

ТРУДЫ КАФЕДРЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
СОГУ

В ы п у с к 1

Владикавказ
2014

ББК 22.16+
УДК 517.8+
Т 78

Труды кафедры математического анализа СОГУ. Вып. 1.—
Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—96 с.

© Южный математический институт
ВНЦ РАН и РСО-А, 2014
© Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

СЕКЦИЯ I

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Кулаев Р. Ч., Галаванова З. Е. О знаке функции Грина двухточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка	7
Kusraev A. G. Functional Representation of Injective Banach Lattices	25
Плиева Л. Ю. Квадратурные формулы для интегралов типа Коши на отрезке интегрирования	35
Плиев М. А., Эльсаев Я. В. Модульно сопряженное пространство для стандартного гильбертового модуля над локальной C^* -алгеброй	42
Сиукаев С. Н., Дзигоева Л. Г. Некоторые классы спиралеобразных функций	49
Тасоев Б. Б. Функциональное исчисление в векторных решетках	53
Хубежты Ш. С., Цуцаев А. О. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с высокой алгебраической степенью точности	57

СЕКЦИЯ II

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х.

Математическое моделирование социальных процессов 65

Кесаев В. И. Некоторые аспекты теории одномерных

моделей квантовой механики 74

СЕКЦИЯ III

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Гуриева Н. И. О решении иррациональных уравнений 87**Левашова Л. Г., Галаванова З. Е., Хугаева Л. Т.**О некоторых особенностях преподавания
математического анализа 92

Секция I

Математический анализ

О ЗНАКЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Р. Ч. Кулаев, З. Е. Галаванова

На отрезке $[a, b] \in \mathbb{R}$ рассматривается краевая задача

$$Lu \equiv (p(x)u'')' - (q(x)u')' = f(x), \quad (1)$$

$$u(a) = 0, \quad \beta(a)u''(a) - \vartheta(a)u'(a) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \beta_2(b)u''(b) + \beta_1(b)u'(b) - \beta_0(b)u(b) &= 0, \\ D^3u(b) + \beta_0(b)u'(b) - \delta_0(b)u(b) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь через D^3u обозначена третья квазипроизводная $(p(x)u'')' - q(x)u'$ и предполагаются выполненными следующие условия:

- $p(x) \in C^2[a, b]$, $\inf_{x \in [a, b]} p(x) > 0$, $q(x) \in C^1[a, b]$, $q(x) \geq 0$ на $[a, b]$ и $f(x) \in C[a, b]$;

- константы $\beta(a), \vartheta(a)$ неотрицательны и $\beta(a) + \vartheta(a) \neq 0$;

- $\beta_1(b), \beta_2(b)$ и $\delta_0(b)$ строго положительны и $[\beta_0(b)]^2 - \beta_1(b)\delta_0(b) < 0$.

Рассматриваемая задача является частным случаем более общей краевой задачи для уравнения (1) с краевыми условиями вида

$$\begin{aligned} \beta_2(a)u''(a) - \beta_1(a)u'(a) - \beta_0(a)u(a) &= 0, \\ \beta_2(b)u''(b) + \beta_1(b)u'(b) - \beta_0(b)u(b) &= 0, \\ \beta_3(a)D^3u(a) + \beta_0(a)u'(a) + \delta_0(a)u(a) &= 0, \\ \beta_3(b)D^3u(b) + \beta_0(b)u'(b) - \delta_0(b)u(b) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

которая возникает при изучении краевой задачи на геометрическом графе, описывающей малые деформации плоской стержневой системы [1]. В случае, когда внешняя сила $f(x)$ сосредоточена лишь на одном из стержней системы, задача на графе сводится к задаче именно для этого стержня, а реакция остальной части системы выражается условиями (4). При этом, если один конец стержня системы на котором сосредоточена внешняя сила, закреплён, а другой конец жестко сочленен с концами еще нескольких стержней системы, то два из условий (4), соответствующие закреплённому концу приобретают вид (2), а условия, соответствующие другому концу стержня

(узлу системы) приобретают вид (3). Сами по себе условия (3) — это условия общего вида, но мы накладываем дополнительные условия на коэффициенты, которые также выявляются при сведении задачи на графе к задаче на отрезке (более подробно см. [2]).

Нами изучается вопрос о положительности функции Грина краевой задачи (1)–(3). Будет дано необходимое и достаточное условие положительности функции Грина. Отметим, что достаточные условия положительности функции Грина задачи (1), (4) (и, следовательно, задачи (1)–(3)) даются, например, в работе [3], однако оказывается, что задача (1), (4) удовлетворяет им только при $\beta_0(b) \leq 0$. В то же время, как показано в работе [2], редукция задачи на графе к (1), (4) приводит как к случаю $\beta_0(b) \leq 0$, так и к случаю $\beta_0(b) > 0$, так что вопрос оказывается содержательным.

Сначала нами будут установлены некоторые «элементарные» свойства решений уравнения (1), которыми мы будем в дальнейшем неоднократно пользоваться. В основе обоснования свойств решений лежит возможность приведения дифференциального уравнения n -го порядка к факторизованной форме Фробениуса — Поля [4]:

$$h_n(x) \frac{d}{dx} h_{n-1}(x) \frac{d}{dx} \dots \frac{d}{dx} [h_0(x)u] = 0, \quad (5)$$

где $h_i(x)$ — достаточно гладкие (для того, чтобы дифференцирование в (5) было классическим) строго положительные функции.

Форма (5) позволяет применять при исследовании знаковых свойств решений технику теоремы Ролля (из того, что $u'(x)$ меняет знак k раз следует, что $u(x)$ меняет знак не более $k+1$ раз — не более одного раза на каждом из $k+1$ промежутков знакопостоянства производной), дающей неравенство $S(u) \leq S(u') + 1$, где $S(u)$ — число перемен знака функции $u(x)$ (точное определение будет дано ниже). Последовательное использование в этом неравенстве в качестве $u(x)$ каждой из квазипроизводных

$$D^0 u = h_0(x)u, \quad D^{j+1} u = h_{j+1}(x) \frac{d}{dx} D^j u, \quad (6)$$

позволяет приходить для оператора L вида (5) к неравенству $S(u) \leq S(D^n u) + n$.

Начнем с напоминания некоторых определений и результатов.

Интервал $(a_1, a_2) \subset [a, b]$ называется *промежутком знакопостоянства* функции, если на этом интервале функция сохраняет знак и не тождественна нулю.

Говорят, что функция $u(x) \in C[a, b]$ имеет k перемен знака и пишут $S(u) = k$, если $[a, b]$ может быть разбит на $k + 1$ промежутков знакопостоянства функции так, что на соседних промежутках $u(x)$ имеет разный знак.

Если $u(x)$ имеет конечное число нулей, то точками возможного разбиения являются те нули, в окрестности которых функция меняет знак. Если же функция имеет нули, заполняющие сплошь некоторый промежуток, то разбиения можно выбирать разными способами, но число перемен знака от этого не зависит. Для $u(x)$, знакопостоянной на всем $[a, b]$, полагается $S(u) = 0$; для $u(x) \equiv 0$ обычно считается $S(u) = -1$ (это соотношение позволяет распространить неравенство $S(u) \leq S(u') + 1$ и на случай $u' \equiv 0$, т. е. $u \equiv \text{const}$). Для тех же $u(x)$, для которых не существует разбиения $[a, b]$ на конечное число промежутков знакопостоянства, считается $S(u) = +\infty$.

Через $S(x_1, x_2, \dots, x_m)$ будем обозначать число перемен знака в наборе ненулевых чисел $x_1, x_2, \dots, x_m$. Формально $S(\cdot)$ определяется формулами

$$S(x_1, x_2, \dots, x_m) = S(x_1, x_2) + S(x_2, x_3) + \dots + S(x_{m-1}, x_m)$$

и

$$S(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } xy < 0, \\ 0, & \text{если } xy > 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $S(x, -y) = S(-x, y)$.

Пусть $u \in C[a, b]$ и имеет конечное число нулей на $[a, b]$. Через $\sigma u(x \pm 0)$ обозначим знак $u(x)$ справа (слева) от точки x (в формулах, где это необходимо, мы будем отождествлять знак $\pm$ с числом ± 1). Использование $\sigma u(x \pm 0)$ позволяет нам в случаях, когда $u(x \pm 0) = 0$, приписывать этому нулю вполне определенный знак. Если же $u(x) \neq 0$, то, очевидно, $\sigma u(x + 0) = \sigma u(x - 0) = \text{sign } u(x)$.

Ниже мы неоднократно будем ссылаться на следующие результаты А. В. Боровских.

Лемма 1 (обобщенная теорема Ролля [5]). Пусть $u(x) \in C^1[a, b]$ и $u'(x)$ имеет конечное число нулей. Тогда

$$S(u) \leq S(u') + 1 - S(\sigma u(a + 0), -\sigma u'(a + 0)) - S(\sigma u(b - 0), \sigma u'(b - 0)).$$

Лемма 2 (обобщенное правило Декарта [5]). Пусть L — дифференциальное выражение вида (5), $u(x) \in C^n[a, b]$ и $D^n u(x)$ имеет конечное число нулей. Тогда

$$\begin{aligned} S(u) &\leq S(D^n u) + n - \\ &- S(\sigma u(a+0), -\sigma D^1 u(a+0), \dots, (-1)^n \sigma D^n u(a+0)) - \\ &- S(\sigma u(b-0), \sigma D^1 u(b-0), \dots, \sigma D^n u(b-0)). \end{aligned}$$

Теорема 1 [6, гл. 8]. Всякое решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее условиям $S(\sigma D^2 u(a+0), -\sigma D^1 u(a+0)) = 1$, $S(\sigma D^2 u(b-0), \sigma D^1 u(b-0)) = 1$, либо постоянно, либо строго монотонно. При этом, если $q(x) \not\equiv 0$ или $\vartheta(a) + \vartheta(b) > 0$, то решение строго возрастает (убывает или постоянно) тогда и только тогда, когда $D^3 u < 0$ (> 0 или $= 0$).

Теорема 2 [6, гл. 8]. Краевая задача для уравнения (1) с условиями

$$\begin{aligned} u(a) &= 0, \quad \beta(a)u''(a) - \vartheta(a)u'(a) = 0, \\ u(b) &= 0, \quad \beta(b)u'(b) + \vartheta(b)u'(b) = 0 \end{aligned}$$

однозначно разрешима. При этом, из условий $f(x) \geq 0$, $f(x) \not\equiv 0$ следует $u(x) > 0$ внутри $[a, b]$.

Теперь мы можем непосредственно перейти к рассмотрению свойств решений уравнения (1).

Представим уравнение (1) в факторизованном виде (5):

$$Lu \equiv \frac{d}{dx} \frac{1}{h(x)} \frac{d}{dx} p(x) h^2(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{h(x)} \frac{du}{dx} = 0, \quad x \in [a, b]. \quad (7)$$

Здесь $h(x) \in C^3[a, b]$ является решением задачи Коши

$$(p(x)h')' - q(x)h = 0, \quad h(a) = 1, h'(a) = 0$$

и удовлетворяет неравенствам $\inf_{x \in [a, b]} h(x) > 0$, $h'(x) \geq 0$ на $[a, b]$. Возможность факторизации (7), обосновывается известным результатом По́я [4], а принадлежность функции $h(x)$ пространству $C^3[a, b]$ следует из включений $p \in C^2[a, b]$, $q \in C^1[a, b]$. В нашем случае

$$\begin{aligned} D^0 u &= u, \quad D^1 u = \frac{1}{h(x)} \frac{d}{dx} D^0 u, \\ D^2 u &= p(x) h^2(x) \frac{d}{dx} D^1 u, \quad D^3 u = \frac{1}{h(x)} \frac{d}{dx} D^2 u. \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (7), удовлетворяющее условию $S(\sigma u(a+0), -\sigma D^1 u(a+0), \sigma D^2 u(a+0)) = 2$. Тогда верны следующие соотношения:

$$S(D^3 u) \leq 0, \quad S(D^2 u) \leq 1, \quad S(D^1 u) \leq 1, \quad S(u) \leq 1.$$

◁ Неравенство $S(D^3 u) \leq 0$ следует из очевидного тождества $D^3 u = \text{const}$. Для доказательства неравенства $S(D^2 u) \leq 1$ используем доказанное неравенство и теорему Ролля: $S(D^2 u) \leq S(D^3 u) + 1 \leq 1$. Теперь, используя доказанное для $D^2 u(x)$ неравенство, обобщенную теорему Ролля и условия леммы, можно доказать неравенство для $D^1 u(x)$:

$$S(D^1 u) \leq S(D^2 u) + 1 - S(\sigma D^1 u(a+0), -\sigma D^2 u(a+0)) \leq 1.$$

Аналогично доказывается неравенство для $u(x)$. ▷

Лемма 4. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям $u(a) = u''(a) = 0$. Тогда $S(u) \leq 1$.

◁ Если предположить, что $S(u) \geq 2$, то из равенства $u(a) = 0$ следует $S(D^1 u) \geq 2$. Тогда из теоремы Ролля получается $S(D^2 u) \geq 1$, что, с учетом $u''(a) = D^2 u(a) = 0$, влечет $S(D^2 u) > 1$. Тогда из теоремы Ролля следует $0 \geq S(D^3 u) \geq 1$. ▷

Лемма 5. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (7) такое, что $S(\sigma u(a+0), -\sigma D^1 u(a+0), \sigma D^2 u(a+0)) = 2$ и $S(D^1 u) = 1$. Тогда выполняется равенство $S(\sigma D^2 u(a+0), -\sigma D^3 u(a+0)) = 0$.

◁ Предположим противное. Пусть $S(\sigma D^2 u(a+0), -\sigma D^3 u(a+0)) = 1$. Тогда, используя обобщенное правило Декарта, получим

$$\begin{aligned} 1 &= S(D^1 u) \leq S(D^3 u) + 2 - \\ &- S(\sigma D^1 u(a+0), -\sigma D^2 u(a+0), \sigma D^3 u(a+0)) = 0. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает лемму. ▷

Следствие 1. Пусть $u(x) = 0$ — решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям $S(\sigma u(a+0), -\sigma D^1 u(a+0), \sigma D^2 u(a+0)) = 2$ и $S(D^1 u) = 1$. Тогда выполняется равенство

$$S(\sigma D^1 u(a+0), -\sigma D^2 u(a+0), \sigma D^3 u(a+0)) = 1.$$

Следствие 2. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям $u(a) = u''(a) = 0$ и $S(D^1u) = 1$. Тогда

$$S(\sigma u(a+0), -\sigma D^1u(a+0), \sigma D^2u(a+0), -\sigma D^3u(a+0)) = 2.$$

◁ Из $u(a) = 0$ следует $S(\sigma u(a+0), -\sigma D^1u(a+0)) = 1$. Если теперь $S(-\sigma D^1u(a+0), \sigma D^2u(a+0)) = 1$, то $S(\sigma u(a+0), -\sigma D^1u(a+0), \sigma D^2u(a+0)) = 2$ и требуемое утверждение следует из следствия 1.

Рассмотрим случай $S(-\sigma D^1u(a+0), \sigma D^2u(a+0)) = 0$. Из $S(D^1u) = 1$ следует существование нуля $\xi \in (a, b)$ функции D^1u . Так как ξ — точка локального экстремума функции $u(x)$, то $S(\sigma D^1u(\xi-0), \sigma D^2u(\xi-0)) = 1$. Поэтому к функции $u(x)$ на $[a, \xi]$ применима теорема 1, согласно которой $S(-\sigma D^1u(a+0), -\sigma D^3u(a+0)) = 1$, и, значит, $S(\sigma D^2u(a+0), -\sigma D^3u(a+0)) = 1$. ▷

Лемма 6. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям $u(a) = u'(a) = u''(a) = 0$ и $D^3u(a) > 0$. Тогда $S(u) = 0$, $u(b) > 0$, $Du(b) > 0$, $D^2u(b) > 0$.

◁ Легко видеть, что функция

$$w(x) = \int_a^x h(\zeta) \int_a^\zeta \frac{1}{p(\xi)h^2(\xi)} \int_a^\xi h(\eta) d\eta d\xi d\zeta \quad (8)$$

является решением дифференциального уравнения и имеет в точке a тройной нуль. Используя свойства функции $p(x)$ и $h(x)$, не сложно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$Dw(x) = \int_a^x \frac{1}{p(\xi)h^2(\xi)} \int_a^\xi h(\eta) d\eta d\xi > 0, \quad D^2w(x) = \int_a^x h(\eta) d\eta > 0,$$

$$D^3w(x) = \frac{1}{h(x)} \frac{d}{dx} p(x)h^2(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{h(x)} \frac{dw}{dx} \equiv 1.$$

Из условий леммы следует, что функция $u(x)$ на $[a, b]$ пропорциональна функции $w(x)$, причем знак коэффициента пропорциональности совпадает со знаком самой функции $u(x)$. Лемма доказана. ▷

Лемма 7. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям $u(a) = u'(a) = u''(a) = 0$. Тогда для каждого $x \in (a, b]$ будет выполняться равенство $S(u(x), \sigma D^3u(a+0)) = 0$.

◁ Пусть функция $w(x)$ определяемая формулой (8). Тогда, в силу условий леммы, $u(x) = Cw(x)$, где C — константа. Так как $w(x) > 0$ на $(a, b]$ и $D^3w(a) = 1$, то знак функции $u(x)$ и ее третьей квази-производной $D^3u(x)$ на всем полуинтервале $(a, b]$ совпадают со знаком C . ▷

Лемма 8. Краевая задача (1)–(3) эквивалентна следующей факторизованной краевой задаче:

$$\frac{d}{dx} D^3u = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (1')$$

$$u(a) = 0, \quad \beta(a)D^2u(a) - \delta(a)D^1u(a) = 0, \quad (2')$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_2(b)D^2u(b) + \tilde{\beta}_1(b)D^1(b) - \tilde{\beta}_0(b)D^0u(b) &= 0, \\ D^3u(b) + \tilde{\beta}_0(b)D^1u(b) - \tilde{\delta}_0(b)D^0u(b) &= 0, \end{aligned} \quad (3')$$

где коэффициенты $\beta(a)$, $\vartheta(a)$ те же, что и в (2), а $\tilde{\beta}_2(b)$, $\tilde{\beta}_1(b)$, $\tilde{\delta}_0(b)$ положительны и выполнено неравенство $[\tilde{\beta}_0(b)]^2 - \tilde{\beta}_1(b)\tilde{\delta}_0(b) < 0$.

◁ Для доказательства леммы воспользуемся возможностью факторизации дифференциального уравнения (1) и краевых условий (2), (3). Вводим обозначения

$$\tilde{\beta}_2(b) = \frac{1}{h(b)}, \quad \tilde{\beta}_1(b) = h(b)\beta_1(b) + p(b)h'(b), \quad \tilde{\beta}_0(b) = h(b)\beta_0(b).$$

Тогда, с учетом свойств $p(x)$ и $h(x)$, коэффициенты краевых условий (2'), (3') факторизованной задачи наследуют свойства коэффициентов исходной краевой задачи (1)–(3). ▷

В работе [7] показано, что краевая задача (1)–(3) однозначно разрешима для любой правой части $f(x) \in C[a, b]$ и является самосопряженной. Следовательно, функция Грина $G(x, s)$ задачи (1)–(3) существует и удовлетворяет на $[a, b] \times [a, b]$ свойству симметричности $G(x, s) = G(s, x)$. Более того, общие свойства функций Грина дифференциальных операторов на отрезке применительно к нашему случаю позволяют сформулировать следующие утверждения.

Лемма 9 [6, гл. 3]. Функция Грина задачи (1)–(3) обладает следующими свойствами:

1) функция $G(x, s)$ вместе со своими производными по x до четвертого порядка непрерывна по совокупности переменных вплоть до

границы на каждом из треугольников, на которые диагональю $x = s$ разбивается квадрат $[a, b] \times [a, b]$;

2) при каждом фиксированном s , являющемся внутренней точкой отрезка $[a, b]$, функция $G(x, s)$ по x удовлетворяет однородному уравнению (1) на полуинтервалах $[a, s)$ и $(s, b]$;

3) при каждом фиксированном s , являющемся внутренней точкой отрезка $[a, b]$, функция $G(x, s)$ по x удовлетворяет условиям (2), (3);

4) функция $G(x, s)$ на диагонали $x = s$ удовлетворяет условиям непрерывности вместе со своими производными $\frac{\partial G(x, s)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 G(x, s)}{\partial x^2}$ и условию скачка третьей квазипроизводной по x

$$D^3 G(s + 0, s) - D^3 G(s - 0, s) = 1;$$

5) функция $G(x, s)$ условиями 1)–4) определяется однозначно.

6) Предельная срезка $G(x, a)$ равна тождественно нулю, а предельная срезка $G(x, b)$ является решением однородного уравнения (1) на $[a, b]$, удовлетворяет краевым условиям (2), первому из условий (3) и неоднородному условию

$$D^3 u(b) + \beta_0(b) D^1 u(b) - \delta_0(b) u(b) = -1. \quad (9)$$

Теорема 3. Если $\beta_0(b) \leq 0$, то функция Грина задачи (1)–(3) строго положительна на $x, s \in (a, b] \times (a, b]$.

◁ Для доказательства теоремы мы пользуемся леммой 8 и теоремой Калафати — Гантмахера — Крейна [3, 8], согласно которой для положительности функции Грина задачи (1')–(3') достаточно, чтобы все ненулевые миноры второго порядка матриц из коэффициентов краевых условий

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \beta(a) & \vartheta(a) & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \tilde{\beta}_1(b) & -\beta_0(b) \\ 1 & 0 & \tilde{\beta}_0(b) & -\delta_0(b) \end{pmatrix}$$

имели одинаковые знаки.

Используя свойства коэффициентов краевых условий задачи (1')–(3'), легко посчитать, что все ненулевые миноры обеих матриц отрицательны. Теорема доказана. ▷

Поскольку при $\beta_0(b) \leq 0$ вопрос о знаке функции Грина задачи (1)–(3) решается однозначно теоремой 3, то во всех дальнейших рассуждениях, не оговаривая этого, мы будем считать выполненным неравенство $\beta_0(b) > 0$.

Если $\beta_0(b) > 0$, то, как будет показано ниже, функция Грина $G(x, s)$ задачи (1)–(3) может принимать отрицательные значения на $(x, s) \in (a, b] \times (a, b]$. Наша дальнейшая задача выяснить при каких положительных $\beta_0(b)$ функция Грина все же сохраняет знак на $[a, b] \times [a, b]$.

