

ЮМИ

FEDERAL AGENCY
FOR SCIENTIFIC ORGANIZATIONS
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTRE
OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE RUSSIAN FEDERATION
NORTH OSSETIAN STATE UNIVERSITY

REVIEW OF SCIENCE • THE SOUTH OF RUSSIA

MATHEMATICAL FORUM

V o l u m e 10

Part 1

STUDIES ON
MATHEMATICAL ANALYSIS,
DIFFERENTIAL EQUATIONS, AND
THEIR APPLICATIONS

Vladikavkaz
2016

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО
НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ РСО-АЛАНИЯ
СЕВЕРО-ОСЕТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Л. ХЕТАГУРОВА

И Т О Г И Н А У К И • Ю Г Р О С С И И

С Е Р И Я
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФОРУМ

Т о м 10
Часть 1

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО
МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ,
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯМ

Владикавказ
2016

ББК 22.16+
УДК 517
М34

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ:

д. ф.-м. н. Ю. Ф. Коробейник,
д. ф.-м. н. А. Г. Кусраев

РЕДАКТОР ТОМА:

д. ф.-м. н. А. В. Абанин

Математический форум. Т. 10, ч. 1. Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016.—256 с.—(Итоги науки. Юг России).

Настоящий сборник представляет собой первую часть десятого тома серии «Математический форум», в который вошли материалы Международной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (Владикавказ, 12–18 июля 2015 г.).

Mathematical Forum. Vol. 10, part 1. Studies on Mathematical Analysis, Differential Equations, and Their Applications.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2016.—256 p.—(Review of Science: The South of Russia).

This collection is Part I of the tenth volume in “Mathematical Forum” series and comprises proceedings of the International Conference “Order Analysis and Related Problems of Mathematical Modeling” (Vladikavkaz, Russia, July 12–18, 2015).

ISBN 978-5-904695-35-4

© Южный математический институт —
филиал ВНЦ РАН, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
-------------------	---

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

Емельянов Э. Ю. Архимедизация упорядоченных векторных пространств	13
Ильин К. И., Моргулис А. Б. Устойчивость и неустойчивость течений несжимаемой жидкости сквозь зазор между пронизаемыми цилиндрами	22
Кулаев Р. Ч. Условия положительности функции Грина задачи Дирихле на графе-пучке	37
Назиев А. Х. Совершенствование традиционной методики преподавания традиционных разделов математики. I. Преодолеть недостатки, связанные с применением тождеств и тождественных преобразований	53
Никоноров Ю. Г. Киллинговы векторные поля постоянной длины на компактных однородных римановых многообразиях	69
Ситник С. М. Обобщение неравенства Коши — Буняковского в терминах максимумов и минимумов функций	79
Шарапудинов И. И. Смешанные и специальные ряды по полиномам Лагерра и ряды Фурье по ортогональным полиномам Лагерра — Соболева	99
Шубарин М. А. Интерполяционные свойства локально выпуклых пространств, обладающих свойствами типа нормируемости	119

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Абанин А. В., Фам Чонг Тиен. Операторы дифференцирования и интегрирования в весовых пространствах целых функций	137
Андреев П. Д. Конечномерность хордовых пространств Буземана — Пхадке неположительной кривизны	152
Weber M. R. Finite functions in $C(\mathbb{R})$ and finite elements in vector lattices	158
Иванова О. А., Мелихов С. Н. О циклических элементах оператора сдвига влево в пространствах целых функций экспоненциального типа	172
Кукушкин М. В. Об одном оснащении весового пространства L_2	181
Магомед-Касумов М. Г. О вложении весовых пространств Лебега с переменным показателем $L_w^{p(x)}$ в пространство L^1	187
Попов В. А. Инфинитезимальные аффинные преобразования и их аналитическое продолжение	195
Ташпулатов С. М. Существенные и дискретные спектры оператора энергии четырехэлектронных систем в модели Хаббарда	202
Унучек С. А. Оптимальное восстановление оператора разделенной разности по неточно заданным разностям	215
Хабибуллин Б. Н., Розит А. П., Хабибуллин Ф. Б. Порядковые версии теоремы Хана — Банаха и огибающие. I. Однородные функции	226
Шарапудинов Т. И. Ряды Фурье по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке в смысле Соболева	244

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник представляет собой первую часть десятого выпуска серии «Математический форум», которая издается совместно Южным математическим институтом — филиалом Владикавказского научного центра Российской академии наук и институтом математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета. Цель издания — укрепление позиций фундаментальной математики и интеграция научных исследований на Юге России, расширение и углубление научных контактов математиков региона с российскими и зарубежными коллегами.

В сборник вошли материалы XII Международной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования», состоявшейся в высокогорном курорте «Цей» Республики Северная Осетия-Алания с 12 по 18 июля 2015 г. Организаторами конференции выступили Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН (г. Владикавказ) и Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова (г. Владикавказ). Проведение конференции осуществлялось при поддержке гранта РФФИ, проект № 15-31-10240.

В работе конференции приняли участие специалисты по математическому анализу, дифференциальным и интегральным уравнениям и математическому моделированию из разных городов России, а также зарубежья (Германии, Италии, Турции, Украины, Южной Кореи, Южной Осетии). Тезисы докладов участников конференции опубликованы на официальном сайте Южного математического института ВНЦ РАН (www.smath.ru).

Ввиду большого объема десятый том издается в двух частях. Первая часть, составленная по материалам 8 пленарных и 10 секционных докладов, полностью посвящена анализу.

Исключение составляет пленарный доклад А. Х. Назиева, в котором рассмотрено некорректное использование понятий ОДЗ, тождества и тождественного преобразования в школьных учебниках математики. Автор обоснованно предлагает вместо ОДЗ и тождеств использовать то, что повсеместно применяется в математике, — аксиомы, определения, теоремы.

В статье Э. Ю. Емельянова предложен метод, позволяющий построить для данного упорядоченного векторного пространства его архимедизацию — единственное с точностью до порядкового изоморфизма архимедово упорядоченное векторное пространство, через которое факторизуется любой линейный положительный оператор, действующий из данного пространства в произвольное архимедово упорядоченное векторное пространство.

В статье К. И. Ильина и А. Б. Моргулиса обсуждается устойчивость и неустойчивость наложения радиального потока на течение Куэтта — Тэйлора при больших радиальных числах Рейнольдса. Развиваются и дополняются исследования Gallet, Doering и Spiegel.

В статье Р. Ч. Кулаева рассматривается краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка на графе с одной узловой вершиной, возникающая при моделировании стержневых конструкций. Исследован вопрос о положительности соответствующей функции Грина.

Статья Ю. Г. Никонорова посвящена так называемым киллинговым векторным полям на римановом многообразии, характеризующимися тем, что они порождают однопараметрические группы изометрий риманова многообразия. В основу статьи положены недавние результаты автора о свойствах киллинговых векторных полей постоянной длины на однородных римановых многообразиях.

Статья С. М. Ситника посвящена уточнению интегрального неравенства Коши — Буняковского. После короткого исторического введения излагаются результаты автора, в которых разработан метод получения одного класса таких уточнений с использованием средних значений. Обсуждаются различные подходы, возможные усиления и приложения.

В статье И. И. Шарапудинова рассмотрены ряды Фурье по ортогональным полиномам Лагерра — Соболева и показано, что к ним применимы методы и подходы, разработанные автором ранее для смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам.

Обзорная статья М. А. Шубарина посвящена классам квазинормируемых и асимптотически нормируемых локально выпуклых пространств, введенным соответственно в работах А. Гротендика и Т. Терциоглу — Д. Фогта. Устанавливается, в частности, что квазинормируемость и асимптотическая нормируемость являются внутренними интерполяционными свойствами.

На секции математического анализа были представлены следующие темы и результаты.

Операторы в пространствах целых функций: установлены необходимые и достаточные условия непрерывности операторов дифференцирования и интегрирования, действующих из одного весового пространства целых функций в другое (А. В. Абанин, Фам Чонг Тиен); описаны циклические элементы оператора сдвига влево (оператора Поммье), действующего в весовых пространствах целых функций экспоненциального типа (О. А. Иванова, С. Н. Мелихов).

Дифференциальная и метрическая геометрия: доказана теорема о конечности топологической размерности для хордовых пространств неположительной кривизны в смысле Буземана — Пхадке (тем самым в указанном классе пространств дан положительный ответ на аналог известной проблемы Буземана) (П. Д. Андреев); установлена возможность аналитического продолжения инфинитезимальных аффинных преобразований до аффинных преобразований некоторого пространства аффинной связности (В. А. Попов).

Порядковый анализ: представлен обзор теории финитных элементов в векторных решетках, являющихся естественным обобщением понятия непрерывных функций с компактным носителем, заданных на локально компактном топологическом пространстве (М. Р. Вебер); представлен общий подход к задаче существования и построения верхней и нижней огибающих для произвольной функции со значениями из пополнения упорядоченного множества (Б. Н. Хабибуллин, А. П. Розит, Ф. Б. Хабибуллин).

Теория приближений: построено семейство оптимальных методов восстановления разделенной разности k -го порядка последовательности по ее неточно заданным разделенным разностям (С. А. Унучек); введены ряды Фурье по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке относительно скалярного произведения соболевского типа, и установлены некоторые аппроксимативные свойства таких рядов (Т. И. Шарапудинов).

Функциональные пространства: описан способ построения гильбертова пространства путем пополнения унитарного пространства, порожденного оператором дробного дифференцирования, и доказана теорема о вложении построенного гильбертова пространства в весовое пространство Лебега суммируемых с квадратом функций (М. В. Кукушкин); исследованы условия, при которых весовое пространство Лебега с переменным показателем суммируемости допускает вложение в пространство суммируемых функций (М. Г. Магомед-Касумова).

Спектральный анализ: рассмотрен спектр оператора энергии четырехэлектронной системы в рамках модели Хаббарда и описана структура существенного и дискретного спектров системы для квинтетных и синглетонных состояний (С. М. Ташпулатов).

Пленарные доклады

АРХИМЕДИЗАЦИЯ УПОРЯДОЧЕННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Э. Ю. Емельянов

Для упорядоченного векторного пространства V , обладающего сильной порядковой единицей, Верн Полсен и Марк Томфорд разработали метод архимедизации [1], заключающийся в построении начального объекта в категории архимедовых упорядоченных пространств, через который можно факторизовать единственным образом всякий положительный линейный оператор $V \rightarrow U$, где U архимедово упорядоченное пространство. Впоследствии метод построения архимедизации был расширен [2] на случай произвольного упорядоченного пространства V , не обязательно имеющего сильную единицу. При этом, в отличие от конструкции Полсена — Томфорда, предлагаемая конструкция архимедизации требует в общем случае более одной итерации даже в случае векторных решеток (см. пример Накаямы, приведенный в [3]). Данный метод косвенным образом связан с известной характеристикой Векслера [4] архимедовости фактор-решеток через равномерную замкнутость порядкового идеала, по которому векторная решетка факторизуется.

Ключевые слова: упорядоченное векторное пространство, векторная решетка, архимедизация.

1. Введение

1.1. В данной работе рассматриваются исключительно векторные пространства над полем вещественных чисел. Подмножество W векторного пространства V называется *клином*, когда

$$\begin{aligned} W + W &\subseteq W, \\ rW &\subseteq W \quad (\forall r \geq 0). \end{aligned}$$

Если клин K удовлетворяет

$$K \cap (-K) = \{0\},$$

то он называется *конусом*. Говорят, что K *порождающий*, если

$$K - K = V. \tag{1}$$

Заданный конус V_+ в V определяет *упорядоченное векторное пространство* (V, V_+) или кратко УВП. При этом порядок $\leq$ в V задается:

$$x \leq y, \quad y - x \in V_+.$$

УВП (V, V_+) также обозначается $(V, \leq)$ или просто V , если порядок $\leq$ не вызывает двусмысленностей. Элемент $e \in V$ называется *порядковой единицей* в случае, когда для всякого $x \in V$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $x \leq ne$. Если V обладает порядковой единицей, то конус V_+ порождающий.

Для всяких векторов x, y в $(V, \leq)$ множество (возможно, пустое, если $x \not\leq y$)

$$[x, y] := \{z : x \leq z \leq y\}$$

называется *порядковым интервалом*. Векторное подпространство I в V называется *порядковым идеалом*, если $[a, b] \subseteq I$ для всех $a, b \in I$. Если I порядковый идеал в V , то фактор-пространство V/I упорядоченно по правилу

$$[0] \leq [f], \quad \text{когда} \quad \exists q \in I \text{ с } 0 \leq f + q.$$

1.2. Пусть $x_n \in V$ и $u \in V_+$. Говорят, что последовательность $(x_n)_n$ *и-равномерно сходится* к $x \in V$ (обозначается $x_n \xrightarrow{(u)} x$), если

$$x_n - x \in [-\varepsilon_n u, \varepsilon_n u]$$

для некоторой последовательности ε_n вещественных чисел, такой, что $\varepsilon_n \downarrow 0$. Подмножество $A \subseteq V$ называется *равномерно замкнутым* в V , когда оно содержит все пределы и-равномерно сходящихся последовательностей в A для всевозможных $u \in V_+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Конус K в векторном пространстве V называется *архимедовым*, если

$$(\forall x, y \in V) \quad [(\forall n \in \mathbb{N}) \ x - nu \in K] \Rightarrow [y \in -K]. \quad (2)$$

Очевидно, что условие (2) в определении 1 можно заменить на

$$(\forall x \in V_+, y \in V) \quad [(\forall n \in \mathbb{N}) \ x - nu \in K] \Rightarrow [y \in -K],$$

а также то, что всякое подпространство архимедова УВП является архимедовым. Следует отметить, что, если V наделено какой-либо

векторной топологией τ , в которой конус $K \subseteq V$ замкнут, то K — архимедово (ср. [5, лемма 2.3]). Если же τ хаусдорфова, а конус $K \subseteq V$ имеет τ -внутреннюю точку, то K архимедово тогда и только тогда, когда K τ -замкнуто (ср. [5, лемма 2.4]). Хорошо известно следующее свойство.

Предложение 1. Положительный конус V_+ в УВП V является архимедовым тогда и только тогда, когда

$$\inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} y = 0 \quad (\forall y \in V_+).$$

1.3. Ясно, что можно определять архимедовость конуса V_+ , потребовав, чтобы условия $x \in V_+$, $y \in V$ и $0 \leq x + ny$ для всех $n \in \mathbb{N}$ влекли $0 \leq y$. Это наблюдение мотивирует следующее определение, навеянное введенным Полсеном и Томфордом понятием *архимедовой порядковой единицы* [1, определение 2.7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элемент $x \in V_+$ УВП (V, V_+) назовем *архимедовым*, если для всякого $y \in V$ такого, что $x + ny \in V_+$ при всех $n \in \mathbb{N}$, выполняется $y \in V_+$.

Отметим, что $x = 0$ всегда является архимедовым. Ясно, что конус V_+ архимедов тогда и лишь тогда, когда все его элементы архимедовы. Более того, если $0 \leq z \leq x$ и x архимедов, то и z тоже архимедов. В частности, если УВП V имеет архимедову порядковую единицу, то все элементы конуса V_+ будут архимедовыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Конус K в векторном пространстве V называется *почти архимедовым*, если

$$(\forall x, y \in V) \quad [(\forall n \in \mathbb{Z}) x - ny \in K] \Rightarrow [y = 0].$$

В произвольном УВП (V, V_+) обозначим через

$$N_V := \{x \in V \mid (\exists y \in V) (\forall n \in \mathbb{N}) [-y \leq nx \leq y]\} \quad (3)$$

множество всех *бесконечно малых элементов* V . Конус V_+ почти архимедов тогда и только тогда, когда $N_V = \{0\}$. Ясно, что всякое архимедово УВП является почти архимедовым. Обратное неверно уже в случае, когда $\dim(V) = 2$. Следующие два утверждения хорошо известны.

Предложение 2. Конус K в векторном пространстве V почти архимедов тогда и только тогда, когда он не содержит прямых. Кроме того, УВП V почти архимедово тогда и только тогда, когда

$$\bigcap_{n \geq 1} \left[-\frac{1}{n}x, \frac{1}{n}x \right] = \{0\} \quad (x \in V_+).$$

Предложение 3. Всякий подконус почти архимедового конуса является почти архимедовым.

Стоит отметить, что из определений 1 и 2 сразу вытекает, что пересечение непустого семейства архимедовых (соответственно, почти архимедовых) конусов будет архимедовым (соответственно, почти архимедовым) конусом.

1.4. Если A — порядковый идеал в УВП (V, V_+) такой, что УВП $(V/A, V_+ + A)$ почти архимедово, то A равномерно замкнут (ср. часть (а) утверждения 2 ниже). Когда же $A = \{0\}$, обратное тоже верно согласно (b) из утверждения 2. Таким образом, V — почти архимедово в том и только том случае, когда синглетон $\{0\}$ равномерно замкнут. Вообще же вопрос об архимедовости V/A в предположении равномерной замкнутости идеала A весьма нетривиален (он имеет утвердительный ответ, благодаря теореме Векслера [4], когда (V, V_+) является векторной решеткой). Напомним, что УВП V — *векторная решетка*, если всякое непустое конечное подмножество в V имеет супремум. Хорошо известно, что всякая почти архимедова векторная решетка является архимедовой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $V = (V, V_+)$ — УВП. Рассмотрим категорию $\mathcal{C}_{\text{Arch}}(V)$, объектами которой являются пары $\langle U, \phi \rangle$, где $U = (U, U_+)$ — архимедово УВП, а $\phi : V \rightarrow U$ — положительный линейный функционал (т. е.: $\phi(V_+) \subseteq U_+$) и морфизмы $\langle U_1, \phi_1 \rangle \rightarrow \langle U_2, \phi_2 \rangle$ — положительные линейные операторы $q_{12} : U_1 \rightarrow U_2$, для которых $q_{12} \circ \phi_1 = \phi_2$. В том случае, когда $\mathcal{C}_{\text{Arch}}(V)$ имеет начальный объект $\langle U_0, \phi_0 \rangle$, назовем U_0 *архимедизацией* V .

Заметим, что в определениях 1–4 использован лишь факт, что V — *коммутативная упорядоченная группа*, если мы заменим условие (1) в определении клина на $W \subseteq nW$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и положительные операторы в определении 4 на групповые гомоморфизмы.

2. Архимедизация УВП

2.1. Следующая теорема является главным результатом настоящей статьи (ср., также, [2]).

Теорема 1. *Всякое УВП имеет единственную, с точностью до порядкового изоморфизма, архимедизацию.*

Доказательство теоремы будет дано ниже.

2.2. Сперва рассмотрим ряд понятий относящихся к расширенному методу Полсена — Томфорда архимедизации УВП [1]. Для УВП (V, V_+) , обозначим

$$D_V := \{x \in V \mid (\exists \xi \in V_+) (\forall \varepsilon > 0) x + \varepsilon \xi \in V_+\},$$

и пусть I_V — пересечение всех равномерно замкнутых идеалов в (V, V_+) . Немедленно проверяется, что $D_V \cap (-D_V) = N_V$, где N_V задано формулой (3), N_V — порядковый идеал в (V, V_+) , D_V — клин, а также, что $V_+ \subseteq D_V$. Рассмотрим подмножества $V_+ + N_V = [V_+]_{N_V}$ и $D_V + N_V = [D_V]_{N_V}$ фактор-пространства V/N_V . Поскольку V_+ , D_V и N_V — клинья, то $V_+ + N_V$ и $D_V + N_V$ будут клиньями в V/N_V . При этом, в общем случае, D_V не является конусом. Ясно, что

$$\begin{aligned} (D_V + N_V) \cap -(D_V + N_V) &= \\ = (D_V + N_V) \cap (-D_V + N_V) &= D_V \cap (-D_V) = N_V. \end{aligned}$$

Значит, $D_V + N_V$ — конус в V/N_V и, следовательно, $V_+ + N_V \subseteq D_V + N_V$ тоже конус.

2.3. Сформулируем ряд элементарных свойств в следующих двух утверждениях. Отсылаем читателя к работе [2] за их простыми доказательствами.

Утверждение 1. *Пусть (V, V_+) — УВП. Тогда*

- (a) N_V — порядковый идеал в УВП (V, D_V) ;
- (b) $N_V \subseteq I_V$;
- (c) если V имеет порядковую единицу, то $N_{V/A} = I_{V/A}$ для всякого порядкового идеала $A \subseteq V$;
- (d) если (V, V_+) — векторная решетка, то $(V/N_V, D_V + N_V)$ тоже векторная решетка.

Утверждение 2. *Пусть (V, V_+) — УВП. Следующие свойства равносильны:*

(а) пусть $A \subseteq V$ — порядковый идеал, тогда V/A почти архимедово $\Rightarrow A$ равномерно замкнут;

(б) V почти архимедово $\Leftrightarrow N_V = \{0\} \Leftrightarrow I_V = \{0\}$;

(с) если (V, V_+) имеет порядковую единицу, то $(V/N_V, D_V + N_V)$ архимедово;

(д) если $(V/N_V, D_V + N_V)$ архимедово, то $(V/N_V, V_+ + N_V)$ почти архимедово (в частности, $(V/N_V, V_+ + N_V)$ будет почти архимедовым, когда (V, V_+) обладает порядковой единицей).

2.4. Следующий пример показывает, что для архимедовости конуса $D_V + N_V$ в V/N_V наличие порядковой единицы в (V, V_+) не обязательно.

ПРИМЕР 1. Пусть $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ — пространство всех вещественных многочленов на $\mathbb{R}$, упорядоченное конусом

$$V_+ := \{p \in V \mid (\forall t \in \mathbb{R}) p(t) > 0\} \cup \{p \mid p(t) \equiv 0\}.$$

В (V, V_+) нет порядковых единиц, $D_V := \{p \in V \mid (\forall t \in \mathbb{R}) p(t) \geq 0\}$ и $N_V = \{0\}$. Пусть $x \equiv 1$, $y = -t^2$, тогда

$$x - ny \in V_+ \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

но $y \notin -V_+$. Значит, (V, V_+) не является архимедовым при том, что $N_V = \{0\}$. Вместе с тем УВП $(V/N_V, D_V + N_V) = (V, D_V)$, очевидно, архимедово.

Отметим, что если взять $V = \mathcal{P}[0, 1]$ с тем же порядком, то V станет неархимедовым, но почти архимедовым, УВП с порядковой единицей и равномерно замкнутым порядковым идеалом $N_V = \{0\}$. Кроме того, хорошо известно, что это УВП обладает *декомпозиционным свойством Рисса*, хотя и не является векторной решеткой.

2.5. Перейдем к рассмотрению классического примера, принадлежащего Т. Накаяме (ср., [3, с. 436]), в котором конус $D_V + N_V$ в V/N_V не является даже почти архимедовым.

ПРИМЕР 2. Пусть $V = \{a = (a_k^1, a_k^2)_k \mid (a_k^1, a_k^2) \in (\mathbb{R}^2, \leq_{\text{lex}}), a_k^1 \neq 0 \text{ для конечного числа } k\}$. Тогда V — векторная решетка по отношению к поточечным операциям и порядку. Обозначим

$$A = \{a \in V \mid a_k^1 = 0 \text{ для всех } k, a_k^2 \neq 0 \text{ для конечного числа } k\}$$

и

$$B := \{a \in V \mid a_k^1 = 0 \text{ для всех } k\}.$$

Ясно, что $A \subseteq B$, $A \neq B$ и $A \subseteq N_V$. Более того, $B = I_V$ и $A = N_V$. Отметим, что

$$\begin{aligned} N_V &= \{a \in V \mid (\forall k) \ a_k^1 = 0 \text{ и } a_k^2 \neq 0 \text{ для конечного числа } k\}, \\ D_V &= \{a \in V \mid (\forall k) \ a_k^1 \geq 0 \text{ и } a_k^2 < 0 \text{ для конечного числа } k\}. \end{aligned}$$

Несложно показать, что векторная решетка $(V/N_V, D_V + N_V)$ не является архимедовой и, значит, не будет почти архимедовой.

2.6. В связи с примером 1, возникает вопрос: верно ли, что (V, D_V) — архимедово, если УВП (V, V_+) почти архимедово. К счастью, ответ на этот вопрос — утвердительный.

Утверждение 3. Пусть УВП (V, V_+) — почти архимедово. Тогда УВП (V, D_V) будет архимедовым.

◁ Допустим, что конус D_V неархимедов. Тогда найдутся $x, y \in V$, $x \in D_V$ такие, что

$$(\forall r > 0) \quad rx + y \in D_V, \quad \text{но } y \notin D_V.$$

Поскольку $x \in D_V$, то существует $v \in V_+$

$$(\forall \alpha > 0) \quad x + \alpha v \in V_+.$$

Рассмотрим конус

$$K = \text{span}(x, v, y) \cap V_+.$$

Обозначая через $\text{cl}(C)$ — замыкание в евклидовой топологии подмножества $C \subseteq \text{span}(x, v, y)$ в $\text{span}(x, v, y)$, имеем, что $x \in \text{cl}(K)$ и $rx + y \in \text{cl}(K)$ для всех $r > 0$ и, следовательно, $y \in \text{cl}(K) \subseteq D_V$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что D_V — архимедово. ▷

За элементарным доказательством следующего свойства отсылаем читателя к [2].

Следствие 1. Всякий почти архимедов конус можно вложить в архимедов конус. Более того, для всякого УВП (V, V_+) , УВП $(V/N_V, D_V + N_V)$ архимедово тогда и только тогда, когда УВП $(V/N_V, V_+ + N_V)$ почти архимедово.

2.7. Хотя первая половина следствия 1 уже дает архимедизацию произвольного почти архимедова пространства (V, V_+) (достаточно лишь заменить V_+ на пересечение всех архимедовых конусов, содержащих V_+), теорема 1 не налагает вообще никаких ограничений на

конус V_+ и покрывает также такие УВП, как V из примера 2, в котором V/N все еще имеет бесконечно малые элементы.

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $V = (V, V_+)$ — УВП. Обозначим через $N_0 = \{0\}$,

$$N_1 = N_V = \{x \in V \mid [x]_{N_0} = x \text{ бесконечно мал в } V/N_0 = V\},$$

$$N_{n+1} = \{x \in V \mid [x]_{N_n} \text{ бесконечно мал в } V/N_n\},$$

и, для произвольного ординала $\alpha > 0$

$$N_\alpha = N_\alpha(V) = \{x \in V \mid [x]_{\bigcup_{\beta < \alpha} N_\beta} \text{ бесконечно мал в } V/\bigcup_{\beta < \alpha} N_\beta\}.$$

Непосредственно из определения N_α вытекает, что

$$N_{\alpha_1} \subseteq N_{\alpha_2} \quad (\forall \alpha_1 \leq \alpha_2).$$

Возьмем первый ординал, скажем, λ_V такой, что $N_{\lambda_V+1} = N_{\lambda_V}$. Тогда $(V/N_{\lambda_V}, [V_+]_{N_{\lambda_V}})$ не имеет бесконечно малых элементов и, следовательно, будет почти архимедовым. Согласно следствию 1, УВП

$$(V/N_{\lambda_V}, [D_{V/N_{\lambda_V}}]_{N_{\lambda_V}}) = (V/N_{\lambda_V}, D_{V/N_{\lambda_V}})$$

будет архимедовым. Обозначим через p_V — фактор-отображение $V \rightarrow V/N_{\lambda_V}$, тогда p_V будет положительным линейным оператором. Для всякой другой пары $\langle U, \phi \rangle$, где $U = (U, U_+)$ — архимедово УВП и $\phi : V \rightarrow U$ — положительный линейный оператор, имеем, что $\phi(x) \in N_U$ при всех $x \in N_\alpha$, где α — произвольный ординал. Поскольку всякое архимедово УВП является почти архимедовым, $N_U = \{0\}$ и, значит, $N_{\lambda_V} \subseteq \ker(\phi)$. Поэтому отображение $\tilde{\phi} : V/N_{\lambda_V} \rightarrow U$ корректно определено правилом $\tilde{\phi}([x]_{N_{\lambda_V}}) = \phi(x)$ и удовлетворяет $\tilde{\phi} \circ p_V = \phi$. Кроме того, если $[x]_{N_{\lambda_V}} \in D_{V/N_{\lambda_V}}$, то

$$n[x]_{N_{\lambda_V}} + [\xi]_{N_{\lambda_V}} \in [V_+]_{N_{\lambda_V}} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

для некоторого $[\xi]_{N_{\lambda_V}} \in [V_+]_{N_{\lambda_V}}$. Применяя ϕ , получаем

$$n\phi(x) + \phi(\xi) \in U_+ \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

и, поскольку (U, U_+) — архимедово, отсюда следует, что $\phi(x) \in U_+$. Значит,

$$\tilde{\phi}([x]_{N_{\lambda_V}}) = \phi(x) \in U_+$$

и $\tilde{\phi}$ — положительный линейный оператор. Для проверки единственности такого $\tilde{\phi}$, возьмем произвольный положительный линейный оператор $\psi : V/N_{\lambda_V} \rightarrow U$ удовлетворяющий $\psi \circ p_V = \phi$. Тогда

$$\psi([y]_{N_{\lambda_V}}) = \psi(p_V(y)) = \phi(y) = \tilde{\phi}(p_V(y)) = \tilde{\phi}([y]_{N_{\lambda_V}}) \quad (\forall y \in V).$$

Значит, $\psi = \tilde{\phi}$. Таким образом, $\langle (V/N_{\lambda_V}, D_{V/N_{\lambda_V}}), p_V \rangle$ — начальный объект категории $\mathcal{C}_{\text{Arch}}(V)$ и, следовательно, $(V/N_{\lambda_V}, D_{V/N_{\lambda_V}})$ — ис- комая архимедизация УВП (V, V_+) . $\triangleright$

Следующий вопрос возникает естественным образом в связи с до- казательством теоремы 1. Для всякого ли ординала α найдется УВП (V, V_+) такое, что α будет первым ординалом со свойством $N_{\alpha+1}(V) = N_{\alpha}(V)$?

Литература

1. Paulsen V. I., Tomforde M. Vector spaces with an order unit // Indiana Univ. Math. J.—2009.—Vol. 58, № 3.—Р. 1319–1359.
2. Emelyanov E. Yu. Archimedean cones in vector spaces // J. of Convex Anal.—(To appear).
3. Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C. Riesz spaces. Vol. I.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1971.—xi+514 p.
4. Векслер А. И. Принцип Архимеда в гомоморфных образах ℓ -групп и векторных структур // Изв. вузов. Матем.—1966. № 5.—С. 33–38.
5. Aliprantis C. D., Tourky R. Cones and duality.—N. Y.: AMS, 2007.—xiv+279 p.

