \leq \lambda_{s_j} \lambda_{s_{j+1}}$$

may be rewritten in the form

$$\left| \gamma_j(\xi) - \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \right| \leq \frac{\sqrt{\mu_1 \mu_2} \sqrt{\mu_1 + \mu_2 - 1}}{\mu_1 + \mu_2},$$

where

$$\mu_1 = \lambda_{s_j} e^{-2|\xi|^2(t_{s_j} - \tau)}, \quad \mu_2 = \lambda_{s_{j+1}} e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - \tau)}.$$

It can be shown that $\mu_1 + \mu_2 \geq 1$ for all $\xi \in \mathbb{R}^d$. Thus, $\gamma_j(\xi)$ may be chosen from the interval

$$\left[\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{\sqrt{\mu_1 \mu_2} \sqrt{\mu_1 + \mu_2 - 1}}{\mu_1 + \mu_2}, \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\sqrt{\mu_1 \mu_2} \sqrt{\mu_1 + \mu_2 - 1}}{\mu_1 + \mu_2} \right].$$

Note that optimal method of recovery uses not more than two observations. To find these observation we have to construct the set M and the polygonal line θ . Then we have to find the nearest points of break of θ to the point τ . The observations at these points are those that use in optimal method of recovery.

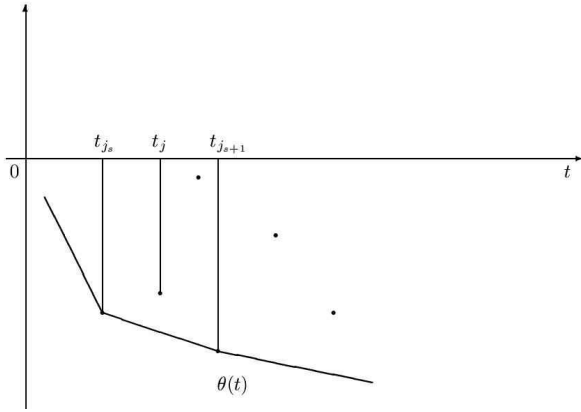


Fig. 7.

Note also that we can make more precise points of observation which are not on the polygonal line. Suppose that for some $t_m, t_{s_j} < t_m < t_{s_{j+1}}$ and $\theta(t_m) < \log \delta_m$.

Then optimal recovery method gives the error less than δ_m . Indeed

$$\|u(t_m, \cdot) - \hat{m}(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{\theta(t_m)} < \delta_m.$$

15. Optimal recovery of signals

The Hardy–Littlewood–Pólya inequality may be considered as the solution of the following extremal problem

$$\|x^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|x\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_1, \quad \|x^{(n)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_2.$$

We will consider a slightly different extremal problem which closely connected with problems of signal reconstruction

$$\|x^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|Fx\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta, \quad \|x^{(n)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1,$$

where Fx is the Fourier transform of x and $\Delta_\sigma = [-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$.

We consider the problem of optimal recovery of $x^{(k)}$ knowing the Fourier transform of x giving with some error on Δ_σ .

We assume that $x \in W_2^N(\mathbb{R})$,

$$W_2^N(\mathbb{R}) = \left\{ x \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(n-1)} \text{ is loc. abs. cont.}, \|x^{(n)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1 \right\}.$$

Moreover, we assume that for any $x \in W_2^N(\mathbb{R})$ we know a function $y \in L_2(\Delta_\sigma)$ such that

$$\|Fx - y\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta.$$

The problem is to recover $x^{(k)}$ knowing y .

Any method of recovery is a map $m : L_2(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$. The error of such method is defined as follows

$$e_\sigma(m) = \sup_{\substack{x \in W_2^N(\mathbb{R}), y \in L_2(\Delta_\sigma), \\ \|Fx - y\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} \|x^{(k)} - m(y)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

We are interested in the value

$$E_\sigma = \inf_{m: L_2(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} e_\sigma(m),$$

which is called the error of optimal recovery and in the method $\widehat{m}$, for which the infimum is attained that is in the method $\widehat{m}$ for which $E_\sigma = e_\sigma(\widehat{m})$. We call this method the optimal recovery method.

Set

$$\widehat{\sigma} = \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2(n-k)}} \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}, \quad \sigma_0 = \min\{\sigma, \widehat{\sigma}\},$$

$$\widehat{\alpha}(\xi) = \left(1 + \frac{n}{n-k} \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{k}{n-k}} \left(\frac{\xi}{\sigma_0}\right)^{2n}\right)^{-1}.$$

Theorem.

$$E = \sigma_0^k \sqrt{\frac{n-k}{2\pi n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \delta^2 + \sigma_0^{2(k-n)}}.$$

For all α such that

$$|\alpha(\xi) - \widehat{\alpha}(\xi)| \leq \sqrt{\widehat{\alpha}^2(\xi) + \widehat{\alpha}(\xi) \left(\left(\frac{\xi}{\sigma_0}\right)^{2(n-k)} - 1 \right)},$$

methods

$$m(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_\sigma} (i\xi)^k \alpha(\xi) y(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

are optimal.

For a fixed error of input data consider the error of optimal recovery E_σ as a function of σ . The larger interval $(-\sigma, \sigma)$ we take the less error we have. But beginning with $\widehat{\sigma}$ the error E_σ does not change.

Consequently, for $\sigma > \widehat{\sigma}$ the observed information becomes partially redundant. To avoid this case the following condition

$$\delta^2 \sigma^{2n} \leq 2\pi \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{n}{n-k}}$$

should hold. This inequality may be considered as some “uncertain principle.”

Now consider the set of optimal filters α obtained in the previous theorem. Let $n = 2$ and $k = 1$. Then this set is defined as follows

$$\left| \alpha(\sigma_0 t) - \frac{1}{1+4t^2} \right| \leq \frac{t|2t^2-1|}{1+4t^2}.$$

Corollary. For all

$$0 \leq \sigma' \leq \left(\frac{n-k}{n} \right)^{\frac{1}{2k}} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{2(n-k)}} \sigma_0,$$

methods

$$\begin{aligned} m(y)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq \sigma'} (i\xi)^k y(\xi) e^{i\xi t} d\xi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma' \leq |\xi| \leq \sigma_0} (i\xi)^k \alpha(\xi) y(\xi) e^{i\xi t} d\xi \end{aligned}$$

are optimal.

Note that obtained methods do not smooth the input data on the interval $[-\sigma', \sigma']$.

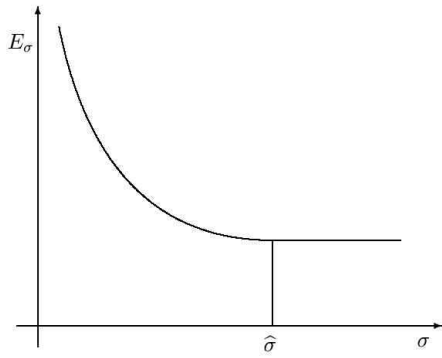


Fig. 8.

16. Scheme of proof

It can be easily obtained the lower bound

$$E_\sigma \geq \sup_{\substack{x \in W_2^N(\mathbb{R}), \\ \|Fx\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} \|x^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Passing to the Fourier transform and using the Plancherel theorem

we obtain the extended extremal problem with measures

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} d\mu(\xi) \rightarrow \max, \quad \int_{\Delta_\sigma} d\mu(\xi) \leq \frac{\delta^2}{2\pi},$$

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} d\mu(\xi) \leq 1, \quad d\mu(\xi) \geq 0.$$

Using the Lagrange principle we obtain that $E_\sigma^2 \geq \lambda_1 \delta^2 / (2\pi) + \lambda_2$, where λ_1 and λ_2 are Lagrange multipliers.

To obtain the upper bound we have to consider methods

$$m(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_\sigma} (i\xi)^k \alpha(\xi) y(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

and to obtain the error of these methods.

For simplicity we consider the case $\sigma = \infty$. Passing to the Fourier transform we get the following extremal problem

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |(i\xi)^k Fx(\xi) - (i\xi)^k \alpha(\xi) y(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max,$$

$$\int_{\mathbb{R}} |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Put $z = Fx - y$. Then the extremal problem has the form

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |\alpha(\xi) z(\xi) + (1 - \alpha(\xi)) Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max,$$

$$\int_{\mathbb{R}} |z(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

By the Cauchy–Schwarz inequality we have

$$|\alpha(\xi) z(\xi) + (1 - \alpha(\xi)) Fx(\xi)|^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{\alpha^2(\xi)}{\lambda_1} + \frac{(1 - \alpha(\xi))^2}{\lambda_2 \xi^{2n}} \right) (\lambda_1 |z(\xi)|^2 + \lambda_2 \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2).$$

Using this inequality we obtain that

$$E_{\sigma}^2 \leq S(\alpha) \left(\lambda_1 \frac{\delta^2}{2\pi} + \lambda_2 \right),$$

where

$$S(\alpha) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left(\xi^{2k} \left(\frac{\alpha^2(\xi)}{\lambda_1} + \frac{(1 - \alpha(\xi))^2}{\lambda_2 \xi^{2n}} \right) \right).$$

For all α such that

$$\xi^{2k} \left(\frac{\alpha^2(\xi)}{\lambda_1} + \frac{(1 - \alpha(\xi))^2}{\lambda_2 \xi^{2n}} \right) \leq 1 \quad (2)$$

$S(\alpha) \leq 1$ and the upper bound coincides with the lower bound. It is easy to show that inequality (2) is equivalent to the inequality from the theorem.

References

1. *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Yu.* Optimal recovery of functionals based on inaccurate data // *Math. Notes.*—1991.—Vol. 50, № 6.—P. 1274–1279.
2. *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Yu.* Optimal recovery of values of functions and their derivatives from inaccurate data on the Fourier transform // *Sb.: Mathematics.*—2004.—Vol. 195.—P. 1413–1459.
3. *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Yu.* How best to recover a function from its inaccurately given spectrum? // *Math. Notes.*—2012.—Vol. 92, № 1.—P. 51–58.
4. *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M.* Indefinite knowledge about an object and accuracy of its recovery methods // *Probl. of Inform. Transm.*—2003.—Vol. 39.—P. 104–118.
5. *Marchuk A. G., Osipenko K. Yu.* Best approximation of functions specified with an error at a finite number of points // *Math. Notes.*—1975.—Vol. 17, № 3.—P. 207–212.
6. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery. In: *Optimal Estimation in Approximation Theory* / eds. C. A. Micchelli and T. J. Rivlin.—N. Y.: Plenum Press, 1977.—P. 1–54.
7. *Osipenko K. Yu.* Optimal Recovery of Analytic Functions.—N. Y.: Nova Science Publ., Inc., Huntington, 2000.
8. *Osipenko K. Yu.* Optimal recovery of linear operators in non-Euclidean metrics // *Sb.: Mathematics.*—2014.—Vol. 205, № 10.—P. 1442–1472.
9. *Traub J. F., Wasilkowski G. W., Woźniakowski H.* Information-Based Complexity.—N. Y.: Acad. Press, 1988.
10. *Traub J. F., Woźniakowski H.* A General Theory of Optimal Algorithms.—N. Y.: Acad. Press, 1980.—341 p.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПО НЕТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

К. Ю. Осипенко

В работе рассматривается общий подход к задачам восстановления значений линейных операторов на основании неточно заданной информации об элементах, на которые действуют линейные операторы. К таким задачам относятся большинство проблем, возникающих в вычислительной математике — задачи интерполяции, численного интегрирования, численного дифференцирования, восстановления сигналов по неточно заданному спектру, решение задач математической физики и т. д. Предлагаемый в работе подход, основанный на теории оптимального восстановления, позволяет сравнивать различные методы и находить наилучший из них. Этот подход демонстрируется на ряде простейших модельных задачах, в каждой из которых находится оптимальный метод восстановления и указывается его погрешность.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Секция I

Математический анализ

ПСЕВДОАНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ С ВЕСОВЫМИ ОЦЕНКАМИ

Т. М. Андреева¹

Пусть E — совершенное компактное множество в $\mathbb{C}$. Предположим, что для функции $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ существуют

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow z, \\ \zeta \in E}} \frac{f^{(k)}(z) - f^{(k)}(\zeta)}{z - \zeta} =: f^{(k+1)}(z) \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad z \in E.$$

Функция f называется *$\mathbb{C}$ -бесконечно дифференцируемой* на E , если при любых $n \in \mathbb{N}_0$ и $0 \leq k \leq n$ в формуле Тейлора

$$f^{(k)}(z) = f^{(k)}(\zeta) + \frac{f^{(k+1)}(\zeta)}{1!}(z - \zeta) + \dots + \frac{f^{(n)}(\zeta)}{(n - k)!}(z - \zeta)^{n-k} + R_{n,k}(z, \zeta)$$

остаточные члены удовлетворяют условиям:

$$R_{n,k}(z, \zeta) = o(|z - \zeta|^{n-k}) \quad \text{равномерно по } z, \zeta \in E.$$

Через $C_{\mathbb{C}}^{\infty}(E)$ обозначим семейство всех $\mathbb{C}$ -бесконечно дифференцируемых на E функций.

Е. М. Дынькин в работах [1, 2] установил непосредственную связь между классами Карлемана на данном компакте и классами функций, обладающих продолжениями с компакта в комплексную плоскость с соответствующими оценками $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ вблизи компакта.

В настоящей работе результаты Е. М. Дынькина распространяются на пространства бесконечно дифференцируемых функций, задаваемых последовательностями весов общего вида.

Для произвольной выпуклой на $[0, \infty)$ функции ψ положим

$$\sup_{n \geq 0} \sup_{0 \leq k \leq n} \sup_{\substack{\zeta, z \in E, \\ \zeta \neq z}} \frac{|R_{n,k}(\zeta, z)|(n - k + 1)!}{(n + 1)! e^{\psi(n+1)} |\zeta - z|^{n-k+1}} =: \|f\|_{\psi},$$

$$\sup_{z \in E} \sup_{n \geq 0} \frac{|f^{(n)}(z)|}{n! e^{\psi(n)}} =: \|f\|^{\psi}, \quad \|f\|_{\psi} := \|f\|_{\psi} + \|f\|^{\psi},$$

и образуем пространство $A_{\psi}(E) := \{f \in C_{\mathbb{C}}^{\infty}(E) : \|f\|_{\psi} < \infty\}$.

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

Пусть последовательность $\Psi = (\psi_p)_{p=1}^\infty$ выпуклых функций удовлетворяет условиям $x = o(\psi_p(x))$, $x \rightarrow \infty$, $p \in \mathbb{N}$, и

$$(\forall p \in \mathbb{N}) (\exists C_p > 0) (\psi_p(t) \leq \psi_{p+1}(t) + C_p), \quad t \geq 0.$$

Образует по ней линейное пространство $A_\Psi(E) := \bigcup_{p=1}^\infty A_{\psi_p}(E)$, наделенное топологией внутреннего индуктивного предела.