Теорема 4. *Функция Грина $G(x, s)$ задачи (1)–(3) строго положительна на диагонали $x = s$ при $x \in (a, b] \times (a, b]$.*

◁ Пусть s_0 — произвольная точка полуинтервала $(a, b]$. Покажем, что $G(s_0, s_0) > 0$. Обозначим через $g_{s_0}(x)$ срезку $G(x, s_0)$ функции Грина. Умножим обе части тождества $Lg_{s_0}(x) = 0$, $x \in [a, s) \cup (s, b]$, на функцию $g_{s_0}(x)$ и проинтегрируем. Тогда, используя свойства $g_{s_0}(x)$ (лемма 9), свойства коэффициентов краевых условий (3), получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b Lg_{s_0} \cdot g_{s_0} dx = \int_a^{s_0} Lg_{s_0} \cdot g_{s_0} dx + \int_{s_0}^b Lg_{s_0} \cdot g_{s_0} dx = \\ &= \int_a^b p(g_{s_0}'')^2 + q(g_{s_0}')^2 dx + \delta_0(b)[g_{s_0}(b)]^2 - 2\beta_0(b)g_{s_0}(b)g_{s_0}'(b) + \\ &\quad + \beta_1(b)[g_{s_0}'(b)]^2 + p(a)g_{s_0}''(a)g_{s_0}'(a) - g_{s_0}(s_0) \geq \\ &\geq \int_a^b p(g_{s_0}'')^2 + q(g_{s_0}')^2 dx - g_{s_0}(s_0). \end{aligned}$$

Так как $g_{s_0}(x) \not\equiv 0$, интеграл величина строго положительная, поэтому справедливо неравенство $g(s_0) = G(s_0, s_0) > 0$. ▷

Лемма 10. *Пусть $G(x, s)$ — функция Грина задачи (1)–(3). Тогда для любого $s \in (a, b]$ срезка $g_s(\cdot) = G(\cdot, s)$ не имеет на $(a, b]$ кратных нулей.*

◁ Предположим противное. Пусть $x_0 \in (a, b]$ — кратный нуль функции $g_s(x)$. Из теоремы 7 следует $x_0 \neq s$. Если $x_0 < s$, то на отрезке $[a, x_0]$ функция $g_s(x)$ является решением однородного уравнения (1), удовлетворяет в точке a условиям (2), а в точке x_0 — условиям $g_s(x_0) = g_s'(x_0) = 0$. Согласно теореме 2, такая задача невырождена, поэтому $g_s(x) \equiv 0$ на $[a, x_0]$. Тогда, в силу теоремы единственности Коши, $g_s(x) \equiv 0$ на $[a, s]$, что противоречит утверждению теоремы 4.

Если же $s < x_0 < b$, то функция $g_s(x)$ является решением однородного уравнения (1) на отрезке $[x_0, b]$ и удовлетворяет в точке x_0 условиям $g_s(x_0) = g'_s(x_0) = 0$, а в точке b — условиям (3), т. е. является решением невырожденной однородной задачи на $[x_0, b]$. Дальнейшие рассуждения идут как и в предыдущем случае.

Остается рассмотреть случай $x_0 = b$. Здесь из $g_s(b) = g'_s(b) = 0$ и (3) следует $g''_s(b) = D^3 g_s(b) = 0$, следовательно, $g_s(x)$ является на $[s, b]$ решением задачи Коши для уравнения (1) с нулевыми данными в точке b , а значит, $g_s(x) \equiv 0$ на $[s, b]$, что противоречит теореме 4. $\triangleright$

Следствие. Для любого $x \in (a, b]$ срезка $g_x(s) = G(x, s)$ не имеет на $(a, b]$ кратных нулей.

Рассмотрим функцию Грина $G(x, s)$ задачи (1)–(3) и обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех внутренних точек квадрата $[a, b] \times [a, b]$ в которых функция $G(x, s)$ равна нулю. Нас интересует случай, когда $\mathfrak{N} \neq \emptyset$. То, что такая ситуация возможна, будет показано ниже. Из леммы 10 и непрерывности функции Грина следует, что множество $\mathfrak{N}$ не имеет изолированных точек и в любой окрестности произвольной точки из $\mathfrak{N}$ функция $G(x, s)$ меняет знак. Множество $\mathfrak{N}$, в силу теоремы 5, симметрично относительно диагонали $x = s$. Как следует из теоремы 3, $\mathfrak{N}$ может быть представлено в виде объединения двух непересекающихся множеств $\mathfrak{N}^+$ и $\mathfrak{N}^-$, расположенных, соответственно, в треугольниках $a < x < s < b$ и $a < s < x < b$. Очевидно, что множества $\mathfrak{N}^+$ и $\mathfrak{N}^-$ симметричны относительно прямой $x = s$.

Лемма 11. Если $\mathfrak{N} \neq \emptyset$, то любая прямая $s = s_0$, $s_0 \in (a, b)$, пересекает $\mathfrak{N}^+$ не более чем в одной точке.

$\triangleleft$ Рассмотрим срезку $g_s(\cdot) = G(\cdot, s)$ при некотором $s \in (a, b)$. Так как функция $g_s(x)$ удовлетворяет условиям (2), то либо $S(\sigma g_s(a+0), -\sigma D^1 g_s(a+0), \sigma D^2 g_s(a+0)) = 2$, либо (если $\vartheta(a) = 0$) $g_s(a) = g''_s(a) = 0$, и, как следует из леммы 3 (или леммы 4, если $\vartheta(a) = 0$), $S(g_s) \leq 1$. Теперь утверждение леммы следует из леммы 10. $\triangleright$

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{N} \neq \emptyset$ и $(x_0, s_0) \in \mathfrak{N}^+$. Тогда срезка функции Грина $g_{s_0}(x) = G(x, s_0)$ строго отрицательна при $x \in (a, x_0)$ и строго положительна при $x \in (x_0, s_0]$.

$\triangleleft$ Из леммы 10 следует, что функция $g_{s_0}(x)$ меняет знак в точке x_0 . Из леммы 11 следует, что других нулей на $(a, s_0]$ функция $g_{s_0}(x)$ не имеет, а из теоремы 4 следует, что $g_{s_0}(s_0) > 0$. $\triangleright$

Как уже отмечалось выше, множество $\mathfrak{N}^+$ не имеет изолированных точек. Поэтому лемма 11 и ее следствие 1 позволяют заключить, что множество $\mathfrak{N}^+$ задается кусочно-непрерывной функцией $x^+(s)$ с областью определения принадлежащей интервалу (a, b) . Это заключение допускает уточнение.

Следствие 2. *Функция $x^+(s)$ является непрерывной и ее область определения есть интервал внутри $[a, b]$, одним из концов которого является точка $s = b$.*

◁ Из леммы 10 следует, что множество $\mathfrak{N}^+$ не имеет изолированных точек, поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что кривая $\mathfrak{N}^+$ не имеет внутри $[a, b] \times [a, b]$ конечных точек. Предположим, что $(x_0, s_0) \in (a, b) \times (a, b)$ конечная точка кривой $\mathfrak{N}^+$. Тогда найдется точка (x_0, s_0) графика функции $x^+(s)$ такая, что либо при каждом $s \in (s_0, s_0 + \varepsilon)$, либо при каждом $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0)$, если число ε достаточно мало, функция $g_s(\cdot) = G(\cdot, s)$ сохраняет знак на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. При этом, в силу следствия 1, функция $g_{s_0}(x) = G(x, s_0)$ меняет знак на том же интервале, что противоречит непрерывности по совокупности переменных функции Грина $G(x, s)$. ▷

Следствие 3. *Если $\mathfrak{N} \neq \emptyset$, то любая прямая $x = x_0$, $x_0 \in (a, b)$, пересекает $\mathfrak{N}^+$ не более чем в одной точке.*

◁ Предположим, что прямая $x = x_0$, $x_0 \in (a, b)$, пересекает $\mathfrak{N}^+$ более чем в одной точке. Пусть (x_0, s_1) и (x_0, s_2) ($a < s_1 < s_2 \leq b$) — точки пересечения прямой $x = x_0$ с $\mathfrak{N}^+$. Рассмотрим функцию $x^+(s)$. Как следует из следствия 2, функция $x^+(s)$ определена, непрерывна. Из леммы 1 следует, что прямая $x = x_0$ пересекает $\mathfrak{N}^+$ не более, чем в трех точках, следовательно, $x^+(s)$ не постоянна на отрезке $[s_1, s_2]$. Поэтому найдется точка $\xi \in [s_1, s_2]$ невырожденного локального экстремума функции $x^+(s)$. Из следствия 1 следует, что срезка $g_{x^+(\xi)}(s)$ функции Грина имеет кратный нуль в точке ξ , что противоречит следствию леммы 11. ▷

Так как множества $\mathfrak{N}^+$ и $\mathfrak{N}^-$ симметричны относительно диагонали, то справедливы следующие утверждения.

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{N} \neq \emptyset$ и $(x_0, s_0) \in \mathfrak{N}^-$. Тогда срезка функции Грина $g_{x_0}(s) = G(x_0, s)$ строго отрицательна при $s \in (a, s_0)$ и строго положительна при $s \in (s_0, x_0]$.*

Следствие 5. Если $\mathfrak{N} \neq \emptyset$, то любая прямая $x = x_0$ при $x_0 \in (a, b)$ и любая прямая $s = s_0$ при $s_0 \in (a, b)$, пересекают каждое из множеств $\mathfrak{N}^+$ и $\mathfrak{N}^-$ не более чем в одной точке.

Из проведенных рассуждений следует, что если $\mathfrak{N} \neq \emptyset$, то множество $\mathfrak{N}^+$ представляет собой график непрерывной функции $x^+(s)$, взаимнооднозначно отображающей интервал (s^+, b) , $a < s^+ < b$, на интервал (a, x^+) , $a < x^+ < b$. При этом концами кривой $\mathfrak{N}^+$ являются точки (a, s^+) и (x^+, b) , лежащие, соответственно, на сторонах квадрата $[a, b] \times [a, b]$, примыкающих к вершине $x = a, s = b$. Так как функция $G(x, s)$ непрерывна на квадрате $[a, b] \times [a, b]$, то в точках (a, s^+) и (x^+, b) она равна нулю. Следовательно, справедлива следующая

Лемма 12. Пусть $\mathfrak{N} \neq \emptyset$. Тогда предельная срезка функции Грина $g_b(x) = G(x, b)$ строго отрицательна при $x \in (a, x^+)$ и строго положительна при $x \in (x^+, b]$.

Отображая множество $\mathfrak{N}^+$ симметрично относительно диагонали $x = s$, получим, что концами кривой $\mathfrak{N}^-$ являются точки (x^-, a) и (b, s^-) , лежащие, соответственно, на сторонах квадрата $[a, b] \times [a, b]$, примыкающих к вершине $s = a, x = b$, причем $x^+ = s^-$ и $s^+ = x^-$.

Теорема 5. Не существует двух различных значений s_1 и s_2 из полуинтервала $(a, b]$, чтобы для функции Грина $G(x, s)$ задачи (1)–(3) одновременно выполнялись равенства

$$\frac{\partial G}{\partial x}(a, s_1) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(a, s_1) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x}(a, s_2) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(a, s_2) = 0.$$

◁ Предположим противное. Тогда, в силу симметричности функции Грина $G(x, s)$, при некоторых $a < x_1 < x_2 \leq b$ одновременно будут выполняться равенства

$$G(x_i, a) = \frac{\partial G}{\partial s}(x_i, a) = \frac{\partial^2 G}{\partial s^2}(x_i, a) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Если обозначить через $l_j(\cdot)$, $j = \overline{1, 4}$, функционалы, определяющие краевые условия (2), (3) (в том же порядке, в котором они идут в (2), (3)), а через $\phi_j(x)$ — фундаментальную систему решений уравнения (1) такую, что $l_j(\phi_i) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, то функцию $G(x, s)$ можно представить в виде [8]

$$G_k(x, s) = \begin{cases} -\phi_3(x)v_3(s) - \phi_4(x)v_4(s), & a \leq x \leq s \leq b, \\ \phi_1(x)v_1(s) + \phi_2(x)v_2(s), & a \leq s \leq x \leq b, \end{cases}$$

где

$$v_j(s) = (-1)^j \frac{[\phi_1, \dots, \phi_{j-1}, \phi_{j+1}, \dots, \phi_4](s)}{[\phi_1, \dots, \phi_4](s)}, \quad j = \overline{1, 4},$$

а $[\phi_1, \dots, \phi_m](s)$ — вронскиан функций $\phi_j(s)$, $j = \overline{1, m}$. В той же работе [8] установлена зависимость поведения системы функций $v_j(s)$ в окрестности конца a от порядков ведущих производных краевых условий (3). В частности, показано, что, при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место равенства

$$v_1(a + \varepsilon) = \frac{\varepsilon^3}{3!} + o(\varepsilon^3),$$

$$v_2(a + \varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon + o(\varepsilon) & \text{при } \beta(a) \neq 0, \\ \frac{\varepsilon^2}{2!} + o(\varepsilon^2) & \text{при } \beta(a) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим поведение срезок $g_s(x)$ в окрестностях точек x_i , $i = 1, 2$, при $s \rightarrow a + 0$:

$$\begin{aligned} g_{a+\varepsilon}(x_i) &= \phi_1(x_i)v_1(a + \varepsilon) + \phi_2(x_i)v_2(a + \varepsilon) = \\ &= \phi_1(x_i)\frac{\varepsilon^3}{3!} + \phi_2(x_i)\frac{\varepsilon^2}{2!} + o(\varepsilon^3) = \phi_2(x_i)O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (10) следует, что $\phi_2(x_i) = 0$, а так как $\phi_2(a) = 0$ и любое решение однородного уравнения (1) меняет знак не более трех раз, то функция $\phi_2(x)$ меняет знак в обоих точках x_1 и x_2 . Но тогда, ввиду (11), при достаточно малых $\varepsilon > 0$ срезка $g_{a+\varepsilon}(x)$ будет менять знак в двух непересекающихся окрестностях точек x_1 и x_2 , т. е. будет иметь два нуля, что противоречит следствию 5 леммы 11. Теорема доказана. $\triangleright$

Лемма 13. Пусть $G(x, s)$ — функция Грина $G(x, s)$ задачи (1)–(3). Если в краевом условии (2) коэффициент $\vartheta(a) \neq 0$ и $\mathfrak{N} \neq \emptyset$, то $\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(a, s) > 0$ при $s \in (a, s^+)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(a, s) < 0$ при $s \in (s^+, b]$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(a, s) = 0$ при $s = s^+$.

$\triangleleft$ Пусть $s \in (a, s^+]$. Тогда функция $g_s(\cdot) = G(\cdot, s)$ не пересекает множество $\mathfrak{N}^+$ и, в силу теоремы 4, положительна на $(a, s]$. Так как $g_s(x)$ удовлетворяет условиям (2) и $\vartheta(a) \neq 0$, то $S(\sigma g_s(a + 0), -\sigma D^1 g_s(a + 0), \sigma D^2 g_s(a + 0)) = 2$. Поэтому из следствия 1 леммы 11 получаем неравенство $\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(a, s) \geq 0$. Аналогично для $s \in (s^+, b]$, в силу следствия 1 леммы 11, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(a, s) \leq 0$. При этом из теоремы 5 следует, что во всех этих неравенствах равенство выполняется не более чем для одного значения $s \in (a, b]$. Из непрерывности функции

Грина по совокупности переменных на $[a, b] \times [a, b]$ следует, что такое значение s существует и может быть равным лишь s^+ . $\triangleright$

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 14. Пусть $G(x, s)$ — функция Грина $G(x, s)$ задачи (1)–(3). Если в краевом условии (2) коэффициент $\vartheta(a) = 0$ и $\mathfrak{N} \neq \emptyset$, то $\frac{\partial}{\partial x}G(a, s) > 0$ при $s \in (a, s^+)$, $\frac{\partial}{\partial x}G(a, s) < 0$ при $s \in (s^+, b]$ и $\frac{\partial}{\partial x}G(a, s) = 0$ при $s = s^+$.

Следствие 5 леммы 11 утверждает, что любая прямая $s = s_0$ при $s_0 \in (a, b]$ пересекает каждое из множеств $\mathfrak{N}^+$ и $\mathfrak{N}^-$ не более чем в одной точке. Оказывается, что при $s_0 \in (a, b]$ прямые $s = s_0$ пересекают все множество $\mathfrak{N}$ не более чем в одной точке.

Лемма 15. Пусть $\mathfrak{N} \neq \emptyset$. Тогда $s^+ > s^-$ и $x^+ < x^-$.

$\triangleleft$ Предположим, что $s^+ \leq s^-$. Зафиксируем произвольное $s \in [s^+, s^-]$ и, как обычно, обозначим через $g_s(x)$ срезку функции Грина. Тогда $g_s(b) \leq 0$, причем, в силу леммы 13 и симметричности функции Грина, равенство $g_s(b) = 0$ имеет место лишь при $s = s^-$. Как следует из следствий 1 и 2 леммы 5, для всех $s \geq s^+$ будет выполняться равенство $S(g_s(a+0), D^1g_s(a+0), D^2g_s(a+0), D^3g_s(a+0)) = 2$. Применяя к $g_s(x)$ на $[a, s]$ обобщенное правило Декарта (лемма 2), получим

$$\begin{aligned} S(g_s) &\leq 3 - \\ S(\sigma g_s(a+0), -\sigma D^1g_s(a+0), \sigma D^2g_s(a+0), -\sigma D^3g_s(a+0)) - \\ &- S(\sigma g_s(s), \sigma D^1g_s(s), \sigma D^2g_s(s), \sigma D^3g_s(s-0)) = \\ &= 1 - S(\sigma g_s(s), \sigma D^1g_s(s), \sigma D^2g_s(s), \sigma D^3g_s(s-0)). \end{aligned}$$

Если $s > s^+$, то ввиду следствия 2 леммы 10 $S(g_s) \geq 1$, и тогда $S(\sigma g_s(s), \sigma D^1g_s(s), \sigma D^2g_s(s), \sigma D^3g_s(s-0)) = 0$. Если же $s = s^+$, то из лемм 13 и 14, а затем из леммы 7, следует $S(\sigma g_s(s), \sigma D^3g_s(s-0)) = 0$, и вновь получаем $S(\sigma g_s(s), \sigma D^1g_s(s), \sigma D^2g_s(s), \sigma D^3g_s(s-0)) = 0$. Это равенство вместе с положительностью функции Грина на диагонали $x = s$ дают неравенство $D^3g_s(s-0) > 0$. Тогда из свойства 4) леммы 9 получаем $D^3g_s(s+0) > 0$, откуда $S(g_s(s), -D^1g_s(s), D^2g_s(s), -D^3g_s(s+0)) = 3$. Далее, учитывая, что $g_s(x) \not\equiv 0$ на $[s, b]$, из обобщенного правила Декарта следует, что на отрезке $[s, b]$ должны выполняться равенства $S(g_s) = 0$ и $S(\sigma g_s(b-0), \sigma D^1g_s(b-0), \sigma D^2g_s(b-0), \sigma D^3g_s(b-0)) = 0$. Тогда из $g_s(s) > 0$ и $g_s(b) \leq 0$ получаем, что $g_s(b) = 0$ и, значит,

$S(\sigma g_s(b-0), \sigma D^1 g_s(b-0)) = 1 > S(\sigma g_s(b-0), \sigma D^1 g_s(b-0), \sigma D^2 g_s(b-0), \sigma D^3 g_s(b-0))$. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы. $\triangleright$

Резюмируя вышеизложенное, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 6. Множество $\mathfrak{N}$ либо пусто, либо состоит из двух непесекающихся непрерывных кривых, симметричных относительно диагонали квадрата, с концами на смежных сторонах квадрата. Всякая прямая, параллельная какой-нибудь стороне квадрата, пересекает множество $\mathfrak{N}$ не более чем в одной точке. Если (x_1, s_1) и (x_2, s_2) две произвольные точки множества $\mathfrak{N}$ такие, что $x_1 < s_1$ и $x_2 > s_2$, то функция $G(x, s)$ положительна на прямоугольнике $\{x_1 < x < x_2, s_2 < s < s_1\}$ и отрицательна на прямоугольниках $\{a < x < x_1, s_1 < s \leq b\}$ и $\{x_2 < x \leq b, a < s < s_2\}$.

Теорема 7. Для того чтобы функция Грина $G(x, s)$ задачи (1)–(3) была строго положительна на $(a, b] \times (a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для ее предельной срезки $g_b(x) = G(x, b)$ (или $g_b(s) = G(b, s)$) выполнялось неравенство $\sigma g_b(a+0) > 0$.

$\triangleleft$ Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Из теоремы 9 следует, что если функция Грина равна нулю в некоторой точке множества $(a, b] \times (a, b]$, то по обе стороны диагонали $x = s$ найдутся точки, в которых $G(x, s)$ принимает отрицательные значения. При этом, если функция Грина отрицательна в некоторой точке (x_0, s_0) треугольника $a < x < s \leq b$, то из теоремы 6 следует, что она отрицательна и во всех точках (x, s) , у которых $x \in (a, x_0]$ и $s \in [s_0, b]$. Но тогда $\sigma g_b(a+0) < 0$, что противоречит условию теоремы. $\triangleright$

Теорема 8. Функция Грина $G(x, s)$ задачи (1)–(3) строго положительна на $(a, b] \times (a, b]$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$p(b)z''(b) + \beta_1(b)z'(b) - \beta_0(b)z(b) \geq 0, \quad (12)$$

где $z(x)$ — решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $z(a) = z'(a) = z''(a) = 0$, $z'''(a) = \frac{1}{p(a)}$.

$\triangleleft$ Как следует из теоремы 7, положительность функции $G(x, s)$ на $(a, b] \times (a, b]$ эквивалентна неравенству $\sigma g_b(a+0) > 0$. В силу (2) знак $\sigma g_b(a+0)$ определяется знаком $\sigma g'_b(a+0)$ или, что одно и то же,

$\sigma D^1 g_b(a+0) > 0$. Поэтому теорема будет доказана, если мы покажем, что

$$(\sigma D^1 g_b(a+0) > 0) \Leftrightarrow (p(b)z''(b) + \beta_1(b)z'(b) - \beta_0(b)z(b) \geq 0).$$

Найдем значение $D^1 g_b(a)$. Для этого воспользуемся свойствами предельной срезки $g_b(x)$. Обозначим через $l_1(\cdot)$ и $l_2(\cdot)$ линейные функционалы, определяющие краевые условия (2) (в том же порядке, что и в (2)), а через $l_3(\cdot)$ и $l_4(\cdot)$ — линейные функционалы, определяющие краевые условия (3) (в том же порядке, что и в (3)). Тогда, в силу свойства 6 леммы 9, $l_i(g_b) = -\delta_{i4}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Пусть функции $w_k(x)$, $k = \overline{1, 4}$, образуют фундаментальную систему уравнения (1), причем

$$w_k^{(j-1)}(a) = \delta_{kj}, \quad D^3 w_k(a) = \delta_{k4}, \quad k = \overline{1, 4}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Тогда для функции $g_b(x)$ имеет место представление

$$g_b(x) = \frac{-1}{\det \|l_i(w_k)\|} \begin{vmatrix} l_1(w_1) & l_1(w_2) & l_1(w_3) & l_1(w_4) \\ l_2(w_1) & l_2(w_2) & l_2(w_3) & l_2(w_4) \\ l_3(w_1) & l_3(w_2) & l_3(w_3) & l_3(w_4) \\ w_1(x) & w_2(x) & w_3(x) & w_4(x) \end{vmatrix}.$$

Откуда

$$D^1 g_b(a) = \frac{-\beta(a)}{\det \|l_i(w_k)\|} l_3(w_4) \quad (13)$$

и, аналогично,

$$D^2 g_b(a) = \frac{-\vartheta(a)}{\det \|l_i(w_k)\|} l_3(w_4). \quad (14)$$

Итак, при $\beta(a) \neq 0$ величина $\sigma D^1 g_b(a+0)$ определяется величиной $\text{sign} \frac{-l_3(w_4)}{\det \|l_i(w_k)\|}$. Если же $\beta(a) = 0$, то $\vartheta(a) \neq 0$ и $\sigma g_b(a+0) = \sigma D^1 g_b(a+0) = \sigma D^2 g_b(a+0)$. Т. е. в любом случае $\sigma D^1 g_b(a+0)$ определяется величиной $\text{sign} \frac{-l_3(w_4)}{\det \|l_i(w_k)\|}$.