Емельянов Эдуард Юрьевич
Ближневосточный технический университет (METU)
TURKEY, 06800, Ankara, Universiteler Mah. Dumlupinar Blv., 1
Институт математики им. С. Л. Соболева
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4
E-mail: eduard@metu.edu.tr

ARCHIMEDEANIZATION OF ORDERED VECTOR SPACES

In the case of an ordered vector space with an order unit, the Archimedeanization has been developed recently by V. I. Paulsen and M. Tomforde. We present a version of Archimedeanization which covers arbitrary ordered vector spaces.

Key words: ordered vector space, vector lattice, Archimedeanization.

УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СКВОЗЬ ЗАЗОР МЕЖДУ ПРОНИЦАЕМЫМИ ЦИЛИНДРАМИ¹

К. И. Ильин, А. Б. Моргулис

Обсуждается устойчивость и неустойчивость наложения радиального потока на течение Куэтта — Тэйлора при больших радиальных числах Рейнольдса. Развиваются и дополняются известные результаты Gallet, Doering и Spiegel (2010). Обнаруживается трехмерная невязкая неустойчивость, возникающая независимо от направления потока и мало зависящая от вращения на выходе потока. Наиболее опасной модой такой неустойчивости оказывается плоская азимутальная волна. При этом оказывается, что малый радиальный поток любого направления дестабилизирует даже безвихревое вращение жидкости при любой толщине зазора.

Ключевые слова: течение Куэтта — Тэйлора, радиальный поток, невязкая неустойчивость.

1. Постановка задачи и уравнения движения

Пусть вязкая несжимаемая и однородная жидкость прокачивается сквозь зазор между двумя соосными проницаемыми пористыми цилиндрами, вращающимися с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 , причем расход жидкости равен $2\pi Q$. Тот цилиндр, через который жидкость *вводится (выводится)* назовем *входом (выходом)*. Если вход лежит внутри выхода, то течение сходящееся (иначе говоря, сток), в противном случае — расходящееся (иначе говоря, источник).

Уравнения движения жидкости — уравнения Навье — Стокса — запишем в безразмерной форме в цилиндрических координатах r, θ, z :

$$u_t + uu_r + \frac{vu_\theta}{r} + wu_z - \frac{v^2}{r} = -p_r + \nu \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} v_\theta \right), \quad (1)$$

$$v_t + uv_r + \frac{vv_\theta}{r} + wv_z + \frac{uv}{r} = -\frac{p_\theta}{r} + \nu \left(\Delta v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} u_\theta \right), \quad (2)$$

¹Исследования, составляющие вклад А. Моргулиса в данную публикацию, выполнялись в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности, задание № 1.1398.2014/К.

$$w_t + uw_r + \frac{vw_\theta}{r} + ww_z = -p_z + \nu \Delta w, \quad (3)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

$$\frac{1}{r} (ru)_r + \frac{1}{r} v_\theta + w_z = 0, \quad (4)$$

где u, v, w — радиальная, азимутальная и осевая скорости, соответственно, p — давление, $\nu = \text{Re}^{-1}$, $\text{Re} = Q/\nu_0$ — число Рейнольдса (ν_0 — кинематическая вязкость). Безразмерная форма граничных условий на граничных цилиндрах примет вид

$$u|_{r=1} = \beta, \quad u|_{r=a} = \frac{\beta}{a}, \quad (5)$$

$$v|_{r=1} = \gamma_1, \quad v|_{r=a} = \frac{\gamma_2}{a}, \quad w|_{r=1,a} = 0,$$

$a = r_2/r_1$, $r_1 < r_2$ — размерные радиусы цилиндров, $\gamma_{1,2} = \Omega_{1,2} r_{1,2}^2 / Q$, и $\beta = \pm 1$ — указатель направления потока: знак «+» соответствует источнику, «−» — стоку. Поставим еще условие периодичности поля скорости вдоль оси цилиндров:

$$(u, v, w)(\cdot, z) = (u, v, w)(\cdot, z + L);$$

$$\int_1^a \int_0^{2\pi} w(\cdot, z) r dr d\theta = 0. \quad (6)$$

Интегральное условие в (6) равносильно требованию нулевого расхода жидкости через любое сечение зазора. Такое требование не умаляет общности рассуждений ввиду возможности перехода в систему отсчета, равномернодвигающуюся параллельно оси цилиндров.

2. Основное течение

Рассмотрим вопрос о стационарном решении задачи (1)–(5), обладающем трансляционной и вращательной симметриями. Такое решение может быть найдено явно:

$$u = \frac{\beta}{r}, \quad v = V(r) = \frac{r^{\beta \text{Re} + 1} (\gamma_2 - \gamma_1)}{a^{\beta \text{Re} + 2} - 1} + \frac{a^{\beta \text{Re} + 2} \gamma_1 - \gamma_2}{r(a^{\beta \text{Re} + 2} - 1)}, \quad (7)$$

$$\text{Re} = \frac{1}{\nu}, \quad p = P(r) = \frac{\nu\beta - 1}{2r^2} + \int \frac{V^2 dr}{r}.$$

Семейство (7)² при $\nu \rightarrow +0$ имеет поточечный предел

$$u = \frac{\beta}{r}, \quad v = V_0(r) = \frac{\gamma_{in}}{r}, \quad w = 0, \quad (8)$$

где γ_{in} — азимутальная скорость, создаваемая вращением входа так, что $\gamma_{in} = \gamma_1$ в случае источника, $\gamma_{in} = \gamma_2$ в случае стока. Предельное поле (8) представляет собой решение уравнений Эйлера идеальной (невязкой) жидкости, которые формально совпадают с (1)–(4) при $\nu = 0$, и описывает плоское безвихревое³ течение, которое, очевидно, удовлетворяет всем граничным условиям на входе, но лишь граничному условию для нормальной скорости на выходе. Таким образом, сходимость течений (7) к (8) при $\nu \rightarrow +0$ неравномерна, а отклонения сосредоточены вблизи выхода, где образуется пограничный слой. Учет последнего приводит к равномерному приближению

$$V(r) = \frac{\gamma_{in}}{r} + \frac{\beta(\gamma_2 - \gamma_1)e^{-\eta}}{a^{\frac{1+\beta}{2}}} \left[1 - \beta\nu \left(\eta + \frac{\eta^2}{2} \right) + O(\nu^2) \right], \quad \nu \rightarrow 0, \quad (9)$$

где $\eta = \text{Re } \beta(1 - ra^{-\frac{1+\beta}{2}})$, $\beta = \pm 1$. Равномерность приближения (9) при больших Re видна из рис. 1.

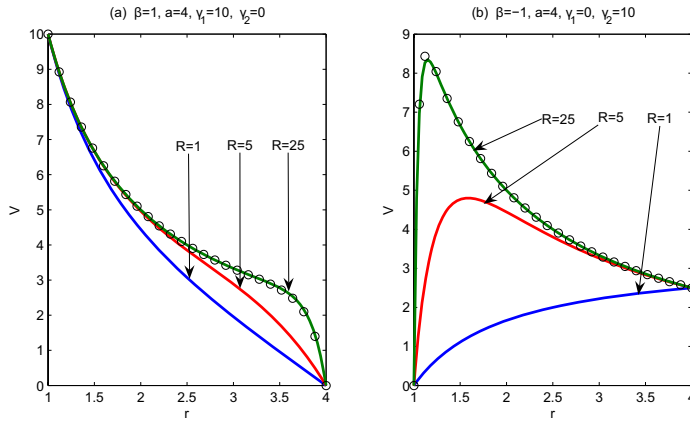


Рис. 1. Профили угловой скорости при $a = 4$ и $\text{Re} = R = 1, 5, 25$.
(a) — источник, (b) — сток. Крестики соответствуют приближению (9).

²Указанные выражения непригодны при $\beta \text{Re} \neq -2$; тем не менее, они определяют продолжение трансляционно-вращательно симметричного решения при $\beta = -1$ в точку $\text{Re} = 2$, и продолженное таким образом семейство оказывается гладким.

³Оператор rot аннулирует поле (8).

Вихрь поля (7) всюду параллелен оси цилиндров, и его проекция на эту ось определяет скаляр $\Omega(r) = r^{-1}(rV(r))_r$. Вихрь, очевидно, сосредоточен в пограничном слое, причем

$$\Omega(r) = \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)e^{-\eta}}{\nu a^{1+\beta}} \left[1 + \beta\nu \left(2 - \frac{\eta^2}{2} \right) + O(\nu^2) \right], \quad \nu \rightarrow 0. \quad (10)$$

3. Спектральная задача устойчивости

Исследуем устойчивость течений (7) по линейному приближению. С этой целью перепишем систему (1)–(5) в виде уравнения возмущений, полагая $(u, v, w, p) = (\beta r^{-1} + \tilde{u}, V(r) + \tilde{v}, \tilde{w}, P(r) + \tilde{p})$, где возмущения $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p})$ имеют вид

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p})(r, \theta, z, t) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p})(r) \exp(i(ct + kz + n\theta)), \quad (11)$$

где $k = 2\pi m/L$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{C}$. Таким образом, основное течение (7) возмущается наложением спиральных волн, бегущих вдоль оси цилиндров. Отбросив члены, нелинейные по возмущениям, получим линейную систему — линейризацию системы (1)–(5) на основном режиме (7). Ввиду вращательной и трансляционной инвариантности задачи, можно ограничиться рассмотрением решений линейризованной системы, представимых в виде (11). Таким образом, дело сводится к задаче на собственные значения

$$D_\lambda \hat{u} - r^{-2} \beta \hat{u} - 2Vr^{-1} \hat{v} = -\hat{p}_r + \nu (L\hat{u} - r^{-2}(\hat{u} + 2in\hat{v})), \quad (12)$$

$$D_\lambda \hat{v} + \beta r^{-2} \hat{v} + \Omega \hat{u} = -inr^{-1} \hat{p} + \nu (L\hat{v} - r^{-2}(\hat{v} - 2in\hat{u})), \quad (13)$$

$$D_\lambda \hat{w} = ik\hat{p} + \nu L\hat{w}; \quad (r\hat{u})_r + in\hat{v} + ik\hat{w} = 0; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}(1) = 0, \quad \hat{u}(a) = 0, \quad \hat{v}(1) = 0, \quad \hat{v}(a) = 0, \quad \hat{w}(1) = 0, \quad \hat{w}(a) = 0; \\ \lambda = ic, \quad D_\lambda = \lambda + \frac{inV + \beta \partial_r}{r}; \quad L = r^{-1} \partial_r r \partial_r - ((n/r)^2 + k^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Если для всех n, k все собственные значения λ лежат в открытой левой полуплоскости, то все возмущения (11) затухают, и можно говорить об устойчивости течения (15), если же имеется собственное значение в правой полуплоскости, то соответствующее возмущение возрастает, и можно говорить о неустойчивости.⁴ Пространство параметров Re , a , $\gamma_{1,2}$ разделяется на устойчивую и неустойчивую области некоторым «подмногообразием» критических значений параметров, каждой точке которого соответствует обращение в нуль $\text{Re } \lambda$ для собственного значения λ одной из задач (12)–(15).

4. Невязкий предел

Gallet, Doering и Spiegel [1] исследовали устойчивость стоков в зазорах небольшой ширины $a \lesssim 1.25$ относительно плоских возмущений, предполагая, что выход неподвижен, и численно обнаружили, что такое течение неустойчиво, если вход вращается достаточно быстро и расход жидкости не слишком велик. В частности, было отмечено, что введение малого радиального потока способно дестабилизировать. Наиболее подробно в [1] был рассмотрен предел узкого зазора, точнее два различных предела, которые в принятой нами нормировке выглядят так: $\gamma_1 = 0$, $a - 1 \sim \sqrt{\nu}$, $\gamma_{in} = \gamma_2 \sim \text{Re}$ или $\gamma_{in} = \gamma_2 \sim \text{Re}^2$, $\text{Re} \rightarrow \infty$. В настоящем сообщении мы развиваем результаты [1], в частности, включаем в рассмотрение произвольные течения вида (7), исследуем трехмерные моды и устраняем ограничение узкого зазора. Важную роль при этом играет предел $\text{Re} \rightarrow \infty$, где, в отличие от [1], остальные параметры фиксированы.

Невязкий ($\nu \rightarrow +0$) предел систем (12)–(15) и (1)–(5) — сингулярный, так как на малый параметр умножаются старшие производные. Следовательно, в пределе должны быть отброшены какие-то из граничных условий (15). Общие результаты [2–4] подсказывают, что отбросить следует граничное условие для тангенциальной скорости на выходе. Таким образом, в пределе имеем уравнение Эйлера и следующие граничные условия: на входе задается полный вектор скорости (как и в (5)), а на выходе — лишь нормальная скорость. Таким образом, невязкая спектральная задача состоит из уравнений (12)–(14),

⁴Указанный способ исследования устойчивости — метод линеаризации — обоснован при любом $\nu > 0$, см. [12].

где следует положить $\nu = 0$, и граничных условий

$$\hat{u}(r_+) = 0, \quad \hat{u}(r_-) = 0, \quad \hat{v}(r_+) = 0, \quad \hat{w}(r_+) = 0, \quad (16)$$

где r_+ , r_- — радиусы входа и выхода, соответственно. Поставленная задача представляет собой линеаризацию уравнений Эйлера на невязком течении (8).

Указанная линеаризация рассматривалась в статье [5] в контексте более общей теории; в частности, было отмечено, что спектр невязкой задачи (при $n^2 + k^2 \neq 0$)⁵ совпадает с множеством нулей целой функции, представленной интегралом Лапласа; обозначим это множество через $\Lambda(n, k, \gamma, a)$, где $\gamma = n\gamma_{in}$.

Теорема 1. Пусть $\Lambda(n, k, \gamma, a) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\} \neq \emptyset$. Тогда $\gamma \neq 0$.

◁ Ограничимся случаем источника. Тогда $\Lambda(n, k, \gamma, a)$ — множество нулей интеграла

$$\kappa_{n,k,\Gamma,a}(\lambda) = -K_{k,n,a}^{-1}(1) \int_1^a r^{-i\gamma} e^{-\lambda(r^2-1)/2} K'_{k,n,a}(r) r^2 dr, \quad \gamma = n\gamma_1. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} r^2 K_{rr} + r K_r - (n^2 + r^2 k^2) K &= 0; \\ K(a) &= 1; \quad K_r(a) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Положив $\gamma = 0$, применим теорему По́йа о нулях интегралов Лапласа (см., например, [6]) к интегралам вида

$$\int_1^a e^{-\lambda(r^2-1)/2} (-r K_r) r dr, \quad K = K_{k,n,a}.$$

С целью сделать это, убедимся, что

$$\forall r \in (1, a) \quad (\text{i}) \quad K_r(r) < 0; \quad (\text{ii}) \quad (r K_r(r))_r > 0.$$

В силу задачи Коши (18),

$$\int_s^a (k^2 r + n^2/r) K^2 dr = -K(s) K_r(s) - \int_s^a K_r^2 r dr,$$

$$\forall s : 1 \leq s < a.$$

⁵При $n = k = 0$ спектр невязкой задачи пуст; соответствующая плоская осесимметричная мода вида (11) затухает за конечное время, а при положительной вязкости — затухает экспоненциально. Сказанное проверяется непосредственно.

Следовательно, $K(s)K_r(s) \neq 0$ при $s \in [1, a)$. Таким образом,

$$K(r) > 0, \quad \forall r \in (1, a).$$

Теперь (ii) следует непосредственно из уравнения (18). Далее, по доказанному, $K(r)$ строго монотонна на $(1, a)$, и, как видно из (18), имеет локальный минимум в точке a . Отсюда (i). $\triangleright$

В силу теоремы 1, во первых, невязкое течение без закрутки ($\gamma_{in} = 0$) устойчиво; во вторых, мода неустойчивости (11) может быть только неосесимметричной ($n \neq 0$).

Далее обсуждаются критические поверхности в пространстве параметров γ_{in}, k, a при различных значениях n . При этом, ради краткости, подробно разбирается только случай источника, где $\gamma_{in} = \gamma_1$, $\gamma_{out} = \gamma_2$. В случае стока ($\gamma_{in} = \gamma_2$, $\gamma_{out} = \gamma_1$) существенных отличий структуры критических поверхностей от случая источника не обнаружено.

Критические поверхности в пространстве параметров γ_1, k, a при каждом $n = 1, \dots, 20$ исследовались численно в диапазоне аргументов $0 < k \leq 30$, $1.25 \leq a \leq 10$. Оказалось, что они представляют собой графики функций $\gamma_1 = \Gamma_n(k, a)$.

Каждой точке критической поверхности $\gamma_1 = \Gamma_n(k, a)$ соответствует осциллирующая нейтральная мода (11), где $\lambda = ic_n$, $c_n \in \mathbb{R} \setminus 0$, т. е. имеет место *колебательная неустойчивость*. Критические значения *монотонной неустойчивости* ($c_n = 0$) не были обнаружены. Расчет $\Gamma_*(k, a) = \min_n \Gamma_n(k, a)$ показал, что

$$\min_k \min_n \Gamma_n(k, a) = \min_k \Gamma_*(k, a) = \Gamma_*(0, a) > 0, \quad \forall a > 1. \quad (19)$$

Отсюда видно, что при $\gamma_1 > \Gamma_*(0, a) > 0$ во всяком случае неустойчива плоская азимутальная волна (трансляционно-симметричная мода (11) с $k = 0$), которая, таким образом, при постепенном усилении вращения дестабилизируется первой, по крайней мере, в рассмотренном диапазоне параметров (см. рис. 2).

Заметим, что безвихревое вращение жидкости без радиального потока (поле (8) с $\beta = 0$) устойчиво. Тем не менее, из сказанного следует, что наложение на это вращение сколь угодно слабого радиального потока приводит к неустойчивому течению.

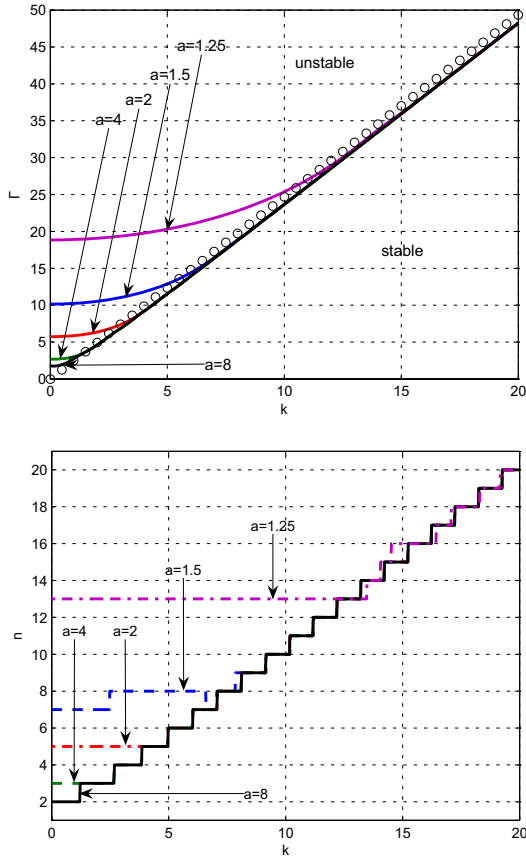


Рис. 2. Вверху: кривые $\gamma_1 = \Gamma_*(k, a) = \min_n \Gamma_n(k, a)$; $n = 1, \dots, 20$, $a = 1.25, 1.5, 2, 4, 8$. Внизу: распределение целых чисел $n = n_*(k, a)$, минимизирующих $\Gamma_n(k, a)$. Точкам скачка n_* соответствуют пересечения критических поверхностей $\Gamma = \Gamma_n(k, a)$, где значения n соответствуют предельным значениям n_* в точке скачка.

5. Конечные значения Re

Из результатов [8, 9] вытекает, что собственные числа невязкой задачи с граничным условием (16) действительно представляют собой пределы собственных значений задачи (12)–(15) при $\nu \rightarrow +0$, и вязкие поправки могут быть вычислены методом Вишика — Лю-

стерника с точностью до любой степени ν . Отсюда в частности следует, что все сказанное в конце предыдущего раздела о невязкой неустойчивости остается в силе, если $\text{Re} \gg 1$ и $\text{Re} \ll |\gamma_{in} - \gamma_{out}|$; именно, осесимметричные моды всегда устойчивы, в широком диапазоне k, a, γ_{in} неустойчивость всегда колебательная и плоская азимутальная волна дестабилизируется первой, и при этом вся картина неустойчивости слабо зависит от вращения выхода. Указанные особенности существенно отличают невязкую неустойчивость от хорошо известной неустойчивости Тэйлора — Куэтта, где мода неустойчивости трехмерна, а при однонаправленном вращении цилиндров — осесимметрична, и характер неустойчивости существенно зависит от вращения обоих цилиндров (см. ссылки в работах [8–10]).

Далее ограничимся обсуждением плоской неустойчивости ($k = 0$) в случае источника. В случае стока, результаты, как уже говорилось, качественно аналогичны.

Последней соответствуют критические кривые, группирующиеся слева, а первой — справа. Видно, что обе группы очень сильно разнесены по $\Delta\gamma$. Следующие далее утверждения относятся лишь к левой части рис. 3 и, таким образом, верны лишь в той части пространства параметров, где $\Delta\gamma \gg \text{Re}$. Последнее ограничение в дальнейшем не оговаривается.

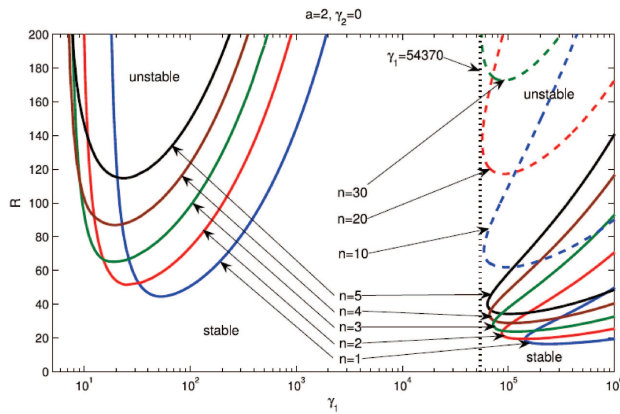


Рис. 3. Критические кривые невязкой (слева) и погранслойной (справа) неустойчивости. Источник, $a = 2$, $k = 0$. Пунктир проектируется в точку $\Delta\gamma = 54370$. Области устойчивости обозначены словом «stable», а области неустойчивости — словом «unstable».

Критические кривые на плоскости γ_1, Re показаны на рис. 4. Обнаруженная неустойчивость во всех случаях была колебательной. Видно, что область устойчивости течения на плоскости (γ_1, Re) всегда включает полосу $0 < \gamma_1 < \Gamma_*^0(a) = \Gamma_*(0, a)$. Как уже отмечалось, значения $\Gamma_*(k, a)$ определяются невязкой задачей и не зависят от скорости вращения выхода. В частности, все моды устойчивы, если на входе потока задана нулевая азимутальная скорость, каковы бы ни были при этом значения прочих параметров.

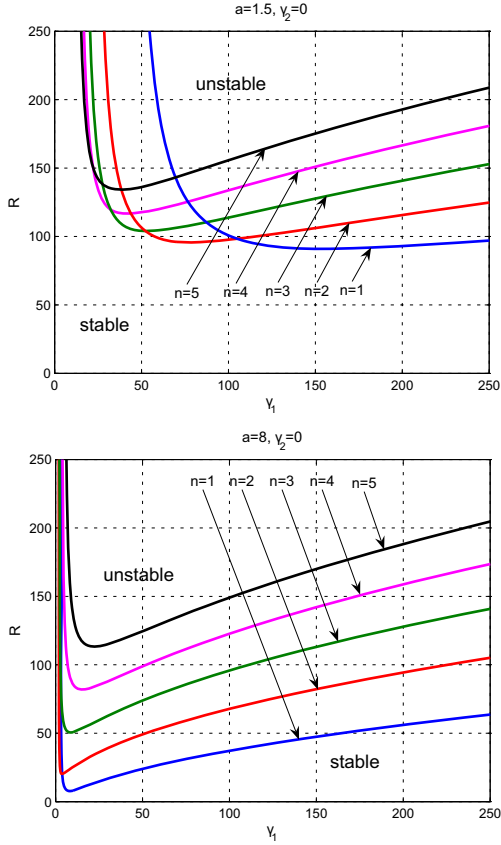


Рис. 4. Критические кривые невязкой неустойчивости $\text{Re} = R_n(\gamma_1, \cdot)$ ($R = \text{Re}$). Источник, $\gamma_1 = \gamma_1, \gamma_{out} = \gamma_2 = 0, n = 1, \dots, 5$; сверху $a = 1.25$, внизу $a = 8$. Области устойчивости обозначены словом «stable», а области неустойчивости — словом «unstable».

Области устойчивости расходящегося (сходящегося) потока включают также горизонтальные полосы $0 < R < R_{**}(a) = \min_{\gamma_1} R_*(a, \gamma_1)$, где $R_* = \min_n R_n(a, \gamma_1)$. Заметим, что с ростом ширины зазора a (при фиксированном γ_1) значения $R_{**}(a)$ убывают. Горизонтальные прямые, лежащие выше $R_{**}(a)$, пересекают хотя бы одну критическую кривую $R = R_n(\gamma_1, a)$ в двух точках. Обозначим их абсциссы $\gamma_1^-(n, a)$, $\gamma_1^+(n, a)$. Таким образом, мода с волновым числом n устойчива при $\gamma_1 < \gamma_1^-(n, a)$, неустойчива при $\gamma_1^-(n, a) < \gamma_1 < \gamma_1^+(n, a)$, и снова устойчива при $\gamma_1 > \gamma_1^+(n, a)$.

Азимутальное волновое число n , минимизирующее R_n , обозначается n_* , а соответствующая мода называется наиболее неустойчивой. Зависимости $n_*(\gamma_1)$ показаны на рис. 5.

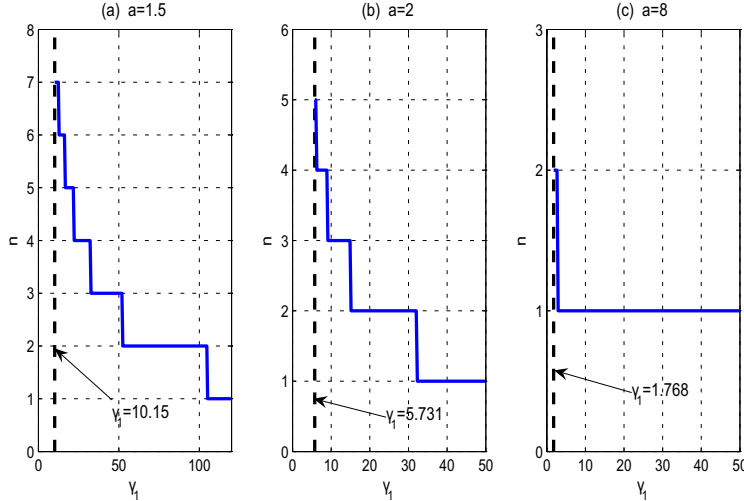


Рис. 5. Распределение азимутальных волновых чисел наиболее опасных мод $n_*^+ = n_*(\gamma_1, \cdot)$ при $\gamma_{out} = 0$. Источник, $a = 1, 5$ слева, $a = 2$ посередине, $a = 8$ справа.

Штрихованные прямые проектируются в точку $\Gamma_*^0(a)$. Скачкам $n_*(\gamma_1, \cdot)$ соответствуют точки пересечения критических кривых $\text{Re} = R_n(\gamma_1, a)$. Числа $n_*^\pm$ убывают с увеличением γ_1 и возрастают при $\gamma_1 \rightarrow \Gamma_*^0(a)$. С ростом ширины зазора расширяются интервалы оси γ_1 , на которых принимаются меньшие значения n_* ; при этом рост n_* сосредоточивается в правой полуокрестности $\Gamma_*^0(a)$.

Таким образом, вращательно-симметричный режим течения при малой циркуляции ($\gamma_{in} < \gamma_{in}^*$) устойчив при любом расходе. При до-

статочной большой циркуляции ($\gamma_{in} > \gamma_{in}^*$) увеличение расхода всегда влечет неустойчивость, причем волновое число неустойчивой моды существенно зависит от γ_{in} . Вместе с тем, можно стабилизировать вращательно-симметричный поток, зафиксировав расход и увеличив циркуляцию.

6. Короткие волны

Рис. 2 наводит на мысль о существовании пределов $k^{-1}\Gamma_*(k, a)$ и $k^{-1}n_*(k, a)$ при $k \rightarrow \infty$ с предельными значениями, не зависящими от a . В данном разделе мы обосновываем сказанное, ограничиваясь, как и ранее, случаем источника. В случае стока имеют место аналогичные предельные равенства, но с заменой k на ak .

Пусть при некоторых $k > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ невязкая задача ($\nu = 0$ в (12)–(14) и граничные условия (16)) имеет собственное значение σ , которому соответствует тройка собственных функций $(u, v, w)(r)$. Пусть $\mathbf{v}$ — векторное поле, заданное в цилиндрических координатах (r, θ, z) компонентами $(u, v, w)(r)e^{\sigma t + i(n\theta + kz)}$ и определяемое ей векторное поле (11). Перейдя к уравнению относительно $\text{rot } \mathbf{v}$, проинтегрировав его, и воспользовавшись условием несжимаемости (2-е уравнение в (14)), получим краевую задачу

$$\left(\sigma + \frac{in\gamma}{r^2} + \frac{\beta}{r} \partial_r \right) \frac{\left(\frac{rH_r}{n^2 + k^2 r^2} \right)_r - \frac{H}{r}}{r} = 0, \quad H(r) = ru(r); \quad (20)$$

$$r \in (1, a), \quad H(1) = 0, \quad H(a) = 0, \quad H_r(1) = 0, \quad (21)$$

где последнее из граничных условий также вытекает из несжимаемости.