Введем еще одно пространство. Для веса ψ и дифференцируемой в $\mathbb{R}^2$ функции F положим

$$\|F\|_\psi := \sup_{\zeta \notin E} \left| \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(\zeta) \right| e^{\psi^*(\log(1/\rho(\zeta, E)))},$$

где ψ^* — сопряженная по Юнгу с ψ функция, а $\rho(\zeta, E)$ — минимум из 1 и расстояния от z до E . Образует банахово пространство

$$PA_\psi(E) := \{F \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \cap A_\psi(E) : \|F\|_\psi < \infty\}$$

с нормой $\|F\|_\Psi := \|F\|_\psi + \|F\|_\psi$. По весовой последовательности Ψ , как выше, определим внутренний индуктивный предел

$$PA_\Psi(E) := \bigcup_{p=1}^\infty PA_{\psi_p}(E).$$

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Предположим, что весовая последовательность Ψ , как выше, удовлетворяет двум дополнительным условиям*

$$(\exists D > 0) (\psi_p^*(x) + x \leq \psi_p^*(x + D) + D) (\forall x \geq 0) (\forall p \in \mathbb{N});$$

$$(\forall p \in \mathbb{N}) (\exists C_p > 0) (\psi_p(x) + x \leq \psi_{p+1}(x) + C_p) (\forall x \geq 0).$$

Тогда имеется линейный непрерывный оператор продолжения, действующий из $A_\Psi(E)$ в $PA_\Psi(E)$.

Литература

1. *Dynkin E. M.* The pseudoanalytic extension // J. Anal. Math.—1993.—Vol. 60.—P. 45–70.
2. *Дынькин Е. М.* Псевдоаналитическое продолжение гладких функций, равномерная шкала. Математическое программирование и смежные вопросы // Теория функций и функц. анализ. Тр. 7-й зимней шк. (Дрогобыч, 1974 г.).—М.: Центр. эконом.-мат. ин-т АН СССР, 1976.—С. 40–73.

ЛИНЕЙНЫЙ НЕПРЕРЫВНЫЙ ПРАВЫЙ ОБРАТНЫЙ
К ОПЕРАТОРУ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
В (LB) -ПРОСТРАНСТВАХ

В. А. Варзиев¹

По последовательности $\Phi := (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, направленной влево по подчинению $(\forall n \in \mathbb{N} \exists C_n : \varphi_{n+1}(z) \leq \varphi_n(z) + C_n, z \in \mathbb{C})$ образуем весовое пространство Фреше $P(\Phi) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(\varphi_n)$, где

$$E(\varphi_n) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{\varphi_n} := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_n(z)}} < \infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Сопряженное с $P(\Phi)$ пространство $P'(\Phi)$, очевидно, имеет вид $P'(\Phi) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P'_n(\Phi)$, где $P'_n(\Phi) := \{\nu : \nu - \text{линейный функционал на } P(\Phi) \text{ с } \|\nu\|'_{\varphi_n} < \infty\}$.

Заметим, что при каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ дельта-функция $\delta_\lambda(f) = f(\lambda), f \in P(\Phi)$, является элементом сопряженного пространства $P'(\Phi)$ и, более того, все $\delta_\lambda \in P'_1(\Phi), \lambda \in \mathbb{C}$.

Пусть $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность попарно различных точек комплексной плоскости с $|\lambda_k| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. По последовательности $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ образуем банаховы пространства

$$K^1(\varphi_n, \Lambda) := \left\{ c = (c_j)_{j=1}^{\infty} : |c|_n^1 := \sum_{j=1}^{\infty} |c_j| e^{\varphi_n(\lambda_j)} < \infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и (DFS) -пространство $K^1(\Phi, \Lambda) := \bigcup_{n=1}^{\infty} K^1(\varphi_n, \Lambda)$.

Предложение 1. Допустим, что Φ — каноническая последовательность (в смысле [1]). Ряд $\sum_{j=1}^{\infty} c_j 4\delta_{\lambda_j}$ сходится в $P'_b(\Phi)$ абсолютно тогда и только тогда, когда $c = (c_j)_{j \in \mathbb{N}} \in K^1(\Phi, \Lambda)$.

Из предложения 1 оператор $W : c = (c_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} c_j \delta_{\lambda_j}$ действует из $K^1(\Phi, \Lambda)$ в $P'_b(\Phi)$ линейно и непрерывно.

Далее образуем по нашим весам $\varphi_n \in \Phi$ банаховы пространства

$$E(\varphi_n, \Lambda) := \left\{ d = (d_k)_{k=1}^{\infty} : \|d\|_n := \sup_{k \geq 1} \frac{|d_k|}{e^{\varphi_n(\lambda_k)}} < \infty \right\},$$

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН.

а по ним пространство Фреше последовательностей комплексных чисел $P(\Phi, \Lambda) := \bigcap_{n=1}^{\infty} E(\varphi_n, \Lambda)$ с топологией, заданной набором норм $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Рассмотрим оператор сужения $R : f \mapsto (f(\lambda_j))_{j=1}^{\infty}$, который, очевидно, действует непрерывно из $P(\Phi)$ в $P(\Phi, \Lambda)$. Тогда сопряженный с ним оператор R' действует из $K^1(\Phi, \Lambda)$ в $P'_b(\Phi)$ и $R'(c) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \delta_{\lambda_j} c_j$ для всех $c = (c_j)_{j \in \mathbb{N}} \in K^1(\Phi, \Lambda)$, откуда следует, что оператор R' совпадает с W .

В силу рефлексивности пространств $P(\Phi)$ и $K^1(\Phi, \Lambda)$ из вышеизложенного следует, что оператор W имеет ЛНПО тогда и только тогда, когда R имеет ЛНЛО. Это заключение позволяет нам применить результаты из [2] о существовании ЛНЛО у оператора R к вопросу о существовании ЛНПО у оператора представления W .

Пусть последовательности Λ и Φ согласованы [3] и Φ правильная [3]. Если существует функция L , удовлетворяющая условиям (L1)–(L3) работы [2] и выполняются условия

$$(\forall n) (\exists m) (\exists C > 0) \left(\sup_{|\zeta| \leq 1} \varphi_m(z + \zeta) \leq \inf_{|\zeta| \leq 1} \varphi_n(z + \zeta) + C \right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

и

$$(\forall n) (\exists m) (\exists C > 0) \left(\max_{|\zeta| \leq 1} \psi(z + \zeta) \leq \min_{|\zeta| \leq 1} \psi(z + \zeta) + \varphi_n(z) - \varphi_m(z) + C \right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

где ψ — некоторая локально ограниченная в $\mathbb{C}$ функция. Тогда

Теорема 1. Пусть Φ правильная, Λ и Φ согласованы, Φ — каноническая последовательность, удовлетворяющая условиям (1) и (2). Предположим еще, что функция L имеет в точках из Λ простые нули, других нулей у нее нет и она удовлетворяет условиям (L1)–(L3). Тогда следующие условия равносильны:

- (i) Оператор представления $W : K^1(\Phi, \Lambda) \rightarrow P'_b(\Phi)$ имеет ЛНПО.
- (ii) Имеется такая целая в $\mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_\lambda$ функция $G(z, \lambda)$, которая удовлетворяет условиям

$$G(z, z) = L(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

$$(\forall l) (\exists m) (\exists C > 0) (|G(z, \lambda)| \leq C e^{\varphi_l(z) + \psi(\lambda) + \varphi_l(\lambda) - \varphi_m(\lambda)}), \quad z, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Напомним, что смысл того, что оператор представления имеет ЛНПО, заключается в том, что в случае его существования имеется принципиальная возможность линейно и непрерывно в зависимости от разлагаемого элемента найти коэффициенты разложения.

Литература

1. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Continuation of holomorphic functions with growth conditions and some of its applications // Stud. Math.—2010.—Vol. 200.—P. 279–295.
2. *Абанин А. В., Варзиев В. А.* О существовании линейного непрерывного левого обратного у оператора сужения на пространствах Фреше целых функций // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2013.—№ 4.
3. *Абанин А. В., Варзиев В. А.* Достаточные множества в весовых пространствах Фреше целых функций // Сиб. мат. журн.—2013.—Т. 54, № 4.—С. 725–741.

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОБИЛЬНОСТИ ПОДМОДУЛЕЙ РАНГА 1 С ДВУМЯ ОБРАЗУЮЩИМИ

Т. А. Волковая¹

Пусть Ω — выпуклая ограниченная область в $\mathbf{C}$, $P := [1, H_\Omega(\theta))$ — пространство целых функций f экспоненциального типа, удовлетворяющих условию $h_f(\theta) < H_\Omega(\theta)$, где h_f — индикатор функции f , H_Ω — опорная функция области Ω в смысле комплексного анализа. Рассматриваем P как топологический модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$ многочленов от π . Здесь π — произвольная целая функция минимального типа при порядке $\rho = 1$.

Пусть $\lambda \in \mathbf{C}$, $\tilde{\lambda} := \pi^{-1}(\lambda)$, $O(\tilde{\lambda})$ — кольцо ростков функций, локально аналитических на $\tilde{\lambda}$, $O_\pi(\tilde{\lambda})$ — подкольцо $O(\tilde{\lambda})$, состоящее из композиций $u \circ \pi$, $u \in O(\tilde{\lambda})$. Рассматриваем $O(\tilde{\lambda})$ как модуль над кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda})$. Пусть I — замкнутый подмодуль в P . Обозначим $I(\tilde{\lambda})$ минимальный подмодуль $O_\pi(\tilde{\lambda})$ -модуля $O(\tilde{\lambda})$, включающий I . Подмодуль I допускает локальное описание, если он совпадает со своей локальной оболочкой $\bigcap_{\lambda \in \mathbf{C}} (I(\tilde{\lambda}) \cap P)$.

Предположим, что замкнутый подмодуль $I \subseteq P$ порожден функциями $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in P$, т. е. совпадает с замыканием в P множества сумм вида $p\mathcal{F} + q\mathcal{G}$, где $p, q \in \mathbf{C}[\pi]$. Ниже мы сформулируем одно достаточное условие, при котором подмодуль I будет допускать локальное описание. Формулировка этого условия требует некоторой подготовки.

Во-первых, будем предполагать, что функция π является целой функцией вполне регулярного роста при некотором уточненном порядке $\rho(r) \rightarrow \rho \in (0, 1)$ с всюду положительным индикатором. Легко убедиться, что существует такая константа $\kappa \geq 1$, что вне некоторого множества нулевой относительной меры выполняются оценки

$$\kappa^{-1}|z| \leq \hat{\mu}(|\pi(z)|) \leq \kappa|z|,$$

где $\hat{\mu}(r) = \nu(\ln r)$, ν — обратная к функции $\mu(r) := r^{\rho(r)}$.

Во-вторых, считаем, что образующие $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ допускают представления $\mathcal{F} = \varphi f F$ и $\mathcal{G} = \varphi g G$ соответственно, где φ, f, F, g, G — некоторые целые функции. Считаем, что функции f, F, g, G являются π -симметричными, т. е. представляются в виде композиций $f := \hat{f} \circ \pi$,

¹Россия, Славянск-на-Кубани, ФГБОУ ВПО «КубГУ».

$F := \widehat{F} \circ \pi$, $g := \widehat{g} \circ \pi$, $G := \widehat{G} \circ \pi$, где $\widehat{f}$, $\widehat{F}$, $\widehat{g}$, $\widehat{G}$ — тоже некоторые целые функции. Пусть $\widehat{\Lambda} := \{\widehat{\lambda}_i\}$, $\widehat{\Gamma} := \{\widehat{\gamma}_i\}$ — последовательности нулей функций $\widehat{F}$ и $\widehat{G}$ соответственно, занумерованные каким-либо образом. Считаем, что все элементы последовательностей $\widehat{\Lambda}$ и $\widehat{\Gamma}$ лежат вне единичного круга и

$$\Delta := \max \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{\widehat{\mu}(|\widehat{\lambda}_n|)}; \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{\widehat{\mu}(|\widehat{\gamma}_n|)} \right\} < +\infty.$$

В-третьих, считаем, что функции $f\mathcal{G}$ и $g\mathcal{F}$ лежат в P . Значит, для индикаторов $h_{f\mathcal{G}}$, $h_{g\mathcal{F}}$ функций $f\mathcal{G} = \varphi f g G$ и $g\mathcal{F} = \varphi f g F$ и некоторой ограниченной тригонометрически выпуклой 2π -периодической функции $h(\theta)$ выполнены равномерные по θ оценки

$$\max \{h_{f\mathcal{G}}(\theta), h_{g\mathcal{F}}(\theta)\} < h(\theta) < H_\Omega(\theta).$$

Теорема. Если для некоторого $\delta > 0$ удовлетворяющего условию $h(\theta) + \delta < H_\Omega(\theta)$, нулевые множества $\widehat{\Lambda}$ и $\widehat{\Gamma}$ можно упорядочить так, что выполнено неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln S_n}{\widehat{\mu}(t_n)} < -\kappa^{1+2\rho} \left(2\kappa \frac{\Delta}{\delta} \right)^{\frac{2}{1-\rho}} (h + \delta),$$

где

$$S_n := \sum_{i \geq n} \left| \frac{1}{\widehat{\gamma}_i} - \frac{1}{\widehat{\lambda}_i} \right|, \quad t_n := \max_{i=1, \dots, n} \max \{|\widehat{\lambda}_i|, |\widehat{\gamma}_i|\}$$

$$h = h_{\max} - \min \{h_{\min}; 0\}, \quad h_{\max} := \max_{\theta} h(\theta), \quad h_{\min} := \min_{\theta} h(\theta),$$

то замкнутый подмодуль I , порождаемый функциями $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, допускает локальное описание.

Следствие 1. Если $F = G$ и $\varphi f g F \in P$, то I обилен.

Следствие 2. Если $\mathcal{F} = \varphi f$, $\mathcal{G} = \varphi g$ и $\varphi f g = \frac{\mathcal{F}\mathcal{G}}{\varphi} \in P$, то I обилен.

Следствие 3. Если функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются π -симметричными и $\mathcal{F}\mathcal{G} \in P$, то I обилен.

Следствие 4. Если $\mathcal{F} = \varphi f$, $\mathcal{G} = \varphi g$, φ — целая функция вполне регулярного роста при порядке $\rho = 1$ и $h_F + h_G - h_\varphi < H_\Omega$, то I обилен.

Легко видеть, что при $f = g = F = G = 1$ подмодуль I имеет одну образующую φ (является главным), значит, следствие 1 обобщает результат Р. Г. Письменного, который утверждает, что главные подмодули в P допускают локальное описание.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ОГРАНИЧЕННЫХ НА КОНУСАХ, К НЕКОТОРЫМ ВОПРОСАМ ТЕОРИИ БАЗИСОВ ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ

А. К. Дронов¹

Обобщается классическая задача интерполяции линейных операторов, ограниченных на парах банаховых пространств, на случай линейных операторов, ограниченных на парах конусов. Вводится понятие интерполяционного свойства тройки конусов и равномерного интерполяционного свойства семейства троек конусов по отношению к тройке банаховых пространств. Получен результат о равномерном интерполяционном свойстве семейства конусов в пространствах весовых числовых последовательностей.