Покажем, что $\det \|l_i(w_k)\| < 0$. Если в условиях (3) коэффициентам $\beta_1(b)$, $\beta_0(b)$ и $\delta_0(b)$ придавать различные значения, то можно рассматривать $\det \|l_i(w_k)\|$ как функцию $\Psi(\beta_1, \beta_0, \delta_0)$ трех переменных, заданную на многообразии $\Omega = \{(\beta_1, \beta_0, \delta_0) \in \mathbb{R}^3 \mid \beta_1 > 0, \delta_0 < 0, [\beta_0]^2 - \beta_1 \delta_0 < 0\}$. Поскольку все коэффициенты входят в краевые условия (3) линейно, то функция $\Psi(\beta_1, \beta_0, \delta_0)$ непрерывна на Ω по совокупности переменных и, в силу невырожденности задачи (1)–(3),

не обращается в нуль на Ω . Если обозначить через $\mathcal{G}_b(x; \beta_1, \beta_0, \delta_0)$ предельную при $s \rightarrow b - 0$ срезку функции Грина задачи (1)–(3), когда в качестве значений констант $\beta_1(b)$, $\beta_0(b)$ и $\delta_0(b)$ из условий (3) взята тройка $(\beta_1, \beta_0, \delta_0) \in \Omega$ в которой $\beta_0 \leq 0$, то в силу теоремы 3 будет выполнено неравенство $\sigma \mathcal{G}_b(a + 0; \beta_1, \beta_0, \delta_0) > 0$. Учитывая свойства функции $w_4(x)$ и неравенства $\beta_0 \leq 0$, $\beta_1 > 0$, из (13) (или (14)) получаются неравенства

$$\sigma D^1 \mathcal{G}_b(a + 0; \beta_1, \beta_0, \delta_0) = \text{sign} \frac{D^3 w_4(b) + \beta_1 w_4'(b) - \beta_0 w_4(b)}{-\Psi(\beta_1, \beta_0, \delta_0)} > 0,$$

$$D^3 w_4(b) + \beta_1 w_4'(b) - \beta_0 w_4(b) > 0.$$

Откуда следует $\Psi(\beta_1, \beta_0, \delta_0) < 0$ при $\beta_0 \leq 0$, а значит, и на всем Ω .

Теперь, возвращаясь к исходной задаче, если $l_3(w_4) > 0$, то $\sigma D^1 g_b(a + 0) > 0$. Если же $l_3(w_4) = 0$, то $g_b(a) = g_b'(a) = g_b''(a) = 0$ и $g_b(b) > 0$, поэтому из леммы 6 следует $g_b(x) > 0$ для всех $x \in (a, b]$, т. е. $\sigma D^1 g_b(a + 0) > 0$. Поскольку $w_4(x) \equiv z(x)$, то импликация

$$(p(b)z''(b) + \beta_1(b)z'(b) - \beta_0(b)z(b) \geq 0) \Rightarrow (\sigma D^1 g_b(a + 0) > 0)$$

доказана.

Пусть теперь $\sigma D^1 g_b(a + 0) > 0$. Если первая квазипроизводная $D^1 g_b(a)$ строго больше нуля, то из $\det \|l_i(w_k)\| < 0$ и (13) сразу получим $l_3(w_4) > 0$. Если же $D^1 g_b(a) = 0$, то неравенство $\sigma D^1 g_b(a + 0) > 0$ влечет $D^2 g_b(a) \geq 0$. Если здесь $D^2 g_b(a) > 0$, то из (14) следует, неравенство $l_3(w_4) > 0$. Ну, а если же и $D^2 g_b(a) = 0$, то из $\beta(a) + \vartheta(a) \neq 0$ получим $l_3(w_4) = 0$. Теорема доказана. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ. В неравенстве (12) не фигурирует коэффициент $\delta_0(b)$. Однако нужно помнить, что между коэффициентами условий (3) есть связь, выражаемая неравенством $[\beta_0(b)]^2 - \beta_1(b)\delta_0(b) < 0$.

Литература

1. Кулаев Р. Ч. О разрешимости краевой задачи для уравнения четвертого порядка на графе // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 1.—С. 27–34.
2. Кулаев Р. Ч. Метод редукции для уравнения четвертого порядка на графе // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 4.—С. 296–308.
3. Калафати П. Д. О функциях Грина обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР.—1940.—Т. 26, № 6.—С. 535–539.
4. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа.—М.: Наука, 1978.—Ч. 2.—431 с.

5. Боровских А. В. Условия знакорегулярности разрывных краевых задач // Мат. заметки.—2003.—Т. 74, № 5.—С. 643–655.
6. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2007.—272 с.
7. Кулаев Р. Ч. Необходимое и достаточное условия положительности функции Грина краевой задачи для уравнения четвертого порядка на графе // Диф. уравнения.—2015.—(Принята в печать).
8. Степанов Г. Д. Эффективные критерии знакорегулярности и осцилляционности функции Грина двухточечных задач // Мат. сб.—1997.—Т. 188, № 11.—С. 121–159.

Кулаев Руслан Черменович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: kulaev@smath.ru

Галаванова Залина Ефимовна
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: gal-zalina@yandex.ru

FUNCTIONAL REPRESENTATION OF INJECTIVE BANACH LATTICES

A. G. Kusraev

1. Introduction

The aim of this work is to survey recent results on functional representation of injective Banach lattices obtained in [16–20]. The main results assert that *AL*-spaces and Dedekind complete *AM*-spaces with unit are the ‘*building blocks*’ for any injective Banach lattice. In other words, we present a concrete functional description of injective Banach lattices similar to that of Kakutani–Maharam representation theorem for *AL*-spaces, see [22, p. 136] and [33, Theorem 26.4.7] (see also [8, Ch. 33]).

A *Banach lattice* is a Banach space over the reals that is equipped with a partial order $\leq$ for which the *supremum* $x \vee y$ and the *infimum* $x \wedge y$ exist for all vectors $x, y \in X$, and such that the positive cone $X_+ := \{x \in X : 0 \leq x\}$ is closed under addition and multiplication by nonnegative real numbers and the order is connected to the norm by the condition that $|x| \leq |y| \implies \|x\| \leq \|y\|$, where the *absolute value* is defined by $|x| := x \vee (-x)$. A Banach lattice X is called *Dedekind complete* if every non-empty order bounded set in X has the least upper bound and the greater least bound:

$$U \subset [a, b] := \{x \in X : a \leq x \leq b\} \implies \exists \sup(U), \inf(U) \in X.$$

Almost all classical Banach spaces $(L_p, l_p, C(K), c, c_0)$ are Banach lattices. A *band* in a Banach lattice X is a subset B of the form $B := A^\perp := \{x \in X : (\forall a \in A) |x| \wedge |a| = 0\}$. Clearly, $B \cap B^\perp = \{0\}$. A band B in X that satisfies $X = B \oplus B^\perp$ is referred to as a *projection band*, while the associated projection (onto B parallel to $B^\perp$) is called a *band projection*. Let $\mathbb{P}(X)$ stand for the Boolean algebra of all band projections in X .

A linear mapping T from a Banach lattice X to a Banach lattice Y is called *positive* if it sends positive vectors to positive vectors, i.e., $T(X_+) \subset Y_+$. If a positive operator preserves the lattice operations, it is called a *lattice homomorphism*. A one-to-one surjective lattice

homomorphism is called a *lattice isomorphism*. A *lattice isometry* is a lattice isomorphism which is also an isometry. Two classes of Banach lattices play a significant role in the Banach lattice theory.

DEFINITION 1. A Banach lattice X is said to be an *AL-space* (*AM-space*) if $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ (resp. $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$) whenever $|x| \wedge |y| = 0$. An *AM-space* has a (strong order) *unit* $u \geq 0$ if the order interval $[-u, u] := \{x : -u \leq x \leq u\}$ is the unit ball of X .

1.1. Kakutani Representation Theorem. *An arbitrary AL-space is lattice isometric to $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ for some measure space (Ω, Σ, μ) .*

1.2. Kakutani–Kreĭns Representation Theorem. *An AM-space is lattice isometric to a sublattice of $C(K)$ for some compact Hausdorff space K . Moreover, if the AM-space has a strong order unit then it is lattice isometric to $C(K)$ itself.*

1.3. Nakano–Stone Completeness Theorem. *Let K be a compact Hausdorff topological space. The vector lattice $C(K)$ is Dedekind complete if and only if K is extremally disconnected.*

For every cardinal γ , there exists a canonical measure on the unit cube $[0, 1]^\gamma$ that is the γ th power of Lebesgue's measure on $[0, 1]$. The associated Banach lattice of integrable functions will be denoted by $L^1([0, 1]^\gamma)$. Recall that if γ is finite or countable then $L^1([0, 1]^\gamma)$ is lattice isometric to $L^1([0, 1])$, while $L^1([0, 1]^\beta)$ and $L^1([0, 1]^\gamma)$ are not lattice isometric whenever β and γ are infinite cardinals with $\beta < \gamma$.

1.4. Kakutani–Maharam Representation Theorem. *Let X be an AL-space. Then there exists a unique family of cardinals $(\delta_\gamma)_{\gamma \in \Gamma \cup \{0\}}$ with Γ being a set of infinite cardinals such that δ_γ is either equal to 1 or is uncountable for each $\gamma \in \Gamma$ and*

$$X \simeq l_1(\delta_0) \oplus \sum_{\gamma \in \Gamma}^{\oplus} \delta_\gamma L^1([0, 1]^\gamma),$$

where $\simeq$ denotes lattice isometry, $\oplus$ and $\sum^{\oplus}$ denote l_1 -joins, and δY stands for the l_1 -join of δ copies of Y .

1.5. Remark. Banach lattices were first considered by Kantorovich in [13]. For an extensive treatment of Banach lattices see [3, 22, 23, 27, 30, 31, 32, 36]. Theorems 1.1, 1.2, and 1.3 were proved in [11, 12, 14], and [29, 34], respectively. Theorem 1.4 see in [33, Proposition 26.4.7].

2. Injective Banach Lattices

2.1. Definition. A real Banach lattice X is said to be *injective* if, for every Banach lattice Y , every closed vector sublattice $Y_0 \subset Y$, and every positive linear operator $T_0 : Y_0 \rightarrow X$ there exists a positive linear extension $T : Y \rightarrow X$ of T_0 with $\|T_0\| = \|T\|$. Equivalently, X is an injective Banach lattice if, whenever X is lattice isometrically imbedded into a Banach lattice Y , there exists a positive contractive projection from Y onto X .

Thus, the injective Banach lattices are the injective objects in the category of Banach lattices with the positive contractions as morphisms. Arendt [4, Theorem 2.2] proved that the injective objects are the same if the regular operators with contractive modulus are taken as morphisms. More details concerning injective Banach lattices see in Lotz [26], Cartwright [7], Haydon [10], Wickstead [35], and Buskes [6].

Lotz [26] was the first who introduced this concept and proved among other things the following two results. But the first example of injective Banach lattice was indicated by Abramovich [1].

2.2. Theorem (Lotz, [26]). *A Dedekind complete AM-space with unit is an injective Banach lattice.*

Taking into account the Nakano–Stone Completeness Theorem one can state Theorem 2.2 equivalently: *The Banach lattice of continuous function $C(K)$ is injective, whenever K is an extremally disconnected Hausdorff compact topological space.*

2.3. Theorem (Lotz, [26]). *Every AL-space is an injective Banach lattice.*

The result shows that there is an essential difference between injective Banach lattices and injective Banach spaces, since $C(K)$ with extremally disconnected compactum K is the only (up to isometric isomorphism) injective object in the category of Banach spaces and linear contractions.

2.4. Remark. A Banach lattice X is called λ -*injective* if $\|T\| \leq \lambda \|T_0\|$ in Definition 2.1. In what follows injective means 1-injective; λ -injective Banach lattices ($\lambda > 1$) are not considered. For λ -injective Banach lattices ($\lambda > 1$) see [24, 25, 28].

A geometric property which enables us to characterize injectivity was discovered by Cartright [7].

2.5. Definition. (1) A Banach lattice X has the *splitting property* (or the *Cartwright property*) if, given $x_1, x_2, y \in X_+$ with $\|x_1\| \leq 1$,

$\|x_2\| \leq 1$, and $\|x_1 + x_2 + y\| \leq 2$, there exist $y_1, y_2 \in X_+$ such that $y_1 + y_2 = y$, $\|x_1 + y_1\| \leq 1$, and $\|x_2 + y_2\| \leq 1$.

(2) A Banach lattice X has the *finite order intersection property* if, given $z \in X_+$, finite collections $x_1, \dots, x_n \in X_+$, $y_1, \dots, y_m \in X_+$, and strictly positive reals $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}_+$, $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{R}_+$ such that $\|x_i\| \leq r_i$, $\|y_j\| \leq s_j$, and $\|x_i + y_j + z\| \leq r_i + s_j$ for all $i := 1, \dots, n$ and $j := 1, \dots, m$, there exist $u, v \in X_+$ with $z = u + v$, $\|x_i + u\| \leq r_i$, and $\|y_j + v\| \leq s_j$ for all $i := 1, \dots, n$ and $j := 1, \dots, m$.

2.6. Theorem (Cartwright, [7]). *A Banach lattice has the finite order intersection property if and only if it has the Cartwright property.*

2.7. Theorem (Cartwright, [7]). *A Banach lattice has the splitting property if and only if its second dual is injective.*

2.8. Definition. A Banach lattice X is said to have: the *property (P)* if there exists a positive contractive projection in X'' onto X [30, p. 47]; the *Levi property* if $0 \leq x_\alpha \uparrow$ and $\|x_\alpha\| \leq 1$ imply that $\sup_\alpha x_\alpha$ exists in X [2, Definition 7 (2)]; the *Fatou property* if $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ implies $\|x_\alpha\| \uparrow \|x\|$ [2, Definition 7 (3)]. A Banach lattice with the Levi (Fatou) property is also called *order semicontinuous* (resp. *monotonically complete*) [30].

A Dedekind complete Banach lattice X with a separating order continuous dual has property (P) if and only if it has the Levi and Fatou properties [32, Propositions 7.6 and 7.10]. Cartwright [7, Corollary 3.8] proved that a Banach lattice is injective if and only if it has the Cartwright property and the property (P). Haydon demonstrated that (P) may be replaced with the intrinsic ‘completeness’ property.

2.9. Theorem (Haydon, [10]). *A Banach lattice is injective if and only if it has the Cartwright, Fatou, and Levi properties.*

2.10. Definition. A band projection π in a Banach lattice X is called an *M-projection* if $\|x\| = \max\{\|\pi x\|, \|\pi^\perp x\|\}$ for all $x \in X$, where $\pi^\perp := I_X - \pi$. The collection of all *M-projections* forms a subalgebra $\mathbb{M}(X)$ of the Boolean algebra $\mathbb{P}(X)$. The *f-subalgebra* of the center $\mathcal{Z}(X)$ generated by $\mathbb{M}(X)$ is called the *M-center* of X and denoted by $\mathcal{Z}_m(X)$.

Observe that $\mathbb{M}(X)$ is an order closed subalgebra of $\mathbb{P}(X)$ whenever X has the Fatou and Levi properties. In this event the relations $\mathbb{B} \simeq \mathbb{M}(X)$ and $\Lambda(\mathbb{B}) \simeq \mathcal{Z}_m(X)$ are equivalent.

2.11. Theorem (Haydon, [10]). *An injective Banach lattice X is an AL-space if and only if there is no M-projection in it other than zero and identity, i. e., $\mathbb{M}(X) = \{0, I_X\}$.*

2.12. Remark. Gierz [9, Theorem 8.5] and Haydon [10, Theorem 7B] proved that an injective Banach lattice is representable as the lattice of continuous sections of a continuous bundle of nontrivial AL -spaces. The main result of the paper (Theorem 4.3 below) specifies this section representation of injectives in the spirit of Kakutani–Maharam representation Theorem.

3. Direct Sums of Injectives

Every injective Banach lattice is lattice isometric to a direct sum of concrete injective Banach lattices. To see that we have first to study an appropriate notion of direct sum decomposition.

Let $\mathbb{B} := \mathbb{M}(X)$ and denote by $\text{Prt}_\sigma := \text{Prt}_\sigma(\mathbb{B})$ and $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ the set of all countable partitions of unity in $\mathbb{B}$ and the collection of all finite subsets of X , respectively. Define $\mathbb{B}\langle X_0 \rangle$ by

$$\mathbb{B}\langle X_0 \rangle := \{x \in X : x = \text{mix}_\xi(b_\xi x_\xi), (x_\xi) \subset X_0, (b_\xi) \in \text{Prt}(\mathbb{B})\},$$

where $x = \text{mix}_\xi(b_\xi x_\xi)$ means that $\pi_\xi x = \pi_\xi x_\xi$ for all ξ .

3.1. Definition. A subset $X_0 \subset X$ is said to be $\mathbb{B}$ -dense in X whenever $\mathbb{B}\langle X_0 \rangle$ is norm dense in X .

The details concerning the following result see in [17].

3.2. Theorem (Kusraev, [17, 20]). *Let $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ be a family of injective Banach lattices. Assume that there is a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$ and a family $(b_\alpha)_{\alpha \in A}$ in $\mathbb{B}$ with $\bigvee_{\alpha \in A} b_\alpha = 1$ and $\mathbb{M}(X_\alpha) \simeq \mathbb{B}_\alpha = [\mathbb{O}, b_\alpha]$ for all $\alpha \in A$. Then there exists a unique up to a lattice $\mathbb{B}$ -isometry injective Banach lattice X such that the following hold:*

- (1) $\mathbb{B} \simeq \mathbb{M}(X)$.
- (2) For any $\alpha \in A$ there is a lattice $\mathbb{B}_\alpha$ -isometry $\iota_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$.
- (3) $(\iota_\alpha(X_\alpha))_{\alpha \in A}$ is a family of pair-wise disjoint bands in X .
- (4) $\bigoplus_{\alpha \in A} \iota_\alpha(X_\alpha)$ is $\mathbb{B}$ -dense in X .
- (5) For any $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in X$ we have

$$\|\mathbf{x}\|_{\text{ins}} = \sup_{\theta \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(A)} \inf_{(\pi_k) \in \text{Prt}_\sigma} \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\alpha \in \theta} \|\pi_k x_\alpha\|.$$

3.3. Definition. The Banach lattice $(X, \|\cdot\|_{\text{ins}})$ defined in Theorem 3.2 is called the *injective sum* of injective Banach lattices. Denote $\sum_{\alpha \in A}^{\boxplus} X_{\alpha} := X$ and $\beta \diamond X := \sum_{\alpha \in A}^{\boxplus} X_{\alpha}$, where $X_{\alpha} = X$ for all $\alpha \in A$.

3.4. Corollary. If X is an injective Banach lattice and $(\pi_{\alpha})_{\alpha \in A}$ is a partition of unity in $\mathbb{M}(X)$, then

$$X = \sum_{\alpha \in A}^{\boxplus} \pi_{\alpha} X = \left(\sum_{\alpha \in A}^{\oplus} \pi_{\alpha} X \right)_{\infty},$$

$$\|\mathbf{x}\|_{\text{ins}} = \|\mathbf{x}\|_{\infty} := \sup_{\alpha \in A} \|\pi_{\alpha} x\| \quad (\mathbf{x} = (\pi_{\alpha} x), x \in X).$$

3.5. Definition. Let X be an injective Banach lattice. A positive element $x \in X$ is said to be $\mathbb{B}$ -*indecomposable* or $\mathbb{B}$ -*atom* whenever for every pair of disjoint $x, y \in X_+$ with $y + z \leq x$ there exists a band projection $\pi \in \mathbb{B}$ such that $\pi y = 0$ and $\pi^{\perp} z = 0$. Say that X is $\mathbb{B}$ -*atomic*, if zero is the only elements in X disjoint from all $\mathbb{B}$ -atoms [16].

3.6. Definition. The $\mathbb{B}$ -*density character* of a subset S of X is the smallest cardinal γ such that S contains a $\mathbb{B}$ -dense subset of cardinality γ . Let γ be an infinite cardinal. Say that X is $(\mathbb{B}, \gamma)$ -*homogeneous* whenever X has no $\mathbb{B}$ -atoms and for every $x, y \in X$ with $x \leq y$ and $x \neq y$ the $\mathbb{B}$ -density character of the order interval $[x, y]$ equals γ .

3.7. Definition. Let γ is a cardinal. A complete Boolean algebra $\mathbb{B}$ is said to be γ -*stable* whenever $\gamma^{\wedge}$ is a cardinal within $V^{(\mathbb{B})}$, i. e., $V^{(\mathbb{B})} \models \gamma^{\wedge} = |\gamma^{\wedge}|$, see [16]. An element $b \in \mathbb{B}$ is called γ -*stable* if the relative Boolean algebra $[\mathbb{O}, b]$ is γ -stable. A definition not involving $V^{(\mathbb{B})}$ see [21, Definition 12.3.7 and Theorem 12.3.8].

3.8. Теорема (Kusraev, [20]). Let X be an injective Banach lattice and $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$. Then there exists a unique pair of families $(b_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma \cup \{0\}}$ and $(X_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma \cup \{0\}}$, such that the following assertions hold:

- (1) Γ is a set of infinite cardinals.
- (2) b_{γ} is γ -stable in $\mathbb{B}$ for all $\gamma \in \Gamma$ and $\mathbb{1} = b_0 \vee \bigvee_{\gamma \in \Gamma} b_{\gamma}$.
- (3) $(X_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma \cup \{0\}}$ is a family of pairwise disjoint bands of X .
- (4) X_0 is $\mathbb{B}_0$ -atomic, while X_{γ} is $(\mathbb{B}_{\gamma}, \gamma)$ -homogeneous for all $\gamma \in \Gamma$, with $\mathbb{B}_0 = [\mathbb{O}, b_0]$ and $\mathbb{B}_{\gamma} := [\mathbb{O}, b_{\gamma}]$.
- (5) The representation $X = X_0 \boxplus \sum_{\gamma \in \Gamma}^{\boxplus} X_{\gamma}$ holds.