В уравнении (20) положим

$$n = \alpha k, \quad \gamma = \tilde{\gamma} k, \quad \sigma = -i\tilde{\gamma}\alpha k^2 + \tilde{\sigma} k, \quad (22)$$

где $\tilde{\gamma} > 0$, $\tilde{\sigma} \in \mathbb{C}$, $\alpha > 0$ не зависят от k . Нас интересует асимптотика $k \rightarrow \infty$. В указанном пределе уравнение (20) принимает вид $(1 - r^2)H(r) = 0$, $r \in (1, a)$, а потому собственные функции должны быть сосредоточены в тонком слое вблизи $r = 1$ (см. рис. 6).

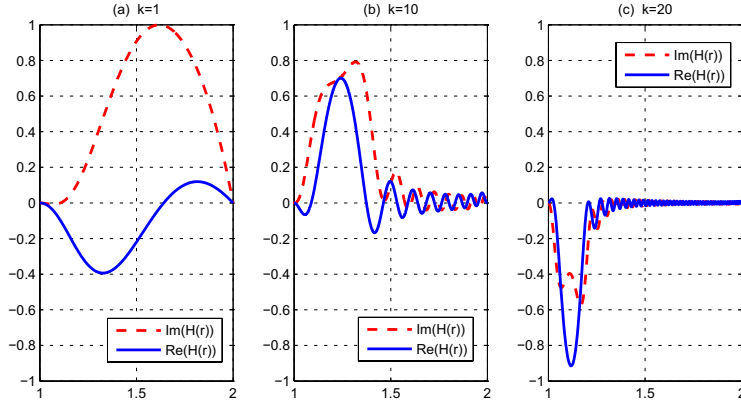


Рис. 6. Поведение собственной функции $H = ru$ с ростом k , $a = 2$, невязкая задача.

Раздвиг этот слой, приходим к задаче

$$(\tilde{\sigma} - 2i\tilde{\gamma}\alpha\xi + \partial_\xi)(H_{\xi\xi}(\xi) - \mu^2 H(\xi)) = 0, \quad \xi = k(r-1) \in (0, \infty); \quad (23)$$

$$H(0) = 0, \quad H_\xi(0) = 0, \quad H(\infty) = 0; \quad \mu^2 = 1 + \alpha^2. \quad (24)$$

Пусть $\operatorname{Re} \tilde{\sigma} > 0$. Найдем решение уравнения (23), удовлетворяющее 1-му и 3-му граничным условиям из (24), и подставим во 2-е. В результате получим уравнение относительно $\tilde{\sigma}$:

$$\int_0^\infty e^{-\tilde{\sigma}s + i\tilde{\gamma}\alpha s^2} e^{-\mu s} ds = 0, \quad \operatorname{Re} \tilde{\sigma} > 0. \quad (25)$$

Теперь развернем контур интегрирования, полагая $s = re^{i\pi/4}$, $r \in (0, \infty)$, и затем устремим $\operatorname{Re} \tilde{\sigma} \rightarrow +0$ и, после подходящего растяжения переменной интегрирования, получим уравнение

$$\int_0^\infty \exp(-\gamma_* \zeta^2 - e^{i\pi/4}(ic_* + \sqrt{2})\zeta) d\zeta = 0, \quad (26)$$

где

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma_* \mu^2}{2\alpha}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{i\mu c_*}{\sqrt{2}}, \quad c_* \in \mathbb{R}, \quad \mu = \sqrt{1 + \alpha^2}, \quad \alpha > 0.$$

Заметим, что уравнение (26) не зависит от α , поэтому $\min_{\alpha} \tilde{\gamma}(\alpha) = \gamma_*$, и этому минимуму соответствует $\tilde{\sigma} = ic_*$. Вычисление решений $\gamma_* > 0$ и $c_* > 0$ уравнения (26) дает

$$\min_{\alpha} \tilde{\gamma}_{cr}(\alpha) = \gamma_* \approx 2.4671, \quad \tilde{\sigma} = ic_* \approx 7.4331i.$$

Зависимость $\Gamma_*(a, k) = 2.4671k$ соответствует кружкам на рис. 2.

Литература

1. Gallet B., Doering C. R., Spiegel E. A. Destabilizing Taylor–Couette flow with suction // Phys. Fluids.—2010.—Vol. 22, № 3.—034105.
2. Алексеенко С. Н. Существование и асимптотическое представление слабых решений задачи протекания с условием регулярного проскальзывания вдоль твердых стенок // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 2.—С. 235–257.
3. Temam R., Wang X. Boundary Layers Associated with Incompressible Navier–Stokes Equations: The Noncharacteristic Boundary Case // J. Dif. Eq.—2002.—Vol. 179.—P. 647–686.
4. Ilin K. Viscous boundary layers in flows through a domain with permeable boundary // Eur. J. Mech. B/Fluids.—2008.—Vol. 27.—P. 514–538.
5. Ильин К. И., Моргулис А. Б. О спектрах открытых течений идеальной жидкости в кольцевых областях // Мат. форум. Т. 8, ч. 2. Исслед. по дифференц. уравнениям, мат. моделированию и проблемам мат. образования.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 112–124.—(Итоги науки. Юг России).
6. Седлецкий А. М. О нулях преобразований Лапласа // Мат. заметки.—2004.—Т. 76, № 6.—С. 883–892.
7. Ilin K., Morgulis A. Instability of an inviscid flow between rotating porous cylinders with radial flow to three-dimensional perturbations.—arXiv:1502.03600v2 [physics.flu-dyn].
8. Ilin K., Morgulis A. Instability of a viscous flow between rotating porous cylinders with radial flow.—arXiv:1312.2594v1 [physics.flu-dyn].
9. Ilin K., Morgulis A. Instability of a two-dimensional viscous flow in an annulus with permeable walls to two-dimensional perturbations // Phys. Fluids.—2015.—Vol. 27.—044107; doi: 10.1063/1.3599507.
10. Hughes T. H., Reid W. H. On the stability of the asymptotic suction boundary-layer profile // J. Fluid Mech.—1965.—Vol. 23, № 4.—P. 715–735.
11. Hocking L. M. Non-linear instability of the asymptotic suction velocity profile // Q. J. Mech. Appl. Math.—1975.—Vol. 28, № 3.—P. 341–353.
12. Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости.—Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1984.—191 с.

Ильин Константин Иванович
The University of York
Heslington, York, YO10 5DD, United Kingdom
E-mail: konstantin.ilin@york.ac.uk

Моргулис Андрей Борисович
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344099, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: morgulisandrey@gmail.com

STABILITY AND INSTABILITY OF INCOMPRESSIBLE FLUID FLOWS THROUGH A GAP BETWEEN PERMEABLE CYLINDERS

Ильин К. И., Моргулис А. Б.

We discuss the stability issues for the kind of Taylor-Couette flow with radial crossflow. The radial Reynolds number is supposed to be high. We improve and generalize known results Gallet, Doering and Spiegel (2010). We discover 3D instability which occurrence is independent of the crossflow direction and depends weakly on the outlet rotation. It turns out that the plane azimuthal wave is the most dangerous mode of the instability. Moreover, the adding of weak radial flow of any direction to even purely circulatory flow with no vorticity is capable of destabilizing irrespective of the gap width.

Key words: Taylor — Couette flow, radial crossflow, inviscid instability.

УСЛОВИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ НА ГРАФЕ-ПУЧКЕ

Р. Ч. Кулаев

Работа посвящена изучению условий положительности функции Грина краевой задачи для уравнения четвертого порядка на графе с одной узловой вершиной. Получен критерий положительности функции Грина.

Ключевые слова: граф, дифференциальное уравнение на графе, функция Грина.

В настоящей работе рассматривается краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка на геометрическом графе, возникающей при моделировании стержневых конструкций. Изучается вопрос о положительности соответствующей функции Грина. Вопросы, связанные с функцией Грина для уравнений четвертого порядка на графах уже затрагивались ранее. Был получен ряд общих результатов для уравнений на графах четвертого (и большего) порядка для которых вид краевых условий и условий связи в узлах не играет ключевой роли. Здесь можно отметить такие вопросы как существование, построение, непрерывность функции Грина [1, 2]. Что касается исследований качественных свойств решений, то основные результаты здесь относятся к моделям упруго-шарнирно сочлененных стержней. В работах [3–6] установлена положительная обратимость краевой задачи и положительность ее функции Грина. Более общая задача рассмотрена в монографии [1, гл. 8], где изучены вопросы разрешимости, установлен принцип максимума для уравнения четвертого порядка на основе которого доказана положительность функции Грина краевой задачи.

В центре внимания настоящей работы модель конструкции из жестко соединенных стержней. В случае условий жесткого сочленения стержней принцип максимума уже не выполняется и методы перечисленных выше работ не применимы. Для такой задачи нами будут сформулированы необходимое и достаточное условия положительности функции Грина краевой задачи для случая, когда граф

является пучком, т. е. имеет единственную узловую вершину. Анализ свойств функции Грина базируется на результатах работ автора [7, 8], согласно которым краевую задачу можно локализовать и свести ее к самостоятельным краевым задачам на ребрах графа со специальными краевыми условиями.

1. Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается граф-пучок $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, состоящий из конечного (но не меньшего трех) числа ребер (интервалов) $\gamma_i = (a_i, b)$ с одной внутренней вершиной b . Множество вершин $\{a_i\}$ образует границу графа Γ , которую мы обозначим $\partial\Gamma$, а множество индексов всех ребер, примыкающих к вершине b обозначим через $I(b)$. Мы считаем, что граф Γ — это связное объединение множества всех его ребер γ_i вместе с внутренней вершиной b . При этом граничные вершины a_i в граф не входят.

Под функцией на графе понимается отображение $u : \bigcup_i \gamma_i \rightarrow \mathbb{R}$. Во внутренней точке b функция не определяется.

Через $u_i(x)$ будем обозначать сужение функции $u(x)$ на ребро γ_i . Через $C[\Gamma]$ будем обозначать пространство функций, равномерно непрерывных на каждом ребре графа Γ . Если a — произвольная вершина (граничная или внутренняя) графа Γ и γ_i — примыкающее к ней ребро, то для функции $u(x) \in C[\Gamma]$ под $u_i(a)$ понимается $\lim_{x \rightarrow a} u_i(x)$, $x \in \gamma_i$.

Введем в рассмотрение функцию $\tau(x) \in C[\Gamma]$ взаимно однозначно отображающую каждое ребро γ_i на некоторый интервал $(0, d_i)$ при $d_i > 0$. Функцию $\tau(x)$ будем называть метрической. Для сужения функции $\tau(x)$ на ребро γ_i существует обратное отображение $x(\tau)$ интервала $(0, d_i)$ на ребро γ_i . Функцию $u(x)$ назовем дифференцируемой на графе Γ , если для каждого ребра γ_i дифференцируема по переменной τ суперпозиция $u_i(x(\tau))$. При этом полагаем $u'_i(x) = \frac{du_i(x(\tau))}{d\tau}$. Метрическая функция позволяет ввести для точек, принадлежащих одному ребру графа, отношение порядка, а также понятие окрестности для точки ребра или граничной вершины графа. Именно, для $x_1, x_2 \in \bar{\gamma}_i \subset \bar{\Gamma}$ будем писать $x_1 < x_2$, если $\tau_i(x_1) < \tau_i(x_2)$. Множество всех точек ребра γ_i , для которых $|\tau_i(x) - \tau_i(x_0)| < \varepsilon$ назовем ε -окрестностью точки $x_0 \in \gamma_i \cup a_i$.

Обозначим через $C^n[\Gamma]$ пространство функций имеющих на каждом ребре графа равномерно непрерывные производные до n -го порядка включительно.

Нами будет рассматриваться краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка на графе, записываемого в виде

$$Lu = F(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1)$$

дополненного граничными условиями

$$u(a_i) = 0, \quad \beta(a_i)u''(a_i) - \vartheta(a_i)u'(a_i) = 0, \quad a_i \in \partial\Gamma. \quad (2)$$

При этом, под дифференциальным уравнением (1) на графе мы подразумеваем, следуя [1], набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа и набор условий согласования во внутренней вершине:

- на ребрах графа уравнение порождается совокупностью дифференциальных уравнений

$$(p_i(x)u_i'')' - (q_i(x)u_i')' = f_i(x), \quad x \in \gamma_i \subset \Gamma,$$

с коэффициентами, определяемыми функциями $p(x) \in C^2[\Gamma]$, $\inf_{x \in \bigcup_i \gamma_i} p(x) > 0$, $q(x) \in C^1[\Gamma]$, $q(x) \geq 0$ на Γ , $f(x) \in C[\Gamma]$;

- во внутренней вершине b уравнение задается условиями непрерывности

$$u_i(b) = u_j(b), \quad i, j \in I(b),$$

условиями гладкого согласования

$$u_i'(b) = \alpha_{ji}u_j'(b) + \alpha_{ki}u_k'(b), \quad (3)$$

где k, j — фиксированные (базисные) индексы из $I(b)$, $i \in I(b) \setminus \{k, j\}$, и условиями на старшие производные

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I(b) \setminus \{k, j\}} p_i(b)\alpha_{ji}u_i''(b) + p_j(b)u_j''(b) &= 0, \\ \sum_{i \in I(b) \setminus \{k, j\}} p_i(b)\alpha_{ki}u_i''(b) + p_k(b)u_k''(b) &= 0, \\ \sum_{i \in I(b)} D^3 u_i(b) &= f(b). \end{aligned} \quad (4)$$

При этом полагаем, что все производные считаются в направлении к внутренней вершине b графа, а в (4) через $D^3 u$ обозначена третья квазипроизводная $(p(x)u'')' - q(x)u'$, $f(b)$ — заданное число.

Таким образом, левая часть Lu уравнения (1) — это левые части уравнений на ребрах вместе с условиями непрерывности, условиями для первых и вторых производных, а также левыми частями условий с третьими производными, а правая часть

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in \Gamma \setminus b; \\ f(x), & \text{если } x = b. \end{cases}$$

Решением дифференциального уравнения (1) будем называть всякую функцию $u(x) \in C^4[\Gamma]$, удовлетворяющую на каждом ребре графа соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению, а во внутренней вершине — условиям непрерывности и (3), (4).

При таком подходе можно считать, что функция Грина $G(x, s)$ краевой задачи (1), (2) при каждом фиксированном $s \in \Gamma$ является решением уравнения (1) с правой частью сосредоточенной в точке s

$$Lu = \delta(x - s), \quad x \in \Gamma.$$

Под интегралом функции $u(x) \in C[\Gamma]$ по графу Γ понимаем сумму интегралов по всем ребрам графа, т. е.

$$\int_{\Gamma} u(x) dx = \sum_{\gamma_i \subset \Gamma} \int_{\gamma_i} u_i(x) dx = \sum_{\gamma_i \subset \Gamma} \int_0^{d_i} u(x(\tau_i)) d\tau_i(x).$$

При исследовании краевой задачи (1), (2) мы будем предполагать, что выполнены следующие условия:

- $p \in C^2[\Gamma]$, $\inf_{x \in \Gamma} p(x) > 0$, $q \in C^1[\Gamma]$, $q \geq 0$ на Γ , $f \in C[\Gamma]$;
- $\vartheta(a_i)$, $\beta(a_i) \geq 0$, $\alpha(a_i) + \beta(a_i) \neq 0$ для каждой вершины $a_i \in \partial\Gamma$;
- для каждого индекса $i \in I(b) \setminus \{j, k\}$ в условиях (3) хотя бы одна из констант α_{ji} , α_{ki} отлична от нуля;
- для некоторого индекса $i \in I(b) \setminus \{j, k\}$ одновременно выполнены неравенства $\alpha_{ji} \leq 0$, $\alpha_{ki} \leq 0$, причем хотя бы одно из них строгое.

Рассматриваемая задача возникает при моделировании малых деформаций плоской стержневой системы (без учета деформаций кручения), все элементы которой прямолинейны и лежат в одной плоскости. При этом полагается, что вся система закреплена в каждом граничном конце и все стержни жестко сочленены в их общем конце [9, 10]. Безусловно, данная модель является упрощенной, но

основывается на вариационных соображениях. Коэффициентом $q(x)$ в уравнениях на ребрах учитывается реакция системы на растяжение. Подобное же уравнение (с $q(x) \geq 0$) для модели стержней с условиями шарнира в узлах и в предположении, что система растянута «вдоль» своей плоскости за свободные концы стержней и закреплена, рассматривалось в монографии [1] и работах [3, 6]. Что касается наших предположений относительно коэффициентов, то первая серия предположений определяется физическим смыслом задачи, вторая также учитывает физический смысл и несет предположение невырожденности самих условий. И лишь последние два предположения требуют дополнительного объяснения.

Условия непрерывности деформаций во внутренней вершине мы можем задавать перебирая всевозможные индексы $i, j \in I(b)$, однако содержательную часть несут лишь $|I(b)| - 1$ из всех таких условий, где $|I(b)|$ — число ребер графа примыкающих к вершине b . Такими, например, являются условия с произвольно фиксированным индексом $j \in I(b)$ и всеми $i \in I(b) \setminus j$. Аналогичные суждения можно делать относительно условий для первых производных из (3), которые с физической точки зрения описывают компланарность всех троек касательных векторов $u'_i(b)$, $i \in I(b)$: если θ_{is} — угол между осявыми линиями i -го и s -го стержней, примыкающих к вершине b , то

$$\alpha_{ji} = -\frac{\sin \theta_{ki}}{\sin \theta_{kj}}, \quad \alpha_{ki} = -\frac{\sin \theta_{ij}}{\sin \theta_{kj}},$$

причем фиксированные индексы k и j выбираются так, чтобы $0 < \theta_{kj} < \pi$ (см. [9, 10]). Поэтому предположение о том, что для каждого индекса $i \in I(b)$ хотя бы одна из констант α_{ji} , α_{ki} отлична от нуля означает, что осявые линии различных стержней системы не накладываются друг на друга. Из этого же предположения следует, что условия для первых производных могут быть заменены их линейными комбинациями того же вида так, что любой наперед заданный индекс $i \in I(b)$ будет одним из двух базисных. Что касается второго базисного индекса, то он не всегда может быть выбран произвольно. Такая ситуация возникает в случае когда в заданных условиях для первых производных из (3) одна из констант α_{ki} , α_{ji} равна нулю: если, например, для некоторого индекса $i \in I(b) \setminus \{j, k\}$ будет выполняться равенство $\alpha_{ji} = 0$, то индексы i и k не могут быть сделаны одновременно базисными. Из этого следует, что из всех возможных вариантов условий гладкости содержательную часть несут лишь $|I(b)| - 2$ из всех таких соотношений, например, когда фикси-

рованы два каких-нибудь возможных базисных индекса $j, k \in I(b)$, а $i \in I(b) \setminus \{j, k\}$.

Заметим, что в 1-м условии из (4) фигурирует α_{ji} (с индексом j), а во 2-м условии фигурируют α_{ki} (с индексом k). При этом каждая пара α_{ji}, α_{ki} берется из условий (3). Условия (4) возникают из вариационной постановки задачи (см., например, работы [9, 10]).

Учитывая эти комментарии и результаты работы [8], последнее из наших предположений гарантирует невырожденность краевой задачи (1), (2) на графе Γ и существование функции Грина.

2. Предварительные сведения и вспомогательные результаты

В этом пункте мы напомним некоторые результаты и установим одно вспомогательное свойство решений уравнения четвертого порядка, которое понадобится нам в дальнейшем.

Сначала рассмотрим на отрезке $[a, b] \in \mathbb{R}$ дифференциальное уравнение

$$(p(x)u'')'' - (q(x)u')' = 0, \quad (5)$$

в котором $p(x) \in C^2[a, b]$, $\inf_{x \in [a, b]} p(x) > 0$, $q(x) \in C^1[a, b]$, $q(x) \geq 0$ на $[a, b]$.

Представим уравнение (5) в факторизованном виде Фробениуса — По́йа:

$$Lu \equiv \frac{d}{dx} \frac{1}{h(x)} \frac{d}{dx} p(x) h^2(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{h(x)} \frac{du}{dx} = 0, \quad x \in [a, b].$$

Здесь $h(x) \in C^3[a, b]$ является решением задачи Коши

$$(p(x)h')' - q(x)h = 0, \quad h(a) = 1, \quad h'(a) = 0$$

и удовлетворяет неравенствам $\inf_{x \in [a, b]} h(x) > 0$, $h'(x) \geq 0$ на $[a, b]$. Возможность факторизации обосновывается известным результатом По́йа [12], а принадлежность функции $h(x)$ пространству $C^3[a, b]$ следует из включений $p \in C^2[a, b]$, $q \in C^1[a, b]$.

Лемма 1. Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям

$$u(a) = 0, \quad \beta(a)u''(a) - \vartheta(a)u'(a) = 0. \quad (6)$$

Тогда функция $u(x)$ имеет внутри отрезка $[a, b]$ не более одного нуля.

Доказательство следует из возможности факторизации уравнения (5) и обобщенного правила Декарта [11].

Лемма 2 [1, гл. 8]. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (5), удовлетворяющее в точке a условиям (6), а в точке b условиям $u(b) = 1$, $u'(b) = 0$. Тогда функция $u(x)$ определяется однозначно и $u(x) > 0$ на $(a, b]$.

Для функции $u(x)$, определенной на некотором отрезке $[x_1, x_1]$ и имеющей на нем конечное число нулей, через $\sigma u(x \pm 0)$ обозначим знак $u(x)$ справа (слева) от точки x (в формулах, где это необходимо, мы будем отождествлять знак $\pm$ с числом ± 1). Использование $\sigma u(x \pm 0)$ позволяет нам в случаях, когда $u(x \pm 0) = 0$, приписывать этому нулю вполне определенный знак. Если же $u(x) \neq 0$, то, очевидно, $\sigma u(x + 0) = \sigma u(x - 0) = \text{sign } u(x)$.

Лемма 3. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (5), удовлетворяющее в точке a условиям (6), а в точке b условиям

$$u(b) = 1, \quad u'(b) = A. \quad (7)$$

Функция $u(x)$ строго положительна на $(a, b]$ тогда и только тогда, когда $A \leq \frac{z'(b)}{z(b)}$, где $z(x)$ — решение задачи Коши для уравнения (5) с начальными условиями $z(a) = z'(a) = z''(a) = 0$, $z'''(a) = \frac{1}{p(a)}$.

◁ Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} w_1(x) &= 1, \\ w_2(x) &= \int_a^x h(s) ds, \\ w_3(x) &= p(a) \int_a^x h(s) \int_a^s \frac{d\xi}{p(\xi)h^2(\xi)} ds, \\ w_4(x) &= \int_a^x h(s) \int_a^s \frac{1}{p(\xi)h^2(\xi)} \int_a^\xi h(\eta) d\eta d\xi ds. \end{aligned}$$

Из факторизованного представления уравнения (5) легко видеть, что функции $w_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$, образуют его фундаментальную систему решений и удовлетворяют в точке a начальным условиям:

$$w_k^{(j-1)}(a) = \delta_{kj}, \quad D^3 w_k(a) = \delta_{k4}, \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3,$$

где δ_{kj} — символ Кронекера.

Очевидно также, что все функции $w_k(x)$ положительны на $(a, b]$.

Обозначим через $l_1(\cdot)$ и $l_2(\cdot)$ линейные функционалы, определяющие краевые условия (6) (в том же порядке), а через $l_3(\cdot)$ и $l_4(\cdot)$ линейные функционалы, определяющие краевые условия (7) (в том же порядке). Если $\det \|l_n(w_j)\|$ — характеристический определитель краевой задачи (5)–(7), т. е.

$$\det \|l_n(w_j)\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\vartheta(a) & \beta(a) & 0 \\ 1 & w_2(b) & w_3(b) & w_4(b) \\ 0 & w'_2(b) & w'_3(b) & w'_4(b) \end{vmatrix},$$

то для функции $u(x)$ имеет место представление

$$u(x) = \frac{1}{\det \|l_n(w_j)\|} \begin{vmatrix} l_1(w_1) & l_1(w_2) & l_1(w_3) & l_1(w_4) \\ l_2(w_1) & l_2(w_2) & l_2(w_3) & l_2(w_4) \\ w_1(x) & w_2(x) & w_3(x) & w_4(x) \\ l_4(w_1) & l_4(w_2) & l_4(w_3) & l_4(w_4) \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{A}{\det \|l_n(w_j)\|} \begin{vmatrix} l_1(w_1) & l_1(w_2) & l_1(w_3) & l_1(w_4) \\ l_2(w_1) & l_2(w_2) & l_2(w_3) & l_2(w_4) \\ l_3(w_1) & l_3(w_2) & l_3(w_3) & l_3(w_4) \\ w_1(x) & w_2(x) & w_3(x) & w_4(x) \end{vmatrix}.$$

Как следует из леммы 1 и условий (6), (7) положительность функции $u(x)$ на $(a, b]$ эквивалентна неравенству $\sigma u(a+0) > 0$. В силу (6) знак $\sigma u(a+0)$ определяется знаком $\sigma u'(a+0)$ или $\sigma u''(a+0)$. Вычисляя производные функции $u(x)$, получим

$$u'(a) = \frac{\beta(a)}{\det \|l_i(w_k)\|} [Aw_4(b) - w'_4(b)], \quad (8)$$

или (если $\beta(a) = 0$)

$$u''(a) = \frac{\vartheta(a)}{\det \|l_i(w_k)\|} [Aw_4(b) - w'_4(b)]. \quad (9)$$

Если $Aw_4(b) - w'_4(b) = 0$, то из (6), (8), (9) и теоремы единственности следует, что $u(x) = \frac{w_4(x)}{w_4(b)} > 0$ на $(a, b]$.

Рассмотрим случай $Aw_4(b) - w'_4(b) \neq 0$. Если $A = 0$, то справедливость утверждения леммы следует из леммы 2. Более того, в этом

случае из (8) и (9) получаем

$$\sigma u'(a+0) = \operatorname{sign} \frac{-w'_4(b)}{\det \|l_i(w_k)\|} > 0,$$

что ввиду $w'_4(b) > 0$ дает неравенство $\det \|l_n(w_j)\| < 0$.

Пусть теперь $A \neq 0$. Поскольку одно из чисел $\beta(a)$ или $\vartheta(a)$ точно отлично от нуля, то из (8) и (9) следует, что при $Aw_4(b) - w'_4(b) \neq 0$ неравенство $\sigma u'(a+0) > 0$ эквивалентно неравенству $Aw_4(b) - w'_4(b) < 0$ или, что тоже самое, $A < \frac{w'_4(b)}{w_4(b)} = \frac{z'(b)}{z(b)}$. $\triangleright$

Далее мы напомним некоторые результаты, касающиеся функции Грина задачи (1), (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцией Грина невырожденной краевой задачи (1), (2) назовем функцию $G : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что решение задачи может быть представлено в виде

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x, s) F(s) ds + G(x, b) F(b).$$

Лемма 4 [1]. Пусть задача (1), (2) невырождена. Тогда ее функция Грина существует и обладает следующими свойствами:

1) функция $G(x, s)$ вместе со своими производными по x до четвертого порядка непрерывна по совокупности переменных вплоть до границы на каждом из прямоугольников $\gamma_i \times \gamma_j$ ($i \neq j$) и на каждом из треугольников, на которые диагональю $x = s$ разбивается квадрат $\gamma_i \times \gamma_i$;

2) при каждом фиксированном s , являющемся внутренней точкой некоторого ребра, функция $G(\cdot, s)$ является решением однородного уравнения (1) на $\Gamma \setminus s$;

3) при каждом фиксированном s , являющемся внутренней точкой некоторого ребра, функция $G(\cdot, s)$ удовлетворяет однородным краевым условиям (2);

4) функция $G(x, s)$ на диагонали $x = s$ удовлетворяет условиям непрерывности вместе со своими производными $\frac{\partial G(x, s)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 G(x, s)}{\partial x^2}$ и условию скачка третьей производной по x

$$\frac{\partial^3 G(s+0, s)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 G(s-0, s)}{\partial x^3} = \frac{1}{p(s)}$$

при ориентации предельного перехода $s \pm 0$ и направления дифференцирования к внутренней вершине b ;

5) функция $G(x, s)$ условиями 1)–4) определяется однозначно.

Утверждения 2) и 3) леммы 4 описывают поведение функции Грина при каждом $s \in (a_i, b)$. Что касается свойств функции Грина задачи (1)–(4) при $s = b$, то для вершины b переменная s может приближаться к b по разным ребрам, примыкающим к этой вершине, поэтому мы будем рассматривать отдельно каждый из пределов $G_i(x, b) = \lim_{\gamma_i \ni s \rightarrow b} G(x, s)$, $i \in I(b)$, называемых предельными срезками. Почти дословно повторяя рассуждения работы [13] и используя теоремы о предельных срезках [1, гл. 6], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Функция Грина $G(x, s)$ задачи (1), (2) удовлетворяет на $\Gamma \times \Gamma$ свойству симметричности $G(x, s) = G(s, x)$, а все ее предельные срезки равны между собой, т. е. $G_i(x, b) \equiv G_k(x, b)$, $x \in \Gamma$.

Далее мы формулируем теорему о редукции для краевой задачи (1), (2).

Теорема 2 [7]. Краевая задача (1), (2) на графе Γ с $F(x) \equiv 0$ вне замыкания ребра $\bar{\gamma}_k = [a_k, b] \in \Gamma$ эквивалентна набору задач:

1) задаче на ребре γ_k :

$$\begin{aligned} (p_k(x)u_k'')'' - (q_k(x)u_k')' &= f(x), \quad x \in \gamma_k, \\ u_k(a_k) &= 0, \quad \beta(a_k)u_k''(a_k) - \vartheta(a_k)u_k'(a_k) = 0, \\ p_k(b)u_k''(b) + \beta_1(b)u_k'(b) - \beta_0(b)u_k(b) &= 0, \\ D^3u_k(b) + \beta_0(b)u_k'(b) - \delta_0(b)u_k(b) &= f(b); \end{aligned} \quad (10)$$

2) набору задач на ребрах γ_i для уравнения

$$(p_i(x)u_i'')'' - (q_i(x)u_i')' = 0, \quad x \in \gamma_i, \quad i \neq k, \quad (11)$$

с условиями

$$\begin{aligned} u_i(b) &= u_k(b), \\ u_i'(b) &= \mu_i(b)u_k(b) + \rho_i(b)u_k'(b) \end{aligned}$$

в точке b и однородным условиям (2) в точке a_i .