Теорема. Пусть $E_i = c_0(a_i)$, $F = c_0(b_i)$ ($i = 0, 1$), $E = c_0(a)$, $F = c_0(b)$, причем $E_1 \subset E \subset E_0$, $F_1 \subset F \subset F_0$ и банахова тройка (E_0, E_1, E) обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F) . Пусть $\mathcal{A}$ — множество конусов в ω^+ такое, что для каждого конуса $Q \in \mathcal{A}$ выполняются условия:

- 1) Q — нижняя полурешетка в ω ;
- 2) $Q \cap E_1^+$ — тотальный конус в пространстве E_1 ;
- 3) $Q \cap E_1^{++} \neq \{\emptyset\}$.

Тогда семейство троек конусов

$$\mathcal{M} = \{(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}$$

обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F) .

Литература

1. Cerda J., Coll H. Function cones and interpolation // Math. Nachr.—2005.—Vol. 278.—P. 227–239.
2. Каплицкий В. М., Дронов А. К. Применение интерполяционных свойств операторов, ограниченных на конусах, к некоторым вопросам теории базисов в пространствах Фреше // Мат. форум.—2014.—Т. 7.—С. 88–103.

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫХ ПОЛИНОМОВ¹

З. А. Кусраева²

Необходимые сведения из теории векторных решеток см. в [3, 4]. Все рассматриваемые ниже векторные решетки считаются архимедовыми. Для любой конечной последовательности $(x_1, \dots, x_N)$ элементов равномерно полной векторной решетки E выражение вида $f(x_1, \dots, x_N)$ может быть корректно определено, если только f — положительно однородная непрерывная функция на $\mathbb{R}^N$. Изучение таких выражений называется *однородным функциональным исчислением* (см. [4]).

Функциональное исчисление позволяет, в частности, корректно определить в произвольной равномерно полной векторной решетке E суммы $\mathfrak{S}_s$ порядка s и геометрические средние $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{S}_s(x_1, \dots, x_N) := \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^s \right)^{\frac{1}{s}},$$
$$\mathfrak{G}(x_1, \dots, x_N) := \left(\prod_{i=1}^N |x_i| \right)^{\frac{1}{N}}.$$

Пусть E — векторная решетка, Y — произвольное векторное пространство, s — целое число ≥ 1 . Отображение $P : E \rightarrow Y$ называется *однородным полиномом степени s* (или *s -однородным полиномом*), если существует s -линейный оператор $\check{P} : E^s \rightarrow Y$, именуемый *порождающим* для полинома P , такой, что $P(x) = \check{P}(x, \dots, x)$ ($x \in E$).

Говорят, что полином $P : E \rightarrow Y$ *ортогонально аддитивен* или *ортоаддитивен*, если для любых дизъюнктивных $x, y \in E$ выполняется $P(x + y) = P(x) + P(y)$. Напомним, что *дизъюнктивность* элементов x и y означает $|x| \wedge |y| = 0$. Свойства ортогонально аддитивных однородных полиномов подробно рассмотрены в [1, 5].

Следующий результат устанавливает связь однородного полинома с суммами порядка s и средним геометрическим.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00623-а.

²Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН.

Теорема. Пусть E — равномерно полная векторная решетка, Y — квазиполное локально выпуклое пространство, $P : E \rightarrow Y$ — ортогонально аддитивный ограниченный s -однородный полином, $\check{P} : E^s \rightarrow Y$ — порождающий симметричный s -линейный оператор полинома P . Тогда имеют место следующие равенства:

$$P(\mathfrak{S}_s(x_1, \dots, x_N)) = P(x_1) + \dots + P(x_N) \quad (x_1, \dots, x_N \in E_+);$$

$$P(\mathfrak{G}(x_1, \dots, x_s)) = \check{P}(x_1, \dots, x_s) \quad (x_1, \dots, x_s \in E_+).$$

Доказательство опирается на установленный в [5, теорема 4] результат о линеаризации полиномов, согласно которому любой ортогонально аддитивный ограниченный s -однородный полином P , действующий из равномерно полной векторной решетки E в квазиполное локально выпуклое пространство F , может быть представлен в виде

$$P(x) = S(x^{s\odot}) \quad (x \in E),$$

где $S : E^{s\odot} \rightarrow Y$ — ограниченный линейный оператор, а $x \mapsto x^{s\odot} = \odot_s(x, \dots, x) = x \odot_s \dots \odot_s x$ — канонический полином, действующий из E в $E^{s\odot}$. Здесь $E^{s\odot}$ — s -ая степень векторной решетки E , а $\odot_s : E^s \rightarrow E^{s\odot}$ — полилинейный оператор, порождающий канонический полином, однозначно определяемые следующими условиями:

- (1) $E^{s\odot}$ — векторная решетка, $2 \leq s \in \mathbb{N}$;
- (2) $\odot_s : E^s \rightarrow E^{s\odot}$ — ортосимметричный решеточный s -морфизм;
- (3) для любой векторной решетки F и любого симметричного решеточного s -морфизма $\varphi : E^s \rightarrow F$ существует единственный решеточный гомоморфизм $\Phi : E^{s\odot} \rightarrow F$, такой что $\Phi \circ \odot_s = \varphi$.

Понятие степени векторной решетки введено и изучено в [2].

Литература

1. Benyamini Y., Lassalle S., Llavona J. G. Homogeneous orthogonally additive polynomials on Banach lattices // Bull. London Math. Soc.—2006.—Vol. 38, № 3.—P. 459–469.
2. Boulabiar K., Buskes G. Vector lattice powers: f -algebras and functional calculus // Comm. Algebra.—2006.—Vol. 34, № 4.—P. 1435–1442.
3. Meyer-Nieberg P. Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer, 1991.
4. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
5. Кусраева З. А. О представлении ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн.—2011.—Т. 52, № 2.—С. 315–325.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ВЛОЖЕНИЯ
ДЛЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА
С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

М. Г. Магомед-Касумов¹

При исследовании некоторых вопросов теории приближений суммами Фурье — Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем возникает необходимость наложения на вес условий, при которых будет выполнено вложение

$$L_w^{p(x)}(E) \subset L^1(E). \quad (1)$$

Например, построение рядов Фурье — Хаара для каждой функции $f \in L_w^{p(x)}(E)$ возможно в том и только в том случае, когда имеет место соотношение (1). В данной работе исследуются условия на вес $w(x)$, при которых будет справедливо вложение (1).

Перейдем к более строгой постановке задачи.

Пусть $w(x)$ — неотрицательная почти всюду (п. в.) положительная суммируемая функция (вес), определенная на множестве $E = [0, 1]$ с мерой Лебега μ . Весовым пространством Лебега с переменным показателем $L_w^{p(x)}(E)$ называется множество измеримых на E функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $\int_E |f(x)|^{p(x)} w(x) \mu(dx) < \infty$, где $p(x)$ — измеримая на E неотрицательная функция. Как известно [1–3], если

$$1 \leq \operatorname{ess\,inf}_{x \in E} p(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in E} p(x) < \infty, \quad (2)$$

то топология пространства $L_w^{p(x)}(E)$ нормируема и одну из эквивалентных норм можно определить, полагая для $f \in L_w^{p(x)}(E)$

$$\|f\|_{p(\cdot), w}(E) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} w(x) dx \leq 1 \right\}.$$

Далее символом $\mathcal{P}(E)$ будем обозначать множество измеримых на множестве E функций $p(x)$, удовлетворяющих условию (2). Нам

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН.

также понадобится обозначение $\widehat{\mathcal{P}}(E)$ для подмножества из $\mathcal{P}(E)$, включающего только те $p(x)$, которые удовлетворяют дополнительному ограничению $1 < \operatorname{ess\,inf}_{x \in E} p(x)$.

Множество весовых функций $w(x)$, удовлетворяющих условиям:

- (Н1) $w(x) \geq C_1(w) > 0$, $x \in E_1 = \{x \in E : p(x) = 1\}$ (п. в.),
 (Н2) $\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p'(\cdot)}(E_2) < \infty$, $E_2 = E \setminus E_1$

будем обозначать через $\mathcal{H}(E, p)$.

Следующая теорема дает достаточные условия для справедливости соотношения (1).

Теорема 1. Если $w(x) \in \mathcal{H}(E, p)$, $p(x) \in \mathcal{P}(E)$ то имеет место вложение (1), причем

$$\|f\|_1(E) \leq c(p, w) \|f\|_{p(\cdot), w}(E).$$

На вопрос о том, насколько условия (Н1) и (Н2) являются необходимыми, в какой-то степени отвечают приведенные ниже утверждения.

Теорема 2. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}(E)$ и имеет место (1). Тогда вес $w(x)$ будет удовлетворять условию (Н1).

Теорема 3. Пусть $p(x) \in \widehat{\mathcal{P}}(E)$. Для того чтобы имело место вложение (1), необходимо, чтобы $w(x)^{\alpha(x)} \in L^1(E)$ для любой измеримой функции $\alpha(x)$, которая при некотором $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию

$$-\frac{1}{p(x)-1} + \varepsilon \leq \alpha(x) \leq 1, \quad x \in E. \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в условии (3) взять $\varepsilon = 0$, то из него будет следовать условие (Н2). Действительно, пусть $\int_E w(x)^{-\frac{1}{p(x)-1}} dx < \infty$. Тогда, так как

$$\int_E \left| w(x)^{-\frac{1}{p(x)}} \right|^{p'(x)} dx = \int_E w(x)^{-\frac{1}{p(x)-1}} dx,$$

то

$$\left\| w^{-\frac{1}{p(\cdot)}} \right\|_{p'(\cdot)}(E) < \infty.$$

Литература

1. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A.* Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis.—Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.—312 p.—(DOI 10.1007/978-3-0348-0548-3).
2. *Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents.—Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.—509 p.—(DOI 10.1007/978-3-642-18363-8).
3. *Паралудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0, 1])$ // Мат. заметки.—1979.—Т. 26, № 4.—С. 613–632.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДИСКРЕТНЫМИ СУММАМИ ФУРЬЕ — ЯКОБИ

М. С. Султанахмедов¹

Исследуется задача обработки и сжатия одномерных и двумерных сигналов, заданных на неравномерных сетках.

Рассмотрим дискретную сетку $\Omega_N = \{t_j\}_{j=0}^{N-1} \in [-1, 1]$, в которой узлы t_j подчинены условиям $\eta_j \leq t_j \leq \eta_{j+1}$ ($0 \leq j \leq N-1$), а точки η_j , в свою очередь, выбраны так, что $-1 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{N-1} < \eta_N = 1$. Пусть для некоторой непрерывной на $[-1, 1]$ функции $f(t)$ заданы ее значения в точках t_j . Причем измерения произведены с ошибкой, т. е. заданы измерения $y_j = f(t_j) + \xi_j$ ($0 \leq j \leq N-1$), в которых независимые случайные погрешности ξ_j удовлетворяют условиям $E[\xi_j] = 0$, $E[\xi_i \xi_j] = \sigma_j^2 \delta_{ij}$ ($0 \leq j \leq N-1$), где $E[X]$ — математическое ожидание случайной величины X . Требуется приближенно восстановить $f(t)$ в точке $t \in [-1, 1]$ по дискретной информации $\{z_j\}_{j=0}^{N-1}$.

В настоящей работе данная задача решается посредством применения прямого и обратного преобразований Фурье по дискретным полиномам Якоби $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$, образующим на Ω_N ортонормированную систему с весом $\kappa^{\alpha,\beta}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t_j) \hat{P}_{m,N}^{\alpha,\beta}(t_j) \kappa^{\alpha,\beta}(t_j) \Delta\eta_j = \delta_{nm},$$

где $\Delta\eta_j = \eta_{j+1} - \eta_j$, δ_{nm} — символ Кронекера.

В работе [1] автором было исследовано асимптотическое поведение полиномов $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ при $n, N \rightarrow \infty$, что позволило в дальнейшем изучить в работе [2] аппроксимативные свойства частичных сумм Фурье — Якоби

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f, t) = \sum_{k=0}^n \hat{f}_k^{\alpha,\beta} \hat{P}_{k,N}^{\alpha,\beta}(t),$$

где

$$\hat{f}_k^{\alpha,\beta} = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \hat{P}_{k,N}^{\alpha,\beta}(t_j) \kappa^{\alpha,\beta}(t_j) \Delta\eta_j.$$

¹Россия, Махачкала, ДНЦ РАН.

Далее, пусть на плоскости задана сетка

$$\Omega_{NM} = \{(x_i, y_j)\}_{i=0, j=0}^{i=N-1, j=M-1} \in [-1, 1] \times [-1, 1],$$

в которой

$$\begin{cases} \varepsilon_i \leq x_i \leq \varepsilon_{i+1}, & 0 \leq i \leq N-1, \\ \epsilon_j \leq y_j \leq \epsilon_{j+1}, & 0 \leq j \leq M-1, \end{cases}$$

причем

$$\begin{cases} -1 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_{N-1} < \varepsilon_N = 1, \\ -1 = \epsilon_0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_{M-1} < \epsilon_M = 1. \end{cases}$$

Вполне аналогично одномерному случаю вводится система двумерных дискретных полиномов Якоби $\hat{P}_{n,m}^{\alpha,\beta}(x, y)$, ортонормированных на Ω_{NM} , и конструируются соответствующие двумерные суммы Фурье — Якоби $S_{n,m}^{\alpha,\beta}(x, y)$. Ставится задача исследования аппроксимативных свойств таких сумм, а также их численной реализации и изучения вопроса устойчивости вычисления как значений самих полиномов $\hat{P}_{n,m}^{\alpha,\beta}(x, y)$, так и коэффициентов Фурье — Якоби $\hat{f}_{n,m}^{\alpha,\beta}$.

Литература

1. Султанахмедов М. С. Асимптотические свойства и весовые оценки полиномов, ортогональных на неравномерной сетке с весом Якоби // Изв. СГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2014.—Т. 14, № 1.—С. 38–47.
2. Султанахмедов М. С. О сходимости метода наименьших квадратов с неравномерными узлами // Изв. СГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика.—(принята в печать).

ОБОБЩЕННОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ АЛГЕБРАХ

Б. Б. Тасоев¹

Пусть E — равномерно полная векторная решетка, $x_1, \dots, x_N \in E$. В работе [4] было показано, что для функций φ со значениями в произвольной f -подалгебре идеального центра конструктивным образом можно определить $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in E$. Гомоморфизм $\varphi \mapsto \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, называемое *обобщенным функциональным исчислением*, служит обобщением аналогичных результатов из [1, 2, 3]. Цель данной работы — построить функциональное исчисление в равномерно полных f -алгебрах с единицей для непрерывных функций полиномиального роста со значениями из идеального центра.