4. Functional Representation of Injectives

4.1. Definition. A pair of families $(b_\alpha)_{\alpha \in A}$ and $(b_{\beta\gamma})_{\beta \in B(\gamma), \gamma \in \Gamma}$ in a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$ is said to be *strictly cardinal series* in $\mathbb{B}$ if

- (1) A is a set of cardinals and $(b_\alpha)_{\alpha \in A}$ is pairwise disjoint;
- (2) Γ is a set of infinite cardinals, each element of $B(\gamma)$ is either equal to 1 or is uncountable for all $\gamma \in \Gamma$, the family $(b_{\beta\gamma})_{\beta \in B(\gamma)}$ is pairwise disjoint, and $\mathbb{1} = \bigvee_{\alpha \in A} b_\alpha \vee \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \bar{b}_\gamma$, where $\bar{b}_\gamma := \bigvee_{\beta \in B(\gamma)} b_{\beta\gamma}$;
- (3) b_α is α -stable for all $\alpha \in A$, $b_{\beta\gamma}$ is β -stable for all $\beta \in B(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, and $\bar{b}_\gamma$ is γ -stable for all $\gamma \in \Gamma$.

4.2. Definition. Let K be an extremally disconnected compactum, while X be an arbitrary Banach space. Denote by $C_\#(K, X)$ the set of equivalence classes of norm bounded continuous vector-functions u acting from $\text{dom}(u) \subset K$ to X with $K \setminus \text{dom}(u)$ meager. Vector-functions u and v are equivalent if they coincide on the intersection of their domains $\text{dom}(u)$ and $\text{dom}(v)$.

The set $C_\#(K, X)$ may be naturally endowed with the structure of a $C(K)$ -module. The continuous extension $N(u)$ of the point-wise norm $k \mapsto \|u(k)\|$ ($k \in \text{dom}(u)$) to K determines a decomposable norm $u \mapsto N(u)$ on $C_\#(K, X)$ with values in $C(K)$. Moreover, $C_\#(K, X)$ is a Banach space with respect to the mixed norm defined as $u \mapsto \|N(u)\|_\infty$. (Details can be found in [15, 2.3.3, 7.1.1, 7.1.2].)

If X is an AL -space then $C_\#(K, X)$ is an injective Banach lattice such that $\mathbb{M}(C_\#(K, X))$ is isomorphic to the Boolean algebra of clopen subsets of K and $\mathcal{Z}_m(C_\#(K, X)) \simeq C(K)$, see [18].

4.3. Theorem (Kusraev, [20]). *Let X be an injective Banach lattice and K be the Stone space of the Boolean algebra $\mathbb{M}(X)$. Then there exists a unique strictly cardinal series $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ and $(K_{\beta\gamma})_{\beta \in B(\gamma), \gamma \in \Gamma}$ in the Boolean algebra of clopen subsets of K such that the representation holds:*

$$X = X_1 \boxplus X_2,$$

$$X_1 \simeq_{\mathbb{B}} \left(\sum_{\alpha \in A} C_\#(K_\alpha, l^1(\alpha)) \right)_\infty,$$

$$X_2 \simeq_{\mathbb{B}} \sum_{\gamma \in \Gamma}^{\boxplus} \left(\sum_{\beta \in B(\gamma)} \beta \diamond C_\#(K_{\beta\gamma}, L^1([0, 1]^\gamma)) \right)_\infty.$$

4.4. Remark. There exists a ‘mixed’ *positive injective-projective tensor product* $X \otimes_{\epsilon|\pi|} Y$ of two injective Banach lattices X and Y which is also an injective Banach lattice. Moreover, given an AL -space X , $C(K) \otimes_{\epsilon|\pi|} X$ is lattice $\mathbb{B}$ -isometric to $C_{\#}(K, X)$. Thus, Theorem 4.3 tells us that AL -spaces and Dedekind complete AM -spaces with unit can be considered as ‘building blocks’ for injective Banach lattices.

4.5. Remark. The representation of an injective Banach lattice in Theorem 4.3 is not unique in general, without assumption 4.1 (3), cf. [15, Ch. 8]. The reason for this is the so-called *cardinal collapsing* phenomena: it is possible for two infinite cardinals $\kappa < \lambda$ to satisfy $V^{(\mathbb{B})} \models |\kappa^{\lambda}| = |\lambda^{\kappa}|$. In this event we say that λ has been *collapsed* to κ in $V^{(\mathbb{B})}$, see [5, Ch. 5].

Now, consider the particular case when $\mathbb{M}(X)$ is isomorphic to the complete Boolean algebra $\mathbb{B} = \Sigma/\mu^{-1}(0)$ associated with the measure space (Ω, Σ, μ) . In Theorem 4.3 we can replace $C_{\#}(K_{\alpha}, l^1(\alpha))$ and $C_{\#}(K_{\beta\gamma}, L^1([0, 1]^{\gamma}))$ respectively by $L^{\infty}(\Omega_{\alpha}, l^1(\alpha))$ and $L^{\infty}(\Omega_{\beta\gamma}, L^1([0, 1]^{\gamma}))$ with $\Omega_{\alpha}, \Omega_{\beta\gamma} \in \Sigma$. Let $\tilde{A} \in \mathbb{B}$ stand for the coset of $A \in \Sigma$.

4.6. Theorem (Kusraev, [20]). *Let X be an IBL. Assume that $\mathbb{M}(X) \simeq \mathbb{B} := \mathbb{B}(\Omega, \Sigma, \mu)$ for some measure space (Ω, Σ, μ) . Then there exist two M -bands X_1 and X_2 of X , two families of measurable subsets $(\Omega_{\alpha})_{\alpha \in A}$ and $(\Omega_{\beta\gamma})_{\beta \in B(\gamma), \gamma \in \Gamma}$ uniquely determined up to a null set such that $(\tilde{\Omega}_{\alpha})_{\alpha \in A}$ and $(\tilde{\Omega}_{\beta\gamma})_{\beta \in B(\gamma), \gamma \in \Gamma}$ satisfy the conditions 4.1 (1, 2) and the representation holds:*

$$\begin{aligned} X &= X_1 \boxplus X_2, \\ X_1 &\simeq_{\mathbb{B}} \left(\sum_{\alpha \in A} L^{\infty}(\Omega_{\alpha}, l^1(\alpha)) \right)_{\infty}, \\ X_2 &\simeq_{\mathbb{B}} \sum_{\gamma \in \Gamma}^{\boxplus} \left(\sum_{\beta \in B(\gamma)} \beta \diamond \left(L^{\infty}(\Omega_{\beta\gamma}, L^1([0, 1]^{\gamma})) \right) \right)_{\infty}, \end{aligned}$$

where Γ and $B(\gamma)$ are the sets of infinite cardinals.

4.7. Remark. If $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$ satisfy the countable chain condition then the representation in Theorem 4.3 is unique. The Boolean algebra $\mathbb{B} := \Sigma/\mu^{-1}(0)$ associated with the measure algebra (Ω, Σ, μ) , $\mu(\Omega) < \infty$, satisfies the countable chain condition. Therefore, the representation in Theorem 4.6 is also unique, contrary to the general case, see Remark 4.5.

4.8. Remark. Theorems 3.8 and 4.3 enables us to give a complete isometric classification of injective Banach lattices, see [20].

References

1. Abramovich Y. A. Injective envelopes of normed lattices // Dokl. Acad. Nauk SSSR.—1971.—Vol. 197, № 4.—P. 743–745.
2. Abramovich Y. A., Aliprantis C. D. Positive operators // Handbook of the Geometry of Banach Spaces / Eds. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss.—2001.—Amsterdam a. o.: Elsevier Science B. V., 2001.—Vol. 1.—P. 85–122.
3. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.—London etc.: Acad. Press Inc., 1985.—xvi+367 p.
4. Arendt W. Factorization by lattice homomorphisms // Math. Z.—1984.—Vol. 185, № 4.—P. 567–571.
5. Bell J. L. Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—New York etc.: Clarendon Press, 1985.—xx+165 p.
6. Buskes G. Separably-injective Banach lattices are injective // Proc. Roy. Irish Acad. Sect.—1985.—Vol. A85, № 2.—P. 185–186.
7. Cartwright D. I. Extension of positive operators between Banach lattices // Memoirs Amer. Math. Soc.—1975.—Vol. 164.—P. 1–48.
8. Fremlin D. H. Measure Theory. Vol. 3. Measure Algebras.—2002.—672 p.
9. Gierz G. Representation of spaces of compact operators and applications to the approximation property // Arch. Math.—1978.—Vol. 30, № 1. P. 622–628.
10. Haydon R. Injective Banach lattices // Math. Z.—1974.—Vol. 156.—P. 19–47.
11. Kakutani S. Concrete representation of abstract (L) -spaces and the mean ergodic theorem // Ann. Math.—1941.—Vol. 42.—P. 523–537.
12. Kakutani S. Concrete representation of abstract (M) -spaces // Ann. of Math.—1941.—Vol. 42.—P. 994–1024.
13. Kantorovich L. V. Lineare halbgeordnete Räume // Mat. Sb.—1937.—Vol. 2 (44).—P. 121–165.
14. Krein M. G., Krein S. G. On an inner characteristic of the set of all continuous functions defined on a bicomact Hausdorff space // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1940.—Vol. 27.—P. 427–430.
15. Kusraev A. G. Dominated Operators.—Dordrecht: Kluwer, 2000.—xiii+446 p.
16. Kusraev A. G. Boolean Valued Analysis Approach to Injective Banach Lattices.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2011.—28 p.—(Preprint, № 1).
17. Kusraev A. G. Boolean Valued Analysis Approach to Injective Banach Lattices. II.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2012.—26 p.—(Preprint, № 1).
18. Kusraev A. G. Boolean-valued analysis and injective Banach lattices // Dokl. Ross. Akad. Nauk.—2012.—Vol. 444, № 2.—P. 143–145. Engl. transl.: Dokl. Math.—2012.—Vol. 85, № 3.—P. 341–343.
19. Kusraev A. G. Tensor product of injective Banach lattices // Studies on Mathematical Analysis / Eds. Yu. F. Korobeĭnik and A. G. Kusraev).—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2013.—P. 115–133.
20. Kusraev A. G. The classification of injective Banach lattices // Dokl. Ross. Akad. Nauk.—2013.—Vol. 453, № 1.
21. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Introduction to Boolean Valued Analysis.—Moscow: Nauka, 2005.—526 p.—(Russian).
22. Lacey H. E. The Isometric Theory of Classical Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—247 p.
23. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—x+243 p.

24. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* On the isomorphic classification of injective Banach lattices // *Advances Math.*—1981.—Vol. 7B.—P. 489–498.
25. *Lindenstrauss J., Wulbert D. E.* On the classification of the Banach spaces whose duals are L^1 -spaces // *J. Funct. Anal.*—1969.—Vol. 4.—P. 332–349.
26. *Lotz H. P.* Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices // *Trans. Amer. Math. Soc.*—1975.—Vol. 211.—P. 85–100.
27. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz Spaces. Vol. 1.—Amsterdam, London: North-Holland, 1971.—514 p.
28. *Mangheni P. J.* The classification of injective Banach lattices // *Israel J. Math.*—1984.—Vol. 48.—P. 341–347.
29. *Nakano N.* Über das System aller stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum // *Proc. Imp. Acad. Tokyo.*—1941.—Vol. 17.—P. 308–310.
30. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer, 1991.—xvi+395 p.
31. *Schaefer H. H.* Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—376 p.
32. *Schwarz H.-V.* Banach Lattices and Operators.—Teubner: Leipzig, 1984.—208 p.
33. *Semadeni Z.* Banach Spaces of Continuous Functions. Vol. 1.—Warszawa: Polish Sci. Publ., 1971.—584 p.
34. *Stone M. H.* Boundedness properties in function lattices // *Can. J. Math.*—1949.—Vol. 1.—P. 176–186.
35. *Wickstead A. W.* Relatively central operators on Archimedean vector lattices // *Proc. Roy. Irish Acad. Sect.*—1980.—Vol. A80, № 2.—P. 191–208.
36. *Zaanen A. C.* Riesz Spaces. Vol. 2.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—xi+720 p.

ANATOLY G. KUSRAEV

Southern Mathematical Institute

Vladikavkaz Science Center of the RAS

RUSSIA, 362027, Vladikavkaz, Markus street, 22

E-mail: kusraev@smath.ru

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ НА ОТРЕЗКЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Л. Ю. Плиева

Одной из областей приложения теории интегралов типа Коши является решение краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений. Также при решении многих задач механики сплошной среды, задач теории аналитических функций комплексного переменного приходится иметь дело с интегралами типа Коши. Кроме этого интегралы типа Коши имеют широкое приложение в задачах теории упругости. В частности при нахождении компонентов напряжений и смещений. Поэтому разработка приближенных методов вычисления интегралов типа Коши имеет теоретическое и практическое значения.

В данной работе строятся интерполяционные квадратурные формулы для интегралов типа Коши вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 p(t) \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad (1)$$

где $p(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\alpha, \beta = \pm\frac{1}{2}$, — весовая функция.

Также строятся квадратурные формулы и для производных интегралов типа Коши

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 p(t) \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt, \quad (2)$$

где z не принадлежит отрезку интегрирования $[-1, 1]$ и $\varphi(t)$ достаточно гладкая функция, принадлежащая классу $H_r(\alpha)$ ($0 < \alpha \leq 1$, $r \geq 1$).

Под указанными квадратурными формулами понимаются формулы, полученные путем замены плотности $\varphi(t)$ ее представлением через полином Лагранжа.

Справедлива теорема.

Теорема. Пусть многочлены $C_n(t)$ и $S_n(t)$ имеют вид

$$C_n(t) = \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}\theta)}{\cos \frac{\theta}{2}}, \quad S_n(t) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}\theta)}{\sin \frac{\theta}{2}},$$

$$\theta = \arccos t,$$

тогда справедливы формулы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_n(t)}{t-z} dt = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} (1 + z - \sqrt{z^2 - 1}), \quad (3)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{S_n(t)}{t-z} dt = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} (1 - z + \sqrt{z^2 - 1}). \quad (4)$$

$\triangleleft$ Многочлены $C_n(t)$ и $S_n(t)$ ортогональны на отрезке $[-1, 1]$, соответственно, по весам $p(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$, $p(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$.

Представим многочлен $C_n(t)$ через многочлены Чебышева первого рода

$$C_n(t) = \frac{T_n(t) + T_{n+1}(t)}{1+t},$$

будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{T_n(t) + T_{n+1}(t)}{(1+t)(t-z)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t) + T_{n+1}(t)}{t-z} dt.$$

Используя формулу [3]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)}{t-z} dt = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}},$$

получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t) + T_{n+1}(t)}{t-z} dt = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} (1 + z - \sqrt{z^2 - 1}).$$

Аналогично, полагая

$$S_n(t) = \frac{T_n(t) - T_{n+1}(t)}{1-t},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{S_n(t)}{t-z} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t) - T_{n+1}(t)}{t-z} dt = \\ &= \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}} (1-z + \sqrt{z^2-1}). \end{aligned}$$

Под $\sqrt{z^2-1}$ подразумевается фиксированная ветвь, однозначная в плоскости с разрезом вдоль отрезка $[-1, 1]$ действительной оси и принимающая на $(1, +\infty)$ действительные значения. $\triangleright$

В работе [3] были доказаны формулы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)}{t-z} dt = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}}, \quad (5)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)}{t-z} dt = \frac{i}{2} (z - \sqrt{z^2-1})^{n+1}, \quad (6)$$

где $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ — многочлен Чебышева первого рода, а $U_n(t) = \frac{\sin((n+1) \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}$ — многочлен Чебышева второго рода.

Формулы (3)–(6) используются при построении квадратурных формул для интегралов типа Коши (1)–(2).

Итак, рассмотрим интеграл (1) с весом $p(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ и заменим плотность $\varphi(t)$ следующим интерполяционным многочленом:

$$L_{n-1}(\varphi, t) = \sum_{k=1}^n \frac{C_n(t)}{(t-x_k)C'_n(x_k)} \varphi(x_k), \quad (7)$$

где $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+1} \pi$ ($k = 1, \dots, n$) — нули многочлена $C_n(t)$.

Используя формулу (3), после вычисления соответствующих коэффициентов получим следующую квадратурную формулу для интеграла:

$$\Phi_{1n}(z) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{1-x_k^2}}{z-x_k} \cos \frac{2k-1}{2(2n+1)} \pi \mu_k(z) \varphi(x_k), \quad (8)$$

где

$$\mu_k(z) = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} (1 + z - \sqrt{z^2 - 1}) - \frac{1}{2i} S_n(x_k) \\ (k = 1, 2, \dots, n).$$

Интерполяционный многочлен (7) является многочленом степени $n-1$, и в случае если плотность $\varphi(t)$ будет многочленом степени $m \leq n-1$, квадратурная формула (8) даст точное значение интеграла.

Аналогично предыдущему построим интерполяционную квадратурную формулу для интеграла (1) с весовой функцией $p(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$. Заменим плотность $\varphi(t)$ в интеграле многочленом Лагранжа

$$L_{n-1}(\varphi, t) = \sum_{k=1}^n \frac{S_n(t)}{(t - \bar{x}_k) S'_n(\bar{x}_k)} \varphi(\bar{x}_k), \quad (9)$$

где $\bar{x}_k = \cos \frac{2k}{2n+1} \pi$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — нули многочлена $S_n(t)$.

Используя формулу (4), после вычисления соответствующих коэффициентов получим следующую квадратурную формулу для интеграла:

$$\Phi_{2n}(z) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{1-\bar{x}_k^2}}{z-\bar{x}_k} \sin \frac{k\pi}{2n+1} \bar{\mu}_k(z) \varphi(\bar{x}_k), \quad (10)$$

где

$$\bar{\mu}_k(z) = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} (1 - z + \sqrt{z^2 - 1}) + \frac{1}{2i} C_n(\bar{x}_k) \\ (k = 1, 2, \dots, n).$$

Аналогично для интегралов

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt,$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt,$$

путем замены плотности $\varphi(t)$ интерполяционными многочленами по узлам являющимися нулями многочленов Чебышева первого и второго родов и применением формул (5)–(6), получим следующие квадратурные формулы:

$$\Phi_{3n}(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \sqrt{1-x_{1k}^2}}{z-x_{1k}} \mu_{1k}(z) \varphi(x_{1k}), \quad (11)$$

$$\mu_{1k}(z) = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}} - \frac{U_{n-1}(x_{1k})}{2i},$$

где $x_{1k} = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

$$\Phi_{4n}(z) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}(1-x_{2k}^2)}{z-x_{2k}} \mu_{2k}(z) \varphi(x_{2k}), \quad (12)$$

$$\mu_{2k}(z) = \frac{i}{2} (z - \sqrt{z^2-1})^{n+1} + \frac{T_{n+1}(x_{2k})}{2i},$$

где $x_{2k} = \cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right)$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Для квадратурных формул (8), (10), (11), (12) получены следующие оценки погрешности:

$$|\Phi(z) - \Phi_{in}(z)| < \frac{M}{4\rho},$$

где $M = \max_{t \in [-1,1]} \frac{|\varphi^{(n+1)}(\xi(t))|}{(n+1)!}$, $\min_{t \in [-1,1]} |t-z| = \rho$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt,$$

и путем замены плотности $\varphi(t)$ полиномом (7) и применением формулы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_n(t)}{(t-z)^2} dt = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} \frac{n(z-1) - n\sqrt{z^2 - 1} - 1}{z-1},$$

получим следующую квадратурную формулу:

$$\begin{aligned} \Phi'_{1n}(z) &\equiv \sum_{k=1}^n \frac{1}{C'_n(x_k)(z-x_k)^2} \times \\ &\times \left[\frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} \tau(z) + \frac{1}{2i} S_n(x_k) \right] \varphi(x_k), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\tau(z) = \frac{(z-x_k)(n(z-1) - n\sqrt{z^2 - 1} - 1) - (z-1)(1+z - \sqrt{z^2 - 1})}{z-1},$$

$$C'_n(x_k) = \frac{2n+1}{2} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{1-x_k^2} \cos \frac{2k-1}{2(2n+1)} \pi},$$

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+1} \pi \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Аналогично для интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt,$$

заменой его плотности многочленом (9) и применением формулы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{S_n(t)}{(t-z)^2} dt = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} \frac{n\sqrt{z^2 - 1} - n(z+1) - 1}{z+1},$$

получим квадратурную формулу

$$\begin{aligned} \Phi'_{2n}(z) &\equiv \sum_{k=1}^n \frac{1}{S'_n(\bar{x}_k)(z-\bar{x}_k)^2} \times \\ &\times \left[\frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} \tau_1(z) - \frac{1}{2i} C_n(\bar{x}_k) \right] \varphi(\bar{x}_k), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\tau_1(z) = \frac{(z - \bar{x}_k)(n\sqrt{z^2 - 1} - n(z + 1) - 1) - (z + 1)(1 - z + \sqrt{z^2 - 1})}{z - 1},$$

$$S'_n(\bar{x}_k) = \frac{2n + 1}{2} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{1 - \bar{x}_k^2} \sin \frac{k\pi}{2n+1}},$$

$$\bar{x}_k = \cos \frac{2k}{2n+1} \pi \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Для квадратурных формул (13) и (14) получены следующие оценки погрешностей:

$$|\Phi'(z) - \Phi'_{1n}(z)| \leq \frac{C_1}{n^r} \frac{1}{\sqrt{z+1}\sqrt{(z-1)^3}},$$

$$|\Phi'(z) - \Phi'_{2n}(z)| \leq \frac{C_2}{n^r} \frac{1}{\sqrt{z-1}\sqrt{(z+1)^3}}$$

$$(r \geq 1, C_1, C_2 = \text{const}).$$

Численные результаты показывают эффективность вычислительных схем.

Литература

1. Ахизер Н. И. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов // Изв. АН СССР.—1945.—Т. 9, № 4.—С.275-290.
2. Хубежты Ш. С., Плиева Л. Ю., Бесаева З. В. О квадратурных формулах для сингулярных интегралов и формулы обращения // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, вып. 2.—С. 56–53.
3. Пыхтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши.—Новосибирск: Наука, 1980.—120 с.
4. Лифанов И. К. Численное решение одномерных сингулярных интегральных уравнений.—М.: ТОО Янус, 1995.—520 с.

Плиева Любовь Юрьевна
Южный математический институт ВЦ РАН и РСО-А
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: plieva-21@mail.ru

МОДУЛЬНО СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО ДЛЯ СТАНДАРТНОГО ГИЛЬБЕРТОВОГО МОДУЛЯ НАД ЛОКАЛЬНОЙ C^* -АЛГЕБРОЙ¹

М. А. Плиев, Я. В. Эльсаев

Введение

Гильбертовы модули над инволютивными топологическими алгебрами являются далеко идущими обобщениями гильбертова пространства. Впервые гильбертовы модули над коммутативными C^* -алгебрами были рассмотрены И. Капланским в работе [1]. В настоящее время теория гильбертовых модулей над C^* -алгебрами является активной, бурно развивающейся областью математики, что нашло отражение в монографической литературе [2, 3].

Во второй половине 20 столетия в работах [4–6] изучались более общие топологические инволютивные алгебры и модули над ними. Наблюдается прогресс в изучении структурных свойств этого класса модулей [7]. Цель настоящей заметки — получить описание модульно сопряженного пространства для стандартного гильбертового модуля H_A над унитарной локальной C^* -алгеброй.