Следствие. Пусть $G(x, s)$ — функция Грина краевой задачи (1), (2). Тогда для $x, s \in \gamma_k$ функция $G(x, s)$ совпадает с функцией Грина $G_k(x, s)$ краевой задачи (10). А для $s \in \gamma_k$ и $x \in \gamma_i$ при $i \neq k$

функция $G(x, s)$ является решением уравнения (11) на ребре γ_i , удовлетворяет в вершине a_i условиям (2), а в вершине b — условиям

$$\begin{aligned} G(b, s) &= G_k(b, s), \\ \frac{\partial G}{\partial x}(b, s) &= \mu_i(b)G_k(b, s) + \rho_i(b)\frac{\partial G_k}{\partial x}(b, s). \end{aligned} \quad (12)$$

В данной работе мы не станем выписывать формулы, по которым считаются коэффициенты условий (10) и (12), отсылая за подробностями к работе [7]. Здесь мы лишь отметим, что все коэффициенты краевых условий (10) и (12) в точке b зависят от коэффициентов уравнения (1). При этом коэффициенты $\beta_1(b)$ и $\delta_0(b)$ краевых условий (10) строго положительны и $[\beta_0(b)]^2 - \beta_1(b)\delta_0(b) < 0$. Что касается знаков коэффициентов $\beta_0(b)$, $\mu_i(b)$ и $\rho_i(b)$, то они могут принимать любые вещественные значения.

Теорема 3 [14]. Краевая задача (10) является самосопряженной и однозначно разрешима для любой правой части $f(x) \in C[a_k, b]$.

Теорема 4 [14]. Функция Грина $G_k(x, s)$ задачи (10) строго положительна на $(a_k, b] \times (a_k, b]$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$p_k(b)z_k''(b) + \beta_1(b)z_k'(b) - \beta_0(b)z_k(b) \geq 0, \quad (13)$$

где $z_k(x)$ — решение задачи Коши для однородного уравнения (10) с начальными условиями $z_k(a_k) = z_k'(a_k) = z_k''(a_k) = 0$, $z_k'''(a_k) = \frac{1}{p(a_k)}$.

3. Свойства функции Грина краевой задачи (1), (2)

Как уже было сказано выше, нас интересует вопрос о положительности функции Грина $G(x, s)$ задачи (1), (2) на $\Gamma \times \Gamma$. При (x, s) , принадлежащих диагональным квадратам $\gamma_k \times \gamma_k$, $k \in I(b)$, этот вопрос однозначно решается теоремой 4. Поэтому всюду ниже мы будем считать, что для каждого ребра γ_k , $k \in I(b)$, выполнено соответствующее неравенство (13), и нас будет интересовать поведение $G(x, s)$ на прямоугольниках $\gamma_i \times \gamma_k$ при $i \neq k$.

Зафиксируем произвольный индекс $k \in I(b)$ и будем считать, что в условиях (3) индекс k является базисным. В противном случае мы

можем заменить эти условия их линейными комбинациями, имеющими тот же вид (3), в которых индекс k уже будет базисным. Всюду далее, если не оговорено противное, считаем, что $s \in \gamma_k = (a_k, b)$, $x \in \gamma_i = (a_i, b)$.

Лемма 5. Пусть $G(x, s)$ — функция Грина задачи (1), (2). Тогда для любого $s \in \gamma_k$ срезка $g_s(\cdot) = G(\cdot, s)$ не имеет на $\Gamma \setminus \partial\Gamma$ кратных нулей.

◁ Пусть $s \in \gamma_k$. Поскольку предельная срезка $G_k(b, s)$, $s \in \gamma_k$, положительна на $(a_k, b] \times (a_k, b]$, то $g_s(b) > 0$, и нам остается доказать лемму для $x \in \bigcup_{i \neq k} \gamma_i$.

Предположим противное. Пусть $x_0 \in (a_i, b)$ — кратный нуль функции $g_s(x)$, $i \neq k$. Тогда на отрезке $[a_i, x_0]$ функция $g_s(x)$ является решением однородного уравнения (11), удовлетворяет в точке a_i условиям (2), а в точке x_0 — условиям $g_s(x_0) = g'_s(x_0) = 0$. Согласно лемме 2, такая задача невырождена, поэтому $g_s(x) \equiv 0$ на $[a_k, x_0]$. Тогда в силу теоремы единственности Коши $g_s(x) \equiv 0$ на $[a_i, b]$, что противоречит неравенству $g_s(b) > 0$. ▷

Из симметричности функции Грина сразу получаем

Следствие. Для любого $x \in \gamma_k$ срезка $g_x(\cdot) = G(x, \cdot)$ не имеет на $\Gamma \setminus \partial\Gamma$ кратных нулей.

Обозначим через $\mathfrak{N}_{ik}$ множество всех внутренних точек прямоугольника $[a_i, b] \times [a_k, b]$, $i \neq k$, в которых функция $G(x, s)$ равна нулю. Нас интересует случай, когда $\mathfrak{N}_{ik} \neq \emptyset$. То, что такая ситуация возможна будет показано ниже. Из леммы 5 и непрерывности функции Грина следует, что множество $\mathfrak{N}_{ik}$ не имеет изолированных точек и в любой окрестности произвольной точки из $\mathfrak{N}_{ik}$ функция $G(x, s)$ меняет знак.

Лемма 6. Если $\mathfrak{N}_{ik} \neq \emptyset$, то любая прямая $s = s_0$, $s_0 \in (a_k, b)$, (или прямая $x = x_0$, $x_0 \in (a_i, b)$) пересекает $\mathfrak{N}_{ik}$ не более чем в одной точке.

Доказательство следует из леммы 1.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{N}_{ik} \neq \emptyset$ и $(x_0, s_0) \in \mathfrak{N}_{ik}$. Тогда на ребре $\gamma_i = (a_i, b)$ срезка функции Грина $g_{s_0}(\cdot) = G(\cdot, s_0)$ строго отрицательна при $x \in (a_i, x_0)$ и строго положительна при $x \in (x_0, b)$.

Доказательство следует из лемм 5 и 6.

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{N}_{ik} \neq \emptyset$ и $(x_0, s_0) \in \mathfrak{N}_{ik}$. Тогда на ребре $\gamma_k = (a_k, b)$ срезка функции Грина $g_{x_0}(\cdot) = G(x_0, \cdot)$ строго отрицательна при $s \in (a_k, s_0)$ и строго положительна при $s \in (s_0, b)$.

Лемма 6 и ее следствия 1 и 2 позволяют заключить, что множество $\mathfrak{N}_{ik}$ может быть задано с помощью функции $\mathfrak{X}(s)$, взаимно однозначно отображающей некоторое подмножество ребра γ_k на подмножество ребра γ_i (или с помощью функции $\mathfrak{X}^{-1}(x)$, отображающей некоторое подмножество ребра γ_i на подмножество ребра γ_k).

Следующее утверждение устанавливает связность множества $\mathfrak{N}_{ik}$.

Следствие 3. *Множество $\mathfrak{N}_{ik}$ представляет собой непрерывную кривую, концы которой лежат на сторонах прямоугольника, примыкающих к вершине $x = a_i$, $s = a_k$.*

◁ Из леммы 5 следует, что множество $\mathfrak{N}_{ik}$ не имеет изолированных точек, поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что кривая $\mathfrak{N}_{ik}$ не имеет внутри $[a_i, b] \times [a_k, b]$ концевых точек.

Рассмотрим функцию $\mathfrak{X}(s)$, задающую кривую $\mathfrak{N}_{ik}$. С помощью метрической функции $\tau(s)$ (см. п. 1.) ее можно представить в виде суперпозиции $\mathfrak{X}(s(\tau))$, заданной на интервале $(0, d_k)$ вещественной прямой. Предположим, что $(x_0, s_0) \in (a_i, b) \times (a_k, b)$ — концевая точка кривой $\mathfrak{N}_{ik}$, где $s_0 = s(\tau_0)$, $x_0 = \mathfrak{X}(s(\tau_0))$ и $\tau_0 \in (0, d_k) \in \mathbb{R}$. Тогда функция $\mathfrak{X}(s(\tau))$ может быть непрерывна в точке τ_0 либо только слева, либо только справа. Пусть, для определенности, функция $\mathfrak{X}(s(\tau))$ непрерывна слева от τ_0 . Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция $g_{s(\tau)}(\cdot) = G(\cdot, s(\tau))$ сохраняет знак в ε -окрестности точки x_0 при каждом $\tau \in (\tau_0, \tau_0 + \varepsilon)$. При этом в силу следствия 1 функция $g_{s_0}(\cdot) = G(\cdot, s_0)$ меняет знак на том же интервале, что противоречит непрерывности по совокупности переменных функции Грина $G(x, s)$. ▷

Из всего вышесказанного следует

Теорема 5. *Функция Грина задачи (1), (2) либо строго положительна на $(a_i, b] \times (a_k, b]$, либо отрицательна внутри односвязного множества, ограниченного сторонами прямоугольника, примыкающими к его вершине (a_i, a_k) и непрерывной кривой $\mathfrak{N}_{ik}$, концы которой лежат внутри этих сторон. При этом всякая прямая, параллельная какой-нибудь стороне прямоугольника, пересекает кривую $\mathfrak{N}_{ik}$ не более одного раза.*

Определим внутри прямоугольника $[a_i, b] \times [a_k, b]$ функцию $\mathcal{G}_{ik}(x, s) = \frac{G(x, s)}{G(b, s)}$, $(x, s) \in (a_i, b) \times (a_k, b)$. Поскольку предельные срезы $G(b, s)$ положительны внутри $\Gamma \times \Gamma$, то функция $\mathcal{G}_{ik}(x, s)$ определена корректно. Из свойств функции Грина и следствия теоремы 2

следует, что при каждом фиксированном $s \in (a_k, b)$ функция $\mathcal{G}_{ik}(x, s)$ является решением уравнения (11), удовлетворяет условиям (2) и условиям

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ik}(b, s) &= 1, \\ \frac{\partial \mathcal{G}_{ik}}{\partial x}(b, s) &= \mu_i(b) + \rho_i(b) \frac{\frac{\partial G_k}{\partial x}(b, s)}{G_k(b, s)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Очевидно, что положительность функции $G(x, s)$ на $(a_i, b) \times (a_k, b)$ эквивалентна положительности $\mathcal{G}_{ik}(x, s)$. Как следует из леммы 3, неравенство $\mathcal{G}_{ik}(x, s) > 0$ выполнено для всех $x \in \gamma_i$ и $s \in \gamma_k$ тогда и только тогда, когда для любого $s \in \gamma_k$ выполнено неравенство $\frac{\partial \mathcal{G}_{ik}}{\partial x}(b, s) < \frac{z'_i(b)}{z_i(b)}$, где $z(x)$ — решение однородного уравнения (11), удовлетворяющее условиям

$$z(a_i) = z'(a_i) = z''(a_i) = 0, \quad D^3 z(a_i) = 1, \quad i \in I(b).$$

Из теоремы 5 следует, что если функция $\mathcal{G}_{ik}(x, s)$ отрицательна в некоторой точке (x_0, s_0) прямоугольника $(a_i, b) \times (a_k, b)$, то она отрицательна и во всех точках (x_0, s) при $s \in (a, s_0]$. Поэтому достаточно исследовать поведение функции $\frac{\partial \mathcal{G}_{ik}}{\partial x}(b, s)$ при $s \in \gamma_k$ близких к a_k .

Если обозначить через $l_j(\cdot)$, $j = 1, 2, 3, 4$, функционалы, определяющие краевые условия задачи (10) на ребре γ_k (в том же порядке, в котором они идут в (10)), а через $\phi_{jk}(x)$ — фундаментальную систему решений уравнения (10) такую, что $l_j(\phi_{ik}) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, то функцию $G_k(x, s)$, $x, s \in \gamma_k$, можно представить в виде [13]

$$G_k(x, s) = \begin{cases} -\phi_{3k}(x)v_3(s) - \phi_{4k}(x)v_4(s), & a_k \leq x \leq s \leq b, \\ \phi_{1k}(x)v_1(s) + \phi_{2k}(x)v_2(s), & a_k \leq s \leq x \leq b, \end{cases} \quad (15)$$

где $v_j(s) = (-1)^j \frac{[\phi_{1k}, \dots, \phi_{j-1,k}, \phi_{j+1,k}, \dots, \phi_{4k}](s)}{[\phi_{1k}, \dots, \phi_{4k}](s)}$, $j = 1, 2, 3, 4$, а $[\phi_1, \dots, \phi_m](s)$ — вронсиан функций $\phi_j(s)$, $j = 1, \dots, m$. В той же работе [13] установлена зависимость поведения системы функций $v_j(s)$ в окрестности концов отрезка от порядков ведущих производных краевых условий (10). Привлекая метрическую функцию $\tau(s)$ и учитывая равенство $\lim_{\gamma_k \ni s \rightarrow a_k} \tau(s) = 0$, можно утвер-

ждать (см. [13]), что при $\tau \rightarrow 0$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} v_1(s(\tau)) &= \frac{\tau^3}{3!} + o(\tau^3), \\ v_2(s(\tau)) &= \begin{cases} \tau + o(\tau) & \text{при } \beta(a_k) \neq 0, \\ \frac{\tau^2}{2!} + o(\tau^2) & \text{при } \beta(a_k) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя соотношения (15) в (14), получим

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{ik}}{\partial x}(b, a_k) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\mu_i(b) + \rho_i(b) \frac{\phi'_{1k}(b)v_1(s(\tau)) + \phi'_{2k}(b)v_2(s(\tau))}{\phi_{1k}(b)v_1(s(\tau)) + \phi_{2k}(b)v_2(s(\tau))} \right].$$

Ввиду (16) правая часть принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{ik}}{\partial x}(b, a_k) = \mu_i(b) + \rho_i(b) \frac{\phi'_{2k}(b)}{\phi_{2k}(b)}, \quad i \in I(b) \setminus k,$$

где $\frac{\phi'_{2k}}{\phi_{2k}}(b) = \lim_{\gamma_k \ni x \rightarrow b} \frac{\phi'_{2k}(x)}{\phi_{2k}(x)}$.

Теперь из леммы 3 следует, что выполнение неравенства $\mathcal{G}_{ik}(x, s) > 0$ на $(a_i, b] \times (a_k, b]$, $i \neq k$, эквивалентно выполнению неравенства

$$\mu_i(b) + \rho_i(b) \frac{\phi'_{2k}(b)}{\phi_{2k}(b)} \leq \frac{z'_i(b)}{z_i(b)}, \quad i \in I(b) \setminus k, \quad (17)$$

где $z_i(x)$ — решение однородного уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям $z_i(a_i) = z'_i(a_i) = z''_i(a_i) = 0$, $z'''_i(a_i) = \frac{1}{p(a_i)}$.

Проведенные выкладки позволяют сформулировать основной результат данной работы.

Теорема 6. Для того чтобы функция Грина $G(x, s)$ задачи (1), (2) была строго положительна на прямоугольниках $(a_i, b] \times (a_k, b]$, $i \in I(b)$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись неравенства (13) и (17).

Литература

1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2007.—272 с.
2. Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И. и др. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах.—М.: Физматлит, 2009.—192 с.
3. Боровских А. В., Мустафакулов Р. и др. Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети // Докл. РАН.— 1995.—Т. 345, № 6.—С. 730–732.

4. Покорный Ю. В., Мустафакулов Р. О. О позитивной обратимости некоторых краевых задач для уравнения четвертого порядка // Диф. уравнения.—1997.—Т. 33, № 10.—С. 1358–1365.
5. Покорный Ю. В., Мустафакулов Р. О. О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвертого порядка на графе // Известия ВУЗов. Математика.—1999.—Т. 441, № 2.—С. 75–82.
6. Borovskikh A. V., Lazarev K. P. Fourth-order differential equations on geometric graphs // J. of Math. Sci.—2004.—Vol. 119, № 6.—P. 719–738.
7. Кулаев Р. Ч. Метод редукции для уравнения четвертого порядка на графе // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 3.—С. 296–309.
8. Кулаев Р. Ч. О разрешимости краевой задачи для уравнения четвертого порядка на графе // Диф. уравнения.—2013.—Т. 51, № 1.—С. 27–34.
9. Завгородний М. Г. Вариационные принципы построения моделей стержневых стержней // Сб. научн. тр. «Математическое моделирование информационных и технологических систем».—Воронеж: ВГТА, 2000.—Вып. 4.—С. 59–62.
10. Завгородний М. Г., Майорова С. П. Об одном уравнении математической физики четвертого порядка на графе // Иссл. по дифференц. ур-ям и мат. моделированию.—Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2008.—С. 88–102.
11. Боровских А. В. Условия знакорегулярности разрывных краевых задач // Мат. заметки.—2003.—Т. 74, № 5.—С. 643–655.
12. Поля Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2.—М.: Наука, 1978.—431 с.
13. Кулаев Р. Ч. О функции Грина краевой задачи на графе-пучке // Изв. ВУЗов. Математика.—2013.—№. 2.—С. 56–66.
14. Кулаев Р. Ч., Галаванова З. Е. О знаке функции Грина двухточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка // Тр. каф. мат. анализа СОГУ.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ.—2014.—С. 7–24.
15. Степанов Г. Д. Эффективные критерии знакорегулярности и осцилляционности функции Грина двухточечных задач // Мат. сб.—1997.—Т. 188, № 11.—С. 121–159.

Кулаев Руслан Черменович
 Южный математический институт ВНИЦ РАН
 РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
 Северо-Осетинский государственный
 университет им. К. Л. Хетагурова
 РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
 E-mail: kulaev@smath.ru

POSITIVITY OF THE GREEN FUNCTION OF DIRICHLET BOUNDARY VALUE PROBLEM ON STAR-SHAPED GRAPHS

Kulaev R. Ch.

Conditions for positiveness of the Green function of Dirichlet boundary value problem for forth-order differential equation on a star-shaped graph are studied.

Key words: graph, differential equation on a graph, Green function.

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ТРАДИЦИОННОЙ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ ТРАДИЦИОННЫХ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИКИ.

I. ПРЕОДОЛЕТЬ НЕДОСТАТКИ, СВЯЗАННЫЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТОЖДЕСТВ И ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

А. Х. Назиев

Сорок лет тому назад была опубликована статья В. Г. Болтянского «Преодолеть заблуждения, связанные с ОДЗ» (Математика в школе, 1975, № 5). Заблуждения, о которых говорилось в статье, были благополучно преодолены, но спустя четверть века начали возрождаться. Анализируя это явление, мы обнаруживаем, что одна из причин такой живучести ОДЗ заключается в том, что это понятие используется в связке с понятиями тождества и тождественного преобразования, замечаем, что так называемые «тождества» являются заключениями теорем, а «условия, задающие ОДЗ», — посылками этих теорем, что применять тождества — значит применять заключения теорем в отрыве от их посылок (что, понятно, недопустимо). Обнаружив это, мы, совершенно естественно, предлагаем забыть об ОДЗ и тождествах, а применять вместо них то, что повсеместно применяется в настоящей математике, — аксиомы, определения, теоремы.

Ключевые слова: тождество, аксиома, определение, теорема, смысл, значение.

Если учение математики, столь свойственное уму человеческому, остается для многих безуспешно, то это по справедливости следует приписать недостаткам в искусстве и способах преподавания.

Н. И. Лобачевский

1. Тождества

В школьном курсе математики дается два не эквивалентных определения тождества. Первое вводится в 7-м классе [1, п. 5]. К этому определению у нас нет никаких претензий, кроме одного терминологического замечания (которое также относится и ко второму определению, но которое мы здесь, тем не менее, опустим за недостатком места). В 8-м классе дается другое, более совершенное, как полагают, определение. Все наши замечания относятся ко второму определению [2, п. 2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Тождеством* называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два выражения, принимающих равные значения при всех допустимых для них значениях переменных, называют *тождественно равными*, а замену одного такого выражения другим — *тождественным преобразованием* выражения.

Большое место в преподавании математики в школе занимают задачи, решаемые посредством тождественных преобразований. При этом одного тождественного преобразования обычно бывает недостаточно, приходится выполнять цепочки тождественных преобразований. Чтобы получаемые таким образом результаты имели законную силу, необходима транзитивность отношения тождественного равенства: если $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ — тождество и $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ — тождество, то и $\mathcal{A} = \mathcal{C}$ — тождество.

Верно ли это утверждение? Обычная реакция учительской аудитории на этот вопрос — удивление и встречный вопрос: «А разве — нет?». Простейшие примеры показывают, что нет.

Например, равенство $x = \sqrt{-x^2}$ является тождеством, и равенство $\sqrt{-x^2} = -x$ является тождеством, но равенство $x = -x$ не является тождеством!

Но и это — еще не все. На самом деле с помощью всего двух тождественных преобразований можно перейти от любого выражения $\mathcal{A}$ к любому выражению $\mathcal{B}$. Покажем это.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — какие угодно выражения. Тогда равенство

$$\mathcal{A} = \sqrt{-x^2 - 1}$$

является тождеством, т. е. выполняется при всех допустимых для него значениях переменных.

Действительно, если бы это было не так, то нашлись бы допустимые значения переменных, при которых левая и правая части принимают различные значения. Это, однако, невозможно, ибо допустимых значений нет. Предположив, что рассматриваемое равенство не является тождеством, мы пришли к противоречию. Значит, оно является тождеством.¹

¹ Многие полагают, что описанной нами «неприятности» можно избежать, перейдя от действительных чисел к комплексным. Ничего подобного! Согласно определению (из школьного курса математики), $\sqrt{-x^2 - 1}$ есть неотрицательное число, квадрат которого равен $-x^2 - 1$, а такого числа нет и среди комплексных чисел.

Точно так же является тождеством и равенство

$$\sqrt{-x^2 - 1} = \mathcal{B}.$$

Выполняя последовательно два указанных тождественных перехода, получаем из (какого угодно!) выражения $\mathcal{A}$ (какое угодно!) выражение $\mathcal{B}$!

2. ОДЗ

В подобных случаях обычно и заводят разговоры об ОДЗ. Говорят, что производя преобразования выражений, нужно следить за ОДЗ и различать тождества, расширяющие ОДЗ, и тождества, сужающие ОДЗ. Считается, что расширяющие тождества применять хорошо, сужающие — плохо, а применять то расширяющие, то сужающие — вообще никуда не годится.

Чтобы по достоинству оценить эти наставления, приведем цитату из того же п. 2 учебника Алгебра–8: «Свойство, выраженное тождеством $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, называют *основным свойством дроби*. Поменяв в [этом] тождестве его левую и правую части (выделено мной — А. Н.), получим:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Это тождество позволяет заменить дробь вида $\frac{ac}{bc}$ тождественно равной дробью $\frac{a}{b}$, или, как говорят, сократить дробь $\frac{ac}{bc}$ на общий множитель c числителя и знаменателя».

Выделенная нами фраза показывает, что авторы школьного учебника совершенно свободно меняют местами левые и правые части тождеств, нисколько не беспокоясь о том, что при этом «расширяющие» тождества превращаются в «сужающие» и обратно. И это понятно. Ведь при выполнении тождественных преобразований дробных выражений сплошь и рядом приходится приводить дроби к общему знаменателю и сокращать получаемую в результате дробь на общие множители числителя и знаменателя. Первое делается с помощью *сужающего* тождества $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, второе — с помощью *расширяющего* тождества $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, причем, как правило, оба эти действия встречаются в одной цепочке преобразований. Как видим, приведенные выше пожелания невыполнимы.

Большое значение придается положениям, описывающим превращения ОДЗ под воздействием тождественных преобразований. Весь-

ма примечательно, что эти положения не доказывают, а лишь «поясняют». Вот одно из таких положений: «В результате возведения выражения в квадрат может получиться выражение с более широкой областью определения».

Многим подобные заявления кажутся справедливыми, хотя совершенно очевидно, что это неверно. Судите сами. Вот выражение: $\mathcal{A}$. Вот его квадрат: $\mathcal{A}^2$. Придаем значения переменным и вычисляем значение выражения $\mathcal{A}^2$. Как? Сначала вычисляем значение выражения $\mathcal{A}$, затем это значение возводим в квадрат! Так может ли у выражения $\mathcal{A}^2$ оказаться более широкая область определения, чем у $\mathcal{A}$? Ясно, что — нет, ибо если $\mathcal{A}$ не определено, то $\mathcal{A}^2$ — тем более (ибо, повторим: чтобы вычислить значение выражения $\mathcal{A}^2$, нужно сначала вычислить значение выражения $\mathcal{A}$).

На это возражение отвечают «пояснением»: «Возьмем выражение $\sqrt{x}$. Возводя его в квадрат, получим выражение x . Как видите, в результате возведения выражения в квадрат получилось выражение с более широкой областью определения».

И правда, получилось, но действительно ли возведение в квадрат является здесь причиной? Давайте припомним, что называется квадратом числа. Произведение числа на себя, не так ли? Но в таком случае

$$(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$$

— и только. Как видим, после возведения в квадрат получается выражение с той же областью определения.

На это возражение отвечают новым «пояснением»: «*Не нужно* здесь вспоминать определение квадрата числа. Нужно просто заменить $(\sqrt{x})^2$ на x ». На естественный вопрос: «А на каком основании?», отвечают: «На основании тождества $(\sqrt{x})^2 = x$ »!

Этот ответ все объясняет: для оправдания тождеств предлагают следить за превращениями ОДЗ, а превращения ОДЗ «поясняют» с помощью тождеств! Так они взаимно и поддерживают друг друга.

Одна из причин живучести ОДЗ — именно в этом. Избавляться нужно не только от ОДЗ, но и от тождеств. Понятно, что прежде чем избавляться, нужно найти им замену. Этим мы займемся в следующем разделе.

3. Не тождества и ОДЗ, а аксиомы, определения, теоремы!

Приглядимся внимательнее к тождествам. Повторим:

Равенство	$(\sqrt{x})^2 = x$
является тождеством.	

В соответствии с определением тождества это означает, что

Равенство	$(\sqrt{x})^2 = x$
выполняется при всех допустимых значениях входящих в него букв.	

В это равенство входит ровно одна буква, « x ». Поэтому выписанное утверждение означает, что

Равенство	$(\sqrt{x})^2 = x$
выполняется при всех допустимых значениях буквы « x ».	

Допустимыми значениями в данном случае являются неотрицательные действительные числа и только они. Получаем:

Равенство	$(\sqrt{x})^2 = x$
выполняется при всех $x \geq 0$.	

Или, лучше (гораздо лучше!)

Каково бы ни было действительное число x ,	
если $x \geq 0$, то	$(\sqrt{x})^2 = x.$ (1)

Вот мы и нашли достойную замену тождеству с его ОДЗ. Что это такое? Это теорема о действительных числах. Ее заключение есть то самое «тождество», а неравенство, стоящее в посылке — «условие,

задающее ОДЗ». Что же мы делаем? Мы отрываем заключение теоремы от ее посылки, называем этот обрывок тождеством и начинаем применять, забыв о посылке. Понятно, что это ведет к ошибкам, которые нужно как-то объяснять. Честное признание: «Мы применяли заключение теоремы в отрыве от посылки, оттого и ошиблись», — почему-то никому не приходит в голову. Вместо этого распространяются неизвестно кем придуманные нелепые сказки про ОДЗ и их таинственные превращения. Лекарство от этого недуга теперь напрашивается само собой: забыть про ОДЗ, выбросить тождества и применять аксиомы, определения, теоремы.

Что это даст? Чтобы ответить на этот вопрос, сравним формулировки в первой и последней рамках. Видим: то, что в последней рамке выражено ясно и явно, в первой сформулировано туманно и неявно. Вместо того, чтобы прямо сказать, что равенство $(\sqrt{x})^2 = x$ выполняется при всех неотрицательных x , мы напускаем тумана и говорим, что оно выполняется «при всех допустимых значениях входящей в него переменной». И сопровождаем наше заявление указами: «ищи ОДЗ!», «помни об ОДЗ!» и т. п. Но, если эти указы так важны, почему же мы сами им не следуем? Почему не сопровождаем формулировку тождества поиском ОДЗ? Непонятно...

Принятие нашего предложения поможет вернуть школьную математику (в рассматриваемой ее части) в лоно большой математики, упразднит подобные указы и даст возможность выражаться не скрыто и туманно, а явно, открыто, просто и понятно, — так, как это делается в большой математике.

Посмотрим на равенства

$$(\sqrt{x})^2 = x \quad \text{и} \quad \sqrt{x^2} = |x|.$$

Разница между ними огромная. Называя и то, и другое тождеством, мы «замазываем» эту разницу, закрываем глаза учеников на различия и мешаем им эти различия осознать. А потом удивляемся, что ученики путают эти тождества! Не нужно удивляться, нужно работать с теоремами, а не с тождествами. Соответствующие теоремы гласят: «Для любого неотрицательного x , $(\sqrt{x})^2 = x$ », и «Для любого x , $\sqrt{x^2} = |x|$ ». Перепутать их невозможно.

Вернемся в этой связи к шокирующим примерам из первого пункта. Если мы полагаем, что работать нужно именно с тождествами, то должны признать, что приведенные там тождества ничуть не хуже

других, а в чем-то даже и лучше. Вот равенство

$$\sqrt{-x^2} = x.$$

Такое же тождество, как и все остальные. Если кому-то не нравится, то это всего лишь эмоции. Называя его (совершенно справедливо!) тождеством, мы уравниваем его со всеми остальными тождествами.

Совсем иная картина откроется при переходе к соответствующей теореме. Она нам скажет, что

$$\sqrt{-x^2} = x \iff x = 0,$$

и все сразу станет ясно. Нужны ли еще доказательства того, что работать следует с теоремами, а не с тождествами?

4. О смысле и значении

Удивительно, но теоремы (1) из предыдущего пункта нет в цитированном учебнике. Вместо нее там стоит заключенная в рамку замысловатая фраза:

при любом a , при котором выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл, верно равенство

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

И это при том, что двумя страницами ниже авторы пишут:

выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл при любом $a \geq 0$.

Почему же здесь они выражаются столь туманно?

Но не это здесь самое плохое. Дело в том, что первое утверждение по большому счету неверно, а второе неполно. Чтобы обосновать это и найти достойную замену приведенным формулировкам, нужно сказать несколько слов о смысле и значении (более подробное изложение можно найти в [4]). Похоже, авторы не умеют их различать (а, может быть, даже и не подозревают о том, что это нужно уметь делать). Заметим в этой связи, что ФГОС ООО прямо нацеливает на смысловое чтение.