Обозначим через $\text{Hom}(L)$ и $\text{H}_m(L)$ множество всех $\mathbb{R}$ -значных решеточных гомоморфизмов и множество $\mathbb{R}$ -значных мультипликативных решеточных гомоморфизмов на L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть E — векторная решетка и Λ — f -алгебра. E называется *левым f -модулем над Λ* , если выполняются следующие условия:

- (1) E является левым модулем над Λ относительно умножения $(\pi, x) \mapsto \pi \cdot x$ из $\Lambda \times E$ в E , т. е. $\pi \cdot (x+y) = \pi \cdot x + \pi \cdot y$, $(\pi+\rho) \cdot x = \pi \cdot x + \rho \cdot x$, $\pi \cdot (\rho \cdot x) = (\pi\rho) \cdot x$ и $\pi \cdot (\lambda x) = (\lambda\pi) \cdot x = \lambda(\pi \cdot x)$ для всех $\pi, \rho \in \Lambda$, $x, y \in E$ и $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (2) $\pi \cdot x \geq 0$ для всех $0 \leq \pi \in \Lambda$ и $0 \leq x \in E$;
- (3) из того, что $x \perp y$ следует $\pi \cdot x \perp y$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x, y \in E$.

Правый f -модуль над Λ определяется аналогично. Пусть E — f -алгебра. Всякую f -подалгебру в E , являющуюся левым f -модулем над Λ , будем называть просто *f -модулем*.

Лемма. Пусть L — f -модуль над Λ . Для любого $\omega \in \text{H}(L)$ существует единственный $\tilde{\omega} \in \text{H}_m(\Lambda)$ такой, что $\|\tilde{\omega}\| = 1$, $\omega(\pi x) = \tilde{\omega}(\pi)\omega(x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. При этом, $\lambda\omega = \tilde{\omega}$ для всех $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ и $\omega \in \text{H}(L)$.

Пусть $x_1, \dots, x_N \in E$ не равны нулю одновременно и $\mathfrak{x} := \{e, x_1, \dots, x_N\}$. Символом $\Lambda\langle\langle\mathfrak{x}\rangle\rangle$ будем обозначать f -подмодуль в E ,

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН.

порожденный множеством $\mathfrak{x}$, $\Lambda[\mathfrak{x}]_{\mathfrak{m}}$ будет означать замыкание множества $\{(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)) \in \mathbb{R}^N : 0 \neq \omega \in H_{\mathfrak{m}}(\Lambda(\langle \mathfrak{x} \rangle))\}$. Предположим, что замкнутое множество $K \subset \mathbb{R}^N$ содержит $\Lambda[\mathfrak{x}]_{\mathfrak{m}}$. Введем функции $dt_1, \dots, dt_N, I$, действующие по закону $dt_i(t) = t_i I_E$, $I : t \mapsto I_E$, I_E — тождественный оператор на E , $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$. Обозначим f -алгебру непрерывных функций φ из K в Λ полиномиального роста через $\mathcal{B}(K, \Lambda)$, т. е. $\varphi \in \mathcal{B}(K, \Lambda)$ тогда и только тогда, когда существует показатель $n \in \mathbb{N}$ и число $M > 0$ такие, что $|\varphi| \leq M(I + dt_1 + \dots + dt_N)^n$. Заметим, что $\mathcal{B}(K, \Lambda)$ является f -модулем над Λ . Структура f -модуля определяется формулой $\pi f(t) := \pi \circ (f(t))$ для всех $t \in K$, $\pi \in \Lambda$ и $f \in \mathcal{B}(K, \Lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть E — равномерно полная f -алгебра с мультипликативной единицей e , $x_1, \dots, x_N, y \in E$, Λ — замкнутая по норме f -подалгебра в $\mathcal{Z}(E)$. Предположим, что $\Lambda[\mathfrak{x}]_{\mathfrak{m}} \subset K$ и $\varphi \in \mathcal{B}(K, \Lambda)$. Будем писать $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, если выполняется равенство $\omega(y) = \tilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in H_{\mathfrak{m}}(\Lambda(\langle e, x_1, \dots, x_N, y \rangle))$.

Теорема. Пусть E — равномерно полная f -алгебра с мультипликативной единицей e , Λ — равномерно замкнутая f -подалгебра $\mathcal{Z}(E)$, $x_1, \dots, x_N \in E$ и $\mathfrak{x} := \{e, x_1, \dots, x_N\}$. Предположим, что замкнутое подмножество $K \subset \mathbb{R}^N$ содержит $\Lambda[\mathfrak{x}]_{\mathfrak{m}}$. Тогда отображение $h : \varphi \mapsto \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ единственный Λ -модульный гомоморфизм из $\mathcal{B}(K, \Lambda)$ в E такой, что $h(I) = e$ и $h(dt_i) = x_i$ ($1 \leq i \leq N$). Более того, $h(\mathcal{B}(K, \Lambda))$ совпадает с равномерным замыканием f -подмодуля в E , порожденного элементами $e, x_1, \dots, x_N$, т. е. $h(\mathcal{B}(K, \Lambda)) = \Lambda(\langle e, x_1, \dots, x_N \rangle)$.

Литература

1. Buskes G., de Pagter B., van Rooij A. Functional calculus on Riesz spaces // Indag. Math. (N. S.).—1991.—Vol. 4, № 2.—P. 423–436.
2. Haydon R., Levy M., Raynaud Y. Randomly normed spaces.—Paris: Hermann, 1991.
3. Kusraev A. G. Functional calculus and Minkowski duality on vector lattices // Vladikavkaz Math. J.—2009.—Vol. 11, № 2.—P. 31–42.
4. Тасоев Б. Б. Обобщенное функциональное исчисление в векторных решетках // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, вып 3.—С. 77–88.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСУЩЕСТВОВАНИЯ
БЛИЗКОРОДСТВЕННЫХ ПОПУЛЯЦИЙ НА
ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНОМ АРЕАЛЕ

А. С. Туганова¹, О. Ю. Веремеенко¹

Рассматривается система дифференциальных уравнений, моделирующая распространение по кольцевому ареалу двух конкурирующих за единый ресурс $p(x)$ близкородственных популяций:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -q'_1 + \eta_1 u f, \quad f = 1 - \frac{u+v}{p(x)}, \quad p(x) = e^{\mu(x)}, \\ \dot{v} &= -q'_2 + \eta_2 v f, \quad (\dot{}) = \frac{\partial()}{\partial t}, \quad ()' = \frac{\partial()}{\partial x}, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Миграционные потоки q_1, q_2 учитывают диффузию:

$$\begin{aligned} q_1 &= -k_1 u' + u \varphi_1(x, v), \quad \varphi_1 = \alpha_1 (\ln v)' + \beta_1 (\ln p)', \\ q_2 &= -k_2 v' + v \varphi_2(x, u), \quad \varphi_2 = \alpha_2 (\ln u)' + \beta_2 (\ln p)'. \end{aligned} \quad (2)$$

Функции $\eta_i(x)$, $k_i(x)$, $\alpha_i(x)$ и $\beta_i(x)$ определяют соответственно параметры роста, диффузии и миграционные коэффициенты популяций. Для системы (1), (2), дополненной условиями периодичности, указаны две леммы.

Лемма 1. При $k_i = \alpha_i + \beta_i$, $i = 1, 2$ у системы (1), (2) существует семейство стационарных решений $u = \gamma e^{\mu(x)}$, $v = (1 - \gamma) e^{\mu(x)}$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Лемма 2. При $\eta_1 k_2 = \eta_2 k_1$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ система имеет косимметрию $L = (\eta_2 v, -\eta_1 u)$, которой отвечает семейство стационарных решений с переменным спектром.

Вычислительные эксперименты в среде MATLAB подтвердили существование установленных леммами 1, 2 стационарных решений.

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

ВАРИАНТ БЕССЕТОЧНОГО МЕТОДА ВИХРЕЙ В ЯЧЕЙКАХ ДЛЯ АНАЛИЗА ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Н. Ю. Хасматулина¹

Повышенный интерес механиков к изучению плоских вихревых движений идеальной жидкости связан с их разнообразными приложениями в задачах гидродинамики, динамики океана и атмосферы. В данной работе предложен вариант бессеточного метода вихрей в ячейках для расчета динамики баротропной жидкости на сфере с учетом силы Кориолиса.

Пусть в начальный момент времени в некоторой области D заданы координаты N жидких частиц и значение завихренности ω в них. Считается, что завихренность переносится пассивно жидкой частицей. Для расчета динамики жидких частиц необходимо решать систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = \psi_y(x_i, y_i), \quad \dot{y}_i = -\psi_x(x_i, y_i).$$

На каждом временном шаге интегрирования этой системы нужно находить функцию тока ψ из уравнения:

$$-\Delta\psi + \Lambda^2\psi = \omega + \frac{1}{2}\gamma r^2,$$

где $\gamma = \text{const}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\Lambda^2 = \text{const}$.

Такая задача может быть рассмотрена в различных областях, при различных краевых условиях на функцию тока ψ . В настоящей работе задача рассмотрена в прямоугольном контейнере $D = \{(x, y) : |x| \leq a/2; |y| \leq b/2\}$ при периодических краевых условиях на функцию тока ψ .

Для решения уравнения, связывающего завихренность ω и функцию тока ψ , использовался проекционный метод Бубнова — Галёркина. Функция тока ψ разыскивалась в виде отрезка ряда Фурье:

$$\psi \approx \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^{k_x} \sum_{j=1}^{k_y} \psi_{ij}^r g_{ij}^k(x, y) + \psi_{00}^1 \frac{g_{00}^1}{2}.$$

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

В качестве базисных функций использовалась полная система тригонометрических функций, удовлетворяющих краевым условиям задачи и условию нормировки.

Неизвестные коэффициенты разложения функции тока ψ задаются выражениями:

$$\psi_{ij}^k = \frac{a^2 b^2}{4\pi^2(i^2 b^2 + j^2 a^2) + \Lambda^2 a^2 b^2} \underbrace{\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \omega(x, y) g_{ij}^k(x, y) dx dy}_{I_{ij}^k},$$

$$\psi_{00}^1 = \frac{1}{\Lambda^2} \underbrace{\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \omega(x, y) g_{00}^1 dx dy}_{I_{00}^1} - \frac{\gamma}{12\Lambda^2} (a^2 + b^2) \sqrt{ab}.$$

Основная сложность здесь заключается в вычислении интегралов I_{ij}^k . Для нахождения этих интегралов область D разбивалась на N_{box} ячеек прямоугольной формы, в каждой из которых ω аппроксимировалась многочленом третьей степени φ_q (q — номер ячейки), коэффициенты которого находились методом наименьших квадратов. Вне ячейки завихренность полагалась тождественно равной нулю. Это позволило аналитически вычислять приближенное значение интегралов I_{ij}^k .

Были проведены тестовые расчеты, которые показывают, что предложенная численная схема расчета динамики жидких частиц, во-первых, сохраняет устойчивый стационарный режим на достаточно большом интервале времени, во-вторых, качественно воспроизводит известный аналитический результат.

Литература

1. Говорухин В. Н. Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости // ЖВМ МФ.—2011.—Т. 51, № 6.— С. 1133–1147.
2. Григорьев Ю. Н., Вшивков В. А. Численные методы «частицы-в-ячейках». — Новосибирск: Наука, 2000.
3. Ламб Г. Гидродинамика.—М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1947.—929 с.

СИЛЬНО РАЗЛОЖИМАЯ ПОЛУГРУППА ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

А. Г. Чпиев¹

Основной результат доклада — теорема о построении сильно разложимой полугруппы линейных отношений.

Пусть X — банахово пространство. Множество линейных (замкнутых) отношений на пространстве X обозначим $LR(X)$ ($LCR(X)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Полугруппой линейных отношений* называется функция

$$T : (0, \infty) \rightarrow LR(X)$$

со свойством

$$T(t+s)x = T(t)T(s)x, \quad t, s > 0,$$

для любого $x \in X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Полугруппа замкнутых линейных отношений $T : (0; \infty) \rightarrow LRC(X)$ называется *сильно разложимой*, если $X = X_- \oplus X_+$; X_- , X_+ — инвариантны относительно $T(t)$, $t > 0$; $\exists T_- : (0; \infty) \rightarrow EndX_- : T_-(t)x = T(t)x$, $t > 0$, $x \in X_-$; $\exists T_+ : (0; \infty) \rightarrow EndX_+ : T_+(t)x = T(t)^{-1}x$, $t > 0$, $x \in X_+$, где через $EndX$ обозначено множество линейных ограниченных операторов на X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A_-, A_+ — генераторы полугрупп T_- , T_+ . Тогда *генератором полугруппы T* называется отношение

$$A = A_- \oplus (-A_+).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отношение $A \in LR(H)$ называется *нормальным*, если $D(A) = D(A^*)$; $AA^* = A^*A$, где A^* — сопряженное к A отношение.

Теорема. Пусть H — гильбертово пространство и резольвентное множество $\rho(A)$ нормального линейного отношения $A \in LR(H)$ содержит множество

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : a - \gamma < \operatorname{Re} \lambda < a + \gamma\},$$

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН.

для некоторых $a, \gamma \in \mathbb{R}$. Тогда верны следующие утверждения: $H = H_1 \oplus H_- \oplus H_+$; $A = A_1 \oplus A_- \oplus A_+$; причем $A_0 = A_1 0$, операторы A_- , A_+ являются нормальными и являются генераторами полугрупп нормальных операторов T_- , T_+ класса S_0 на подпространствах H_- , H_+ соответственно; отношение A является генератором сильно разложимой полугруппы линейных отношений $T = T_- \oplus T_+^{-1}$.

Литература

1. Баскаков А. Г., Чернышов К. И. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Мат. сб.—2002.—Т. 193, № 11.—С. 3–42.
2. Баскаков А. Г. Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов // Мат. заметки.—2008.—Т. 84, № 2.—С. 175–192.
3. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Изв. РАН. Сер. мат.—2009.—Т. 73, № 2.—С. 3–68.
4. Чшиев А. Г. Теорема Герхарда–Прюсса для некоторого класса вырожденных полугрупп операторов // Мат. заметки.—2013.—Т. 94, № 3.—С. 426–440.

Секция II

**Математическое
моделирование**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКОВ ВОЗДУХА В ГОРОДСКОЙ ЗАСТРОЙКЕ С ДОМАМИ ОДИНАКОВОЙ ВЫСОТЫ

М. В. Волик¹

В работе проводится сравнение результатов расчетов в двумерном и трехмерном приближении для одного варианта конфигурации городской застройки. Расчетная область прямоугольной формы с равномерным шагом 1 м представляет собой типичную одностороннюю улицу с домами одинаковой высоты по ее сторонам. В качестве масштаба длины выбрана высота домов, равная 15 м. Ширина улицы принималась равной одной высоте домов, расстояние от входной границы до подветренной стороны улицы — десяти высотам, от наветренной стороны улицы до выходной границы — двадцати высотам, от нижней границы расчетной области до верхней границы — шести высотам. Расстояние по третьей координате в трехмерной задаче составило 20 м. Расчеты проводились с использованием свободно распространяемого пакета OpenFoam при поддержке программы «Университетский кластер» (<http://www.unicluster.ru>) и удаленного доступа к консоли на управляющем узле вычислительного кластера (2012), “BL2x220 Cluster Console,” <https://unihub.ru/resources/bl2x220cc> Web-лаборатории Unihub (UniHUB.ru).