1. Предварительные сведения

Здесь мы приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего. Цель настоящего параграфа — зафиксировать терминологию, обозначения и ввести требуемые понятия. Все необходимые сведения о C^* -алгебрах и более общих топологических алгебрах с инволюцией можно найти в [8–10]. Все алгебры рассматриваются над полем комплексных чисел.

Алгебра с инволюцией A называется *инволютивной LMC -алгеброй*, если A — это локально выпуклое топологическое векторное пространство, где топология задается семейством полунорм $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- а) $p_\lambda(xy) \leq p_\lambda(x)p_\lambda(y)$ для любых $x, y \in A$ и любого $\lambda \in \Lambda$;
- б) $p_\lambda(x) = p_\lambda(x^*)$ для любых $x \in A$, $\lambda \in \Lambda$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 14-31-50416.

Если инволютивная ЛМС-алгебра полна, то она называется *локальной C^* -алгеброй*, если справедливо равенство

$$c) \ p_\lambda(xx^*) = p_\lambda(x)^2 \text{ для любых } x, y \in A, \lambda \in \Lambda.$$

Полунормы, обладающее указанными свойствами называется *C^* -полунормами*. Множество всех C^* -полунорм алгебры A обозначим через $S(A)$. На множестве $S(A)$ можно ввести частичный порядок $p \leq q$ если $p(x) \leq q(x)$ для любого $x \in A$. Если в локальной C^* -алгебре существует единица, то алгебра называется *унитальной*. Рассмотрим некоторые примеры локальных C^* -алгебр.

ПРИМЕР 1.1. Каждая C^* -алгебра является локальной C^* -алгеброй.

ПРИМЕР 1.2. Каждая замкнутая $\star$ -подалгебра локальной C^* -алгебры также является локальной C^* -алгеброй.

ПРИМЕР 1.3. Пусть Δ — направленное вверх множество индексов, $\{\mathcal{H}_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ — семейство гильбертовых пространств таких, что $\mathcal{H}_\lambda \subset \mathcal{H}_\mu$ и

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda = \langle \cdot, \cdot \rangle_\mu|_{\mathcal{H}_\lambda}, \quad \lambda \leq \mu,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ — скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}_\lambda$, $\lambda \in \Delta$. Рассмотрим теперь локально выпуклое пространство

$$\mathcal{H} := \lim_{\rightarrow} \mathcal{H}_\lambda = \bigcup_{\lambda} \mathcal{H}_\lambda.$$

Это пространство с топологией индуктивного предела называется *локальным гильбертовым пространством*.

Обозначим через $L(\mathcal{H})$ пространство линейных операторов $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ таких, что

$$T = \lim_{\rightarrow} T_\lambda, \quad T_\lambda \in L(\mathcal{H}_\lambda),$$

где $L(\mathcal{H}_\lambda)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}_\lambda$, и $(T_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ — семейство операторов $T_\lambda \in L(\mathcal{H}_\lambda)$ для любого $\lambda \in \Delta$. Тогда $L(\mathcal{H})$ будет алгеброй, и, кроме того, с каждым семейством $(T_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ можно связать семейство $(T_\lambda)^*_{\lambda \in \Delta}$, где $T_\lambda^* \in L(\mathcal{H}_\lambda)$. Тогда отображение

$$\star : L(\mathcal{H}) \rightarrow L(\mathcal{H}); \quad T \mapsto T^* = \lim_{\rightarrow} T_\lambda^*$$

будет инволюцией, заданной на $L(\mathcal{H})$. Если $\|\cdot\|_\lambda$ — операторная норма, заданная на $L(\mathcal{H}_\lambda)$, то функция

$$p_\lambda(T) := \|T_\lambda\|_\lambda; \quad T \in L(\mathcal{H})$$

будет C^* -полунормой на $L(\mathcal{H})$ для каждого $\lambda \in \Delta$, и $L(\mathcal{H})$ — это локальная C^* -алгебра относительно семейства полунорм $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.4 [1]. *Каждая локальная C^* -алгебра A изоморфна замкнутой $\star$ -подалгебре $L(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ — некоторое локальное гильбертово пространство.*

Пусть A локальная C^* -алгебра с заданным семейством полунорм $(p_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$. Пусть

$$I_\lambda := \{x \in A : p_\lambda(x) = 0\}.$$

Фактор-пространство A/I_λ будет также инволютивной алгеброй, которое обозначается через A_{p_λ} .

Теорема 1.5 [7, Theorem 1.1.16]. *Пусть A — локальная C^* -алгебра. Тогда A_{p_λ} — C^* -алгебра.*

Фактор-отображение из A в A_{p_λ} обозначается через π_λ .

Пусть A и B локальные C^* -алгебры. Линейное отображение $\varphi : A \rightarrow B$ называется $(\star)$ -гомоморфизмом алгебр A и B , если для любых $x, y \in A$ выполняются равенства

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y); \quad \varphi(x^\star) = \varphi(x)^\star.$$

Предгильбертовым A -модулем называется комплексное векторное пространство V , которое также является правым A -модулем, снабженное полуторалинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow A$, удовлетворяющее свойствам

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{для любого } x \in V; \quad (1)$$

$$\langle x, y \rangle^\star = \langle y, x \rangle \quad \text{для любых } x, y \in V; \quad (2)$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{для любого } x \in V; \quad (3)$$

$$\langle x, ya \rangle = \langle y, x \rangle a \quad \text{для любых } x, y \in V; \quad a \in A. \quad (4)$$

Будем говорить, что V — это *гильбертов A -модуль*, если V полон, как топологическое векторное пространство, относительно топологии, задаваемой системой полунорм:

$$\{\bar{p}\}_{p \in S(A)}, \quad \text{где} \quad \bar{p} := \sqrt{p\langle x, x \rangle}, \quad x \in V.$$

Ниже, мы будем обозначать полунормы $\bar{p}_\lambda$ и p_λ одним и тем же символом p_λ . Пусть V — гильбертов A -модуль и $p_\lambda \in S(A)$, тогда $N_{p_\lambda} = \{x \in V : p_\lambda(\langle x, x \rangle) = 0\}$ — замкнутый A -подмодуль V . Фактор-пространство V/N_{p_λ} обозначается через V_{p_λ} .

Теорема 1.6 [7, Theorem. 1.3.9]. Пусть V — гильбертов A -модуль. Тогда V_{p_λ} — гильбертов A_{p_λ} -модуль.

Фактор-отображение из V в V_{p_λ} обозначается через $\bar{\pi}_\lambda$.

Пусть E и F — гильбертовы модули над локальной C^* -алгеброй A . $\mathbb{C}$ -линейное и A -линейное непрерывное отображение $T: E \rightarrow F$ называется *A -гомоморфизмом* из E в F . Отметим, что непрерывность оператора означает, что для каждой полунормы $p \in S(A)$ найдется такое число $M_p > 0$, что справедливо неравенство $\bar{p}_F(Tx) \leq M_p \bar{p}_E(x)$ для любых $x \in E$. Рассмотрим некоторые примеры гильбертовых модулей.

ПРИМЕР 1.7. Каждая локальная C^* -алгебра является гильбертовым модулем над собой. Внутреннее произведение задается формулой $\langle x, y \rangle = x^*y$.

ПРИМЕР 1.8. Пусть (V_n) — счетная последовательность гильбертовых модулей над локальной C^* -алгеброй A . Через $\bigoplus_n V_n$ обозначим множество всех последовательностей (x_n) таких, что $x_i \in V_i$ и ряд $\sum_n \langle x_n, x_n \rangle$ сходится в A . Тогда $\bigoplus_n V_n$ становится гильбертовым A -модулем, где действие алгебры A на $\bigoplus_n V_n$ и

$$(x_n)a = (x_na); \quad a \in A, \quad (x_n) \in \bigoplus_n V_n;$$

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_n \langle x_n, y_n \rangle.$$

В случае, когда V совпадает с A , $\bigoplus_n V_n$ называется стандартным гильбертовым модулем и обозначается через H_A .

2. Результат

Пусть V гильбертов модуль над локальной C^* -алгеброй A . Тогда *модульно сопряженным* пространством V' называется пространство A -гомоморфизмов, действующих из V в A . В настоящей разделе мы опишем структуру $(H_A)'$, где A — унитарная локальная C^* -алгебра.

Пусть A — локальная C^* -алгебра относительно семейства полунорм $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Через $\mathcal{S}$ обозначим множество всех последовательностей (y_n) , $y_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что для любого индекса $\lambda \in \Lambda$ существует константа C_λ , для которой выполняются неравенства

$$p_\lambda \left(\sum_{i=1}^k y_i^* y_i \right) \leq C_\lambda; \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2.1. Пусть A — унитарная, локальная C^* -алгебра с заданным семейством полунорм $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Тогда справедливо равенство $(H_A)' = \mathcal{S}$.

◁ Покажем сначала, что каждый элемент множества $\mathcal{S}$ задает A -гомоморфизм из H_A в A . Пусть $f = (f_n) \in \mathcal{S}$ и возьмем произвольный элемент $(x_n) \in H_A$. Рассмотрим отображение $\tilde{f} : H_A \rightarrow A$, заданное формулой $\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^\infty f_i^* x_i$. Покажем, что ряд стоящий в правой части равенства сходится в пространстве A . Для этого достаточно установить, что для любого $\lambda \in \Lambda$ сходится ряд $p_\lambda \left(\sum_{i=1}^\infty f_i^* x_i \right)$. В силу того, что ряд $\sum_{i=1}^\infty x_i^* x_i$ сходится, для любого $\lambda \in \Lambda$ найдется $n_0(\lambda) \in \mathbb{N}$, такое что $p_\lambda \left(\sum_{i=n_0(\lambda)}^{n_0(\lambda)+k} x_i^* x_i \right) \leq \varepsilon$, когда $k \in \mathbb{N}$. Теперь, используя неравенство Коши — Шварца [7, Proposition 1.2.2], можем написать

$$\begin{aligned} \left(p_\lambda \left(\sum_{i=n_0(\lambda)}^{n_0(\lambda)+k} f_i^* x_i \right) \right)^2 &\leq p_\lambda \left(\sum_{i=n_0(\lambda)}^{n_0(\lambda)+k} f_i^* f_i \right) p_\lambda \left(\sum_{i=n_0(\lambda)}^{n_0(\lambda)+k} x_i^* x_i \right) \leq \\ &\leq C_\lambda p_\lambda \left(\sum_{i=n_0(\lambda)}^{n_0(\lambda)+k} x_i^* x_i \right) \leq C_\lambda \varepsilon. \end{aligned}$$

$\mathbb{C}$ и A -линейность оператора $\tilde{f}$ очевидны. Применяя еще раз нера-

венство Коши — Шварца,

$$\begin{aligned} \left(p_\lambda \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^* x_i \right) \right)^2 &\leq p_\lambda \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^* f_i \right) p_\lambda \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^* x_i \right) \leq \\ &\leq C_\lambda p_\lambda \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^* x_i \right) \end{aligned}$$

устанавливаем непрерывность $\tilde{f}$. Пусть теперь $f \in (H_A)'$. Покажем, что $f = \tilde{f}$ для некоторого $\xi \in \mathcal{S}$. Так как алгебра A унитарна, элементы $e_i := (0, \dots, 1, \dots, 0, \dots)$ модуля H_A , где единица алгебры A стоит на i позиции, образуют базис. Это означает, что произвольный элемент $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in H_A$ есть предел последовательности $y_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть теперь $f_i = f(e_i)^*$. Покажем, что последовательность (f_i) однозначно определяет оператор f . Действительно, пусть найдется такой оператор $g \in (H_A)'$, что $f \neq g$, $f_i = g_i$. Тогда существует такой элемент $x = (x_i) \in H_A$, $\lambda_0 \in \Lambda$, что $p_{\lambda_0}(f(x) - g(x)) = r > 0$. Обозначим через x^N элемент $(x_1, x_2, \dots, x_N, 0, \dots)$, совпадающий с последовательностью (x_i) на первых N позициях и с нулевой последовательностью на остальных позициях. Ясно, что x^N сходится к x в топологии пространства H_A при $N \rightarrow \infty$. Это означает, что $p_\lambda(x - x^N) \rightarrow 0$ для любого $\lambda \in \Lambda$. В силу непрерывности операторов f и g , выводим, что $f(x^N)$ и $g(x^N)$ сходятся к $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Теперь можем написать

$$f(x^N) = \sum_{i=1}^n f_i^* x_i = \sum_{i=1}^n g_i^* x_i = g(x^N);$$

$$\begin{aligned} p_{\lambda_0}(f(x) - g(x)) &= p_{\lambda_0}(f(x) - g(x) - f(x^N) + g(x^N)) \leq \\ &\leq p_{\lambda_0}(f(x) - f(x^N)) + p_{\lambda_0}(g(x) - g(x^N)) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Получили противоречие. Кроме того мы установили, что $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^* x_i$. Осталось показать $p_\lambda(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^* f_i)$ сходится для любого $\lambda \in \Lambda$. Предположим противное. Это означает, что найдется индекс $\lambda_0 \in \Lambda$ такой, что последовательность $p_{\lambda_0}(\sum_{i=1}^k f_i^* f_i)$ неограниченна, когда $k \rightarrow \infty$. Рассмотрим тогда отображение $j := \pi_{\lambda_0} \circ f \circ \bar{\pi}_{\lambda_0}$. Оператор j является A -гомоморфизмом гильбертова модуля $(H_A)_{\lambda_0}$ в C^* -алгебру A_{λ_0} . Согласно [2, предложение 2.5.5]

ряд $p_{\lambda_0}(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^* f_i)$ сходится. Пришли к противоречию. Таким образом, для произвольного оператора $f \in (H_A)'$ справедливо равенство $f = \tilde{\xi}$, где $\xi = (f(e_1)^*, \dots, f(e_1)^*, \dots) \in \mathcal{S}$. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В частном случае, когда семейство полунорм $S(A)$ состоит из одного элемента, теорема 2.1 доказана в [2, предложение 2.5.5].

Литература

1. *Kaplansky I.* Modules over operator algebras // Amer. J. Math.—1953.—Vol. 75.—P. 839–858.
2. Мануйлов В. М., Троицкий Е. В. *C*-гильбертовы модули*.—М.: Факториал, 2001.
3. *Lance E. C.* Hilbert *C*-modules*. A Toolkit for Operator Algebraists.—Cambridge University Press, 1995.
4. *Apostol C.* *b*-algebras and their representations* // J. London Math. Soc.—1971.—Vol. 3.—P. 30–38.
5. *Inoue A.* Locally *C*-algebras* // Mem. Faculty. Sci. Kyushu. Univ. Ser.A.—1971.—Vol. 25.—P. 197–235.
6. *Phillips C.* Inverse limits of *C*-algebras* // J. Operator Theory.—(1988).—Vol. 19.—P. 159–195.
7. *Joita M.* Hilbert Modules over Locally *C*-algebras*.—University of Bucharest Press, 2006.
8. Мерфи Д. *C*-алгебры и теория операторов*.—М.: Факториал, 1997.
9. *Fragoulopoulou M.* Topological Algebras with Involution.—Elsevier, 2005.
10. *Mallios A.* Topological Algebras: Selected Topics.—North-Holland Publishing Company, 1986.

ПЛИЕВ МАРАТ АМУРХАНОВИЧ

Южный математический институт ВНИЦ РАН и РСО-А

РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: plimarat@yandex.ru

ЭЛЬСАЕВ ЯКУБ ВИТАЛЬЕВИЧ

Чеченский государственный университет

РОССИЯ, 364093, Грозный, ул. Шерипова, 32

E-mail: zelimus@mail.ru

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ СПИРАЛЕОБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ

С. Н. Сиукаев, Л. Г. Дзигоева

1. Введение

Голоморфную однолиственную в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функцию $f(x) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ называют λ -спиралеобразной, $-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}$, если

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\lambda} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0, \quad z \in E.$$

Класс всех λ -спиралеобразных функций обозначают через S_λ , $S_0 = S^*$ является классом звездообразных функций. Класс S_λ был введен Спачеком [1].

Спачек показал, что λ -спиралеобразные функции однолиственны в E . Такие функции имеют важные приложения в геометрической теории функций.

Через $S(\lambda, \alpha)$, $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \alpha < 1$, обозначим класс λ -спиралеобразных функций порядка α , которые удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\lambda} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \cos \lambda, \quad z \in E.$$

Понятие порядка для λ -спиралеобразных функций было введено Либерой [2].

Пусть $S(\lambda, A, B,)$ класс функций вида

$$f(x) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k,$$

голоморфных в круге E и удовлетворяющих условию

$$e^{i\lambda} \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1 + Aw(z)}{1 + Bw(z)} \cos \lambda + i \sin \lambda, \quad z \in E, \quad (1.1)$$

где A и B произвольные фиксированные числа: $-1 \leq A < B \leq 1$, $w(z)$ — функция, голоморфная в круге E с $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$, $z \in E$.

В этой работе будет дана формула представления для класса $S(\lambda, A, B)$ и оценки функционала $\frac{zf'(z)}{f(z)}$.

2. Формула представления

Теорема 2.1. Функция $f(x) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ принадлежит классу $S(\lambda, A, B)$ тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде

$$f(z) = z \exp \left\{ -e^{i\lambda} \cos \lambda (B - A) \int_0^{\pi} \frac{\Phi(t)}{1 + Bt\Phi(t)} dt \right\}, \quad (2.1)$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция, голоморфная в E с $|\Phi(z)| \leq 1$ для $z \in E$.

◁ Из (1.1) имеем

$$e^{i\lambda} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right\} = \cos \lambda \left\{ -\frac{(B - A)w(z)}{1 + Bw(z)} \right\}. \quad (2.2)$$

Из определения функции $w(z)$ следует, что $w(z) = z\Phi(z)$, где $\Phi(z)$ — функция, удовлетворяющая условиям теоремы. Из (2.2) следует

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z} = -(B - A)e^{i\lambda} \cos \lambda \frac{\Phi(z)}{1 + Bz\Phi(z)}. \quad (2.3)$$

Из (2.3) интегрированием по z от 0 до z получаем (2.1).

Для доказательства обратного утверждения заметим, что из (2.3) вытекает

$$e^{i\lambda} \frac{zf'(z)}{f(z)} - \cos \lambda - i \sin \lambda = -(B - A) \cos \lambda \frac{z\Phi(z)}{Bz\Phi(z)}. \quad (2.4)$$

Из (2.4) непосредственно вытекает (2.1). ▷

ЗАМЕЧАНИЕ. Давая параметрам A и B соответствующие значения, получим интегральные представления для подклассов класса $S(\lambda, A, B)$.

Например, если $A = 2\alpha - 1$, $B = 1$, то получим результат Сильвия [1].

Следствие 2.1. Функция $f(z)$ является λ -спиралеобразной порядка α тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде

$$f(z) = z \exp \left\{ -2(1 - \alpha)e^{-i\lambda} \cos \lambda \int_0^{\pi} \frac{\Phi(t)}{1 + Bt\Phi(t)} dt \right\}.$$

3. Значение функционала

Результаты этого пункта непосредственно вытекают из свойства подчинения для $\frac{zf'(z)}{f(z)}$, где $f \in S(\lambda, A, B)$. Из определения подчинения и равенства (2.3) следует, что

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \leqslant -(B - A) e^{i\lambda} \cos \lambda \frac{z}{1 + Bz}. \quad (3.1)$$

Из (3.1) получаем

Теорема 3.1. Если $f \in S(\lambda, A, B)$, то образ круга $|z| \leqslant r$ ($0 < r < 1$) при отображении функцией $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ содержится в круге с центром в точке a и радиусом d , где

$$a = \frac{1 - B(B - (B - A) \cos \lambda e^{i\lambda}) r^2}{1 - B^2 r^2}, \quad d = \frac{(B - A) \cos \lambda r}{1 - B^2 r^2}.$$

Оценки для a и d точные для функции

$$f(z) = z(1 - Bz), \quad \text{если } B \neq 0. \quad (3.2)$$

Из свойств дробно-линейного преобразования следует, что функция

$$g(z) = \frac{(B - A) e^{-i\lambda} \cos \lambda \cdot z}{1 + Bz} \quad (3.3)$$

отображает круг $|z| \leqslant r$ ($0 < r < 1$) на круг.

Обозначив $\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1$ через Φ , из (3.1) и (3.3) имеем

$$|\Phi|^2(1 - B^2 r^2) + 2 \operatorname{Re} \Phi (B - A) B \cos \lambda e^{-i\lambda} r^2 - (B - A)^2 \cos^2 \lambda r^2$$

или

$$\left| \Phi + \frac{B(B - A) \cos \lambda e^{-i\lambda} r^2}{1 - B^2 r^2} \right| \leqslant \frac{B(B - A) \cos \lambda r}{1 - B^2 r^2}. \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует справедливость теоремы 3.1. $\triangleright$

Давая параметрам A и B определенные значения, получим образы кругов $|z| \leq r$ при отображении функций $\frac{zf'(z)}{f(z)}$, когда f принадлежит различным подклассам λ -спиралеобразных функций. Так, например, при $A = -1$, $B = 1$ получаем результат Яблонского и Весе-ловского для класса λ -спиралеобразных функций. При $A = \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \alpha}{\beta}$ и $B = 1$ получаем результат Сильвия.

Теорема 3.2. Пусть $f \in S(\lambda, A, B)$. Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(B - A)r \cos \lambda e^{i\lambda}(1 - B \cos \lambda)r}{1 - B^2 r^2} &\leq \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} \leq \\ &\leq \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} \leq 1 + \frac{(B - A)r \cos \lambda(1 + Br \cos \lambda)}{1 - B^2 r^2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Справедливость теоремы следует непосредственно из теоремы 3.1. Приравнивая левую часть (3.5) к нулю, мы найдем радиус звездообразности классов $f \in S(\lambda, A, B)$.

Теорема 3.3. Пусть $f \in S(\lambda, A, B)$. Тогда $f(z)$ спиралеобразна в круге $|z| < r(\lambda, A, B)$, где $r(\lambda, A, B)$ — наименьший положительный корень уравнения

$$1 - (B - A)r \cos \lambda - (B - (B - A) \cos^2 \lambda)r^2 = 0.$$

Литература

1. Spacek L. Příspěvek k teorii funkcí prostých // Časopis Pěst. Mat. Fys.—1933.—Vol. 62, № 2.—Р. 12–19.
2. Libereš R. Univalent α -spiral functions // Canad. J. Math.—1967.—Vol. 19.—Р. 449–456.

СИУКАЕВ СЕРГЕЙ НИКОЛАЕВИЧ
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46

ДЗИГОЕВА ЛАРИСА ГАВРИЛОВНА
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: lara-dialog@mail.ru

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ

Б. Б. Тасоев

Пусть E — равномерно полная векторная решетка, $x_1, \dots, x_N \in E$. Отображение, сопоставляющее числовым функциям их «значения» на фиксированном наборе векторов и являющееся гомоморфизмом рассматриваемой категории, называем *функциональным исчислением*. В работе [1] было показано, что естественным образом определяется положительно однородная функция от элементов равномерно полной векторной решетки E , если эта функция определена на коническом множестве конечномерного пространства и непрерывна на некотором подконусе последнего. В данной работе показано, что для функций φ со значениями в произвольной f -подалгебре идеального центра конструктивным образом можно определить $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in E$. Гомоморфизм $\varphi \mapsto \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, называемый *обобщенным функциональным исчислением*, служит обобщением аналогичных результатов из [1–4]. Цель данной работы — построить функциональное исчисление в равномерно полных векторных решетках и f -алгебрах с единицей для непрерывных функций со значениями из идеального центра.