Скажем сразу: до настоящего времени нет теории смысла, которую можно было бы назвать общепринятой (по одной только этой

причине слово «смысл» нужно употреблять крайне осмотрительно). Наиболее признанным считается учение о смысле, разработанное великим немецким математиком, логиком и философом Готлобом Фреге (1848–1925). Согласно Фреге (правильно построенные) языковые выражения наделяются содержанием двух видов: значением и смыслом. *Значение* выражения — это тот объект, для обозначения (обоЗНАЧЕНИЯ!) которого предназначено выражение, а *смысл* выражения — это то понятие о значении, которое несет в себе данное выражение. Каждое выражение обозначает, или называет свое значение и выражает свой смысл, а смысл определяет значение. Последнее означает, что если дан смысл, то по нему, по крайней мере, в принципе, возможно установить, имеет ли выражение значение, и если имеет, то какое именно. Хороший научный язык должен удовлетворять требованию однозначности: каждое (правильно построенное) выражение в нем должно иметь не более одного значения и выражать ровно один смысл. Если о каком-то выражении выясняется, что оно не имеет смысла, то этим оно тотчас же выводится за пределы науки.

Рассмотрим, например, выражение « $\lg 100$ ». Его смысл закладывается определением десятичных логарифмов и выражается словами: «показатель степени, в которую нужно возвести число 10, чтобы получить число 100». Опираясь на этот смысл, мы устанавливаем, что значением указанного выражения является число 2, и получаем равенство: « $\lg 100 = 2$ ».

Смысл выражения « $\lg(-1)$ » заложен тем же определением. Он выражается словами: «показатель степени, в которую нужно возвести 10, чтобы получить -1 ». Опираясь на этот смысл, мы устанавливаем, что такого показателя степени не существует и говорим: это выражение значения не имеет (т. е. ничего не обозначает). Если бы мы сказали, что это выражение не имеет смысла, мы тотчас же вывели бы его за пределы науки (наука бессмыслицами не занимается).

Школьное преподавание математики страдает в отношении смысла по меньшей мере тремя недостатками:

- 1) школьников приучают говорить «не имеет смысла» там, где это не нужно и, чаще всего, неверно;
- 2) школьников не учат видеть смысл и пользоваться им там, где он есть;
- 3) школьников иногда учат видеть смысл там, где его нет.

Подробное обоснование всех этих положений вывело бы нас далеко за рамки статьи. Поэтому ограничимся их формулировкой и обоснованием первого.

Заглянем на урок алгебры в 8-й класс. Вычисляют значения выражений вида « $\sqrt{a}$ ». Говорят:

при $a = 9$ выражение « $\sqrt{a}$ » имеет значение 3;

при $a = -9$ выражение « $\sqrt{a}$ » не имеет . . . смысла.

Против первого утверждения у нас нет возражений. А вот второе . . . Откуда оно взялось? Искали *значение* выражения « $\sqrt{a}$ », а, не найдя его, почему-то заявляют, что выражение не имеет *смысла*. Да, и неверно это!

Чтобы убедиться в этом, обратимся к определению арифметического квадратного корня. Цитируем все тот же учебник [2]:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a . Арифметический квадратный корень из числа a обозначают так: $\sqrt{a}$.

В силу приведенного определения сказать, что число b является арифметическим квадратным корнем из числа a , — значит сказать, что b есть неотрицательное число, квадрат которого равен a . Иначе говоря, каковы бы ни были действительные числа a и b ,

$$b = \sqrt{a} \text{ тогда и только тогда, когда } b \geq 0 \text{ и } b^2 = a.$$

Хорошо видно, что определяющее устроено так, что смыслу просто негде потеряться:

$$b \geq 0 \text{ и } b^2 = a.$$

И первый, и второй члены конъюнкции имеют смысл при любых a и b , а вся конъюнкция как раз и выражает смысл предложения « $b = \sqrt{a}$ »! Итак:

выражение « $\sqrt{a}$ » имеет смысл при всех a ;
при $a \geq 0$ оно имеет еще и значение,
при $a < 0$ оно значений не имеет.

Конечно, в школьном учебнике алгебры доказывается, что квадратные корни из отрицательных чисел не существуют. Видимо, по этой причине многие учителя и ученики полагают, что в определении квадратных корней идет речь лишь о корнях из неотрицательных чисел. При этом они не замечают, что если бы дело обстояло именно

так, то не только выражение, но и упомянутое доказательство было лишено смысла. На самом же деле в учебнике, как мы только что видели, определяются квадратные корни из любых действительных чисел (в определении стоит подчеркнутое нами слово «числа», но нет перед ним слова «неотрицательного»). Именно это и позволяет говорить о квадратных корнях из отрицательных чисел и устанавливать, что они не существуют (а иначе как бы мы это установили?). Подчеркнем: не существует *значений*, а *смысл* существует, именно благодаря нему мы и устанавливаем отсутствие значений.

Скажем еще раз: нужно различать *смысл* и *значение* выражения. Определение закладывает *смысл* выражения. Опираясь на этот смысл, мы затем уже устанавливаем существование или отсутствие *значения*, т. е. объекта, обозначаемого выражением.

Так, определение арифметического квадратного корня закладывает смысл в выражения вида $\sqrt{a}$ для *любых* действительных a . Опираясь на этот смысл, мы и говорим об $\sqrt{a}$ при $a < 0$, видим, что тогда $\sqrt{a}$ не существует, и доказываем это. Аналогично обстоят дела с логарифмами, тангенсами, котангенсами, арксинусами и арккосинусами.

5. Реализация предложений

В этом пункте мы продемонстрируем на примерах исполнение высказанных выше рекомендаций. Повторим их, заключив в рамку:

Забудь об ОДЗ!
Выброси тождества!
Применяй аксиомы, определения, теоремы!

Ввиду ограничений на объем статьи мы рассмотрим всего два примера, и сразу — трудных. Большую часть комментариев придется опустить (по той же причине).

ПРИМЕР. Решить уравнение

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x. \quad (2)$$

РЕШЕНИЕ. ($\Rightarrow$) Пусть²

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x.$$

Тогда, в силу определения арифметического квадратного корня,

$$\begin{cases} x & \geq 0; \\ x^2 & = a - \sqrt{a + x}. \end{cases} \quad (3)$$

Положим $y = \sqrt{a + x}$. Тогда, в силу того же определения,

$$\begin{cases} y & \geq 0; \\ y^2 & = a + x, \end{cases} \quad (4)$$

и уравнение из системы (3) принимает вид

$$x^2 = a - y. \quad (5)$$

Вычитая из уравнения (5) уравнение системы (4), получим уравнение

$$x^2 - y^2 = -(x + y),$$

выполняющееся тогда и только тогда, когда

$$x + y = 0 \text{ или } x - y = -1.$$

В первом случае, в силу неравенств из (3) и (4), $x = y = 0$, а тогда и $a = 0$.

Рассмотрим второй случай, когда $x - y = -1$. Тогда $y = x + 1$, и уравнение (5) принимает вид

$$x^2 = a - (x - 1),$$

или

$$x^2 + x - (a - 1) = 0. \quad (6)$$

Если $D = 4a - 3 < 0$, то корней нет.

²Важное замечание. Написав «пусть», мы предположили, что равенство (2) выполняется и, тем самым, сразу попали в то, что называется ОДЗ уравнения. Думать об ОДЗ теперь не только не нужно, но и вредно!

Пусть $D \geq 0$, т. е. $a \geq \frac{3}{4}$. Тогда корнями уравнения (6) являются

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{a - \frac{3}{4}} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}.$$

При этом x_1 не удовлетворяет неравенству из (3) и потому не является корнем уравнения (2), а x_2 если и является корнем этого уравнения, то лишь при условии, что $x_2 \geq 0$, т. е. $-\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}} \geq 0$. Решая это неравенство, находим, что оно выполняется в точности тогда, когда $a \geq 1$.

Подведем итоги. Мы установили, что если число x является корнем уравнения (2), то непременно

$$(a = 0 \text{ и } x = 0) \text{ или } \left(a \geq 1 \text{ и } x = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}\right).$$

($\Leftarrow$) Посмотрим, верно ли обратное. Если $a = 0$ и $x = 0$, то равенство (2) очевидным образом выполняется. Пусть

$$a \geq 1 \quad \text{и} \quad x = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}.$$

Тогда, прежде всего, $a - \frac{3}{4} \geq \frac{1}{4}$, так что $\sqrt{a - \frac{3}{4}} \geq \frac{1}{2}$ и, значит, $x \geq 0$.

Далее,

$$\begin{aligned} x + a &= a - \frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}} = \\ &= a - \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a - \frac{3}{4}} + \frac{1}{4} = \left(\sqrt{a - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\sqrt{a - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}$ есть неотрицательное число (в силу условия $a \geq 1$), квадрат которого равен $x + a$.

В силу определения арифметического квадратного корня это означает, что $\sqrt{a - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}$ есть арифметический квадратный корень из $x + a$, т. е.

$$\sqrt{x + a} = \sqrt{a - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} a - \sqrt{x+a} &= a - \frac{1}{2} - \sqrt{a - \frac{3}{4}} = \\ &= a - \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a - \frac{3}{4}} + \frac{1}{4} = \left(\sqrt{a - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \right)^2 = x^2. \end{aligned}$$

Таким образом, x есть неотрицательное число, квадрат которого равен $a - \sqrt{x+a}$. В силу определения арифметического квадратного корня это означает, что $\sqrt{a - \sqrt{x+a}} = x$. Это и требовалось.

ОТВЕТ. Равенство (2) выполняется тогда и только тогда, когда

$$(a = 0 \text{ и } x = 0) \text{ или } \left(a \geq 1 \text{ и } x = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}} \right).$$

Если угодно, ответ можно сформулировать и иначе:

если $a < 1$ и $a \neq 0$, то уравнение (2) корней не имеет;

если $a = 0$, то корнем (2) является 0, и только;

если $a \geq 1$, то корнем (2) является $-\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}$, и только.

ПРИМЕР. Решить уравнение

$$x^x = x.$$

Много странных заявлений можно найти в литературе по поводу подобных уравнений. Например, читаем в [5, с. 124]: «Я пишу на доске уравнение $x^x = x$ и задаю вопрос: «Является ли число -1 корнем этого уравнения?». С одной стороны, при подстановке -1 в обе части получаем верное равенство, а, значит, -1 является корнем. Но с другой стороны, функция x^x имеет областью определения множество положительных чисел (это, конечно, договоренность — рассматривать функцию $f(x)^{g(x)}$ при $f(x) > 0$, но разумная), а тогда -1 не является корнем.

Вот аналогичный пример-ловушка: является ли число 2 корнем уравнения $(\sin x)^x + (\cos x)^x = 1$? Возможный ответ — да, ибо сумма квадратов синуса и косинуса равна 1, но при $x = 2$ $\cos 2 < 0$, а потому 2 — не корень.»

Не странно ли это? Да, $(-1)^{-1} = -1$, но ... -1 — не корень уравнения « $x^x = x$ »! Да, $(\sin 2)^2 + (\cos 2)^2 = 1$, но ... 2 — не корень

уравнения $(\sin x)^x + (\cos x)^x = 1$! Почему? Оказывается, имеется какая-то договоренность. К сожалению, в [5] не сообщается, о какой договоренности идет речь. Но в чем бы она ни состояла и кто бы ее ни заключил, эта договоренность противоречит тому, что говорится о степенях в школьных учебниках математики.

Напомним [6, с. 259]: « $\langle \dots \rangle$ для любого действительного числа α и каждого положительного x определено число x^α . $\langle \dots \rangle$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция, заданная формулой $f(x) = x^\alpha$, называется *степенной* (с показателем α).

Если $\alpha > 0$, то степенная функция определена и при $x = 0$, поскольку $0^\alpha = 0$. При целых α формулой $f(x) = x^\alpha$ степенная функция определена и для $x < 0$.

Видимо, первая из этих трех фраз и есть упомянутая в [5] договоренность. Однако определение и следующие две фразы не оставляют сомнения в ошибочности такого ее толкования.

Чтобы внести окончательную ясность, напомним, что понятие степени в школьном курсе математики определяется в несколько шагов. Сначала определяются степени с натуральными показателями (7-й класс). Они определены для любых действительных чисел. Затем для чисел, отличных от нуля, определяются нулевая степень и степени с отрицательными целыми показателями (8-й класс). После этого для любых положительных чисел определяются степени с любыми рациональными показателями (9-й класс). И, наконец, для любых положительных чисел, определяются степени с любыми действительными показателями (11-й класс). В итоге оказывается, что в школьных учебниках

$$u^t \text{ определено } \begin{cases} \text{для всех действительных } t, & \text{если } u > 0; \\ \text{только для положительных } t, & \text{если } u = 0; \\ \text{только для целых } t, & \text{если } u < 0. \end{cases}$$

Должны ли мы после каждого шага забывать то, чему научились прежде? Например, должны ли мы разучиться возводить в квадрат отрицательные числа после того, как нас научат возводить положительные числа в степени с иррациональными показателями? Совершенно ясно, что — нет, и приведенная нами цитата из учебника алгебры и начал анализа недвусмысленно указывает на это.

Поняв это, вернемся к уравнению « $x^x = x$ ». В соответствии со сказанным о степенях его решение естественно распадается на три части, отвечающие случаям, когда $x > 0$, $x = 0$ и $x < 0$.

РЕШЕНИЕ. 1. Пусть $x > 0$. Тогда $x = 10^{\lg x}$. Значит, $x^x = 10^{x \lg x}$.
Уравнение принимает вид

$$10^{x \lg x} = 10^{\lg x}.$$

Решаем полученное уравнение:

$$x \lg x = \lg x; \quad x = 1 \text{ или } \lg x = 0; \quad x = 1.$$

2. Пусть $x = 0$. Тогда определены только положительные степени x . Значит, x^x не определено и 0 не является корнем решаемого уравнения.

3. Пусть $x < 0$. Тогда определены лишь целые степени x . Значит, нецелых отрицательных корней решаемое уравнение не имеет.

Пусть x — целое (и отрицательное). Тогда x либо четное, либо нечетное.

3а) Если x — четное, то, поскольку $x \neq 0$, $x^x > 0$. А $x < 0$. Значит, равенство « $x^x = x$ » не выполняется и, тем самым, четных отрицательных целых корней уравнение не имеет.

3б) Пусть x — нечетное (отрицательное, целое) число. Тогда $-x > 0$, так что $-x = 10^{\lg(-x)}$, а $x = -10^{\lg(-x)}$. Отсюда, учитывая нечетность (показателя степени) x , получаем

$$x^x = \left(-10^{\lg(-x)}\right)^x = -\left(10^{\lg(-x)}\right)^x = -10^{x \lg(-x)}.$$

Уравнение принимает вид

$$-10^{x \lg(-x)} = -10^{\lg(-x)}.$$

Решая полученное уравнение, последовательно находим

$$\begin{aligned} x \cdot \lg(-x) &= \lg(-x); & x = 1 \text{ или } \lg(-x) &= 0; \\ x = 1 \text{ или } -x &= 1; & x = 1 \text{ или } x &= -1. \end{aligned}$$

Поскольку, по предположению, $x < 0$, остается только $x = -1$.

ОТВЕТ. $x^x = x$ в точности тогда, когда $x = 1$ или $x = -1$.

[Имеются руководства, в которых полагают $0^0 = 1$. Тогда при $x = 0$ решаемое уравнение означает, что $1 = 0$, и 0 тоже не является корнем. Наконец, имеются руководства, в которых полагают $0^0 = 0$. В этом случае 0 является корнем рассмотренного уравнения.]

Итак, вопреки тому, что утверждается в [5], -1 является корнем уравнения « $x^x = x$ ». Точно так же 2 является корнем уравнения « $(\sin x)^x + (\cos x)^x = 1$ ».

Автор благодарит рецензентов и В. С. Абатурову, рекомендации которых способствовали улучшению статьи.

Литература

1. Алгебра: Учеб. для 7 кл. сред. шк. / Под ред. С. А. Теляковского.—М.: Просвещение, 1990.
2. Алгебра: Учеб. для 8 кл. сред. шк. / Под ред. С. А. Теляковского.—М.: Просвещение, 1991.
3. Фреге Г. О смысле и значении // Сб. тр.: Фреге Г. Логика и логическая семантика.—М.: Аспект Пресс, 2000.—С. 230–246.
4. Назиев А. Х. Гуманитаризация основ специальной подготовки учителей математики в педагогических вузах: Дисс. ... докт. пед. наук.—М.: МПГУ, 2000.—URL: <http://people.rsu.edu.ru/~a.naziev/DissB/DissB.pdf>.
5. Рыжик В. И. 30000 уроков математики.— М.: Просвещение, 2003.—288 с.
6. Колмогоров А. Н. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10–11 кл. сред. шк.—М.: Просвещение, 1990.—320 с.

НАЗИЕВ АСЛАНБЕК ХАМИДОВИЧ
Рязанский государственный
университет им. С. А. Есенина
РОССИЯ, 390000, Рязань, ул. Свободы, 46
E-mail: a.naziev@rsu.edu.ru

IMPROVING THE TRADITIONAL METHODS OF TEACHING OF MATHEMATICS' TRADITIONAL BRANCHES. I. TO OVERCOME THE DEMERITS RELATED TO IDENTITIES AND IDENTITY TRANSFORMATIONS

Naziev A. Kh.

After Boltyansky's famous paper "To overcome the misconceptions related to domains of permissible values", we go further and consider the problem in connection with the problem of identities and identity transformations. We claim and prove that replacement of identities and identity transformations with axioms, definitions, theorems and their application permits to improve teaching of mathematics (in suitable themes).

Key words: identity, axiom, definition, theorem, sense, denotation.

КИЛЛИНГОВЫ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ ПОСТОЯННОЙ ДЛИНЫ НА КОМПАКТНЫХ ОДНОРОДНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Ю. Г. Никоноров

Киллинговы векторное поля на римановом многообразии (M, g) порождают связную группу изометрий этого многообразия. Киллинговы поля постоянной длины являются естественным обобщением векторных полей, порождающих векторные переносы в евклидовых пространствах. В работе обсуждаются специальные проблемы, связанные с киллинговыми векторными полями постоянной длины на однородных римановых многообразиях.

Ключевые слова: однородные пространства, однородные по Клиффорду — Вольфу пространства, геодезически орбитальные пространства, эрмитовы симметрические пространства, однородные римановы многообразия, векторные поля Киллинга постоянной длины.

1. Введение

Этот доклад основан на недавней работе автора [13]. Напомним, что векторное поле X на римановом многообразии (M, g) называется киллинговым, если $L_X g = 0$. Такие векторные поля характеризуются тем, что они порождают однопараметрические группы изометрий многообразия (M, g) . Здесь мы обсудим некоторые свойства векторных полей Киллинга постоянной длины на римановых многообразиях.

Детальное исследование киллинговых векторных полей постоянной длины на римановых многообразиях началось в работах [2–4], хотя некоторые результаты в этом направлении известны на протяжении многих десятилетий (см. более подробное обсуждение истории вопроса в [1, 2]). Необходимо отметить наличие естественной связи на римановом многообразии (M, g) между киллинговыми полями постоянной длины и переносами Клиффорда — Вольфа.

Напомним, что *переносом Клиффорда — Вольфа* на римановом многообразии (M, g) называется изометрия, перемещающая все точки M на одно и то же расстояние, т. е. $\rho_g(x, s(x)) \equiv \text{const}$ для всех $x \in M$, где через ρ_g обозначена внутренняя метрика на M , порожденная метрическим тензором g . Переносы Клиффорда — Вольфа

естественно возникают в изучении однородных римановых накрытий однородных римановых многообразий [15]. Переносы Клиффорда — Вольфа изучались в различных работах, см., например, [7–10]. Более подробные обсуждения и списки литературы по этому вопросу приведены в работах [5, 17].

Если однопараметрическая группа изометрий $\gamma(t)$ на римановом многообразии (M, g) , порожденная киллинговым векторным полем Z , состоит из переносов Клиффорда — Вольфа, то поле Z имеет, очевидно, постоянную длину. Это утверждение может быть частично обращено следующим образом: если риманово многообразие (M, g) имеет радиус инъективности, ограниченный снизу некоторой положительной константой (это условие заведомо выполнено для всех компактных и всех однородных многообразий), и Z — векторное поле Киллинга постоянной длины на (M, g) , то изометрии $\gamma(t)$ из однопараметрической группы изометрий, порожденной векторным полем Z , являются переносами Клиффорда — Вольфа по крайней мере для достаточно малых значений $|t|$, см. [3].

Метрическое пространство (M, ρ) называется *однородным по Клиффорду — Вольфу*, если для любых точек $x, y \in M$ существует перенос Клиффорда — Вольфа f пространства (M, ρ) такой, что $f(x) = y$.

Связное риманово многообразие (M, g) является *однородным по Клиффорду — Вольфу*, если оно однородно по Клиффорду — Вольфу относительно своей внутренней метрики ρ_g . Кроме того, оно G -однородно по Клиффорду — Вольфу, если в приведенном определении однородности по Клиффорду — Вольфу перенос Клиффорда — Вольфа f можно выбрать из (под)группы Ли G изометрий (M, g) .

Односвязные однородные по Клиффорду — Вольфу римановы многообразия классифицированы в работе [5]: односвязное риманово многообразие однородно по Клиффорду — Вольфу тогда и только тогда, когда оно является прямым метрическим произведением евклидова пространства, нечетномерных сфер постоянной кривизны и односвязных компактных простых групп Ли, снабженных биинвариантными римановыми метриками.

Отметим, что каждая геодезическая γ на однородном по Клиффорду — Вольфу римановом многообразии (M, g) является интегральной кривой векторного поля Киллинга постоянной длины на (M, g) , см. [5].

В недавней работе [17] Минг Ксу и Джозеф А. Вольф получили классификацию нормальных однородных римановых пространств G/H с нетривиальными киллинговыми векторными полями постоянной длины, где группа Ли G компактна и проста. Каждое такое пространство с условием $\dim(G) > \dim(H) > 0$ является локально симметрическим, а его универсальное риманово накрытие является либо нечетномерной сферой постоянной кривизны, либо симметрическим пространством $SU(2n)/Sp(n)$.

Это результат очень важен в контексте изучения общих римановых однородных многообразий с нетривиальными полями Киллинга постоянной длины. В более поздней работе [15] тех же авторов и Фабио Подесты этот результат был распространен на класс нормальных однородных псевдоримановых пространств.

Далее, основываясь на работе [13], мы представим некоторые структурные результаты по алгебрам Ли транзитивных групп движений общих компактных однородных римановых многообразий с нетривиальными полями Киллинга постоянной длины.

2. Примеры полей Киллинга постоянной длины

Рассмотрим несколько примеров векторных полей Киллинга постоянной длины. Хорошо известно, что группа левых сдвигов, также как и группа правых сдвигов, компактной группы Ли G , снабженной некоторой биинвариантной римановой метрикой μ , состоит из переносов Клиффорда — Вольфа. Следовательно, киллинговы поля, которые порождают эти группы сдвигов, имеют постоянную длину на (G, μ) . Ясно, что каждое прямое метрическое произведение (G, μ) с любым римановым многообразием также имеет векторное поле Киллинга постоянной длины. Перейдем к рассмотрению более сложных примеров.

ПРИМЕР 1. Пусть F — связная компактная простая группа Ли, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим так называемое пространство Леджера — Обаты $F^k / \text{diag}(F)$ (заметим, что при $k = 2$ получается неприводимое симметрическое пространство).

Снабдим его инвариантной римановой метрикой g . Структура множества инвариантных римановых метрик на $F^k / \text{diag}(F)$ является довольно сложной при $k \geq 3$. Следует отметить также, что для каждой компактной группы Ли F , пространство Леджера — Обаты $F^k / \text{diag}(F)$ диффеоморфно группе Ли F^{k-1} .

Легко видеть, что каждый экземпляр F в F^k состоит из переносов Клиффорда — Вольфа на $(F^k/\text{diag}(F), g)$, а каждый экземпляр алгебры Ли $\mathfrak{f}$ в $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{f} \oplus \dots \oplus \mathfrak{f} = k \cdot \mathfrak{f}$ состоит из векторных полей Киллинга постоянной длины для любой инвариантной римановой метрики g . В частности, можно рассмотреть g , порожденную формой Киллинга алгебры Ли $k \cdot \mathfrak{f}$. В таком случае $(F^k/\text{diag}(F), g)$ является неразложимым (даже локально).

Приведенные пример можно легко обобщить, см. подробности в [13]. Рассмотрим теперь другой тип примеров.

Будем говорить, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ киллинговых векторных полей *транзитивна* на римановом многообразии (M, g) , если $\mathfrak{g}$ порождает касательное пространство к M в каждой точке $x \in M$, или, что эквивалентно, связная группа изометрий G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ действует транзитивно на (M, g) .

Следующее простое наблюдение дает множество примеров векторных полей Киллинга постоянной длины на однородных римановых многообразиях. Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ киллинговых векторных полей транзитивна на римановом многообразии (M, g) и киллингово поле Z на (M, g) коммутирует с $\mathfrak{g}$ (в частности, Z может быть взята из центра алгебры Ли $\mathfrak{g}$), тогда Z имеет постоянную длину на (M, g) . Действительно, для любого $X \in \mathfrak{g}$ имеем $X \cdot g(Z, Z) = 2g([X, Z], Z) = 0$. Поскольку $\mathfrak{g}$ транзитивна на M , мы получаем $g(Z, Z) = \text{const}$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим неприводимое симметрическое пространство $M = SU(2n)/Sp(n)$, $n \geq 2$. Известно (см., например, [15]), что подгруппа $SU(2n-1) \cdot S^1 \subset SU(2n)$ действует транзитивно на M . Следовательно, киллингово поле Z , порождаемое S^1 , является киллинговым векторным полем постоянной длины на $M = SU(2n)/Sp(n)$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим сферу S^{2n-1} , $n \geq 2$, как симметрическое пространство $S^{2n-1} = SO(2n)/SO(2n-1)$. Известно, что подгруппа $U(n) = SU(n) \cdot S^1 \subset SO(2n)$ действует транзитивно на S^{2n-1} . Таким образом, киллингово векторное поле Z , порождающее S^1 , имеет постоянную длину на S^{2n-1} .

Отметим, что полной связной группой изометрий сферы S^{n-1} с канонической римановой метрикой g_{can} постоянной кривизны 1 является группа $SO(n)$, но существует ряд подгрупп G группы $SO(n)$, также транзитивно действующих на S^{n-1} .

Следует отметить, что сфера S^{n-1} является G -однородной по Клиффорду — Вольфу для некоторых из них:

$S^{2n-1} = SO(2n)/SO(2n-1) = U(n)/U(n-1)$ $SO(2n)$ -однородна по Клиффорду — Вольфу и $U(n)$ -однородна по Клиффорду — Вольфу;

$S^{4n-1} = Sp(n)/Sp(n-1) = Sp(n) \cdot S^1/Sp(n-1) \cdot S^1 = SU(2n)/SU(2n-1)$ $Sp(n)$ -однородна по Клиффорду — Вольфу, $Sp(n) \cdot S^1$ -однородна по Клиффорду — Вольфу и $SU(2n)$ -однородна по Клиффорду — Вольфу;

$S^7 = Spin(7)/G_2$ $Spin(7)$ -однородна по Клиффорду — Вольфу;

$S^{15} = Spin(9)/Spin(7)$ $Spin(9)$ -однородна по Клиффорду — Вольфу (см. подробности в работе [6]).

Как оказалось, каждый из этих результатов дает пример киллингова векторного поля постоянной длины в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, соответствующей группе Ли G , см. подробности в работах [6] и [13].

3. Новые структурные результаты

Рассмотрим произвольную группу Ли G , действующую на римановом многообразии (M, g) изометриями. Соответствующее действие $a \in G$ на $x \in M$ будем обозначать через $a(x)$. Мы отождествляем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G с алгеброй Ли векторных полей Киллинга на (M, g) следующим образом. Для произвольного $U \in \mathfrak{g}$ рассматриваем однопараметрическую группу $\exp(tU) \subset G$ изометрий (M, g) и определяем векторное поле Киллинга $\tilde{U}$ по стандартной формуле

$$\tilde{U}(x) = \left. \frac{d}{dt} \exp(tU)(x) \right|_{t=0}. \quad (1)$$

Ясно, что отображение $U \rightarrow \tilde{U}$ является линейным и инъективным, но $[\tilde{U}, \tilde{V}] = -[\widetilde{[U, V]}]$.

Пусть (M, g) — связное компактное риманово многообразие, G — транзитивная группа изометрий (M, g) . Отождествим элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G с векторными полями Киллинга на (M, g) как указано выше. Поскольку группа G компактна, мы имеем разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k, \quad (2)$$

где $\mathfrak{c}$ — центр, а $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, \dots, k$, — простые идеалы в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Теперь мы готовы сформулировать основные результаты работы [13], используя приведенные выше обозначения, отождествление (1) и разложение (2).

Теорема 1. Пусть $Z = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_l \in \mathfrak{g}$ — векторное поле Киллинга постоянной длины на (M, g) , где $1 \leq l \leq k$, $Z_0 \in \mathfrak{c}$, $Z_i \in \mathfrak{g}_i$ и $Z_i \neq 0$ для $1 \leq i \leq l$. Тогда выполнены следующие утверждения:

1) Для любых $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq l$, имеет место равенство $g(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) = 0$ во всех точках M . В частности, $g(Z_i, \mathfrak{g}_j) = 0$ и $g(Z_i, Z_j) = 0$.

2) Каждое поле Киллинга вида $Z_0 + Z_i$, $1 \leq i \leq l$, имеет постоянную длину.

Обратно, если для всех i , $1 \leq i \leq l$, киллинговы поля $Z_0 + Z_i$ имеют постоянную длину и для всех $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq l$, выполнено равенство $g(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) = 0$, то киллингово поле $Z = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_l$ имеет постоянную длину на (M, g) .

Следствие 1. Если (в условиях теоремы 1) выполнены соотношения $\mathfrak{c} = 0$ и $k = l$, то каждая алгебра Ли $\mathfrak{g}_i$, $1 \leq i \leq k$, является параллельным распределением на (M, g) . Более того, если (M, g) односвязно, то оно является прямым метрическим произведением k римановых многообразий.