Вычислительный эксперимент проводился для интервала времени от 0 до 100 с. (с шагом 0,001 с.) с использованием стандартного решателя pimpleFoam, $K-\varepsilon$ модели турбулентности и пристеночных функций в соответствующих граничных условиях [2].

Результаты расчетов показали, что за указанный промежуток времени течение воздушных потоков стационарировалось, причем быстрее при трехмерном моделировании. Кроме того, в этом случае внутри улицы образуется один вихрь и один вихрь в следе за застройкой, воздух в каждом из которых перемещается по часовой стрелке. В случае двумерных расчетов картина меняется не только количественно, но и качественно: внутри улицы образуется вихрь, в котором воздушный поток передвигается против часовой стрелки,

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН; Москва, Финансовый университет при Правительстве РФ.

а по часовой стрелке поток воздуха перемещается в вихре над всей застройкой, которого не было в трехмерной модели, и в вихре большего вертикального размера, чем в трехмерном расчете, в следе за застройкой. Горизонтальные размеры вихря в следе за застройкой составили 130 м в случае двумерных расчетов и 55 м — в случае трехмерных.

Распределение горизонтальной составляющей скорости воздуха по высоте дома в центре улицы показало, что в зависимости от варианта размерности расчетов воздушные потоки внутри улицы перемещаются в противоположном направлении, центры вихрей располагаются на разной высоте — семь и девять метров. Скорость возвратных потоков воздуха в улице занижена в случае двумерных расчетов, а, примерно, на высоте 5–6 м над крышами домов находится центр второго вихря.

Сравнение распределения горизонтальной составляющей скорости воздуха по высоте в сечении, находящемся за застройкой на расстоянии, равном $1/2$ от высоты домов, показало, что скорость потоков воздуха в верхней части значительно отличается и в случае двумерных расчетов центр вихря располагается выше уровня крыш.

Таким образом, двумерные и трехмерные расчеты для одной и той же расчетной области могут привести к разным количественным и качественным результатам. Однако, для рассматриваемой задачи сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными [1] показало, что значительно точнее результаты расчетов в трехмерном приближении.

Литература

1. *Kastner-Klein P., Fedorovich E., Rotach M. W.* A wind tunnel study of organised and turbulent air motions in urban street canyons // *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*.—2001.—Vol. 89.—P. 849–861.
2. *Крапошин М. В., Самоваров О. И., Стрижак С. В.* Пакет OpenFoam: численное моделирование задач МСС // Материалы шк.-семинара «Основы использования OpenFoam, Salome, ParaView».—URL: <https://unihub.ru/tools/unicfdc1>

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ И КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЯХ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КОНЦИРКУЛЯРНО-ГАРМОНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОНЕЧНОМЕРНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП ЛИ¹

П. Н. Клепиков², О. П. Хромова²

1. Введение

Особый интерес в дифференциальной геометрии представляют конформные преобразования. Среди нетривиальных конформных преобразований можно выделить те, которые переводят геодезические окружности в геодезические окружности. Такие конформные преобразования были определены К. Яно в [2], и называются конциркулярными. Также К. Яно ввел в рассмотрение тензор конциркулярной кривизны, являющийся инвариантом данного преобразования.

2. Обозначения и факты

Пусть (G, g) — n -мерная группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита, через $R(X, Y)T = \nabla_Y \nabla_X T - \nabla_X \nabla_Y T + \nabla_{[X, Y]}T$ — тензор кривизны Римана, через $r = \text{tr}(V \mapsto R(V, X)Y)$ — тензор Риччи и через $\rho = \text{tr}(r)$ — скалярную кривизну, где X, Y, T, V — векторные поля на G . Тогда *тензор конциркулярной кривизны* определяется равенством

$$Z = R - \frac{\rho}{2n(n-1)} g \otimes g,$$

где

$$\begin{aligned} H \otimes K(u_1, u_2, u_3, u_4) = \\ = H(u_1, u_3)K(u_2, u_4) + H(u_2, u_4)K(u_1, u_3) - \\ - H(u_1, u_4)K(u_2, u_3) - H(u_2, u_3)K(u_1, u_4) \end{aligned}$$

¹Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ, грант НШ-2263.2014.1, Правительства РФ, госконтракт № 14.B25.31.0029, Министерства образования и науки РФ, код проекта: 1148, а также программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «АлтГУ», проект № 2014.312.1.4.

²Россия, Барнаул, Алтайский государственный университет.

— произведение Кулкарни-Номидзу, или в координатах:

$$Z_{hijk} = R_{hijk} - \frac{\rho}{n(n-1)}(g_{ij}g_{hk} - g_{ik}g_{hj}).$$

По аналогии с тензором конформной кривизны назовем тензор конциркулярной кривизны *гармоническим*, если выполняется условие $\operatorname{div} Z = 0$.

Пусть далее G — трех(четырёх)мерная группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой, $\{\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]\}$ — соответствующая алгебра Ли. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством скалярных произведений в $\mathfrak{g}$ и множеством левоинвариантных (псевдо)римановых метрик в G . Будем обозначать соответствующее скалярное произведение через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и называть пару $\{\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ *метрической алгеброй Ли*.

3. Основной алгоритм

В решении задачи об нахождении конечномерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо) римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны можно выделить следующие основные этапы:

- 1) отыскание компонент тензора кривизны и значения скалярной кривизны;
- 2) нахождение компонент тензора конциркулярной кривизны и его дивергенции;
- 3) решение системы уравнений $\operatorname{div} Z = 0$.

Решение задачи на каждом этапе проводилось по следующему алгоритму. Первоначально строилась удобная для вычислительной работы модель исследуемого объекта. Далее создавалась программа для реализации в системе аналитических расчетов Maple. Следующий шаг был посвящен анализу и истолкованию полученных результатов. После чего делался вывод о структуре изучаемого объекта и о возможности уточнения модели.

Таким образом, для нахождения конечномерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны необходимо в локальной системе координат реализовать следующую схему:

Задача:

Найти компоненты тензора кривизны (R_{ijkt}) и скалярную кривизну (ρ) левоинвариантных (псевдо)римановых метрик на конечномерной группе Ли

**Математическая модель:**

$$\rho = r_{ik} g^{ik}$$

$$r_{ik} = R_{ijkt} g^{jt}$$

$$R_{ijkt} = c_{ij}^s \Gamma_{sk,t} - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is,t} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js,t}$$

$$\Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij,k} g^{ks}$$

$$\Gamma_{ij,k} = 1/2 (c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij})$$

$$c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks},$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли,

g_{ij} — компоненты метрического тензора,

$\Gamma_{ij,k}$ — символы Кристоффеля первого рода,

Γ_{ij}^s — символы Кристоффеля второго рода,

g^{ks} — компоненты кометрического тензора,

R_{ijkt} — компоненты тензора Римана,

r_{ik} — компоненты тензора Риччи,

ρ — скалярная кривизна,

n — размерность группы Ли

**Применение систем компьютерной математики:**

- 1) пишем процедуру для отыскания компонент тензора кривизны и скалярной кривизны;
- 2) задаем массив структурных констант (c_{ij}^k) , метрический тензор (g_{ij}) и находим компоненты тензора кривизны и скалярную кривизну



Задача:

Найти компоненты тензора конциркулярной кривизны конечномерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой



Математическая модель:

$$Z_{hijk} = R_{hijk} - \frac{\rho}{n(n-1)}(g_{ij}g_{hk} - g_{ik}g_{hj}),$$

где R_{ijkl} — компоненты тензора Римана,
 ρ — скалярная кривизна,
 g_{ij} — компоненты метрического тензора,
 n — размерность группы Ли



Применение систем компьютерной математики:

- 1) пишем процедуру для отыскания компонент тензора конциркулярной кривизны;
- 2) используя найденные выше компоненты тензора кривизны и скалярную кривизну, находим компоненты тензора конциркулярной кривизны



Задача:

Найти дивергенцию тензора конциркулярной кривизны конечномерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой



Математическая модель:

$$(\operatorname{div} Z)_{ijk} = g^{st} Z_{ijkt;s},$$

где $Z_{ijkt;s}$ — ковариантная производная тензора
конциркулярной кривизны,

g^{ks} — компоненты метрического тензора



Применение систем компьютерной математики:

- 1) пишем процедуру для отыскания компонент дивергенции тензора конциркулярной кривизны;
- 2) используя найденные выше компоненты тензора конциркулярной кривизны, находим компоненты дивергенции



Задача:

Решить систему уравнений $(\operatorname{div} Z)_{ijk} = 0$ относительно
структурных констант



Математическая модель:

$$(\operatorname{div} Z)_{ijk} = 0$$

где $(\operatorname{div} Z)_{ijk}$ — компоненты дивергенции тензора
конциркулярной кривизны



Применение систем компьютерной математики:

Используя встроенную процедуру solve, решаем систему уравнений относительно структурных констант и находим интересующие нас группы Ли

4. Трехмерные группы Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны

При помощи описанного алгоритма и пакета символьных вычислений среды Maple получена классификация трехмерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны.

Теорема 1 [3]. Пусть G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тензор конциркулярной кривизны является гармоническим на G в том и только том случае, если выполняется одно из условий:

1) Унимодулярный случай. Алгебра Ли группы G имеет один из следующих типов: либо $su(2)$, либо $e(2)$, либо R^3 , и левоинвариантная риманова метрика гомотетична стандартной (т. е. структурные константы алгебры Ли равны между собой);

2) Неунимодулярный случай. G — группа Ли, и структурные константы ее алгебры Ли имеют один из следующих видов:

$$1) C = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

$$2) C = \begin{pmatrix} 1 \pm \sqrt{1-\gamma^2} & \gamma \\ \gamma & 1 \mp \sqrt{1-\gamma^2} \end{pmatrix}, \quad \gamma \in [-1; 1].$$

◁ Рассмотрим трехмерную унимодулярную группу Ли G с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Используя удобный для вычислений базис (см. [1]) и применяя алгоритм, описанный в разделе 3, найдем существенные компоненты тензора конциркулярной кривизны. В частности,

$$Z_{2121} = R_{2121} + \frac{\rho}{6} = \frac{1}{3}\lambda_3\lambda_2 - \frac{2}{3}\lambda_3^2 + \frac{1}{3}\lambda_3\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2^2 - \frac{2}{3}\lambda_2\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_1^2,$$

поскольку

$$R_{2121} = \frac{1}{2}\lambda_3\lambda_2 - \frac{3}{4}\lambda_3^2 + \frac{1}{2}\lambda_3\lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_2^2 - \frac{1}{2}\lambda_2\lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_1^2,$$

$$\rho = \frac{1}{2}\lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_1^2 - \lambda_3\lambda_1 - \lambda_2\lambda_1.$$

Аналогично получаем

$$Z_{3131} = \frac{1}{3}\lambda_3\lambda_2 - \frac{2}{3}\lambda_2^2 + \frac{1}{3}\lambda_2\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_3^2 - \frac{2}{3}\lambda_3\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_1^2,$$

$$Z_{3232} = \frac{1}{3}\lambda_3\lambda_1 - \frac{2}{3}\lambda_1^2 + \frac{1}{3}\lambda_2\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_3^2 - \frac{2}{3}\lambda_3\lambda_2 + \frac{1}{3}\lambda_2^2.$$

Вычисляя ковариантные производные тензора конциркулярной кривизны, определяем нетривиальные компоненты его дивергенции.

В частности,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} Z_{213} &= Z_{2131;1} + Z_{2132;2} = \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_3^2\lambda_2 - \lambda_2^2\lambda_1 + \lambda_2^3 - 2\lambda_3^3 + \lambda_3^2\lambda_1 - \lambda_2\lambda_1^2 + \lambda_1^3), \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} Z_{2131;1} &= -\frac{1}{2}(\lambda_3^2\lambda_2 - \lambda_3\lambda_2^2 + 2\lambda_2^2\lambda_1 - \lambda_2^3 + \\ &\quad + \lambda_3^3 - 2\lambda_3^2\lambda_1 + \lambda_3\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_1^2), \\ Z_{2132;2} &= -\frac{1}{2}(2\lambda_2\lambda_1^2 - \lambda_3\lambda_1^2 - \lambda_1^3 + \lambda_3^2\lambda_1 + \\ &\quad + \lambda_3^3 - 2\lambda_3^2\lambda_2 + \lambda_3\lambda_2^2 - \lambda_2^2\lambda_1), \\ Z_{2133;3} &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} Z_{312} &= -\frac{1}{2}\lambda_3\lambda_2^2 - \frac{1}{2}\lambda_2^2\lambda_1 + \lambda_2^3 - \frac{1}{2}\lambda_3^3 + \frac{1}{2}\lambda_3^2\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_3\lambda_1^2 - \frac{1}{2}\lambda_1^3, \\ \operatorname{div} Z_{321} &= \frac{1}{2}\lambda_3\lambda_1^2 - \lambda_1^3 + \frac{1}{2}\lambda_2\lambda_1^2 - \frac{1}{2}\lambda_3^2\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3^3 - \frac{1}{2}\lambda_3\lambda_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_2^3. \end{aligned}$$

Решая систему уравнений $(\operatorname{div} Z)_{ijk} = 0$ относительно структурных констант $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, получим

$$\begin{cases} \lambda_2 = \lambda_3, \\ \lambda_1 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3, \\ \lambda_2 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2, \\ \lambda_3 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

Используя аналогичный алгоритм, проведем вычисления для неунимодулярного случая (подробнее см. [3]). Теорема доказана. $\triangleright$

Теорема 2 [3]. Пусть G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тензор конциркулярной кривизны является гармоническим на G в том и только том случае, если выполняется одно из условий:

1) Унимодулярный случай. Алгебра Ли группы G имеет тип $su(2)$, $e(2)$, $e(1, 1)$, $sl(2, R)$ или R^3 .

2) Неунимодулярный случай. G — группа Ли, и структурные константы ее алгебры Ли имеют один из следующих видов:

$$1) C = \begin{pmatrix} \lambda \cos \varphi & \lambda \sin \varphi & 0 \\ -\lambda \sin \varphi & \lambda \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda \neq 0, \quad \varphi \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$2) C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0,$$

$$3) C = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0,$$

$$4) C = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q \neq t,$$

$$5) C = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q \neq 0,$$

$$6) C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0,$$

$$7) C = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ -q & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q \neq 0.$$

Причем метрический тензор должен иметь следующий вид:

(a–c):

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

(d):

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(e–g):

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

◁ Доказательство основано на использовании удобного для вычислений базиса (см. [7]) и применении алгоритма, описанного в разделе 3 (подробнее см. [3]). ▷

5. Четырехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны

Теорема 3 [4]. Пусть G — вещественная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\operatorname{div} Z = 0$ в том и только в том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в таблице 1.