Обозначим через $\text{Hom}(L)$ и $\text{H}_m(L)$ множество всех $\mathbb{R}$ -значных решеточных гомоморфизмов и множество $\mathbb{R}$ -значных мультипликативных решеточных гомоморфизмов на L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть E — векторная решетка и Λ — f -алгебра. E называется *левым f -модулем над Λ* , если выполняются следующие условия:

(1) E является левым модулем над Λ относительно умножения $(\pi, x) \mapsto \pi \cdot x$ из $\Lambda \times E$ в E , т. е. $\pi \cdot (x+y) = \pi \cdot x + \pi \cdot y$, $(\pi + \rho) \cdot x = \pi \cdot x + \rho \cdot x$, $\pi \cdot (\rho \cdot x) = (\pi \rho) \cdot x$ и $\pi \cdot (\lambda x) = (\lambda \pi) \cdot x = \lambda(\pi \cdot x)$ для всех $\pi, \rho \in \Lambda$, $x, y \in E$ и $\lambda \in \mathbb{R}$;

(2) $\pi \cdot x \geq 0$ для всех $0 \leq \pi \in \Lambda$ и $0 \leq x \in E$;

(3) из того, что $x \perp y$ следует $\pi \cdot x \perp y$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x, y \in E$.

Правый f -модуль над Λ определяется аналогично. Всякую векторную подрешетку в E , являющуюся левым f -модулем над Λ , будем называть просто *f -модулем*.

Лемма 1. Пусть L — f -модуль. Для любого $\omega \in H(L)$ существует единственный $\tilde{\omega} \in H_m(\Lambda)$ такой, что $\|\tilde{\omega}\| = 1$, $\omega(\pi x) = \tilde{\omega}(\pi)\omega(x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. При этом $\widetilde{\lambda\omega} = \tilde{\omega}$ для всех $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ и $\omega \in H(L)$.

◁ Доказательство можно найти в [5]. ▷

Пусть $x_1, \dots, x_N \in E$ не равны нулю одновременно. Обозначим символом $\Lambda\langle x_1, \dots, x_N \rangle$ f -подмодуль в E , порожденный набором $\mathfrak{x} := (x_1, \dots, x_N)$. Положим по определению

$$\Lambda[\mathfrak{x}] := \{(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)) : 0 \neq \omega \in \text{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N \rangle)\}.$$

Множество $C \subset \mathbb{R}^N$ называется *коническим*, если $\lambda C \subset C$ для всех $\lambda \geq 0$. Функция $\varphi : C \rightarrow \Lambda$, заданная на коническом множестве C , называется *положительно однородной*, если $\varphi(\lambda t) = \lambda\varphi(t)$ для всех $\lambda \geq 0$ и $t \in C$.

Пусть коническое множество $C \subset \mathbb{R}^N$ содержит K . Символом $\mathcal{H}(C, K, \Lambda)$ будем обозначать векторную решетку, состоящую из всех положительно однородных функций $\varphi : C \rightarrow \Lambda$, непрерывных на K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть E — равномерно полная векторная решетка, $x_1, \dots, x_N, y \in E$, Λ — f -подалгебра в $\mathcal{Z}(E)$. Предположим, что K содержит $\Lambda[x_1, \dots, x_N]$ и $\varphi \in \mathcal{H}(C, K, \Lambda)$. Будем писать $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, если выполняется равенство $\omega(y) = \tilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in \text{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N, y \rangle)$.

Пусть I обозначает тождественный оператор на E . Определим функции $dt_i \in \mathcal{H}(K, \Lambda)$ ($1 \leq i \leq N$) по формуле $dt_i(t) = t_i I$, где $t \in K \subset \mathbb{R}^N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть E, F — векторные решетки, являющиеся f -модулями над f -алгеброй Λ . Будем говорить, что решеточный гомоморфизм $h : E \rightarrow F$ Λ -модульный, если выполняется равенство $h(\pi x) = \pi(hx)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in E$.

Теорема 1. Пусть E — равномерно полная векторная решетка, Λ — равномерно замкнутая f -подалгебра в $\mathcal{Z}(E)$, $x_1, \dots, x_N \in E$. Тогда существует единственный Λ -модульный решеточный гомоморфизм $\hat{\mathfrak{x}} : \varphi \mapsto \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ из $\mathcal{H}(K, \Lambda)$ в E такой, что $\hat{\mathfrak{x}}(dt_i) = x_i$ ($1 \leq i \leq N$). Более того, $\hat{\mathfrak{x}}(\mathcal{H}(K, \Lambda))$ совпадает с u -равномерным замыканием f -подмодуля в E , порожденным x_i ($1 \leq i \leq N$), т. е. $\hat{\mathfrak{x}}(\mathcal{H}(K, \Lambda)) = \overline{\Lambda\langle x_1, \dots, x_N \rangle}$, где замыкание берется равномерно в E относительно $u = |x_1| + \dots + |x_N|$.

◁ Доказательство можно найти в [5, теорема 3.1]. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ. Частными случаями сформулированной теоремы являются результаты [3, теорема 2.3] ($\Lambda = \mathbb{R}^N$) и [2, теорема 3.12] ($K = \mathbb{R}^N$, $\Lambda = \mathcal{Z}(E)$).

Ниже приведено конструкция обобщенного функционального исчисления в f -алгебрах.

Пусть E — равномерно полная алгебра с единицей e , $x_1, \dots, x_N \in E$ не равны нулю одновременно и $\mathfrak{x} := \{e, x_1, \dots, x_N\}$. Символом $\Lambda\langle\mathfrak{x}\rangle$ будем обозначать f -подалгебру в E , являющуюся f -модулем над Λ , порожденную множеством $\mathfrak{x}$, $\Lambda[\mathfrak{x}]_{\text{m}}$ будет означать замыкание множества $\{(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)) \in \mathbb{R}^N : 0 \neq \omega \in H_{\text{m}}(\Lambda\langle\mathfrak{x}\rangle)\}$. Предположим, что замкнутое множество $K \subset \mathbb{R}^N$ содержит $\Lambda[\mathfrak{x}]_{\text{m}}$. Введем функции $dt_1, \dots, dt_N, I$, действующие по закону $dt_i(t) = t_i I_E$, $I : t \mapsto I_E$, I_E — тождественный оператор на E , $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$. Обозначим f -алгебру непрерывных функций φ из K в Λ полиномиального роста через $\mathcal{B}(K, \Lambda)$, т. е. $\varphi \in \mathcal{B}(K, \Lambda)$ тогда и только тогда, когда существует показатель $n \in \mathbb{N}$ и число $M > 0$ такие, что $|\varphi| \leq M(I + dt_1 + \dots + dt_N)^n$. Заметим, что $\mathcal{B}(K, \Lambda)$ является f -модулем над Λ и f -алгеброй. Структура f -модуля определяется формулой $\pi f(t) := \pi \circ (f(t))$ для всех $t \in K$, $\pi \in \Lambda$ и $f \in \mathcal{B}(K, \Lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть E — равномерно полная f -алгебра с мультипликативной единицей e , $x_1, \dots, x_N, y \in E$, Λ — замкнутая по норме f -подалгебра в $\mathcal{Z}(E)$. Предположим, что $\Lambda[\mathfrak{x}]_{\text{m}} \subset K$ и $\varphi \in \mathcal{B}(K, \Lambda)$. Будем писать $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, если выполняется равенство $\omega(y) = \tilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in H_{\text{m}}(\Lambda\langle e, x_1, \dots, x_N, y \rangle)$.

Теорема 2. Пусть E — равномерно полная f -алгебра с мультипликативной единицей e , Λ — равномерно замкнутая f -подалгебра $\mathcal{Z}(E)$, $x_1, \dots, x_N \in E$ и $\mathfrak{x} := \{e, x_1, \dots, x_N\}$. Предположим, что замкнутое подмножество $K \subset \mathbb{R}^N$ содержит $\Lambda[\mathfrak{x}]_{\text{m}}$. Тогда отображение $h : \varphi \mapsto \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ единственный Λ -модульный гомоморфизм из $\mathcal{B}(K, \Lambda)$ в E такой, что $h(I) = e$ и $h(dt_i) = x_i$ ($1 \leq i \leq N$). Более того, $h(\mathcal{B}(K, \Lambda))$ совпадает с равномерным замыканием f -подмодуля в E , порожденным элементами $e, x_1, \dots, x_N$, т. е. $h(\mathcal{B}(K, \Lambda)) = \overline{\Lambda\langle e, x_1, \dots, x_N \rangle}$.

◁ Доказательство см. [6, теорема 3.1]. ▷

Литература

1. *Kusraev A. G.* Functional calculus and Minkowski duality on vector lattices // Vladikavkaz Math. J.—2009.—Vol. 11, № 2.—P. 31–42.
2. *Buskes G., de Pagter B., van Rooij A.* Functional calculus on Riesz spaces // Indag. Math. (N.S.).—1991.—Vol. 4, № 2.—P. 423–436.
3. *Haydon R., Levy M., Raynaud Y.* Randomly normed spaces.—Paris: Hermann, 1991.
4. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—243 p.
5. *Тасоев Б. Б.* Обобщенное функциональное исчисление в векторных решетках // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, № 3.—С. 77–88.
6. *Тасоев Б. Б.* Обобщенное функциональное исчисление в решеточно упорядоченных алгебрах // Сиб. мат. журн.—2014.—Т. 55, № 5.—С. 1184–1194.

ТАСОЕВ БАТРАДЗ БОТАЗОВИЧ

Южный математический институт ВНИЦ РАН и РСО-А
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова

РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Втатутина, 46

E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ВЫСОКОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТЕПЕНЬЮ ТОЧНОСТИ

Ш. С. Хубежты, А. О. Цуцаев

1. Введение

Сингулярные интегралы и соответствующие уравнения с ядром Коши находят все более широкое применение в различных областях математики, механики и физики. К этим уравнениям сводятся граничные задачи теории функций, к которым в свою очередь, приводятся многие важные задачи математической физики и механики, в частности, теории упругости и гидро-аэродинамики.

Сингулярное интегральное уравнение имеет вид [1]

$$a(t_0)\phi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt + \frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0, t)\varphi(t) dt = f(t_0), \quad (1)$$

где $t_0 \in L$ (L — гладкий контур, замкнутый или разомкнутый), $a(t_0)$, $b(t_0)$, $k(t_0, t)$, $f(t_0)$ — заданные функции класса Гельдера, $\varphi(t)$ — неизвестная функция.

Точное решение таких уравнений дается в очень редких случаях. Поэтому для приближенного решения актуальны вопросы аппроксимации сингулярных и регулярных интегралов, т. е. аппроксимация уравнения (1) и дальнейшего решения полученных систем линейных алгебраических уравнений [2].

Среди сингулярных интегралов

$$S(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt \quad (t_0 \in L) \quad (2)$$

особо выделяются интегралы на отрезках интегрирования. Они встречаются в задачах теории трещин, гидро-аэродинамики [3].

Не нарушая общности рассматриваются такие интегралы:

$$S(\varphi; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{\varphi(t)}{t - x} dt, \quad x \in (-1, 1), \quad (3)$$

где $p(t)$ — весовая функция Якоби, $p(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ ($\alpha, \beta > -1$), $\varphi(t) \in H_r(\alpha)$ ($r \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$).

Для интегралов (3) построены квадратурные формулы (см. [2]) интерполяционного типа, имеющие алгебраическую степень точности n , но если параметр сингулярности является корнем присоединенной функции Лежандра второго рода, то достигается наивысшая алгебраическая степень точности $2n$. В работе [5] построены квадратурные формулы при весовых функциях $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{T_n(x)U_n(x) - 1}{x - x_{k,n+1}} \varphi(x_{k,n+1}) - \\ &- \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{T_n(x)U_n(x)}{x - x_{kn}} \varphi(x_{kn}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $x_{k,n+1}$ — корень многочлена $T_{n+1}(x)$, x_{kn} — корень многочлена $T_n(x)$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, которые называются многочленами Чебышева I рода. Данная формула (4) имеет алгебраическую степень точности $2n$. Но здесь главное преимущество заключается в том, что если x корень многочлена $T_n(x)$ или $U_n(x)$ ($U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$), то из (4) получается формула наивысшей алгебраической степени точности (по существу, формула типа Гаусса).

Аналогично $T_n(x)U_n(x) - 1 = T_{n+1}(x)U_{n-1}(x)$, и отсюда следует, что если x корень многочлена $T_{n+1}(x)$ или корень многочлена $U_{n-1}(x)$, тогда также из (4) получается квадратурная формула типа Гаусса, т. е. наивысшей алгебраической степени точности.

Все это говорит о том, что формула (4) имеет более широкий спектр для достижения наивысшей точности с минимальным числом узлов.

В настоящей заметке предполагается построение аналогичных к (4) квадратурных формул в случае $p(t) = \sqrt{1-t^2}$, т. е. для интеграла

$$S(\varphi; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt. \quad (5)$$

2. Построение квадратурной формулы по узлам нулей полинома $U_n(t)U_{n+1}(t)$

С целью построения квадратурной формулы по узлам нулей полинома $U_n(t)U_{n+1}(t)$ обозначим через $\{x_{kn}\}_{k=1}^n$ и $\{x_{k,n+1}\}_{k=1}^{n+1}$ нули полиномов $U_n(t)$ и $U_{n+1}(t)$ соответственно. Известно, что $x_{kn} = \cos \frac{k\pi}{n+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), $x_{k,n+1} = \cos \frac{k\pi}{n+2}$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$). Тогда для интерполяционного многочлена $L_{2n}(\varphi; t)$ получим представление

$$\begin{aligned} L_{2n}(\varphi; t) = U_n(t)U_{n+1}(t) \left\{ -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+1}}{t - x_{kn}} \varphi(x_{kn}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+2}}{t - x_{k,n+1}} \varphi(x_{k,n+1}) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5) вместо $\varphi(t)$, получаем приближенную формулу

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = \\ & = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+1}}{t - x_{kn}} \varphi(x_{kn}) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{k,n+1})} dt + \\ & + \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+2}}{t - x_{k,n+1}} \varphi(x_{k,n+1}) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{k,n+1})} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Следовательно, построение указанной квадратурной формулы сводится к вычислению интегралов вида

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{kn})} dt, \\ & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{k,n+1})} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Представим эти интегралы в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{k,n+1})} dt = \frac{1}{x-x_k} \times \\ & \times \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x)} dt - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x_{k,n+1})} dt \right), \\ & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{k,n+1})} dt = \frac{1}{x-x_k} \times \\ & \times \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x)} dt - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x_{k,n+1})} dt \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что многочлены $T_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) ортогональны по весу $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, а многочлены $U_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ортогональны по весу $p(t) = \sqrt{1-t^2}$ и справедливы формулы обращения [4]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)}{(t-x)} dt = U_{n-1}(x),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{U_n(t)}{(t-x)} dt = -T_{n+1}(x),$$

то после некоторых выкладок получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{k,n+1})} dt = -U_n(x)T_{n+2}(x),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{k,n+1})} dt = -U_n(x)T_{n+2}(x) - 1.$$

Но $U_n(x)T_{n+2}(x) + 1 = U_{n+1}(x)T_{n+1}(x)$.

Поэтому итоговая квадратурная формулы будет следующая:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi(t)}{(t-x)} dt \approx & \frac{U_n(x)T_{n+2}(x)}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+1}}{x-x_{kn}} \varphi(x_{kn}) - \\ & - \frac{U_{n+1}(x)T_{n+1}(x)}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+2}}{x-x_{k,n+1}} \varphi(x_{k,n+1}). \end{aligned} \quad (9)$$

Квадратурная формула (9) имеет степень алгебраической точности $2n$. Но она характерна тем, что в процессе увеличения n при переходе данного $n = n_1$ к последующему $n = n_1 + 1$ требуется переычисление значений функции $\varphi(t)$ не во всех узлах квадратуры, а только в их части. Этого чаще всего применяется, когда значения подинтегральных выражений приходится определять с помощью эксперимента.

Кроме этого, если параметр сингулярности $x = x^*$ такой, что $T_{n+1}(x^*)U_{n-1}(x^*) = 0$, тогда $T_{n+2}(x^*)U_n(x^*) = -1$ и из (9) получаем квадратурную формулу Гаусса [2, 4, 6]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{t-x^*} dt \approx \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+1}}{x_{kn}-x^*} \varphi(x_{kn}),$$

имеющую наивысшую алгебраическую точность $2n$.

Аналогично если $x = x^*$ такой, что $T_{n+2}(x^*)U_n(x^*) = 0$, тогда $T_{n+1}(x^*)U_{n+1}(x^*) = 1$ и получается

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{t-x^*} dt \approx \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+2}}{x_{k,n+1}-x^*} \varphi(x_{k,n+1}),$$

что представляет известную в литературе квадратурную формулу Гаусса с числом узлов $n+1$.

Таким образом, анализируя построенные квадратурные формулы (9), приходим к следующему заключению, что обычные квадратурные формулы для сингулярных интегралов будут иметь наивысшую алгебраическую степень точности, только тогда когда параметр сингулярности является корнем присоединенной функции Лежандра второго рода. Для формул (9) вероятность построить квадратурные

формулы с наивысшей алгебраической степенью точности очень велика. В роли таких значений могут пригодиться все нули функции $U_{n+1}(x)$, $T_{n+1}(x)$, $T_{n+2}(x)$, $U_n(x)$, а это является преимуществом перед остальными квадратурными формулами.

Литература

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1966.—512 с.
2. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО Янус, 1995.—520 с.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. Г. Распределение напряжений около трещин в платинах и оболочках.—Киев: Науково думка, 1976.—443 с.
4. Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2011.—236 с.—(Итоги науки. Юг Росси. Мат. монография. Вып. 3).
5. Саникидзе Д. Г., Кулатадзе К. Р., Хубежты Ш. С. О квадратурных формулах для сингулярных интегралов с ядром Коши, имеющих близкую к гауссовской степени точности // Вістник Харківського національного університету.—2013.—№ 1063.—С. 50–58.
6. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов.—М.: Наука, 1967.—500 с.

ХУБЕЖТЫ ШАЛВА СОЛОМОНОВИЧ

Южный математический институт ВНИЦ РАН и РСО-А

РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Северо-Осетинский государственный университет

им. К. Л. Хетагурова

РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46

ЦУЦАЕВ АРСЕН ОЛЕГОВИЧ

Южный математический институт ВНИЦ РАН и РСО-А

РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: arsenstudio@mail.ru

Секция II

**Математическое
моделирование**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Е. К. Басаева, Е. С. Каменецкий, З. Х. Хосаева

Математические модели социальных процессов могут быть динамическими, имитационными (агентно-ориентированными), теоретико-игровыми и статистическими. Последние получаются с использованием регрессионного анализа статистических данных. Найденные при этом коэффициенты в априорно заданных зависимостях несут определенную информацию о состоянии социальной системы. Эту информацию, как правило, трудно интерпретировать, так как коэффициенты могут зависеть от многих взаимодействующих факторов и выявить такую зависимость достаточно сложно.

Теоретико-игровые модели предполагают «рациональное» поведение рассматриваемых социальных групп. В действительности, поведение определяется не только рациональным выбором наилучшей стратегии, которая зависит, помимо внутренних свойств группы, от объема и степени достоверности имеющейся у группы информации об окружающем мире. Также на поведение группы влияют имеющиеся у ее членов стереотипы поведения, которые делают рациональный выбор субъективным, могут породить противоречия между нормами поведения и выгодой и, особенно в ситуациях, требующих быстрого принятия решений, приводят к сильной зависимости выбора от эмоций. Учесть все эти факторы при построении целевых функций достаточно сложно, а включение в них случайных составляющих требует оценки распределения плотности вероятности возможных значений этих составляющих, что можно обоснованно осуществить только в редких случаях.

Чаще всего при моделировании социальных процессов используют динамические или имитационные модели. В некоторых случаях не пытаются рассмотреть динамику социальной системы, а оценивают только ее состояние при заданных условиях. По сути дела, при этом определяется стационарная точка динамической системы. Вопрос о времени достижения стационарного (или квазистационарного) состояния при этом не рассматривается.

Динамические модели, использующие дифференциальные уравнения, обычно применяются при исследовании сравнительно небольшого числа взаимодействующих объектов. При этом чаще удается

верифицировать не только качественные, но и количественные результаты. При использовании динамических моделей значительно легче анализировать возможное поведение социальной системы при различных начальных условиях и значениях коэффициентов, которые характеризуют степень влияния различных факторов на рассматриваемую характеристику системы.

Имитационные модели, в которых задаются правила поведения объектов в различных ситуациях, обладают очень большими возможностями, но, при увеличении числа объектов и усложнении правил их поведения, верификация моделей и анализ получаемых результатов становятся крайне затруднительными и модель превращается в игру иллюстрирующую ситуации, которые могут возникать в реальности. Последнее получается практически всегда при включении в модель случайных параметров. Отметим, что имитационные модели чаще применяются как агентноориентированные, а в динамических — в качестве объектов исследования выступают достаточно крупные социальные группы, хотя использование социальных групп в качестве агентов вполне допустимо.

В целом, учитывая сложность и многогранность социальных процессов, каждый из указанных подходов не является исчерпывающим. Дополняя друг друга, они позволяют несколько лучше понять, что и почему происходит в обществе.

Верификация математических моделей социальных систем предполагает сопоставление получаемых при моделировании результатов с измеряемыми величинами, которые характеризуют исследуемую характеристику состояния общества. Чаще всего при моделировании социальных систем предметом исследования являются характеристики непосредственно не измеряемые: социальная напряженность, социальный капитал, человеческий капитал, сила государства и тому подобные. Поэтому необходимо найти индикаторы, отражающие состояние изучаемой характеристики. Для получения более достоверных результатов таких индикаторов должно быть несколько. Также необходимо учитывать возможную связь между индикаторами, которая может быть очень тесной и не позволяющей использовать такие индикаторы в качестве независимых. Примером является связь между потреблением алкоголя и числом самоубийств [1]. Весьма вероятно, что одни и те же измеряемые величины в одних случаях могут быть индикаторами, а в других ими не являются. Например, разность браков и разводов в обществах с высоким уровнем религи-

озности не может служить индикатором социальной напряженности.

Статистические данные, используемые для верификации моделей, представляют собой либо число определенных событий, либо их суммарную интенсивность, являющуюся количественной характеристикой отдельного события за некоторый промежуток времени, чаще всего за год. Уменьшение этого промежутка с одной стороны увеличивает объем данных, которые можно использовать для уточнения модели, а с другой стороны приводит к большему влиянию случайных составляющих. При очень маленьких промежутках времени, за которые рассматриваются статистические данные, выделить их закономерное изменение становится трудно.