Теорема 1 позволяет сосредоточиться на исследовании векторных полей Киллинга постоянной длины следующего специального вида: $Z = Z_0 + Z_i$, где Z_0 лежит в центре $\mathfrak{c}$ и Z_i лежит в простом идеале $\mathfrak{g}_i$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Без ограничения общности можно считать, что $i = 1$.

Теорема 2. Пусть $Z = Z_0 + Z_1 \in \mathfrak{g}$ — векторное поле Киллинга постоянной длины на (M, g) , где $Z_0 \in \mathfrak{c}$, $Z_1 \in \mathfrak{g}_1$ и $Z_1 \neq 0$, и пусть $\mathfrak{k}$ — централизатор Z (и Z_1) в $\mathfrak{g}_1$. Тогда либо каждый $X \in \mathfrak{g}_1$ является киллинговым полем постоянной длины на (M, g) , либо пара $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{k})$ является одной из следующих неприводимых эрмитовых симметрических пар:

- 1) $(su(p+q), su(p) \oplus su(q) \oplus \mathbb{R})$, $p \geq q \geq 1$;
- 2) $(so(2n), su(n) \oplus \mathbb{R})$, $n \geq 5$;
- 3) $(so(p+2), so(p) \oplus \mathbb{R})$, $p \geq 5$;
- 4) $(sp(n), su(n) \oplus \mathbb{R})$, $n \geq 2$;

В последнем случае центр алгебры Ли $\mathfrak{k}$ является одномерной алгеброй Ли, натянутой на вектор Z_1 .

Дополнительные подробности об эрмитовых симметрических парах можно найти в работе [14] и в книге [15].

Если киллингово поле постоянной длины $Z = Z_0 + Z_1$ удовлетворяет одному из случаев 1)–4) в теореме 2, мы говорим, что оно имеет *эрмитов тип*.

Напомним, что элемент $U \in \mathfrak{g}$ называется *регулярным* в $\mathfrak{g}$, если его централизатор имеет минимальную размерность среди централизаторов всех элементов $\mathfrak{g}$. В случае алгебры Ли компактной группы Ли централизатор каждого регулярного элемента коммутативен (и является подалгеброй Картана). Для элементов Z эрмитова типа, Z_1 не является регулярным элементом в $\mathfrak{g}_1$, поскольку алгебра Ли $\mathfrak{k}$ не является коммутативной в случаях 1)–4) теоремы 2. Таким образом, мы получаем

Следствие 2. Если Z_1 является регулярным элементом в алгебре Ли $\mathfrak{g}_1$ (в предположениях теоремы 2), то каждое векторное поле $X \in \mathfrak{g}_1$ имеет постоянную длину на (M, g) .

Кроме того, справедлив следующий результат.

Теорема 3. Если $Z = Z_0 + Z_1 + \dots + Z_k$ — регулярный элемент в $\mathfrak{g}$ и он имеет постоянную длину на (M, g) , то выполнены следующие утверждения:

- 1) $g(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) = 0$ для всех $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, k$, в каждой точке M ;
- 2) $g(Z_0, \mathfrak{g}_i) = 0$ для всех $i = 1, \dots, k$, в каждой точке M ;
- 3) каждое векторное поле $X \in \mathfrak{g}_s$, где $\mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_k$ — полупростая часть алгебры Ли $\mathfrak{g}$, имеет постоянную длину на (M, g) .

Если, кроме того, M односвязно, то $Z_0 = 0$ и (M, g) является прямым метрическим произведением множителей (G_i, μ_i) , $1 \leq i \leq k$, где G_i — связная и односвязная компактная простая группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_i$, а μ_i — некоторая биинвариантная риманова метрика на G_i .

4. Нерешенные задачи

Все приведенные выше результаты могут быть использованы для классификации однородных римановых многообразий с векторными полями Киллинга постоянной длины. Мы сформулируем несколько нерешенных задач в этом направлении.

Проблема 1. Классифицировать однородные римановы пространства $(G/H, g)$ с нетривиальными векторными полями Киллинга постоянной длины в предположении простоты группы G .

Напомним, что в случае простой группы G нормальные однородные римановы пространства $(G/H, g)$ с киллинговыми полями

постоянной длины классифицированы в работе [17]. Но следует подчеркнуть, что множество G -инвариантных римановых метрик на пространстве G/H может иметь сколь угодно большую размерность даже для простых групп G .

Вопрос 1. Пусть (M, g) — однородное риманово многообразие, G — его полная связная группа изометрий, а $Z \in \mathfrak{g}$ — поле Киллинга постоянной длины на (M, g) . Правда ли, что $\mathfrak{k}$ — централизатор Z в $\mathfrak{g}$, действует транзитивно на M ?

Отметим, что для симметрических пространств $(M = G/H, g)$ известен утвердительный ответ на этот вопрос (см. лемму 3 в работе [3]). Следует отметить, что вопрос 1 остается интересным даже в предположении простоты группы G .

Существует естественное обобщение нормальных однородных пространств. Напомним, что риманово многообразие $(M = G/H, g)$, где H — компактная подгруппа группы Ли G и g — G -инвариантная риманова метрика, называется *геодезически орбитальным пространством*, если каждая его геодезическая γ является орбитой однопараметрической подгруппы группы G . Детальная информация об этом классе пространств приведена, например, в [1, 11]. Хорошо известно, что все нормальные однородные римановы пространства являются геодезически орбитальными. Следующая проблема является совершенно естественной.

Проблема 2. Классифицировать геодезически орбитальные римановы пространства с нетривиальными полями Киллинга постоянной длины.

Напомним следующий результат работы [12]: Пусть $(M = G/H, g)$ — геодезически орбитальное риманово пространство, $\mathfrak{g}$ — его алгебра Ли киллинговых векторных полей, а $\mathfrak{a}$ — коммутативный идеал в $\mathfrak{g}$, тогда каждое векторное поле $X \in \mathfrak{a}$ имеет постоянную длину на (M, g) . Таким образом, при исследовании проблемы 2 достаточно ограничиться случаем однородных пространств G/H с полупростой группой G .

Отметим, что существуют примеры, покрывающие все возможности в теореме 2 за исключением случая 3), где имеются примеры лишь для отдельных значений p .

Вопрос 2. Существует ли однородное риманово пространство $(M = G/H, g)$ с киллинговым векторным полем постоянной длины $Z \in \mathfrak{g}$, соответствующее случаю 3) в теореме 2, т. е. $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{k}) = (\mathfrak{so}(p+2), \mathfrak{so}(p) \oplus \mathbb{R})$, для $p = 6$ и для $p \geq 8$?

Отметим, что соответствующие примеры для $p = 5$ и для $p = 7$ известны, см. [13]. Отметим также, что существуют серьезные ограничения на римановы многообразия $(M = G/H, g)$, речь о которых идет в вопросе 2, см. подробности в [13].

Литература

1. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. Римановы многообразия и однородные геодезические.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012.—414 с.—(Итоги науки. Юг России. Математическая монография. Вып. 4).—URL: <http://rucont.ru/efd/230575>.
2. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. Killing vector fields of constant length on Riemannian manifolds // Siberian Math. J.—2008.—Vol. 49, № 3.—P. 395–407.
3. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. Killing vector fields of constant length on locally symmetric Riemannian manifolds // Transform. Groups.—2008.—Vol. 13, № 1.—P. 25–45.
4. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. Regular and quasiregular isometric flows on Riemannian manifolds // Siberian Adv. Math.—2008.—Vol. 18, № 3.—P. 153–162.
5. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. Clifford — Wolf homogeneous Riemannian manifolds // J. Differ. Geom.—2009.—Vol. 82, № 3.—P. 467–500.
6. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. Generalized normal homogeneous Riemannian metrics on spheres and projective spaces // Ann. Glob. Anal. Geom.—2014.—Vol. 45, № 3.—P. 167–196.
7. Deng S., Xu M. Clifford — Wolf homogeneous Randers spaces // J. Lie Theory.—2013.—Vol. 23, № 3.—P. 837–845.
8. Deng S., Xu M. Clifford — Wolf translations of homogeneous Randers spheres // Israel J. Math.—2014.—Vol. 199, № 2.—P. 507–525.
9. Deng S., Xu M. Clifford — Wolf translations of left invariant Randers metrics on compact Lie groups // Q. J. Math.—2014.—Vol. 65, № 1.—P. 133–148.
10. Freudenthal H. Clifford — Wolf-Isometrien symmetrischer Raume // Math. Ann.—1963.—Vol. 150.—P. 136–149.
11. Kowalski O., Vanhecke L. Riemannian manifolds with homogeneous geodesics // Boll. Union Mat. Ital. Ser. B.—1991.—Vol. 5, № 1.—P. 189–246.
12. Nikonorov Yu. G. Geodesic orbit manifolds and Killing fields of constant length // Hiroshima Math. J.—2013.—Vol. 43, № 1.—P. 129–137.
13. Nikonorov Yu. G. Killing vector fields of constant length on compact homogeneous Riemannian manifolds // Ann. Glob. Anal. Geom.—2015.—Vol. 48, № 4.—P. 305–330.
14. Wolf J. A. On the classification of Hermitian symmetric spaces // J. Math. Mech.—1964.—Vol. 13.—P. 489–495.
15. Wolf J. A. Spaces of constant curvature. Sixth edition.—RI: AMS Chelsea Publishing, Providence, 2011.—420 p.
16. Wolf J. A., Podestà F., Xu M. Toward a classification of Killing vector fields of constant length on pseudo-Riemannian normal homogeneous spaces.—2015.—(Preprint).—URL: <http://arxiv.org/abs/1503.08267>.
17. Xu M., Wolf J. A. Killing vector fields of constant length on Riemannian normal homogeneous spaces.—2014.—31 p.—(Preprint).—URL: <http://arxiv.org/abs/1412.3177>.

Никоноров Юрий Геннадьевич
Южный математический институт ВЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: nikonorov2006@mail.ru

KILLING VECTOR FIELDS
OF CONSTANT LENGTH ON COMPACT
HOMOGENEOUS RIEMANNIAN MANIFOLDS

Nikonorov Yu. G.

Killing vector fields on a Riemannian manifold (M, g) generate the full connected isometry group of (M, g) . Killing fields of constant length are a natural generalization of vector fields, generating vector translations in Euclidean spaces. Some special problems concerning Killing vector fields of constant length on homogeneous Riemannian manifolds are discussed in this paper.

Key words: homogeneous spaces, Clifford — Wolf homogeneous spaces, geodesic orbit spaces, Hermitian symmetric spaces, homogeneous Riemannian manifolds, Killing vector fields of constant length.

ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА КОШИ — БУНЯКОВСКОГО В ТЕРМИНАХ МАКСИМУМОВ И МИНИМУМОВ ФУНКЦИЙ

С. М. Ситник

В статье рассматриваются уточнения интегрального неравенства Коши — Буняковского в терминах средних значений. Основным результатом является одно из таких уточнений, содержащих в качестве выбранных средних максимум и минимум функций. Приводятся известные доказательства этого неравенства, рассматривается его приложение к получению оценок для гамма- и неполных гамма-функций, обсуждается возможность некоторых обобщений, в том числе на случай неравенств Роджерса — Гёльдера — Рисса и Минковского.

Ключевые слова: неравенства, неравенство Коши — Буняковского, средние, средние Радо, гамма-функция Эйлера.

1. Исторические сведения

В статье рассматриваются уточнения интегрального и дискретного неравенств Коши — Буняковского. После короткого исторического введения излагаются результаты автора, в которых разработан метод получения одного класса таких уточнений с использованием средних значений. Основное содержание работы составляет рассмотрение конкретного варианта уточняющего неравенства с использованием максимумов и минимумов функций. Приводятся несколько известных доказательств указанного неравенства, его возможные усиления, приложение к получению оценок для гамма- и неполных гамма-функций. Рассмотрены дальнейшие применения к уточнению неравенства Минковского, а также дискретных версий этих неравенств для сумм. Указано, что подобное уточнение для неравенства Коши — Буняковского является в определенной степени исключением, для более общего неравенства Роджерса — Гёльдера — Рисса уточнений подобного вида не существует.

Неравенства Коши — Буняковского для конечных сумм, рядов и интегралов относятся к числу классических, они используются практически во всех разделах математики, как теоретических, так и прикладных. Из ссылок ограничимся указаниями на хорошо известные

общие монографии по неравенствам [1–4], а также на прекрасно написанные специальные монографии Севера Драгомира [5] и Джона Майкла Стила [6]. Отметим также обзоры автора [7–11].

Неравенство Коши — Буняковского для сумм было доказано О. Коши в 1821 г. (см. [12]), его курс Анализа, содержащий данное неравенство, вышел в России в 1831 г. в переводе В. Я. Буняковского [13]. Само неравенство используется в тексте этого учебника, оно также вынесено Буняковским в отдельное приложение. Он не дал, как и Коши, полного доказательства, но всем понятно, что и Коши, и Буняковский его знали. На самом деле, неравенство Коши сразу следует из тождества Лагранжа, которое было доказано им почти за 50 лет до Коши при $n = 3$, а при $n = 2$ было известно еще Диофанту. Лагранж вывел свое тождество при изучении геометрии пирамид.

Неравенство Коши — Буняковского для интегралов было опубликовано В. Я. Буняковским в 1859 г. (см. [14]), и затем переоткрыто через двадцать пять лет Г. А. Шварцем в 1884 г. (см. [15]). В связи с этим переоткрытием среди математиков популярны два исторических мифа:

- Буняковский в статье 1859 г. только привел интегральную форму своего неравенства без всяких дополнительных примеров и приложений.
- Буняковский в статье 1859 г. привел только неравенство для обычных интегралов, а Шварц якобы доказал его для случая общих скалярных произведений.

Оба эти мифа не соответствуют историческим фактам, и поэтому неверны. По поводу первого отметим, что работа Буняковского содержит с десяток различных приложений как дискретного, так и интегрального неравенств, в том числе с подробными численными расчетами. На это недавно обратил еще раз внимание математиков проф. Дж. Сандор в работах [16, 17], рассмотрев подробно результаты Буняковского, а также их возможные уточнения и обобщения в различных задачах. Второй миф также неверен. На самом деле большая работа Шварца была посвящена его альтернирующему методу, а также тому, что на современном языке мы бы назвали оценками спектральных характеристик краевых задач для уравнения Лапласа в терминах геометрических характеристик области. При оценке сходимости он использовал интегральное неравенство в специаль-

ном случае для суммы произведений частных производных

$$\sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial y_k} \leq \sqrt{\sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2} \sqrt{\sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2},$$

которому в работе посвящен один абзац из шести строк. В нем дан классический вывод через квадратный трехчлен. Обдумывание этой работы вскоре привело Эмиля Пикара к первой версии метода последовательных приближений для дифференциальных уравнений. Герман Амандус Шварц многое открыл сам, и нет никакой нужды приписывать ему чужие достижения. Вспомним альтернирующий метод Шварца, теорему о равенстве смешанных производных, решение задачи Фаньяно, интеграл Кристоффеля — Шварца, принцип симметрии Римана — Шварца, сапог Шварца, производную Шварца и т. д. А общее неравенство для пространств со скалярным произведением, вопреки распространенному мнению, было опубликовано впервые только в книге фон Неймана «Математические основания квантовой механики» в 1928 г. [18]. Автор благодарен проф. Ивану Димовски [19], указавшему ему на эту информацию из монографии Альбрехта Пича по истории функционального анализа [20].

Автору неоднократно (как правило, безуспешно) приходилось отстаивать свою позицию, что если первооткрыватель научного результата известен, то приписывать его другим из любых соображений — это некорректно, и свидетельствует о недостаточной научной и общечеловеческой культуре приписывающего по любой причине: невнимательности, лени, ложного понимания «следования установившейся традиции», заискивания или прямой корысти и подхалимажа перед вышестоящими начальниками, спонсорами, грантодателями и т. д. Тот, кто спутает авторство известной симфонии, или романа, или картины обычно сразу будет назван и необразованным, и некультурным, это считается позорным. А подобная небрежность при цитировании известных математических результатов встречается очень часто и считается обычным делом. Но ведь точное указание на авторов известных результатов, в тех случаях, когда они достоверно известны, — это единственный способ, которым мы можем выразить свое уважение к памяти первооткрывателей-классиков и их выдающимся заслугам перед наукой.

2. Уточнение неравенства Коши — Буняковского методом средних значений

Известно много обобщений и уточнений неравенства Коши — Буняковского (см., например, [1–6]). В работах [7–11] изложен принадлежащий автору метод средних значений для построения некоторых классов таких уточнений. Кратко говоря, суть этого метода заключается в том, что по каждому абстрактному среднему, удовлетворяющему набору естественных аксиом, выписываются в явном виде уточнения дискретного или интегрального неравенств Коши — Буняковского. Указанная методика возникла из анализа одного неравенства Милна [1] и теоремы Карлица — Дэйкина — Элиезера (CDE Theorem) для дискретного случая. Изложим кратко основные результаты этого метода, следуя [7, 8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть даны два числа $x \geq 0$, $y \geq 0$. Назовем функцию $M(x, y)$ *средним* этих чисел, если для нее выполнены следующие свойства (аксиомы).

1. Свойство промежуточности:

$$\min(x, y) \leq M(x, y) \leq \max(x, y).$$

2. Свойство несмещенности:

$$M(x, x) = x.$$

3. Свойство однородности:

$$M(ax, ay) = a \cdot M(x, y).$$

4. Свойство монотонности: если $x_1 \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$, то

$$M(x_1, y) \leq M(x_2, y), \quad M(x, y_1) \leq M(x, y_2).$$

Аксиоматическое определение средних используется во многих работах, начиная с Коши. Отметим, что свойства симметричности среднего для наших результатов не требуется, допускаются несимметричные средние.

Среди множества средних наиболее известными являются средние арифметическое, геометрическое, квадратичное, полуквадратичное, гармоническое:

$$A(x, y) = \frac{x + y}{2}, \quad G(x, y) = \sqrt{xy}, \quad Q(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}},$$

$$S(x, y) = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} \right)^2, \quad H(x, y) = A\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = \frac{2xy}{x+y}, \quad x, y > 0.$$

Нам понадобится понятие дополнительного среднего.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для среднего $M(x, y)$ *дополнительное* к нему среднее определяется по формуле

$$M^*(x, y) = \frac{xy}{M(x, y)}, \quad x, y > 0. \quad (1)$$

Первым из наиболее известных классов средних, зависящих от параметра, являются степенные средние

$$M(x, y) = M_\alpha(x, y) = \left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad -\infty \leq \alpha \leq \infty, \quad \alpha \neq 0; \quad (2)$$

$$M_{-\infty}(x, y) = \min(x, y), \quad M_0 = \sqrt{xy}, \quad M_\infty(x, y) = \max(x, y).$$

Они образуют параметрическую шкалу

$$\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow M_{\alpha_1}(x, y) \geq M_{\alpha_2}(x, y), \quad \forall x, y.$$

Три исключительных значения $\{\alpha = -\infty, 0, +\infty\}$ получаются из неисключительных при помощи предельных переходов.

Классические средние выражаются через степенные, при этом справедливы известные неравенства

$$M_{-1}(x, y) = H(x, y) \leq M_0(x, y) = G(x, y) \leq M_{\frac{1}{2}}(x, y) = S(x, y) \leq \\ \leq M_1(x, y) = A(x, y) \leq M_2(x, y) = Q(x, y).$$

Для степенных средних от положительных чисел дополнительное среднее находится по формуле

$$(M_\alpha)^* = M_{-\alpha}.$$

Вторым известным классом параметрических средних являются средние Радо

$$R_\beta(x, y) = \left(\frac{x^{\beta+1} - y^{\beta+1}}{(\beta+1)(x-y)} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad -\infty \leq \beta \leq \infty, \quad \beta \neq 0, -1; \quad (3)$$

$$R_{-\infty}(x, y) = \min(x, y), \quad R_\infty(x, y) = \max(x, y).$$

Очевидно

$$R_{-2}(x, y) = M_0(x, y), \quad R_1(x, y) = M_1(x, y).$$

Исключительные значения приводят к логарифмическому среднему

$$R_{-1}(x, y) = L(x, y) = \frac{y - x}{\ln y - \ln x} \quad (4)$$

и идентрическому среднему (автор предпочитает термин «много-этажно-показательное»)

$$R_0(x, y) = \frac{1}{e} \left(\frac{y^y}{x^x} \right)^{\frac{1}{y-x}}. \quad (5)$$

Средние Радо также образуют параметрическую шкалу

$$\beta_1 > \beta_2 \Rightarrow R_{\beta_1}(x, y) \geq R_{\beta_2}(x, y), \quad \forall x, y;$$

с четырьмя исключительными значениями $\beta = \{-\infty, -1, 0, +\infty\}$. Дополнительным средним в этом случае является

$$R_{\beta}^*(x, y) = \frac{1}{R_{\beta}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)}.$$

Об общей теории средних см. [21, 22]. Средние $R_{\beta}(x, y)$ были введены и изучено Тибором Радо в [23], см. также [3, 21, 22].

Перед формулировкой дальнейших результатов примем соглашение о том, что все далее встречающиеся функции являются непрерывными, а интегралы понимаются в смысле Римана и существуют, эти условия в формулировках будем опускать, они предполагаются выполненными. В конце работы указано, от каких ограничений можно избавиться. Мы также не будем исследовать важный вопрос, когда в рассматриваемых неравенствах достигается равенство, за исключением основного результата работы.

Одним из основных результатов теории, развитой автором в [7–11], является следующее уточнение интегрального неравенства Коши — Буняковского.

Теорема 1. Пусть M — произвольное абстрактное среднее, удовлетворяющее перечисленным выше в определении 1 аксиомам 1–4,

M^* — дополнительное к нему среднее. Тогда справедливо обобщение интегрального неравенства Коши — Буняковского вида

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 &\leq \int_a^b (M(f, g))^2 dx \int_a^b (M^*(f, g))^2 dx \leq \\ &\leq \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, мы получаем переформулированный согласно работам [7–11] в терминах средних результат, что справедлив интегральный аналог *достаточной* части теоремы CDE Карлица — Дэйкина — Элиезера (см. [7, 8]) для дискретного случая. В работах [7–11] также доказан неожиданный результат, что в интегральном случае аналог *необходимой* части этой известной теоремы не выполняется.

Сделаем важное для дальнейшего замечание, что левое неравенство из (6) в силу определения дополнительного среднего (1) очевидно, так как оно само сводится к обычному неравенству Коши — Буняковского. Таким образом, содержательным в теореме 1 является правое неравенство между произведениями интегралов.

Теперь выбор любых различных средних и дополнительных к ним при помощи теоремы 1 порождает разнообразные обобщения вида (6) интегрального неравенства Коши — Буняковского. Например, при выборе степенных средних получается

Теорема 2. Для неотрицательных непрерывных функций $f(x)$, $g(x)$, не обращающихся в ноль на $[a, b]$, справедливо следующее обобщение неравенства Коши — Буняковского:

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 &\leq \int_a^b [M_\alpha(f, g)]^2 dx \int_a^b [M_{-\alpha}(f, g)]^2 dx = \\ &= \int_a^b (f^\alpha + g^\alpha)^{2/\alpha} dx \int_a^b f^2 g^2 (f^\alpha + g^\alpha)^{-2/\alpha} dx \leq \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Выпишем наиболее эффектные из приведенных неравенств с частными случаями степенных средних явно. Они соответствуют

выбору среднего полуквадратичного, арифметического и квадратичного:

$$\begin{aligned}
 \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 &\leq \int_a^b (\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})^4 dx \times \\
 &\times \int_a^b \frac{f^2 g^2}{(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})^4} dx \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx, \\
 \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 &\leq \int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx \times \\
 &\times \int_a^b \frac{f^2 g^2}{(f(x) + g(x))^2} dx \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx, \\
 \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 &\leq \int_a^b (f^2(x) + g^2(x)) dx \times \\
 &\times \int_a^b \frac{f^2 g^2}{f^2(x) + g^2(x)} dx \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.
 \end{aligned}$$

При $\alpha = 2$ получаем интегральный вариант известного неравенства Милна (см. [1, 5, 7, 8]).

При выборе средних Радо получается

Теорема 3. *Справедливо следующее уточнение неравенства Коши — Буняковского:*

$$\begin{aligned}
 \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 &\leq \int_a^b [R_\beta(f, g)]^2 dx \int_a^b \left[\frac{1}{R_\beta(\frac{1}{f}, \frac{1}{g})} \right]^2 dx \leq \\
 &\leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Выпишем наиболее эффективные из неравенств теоремы 3 с частными случаями средних Радо явно. Они включают выбор среднего

логарифмического и многоэтажно-показательного.

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 &\leq \int_a^b \left(\frac{f-g}{\ln \frac{f}{g}} \right)^2 dx \int_a^b \frac{f^2 g^2}{\left(\frac{f-g}{\ln \frac{f}{g}} \right)^2} dx \leq \\ &\leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 &\leq \int_a^b \left[\frac{f^f}{g^g} \right]^{\frac{2}{f-g}} dx \int_a^b \frac{f^2 g^2}{\left(\frac{f^f}{g^g} \right)^{\frac{2}{f-g}}} dx \leq \\ &\leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 &\leq \int_a^b (f^2 + fg + g^2) dx \int_a^b \frac{f^2 g^2}{f^2 + fg + g^2} dx \leq \\ &\leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx. \end{aligned}$$

При выборе арифметико-геометрического среднего Гаусса получаем

Следствие. Справедливо следующее уточнение неравенства Коши — Буняковского:

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 &\leq \int_a^b \left[\frac{\max(f, g)}{K \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\min(f, g)}{\max(f, g)} \right)^2} \right)} \right]^2 dx \times \\ &\times \int_a^b (\min(f, g))^2 \left(K \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\min(f, g)}{\max(f, g)} \right)^2} \right) \right)^2 dx \leq \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx, \end{aligned}$$

где $K(x)$ есть полный эллиптический интеграл Лежандра 1 рода (см. [24]).

Отметим совершенно экзотический характер последнего неравенства: это неравенство между *произвольными* функциями, но которые стоят под знаком *конкретной специальной* функции — эллиптического интеграла Лежандра! Вместе с тем неравенства, в которых произвольные функции стоят под знаками *элементарных* функций, например, экспоненты или логарифма, широко используются в математике. Так, подобный вид имеют неравенства Джона — Ниренберга в теории пространств *ВМО* и неравенства Зигмунда в гармоническом анализе. Подобные неравенства описывают как правило предельно точные свойства некоторых объектов, таких, как предельные допустимые пространства в теоремах вложения или теоремах существования и единственности для дифференциальных уравнений, а также при исследовании различных видов сходимости тригонометрических рядов.

3. Уточнение неравенства Коши — Буняковского с максимумами и минимумами функций

Перейдем к основному вопросу данной статьи. Это подробное рассмотрение неравенства, которое получается из теорем 2, 3 при выборе $\alpha, \beta = +\infty$. В этом случае среднее сводится к максимуму, а его дополнительное среднее — к минимуму двух функций. В результате получается

Теорема 4. Пусть функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ являются неотрицательными на отрезке $[a, b]$. Тогда справедливо следующее уточнение неравенства Коши — Буняковского:

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 &\leq \int_a^b [\max(f, g)]^2 dx \int_a^b [\min(f, g)]^2 dx \leq \\ &\leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Про приведенное неравенство можно повторить сказанное выше об обобщении неравенства Коши — Буняковского с произвольными средними: его левая часть очевидна ввиду равенства

$$f(x, y) \cdot g(x, y) = \text{Max}(f(x, y)) \cdot \text{Min}(f(x, y)),$$

поэтому нетривиальным является правое неравенство.

При первом взгляде на неравенство (9) кажется, что средняя часть должна сводиться к одной из крайних. Однако, это не так. То, что все три части в (9) могут быть различны, доказывает пример «конвертика», образованного графиками функций $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$ при выборе пределов интегрирования $a = 0$, $b = 1$. Вычисления показывают, что в этом случае (9) сводится к строгим неравенствам $\frac{1}{36} < \frac{7}{144} < \frac{1}{9}$.

Процитируем текст, написанный в 2001 г. и включенный в обзоры автора [7–8].

«Неравенство (9) ранее не было мне известно и получилось как следствие приведенной выше общей теоремы 1. Сразу захотелось получить простое непосредственное доказательство, но с ходу у меня не вышло, а считать по очевидной схеме через выражения для максимума и минимума через модули я поленился. Об этой задаче — найти простое непосредственное доказательство неравенства (9) или ссылку на него в литературе — я упомянул в докладе на международной конференции в Киеве в 2001 г. Это доказательство было сразу же найдено Анатолием Кореновским (автором точной константы в знаменитом неравенстве Джона — Ниренберга) в поезде на обратном пути из Киева в Одессу. После этого мне стало немного стыдно, и я досчитал стандартное доказательство через модули. (Кстати, ссылки, где это простое неравенство написано, я не знаю до сих пор.)».

Основной целью данной работы и является заполнение указанных пробелов — мы приводим несколько независимых от теорем 1–3 доказательств неравенства (9). Отметим, что хотя по-видимому до публикаций в [7–11] неравенство (9), несмотря на свою простоту, не встречалось в литературе, за последние год-два вышли сразу несколько работ, где оно изучается с разных точек зрения, эти работы кратко рассмотрены в конце статьи.

4. Первое доказательство неравенства (9) (С. М. Ситник, 1994 г.)

Итак, первое доказательство неравенства (9) было получено автором в 1994 г., оно приведено в [9]. При этом неравенство следовало как предельный частный случай из общих теорем 1–3 об уточнении интегрального неравенства Коши — Буняковского.

Разумеется, представляет интерес поиск независимых от общих теорем 1–3 доказательств. Переходим к их изложению.

5. Второе доказательство неравенства (9)
(А. Н. Кореновский, 2001 г., поезд Киев–Одесса)

Приведем доказательство неравенства (9), полученное Анатолием Кореновским.