Таблица 1

Четырехмерные унимодулярные алгебры Ли
с гармоническим тензором конциркулярной кривизны

№	Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
1	$4A_1$	
2	$A_{3,6} \oplus A_1$	$C_{2,3}^1 = c, C_{1,3}^2 = -c$, где $c > 0$
3	$A_{3,9} \oplus A_1$	$C_{1,2}^3 = a, C_{1,2}^4 = -am, C_{2,3}^1 = a(m^2 + 1),$ $C_{1,3}^2 = -a(m^2 + 1)$, где $a > 0$

◁ Доказательство основано на использовании удобного для вычислений базиса (см. [5]) и применении алгоритма, описанного в разделе 3 (подробнее см. [4]). ▷

Теорема 4 [4]. Пусть G — вещественная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\operatorname{div} Z = 0$ в том и только в том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в таблице 2.

Таблица 2

Четырехмерные неунимодулярные алгебры Ли
с гармоническим тензором конциркулярной кривизны

№	Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
1	$A_2 \oplus 2A_1$	$C_{1,2}^2 = a$, где $a > 0$
2	$2A_2$	$C_{1,2}^2 = a$, $C_{3,4}^4 = g$, где $a > 0$, $g > 0$
3	$A_{3,3} \oplus A_1$	$C_{1,3}^1 = C_{2,3}^2 = a$, где $a > 0$
4	$A_{3,7}^\alpha \oplus A_1$, $\alpha > 0$	$C_{1,3}^1 = C_{2,3}^2 = \alpha l$, $C_{2,3}^1 = -C_{1,3}^2 = l$, где $l > 0$
5	$A_{4,5}^{1,1}$	$C_{1,4}^1 = C_{2,4}^2 = C_{3,4}^3 = l$, где $l > 0$
6	$A_{4,6}^{\alpha,0}$, $\alpha \neq 0$	$C_{1,4}^1 = \alpha l$, $C_{2,4}^3 = -l$, $C_{3,4}^2 = l$, где $l > 0$
7	$A_{4,6}^{\alpha,\alpha}$, $\alpha > 0$	$C_{1,4}^1 = C_{2,4}^2 = C_{3,4}^3 = \alpha l$, $C_{3,4}^2 = -C_{2,4}^3 = l$, где $l > 0$
8	$A_{4,9}^1$	$C_{1,4}^1 = C_{2,3}^1 = 2a$, $C_{2,4}^2 = C_{3,4}^3 = a$, где $a > 0$
9	$A_{4,11}^\alpha$	$C_{1,4}^1 = 2C_{3,4}^3 = 2C_{2,4}^2 = 2a\alpha$, $C_{2,3}^1 = 2a \alpha $, $C_{3,4}^2 = -C_{2,4}^3 = a$, где $a > 0$
10	$A_{4,12}$	$C_{1,3}^1 = C_{2,3}^2 = a$, $C_{1,4}^1 = C_{2,4}^2 = b$, $C_{2,4}^1 = -C_{1,4}^2 = d$, где $a > 0$, $d > 0$

◁ Доказательство основано на использовании удобного для вычислений базиса (см. [6]) и применении алгоритма, описанного в разделе 3 (подробнее см. [4]). ▷

Литература

1. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Adv. in Mathematics.—1976.—Vol. 21.—P. 293–329.
2. Yano K. Concircular geometry. I–IV // Proc. Imp. Acad. Tokyo.—1940.—Vol. 16.—P. 195–200, 354–360, 442–448, 505–511.
3. Клепиков П. Н., Хромова О. П. Применение пакетов аналитических вычислений к исследованию конциркулярно-гармонических свойств 3-мерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Сб. науч. статей междунар. shk.-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае». Ч. I. (Барнаул, 5–8 ноября 2013 г.).—Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2013.—С. 133–139.
4. Клепиков П. Н., Хромова О. П. Четырехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны // Изв. АлтГУ. Математика и механика.—2014.—№ 1/2.—(в печати).

5. Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г. Сигнатура кривизны Риччи левонинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. тр.—2008.—Т. 11.—№ 2.—С. 115–147.
6. Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г. Сигнатура кривизны Риччи левонинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. тр.—2009.—Т. 12, № 1.—С. 40–116.
7. Чибрикова Л. Н. Применение пакетов аналитических вычислений к решению задач однородной (псевдо)римановой геометрии: Дис. . . . к. ф.-м. н.—Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2005.—118 с.

РАСЧЕТ ОБЛАСТЕЙ ПАРАМЕТРОВ, ДОПУСКАЮЩИХ СОСУЩЕСТВОВАНИЕ КОНКУРИРУЮЩИХ ВИДОВ

М. Г. Кругликов¹

Рассматривается модель распространения конкурирующих за единый ресурс популяций на неоднородном ареале. Для системы нелинейных параболических уравнений с переменными коэффициентами проведен математический и численный анализ сценариев устойчивого сосуществования видов. В численном эксперименте на основе метода прямых проанализировано разрушение косимметрии для системы двух близкородственных популяций на кольцевом ареале. Рассчитаны области значений параметров роста, соответствующих сценариям выживания и сосуществования видов.

Модель записывается в виде системы нелинейных уравнений параболического типа относительно плотностей популяций $w_i = w_i(x, t)$, $i = 1, \dots, M$:

$$\dot{w}_i = k_i w_i'' + \eta_i w_i f, \quad f = 1 - \frac{1}{P^m} \sum_{j=1}^M w_j^m. \quad (1)$$

Коэффициенты диффузии k_i , роста η_i и ресурс P являются положительными функциями пространственной переменной x . Функция f описывает уменьшение прироста популяций при приближении плотностей к предельным значениям, случай $m = 1$ отвечает логистическому закону. Точка отвечает дифференцированию по t , а штрих — по x . Задача рассматривается с условием периодичности и начальными условиями:

$$w_i(0, t) = w_i(a, t), \quad k_i(0)w_i'(0, t) = k_i(a)w_i'(a, t), \quad (2)$$

$$w_i|_{t=0} = w_{i0}(x), \quad i = 1, \dots, M. \quad (3)$$

Доказаны леммы определяющие соотношения на параметры, при которых существует непрерывное семейство решений.

Лемма 1. При постоянной на ареале функции ресурса $P(x) = P_0 = \text{const}$ и для произвольных коэффициентов $k_i(x)$, $\eta_i(x)$ в системе (1)–(3) имеется бесконечное число стационарных решений $\tilde{w}_i = \text{const}$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^M \tilde{w}_i^m = P_0^m$.

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

Лемма 2. При постоянных коэффициентах роста η_i и выполнении соотношений $k_i(x)\eta_j = k_j(x)\eta_i$, $1 \leq i < j \leq M$ система (1)–(3) для произвольного ресурса $P(x)$ обладает линейной косимметрией

$$rL = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \xi_j = -\sum_{i=1}^{j-1} \eta_i w_i + \sum_{i=j+1}^M \eta_j w_j.$$

В отличие от случая симметрии, косимметрия порождает решение с переменным спектром устойчивости.

Для интегрирования системы применяется метод прямых и метод Рунге-Кутты, численная схема описана в [1]. Основной целью было определение условий, при которых получаются решения в виде устойчиво сосуществующих популяций. Для этого применялся метод, который заключается в определении критических значений параметров, при которых теряют устойчивость решения, соответствующие выживанию только одной популяции.

Анализировался случай постоянных коэффициентов диффузии k_1 , k_2 , роста η_1 и переменного коэффициента роста $\eta_2 = \eta_{20} + \eta_{21} \sin(2\pi x/a)$. При определенных значениях параметров роста η_1 , η_{20} , η_{21} наблюдается сосуществование популяций. На плоскости параметров η_1 и η_{21} найдены области значений, при которых в системе (1)–(3) реализуются различные сценарии выживания популяций. Одна область отвечает выживанию популяций $w_1(x, t)$, другая — выживанию $w_2(x, t)$, а третья — сосуществованию популяций. Граница между первой и третьей областями была найдена при помощи анализа неустойчивости решения $(w_{10}, 0)$, а граница между второй и третьей областями соответствует неустойчивости решения $(0, w_{20})$.

Литература

1. Будянский А. В., Кругликов М. Г., Цибулин В. Г. Численное исследование сосуществования популяций в одной экологической нише // Вестн. Донского гос. техн. ун-та.—2014.—Т. 14, № 2.

АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИИ МЕЛЬНИЦЫ

Д. Г. Минасян¹

Процесс измельчения материала в корпусе центробежной мельницы вертикально типа на сегодняшний день изучен не достаточно хорошо. Очевидно, что наибольшие ударные разрушения и накопление усталостных повреждений в материале происходит в области непосредственного контакта материала с ребрами ротора. Увеличивая разность скоростей между ребрами и материалом за счет снижения скорости материала при постоянной скорости ребер можно добиться большей производительности мельницы. Это лежит в основе выбранного способа усовершенствования конструкции центробежной мельницы. С другой стороны, слишком низкая скорость движения материала в корпусе мельницы будет приводить к худшему перемешиванию материала и его переизмельчению.

Для оценки результатов моделирования процессов в корпусе мельницы использовался следующий алгоритм:

1. Интегрировать в компьютерную модель изменения (вырезы, кольца).
2. Оценить среднюю и максимальную скорость движения материала в корпусе мельницы с изменениями.
3. Если средняя скорость движения материала слишком мала — внести изменения в конструкцию с тем чтобы уменьшить влияние внесенных изменений.
4. Если замедления среды в области ротора недостаточно — внести изменения в конструкцию с тем, чтобы увеличить влияние внесенных изменений.
5. Если получены удовлетворительные результаты и скорость материала уменьшилась, но недостаточно для прекращения перемешивания материала, то перейти к шагу 7.
6. Перейти к шагу 2.
7. Завершение.

Выбор наиболее оптимальных скоростей движения материала проводился эмпирическим путем.

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН.

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ КИПЯЩЕГО ГРАНУЛИРОВАННОГО СЛОЯ

Н. С. Орлова¹

Кипящий (псевдоожженный) и виброкипящий слои гранулированных материалов очень часто используются при очистке газов, сушке и сепарировании зернового материала, а также в химической технологии, так как за счет увеличения площади контакта между газовой и твердой фазами значительно ускоряются процессы тепло- и массопереноса между газом и частицами.

В работе исследуется кипящий слой гранулированного материала. Исследование осуществлялось с использованием свободно распространяемого пакета для решения прикладных задач гидро и аэромеханики OpenFoam при поддержке программы «Университетский кластер» с удаленным доступом к консоли на управляющем узле вычислительного кластера BL2x220 (2012), “BL2x220 Cluster Console,” <https://unihub.ru/resources/bl2x220cc> Web-лаборатории Unihub (UniHUB.ru). Вычислительный кластер BL2x220 состоит из 12 вычислительных узлов, построенных на базе HP BL2x220, каждый из которых включает в себя: 2 сервера, по 2 процессора Intel Xeon CPU E5670 @ 2.93GHz в каждом; по 24 GB RAM в каждом; по 250 GB SATA HDD в каждом. Вычислительные узлы объединены высокопроизводительной сетью Infiniband QDR. Кластер работает под управлением ОС Linux CentOS 5.4 (kernel 2.6.32-358.6.2).

Использовался решатель twoPhaseEulerFoam, в котором реализована двухжидкостная модель кипящего (ожженного) слоя на основе континуального подхода (подхода Эйлера), при котором движение слоя рассматривается как движение двух взаимодействующих континуумов, связанных с газом и частицами. Основные уравнения двухжидкостной модели — уравнения неразрывности и уравнения количества движения для обеих фаз [1–3].

Задача решалась в двумерном приближении. Пренебрегалось влиянием передней и задней стенок расчетной области на процесс ожжения.

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН; Москва, Финансовый университет при Правительстве РФ.

Размеры вычислительной области: высота — 1 м, ширина — 0,4 м, толщина — 0,02 м. Общее время расчетов (реальное время) — 5 с. При этом использовался шаг по времени, равный $1 \cdot 10^{-4}$ с. Шаг по координате x равен 0,005 м, шаг по координате y — 0,005 м.

Для повышения эффективности использования компьютерных ресурсов целесообразно сравнить затраты машинного времени при использовании разного количества вычислительных ядер. В связи с этим проводилось распараллеливание вычислений на 2, 4, 8, 12, 16, 24 и 36 ядрах. Результаты расчетов сравнивались с расчетами, полученными на одном ядре. При распараллеливании расчетная область разбивается на несколько подобластей (доменов) в соответствии с количеством задаваемых ядер. На каждом временном слое происходит «сшивание» расчетных данных на границах доменов. В связи с этим результаты, полученные при распараллеливании на различном количестве ядер, могут немного отличаться.

Наименьшие затраты машинного времени в двумерном случае наблюдаются при использовании двенадцати процессоров. Однако, в связи с тем, что пользователю технологической платформы предоставляется возможность одновременного расчета трех задач с распараллеливанием на 8 или 12 ядер, то с практической точки зрения целесообразно использовать в расчетах распараллеливание на 8 ядер, так как разница во времени расчетов между 12 и 8 ядрами составляет порядка 10 минут. Слишком большое время расчетов при использовании 16 процессоров и более можно объяснить большими затратами времени на пересылку данных между подобластями разбиения.

Таким образом, можно сделать вывод, что для сокращения времени расчетов и использования ядер суперкомпьютера в рамках двумерной задачи оптимально распараллеливать вычисления на 8 процессоров.

Литература

1. *Berend van Wachem* Derivation, implementation, and validation of computer simulation models for gas-solid fluidized beds // Dissertation at Delft University of Technology.—2000.—P. 222.
2. *Henrik Rusche* Computational fluid dynamics of dispersed two-phase flows at high phase fractions // Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy of the University of London and Diploma of Imperial College.—2002.—P. 343.
3. *Johnson P., C. Jackson R.* Frictional-collisional constitutive relations for granular materials with application to plane shearing // J. of Fluid Mechanics—1987.—Vol. 176.—P. 67–93.