Опросы, даже регулярные, целью которых является мониторинг состояния общества, также проводятся через некоторые промежутки времени. Обычно эти промежутки не меньше месяца, а чаще всего существенно больше. Изменение состояния общества происходит непрерывно, но быстрые процессы с характерным временем порядка нескольких дней, как правило, не представляют интереса и могут рассматриваться как случайные флуктуации. Исключением являются достаточно резонансные, кратковременные события: крупные террористические акты, массовые выступления, крупные природные и техногенные катастрофы, но их описание требует создания отдельных моделей.

В качестве индикаторов можно использовать не только обычные статистические данные, но и контент-анализ текстов, в том числе и художественных. Отметим, что индикаторы могут стать влияющими на социальный процесс факторами. Так можно рассматривать динамику общего количества преступлений, когда их не слишком много, как индикатор изменения состояния общества, а при высоком уровне преступности она становится фактором, влияющим на многие социальные процессы.

Сложность верификации математических моделей социальных систем связана и с недостаточностью имеющейся информации, и с тем, что коэффициенты модели меняются при анализе поведения различных социальных групп в одной и той же стране и, тем более, процессов в странах с разной культурой. Даже для одной и той же социальной группы коэффициенты могут заметно меняться при смене поколений, т. е. за время порядка 20 лет, а во время социальных потрясений и быстрее. Поэтому наиболее разумно предполагать, что во всех случаях сохраняется структура модели, т. е. вид уравне-

ний. Коэффициенты же модели подбираются для каждой конкретной ситуации. При этом некоторые из них могут обращаться в нуль, что означает отсутствие влияния соответствующего фактора на исследуемый процесс. Анализ изменения коэффициентов и объяснение причин этого изменения позволит лучше понять особенности различных социальных систем, а изменение коэффициентов со временем — динамику их развития.

При использовании динамических моделей можно заменять дифференциальные уравнения разностными, определяя изменение интересующей величины как дискретный ряд ее значений с заданным шагом по времени. Отметим, что при этом, даже если исходные дифференциальные уравнения дают монотонно изменяющееся решение, при использовании соответствующих разностных уравнений могут возникать различные режимы: монотонное и колебательное приближение к равновесию, колебательные изменения — циклы разной длины и квазистохастическое поведение — хаос [2]. Это связано с соотношением между шагом по времени в дискретных уравнениях и характерным временем изменения состояния системы, описываемой дифференциальными уравнениями. При этом решения разностных уравнений могут оказаться более похожими на реальность, но шаг по времени по сути дела является дополнительным параметром, влияющим на решение.

Весьма важным вопросом при создании моделей является выбор числа уравнений, т. е. числа социальных групп или параметров, изменение которых анализируется. Упростить задачу можно априорно задав изменение части параметров или состояния некоторых социальных групп. Практически всегда приходится априорно задавать воздействие факторов, которые являются внешними по отношению к рассматриваемой социальной системе. В работах [3, 4] при анализе причин революционных потрясений в обществе рассматривается взаимодействие государства, элиты и народа. По-видимому, точнее будет вместо государства рассматривать бюрократию (бюрократическую элиту), а вместо народа — трудящихся. Отметим, что небюрократическая элита может формироваться в периоды экономического роста за счет добившихся определенного улучшения своего материального положения и/или получивших образование трудящихся. Кроме того, увеличение численности бюрократической элиты приводит к тому, что часть ее фактически не обладает властными полномочиями и, по сути дела, превращается в небюрократическую

элиту, хотя и тесно связанную с бюрократической. По крайней мере, до тех пор, пока она пользуется благами, связанными с ее формальной принадлежностью к бюрократии. Таким образом, в однородном обществе целесообразно рассматривать три социальные группы: бюрократию, небюрократическую элиту и трудящихся. В случае если общество полиэтнично, число уравнений увеличивается. Каждая этническая группа может иметь своих представителей в бюрократической элите, иметь свою собственную небюрократическую элиту и своих трудящихся. При этом неясно, будут ли представители различных этносов, попав в бюрократическую элиту, отождествлять себя со своим этносом или с государством. Если этнического разделения в бюрократической элите нет, то ее поведение можно описывать одним уравнением, но во время кризисов велика вероятность ее раскола по этническому признаку.

В частности, в Северо-Кавказском федеральном округе бюрократическая элита, как правило, разделяется по этническому признаку, поскольку именно поддержка своей этнической группы обеспечивает ее представителям возможность вхождения во властные структуры. Исключением являются представители русского населения в бюрократической элите национальных республик, которые, как правило, слабо выражают интересы своей этнической группы. Это связано как с относительно небольшим их количеством в бюрократической элите так и со слабой политизацией русских трудящихся. В то же время, сложившийся в национальных республиках СКФО «тип власти можно было бы назвать дотационным авторитаризмом. Его основные, важнейшие характеристики вполне заключаются в определенном способе обретения финансовой и политической власти. Эту связку можно пунктирно обозначить следующими штрихами:

- 1) способ дохода — трансферты и дотации из федерального центра;
- 2) основание власти — распределение этих средств;
- 3) пределы власти — способность к тиражированию лояльности в обмен на протекцию» [5].

Поэтому бюрократические элиты этих республик вынуждены учитывать интересы государства и, в той или иной мере, интересы всех этнических групп в республиках.

Небюрократическая элита, как правило, теснее связана со своей этнической группой, но и для нее не всегда этническая идентичность является доминирующей. Во многих случаях небюрократиче-

ская элита небольших по численности этнических групп предпочитает отстаиванию интересов своего этноса поддержку бюрократической элиты (государства). Кроме того, возможно объединение небюрократических элит разных этносов на религиозной основе. Трудящиеся малочисленных этнических групп обычно стремятся скорее адаптироваться к жизни окружающих людей, чем демонстративно представлять свой этнос. Поэтому выделять в модели мелкие этнические группы нецелесообразно. Религиозная принадлежность также может разделять людей на группы. При этом мировые религии не моноэтничны и возможно объединение трудящихся не по этническому, а по религиозному признаку. Отметим, что такие объединения часто оказываются менее прочными и в период кризисов происходит раскол единых религиозных групп по этническому признаку. Иногда это может выглядеть как религиозный раскол.

Отметим, что конфликты внутри этнических элит способствуют появлению или усилению межэтнических религиозных групп.

Отметим, что в полиэтнических и поликонфессиональных республиках учет всех этнических и конфессиональных групп чересчур усложняет модель и, в зависимости от конкретной задачи нужно либо объединять группы, либо пренебрегать воздействием некоторых групп на изучаемый процесс. Можно также априорно задавать характер воздействия некоторых групп на остальные.

Возможно разделение социальных групп по возрастному признаку, т. е. прежде всего выделение молодежи, которая наиболее возбудима и активна. Это тоже приведет к усложнению модели и в большинстве случаев нецелесообразно. Увеличение доли молодежи в какой либо социальной группе лучше учитывать путем некоторого изменения коэффициентов. Также как правило, нецелесообразно выделять городское и сельское население. При этом надо иметь в виду, что социальные процессы в городах, а особенно в мегаполисах протекают иначе. В Москве 64% населения часто испытывают негативные чувства (в среднем по России 34%). Учитывая, что именно в Москве как нигде глубоко социальное неравенство, которое всегда, в случае его избыточности, генерирует рост агрессии среди населения, это не удивительно [6]. В республиках Северного Кавказа связь между представителями одного этноса, проживающими в селе и в городе достаточно тесная, что подтверждается тем, что этнополитические конфликты в сельских районах часто приводят к конфликтам в городах с задержкой порядка 30 дней [7].

Аргументами в уравнениях модели, описывающей социальные процессы должны быть факторы, влияющие на них. Это, прежде всего, экономическое положение, затем деятельность систем жизнеобеспечения: правоохранительных органов, здравоохранения, образования. Для этнических групп важное значение имеет сохранение своей идентичности. Политические факторы влияют скорее как возможная угроза ухудшения положения соответствующей социальной группы. В национальных республиках могут сужаться возможности нетитульного населения, если на государственной службе предпочтение получают представители титульных наций и это естественным образом приводит к тому, что аффилированные с ними сферы и объекты бизнеса процветают, в то время как для остальных создаются препоны, позволяющие извлекать административную ренту [8.] Аналогичная ситуация отмечается в работе [9], где указывается, что «в большинстве случаев за национальным вопросом стоит вопрос имущественный, так как в чиновничьем государстве именно обеспечение доминирования титульной нации в административном аппарате позволяет ее элите приватизировать доступ к региональным активам». Отметим, что важнее учитывать не текущее значение фактора, а его изменение. Как отметил Дж. Дэвис, [кризисам] всегда предшествует рост качества жизни и опережающий рост ожиданий [10]. Более образно аналогичную мысль выразил Солженицын: «Революции совершают не голодные, а сытые, которых один раз не накормили» [10]. Отметим, что во многих случаях искомые функции оказывают влияние на величину факторов, то есть имеет место положительная или отрицательная обратная связь. Так социальная напряженность общества зависит от изменения его экономического состояния, на которое, в свою очередь, может влиять напряженность.

Сложным для учета в моделях является вопрос исторической памяти, который активно используется элитами в борьбе за власть. В то же время именно этот фактор был значим на Кавказе в конце XX века [11]. Его надо учитывать в контексте информационного воздействия на общество. СМИ как социально-политический и этнокультурный институт обладают огромным мобилизационным потенциалом, который может носить как толерантный, конструктивный характер, стимулируя гармонизацию межнациональных отношений, так и деструктивный характер, усиливая риск этнополитической нестабильности [12]. Учитывать воздействие СМИ можно как по частоте

и характеру упоминания соответствующего события, так и с помощью контент-анализа. В связи с глобализацией процессов в современном мире необходимо учитывать прямое влияние иностранных государств на социальные процессы. Это влияние осуществляется, прежде всего, через Интернет и спутниковое телевидение. Известна роль, которую сыграли телевизионные каналы Аль-Джазира и Аль-Арабия в событиях арабской весны [13].

Литература

1. Немцов А. Самоубийства и потребление алкоголя // Демоскоп weekly.— 2002.—№ 73–74 (29 июля — 11 августа 2002).—Электр. версия бюллетеня «Население и общество». URL: demoscope.ru/weekly/2002/073/tema01.php (дата обращения 5.12.2013).
2. Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Ч. 1.—Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2002.—232 с.
3. Голдстоун Д. К теории революции четвертого поколения // Логос.—2006.—№ 5.—С. 58–103.
4. Нефедов С. А. Демографически структурный анализ социально-экономической истории России. Конец XV — начало XX века.—Екатеринбург: УГГУ, 2005.—543 с.
5. Дзуцев Х. В. Пути преодоления этносоциальных конфликтов в Северо-Кавказском федеральном округе Российской Федерации.—М.: ИСПИ РАН, 2010.—148 с.
6. Горшков М. К., Тихонова Н. Е. Социокультурные факторы консолидации российского общества.—М.: Институт социологии РАН, 2013.—54 с.—URL: http://www.isras.ru/inab_2013_01.html (дата обращения 13.8.2013).
7. Petrova M. A. Econometric analysis of ethnopoltical conflict.—URL: www.mmsed.narod.ru/articles/artPetrovaM.ps (дата обращения 7.12.2013).
8. Савин И., Дулаев И. Северная Осетия на перепутье: ситуация сложная или ситуация стабильная?—URL: www.central-eurasia.com/north-ossetia/ (дата обращения 5.12.2013).
9. Ремизов М. Неединая Россия: картография этнорелигиозных угроз // Независимая газета.—14.06.2013.
10. Назаретян А. П. Цивилизационные кризисы в контексте универсальной истории (синергетика — психология — прогнозирование).—М.: Мир, 2004.—368 с.
11. Авксентьев В. А., Гриценко Г. Д., Дмитриев А. В. Динамика регионального конфликтного процесса на Юге России (экспертная оценка) // Социологические исследования.—2007.—№ 9.—С. 70–77.
12. Бирагова Б. М. Современные СМИ как актор этнокультурного взаимодействия: автореф. дис. ... к. полит. н.—Санкт-Петербург, 2011.—23 с.
13. Коротаев А. В., Малков С. Ю., Бурова А. Н., Зинькина Ю. В., Ходунов А. С. Ловушка на выходе из ловушки. Математическое моделирование социально-политической дестабилизации в странах мир-системной периферии и события арабской весны 2011 г. // Моделирование и прогнозирование глобального, регионального и национального развития.—2011.—С. 210–276.—URL: socmodel.com/stat'i/20113A (дата обращения 5.10.2013).

БАСАЕВА ЕЛЕНА КАЗБЕКОВНА
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Втатутина, 46;
Южный математический институт ВНЦ РАН и PCO-A
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: helen@smath.ru

КАМЕНЕЦКИЙ ЕВГЕНИЙ САМОЙЛОВИЧ
Владикавказский научный центр РАН и PCO-A
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: esk@smath.ru

ХОСАЕВА ЗАРИНА ХЕТАГОВНА
Владикавказский научный центр РАН и PCO-A
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: hzaia@smath.ru

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ОДНОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

В. И. Кесаев

Введение

Одномерные задачи квантовой механики являются неотъемлемой частью современной математической физики. Прежде всего потому, что большинство из них можно решить аналитически, и поэтому они служат незаменимым полигоном для построения математического аппарата квантовой теории.

Общепринятая процедура построения квантовой теории основана на замене выражений классической физики операторными в духе функционального анализа (так называемое каноническое квантование). В пределе $\hbar \rightarrow 0$ ($\hbar$ — постоянная Планка) квантовые формулы должны переходить в классические. Более того, возможно построение квантовой теории без операторных выражений (картина Фейнмана).

В основе этого подхода, который называется методом функционального интегрирования, лежит знание периодических орбит соответствующей классической задачи [1]. Современное состояние квантовой теории поля, астрофизики и космологии трудно представить без существенной опоры на метод функционального интегрирования.

Другим аспектом, связанным с построением квантовой теории является правильный учет вкладов областей фазового пространства, ответственных за регулярную и хаотическую динамику классического аналога.

Исходя из сказанного, представляется актуальным применение некоторых малоизвестных, на наш взгляд, математикам методов исследования одномерных задач квантовой физики. В качестве объектов исследования рассмотрим частицу(ы) в потенциалах Морса $V_1(x) = A(e^{-x/a} - 1)^2$ и двойной симметричной яме $V_2(x) = Aa^4[(x/a)^2 - 1]^2$, где $x \in \mathbb{R}$.

Оригинальным результатом работы будет получение спектра частиц в поле $V_1(x)$ методом факторизации, получение спектра частицы квазиклассическим квантованием и вычисление критерия Мельникова для случая $V_2(x)$.

§ 1. Спектр радиальных колебаний двухатомной молекулы Морса

Потенциал Морса (см. рис. 1) широко используется как модель взаимодействия двух нейтральных атомов [2]. Например, радиальные колебания ядер в двухатомной молекуле в системе центра масс должны в рамках механики Ньютона описываться функцией Гамильтона вида

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2\mu} + A(e^{-2x/a} - 2e^{-x/a}). \quad (1)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}$ — отклонение от равновесного расстояния между атомами (координата), p — импульс, μ — приведенная масса, a — некая характерная длина.

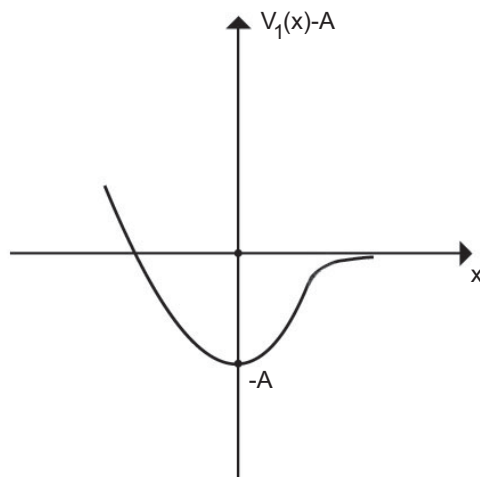


Рис. 1

Однако, как хорошо известно, для правильного описания необходимо рассмотреть квантовый аналог (1), т. е. оператор Гамильтона

$$\hat{H}_1(\hat{p}, \hat{x}) = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + A(e^{-2\hat{x}/a} - 2e^{-\hat{x}/a}), \quad (2)$$

где $\hat{p}$, $\hat{x}$ — операторы импульса и координаты соответственно (см. ниже), и решить уравнение Шредингера

$$\hat{H}_1 \psi_n = \epsilon_n \psi_n. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) должно принадлежать Гильбертову пространству, т. е. во всяком случае $\psi_n(\infty) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ так, что $(\psi_n, \psi_n) < +\infty$. Обычно при решении (3) после выяснения асимптотического поведения волновой функции в нуле и на бесконечности неизвестный множитель в волновой функции ищут в виде степенного ряда по x , который должен «оборваться» на некотором шаге, т. е. быть полиномом. Этот факт, если он наблюдается, и позволяет выразить энергию частицы как функцию натурального числа n (т. е. таким образом находят дискретный спектр).

Подобным образом задача (2)–(3) решена в пользующемся мировой славой трактате [3].

Мы найдем здесь спектр ϵ_n другим способом — так называемым *методом факторизации*. Детали этого метода ясно изложены в [4]. Следуя [4], введем операторы «рождения» и «уничтожения» $\hat{a}_1$ по правилу

$$\hat{H}_1 = \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \lambda_1, \quad (4)$$

причем значение λ_1 должно быть максимальным из всех возможных (тогда решение будет нормированным). Выберем

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2\mu}} - i(\beta_1 - \sqrt{A}e^{-\hat{x}/a}),$$

тогда

$$\hat{a}_1^+ = \frac{\hat{p}^+}{\sqrt{2\mu}} + i(\beta_1 - \sqrt{A}e^{-\hat{x}/a}),$$

здесь $\hat{p} = -i\hbar d/dx$ — оператор импульса, $\hat{x} = x$ — оператор координаты, i — мнимая единица.

Так как оператор $\hat{p} = \hat{p}^+$ (эрмитово сопряжен) на собственных функциях дискретного спектра, легко получить

$$\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} - \sqrt{A} \left(2\beta_1 + \frac{\hbar}{a\sqrt{2\mu}} \right) e^{-x/a} + A e^{-2x/a} + \beta_1^2. \quad (5)$$

Сравнивая (5) с (3) и (4), находим

$$\begin{cases} 2\beta_1 + \frac{\hbar}{a\sqrt{2\mu}} = 2\sqrt{A}, \\ \lambda_1 = -\beta_1^2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\lambda_1 = -\left(\sqrt{A} - \frac{\hbar}{2a\sqrt{2\mu}}\right)^2$$

— наименьшая энергия частицы (колебаний) в потенциале $V_1(x)$.

Продолжая эту процедуру, а именно, вводя новые операторы $\hat{a}_k$ по правилу

$$\hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \lambda_k = \hat{a}_{k-1}^+ \hat{a}_{k-1} + \lambda_{k-1}, \quad k \geq 2, \quad (6)$$

причем

$$\begin{aligned} \hat{a}_k &= \frac{\hat{p}}{\sqrt{2\mu}} - i(\beta_k - \sqrt{A}e^{-x/a}), \\ \hat{a}_k^+ &= \frac{\hat{p}^+}{\sqrt{2\mu}} + i(\beta_k - \sqrt{A}e^{-x/a}), \end{aligned}$$

находим, используя (6), набор собственных значений λ_k как решение системы

$$\begin{cases} \beta_k^2 - \beta_{k+1}^2 = \lambda_{k+1} - \lambda_k, \\ 2\beta_k - \frac{\hbar}{a\sqrt{2\mu}} = 2\beta_{k+1} + \frac{\hbar}{a\sqrt{2\mu}}. \end{cases} \quad (7)$$

Решением (7) является

$$\begin{cases} \beta_{k+1} = \beta_k - \frac{\hbar}{a\sqrt{2\mu}}, \\ \beta_k^2 = -\lambda_k. \end{cases}$$

Отсюда окончательно находим спектр

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -\beta_n^2 = -\left(\sqrt{A} - \frac{\hbar}{2a\sqrt{2\mu}} - \frac{n\hbar}{a\sqrt{2\mu}}\right)^2 = \\ &= -A \left(1 - \frac{\hbar}{a\sqrt{2\mu A}} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение (8), полученное нами методом факторизации, совпадает со спектром, полученным в [3].

Попытка аналогичным образом найти спектр частицы в потенциале $V_2(x)$ (см. рис. 2), к сожалению, не увенчалась успехом. Нам не удалось построить $\hat{a}_1$ для оператора Гамильтона

$$\hat{H}_2(\hat{p}, \hat{x}) = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + Aa^4[(x/a)^2 - 1]^2. \quad (9)$$

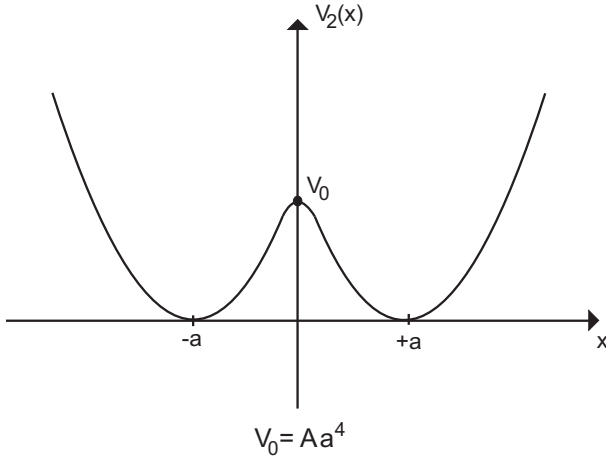


Рис. 2

В научной и учебной литературе, в «интернете», в устном общении с коллегами мы также не обнаружили решения уравнения Шредингера для потенциала V_2 , и, следовательно, нахождение спектра частицы.

Наша собственная попытка решить это уравнение также потерпела фиаско.

Видимо, возможность туннелирования частицы из левой ямы в правую и наоборот при $\epsilon_n < V_0$ (см. рис. 2) при конечной ширине барьера порождает значительные математические трудности в решении соответствующего дифференциального уравнения

$$\psi_n'' + \frac{2\mu}{\hbar^2}(\epsilon_n - Aa^4[(x/a)^2 - 1]^2)\psi_n = 0, \quad (9^*)$$

поскольку ψ_n должна принадлежать Гильбертову пространству.

В таком случае есть очевидный выход — квазиклассическое квантование.

§ 2. Спектр в потенциале V_2 (квазиклассика)

В так называемой старой квантовой теории (постулаты Бора — Зоммерфельда) уровни энергии в одномерном потенциале определяются следующим правилом [3]:

$$S/h = \frac{1}{2\pi} \oint p dx = n + \frac{1}{2}.$$

Здесь S — переменная «действие», $p = p(t, E)$, $x = x(t, E)$ — решение классической задачи, отвечающее замкнутой (т. е. периодической) орбите, E — энергия, n — натуральное число. Число $1/2$ возникает от наличия точек поворота (индекс Маслова).