Обозначим

$$E_1 = x : f(x) \geq g(x), \quad E_2 = x : f(x) < g(x);$$

$$p_i = \int_{E_i} f(x) dx, \quad q_i = \int_{E_i} g(x) dx, \quad i = 1, 2.$$

Тогда, очевидно,

$$\int_{E_1} (f(x) - g(x)) dx \int_{E_2} (f(x) - g(x)) dx \leq 0.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_{E_1} (f(x) - g(x)) dx \int_{E_2} (f(x) - g(x)) dx \leq 0 &\iff (p_1 - q_1)(p_2 - q_2) \leq 0 \iff \\ &\iff (p_1 + q_2)(p_2 + q_1) \leq (p_1 + p_2)(q_1 + q_2) \iff \\ &\iff \int_a^b [\max(f, g)] dx \int_a^b [\min(f, g)] dx \leq \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Учитывая, что для неотрицательных функций справедливы равенства

$$[\max(f, g)]^2 = \max(f^2, g^2), \quad [\min(f, g)]^2 = \min(f^2, g^2),$$

можно в последнем неравенстве заменить f, g на f^2, g^2 , откуда и получаем доказываемое неравенство.

ЗАМЕЧАНИЕ Анатолия Кореновского: это доказательство получено в поезде Киев–Одесса 22.10.2001 г.

6. Третье доказательство неравенства (9)
(С. М. Ситник, 2001 г.)

Теперь приведем упомянутое выше доказательство автора, использующее явные формулы для максимума и минимума. Для полноты изложения сформулируем эти хорошо известные формулы.

Лемма 1. Обозначим для неотрицательных чисел a, b

$$m = \min(a, b), \quad M = \max(a, b).$$

Тогда справедливы тождества

$$m = \frac{a + b - |a - b|}{2}, \quad M = \frac{a + b + |a - b|}{2}.$$

Доказательство этих равенств следует из очевидных соотношений

$$m \cdot M = a \cdot b, \quad m + M = a + b$$

и теоремы Виета для корней квадратного уравнения.

Доказательство неравенства

$$\int_a^b [\max(f, g)]^2 dx \int_a^b [\min(f, g)]^2 dx \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx. \quad (10)$$

Введем обозначение для определенного интеграла

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Тогда для левой части (10) получаем

$$\begin{aligned} & I((\min(f, g))^2) I((\max(f, g))^2) = \\ & = I\left(\left(\frac{f + g - |f - g|}{2}\right)^2\right) I\left(\left(\frac{f + g + |f - g|}{2}\right)^2\right) = \\ & = \frac{1}{16} I((f + g)^2 - 2(f + g)|f - g| + (f - g)^2) \times \\ & \quad \times I((f + g)^2 + 2(f + g)|f - g| + (f - g)^2) = \\ & = \frac{1}{16} I(2f^2 + 2g^2 - 2(f + g)|f - g|) I(2f^2 + 2g^2 + 2(f + g)|f - g|) = \\ & = \frac{1}{4} I(f^2 + g^2 - (f + g)|f - g|) I(f^2 + g^2 + 2(f + g)|f - g|). \end{aligned}$$

После всех перемножений и сокращений получаем, что последнее выражение равно

$$\frac{1}{4} \left[(I(f^2))^2 + (I(g^2))^2 - (I((f + g)|f - g|))^2 + 2I(f^2)I(g^2) \right].$$

Тогда для разности правой и левой частей в неравенстве (10) получаем такое выражение:

$$\begin{aligned}
& \text{правая часть} - \text{левая часть} = I(f^2) I(g^2) - \\
& - \frac{1}{4} \left[(I(f^2))^2 + (I(g^2))^2 - (I((f+g)|f-g|))^2 + 2I(f^2)I(g^2) \right] = \\
& = \frac{1}{4} [I((f+g)|f-g|)]^2 - \frac{1}{4} [I(f^2) - I(g^2)]^2 = \\
& = \frac{1}{4} [I((f+g)|f-g|) + I((f+g)(f-g))] \times \\
& \quad \times [I((f+g)|f-g|) - I((f+g)(f-g))] = \\
& = \frac{1}{4} I((f+g)((f-g) + |f-g|)) I((f+g)((f-g) - |f-g|)) = \\
& = \int_{E(f \geq g)} (f+g)(f-g) dx \int_{E(f \leq g)} (f+g)(g-f) dx = \\
& = \int_{E(f \geq g)} (f^2 - g^2) dx \int_{E(f \leq g)} (g^2 - f^2) dx.
\end{aligned}$$

Очевидно, что последнее выражение неотрицательно, поэтому неравенство (10) доказано.

Приведенное доказательство позволяет получить ряд следствий.

Следствие 1. Пусть $f(x)$, $g(x)$ — произвольные функции. Тогда справедливо тождество для разницы левой и правой частей неравенства (10):

$$\begin{aligned}
& \text{правая часть (10)} - \text{левая часть (10)} = \\
& \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx - \int_a^b [\max(f, g)]^2 dx \int_a^b [\min(f, g)]^2 dx = \\
& = \int_{E(f \geq g)} (f^2 - g^2) dx \int_{E(f \leq g)} (g^2 - f^2) dx.
\end{aligned} \tag{11}$$

Отметим, что тождество (11) из следствия 1 выполняется для функций произвольного знака. Для уточнений же неравенства Коши — Буняковского вида (10) из следствия 1 получается неожиданный факт, что такие уточнения возможны и для некоторых функций, принимающих отрицательные значения.

Следствие 2. Пусть для функций $f(x)$, $g(x)$ произвольного знака выполнено условие $f(x) + g(x) \geq 0$. Тогда справедливо уточнение неравенства Коши — Буняковского вида (10).

Следствие 3. Пусть для функций $f(x)$, $g(x)$ произвольного знака выполнено условие $f(x) + g(x) \leq 0$. Тогда неравенство (10) выполняется с противоположным знаком « $\geq$ ».

Таким образом, нами получен критерий справедливости уточнения неравенства Коши — Буняковского вида (10) — это условие неотрицательности суммы функций $f(x) + g(x) \geq 0$. Разумеется, это условие выполнено, если каждая функция неотрицательна, что предполагалось в первоначальных формулировках из [7–11]. На возможность распространения неравенства (10) для функций с неотрицательной суммой внимание автора было обращено в 2015 г. во время обсуждения на форуме dxdy.ru мехмата МГУ.

Из приведенного в следствии 1 тождества (11) также следуют условия, когда в неравенстве (10) достигается равенство. Это уточняет известные условия равенства в самом неравенстве Коши — Буняковского, подробно разобранные еще в специальном дополнении, написанном В. Я. Буняковским, к его переводу [13] учебника О. Коши.

Следствие 4. В неравенстве (10) достигается равенство тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий для всех $x \in (a, b)$: или $f(x) \geq g(x)$, или $f(x) \leq g(x)$.

7. Четвертое доказательство неравенства (9) (А. Н. Артюшин, 2015 г.)

Следующее доказательство было предложено А. Н. Артюшиным в 2015 г. во время обсуждения на форуме dxdy.ru мехмата МГУ. Александр Николаевич Артюшин из Новосибирска, один из активных участников форума dxdy.ru. Хорошо известен опубликованный на этом форуме его контрпример к разрекламированному в прессе доказательству одного математика из Казахстана, объявившего о решении шестой проблемы тысячелетия (The Millennium Prize Problems), заключающейся в установлении существования и единственности сильного решения трехмерной задачи Навье — Стокса с периодическими краевыми условиями по пространственным переменным. Впоследствии, отталкиваясь от примера А. Н. Артюшина,

Теренс Тао показал, что указанный контрпример закрывает не только это неудачное доказательство, но и все направление подобных доказательств, основанных на тех же методах.

Изложим план этого доказательства неравенства (9). Введем величины:

$$h(x) = \min(f, g), \quad d(x) = \max(f, g) - \min(f, g),$$

$$\lambda(x) = 0, \quad f(x) \leq g(x), \quad \lambda(x) = 1, \quad f(x) > g(x).$$

Тогда справедливы соотношения

$$\max(f, g) = h(x) + d(x),$$

$$f(x) = h(x) + \lambda(x)d(x), \quad g(x) = h(x) + (1 - \lambda(x))d(x).$$

Проделав преобразования, аналогичные предыдущему доказательству, которые мы опустим, получаем тождество

$$\begin{aligned} & \text{правая часть (10)} - \text{левая часть (10)} = \\ &= \int_a^b (1 - \lambda(x)) d(x)(f(x) + g(x)) dx - \int_a^b \lambda(x) d(x)(f(x) + g(x)) dx, \end{aligned}$$

что после подстановки значений используемых величин совпадает с тождеством (11), справедливым для функций с неотрицательной суммой.

8. Приложение к неравенствам для гамма-функций и неполных гамма-функций

Рассмотрим приложение доказанного уточнения интегрального неравенства Коши — Буняковского (10) для вывода оценок для гамма-функций и неполных гамма-функций. Напомним определения этих функций, следуя [24]:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, \quad \Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, \quad \gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt.$$

Подставим в полученное уточнение неравенства Коши — Буняковского (10) величины

$$f(x) = x^{\frac{a+1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, \quad g(x) = x^{\frac{a-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, \quad a > 0.$$

Нетрудно проверить, что в этом случае

$$\max(f, g) = \begin{cases} f(x), & x \geq 1, \\ g(x), & x \leq 1, \end{cases} \quad \min(f, g) = \begin{cases} g(x), & x \geq 1, \\ f(x), & x \leq 1. \end{cases}$$

Тогда указанное неравенство (10) принимает такой вид:

$$\Gamma^2(a+1) \leq (\gamma(a+1, 1) + \Gamma(a-1, 1))(\gamma(a-1, 1) + \Gamma(a+1, 1)) \leq \Gamma(a+2)\Gamma(a). \quad (12)$$

В результате нами доказана

Теорема 5. Пусть $a > 0$, тогда справедливо неравенство (12) для гамма-функций и неполных гамма-функций.

Отметим, что теорема 5 является усилением известного свойства логарифмической выпуклости гамма-функции Эйлера [25]. Компьютерное исследование показывает, что неравенство (12) является довольно точным, особенно для больших значений a , как и сама первоначальная оценка для логарифмической выпуклости. Неравенство (12) — это также представитель известного семейства так называемых неравенств Турана (см., например, [26, 27]).

9. Дальнейшие обобщения и дополнительные сведения

Рассмотренные уточнения интегрального неравенства Коши — Буняковского могут быть перенесены на более общие случаи: бесконечные промежутки интегрирования, функции, интегрируемые по Риману или Лебегу, функции нескольких переменных и интегралы по многомерным областям. Следует заметить, что аккуратные доказательства в этих случаях требуют зачастую достаточно кропотливых рассуждений.

Результаты также достаточно очевидным образом могут быть перенесены на уточнения интегрального неравенства Минковского, а также на дискретные версии неравенств Коши — Буняковского и Минковского.

Отметим, что хотя по-видимому до публикаций в [7–11] неравенство (9), несмотря на свою простоту, не встречалось в литературе, за последние несколько лет вышли сразу несколько работ, где оно изучается с разных точек зрения. Перечислим кратко эти работы.

В работе J. X. Xing [31] 2013 г. переоткрыто тождество (11) и дано его доказательство для интегрального и дискретного случаев. В работах I. Pinelis [29, 30] также получено аналогичное тождество, при этом в работе [29] указано, что оригинальный результат был получен автором этой статьи в [7, 8]. Также в работах [29, 30] получен интересный ограничивающий результат, заключающийся в том, что уточнения, рассмотренные в настоящей работе, возможны только для исключительного случая неравенств Коши — Буняковского, а в более общем случае неравенств Роджерса — Гельдера — Рисса подобные уточнения уже не существуют. В этих работах рассмотрены также уточнения неравенств Коши — Буняковского не только с максимумами и минимумами, а с преобразованиями функций специального вида, связанными с аналогичными преобразованиями в теореме Карлица — Дэйкина — Элиезера (CDE). Наконец, в работе E. Omeu 2015 г. [32] рассмотрены уточнения, аналогичные приведенным в данной статье, для интегрального и дискретного неравенств Минковского.

Литература

1. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1948.—456 с.
2. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства.—М.: Мир, 1965.—276 с.
3. Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M. Classical and New Inequalities in Analysis.—Kluwer, 1993.—740 p.
4. Marshall A. W., Olkin I., Arnold B. C. Inequalities: Theory of Majorization and its Applications. 2nd ed.—Springer, 2011.—909 p.
5. Dragomir S. S. A Survey on Cauchy–Buniakowsky–Schwartz Type Discrete Inequalities.—RGMIA monographs, 2003.—214 p.
6. Steele J. M. The Cauchy–Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities.—Cambr. Univ. Press, 2004.—306 p.
7. Ситник С. М. Уточнения и обобщения классических неравенств // Мат. форум. Т. 3. Исследования по математическому анализу.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2009.—С. 221–266.—(Итоги науки. ЮФО).
8. Sitnik S. M. Generalized Young and Cauchy–Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey.—2010, 2012.—arXiv:1012.3864.—51 p.
9. Ситник С. М. Уточнение интегрального неравенства Коши — Буняковского // Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2000.—№ 9.—С. 37–45.
10. Ситник С. М. Некоторые приложения уточнений неравенства Коши–Буняковского // Вестн. Самар. гос. эконом. академии.—2002.—№ 1(8).—С. 302–313.

11. Ситник С. М. Обобщения неравенств Коши — Буняковского методом средних значений и их приложения // Чернозем. альманах науч. исслед. Сер. Фундам. мат.—2005—№ 1 (1).—С. 3–42.
12. Cauchy A. L. Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. I partie. Analyse Algebrique (Oeuvres complètes, II série, III).—Paris, 1821.
13. Коши А. Л. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении / Пер. с француз. В. Буняковского.—СПб.: Император. АН, 1831.—243 с.
14. Buniakowski V. Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies // Mémoires de l'Acad. de St.-Petersbourg (VII).—1859.—№ 9.
15. Schwarz H. A. Ueber ein flachen kleinsten flacheninhalts betreffendes problem der variationsrechnung // Acta Soc. Sci. Fenn.—1885.—№ 15.—P. 315–362.
16. Sandór J. Applications of the Cauchy–Bouniakowsky Inequality in the Theory of Means // RGMIA Research Report Collection.—2014.—17, Art. 11.—18 p.
17. Sandór J. Bouniakowsky and the Logarithmic Mean Inequalities // RGMIA Research Report Collection.—2014.—Vol. 17, Art. 5.—5 p.
18. фон Нейман Дж. Математические основы квантовой механики.—М.: Наука, 1964.—367 с.
19. Dimovski I. Личное сообщение.
20. Pietsch A. History of Banach Spaces and Linear Operators.—Birkhäuser, 2007.—877 p.
21. Bullen P. S., Mitrinović D. S., Vasić P. M. Means and Their Inequalities.—Dordrecht: D.Reidel Pub. Comp., 1988.—480 p.
22. Bullen P. S. Handbook of Means and Their Inequalities.—Kluwer, 2003.—587 p.
23. Rado T. On convex functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1935.—№ 37.—P. 266–285.
24. Ed. Olver F. W. J. NIST Handbook of Mathematical Functions.—Cambr. Univ. Press, 2010.—968 p.
25. Karp D. B., Sitnik S. M. Log-convexity and log-concavity of hypergeometric-like functions // J. Math. Anal. Appl.—2010.—Vol. 364, № 2.—P. 384–394.
26. Karp D. B., Sitnik S. M. Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function // J. Approx. Theory.—2009.—Vol. 161.—P. 337–352.
27. Sitnik S. M. Conjectures on Monotonicity of Ratios of Kummer and Gauss Hypergeometric Functions // RGMIA Research Report Collection.—2014.—№ 17, Art. 107.—4 p.
28. Mehrez Kh., Sitnik S. M. Inequalities for sections of exponential function series and proofs of some conjectures on monotonicity of ratios of Kummer, Gauss and generalized hypergeometric functions // RGMIA Research Report Collection.—2014.—№ 17, Art. 132.—8 p.
29. Pinelis I. On the Hölder and Cauchy — Schwarz Inequalities // arXiv: 1503.00348v2.—2015.—3 p.
30. Pinelis I. On the Hölder and Cauchy — Schwarz inequalities // Amer. Math. Monthly.—2015.—Vol. 121, № 1.
31. Xiang J. X. A Note on the Cauchy — Schwarz Inequality // Amer. Math. Monthly.—2013.—Vol. 120, № 5.—P. 456–459.
32. Omei E. On Xiang's observations concerning the Cauchy — Schwarz inequality // Amer. Math. Monthly.—2015.—Vol. 122, № 7.—P. 696–698.

Ситник Сергей Михайлович
Воронежский институт МВД России
РОССИЯ, 394065, Воронеж, пр. Патриотов, 53
E-mail: mathsms@yandex.ru

GENERALIZATION
OF CAUCHY — BUNYAKOWSKY INEQUALITY
IN TERMS OF FUNCTIONS MAXIMA AND MINIMA

Sitnik S. M.

Some generalizations of Cauchy — Bunyakowsky integral inequality in terms of mean values are considered in the paper. The main result is one of such generalizations with chosen means as function maxima and minima. The known proofs of this inequality as well as its applications to estimates of gamma and incomplete gamma functions are considered. Also some further generalizations are considered including ones for Rogers–Hölder–Riesz and Minkowsky inequalities.

Key words: inequalities, Cauchy — Bunyakowsky inequality, means, Rado means, Euler gamma-function.

СМЕШАННЫЕ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ
ПО ПОЛИНОМАМ ЛАГЕРРА И РЯДЫ ФУРЬЕ
ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ
ЛАГЕРРА — СОБОЛЕВА

И. И. Шарапудинов

Рассмотрены ряды Фурье по ортогональным полиномам Лагерра — Соболева. Показано, что они являются частным случаем смешанных рядов по полиномам Лагерра. Это позволяет применить к исследованию аппроксимативных свойств рядов Фурье по полиномам Лагерра — Соболева методы и подходы, разработанные автором ранее для решения аналогичной задачи для смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам. Введены некоторые новые специальные ряды по классическим ортогональным полиномам Лагерра $L_n^\alpha(x)$ с $\alpha > -1$, который в случае натурального $\alpha = r$ совпадает с соответствующим смешанным рядом по полиномам Лагерра $L_n^0(x)$, а также с рядом Фурье по полиномам Лагерра $L_n^{-r}(x)$, ортогональным относительно скалярного произведения типа Соболева.

Ключевые слова: полиномы Лагерра, ортогональные по Соболеву, ряды Фурье по полиномам Лагерра — Соболева, смешанные ряды по полиномам Лагерра, специальные ряды по полиномам Лагерра.

1. Введение

В последние годы интенсивное развитие получила (см. [1–6] и цитированную там литературу) теория полиномов, ортогональных относительно различных скалярных произведений соболевского типа (полиномы, ортогональные по Соболеву). Скалярные произведения соболевского типа характеризуются тем, что они включают в себя слагаемые, которые «контролируют» поведение соответствующих ортогональных полиномов на границе области ортогональности. Например, в некоторых случаях оказывается так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на отрезке $[a, b]$, могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого отрезка. Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали в концах отрезка $[a, b]$ со значениями $f(a)$ и $f(b)$. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на $[a, b]$ весом полиномы этим важным свойством не обладают.

С другой стороны отметим, что в ряде работ автора [7–12] были введены так называемые смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам, частичные суммы которых также обладают свойством совпадения их значений в концах области ортогональности со значениями исходной функции. В работах [7–12] были подробно исследованы ашпроксимативные свойства смешанных рядов для функций из различных функциональных пространств и классов. В частности, было показано, что частичные суммы смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам, в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам, успешно могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и ее несколько производных.

В настоящей статье эти вопросы рассмотрены для классических полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$. В частности, показано, что ряд Фурье по ортогональным полиномам Лагерра — Соболева является частным случаем смешанных рядов по полиномам Лагерра (см. §§ 3 и 4). Это, в свою очередь, позволяет (см. § 5) применить к исследованию ашпроксимативных свойств рядов Фурье по полиномам Лагерра — Соболева методы и подходы, разработанные нами ранее [7–12] для решения аналогичной задачи для смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам. В § 3 введены некоторый новый специальный ряд по классическим ортогональным полиномам Лагерра $L_n^\alpha(x)$ с $\alpha > -1$, который в случае натурально $\alpha = r$ совпадает с соответствующим смешанным рядом по полиномам Лагерра $L_n^0(x)$, а также с рядом Фурье по полиномам Лагерра $L_n^{-r}(x)$, ортогональным относительно скалярного произведения типа Соболева

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^\infty f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)e^{-t} dt. \quad (1)$$

Таким образом, в случае натурального $\alpha = r$ для полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$ все три понятия — смешанный ряд по полиномам Лагерра, специальный ряд по полиномам Лагерра и ряд Фурье по полиномам Лагерра $L_n^{-r}(x)$, ортогональным относительно скалярного произведения типа Соболева (1), совпадают.

Изложение материала настоящей статьи разбито на параграфы. В § 2 собраны некоторые необходимые сведения о полиномах Лагерра, в § 3 приводится определение смешанных рядов по полиномам Лагерра, в § 4 введены новые специальные ряды по полиномам Ла-

ггерра $L_n^\alpha(x)$, ортогональным в классическом смысле, в § 5 вводятся ряды Фурье по полиномам Лагерра $L_n^{-r}(x)$, ортогональным относительно скалярного произведения типа Соболева (1), в § 6 выводится неравенство типа Лебега для частичных сумм специального ряда по полиномам Лагерра и сформулирована теорема, содержащая поточечную оценку соответствующей функции Лебега.

2. Некоторые сведения о полиномах Лагерра

При исследовании аппроксимативных свойств частичных сумм новых специальных рядов, введенных в настоящей работе, нам понадобится ряд свойств полиномов Лагерра $L_n^\alpha(t)$, которые мы соберем в данном параграфе.

Пусть α — произвольное действительное число. Тогда для полиномов Лагерра имеют место [13]:

формула Родрига

$$L_n^\alpha(t) = \frac{1}{n!} t^{-\alpha} e^t \{t^{n+\alpha} e^{-t}\}^{(n)}; \quad (2)$$

явный вид

$$L_n^\alpha(t) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{(-x)^\nu}{\nu!}; \quad (3)$$

соотношение ортогональности

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} L_n^\alpha(t) L_m^\alpha(t) dt = \delta_{nm} h_n^\alpha \quad (\alpha > -1), \quad (4)$$

где δ_{nm} — символ Кронекера,

$$h_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} \Gamma(\alpha+1), \quad (5)$$

в частности, для $L_n(t) = L_n^0(t)$ имеет место равенство

$$\int_0^\infty e^{-t} L_n(t) L_m(t) dt = \delta_{nm};$$

формула Кристоффеля — Дарбу

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_n^\alpha(t, \tau) &= \sum_{k=0}^n \frac{L_n^\alpha(t) L_n^\alpha(\tau)}{h_n^\alpha} = \\ &= \frac{n+1}{h_n^\alpha} \frac{L_n^\alpha(t) L_{n+1}^\alpha(\tau) - L_n^\alpha(\tau) L_{n+1}^\alpha(t)}{t - \tau}; \end{aligned} \quad (6)$$

свертка

$$\int_0^t L_n(t - \tau) L_m(\tau) d\tau = L_{n+m}(t) - L_{n+m+1}(t). \quad (7)$$

Далее отметим следующие равенства:

$$\frac{d}{dt} L_n^\alpha(t) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(t), \quad (8)$$

$$\frac{d^r}{dt^r} L_{k+r}^{\alpha-r}(t) = (-1)^r L_k^\alpha(t), \quad (9)$$

$$L_k^{-r}(t) = \frac{(-t)^r}{k^{[r]}} L_{k-r}^r(t), \quad (10)$$

где $k^{[r]} = k(k-1) \dots (k-r+1)$,

$$L_n^{\alpha+1}(t) - L_{n-1}^{\alpha+1}(t) = L_n^\alpha(t), \quad (11)$$

$$(n+\alpha) L_n^{\alpha-1}(t) = \alpha L_n^\alpha(t) - x L_{n-1}^{\alpha+1}(t); \quad (12)$$

веса оценка [14]

$$e^{-\frac{t}{2}} |L_n^\alpha(t)| \leq c(\alpha) B_n^\alpha(t), \quad \alpha > -1, \quad (13)$$

где здесь и далее $c, c(\alpha), c(\alpha, \dots, \beta)$ — положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров,

$$B_n^\alpha(t) = \begin{cases} \theta^\alpha, & 0 \leq t \leq \frac{1}{\theta}, \\ \theta^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta} < t \leq \frac{\theta}{2}, \\ \left[\theta(\theta^{\frac{1}{3}} + |t - \theta|) \right]^{-\frac{1}{4}}, & \frac{\theta}{2} < t \leq \frac{3\theta}{2}, \\ e^{-\frac{t}{4}}, & \frac{3\theta}{2} < t, \end{cases}$$

где $\theta = \theta_n = \theta_n(\alpha) = 4n + 2\alpha + 2$.

Для нормированных полиномов Лагерра

$$\hat{L}_n^\alpha(t) = \left\{ h_n^\alpha \right\}^{-\frac{1}{2}} L_n^\alpha(t) \quad (14)$$

имеет место оценка [14]

$$e^{-\frac{t}{2}} \left| \hat{L}_{n+1}^\alpha(t) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(t) \right| \leq \begin{cases} \theta^{\frac{\alpha}{2}-1}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{\theta}, \\ \theta^{-\frac{3}{4}} t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta} < t \leq \frac{\theta}{2}, \\ t^{-\frac{\alpha}{2}} \theta^{-\frac{3}{4}} \left[\theta(\theta^{\frac{1}{3}} + |t - \theta|) \right]^{\frac{1}{4}}, & \frac{\theta}{2} < t \leq \frac{3\theta}{2}, \\ e^{-\frac{t}{4}}, & \frac{3\theta}{2} < t. \end{cases} \quad (15)$$

Поскольку $h_n^\alpha = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \asymp n^\alpha$, то из (13) и (14) следует, что

$$e^{-\frac{t}{2}} |\hat{L}_n^\alpha(t)| \leq c(\alpha) \theta_n^{-\frac{\alpha}{2}} B_n^\alpha(t), \quad t \geq 0. \quad (16)$$

3. Смешанные ряды по полиномам Лагерра

Смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам были впервые введены в работах автора [7–12] как альтернативный рядам Фурье по тем же полиномам аппарат для одновременного приближения функций и их производных. Не являются исключением и смешанные ряды по полиномам Лагерра [9]. В настоящем параграфе мы напомним определение этих рядов, следуя работе [9]. Пусть $-1 < \alpha < 1$, $L_n^\alpha(x)$ соответствующие классические ортогональные полинома Лагерра, $\rho = \rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{L}_{p,\rho}$ — пространство измеримых функций, определенных на полуоси $[0, \infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\rho}} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \rho(x) dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Через $W_{\mathcal{L}_{p,\rho}}^r(0, \infty)$ обозначим подкласс функций $f = f(x)$ из $\mathcal{L}_{p,\rho}$, непрерывно дифференцируемых $r - 1$ раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a, b] \subset [0, \infty)$, а $f^{(r)} \in \mathcal{L}_{p,\rho}$. Тогда мы можем рассмотреть коэффициенты Фурье — Лагерра функции $f^{(r)}(x)$ по полиномам Лагерра $L_n^\alpha(x)$:

$$f_{r,k}^\alpha = \frac{1}{h_k^\alpha} \int_0^\infty \rho(t) f^{(r)}(t) L_k^\alpha(t) dt. \quad (17)$$

Соответствующий ряд Фурье — Лагерра функции $f^{(r)}$ имеет вид

$$f^{(r)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^{\alpha} L_k^{\alpha}(x). \quad (18)$$

Рассмотрим формулу Тейлора

$$f(x) = Q_{r-1}(f, x) + \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt, \quad (19)$$

где $Q_{r-1}(f, x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} (1+x)^{\nu}$ — полином Тейлора, и выполним формальную подстановку в (19) вместо $f^{(r)}(t)$ ряда Фурье — Лагерра (18). Если эта операция законна, то мы придем к следующему равенству:

$$f(x) = Q_{r-1}(f, x) + \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^{\alpha} \int_0^x (x-t)^{r-1} L_k^{\alpha}(t) dt. \quad (20)$$

Воспользуемся равенством (9), тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} L_k^{\alpha}(t) dt = \\ & = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} \frac{d^r}{dt^r} L_{k+r}^{\alpha-r}(t) dt = \\ & = (-1)^r L_{k+r}^{\alpha-r}(x) - (-1)^r \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{x^{\nu}}{\nu!} \{L_{k+r}^{\alpha-r}(t)\}_{t=0}^{(\nu)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Далее

$$\{L_{k+r}^{\alpha-r}(t)\}_{t=0}^{(\nu)} = (-1)^{\nu} L_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(t), \quad (22)$$

а в силу (3)

$$L_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(0) = \binom{k+\alpha}{k+r-\nu} = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!}. \quad (23)$$

Сопоставляя (22) и (23), имеем

$$\{L_{k+r}^{\alpha-r}(t)\}_{t=0}^{(\nu)} = (-1)^{\nu} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!}. \quad (24)$$

Из (21) и (24) находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} L_k^\alpha(t) dt = \\ & = (-1)^r L_{k+r}^{\alpha-r}(x) - (-1)^r \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)(-x)^\nu}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)! \nu!}. \end{aligned} \quad (25)$$

Из (20) и (25) получаем

$$f(x) = E_{r-1}^\alpha(f, x) + J_r^\alpha(f, x), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} & E_{r-1}^\alpha(f, x) = \\ & = \sum_{\nu=0}^{r-1} \left[f^{(\nu)}(0) - \frac{(-1)^{r-\nu}}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)} f_{r,k}^\alpha \right] \frac{x^\nu}{\nu!}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$J_r^\alpha(f, x) = (-1)^r \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^\alpha L_{k+r}^{\alpha-r}(x). \quad (28)$$

Ряд $J_r^\alpha(f, x)$ будем называть *смешанным* рядом по полиномам Лагерра $L_k^\alpha(x)$, этим же термином мы обозначим правую часть равенства (26). Смешанный ряд содержит коэффициенты $f_{r,k}^\alpha$ ($k = 0, 1, \dots$) r -й производной функции $f(x)$ по полиномам Лагерра $L_k^\alpha(x)$, умноженные на полиномы Лагерра вида $L_{k+r}^{\alpha-r}(x)$. В этом заключается принципиальное отличие смешанного ряда (28) по полиномам Лагерра $L_k^\alpha(x)$ от ряда Фурье по этим же полиномам.