О ПРИМЕНЕНИИ ПАКЕТОВ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ КОНФОРМНО ПОЛУПЛОСКИХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ РАЗМЕРНОСТИ 4¹

С. В. Пастухова², О. П. Хромова²

Пусть на компактном многообразии M^n определена связность Леви-Чивитта ∇ относительно метрики $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, заданная в локальной системе координат $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ своими коэффициентами $\{\Gamma_{ij}^k\}$ — символами Кристоффеля второго рода $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Также пусть на многообразии M^n дополнительно определена риманова метрика $d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij} dx^i dx^j$. Тогда по аналогии с символами Кристоффеля второго рода можно определить тензор деформации связности

$$T_{ij}^k = \frac{1}{2} \bar{g}^{ks} (\bar{g}_{sj,i} + \bar{g}_{is,j} - \bar{g}_{ij,s}),$$

где $\bar{g}^{ks}$ — матрица обратная к $\bar{g}_{ij}$, а $\bar{g}_{ij,s}$ — ковариантная производная $\bar{g}_{ij}$ относительно связности ∇ . Нетрудно проверить, что $\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + T_{ij}^k$, где $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ — символами Кристоффеля второго рода для метрики $\bar{g}_{ij}$. Для тензора кривизны

$$\bar{R}_{lki}^q = \frac{\partial \bar{\Gamma}_{li}^q}{\partial x^k} + \bar{\Gamma}_{kp}^q \bar{\Gamma}_{li}^p - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{ki}^q}{\partial x^l} - \bar{\Gamma}_{lp}^q \bar{\Gamma}_{ki}^p$$

метрики g_{ij} получим формулу (см. подробнее [3])

$$\bar{R}_{lki}^q = R_{lki}^q + Q_{lki}^q, \quad (1)$$

где R_{lki}^q — тензор кривизны связности ∇ , и

$$Q_{lki}^q = T_{li,k}^q + T_{kp}^q T_{li}^p - T_{ki,l}^q - T_{lp}^q T_{ki}^p, \quad (2)$$

который, следуя [4], назовем тензором кривизны метрики g_{ij} относительно связности ∇ .

¹Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ, грант НШ-2263.2014.1, Правительства РФ, госконтракт № 14.В25.31.0029, Министерства образования и науки РФ, код проекта: 1148, а также программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «АлтГУ», проект № 2014.312.1.4.

²Россия, Барнаул, Алтайский государственный университет.

При делении тензора кривизны на метрический тензор, в смысле произведения Кулкарни-Номидзу, получаем разложение [2]:

$$R = W + A \otimes g, \quad (3)$$

или в локальной системе координат:

Целая часть A от деления R на g называется тензором одномерной кривизны (или тензором Схоутена), а остаток от деления W — тензором Вейля (или тензором конформной кривизны).

Далее будем считать, что $\dim M = 4$. Далее, следуя [1], изложим основные конструкции. Тогда риманова метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в слоях пространства расслоения $\Lambda^2 M$ по правилу

$$\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2 \rangle_x = \det(g_x(X_i, Y_j)).$$

Оператор Ходжа $*$: $\Lambda_x^2 M \rightarrow \Lambda_x^2 M$, задаваемый соотношением

$$\langle * \alpha, \beta \rangle \text{vol} = \alpha \wedge \beta$$

для любых $\alpha, \beta \in \Lambda_x^2 M$, $x \in M$, где vol — форма объема на M , обладает тем свойством, что $*^2 = \text{Id}$. Отсюда

$$\Lambda_x^2 M = \Lambda_x^+ \oplus \Lambda_x^-, \quad (4)$$

где Λ_x^+ и Λ_x^- обозначают соответственно собственные пространства, отвечающие собственным значениям $+1$ и -1 оператора $*$.

Риманову тензору кривизны в любой точке многообразия M можно поставить в соответствие оператор $\mathcal{R}: \Lambda_x^2 M \rightarrow \Lambda_x^2 M$, определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(T \wedge V) \rangle_x = R_x(X, Y, T, V), \quad (5)$$

где $R_x(X, Y, T, V) = g_x(R(X, Y)T, V)$.

Матрицу оператора кривизны $\mathcal{R}$ относительно разложения (4) можно представить в блочном виде [1]:

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \frac{s}{12} \text{Id} & Z \\ \hline Z^t & W^- + \frac{s}{12} \text{Id} \end{array} \right), \quad (6)$$

где W^+ и W^- — матрицы *автодуальной* и *антиавтодуальной* составляющих тензора Вейля W .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Риманово многообразие (M^4, g) называется *конформно полуплоским*, если автодуальная или антиавтодуальная составляющая его тензора Вейля тривиальна.

Любой ортонормированный базис e_1, e_2, e_3, e_4 пространства $T_x M$ определяет ортонормированный базис

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 \pm e_3 \wedge e_4), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_3 \pm e_4 \wedge e_2), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_4 \pm e_2 \wedge e_3) \end{aligned} \quad (7)$$

пространства $\Lambda_x^\pm M$ (см., например, [2]).

Отметим, что матрицы W^+ и W^- являются симметричными и их компоненты в ортонормированном базисе (7) находятся по формулам:

$$\begin{aligned} W_{11}^+ &= \frac{1}{2}(R_{1212} + 2R_{1234} + R_{3434}) - \frac{s}{12}, \\ W_{22}^+ &= \frac{1}{2}(R_{1313} - 2R_{1324} + R_{2424}) - \frac{s}{12}, \\ W_{33}^+ &= \frac{1}{2}(R_{1414} + 2R_{1423} + R_{2323}) - \frac{s}{12}, \\ W_{12}^+ &= \frac{1}{2}(R_{1213} + R_{1242} + R_{3413} + R_{3442}), \\ W_{13}^+ &= \frac{1}{2}(R_{1214} + R_{1223} + R_{3414} + R_{3423}), \\ W_{23}^+ &= \frac{1}{2}(R_{1314} + R_{1323} + R_{4214} + R_{4223}), \end{aligned} \quad (8)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} W_{44}^- &= \frac{1}{2}(R_{1212} - 2R_{1234} + R_{3434}) - \frac{s}{12}, \\ W_{55}^- &= \frac{1}{2}(R_{1313} + 2R_{1324} + R_{2424}) - \frac{s}{12}, \\ W_{66}^- &= \frac{1}{2}(R_{1414} - 2R_{1423} + R_{2323}) - \frac{s}{12}, \\ W_{45}^- &= \frac{1}{2}(R_{1213} - R_{1242} - R_{3413} + R_{3442}), \\ W_{46}^- &= \frac{1}{2}(R_{1214} - R_{1223} - R_{3414} + R_{3423}), \\ W_{56}^- &= \frac{1}{2}(R_{1314} - R_{1323} - R_{4214} + R_{4223}). \end{aligned} \quad (9)$$

Сформируем ряд теорем в локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$ в некоторой точке $P \in M^4$

Теорема 1. При конформной деформации $d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij} dx^i dx^j$ метрики ds^2 четырехмерного риманова многообразия автодуальная и антиавтодуальная составляющие тензора Вейля преобразуются по формулам:

$$\bar{W}^+ = e^{2\sigma} W^+ + \left(\frac{s}{24} \operatorname{sh} 2\sigma - (\Delta\sigma + |\operatorname{grad} \sigma|^2) \operatorname{ch} 2\sigma \right) Id,$$

$$\bar{W}^- = e^{2\sigma} W^- - \left(\frac{s}{24} \operatorname{sh} 2\sigma - (\Delta\sigma + |\operatorname{grad} \sigma|^2) \operatorname{ch} 2\sigma \right) Id,$$

где Δ — оператор Лапласа, $|\operatorname{grad} \sigma|^2$ — квадрат длины градиента, ch — гиперболический косинус, sh — гиперболический синус.

◁ При конформной деформации $d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij} dx^i dx^j$ метрики ds^2 тензор Вейля инвариантен (подробнее см. [2]), т. е.

$$\bar{W} = e^{2\sigma(x)} W.$$

Для тензора кривизны имеем

$$\begin{aligned} \bar{R}_{lkij} &= \bar{g}_{js} \bar{R}_{lki}^s = \bar{g}_{js} (R_{lki}^s + Q_{lki}^s) = \\ &= e^{2\sigma(x)} (R_{lkij} + g_{lj} B_{ki} + g_{ki} B_{lj} - g_{li} B_{kj} - g_{kj} B_{li}), \end{aligned}$$

где $B_{ij} = \sigma_{,ij} - \sigma_{,i} \sigma_{,j} + \frac{1}{2} \sigma_{,k} \sigma^k g_{ij}$ и $\sigma_{,ij}, \sigma_{,i}$ — ковариантные производные функции σ относительно исходной метрики. Для тензора Риччи и скалярной кривизны соответственно выполняется

$$\begin{aligned} \bar{r}_{ki} &= \bar{g}^{lj} \bar{R}_{lkij} = r_{ki} + g_{lj} g^{lj} B_{ki} + g_{ki} g^{lj} B_{lj} - \delta_i^j B_{kj} - \delta_k^l B_{li} = \\ &= r_{ki} + (n-2) B_{ki} + g_{ki} g^{lj} B_{lj}, \\ \bar{s} &= \bar{g}^{ki} \bar{r}_{ki} = e^{-2\sigma} g^{ki} (r_{ki} + (n-2) B_{ki} + g_{ki} g^{lj} B_{lj}) = \\ &= e^{-2\sigma} (s + 2(n-1) g^{ki} B_{ki}). \end{aligned}$$

Кроме того, заметим, что

$$g^{ki} B_{kj} = g^{ki} \left(\sigma_{,ki} - \sigma_{,k} \sigma_{,i} + \frac{1}{2} \sigma_{,t} \sigma^t g_{ki} \right) = g^{ki} \sigma_{,ki} + \frac{1}{2} (n-2) \sigma_{,i} \sigma^i.$$

Поскольку ∇ — риманова связность без кручения $T_x M$ и $\{e_i\}$ — ортонормированный базис, то

$$\sigma_{,ij} = \sigma_{,ji}, \quad B_{ij} - B_{ji} = 0, \quad g_{ij} = \delta_{ij} = g^{ij}. \quad (10)$$

Используя приведенные выше равенства, выразим W_{ij}^+ и W_{ij}^- компоненты 4-мерного риманова многообразия.

$$\begin{aligned}
\overline{W}_{11}^+ &= \frac{1}{2} (\overline{R}_{1212} + 2\overline{R}_{1234} + \overline{R}_{3434}) - \frac{\overline{s}}{12} = \\
&= \frac{e^{2\sigma}}{2} (R_{1212} + g_{12}B_{21} + g_{21}B_{12} - g_{11}B_{22} - g_{22}B_{11} + \\
&\quad + 2[R_{1234} + g_{14}B_{23} + g_{23}B_{14} - g_{13}B_{24} - g_{24}B_{13}] + \\
&\quad + R_{3434} + g_{34}B_{43} + g_{43}B_{34} - g_{33}B_{44} - g_{44}B_{33}) - \\
&\quad - \frac{1}{12} e^{-2\sigma} (s + 2(4-1)g^{ki}B_{ki}) + e^{2\sigma} \left(-\frac{s}{12} + \frac{s}{12} \right) = \\
&= e^{2\sigma} W_{11}^+ + \frac{e^{2\sigma}}{2} [2(g_{12}B_{12} + g_{34}B_{34} + g_{14}B_{23} + g_{23}B_{14} - \\
&\quad - g_{13}B_{24} - g_{24}B_{13}) - (g_{11}B_{22} + g_{22}B_{11} + g_{33}B_{44} + g_{44}B_{33})] + \\
&\quad + \frac{s}{12} (e^{2\sigma} - e^{-2\sigma}) - \frac{1}{2} e^{-2\sigma} g^{ki} B_{ki}.
\end{aligned}$$

Применяя (10) получаем

$$\begin{aligned}
\overline{W}_{11}^+ &= e^{2\sigma} W_{11}^+ - \frac{e^{2\sigma}}{2} (B_{11} + B_{22} + B_{33} + B_{44}) + \\
&\quad + \frac{s}{12} (e^{2\sigma} - e^{-2\sigma}) - \frac{1}{2} e^{-2\sigma} g^{ki} B_{ki}.
\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
B_{11} + B_{22} + B_{33} + B_{44} &= \\
&= \Delta\sigma - |\text{grad } \sigma|^2 + \frac{1}{2} \sigma_k \sigma^k (g_{11} + g_{22} + g_{33} + g_{44}) = \\
&= \Delta\sigma - |\text{grad } \sigma|^2 + 2|\text{grad } \sigma|^2 = \Delta\sigma + |\text{grad } \sigma|^2,
\end{aligned}$$

то

$$\overline{W}_{11}^+ = e^{2\sigma} W_{11}^+ + \frac{s}{12} (e^{2\sigma} - e^{-2\sigma}) - \frac{e^{2\sigma} + e^{-2\sigma}}{2} (\Delta\sigma + |\text{grad } \sigma|^2),$$

где

$$\Delta\sigma = \sum_i \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i^2}, \quad |\text{grad } \sigma|^2 = \sum_i \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right)^2.$$

Путем аналогичных рассуждений получаем и остальные компоненты:

$$\overline{W}_{22}^+ = e^{2\sigma} W_{22}^+ + \frac{s}{12} (e^{2\sigma} - e^{-2\sigma}) - \frac{e^{2\sigma} + e^{-2\sigma}}{2} (\Delta\sigma + |\text{grad } \sigma|^2),$$

$$\begin{aligned}
\overline{W}_{33}^+ &= e^{2\sigma} W_{33}^+ + \frac{s}{12} (e^{2\sigma} - e^{-2\sigma}) - \frac{e^{2\sigma} + e^{-2\sigma}}{2} (\Delta\sigma + |\text{grad}\sigma|^2), \\
\overline{W}_{12}^+ &= e^{2\sigma} W_{12}^+, \\
\overline{W}_{13}^+ &= e^{2\sigma} W_{13}^+, \\
\overline{W}_{23}^+ &= e^{2\sigma} W_{23}^+, \\
\overline{W}_{44}^- &= e^{2\sigma} W_{44}^- - \frac{s}{12} (e^{2\sigma} - e^{-2\sigma}) + \frac{e^{2\sigma} + e^{-2\sigma}}{2} (\Delta\sigma + |\text{grad}\sigma|^2), \\
\overline{W}_{55}^- &= e^{2\sigma} W_{55}^- - \frac{s}{12} (e^{2\sigma} - e^{-2\sigma}) + \frac{e^{2\sigma} + e^{-2\sigma}}{2} (\Delta\sigma + |\text{grad}\sigma|^2), \\
\overline{W}_{66}^- &= e^{2\sigma} W_{66}^- - \frac{s}{12} (e^{2\sigma} - e^{-2\sigma}) + \frac{e^{2\sigma} + e^{-2\sigma}}{2} (\Delta\sigma + |\text{grad}\sigma|^2), \\
\overline{W}_{45}^- &= e^{2\sigma} W_{45}^-, \\
\overline{W}_{46}^- &= e^{2\sigma} W_{46}^-, \\
\overline{W}_{56}^- &= e^{2\sigma} W_{56}^-.
\end{aligned}$$

Теорема доказана. $\triangleright$

Теорема 2. При конформной деформации $d\overline{s}^2 = \overline{g}_{ij} dx^i dx^j$ метрики ds^2 четырехмерного конформно полуплоского риманова многообразия M при $s \equiv 0$ (анти)автодуальная компонента тензора Вейля инвариантна (под инвариантностью компонент тензора Вейля понимаем выполнение равенства $\overline{W}_{ij}^\pm = e^{2\sigma} W_{ij}^\pm$) $\Leftrightarrow$ функция σ , участвующая в определении деформации имеет вид:

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) + F_4(x),$$

где F_1, F_2, F_3, F_4 — произвольные функции и выполняются условия:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx_1^2} F_1(x_1) &= C_1 - \left(\frac{d}{dx_1} F_1(x_1) \right)^2, \\
\frac{d^2}{dx_2^2} F_2(x_2) &= C_2 - \left(\frac{d}{dx_2} F_2(x_2) \right)^2, \\
\frac{d^2}{dx_3^2} F_3(x_3) &= C_3 - \left(\frac{d}{dx_3} F_3(x_3) \right)^2, \\
\frac{d^2}{dx_4^2} F_4(x_4) &= -C_1 - \left(\frac{d}{dx_4} F_4(x_4) \right)^2 - C_2 - C_3,
\end{aligned} \tag{11}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

◁ Посмотрим, при какой конформной деформации $\overline{W}^\pm = W^\pm$. Это соответствует тому, что $\frac{s}{12}(e^{2\sigma} - e^{-2\sigma}) = \frac{e^{2\sigma} + e^{-2\sigma}}{2}(\Delta\sigma + |\text{grad } \sigma|^2)$. Замечаем, что $\frac{e^{2\sigma} + e^{-2\sigma}}{2} = \text{ch } 2\sigma$ и $\frac{e^{2\sigma} - e^{-2\sigma}}{2} = \text{sh } 2\sigma$ и получаем:

$$\frac{s}{6} \text{sh } 2\sigma = \text{ch } 2\sigma (\Delta\sigma + |\text{grad } \sigma|^2).$$

или

$$\Delta\sigma + |\text{grad } \sigma|^2 = \frac{s}{6} \text{th } 2\sigma. \quad (12)$$

При $s \equiv 0$ равенство (12) примет вид:

$$\Delta\sigma + \text{grad } \sigma = 0.$$

Решая данное дифференциальное уравнение с помощью пакета символьных вычислений Maple, находим

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) + F_4(x),$$

где F_1, F_2, F_3, F_4 — произвольные функции и выполняются условия:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx_1^2} F_1(x_1) &= C_1 - \left(\frac{d}{dx_1} F_1(x_1) \right)^2, \\ \frac{d^2}{dx_2^2} F_2(x_2) &= C_2 - \left(\frac{d}{dx_2} F_2(x_2) \right)^2, \\ \frac{d^2}{dx_3^2} F_3(x_3) &= C_3 - \left(\frac{d}{dx_3} F_3(x_3) \right)^2, \\ \frac{d^2}{dx_4^2} F_4(x_4) &= -C_1 - \left(\frac{d}{dx_4} F_4(x_4) \right)^2 - C_2 - C_3, \end{aligned} \quad (13)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Из (13) получаем, что:

$$\begin{aligned} F_1(x_1) &= -\sqrt{C_1 x_1} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} \frac{(c_1 e^{2\sqrt{C_1 x_1}} - c_2)^2}{C_1}, \\ F_2(x_2) &= -\sqrt{C_2 x_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} \frac{(c_1 e^{2\sqrt{C_2 x_2}} - c_2)^2}{C_2}, \\ F_3(x_3) &= -\sqrt{C_3 x_3} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} \frac{(c_1 e^{2\sqrt{C_3 x_3}} - c_2)^2}{C_3}, \\ F_4(x_4) &= -\frac{1}{2} \ln \frac{C_1 + C_2 + C_3}{c_1 \sin(\sqrt{C_1 + C_2 + C_3} x_4) - c_2 \cos(\sqrt{C_1 + C_2 + C_3} x_4)}^2, \end{aligned}$$

C_1, C_2, C_3, c_1, c_2 — произвольные постоянные и при выполнении условий:

$$\begin{aligned} \frac{(c_1 e^{2\sqrt{C_1}x_1} - c_2)^2}{C_1} &\neq 0, \\ \frac{(c_1 e^{2\sqrt{C_2}x_2} - c_2)^2}{C_2} &\neq 0, \\ \frac{(c_1 e^{2\sqrt{C_3}x_3} - c_2)^2}{C_3} &\neq 0, \\ \frac{C_1 + C_2 + C_3}{c_1 \sin(\sqrt{C_1 + C_2 + C_3}x_4) - c_2 \cos(\sqrt{C_1 + C_2 + C_3}x_4)} &\neq 0, \\ c_1 \sin(\sqrt{C_1 + C_2 + C_3}x_4) - c_2 \cos(\sqrt{C_1 + C_2 + C_3}x_4) &\neq 0, \\ \sqrt{C_1 + C_2 + C_3} &\geq 0, \\ \sqrt{C_1 + C_2 + C_3} &\geq 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\triangleright$

Литература

1. *Singer I. M., Thorpe J. A.* The curvature of 4-dimensional Einstein spaces // Global Analysis, Papers in Honour of K. Kodaira. Univ. Tokyo Press.—1969.—Р. 355–365.
2. Бессе А. Многообразия Эйнштейна.—М.: Мир, 1990.—318 с.
3. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ.—М.: Наука, 1967.—664 с.
4. Родионов Е. Д., Славский В. В. Конформные и одноранговые деформации римановых метрик с площадками нулевой кривизны на компактном многообразии // Тр. конференции «Геометрия и приложения», посвященной 70-летию В. А. Топоногова (Новосибирск, 13–16 марта 2000 г.). Материалы временных коллективов.—2001.—С. 171–182

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ,
ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДИНАМИКУ СОЦИАЛЬНОЙ
НАПРЯЖЕННОСТИ В ПОЛИЭТНИЧНОМ ОБЩЕСТВЕ

З. Х. Хосаева¹

Предложенную в работе [1] модель можно применить для построения кратковременных прогнозов изменения напряженности полиэтнического общества под влиянием экономических процессов. Система уравнений, описывающая изменение социальной напряженности при взаимодействии двух социальных групп или этносов будет иметь вид:

$$\frac{dP_1}{dt} = \gamma(P_1 - P_1) + c_1 \frac{P_2}{1 - P_2} [(P_2 - P_1) + \eta_1 P_1 (1 - P_2)], \quad (1)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = \gamma(P_2 - P_2) + c_2 \frac{P_1}{1 - P_1} [(P_1 - P_2) + \eta_2 P_2 (1 - P_1)], \quad (2)$$

где P — величина напряженности, к которой стремится общество при постоянном темпе изменения ВВП, γ — константа, характеризующая скорость адаптации общества к меняющейся экономической ситуации, c_i — степень восприятия напряженности другой этнической группы, η_i — внутренняя тенденция этнической группы к ослаблению или усилению воздействия другой группы. Значение P выберем так, чтобы оно стремилось к нулю при стремительном росте ВВП и к единице при его быстром падении.

Отметим, что расчеты лучше совпадают с динамикой нормированных индикаторов, если использовать темп роста ВВП с лагом в три года. Для определения стационарных точек было получено алгебраическое уравнение четвертого порядка. Был проведен качественный анализ системы уравнений (1)–(2) при следующих значениях констант: $P_1 = 0,34$, $P_2 = 0,5$, $c_1 = 0,1$, $c_2 = 0,5$, $\eta_1 = \eta_2 = 0,5$.

В области $0 < P < 1$ уравнение имеет один корень, два корня или не имеет корней в зависимости от экономической ситуации P_1 и P_2 . При благоприятной экономической ситуации, т. е. при малых

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН.

значениях P_1 и P_2 уравнения имеют одну устойчивую стационарную точку которая соответствует низким значениям напряженности этносов (рис. 1). При ухудшении экономической ситуации стационарная точка смещается в сторону увеличения напряженности этносов, а при дальнейшем ухудшении экономического состояния появляется вторая стационарная точка, которая является неустойчивой. Для нее напряженности этносов близки к единице. Это означает, что при больших начальных значениях напряженности этносов стационарное состояние не достигается. При значительном ухудшении экономической ситуации стационарных точек в области $0 < P < 1$ нет. Это означает, что социальная система не имеет устойчивого равновесия и напряженности этносов растут пока не достигнут единицы. Время достижения устойчивой стационарной точки достаточно велико и в зависимости от начального состояния общества может составлять порядка 10 лет. За это время экономическое состояние может измениться и стационарная точка изменит свое положение.

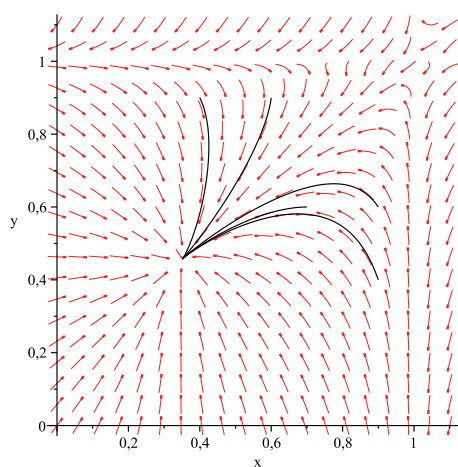


Рис. 1. Фазовый портрет системы уравнений (1)–(2).

Литература

1. Bosse E., Hoogendoorn M., Klein M. C. A., Treur J., vander Wal C. N., van Wissen A. Modelling collective decision making in groups and crowds: Integrating social contagion and interacting emotions, beliefs and intentions // *Auton. Agent Multi-Agent Syst.*—2013.—Vol. 27.—P. 52–74

Сведения об авторах

Андреева Татьяна Михайловна
Ростов-на-Дону, Южный федераль-
ный университет, аспирант
E-mail: metzi@yandex.ru

Кусраева Залина Анатольевна
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН,
научный сотрудник
E-mail: zali13@mail.ru

Варзиев Владислав Аликович
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН,
научный сотрудник
E-mail: varzi@yandex.ru

Магомед-Касумов Магомедрасул
Грозбекевич
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН,
научный сотрудник
E-mail: rasuldev@gmail.com

Веремеенко Ольга Юрьевна
Ростов-на-Дону, Южный федераль-
ный университет, студент
E-mail: blinchik007@gmail.com

Минасян Давид Григорьевич
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН,
научный сотрудник
E-mail: davidmd@yandex.ru

Волик Мария Владимировна
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН,
младший научный сотрудник
E-mail: volikmv@mail.ru

Орлова Наталья Сергеевна
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН,
научный сотрудник
E-mail: norlova.umi.vnc@gmail.com

Волковая Татьяна Анатольевна
Славянск-на-Кубани, ФГБОУ ВПО
«КубГУ», преподаватель кафедры
математики, информатики и МП
E-mail: vta1987@yandex.ru

Пастухова Светлана Владимировна
Барнаул, Алтайский государствен-
ный университет, студент
E-mail:
pastukhova.svetlana.1992@gmail.com

Дронов Алексей Константинович
Ростов-на-Дону, Южный федераль-
ный университет, аспирант
E-mail: floberrr@mail.ru

Султанахмедов Мурад Салихович
Махачкала, ДНЦ РАН, научный со-
трудник
E-mail: sultanakhmedov@gmail.com

Клепиков Павел Николаевич
Барнаул, Алтайский государствен-
ный университет, студент магистратуры
E-mail: askingnetbarnaul@gmail.com

Тасоев Батрадз Ботазович
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН,
научный сотрудник
E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru

Кругликов Михаил Геннадьевич
Ростов-на-Дону, Южный федераль-
ный университет, аспирант
E-mail: mkruglicov@gmail.com

Туганова Анастасия Сергеевна
Ростов-на-Дону, Южный федераль-
ный университет, студент
E-mail: rulezzz_@bk.ru

ХАСМАТУЛИНА НАТАЛЬЯ ЮРЬЕВНА
Ростов-на-Дону, Южный федераль-
ный университет, студент
E-mail: waalking.on.air@gmail.com

Хромова Олеся Павловна
Барнаул, Алтайский государствен-
ный университет, доцент
E-mail: khromova.olesya@gmail.com

Хосаева Зарина Хетаговна
Владикавказ, ВНИЦ РАН, младший
научный сотрудник
E-mail: hzaia83@mail.ru

Чшиев Аслан Григорьевич
Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН,
научный сотрудник
E-mail: zchaslan@mail.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
-------------------	---

ПЛЕНАРНЫЕ ЛЕКЦИИ

Асхабов С. Н. Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью в конусах.....	11
Магарил-Ильяев Г. Г. О принципе Лагранжа в теории экстремума	23
Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежных водных системах на многопроцессорной вычислительной системе	33
Цибулин В. Г. Численное моделирование конвективных движений	53
Шабат А. Б. Введение в теорию обратной задачи рассеяния	65
Kusraev A. G. Boolean valued analysis	75
Osipenko K. Yu. Optimal recovery of linear operators from inaccurate information	85

СЕКЦИЯ I МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Андреева Т. М. Псевдоаналитическое продолжение с весовыми оценками	115
Варзиев В. А. Линейный непрерывный правый обратный к оператору представления в (LB) -пространствах	117
Волковая Т. А. Достаточное условие обильности подмодулей ранга 1 с двумя образующими	120

Дронов А. К. Применение интерполяции линейных операторов, ограниченных на конусах, к некоторым вопросам теории базисов пространств Фреше.....	122
Кусраева З. А. Об одном свойстве ортогонально аддитивных полиномов	123
Магомед-Касумов М. Г. Об одной теореме вложения для весовых пространств Лебега с переменным показателем ...	125
Султанахмедов М. С. Приближение функций дискретными суммами Фурье — Якоби.....	128
Тасоев Б. Б. Обобщенное функциональное исчисление в решеточно упорядоченных алгебрах	130
Туганова А. С., Веремеенко О. Ю. Моделирование сосуществования близкородственных популяций на пространственно-неоднородном ареале	132
Хасматулина Н. Ю. Вариант бессеточного метода вихрей в ячейках для анализа двумерных течений невязкой несжимаемой жидкости	133
Чшиев А. Г. Сильно разложимая полугруппа линейных отношений	135

СЕКЦИЯ II МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Волик М. В. Математическое моделирование потоков воздуха в городской застройке с домами одинаковой высоты.....	139
Клепиков П. Н., Хромова О. П. О математических и компьютерных моделях при исследовании конциркулярно-гармонических свойств конечномерных метрических групп Ли	141
Кругликов М. Г. Расчет областей параметров, допускающих сосуществование конкурирующих видов	152
Минасян Д. Г. Алгоритм оптимизации конструкции мельницы	154

Орлова Н. С. Двумерная модель кипящего гранулированного слоя.....	155
Пастухова С. В., Хромова О. П. О применении пакетов символьных вычислений в исследовании конформно полуплоских римановых многообразий размерности 4.....	157
Хосаева З. Х. Исследование системы уравнений, описывающей динамику социальной напряженности в полиэтничном обществе.....	165
Сведения об авторах	167

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Труды X региональной
школы-конференции молодых ученых
«Владикавказская молодежная
математическая школа»
(Россия, Владикавказ, 21–27 июля 2014 г.)

Редакторы:
Е. С. Каменецкий, А. Г. Кусраев

Зав. редакцией *В. В. Кибизова*
Компьютерная верстка *И. С. Гаприндашвили*

Подписано в печать 18.06.2014.
Формат бумаги $60 \times 84^{1/16}$. Усл. п. л. 10.
Тираж 200 экз. Заказ № 49.

ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

ISBN 978-5-904695-29-3



9 785904 695293