Используем это правило (которое является строгим в рамках квазиклассического приближения) для нахождения спектра оператора (9). Прежде всего, запишем классический аналог (9) в безразмерном виде

$$\dot{\xi}^2 = 1 - \epsilon[\xi^2 - 1]^2, \quad (10)$$

где $\xi \equiv x/a$, $\epsilon \equiv Aa^4/E$, $1 < \epsilon < \infty$, $\dot{\xi} = d\xi/d\tau$, $\tau = \omega^* t$, $\omega^* \equiv \sqrt{2E/\mu a^2}$.

В новых переменных левая яма определяется неравенствами $-\sqrt{1+\lambda} \leq \xi_{\text{л}} \leq -\sqrt{1-\lambda}$, правая яма — неравенствами $-\sqrt{1-\lambda} \leq \xi_{\text{п}} \leq -\sqrt{1+\lambda}$, где $\lambda \equiv 1/\sqrt{\epsilon}$, $0 < \lambda < 1$.

$\xi(\tau)$ для обеих ям можно получить, решая уравнение (10),

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \epsilon[\xi^2 - 1]^2}} = \pm(\tau - \tau_0).$$

Здесь τ_0 — начальный момент времени. Используя замену $\xi^2 = 1 + \lambda \sin \theta$, можно найти указанную выше квадратуру в терминах эллиптических функций Якоби, а именно,

$$\xi(\tau) = \pm \sqrt{1+\lambda} \operatorname{dn} \left[\pm 4\sqrt{1+\lambda}(\tau - \tau_0) \right], \quad (11)$$

где $\operatorname{dn} z$ — дельта-функция Якоби, т. е. $\operatorname{dn} z = \sqrt{1 - \kappa^2 \operatorname{sn}^2 z}$, $\operatorname{sn} z$ — синус Якоби, $\kappa^2 = 2\lambda/(1+\lambda)$ [5].

Однако для получения спектра на основе указанного выше пра-

вила явный вид траектории не понадобится. Действительно,

$$\begin{aligned} 2\pi S/h &= \oint \dot{\xi} d\xi = 2 \int_{-\sqrt{1+\lambda}}^{-\sqrt{1-\lambda}} \sqrt{1 - \epsilon(\xi^2 - 1)^2} d\xi = \\ &= \lambda \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \cos^2 \theta / \sqrt{1 + \lambda \sin \theta} = \frac{8\lambda}{\sqrt{1+\lambda}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Используя для нахождения последнего интеграла формулу 3.67(2) из [6], находим

$$2\pi S/h = \frac{\pi\lambda}{2\sqrt{1+\lambda}} F(3/2; 1/2; 3; \lambda^2) = n + 1/2. \quad (12)$$

Здесь $F(\alpha; \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрическая функция [6]:

$$F(\alpha; \beta; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 1} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1) \cdot 1 \cdot 2} \cdot z^2 + \dots \quad (12^*)$$

Если α (или β) не равны целому отрицательному числу, то ряд (12*) бесконечен, сумма его неизвестна.

Поскольку λ есть функция от энергии частицы, мы получим весьма сложную неявную зависимость энергии от индекса n (квантового числа n).

Рассмотрим для простоты предел $\lambda \rightarrow 0$ («низко» лежащие уровни энергии). В этом случае было бы

$$2\pi S/h = \frac{\pi\lambda}{2} \left(1 + \frac{3}{32} \lambda^2 \right) = n + \frac{1}{2}.$$

Поэтому тогда

$$\epsilon(\lambda \rightarrow 0) \sim \frac{1}{n + 1/2}.$$

Заметим, однако, что $\lambda \rightarrow 0$ выходит за рамки квазиклассического приближения.

Поскольку квазиклассическое квантование оправдано для высоколежащих уровней, вблизи сепаратрисы могут возникнуть существенные вычислительные трудности, связанные с наличием седловых точек, и, следовательно, и с гомоклинической структурой.

Рассмотрим несколько подробнее этот вопрос для частицы в потенциале $V_2(x)$.

§ 3. Вычисление критерия Мельникова

В пионерской работе Мельникова [7] было доказано, что при наличии седловых точек на сепаратрисе в их окрестностях образуется гомоклиническая структура и даже малое внешнее периодическое воздействие будет приводить к динамическому хаосу.

В этом разделе мы найдем вид сепаратрисы для (10), а затем с помощью критерия Мельникова установим возможность перехода к хаотической динамике для возмущенной системы, т. е. задачи, описываемой Гамильтонианом:

$$H_3(p, x) = \frac{p^2}{2\mu} + Aa^4 [(x/a)^2 - 1]^2 + f(x, t), \quad (13)$$

где $f(x, t)$ описывает энергию взаимодействия частицы со слабым внешним электрическим или магнитным полем в дипольном приближении, например, $f(x, t) = -\delta \cdot x \cdot \sin \lambda t$, где δ мало в некотором смысле (см. ниже), λ — частота внешнего поля.

Сепаратрисе для (10) отвечает энергия $E = Aa^4 \equiv V_0$. Переходя к безразмерным величинам, находим

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{2\xi^2 - \xi^4}} = \pm(\tau - \tau_0),$$

где $\tau = \omega t$, $\omega = \sqrt{2A/\mu a}$. Этот интеграл нужно вычислить при условии $\xi \in [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$, при этом скорость частицы $\dot{\xi}$ обращается в нуль в трех точках $\xi_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $\xi_3 = 0$. Последняя точка является седловой (это, например, проявляется в том, что за конечное время приблизится к этой точке, находясь на сепаратрисе, невозможно).

Вычисление интеграла сложностей не вызывает:

$$\xi_s(\tau - \tau_0) = \pm \frac{\sqrt{2}}{\text{ch}(\tau - \tau_0)}. \quad (14)$$

Здесь приведены обе ветви сепаратрисы. Например, если в точке τ_0 частица находилась в точках ξ_1 или ξ_2 , то затем она в процессе эволюции будет неограниченно долго приближаться к седловой точке.

Теперь мы можем приступить к вычислению «щели» между ветвями сепаратрисы невозмущенной задачи, появляющейся вследствие воздействия внешней силы $\partial f / \partial x$. Следуя [7], мы должны вычислить

интеграл

$$\Delta(\tau_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{g} \cdot \vec{\nabla} H_2|_{\xi_s, \dot{\xi}_s} d\tau, \quad (15)$$

где вектор $\vec{g} \equiv (g_1, g_2)$, градиент $\vec{\nabla} H_2 \equiv \left(\frac{\partial H_2}{\partial \xi}, \frac{\partial H_2}{\partial \dot{\xi}} \right)$, причем уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{\xi} = \frac{\partial H_3}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial H_2}{\partial \xi} + \delta g_1, \quad \ddot{\xi} = -\frac{\partial H_3}{\partial \xi} = -\frac{\partial H_2}{\partial \dot{\xi}} + \delta g_2.$$

Перейдя к безразмерным величинам, находим

$$\mathcal{E} = \frac{\dot{\xi}^2}{2} + (\xi^2 - 1)^2 - \delta^* \xi \sin\left(\frac{\sqrt{2}\lambda}{\omega} \tau\right),$$

где $\mathcal{E} \equiv H_3/Aa^4$, $\delta^* \equiv \delta/Aa^3 \ll 1$ (малость внешнего воздействия), поэтому

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{\xi}} = \dot{\xi}, \\ \ddot{\xi} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi} = -2(\xi^2 - 1)2\xi + \delta^* \sin(\lambda^* \tau). \end{cases}$$

Здесь $\lambda^* \equiv \sqrt{2}\lambda/\omega$. Отсюда следует, что $g_1 \equiv 0$, $g_2 = \sin(\lambda^* \tau)$. Поэтому

$$\vec{g} \cdot \vec{\nabla} H_2|_{\text{сепаратриса}} = \dot{\xi}_s \cdot \sin \lambda^* \tau.$$

Находя из (14) скорость и подставляя в (15), находим

$$\Delta(\tau_0) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sh}(\tau - \tau_0)}{\text{sh}^2(\tau - \tau_0)} \sin(\lambda^* \tau) d\tau. \quad (16)$$

Интеграл в правой части может быть вычислен с помощью теоремы Коши о вычетах. Действительно, запишем правую часть (16) в виде

$$\text{im } e^{i\lambda^* \tau_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda^* \tau} \text{sh} \tau}{\text{sh}^2 \tau} d\tau$$

и выбираем контур интегрирования, как показано на рис. 3.

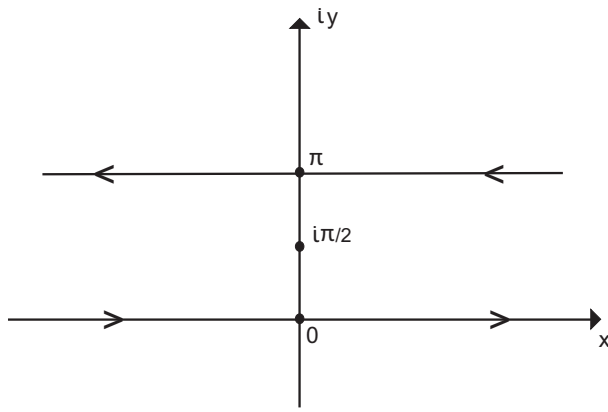


Рис. 3

Обозначим искомый интеграл символом $\square$. Тогда вычисление вычета в точке $z_0 = i\pi/2$ кратности два дает число $\lambda^* e^{-\lambda^* \pi/2}$, а разбиение контурного интеграла на части приводит к выражению $\square + e^{-\lambda^* \pi} \square$, поэтому мы можем написать

$$\square(1 + e^{-\lambda^* \pi}) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lambda^* e^{-\lambda^* \pi/2}.$$

Окончательно имеем

$$\Delta(\tau_0) \sim \text{im} e^{i\lambda^* \tau_0} \frac{\lambda^*}{4\pi i \text{ch}(\frac{\lambda^* \pi}{2})} = \frac{\lambda^* \cos(\lambda^* \tau_0)}{4\pi \text{ch}(\lambda^* \pi/2)}. \quad (17)$$

По Мельникову, хаотическое поведение вблизи сепаратрисы возникает, если $\Delta(\tau_0)$ является знакопеременной функцией своего аргумента. Очевидно, выражение (17) удовлетворяет этому требованию.

Заключение

В представленной работе новыми являются следующие результаты: получение спектров колебаний в потенциале Морса методом факторизации и квазиклассическим квантованием для потенциала в виде двойной симметричной ямы, а также вычисление критерия Мельникова для второго случая.

Однако не менее важным мы считаем акцентирование читателей на попытку решения уравнения Шредингера (9*) и нахождение спектра частицы в потенциале $V_2(x)$ методом факторизации.

Литература

1. Штокман Х.-Ю. Квантовый хаос.—М.: Физматлит, 2004.—374 с.
2. Кабисов Р. С., Кесаев В. И. Диффузионное возбуждение классической молекулы Морса высокочастотным электрическим полем // Сообщения АН ГССР (Моамбе).—1989.—Т. 134, вып. 1.—С. 69–71.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.—М.: Наука, 1974.—752 с.
4. Елютин П. В., Кривченков В. И. Квантовая механика.—М.: Наука, 1976.—334 с.
5. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции.—М.: Наука, 1977.—342 с.
6. Градштейн И. С., Рыжик Н. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.—М.: Наука, 1971.—1108 с.
7. Мельников В. К. Труды Московского математического общества, 12.—М.: Физматлит, 1963.—С. 3–52.

КЕСАЕВ ВИКТОР ИВАНОВИЧ
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 24
E-mail: Markusa24@mail.ru

Секция III

**Методика преподавания
математики**

О РЕШЕНИИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. И. Гуриева

В учебно-методической литературе указаны два основных метода решения иррациональных уравнений: 1 — метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень; 2 — метод введения новых переменных. Это два стандартных приема решения иррациональных уравнений. При стандартном решении иррационального уравнения рекомендуется либо находить область допустимых задач, либо обходиться без нее. Полученные результаты, не входящие в ОДЗ, отбрасываются как посторонние корни (в проверке нет необходимости). Результаты же, входящие в ОДЗ, не всегда гарантированно являются корнями уравнения и поэтому нуждаются в проверке. Однако проверку не всегда легко осуществить (к этому мы еще вернемся). Как правило, учащимся предлагаются такие иррациональные уравнения, в результате которых получаются «хорошие» значения, которые легко проверить. Почему-то авторы учебно-методических пособий и учебников оберегают учащихся от получения ими неудобных для проверки результатов.

Рассмотрим два уравнения, которые являются иллюстрацией вышесказанного.

ПРИМЕР 1. Решить уравнение

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x} = 1, \quad \text{ОДЗ: } x \in [0; 3].$$

Данное уравнения можно решить несколькими способами. Рассмотрим два из них.

I способ. Запишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{3-x} = 1 + \sqrt{x}.$$

Возводя обе части в квадрат, получим

$$3 - x = 1 + 2\sqrt{x} + x,$$

откуда

$$2\sqrt{x} = 2 - 2x$$

или

$$\sqrt{x} = 1 - x. \quad (1)$$

После возведения в квадрат обеих частей, получим квадратное уравнение

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Оба эти значения принадлежат ОДЗ уравнения, однако утверждать, что они являются корнями исходного уравнения, преждевременно, так как их надо проверить. Но эти результаты неудобны для проверки. И в самом деле, прямолинейная проверка этих значений x_1 и x_2 затруднительна.

Проверим, например, значение $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Подставляя его в исходное уравнение, получим

$$\begin{aligned} & \sqrt{3 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}} - \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} + 1) = 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ является корнем данного уравнения.

После аналогичной проверки значения $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ делаем вывод, что это посторонний корень, так как он не удовлетворяет уравнению.

Как видим, такую проверку сумеет выполнить не каждый ученик. Он должен догадаться, что после освобождения от иррациональности в знаменателях, выражения $6 + 2\sqrt{5}$ и $6 - 2\sqrt{5}$ являются полными квадратами суммы и разности чисел $\sqrt{5}$ и 1.

Приведенное нами решение является чисто механическим. Покажем теперь, как сделать вывод о корнях данного уравнения, не выполняя проверки.

В этом случае надо найти ОДЗ уравнения: $[0; 3]$. После возведения обеих частей уравнения в квадрат, дойдя до равенства (1),

ученик должен заметить, что его левая часть $\sqrt{x} \geq 0$, следовательно, правая часть $1 - x$ тоже неотрицательна, т. е. $1 - x \geq 0$, откуда $x \leq 1$. Следовательно, корнем уравнения будет только то значение, которое принадлежит отрезку $[0; 1]$. Из полученных выше результатов корнем исходного уравнения будет

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \in [0; 1].$$

$x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \notin [0; 1]$, и поэтому не является корнем уравнения.

Приведенное решение не требует проверки.

Рассмотрим второй способ решения.

II способ. Введем обозначение:

$$\sqrt{x} = t, \quad t \geq 0.$$

Данное уравнение перепишется в виде

$$\sqrt{3 - t^2} - t = 1$$

или

$$\sqrt{3 - t^2} = 1 + t.$$

После возведения в квадрат обеих частей уравнения, получим квадратное уравнение

$$t^2 + t - 1 = 0,$$

откуда

$$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad t_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Так как $t_1 < 0$, то t_1 посторонний корень.

$t_2 > 0$, т. е. является корнем уравнения. Найдём теперь x .

$$x = t^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

ПРИМЕР 2. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2x - 1} + \sqrt[3]{x} = -1.$$

Это уравнение тоже решим двумя способами.

I способ. Возведем обе части в куб, для чего применим формулу куба суммы двух чисел в виде $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, и получим

$$2x - 1 + x + 3\sqrt[3]{x(2x-1)}(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x}) = -1.$$

Подставим в это уравнение -1 вместо суммы $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x}$, получим

$$3x - 3\sqrt[3]{x(2x-1)} = 0$$

или

$$x = \sqrt[3]{x(2x-1)},$$

отсюда

$$x^3 = 2x^2 - x$$

или

$$x(x^2 - 2x + 1) = 0.$$

Решая это уравнение, получим его корни $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Проверкой убеждаемся, что из этих значений корнем исходного уравнения является только $x_1 = 0$, а $x_2 = 1$ — посторонний корень. Возникает вопрос: когда появился посторонний корень? Ведь возведение в куб обеих частей уравнения равносильности не нарушает. И ОДЗ данного уравнения — множество всех действительных чисел и $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ принадлежат ОДЗ. И все-таки равносильность нарушена. Причиной этого явилась подстановка -1 вместо суммы $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x}$, так как $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x} = -1$ не является тождественным равенством.

II способ. Обозначим $\sqrt[3]{x}$ через t , тогда $x = t^3$.

Данное уравнение переписывается в виде

$$\sqrt[3]{2t^3 - 1} + t = -1,$$

отсюда

$$\sqrt[3]{2t^3 - 1} = -1 - t.$$

Возведем обе части этого уравнения в куб и, выполнив тождественные преобразования, получим $t(t^2 + t + 1) = 0$. $t^2 + t + 1 \neq 0$, так как $D < 0$, следовательно, $t = 0$.

Отсюда следует, что $x = 0$.

Нами рассмотрены два основных приема решения иррациональных уравнений. Отметим, что II способ, т. е. метод замены неизвестной можно варьировать: заменять радикалы, входящие в уравнение, через « U » и « V » и т. д.

ГУРИЕВА НАДЕЖДА ИСЛАМОВНА
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Втатутина, 46

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Л. Г. Левашова, З. Е. Галаванова, Л. Т. Хугаева

Учебный процесс, как всякий процесс познания, имеет три фазы (или стадии) и развивается по схеме: от конкретного содержания — к абстрактному мышлению — к практике. Вторая и третья фазы учебного процесса реализуются в форме лекций и практических занятий. Первая фаза учебного процесса, как правило, не представлена. Но ее место — это место лабораторных занятий.

По таким же трем стадиям идет теоретическое развитие науки. В первой стадии — наблюдения, накопления, систематизация и классификация объектов, фактов. Во второй стадии — на основе сопоставлений открытие и обоснование закономерностей, получение фундаментальных выводов и рецептов для практики. На третьей стадии — практическое использование выводов, к которым пришли на второй стадии.

Конечно, описанная схема в жизни реализуется диалектически. И каждая стадия, представляя собой лишь некоторый участок процесса познания, в свою очередь, может быть подразделена на такие же стадии. Таким образом, мы можем иметь наблюдение на уровне теоретического материала, переход к обобщающим выводам, а затем — к приложению этих выводов в рамках теории. В каждой из стадий можно всегда найти элементы других стадий. Все это создает известные трудности в подразделении учебного процесса на виды занятий. Причем особые затруднения возникают при подразделении материала, не относящегося к теории, на практические и лабораторные занятия. Традиционно весь материал, не относящийся к теории по данному курсу, обычно включается в так называемые практические занятия. В действительности в практических занятиях могут оказаться смешанными элементы первой и третьей фазы процесса познания. Поскольку в учебном процессе каждая фаза ставит перед преподавателем свои особые задачи, цели, то желательно первую и третью фазу разъединить на «практические занятия» и «лабораторные занятия». При этом следует считаться с тем, что в реальной истории науки первая фаза, как правило, занимает очень большие периоды времени (несколько лет, десятилетий, столетий). По этой причине учебное лабораторное занятие ни в коей мере не может точно

воспроизводить соответствующий участок в историческом развитии науки. Оно может и должно быть лишь учебной моделью.

Учитывая сказанное, мы приходим к следующим соображениям в структуре и содержании учебного процесса по курсу математического анализа (на математическом отделении университета).

Учебный процесс подразделяется на занятия трех типов:

- 1) лекции;
- 2) практические занятия;
- 3) лабораторные занятия.

Содержание занятий первого типа обычно не вызывает неясностей и четко регламентируется государственной программой. Оно представляет собой (обычно дедуктивное) изложение общих, теоретических положений, известных в науке к данному времени. Содержанием практических занятий должно быть применение уже готовых общих положений, формул, выводов теории к различным конкретным задачам. В содержание лабораторного занятия входит:

- 1) наблюдение ряда частных фактов;
- 2) детальное исследование тех объектов, фактов, которые приводят к одному из главных понятий теории;
- 3) анализ некоторых частных фактов, на основе которых строится одно из главных положений теории;
- 4) обработка методики решения некоторых типов задач, показанных на лекциях и практических занятиях, закрепление навыков.

Нами разработана система задач для проведения лабораторных занятий по математическому анализу со студентами первого и второго курсов. Эта система состоит из разноплановых задач, позволяющих студентам устанавливать связь между теоретическим и практическим материалом.

Так одним из фундаментальных понятий математического анализа является понятие предела. На лабораторных занятиях целесообразно решать со студентами задачи на нахождение предела по Гейне. Приведем пример.

Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}.$$

Здесь функция $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$. В данном случае множество $A = \text{dom } f = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$. Очевидно, что $a = 2$ — предельная точка множества A . Для нахождения предела будем испол-

зовать определение предела в смысле Гейне. Возьмем произвольную последовательность точек $x_n \in A$, имеющую строгий предел 2, т. е. $x_n \rightarrow 2$, $x_n \neq 2$ для любого n .

Составляем последовательность чисел $f(x_n)$ и ищем ее предел:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - 2}{(x_n - 2)(x_n + 2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(x_n + 2)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 2)} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Итак, имеем: последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу $1/4$, и это верно для любой последовательности $\{x_n\}$ из A такой, что $x_n \rightarrow 2$, $x_n \neq 2$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Согласно определению предела функции по Гейне заключаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}.$$

Далее мы находим предел этой же функции по Коши.

Лабораторные занятия проводятся в интерактивной форме: взаимодействие студент — студент, студент — преподаватель. Деятельность преподавателя при этом сводится к заданию проблемных вопросов в ходе занятий и методических рекомендациях для выполнения домашнего задания и самостоятельной работы.

Как показал опыт проведения занятий, такие задания позволяют вести диалог в аудитории, создают предпосылки для глубокого усвоения и изучения основных понятий математического анализа.

Литература

1. Злобина С. В. О технологии изучения основных понятий математического анализа в вузе // Тр. IV Междунар. конф. женщин-математиков.—Нижний Новгород, 1997.—Т. 4, вып. 2.—С.157–162.
2. Кузьмина Л. И., Осипов Ю. В. Новые технологии преподавания и «старые» дисциплины // Качество, инновации, образование.—2013, № 2.—С. 9–13.
3. Шуркова М. В. О проблемах успеваемости по математическому анализу студентов педвуза // Вестн. Поморского ун-та.—Архангельск, 2007.—№ 7.—С. 166–168.

Левашова Людмила Григорьевна
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Втатутина, 46

Галаванова Залиан Ефимовна
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Втатутина, 46
E-mail: gal-zalina@yandex.ru

Хугаева Людмила Таймуразовна
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Втатутина, 46
E-mail: hugaeva.mila@yandex.ru

Научное издание

**ТРУДЫ КАФЕДРЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
СОГУ**

Выпуск 1

*Утверждено к печати
решением кафедры математического анализа СОГУ
и Ученым советом ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А*

*Компьютерная верстка: М. У. Вазагаева
Зав. редакцией: В. В. Кибизова*

Подписано в печать 15.12.2014.
Формат бумаги $60 \times 84^{1/16}$. Усл. п. л. 5,58.
Тираж 100 экз.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.