Если в (27) и (28) мы положим $\alpha = 0$, то равенство (26) принимает следующий вид:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu + (-1)^r \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^0 L_{k+r}^{-r}(x). \quad (29)$$

Если, кроме того, воспользуемся равенством (10), то отсюда получим

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu + x^r \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^0 \frac{L_k^r(x)}{(k+r)^{[r]}}. \quad (30)$$

В дальнейшем будет показано (см. §§ 4, 5), что (29) представляет собой ряд Фурье по полиномам Лагерра $L_n^{-r}(x)$, ортогональным относительно скалярного произведения (1), а (30) есть не что иное, как специальный ряд по полиномам Лагерра $L_k^\alpha(x)$ с $\alpha = r$, где $1 \leq r$ — целое.

Перейдем к рассмотрению достаточных условий на функцию $f(x)$, обеспечивающих сходимость смешанных рядов $J_r^\alpha(f, x)$ и справедливость равенства (26).

Теорема 1. Пусть $-1 < \alpha < 1$, $r \geq 1$, $A > 0$, $f \in W_{\mathcal{L}_{2,\rho}}^r$. Тогда смешанный ряд $J_r^\alpha(f, x)$ сходится равномерно относительно $x \in [0, A]$ и для произвольного $x \in [0, \infty)$ имеет место равенство (26).

◁ Мы начнем с оценки полинома $L_{k+r}^{\alpha-r}(x)$ при $\alpha > -1$, $r \geq 1$ и $x \in [0, A]$. Если $\alpha - r > -1$, то пользуясь оценкой (13), мы можем записать ($\theta = 4k + 2r - 2\alpha + 2$)

$$|L_{k+r}^{\alpha-r}(x)| \leq c(\alpha, r)e^{-x/2}B_{k+r}^{\alpha-r}(x). \quad (31)$$

Если же $\alpha - r \leq -1$, то, пользуясь равенством (12), имеем

$$L_{k+r}^{\alpha-r}(x) = \frac{\alpha - r + 1}{k + \alpha} L_{k+r}^{\alpha-r+1}(x) - \frac{x}{k + \alpha} L_{k+r-1}^{\alpha-r+2}(x). \quad (32)$$

С другой стороны, из определения функции $B_n^\alpha(x)$ (см. (13)) нетрудно увидеть, что при $\alpha > -1$, $k \geq 1$, $x \in [0, A]$

$$\frac{1}{k + \alpha} B_{k+r}^{\alpha-r+1}(x) \leq c(\alpha, r) B_{k+r}^{\alpha-r}(x), \quad (33)$$

$$\frac{x}{k + \alpha} B_{k+r-1}^{\alpha-r+2}(x) \leq c(\alpha, r, A) B_{k+r}^{\alpha-r}(x). \quad (34)$$

Далее заметим, что если для $x \in [0, A]$ справедливы оценки

$$|L_{k+r}^{\alpha-r+1}(x)| \leq c(\alpha, r, A)e^{-\frac{x}{2}}B_{k+r}^{\alpha-r+1}(x), \quad (35)$$

$$|L_{k+r-1}^{\alpha-r+2}(x)| \leq c(\alpha, r, A)e^{-\frac{x}{2}}B_{k+r-1}^{\alpha-r+2}(x), \quad (36)$$

то из (32)–(36) вытекает оценка (31). Но если $r = 1$, то $\alpha - r + 1 = \alpha > -1$, $\alpha - r + 2 = \alpha + 1 > 0$, и поэтому оценки (35) и (36) вытекают из (13). Тем самым, оценка (31) для $r = 1$ доказана. Предположим теперь, что оценка (31) верна для $1 \leq r \leq n$. Тогда из (32)–(34) следует справедливость оценки (31) для $r = n + 1$. Тем самым доказана

справедливость оценки (31) для произвольного целого $r \geq 1$. Оценим теперь остаточный член смешанного ряда (28), который равен

$$R_n^\alpha(f, x) = (-1)^r \sum_{k=n+1}^{\infty} f_{r,k}^\alpha L_{k+r}^{\alpha-r}(x). \quad (37)$$

Имеем

$$\begin{aligned} |R_n^\alpha(f, x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_{r,k}^\alpha| |L_{k+r}^{\alpha-r}(x)| = \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} (h_k^\alpha)^{1/2} |f_{r,k}^\alpha| (h_k^\alpha)^{-1/2} |L_{k+r}^{\alpha-r}(x)| \leq \eta_n \gamma_n(x), \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\eta_n = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h_k^\alpha (f_{r,k}^\alpha)^2 \right)^{1/2}, \quad \gamma_n(x) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (L_{k+r}^{\alpha-r}(x))^2 / h_k^\alpha \right)^{1/2}.$$

Если $f^{(r)} \in \mathcal{L}_{2,\rho}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0. \quad (39)$$

Что касается величины $\gamma_n(x)$, то, используя оценку (31) и соотношение

$$h_k^\alpha = \Gamma(\alpha + 1) \binom{k + \alpha}{k} \asymp k^\alpha \quad (k = 1, 2, \dots),$$

мы находим

$$\gamma_n(x) \leq c(\alpha, r, A) \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\alpha} (B_{k+r}^{\alpha-r}(x))^2 \right)^{1/2}. \quad (40)$$

Пусть $0 \leq x \leq A$, тогда из (13) следует, что для произвольного действительного β имеет место оценка

$$B_m^\beta(x) \leq c(\beta, A) m^\beta (1 + mx)^{-\beta/2-1/4} \quad (0 \leq x \leq A). \quad (41)$$

Полагая здесь $\beta = \alpha - r$, мы можем записать

$$B_{k+r}^{\alpha-r} \leq c(\alpha, r, A) (k+r)^{\alpha-r} (1 + (k+r)x)^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{4}}.$$

Отсюда имеем ($0 \leq x \leq A$)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\alpha} (B_{k+r}^{\alpha-r}(x))^2 \leq \\ & \leq c(\alpha, r, A) \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+r)^{\alpha-2r} (1+(k+r)x)^{r-\alpha-1/2} = \\ & = c(\alpha, r, A) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+r)^{r+1/2}} \left(\frac{1}{k+r} + x \right)^{r-\alpha-1/2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Заметим, что при $k > n$

$$\left(\frac{1}{k+r} + x \right)^{r-\alpha-1/2} \leq \begin{cases} \left(\frac{1}{n+r} + x \right)^{r-\alpha-1/2}, & r-\alpha \geq 1/2, \\ (k+r)^{\alpha+1/2-r}, & r-\alpha < 1/2, \end{cases}$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+r)^{r+1/2}} \left(\frac{1}{k+r} + x \right)^{r-\alpha-1/2} \leq \\ & \leq \begin{cases} \left(\frac{1}{n+r} + x \right)^{r-\alpha-1/2} \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+r)^{-r-1/2}, & r-\alpha \geq 1/2, \\ \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+r)^{-2r+\alpha}, & r-\alpha < 1/2. \end{cases} \end{aligned} \quad (43)$$

Сопоставляя (40), (42) и (43), мы находим

$$\gamma_n^2(x) \leq c(\alpha, r, A) \begin{cases} n^{\frac{1}{2}-r} \left(\frac{1}{n} + x \right)^{r-\alpha-\frac{1}{2}}, & r-\alpha \geq \frac{1}{2}, \\ n^{-2r+\alpha+1}, & r-\alpha < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (44)$$

Из оценки (44) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) = 0, \quad (45)$$

причем сходимость равномерна относительно $x \in [0, A]$. Сопоставляя (38)–(40), приходим к первому утверждению теоремы 1 о равномерной сходимости на $[0, A]$ смешанного ряда (28). Остается доказать, что имеет место равенство (26). Если $f \in W_{\mathcal{L}_{2,\rho}}^r$, то $f^{(r)} \in \mathcal{L}_{2,\rho}$, и, следовательно, в метрике пространства $\mathcal{L}_{2,\rho}$ имеет место равенство

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^{\alpha} L_k^{\alpha}(x). \quad (46)$$

Пусть

$$S_{r,n}^\alpha(f) = S_{r,n}^\alpha(f, x) = \sum_{k=0}^n f_{r,k}^\alpha L_k^\alpha(x)$$

— частичная сумма порядка n ряда (18). Мы имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt - \int_0^x (x-t)^{r-1} S_{r,n}^\alpha(f, t) dt \right| \leq \\ & \leq \int_0^x (x-t)^{r-1} |f^{(r)}(t) - S_{r,n}^\alpha(f, t)| dt \leq \\ & \leq x^{r-1} \int_0^x |f^{(r)}(t) - S_{r,n}^\alpha(f, t)| dt = \\ & = x^{r-1} \int_0^x t^{-\frac{\alpha}{2}} e^{t/2} t^{\frac{\alpha}{2}} e^{-t/2} |f^{(r)}(t) - S_{r,n}^\alpha(f, t)| dt \leq \\ & \leq x^{r-1} \left(\int_0^x t^{-\alpha} e^t dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x t^\alpha e^{-t} (f^{(r)}(t) - S_{r,n}^\alpha(f, t))^2 dt \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \left(\frac{e^x x^{2r-\alpha-1}}{1-\alpha} \right)^{1/2} \|f^{(r)} - S_{r,n}^\alpha\|_{\mathcal{L}_{2,\rho}}. \end{aligned} \quad (47)$$

Поскольку в силу (46) $\|f^{(r)} - S_{r,n}^\alpha\|_{\mathcal{L}_{2,\rho}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), то из (47) находим

$$\int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^\alpha \int_0^x (x-t)^{r-1} L_k^\alpha(t) dt. \quad (48)$$

Сопоставляя (19) и (48), заключаем, что справедливо (20). Убедимся теперь в законности рассуждений, которые привели к равенству (26), исходя из (20). Имея ввиду (25), для этого достаточно проверить сходимость рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)} f_{r,k}^\alpha \quad (0 \leq \nu \leq r-1),$$

фигурирующих (27). Но если $f \in W_{\mathcal{L}_{2,\rho}}^r$, то $f^{(r)} \in \mathcal{L}_{2,\rho}$, и, стало быть,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)} |f_{r,k}^{\alpha}| = \\
 & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)} (h_k^{\alpha})^{-1/2} (h_k^{\alpha})^{1/2} |f_{r,k}^{\alpha}| \leq \\
 & \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)} \right)^2 \frac{1}{h_k^{\alpha}} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} h_k^{\alpha} (f_{r,k}^{\alpha})^2 \right)^{1/2} = \\
 & = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)}{(\Gamma(k+r-\nu+1))^2} \right)^{1/2} \|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}_{2,\rho}} \leq \\
 & \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(k+1)\Gamma(k+2)} \right)^{1/2} \|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}_{2,\rho}} \leq \\
 & \leq c(\alpha) \|f^{(r)}\|_{\mathcal{L}_{2,\rho}} \quad (-1 < \alpha < 1).
 \end{aligned}$$

Тем самым равенство (26) и вместе с ним теорема 1 доказаны. $\triangleright$

4. Специальные ряды по полиномам Лагерра

Пусть $1 \leq r$ — целое, $f(t)$ — $r-1$ раз дифференцируемая в точке $t=0$,

$$P_{r-1}(f) = P_{r-1}(f)(t) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} t^i, \quad (49)$$

$$f_r(t) = \frac{1}{t^r} [f(t) - P_{r-1}(f)(t)]. \quad (50)$$

Предположим, что для функции $f_r(t)$, определенной равенством (50) существуют коэффициенты Фурье — Лагерра

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{r,k}^{\alpha} &= \frac{1}{h_k^{\alpha}} \int_0^{\infty} f_r(\tau) t^{\alpha} e^{-t} L_k^{\alpha}(t) dt = \\
 &= \frac{1}{h_k^{\alpha}} \int_0^{\infty} [f(t) - P_{r-1}(f)(t)] t^{\alpha-r} e^{-t} L_k^{\alpha}(t) dt,
 \end{aligned} \quad (51)$$

где $h_n^\alpha = \Gamma(n + \alpha + 1)/n!$. Тогда мы можем рассмотреть ряд Фурье-Лагерра функции $f_r(t)$

$$f_r(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_{r,k}^\alpha L_k^\alpha(t). \quad (52)$$

Если ряд (52) сходится к $f_r(t)$, то с учетом (50) мы можем записать

$$f(t) = P_{r-1}(f)(t) + t^r \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_{r,k}^\alpha L_k^\alpha(t). \quad (53)$$

Это и есть *специальный ряд по полиномам Лагерра*. Нетрудно показать, что если $\alpha = r$, то ряд (53) совпадает с рядом (30). В самом деле, в силу (2), (17) и (10) имеем

$$\begin{aligned} f_{r,k}^0 &= \int_0^\infty f^{(r)}(\tau) e^{-\tau} L_k(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{k!} \int_0^\infty (f(\tau) - P_{r-1}(f)(\tau))^{(r)} (e^{-\tau} \tau^k)^{(k)} d\tau = \\ &= \frac{(-1)^r}{k!} \int_0^\infty (f(\tau) - P_{r-1}(f)(\tau)) (e^{-\tau} \tau^k)^{(k+r)} d\tau = \\ &= \frac{(-1)^r}{k!} \int_0^\infty (f(\tau) - P_{r-1}(f)(\tau)) \tau^{-r} e^{-\tau} L_{k+r}^{-r}(\tau) (k+r)! d\tau = \\ &= \frac{(k+r)!}{k!} (-1)^r \int_0^\infty \frac{(f(\tau) - P_{r-1}(f)(\tau))}{\tau^r} e^{-\tau} \frac{(-\tau)^r}{(k+r)^{[r]}} L_k^r(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^\infty (f(t) - P_{r-1}(f)(t)) e^{-\tau} L_k^r(\tau) d\tau = h_k^r \hat{f}_{r,k}^r. \end{aligned} \quad (54)$$

В силу (54) ряд (30) приобретает вид

$$f(t) = P_{r-1}(f)(t) + t^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k^r \hat{f}_{r,k}^r L_k^r(t)}{(k+1)_r} = P_{r-1}(f)(t) + t^r \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_{r,k}^r L_k^r(t),$$

так как $h_k^r = (k+1)_r$. Таким образом, в случае $\alpha = r$ ряды (30) и (53) совпадают.

**5. Ряды Фурье по полиномам Лагерра $L_k^{-r}(t)$,
ортогональным относительно скалярного произведения
типа Соболева**

Для $\rho = \rho(x) = e^{-t}$ положим $W^r[0, \infty) = W_{\mathcal{L}_{2,\rho}}^r$, другими словами, $W^r[0, \infty)$ представляет собой пространство функций $f = f(t)$, заданных и непрерывно дифференцируемых на полуоси $[0, \infty)$ $(r-1)$ раз, причем $f^{(r-1)}(t)$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a, b] \subset [0, \infty)$, и

$$\int_0^\infty |f^{(r)}(t)|^2 e^{-t} dt < \infty. \quad (55)$$

Рассмотрим систему функций $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^\infty$, в которой

$$\varphi_k(t) = \frac{t^k}{k!}, \quad 0 \leq k \leq r-1, \quad (56)$$

$$\varphi_k(t) = L_k^{-r}(t), \quad r \leq k. \quad (57)$$

Теорема 2. Функции $\varphi_k(t)$ ($k = 0, 2, \dots$), определенные равенствами (56) и (57), образуют полную в $W^r[0, \infty)$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (1).

◁ Из равенств (9) и (10) следует, что если $r \leq k$ и $0 \leq \nu \leq r-1$, то $(L_k^{-r}(t))_{t=0}^{(\nu)} = 0$. Кроме того, $(L_k^{-r}(t))^{(r)} = (-1)^r L_{k-r}^0(t)$. Поэтому в силу (1) для $\varphi_k(t) = L_k^{-r}(t)$ и $\varphi_l(t) = L_l^{-r}(t)$ с $k, l \geq r$ имеем

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \int_0^\infty L_{k-r}^0(x) L_{l-r}^0(x) e^{-x} dx = \delta_{kl}. \quad (58)$$

Это означает, что функции $\varphi_k(t)$ ($k = r, r+1, \dots$) образуют в $W^r[0, \infty)$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (1). Справедливость равенства $\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \delta_{kl}$ в случаях, когда $k, l \leq r-1$ и $k \leq r-1, l \geq r$ очевидна. Итак, система $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^\infty$ ортонормирована в $W^r[0, \infty)$ относительно скалярного произведения (1). Остается убедиться в ее полноте в $W^r[0, \infty)$. С этой целью покажем, что если для некоторой функции $f = f(x) \in W^r[0, \infty)$ и для всех $k = 0, 1, \dots$ справедливы равенства $\langle f, \varphi_k \rangle = 0$, то $f(x) \equiv 0$. В самом деле, если $k \leq r-1$, то $\langle f, \varphi_k \rangle = f^{(k)}(0)$, поэтому с учетом

того, что $\langle f, \varphi_k \rangle = 0$, для нашей функции $f(x)$ формула Тейлора (19) приобретает вид

$$f(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt. \quad (59)$$

С другой стороны, для всех $k \geq r$ имеем

$$\begin{aligned} 0 = \langle f, \varphi_k \rangle &= \int_0^\infty e^{-x} f^{(r)}(x) \frac{d^r}{dx^r} L_k^{-r}(x) dx = \\ &= (-1)^r \int_0^\infty L_{k-r}^0(x) f^{(r)}(x) e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из того, что полиномы Лагерра $L_m^0(x)$ ($m = 0, 1, \dots$) образуют в $\mathcal{L}_{2,\rho}$ полную ортонормированную систему, имеем $f^{(r)}(x) = 0$ почти всюду на $[0, \infty)$. Поэтому в силу (59) $f(x) \equiv 0$. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Соотношение ортогональности (58) ранее было установлено в работе [1].

Пусть $f(x) \in W^r[0, \infty)$. Тогда мы можем рассмотреть коэффициенты Фурье этой функции

$$\hat{f}_k = \langle f, \varphi_k \rangle = f^{(k)}(0), \quad 0 \leq k \leq r-1, \quad (60)$$

$$\hat{f}_k = \langle f, \varphi_k \rangle = \int_0^\infty e^{-x} f^{(r)}(x) \frac{d^r}{dx^r} L_k^{-r}(x) dx, \quad k \geq r, \quad (61)$$

и ее ряд Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^\infty \hat{f}_k \varphi_k(t) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=r}^\infty \hat{f}_k L_k^{-r}(t). \quad (62)$$

С другой стороны, из (61) и (17) с учетом $(L_k^{-r}(t))^{(r)} = (-1)^r L_{k-r}^0(t)$ имеем

$$\hat{f}_k = \int_0^\infty e^{-x} f^{(r)}(x) L_{k-r}^0(x) dx = (-1)^r f_{r,k-r}^0. \quad (63)$$

Из (62) и (63) получаем

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} + (-1)^r \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^0 L_{k+r}^{-r}(t). \quad (64)$$

Сопоставляя (64) с (29), заключаем, что ряд Фурье по системе $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ относительно скалярного произведения (1) совпадает со смешанным рядом по полиномам Лагерра $L_k^0(t)$. Это позволяет использовать при исследовании аппроксимативных свойств ряда Фурье (62) методы и подходы, разработанные ранее в работах автора [7–12] для решения аналогичной задачи для смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам, в том числе и по полиномам Лагерра. Например, в качестве следствия теоремы 1 может быть сформулирована

Теорема 3. Пусть $r \geq 1$, $A > 0$, $f \in W^r[0, \infty)$. Тогда ряд Фурье (62) сходится равномерно относительно $x \in [0, A]$ и для произвольного $x \in [0, \infty)$ имеет место равенство

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \varphi_k(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \hat{f}_k \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \hat{f}_k L_k^{-r}(t). \quad (65)$$

6. Аппроксимативные свойства специальных рядов по полиномам Лагерра

Через $\mathcal{L}_n^\alpha(f) = \mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)$ обозначим частичную сумму специального ряда (53) вида

$$\mathcal{L}_n^\alpha(f)(t) = P_{r-1}(f) + t^r \sum_{k=0}^{n-r} \hat{f}_{r,k}^\alpha L_k^\alpha(t).$$

Заметим, что если $f(t) = q_n(t)$ представляет собой алгебраический полином степени n , то при $\alpha > -1$

$$\mathcal{L}_n^\alpha(q_n)(t) \equiv q_n(t),$$

другими словами, оператор $\mathcal{L}_n^\alpha(f)$ является проектором на подпространство H^n , состоящем из алгебраических полиномов степени n . Это свойство частичных сумм $\mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)$ играет важную роль при

решении задачи об оценке отклонения $\mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)$ от исходной функции $f = f(t)$. Эта задача является одной из основных в настоящей работе.

Пусть $f(t)$ — непрерывная функция, заданная на полуоси $[0, \infty)$ и такая, что в точке $t = 0$ существуют производные $f^{(\nu)}(0)$ ($\nu = 0, 1, \dots, r-1$). Кроме того, будем считать, что для всех $k = 0, 1, \dots$ существуют коэффициенты $\hat{f}_{r,k}^\alpha$, определяемые равенством (51). Тогда мы можем определить специальный ряд (53) и его частичную сумму $\mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)$. В настоящем параграфе рассмотрены некоторые вопросы, которые касаются сходимости $\mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)$ к $f(x)$ при $n \rightarrow \infty$. В первую очередь рассмотрим задачу об оценке величины

$$R_{n,r}^\alpha(f)(t) = |f(t) - \mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)| t^{-\frac{r}{2} + \frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}}. \quad (66)$$

Весовой множитель $t^{-\frac{r}{2} + \frac{1}{4}}$, фигурирующий в правой части равенства (66), связан с тем обстоятельством, что разность $|f(t) - \mathcal{L}_n^\alpha(f)(t)|$ стремится к нулю вместе с t со скоростью, не меньшей, чем $t^{\frac{r}{2} - \frac{1}{4}}$. Обозначим через $q_n(t)$ — алгебраический полином степени n , для которого

$$f^{(\nu)}(0) = q_n^{(\nu)}(0) \quad (\nu = 0, 1, \dots, r-1). \quad (67)$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(t) - \mathcal{L}_n^\alpha(f)(t) &= f(t) - q_n(t) + q_n(t) - \mathcal{L}_n^\alpha(f)(t) = \\ &= f(t) - q_n(t) + \mathcal{L}_n^\alpha(q_n - f)(t), \end{aligned} \quad (68)$$

поэтому в силу (66) и (68)

$$|R_{n,r}^\alpha(f)(t)| \leq |f(t) - q_n(t)| t^{-\frac{r}{2} + \frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}} + |\mathcal{L}_n^\alpha(q_n - f)(t)| t^{-\frac{r}{2} + \frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}}. \quad (69)$$

С другой стороны, в силу (67) $P_{r-1}(q_n - f) \equiv 0$, поэтому имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^\alpha(q_n - f)(t) &= t^r \sum_{k=0}^{n-r} (\widehat{q_n - f})_{r,k} L_k^\alpha(t) = \\ &= t^r \sum_{k=0}^{n-r} \frac{1}{h_k^\alpha} \int_0^\infty (q_n(\tau) - f(\tau)) \tau^{\alpha-r} e^{-\tau} L_k^\alpha(\tau) L_k^\alpha(t) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{t}{2}t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\mathcal{L}_n^\alpha(q_n - f)(t) = \\ & = e^{-\frac{t}{2}t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\int_0^\infty (q_n(\tau) - f(\tau))e^{-\tau}\tau^{\alpha-r}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{L_k^\alpha(t)L_k^\alpha(\tau)}{h_k^\alpha}d\tau. \end{aligned} \quad (70)$$

Положим

$$E_n^r(f) = \inf_{q_n} \sup_{t>0} |q_n(t) - f(t)|e^{-\frac{t}{2}t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}, \quad (71)$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $q_n(t)$ степени n , для которых $f^{(\nu)}(0) = q_n^{(\nu)}(0)$ ($\nu = 0, \dots, r-1$). Тогда из (70) находим

$$e^{-\frac{t}{2}t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}|\mathcal{L}_n^\alpha(q_n - f)(t)| \leq E_n^r(f)l_{r,n}^\alpha(t), \quad (72)$$

где

$$l_{r,n}^\alpha(t) = t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau+t}{2}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}|\mathcal{K}_{n-r}^\alpha(t, \tau)|d\tau, \quad (73)$$

а ядро $\mathcal{K}_{n-r}^\alpha(t, \tau)$ определяется равенством (6). Из (69), (71)–(73) выводим

$$|R_{n,r}^\alpha(f)(t)| \leq E_n^r(f)(1 + l_{r,n}^\alpha(t)). \quad (74)$$

В связи с неравенством (74) возникает задача об оценке величины $l_{r,n}^\alpha(t)$, определяемой равенством (73). С этой целью мы введем следующие обозначения: $G_1 = [0, \frac{3}{\theta_n}]$, $G_2 = [\frac{3}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}]$, $G_3 = [\frac{\theta_n}{2}, \frac{3\theta_n}{2}]$, $G_4 = [\frac{3\theta_n}{2}, \infty]$. Мы будем оценивать $l_{r,n}^\alpha(t)$ для $t \in G_s$ ($s = 1, 2, 3, 4$).

Теорема 4. Пусть $1 \leq r$ — целое, $r - \frac{1}{2} \leq \alpha \leq r + \frac{1}{2}$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$. Тогда имеют место следующие оценки:

1) если $t \in G_1 = [0, \frac{3}{\theta_n}]$, то

$$l_{r,n}^\alpha(t) \leq c(\alpha, r)[\ln(n+1) + n^{\alpha-r}]; \quad (75)$$

2) если $t \in G_2 = [\frac{3}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}]$, то

$$l_{r,n}^\alpha(t) \leq c(\alpha, r) \left[\ln(n+1) + \left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}} \right]; \quad (76)$$

3) если $t \in G_3 = [\frac{\theta_n}{2}, \frac{3\theta_n}{2}]$, то

$$l_{r,n}^\alpha(t) \leq c(\alpha, r) \left[\ln(n+1) + \left(\frac{t}{\theta_n^{\frac{1}{3}} + |t - \theta_n|} \right)^{\frac{1}{4}} \right]; \quad (77)$$

4) если $t \in G_4 = [\frac{3\theta_n}{2}, \infty)$, то

$$l_{r,n}^\alpha(t) \leq c(\alpha, r) n^{-\frac{r}{2} + \frac{5}{4}} e^{-\frac{t}{4}}. \quad (78)$$

Литература

1. Kwon K. H., Littlejohn L. L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal.—1995.—Vol. 2.—P. 289–303.
2. Kwon K. H., Littlejohn L. L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math.—1998.—Vol. 28.—P. 547–594.
3. Marcellan F., Alfaro M., Rezola M. L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // J. Comp. Appl. Math.—1993.—Vol. 48.—P. 113–131.
4. Iserles A., Koch P. E., Norsett S. P., Sanz-Serna J. M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory.—1991.—Vol. 65.—P. 151–175.
5. Meijer H. G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory.—1993.—Vol. 73.—P. 1–16.
6. Marcellan F., Yuan Xu. On Sobolev orthogonal polynomials // Exposition. Math.—2015.—Vol. 33, № 3.—P. 308–352.
7. Шарпудинов И. И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье Лежандра // Мат. сб.—2000.—Т. 191, № 5.—С. 143–160.
8. Шарпудинов И. И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{U}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Мат. заметки.—2002.—Т. 72, № 5.—С. 765–795.
9. Шарпудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам.—Махачкала: Изд-во ДНЦ, 2004.—176 с.
10. Шарпудинов И. И. Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Мат. заметки.—2005.—Т. 78, № 3.—С. 442–465.
11. Шарпудинов И. И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Мат. сб.—2006.—Т. 197, № 3.—С. 135–154.
12. Шарпудинов И. И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Мат. заметки.—2008.—Т. 197, № 3.—С. 452–471.
13. Cere G. Ортогональные многочлены.—М.: Физматгиз, 1962.—500 с.
14. Askey R., Wainger S. Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Math.—1965.—Vol. 87.—P. 698–708.
15. Gasper G. Positivity and special function // Theory and Appl. Spec. Funct. Edited by Richard A. Askey.—1975.—P. 375–433.

ШАРАПУДИНОВ ИДРИС ИДРИСОВИЧ
Южный математический институт ВНЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: sharapud@mail.ru

MIXED AND SPECIAL SERIES IN
LAGUERRE POLYNOMIALS AND
FOURIER SERIES IN LAGUERRE-SOBOLEV
ORTHOGONAL POLYNOMIALS

Sharapudinov I. I.

Fourier series in Laguerre–Sobolev orthogonal polynomials are considered in this paper. It is shown that they can be obtained as a particular case of mixed series in Laguerre polynomials. This fact enables us to apply the methods developed by author for mixed series to research approximative properties of Fourier series in Laguerre–Sobolev orthogonal polynomials. Some new special series in classical Laguerre orthogonal polynomials $L_n^\alpha(x)$ with $\alpha > -1$ are introduced. For a natural $\alpha = r$ these series coincide with appropriate mixed series in Laguerre polynomials $L_n^0(x)$ and with Fourier series in Laguerre polynomials $L_n^{-r}(x)$ orthogonal with respect to Sobolev inner product.

Key words: Laguerre polynomials, Sobolev orthogonality, Fourier series on Laguerre — Sobolev polynomials, mixed series on Laguerre polynomials, special series on Laguerre polynomials.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВ, ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВАМИ ТИПА НОРМИРУЕМОСТИ

М. А. Шубарин

Статья носит обзорный характер и содержит краткий обзор литературы, посвященной двум классам локально выпуклых пространств, обладающих свойствами типа нормируемости. Доказывается, что свойства квазинормируемости и асимптотической нормируемости, введенные соответственно в работах А. Гротендика и Т. Терциоглу — Д. Фогта, являются внутренними интерполяционными свойствами. Эти свойства формулируются в терминах абстрактных пространств Лоренца и Марцинкевича, которые были введены в работе В. И. Дмитриева — С. Г. Крейна — В. И. Овчинникова.

Ключевые слова: асимптотически нормируемые пространства, квазинормируемые пространства, пространства Фреше, инвариантные классы, пространств, интерполяционные функторы.

1. Введение. Свойства типа нормальности

1. В статье изучаются интерполяционные свойства пространств Фреше, обладающих свойствами типа нормируемости. А именно квазинормируемые и асимптотически нормируемые пространства.

Пусть X — пространство Фреше (т. е. полное метризуемое локально выпуклое пространство); $(\|\cdot\|_p)$ — набор полунорм, задающий топологию в X такой, что $\|x\|_p \leq \|x\|_{p+1}$ для произвольных n и $x \in X$ и $U_p = \{x \in X : \|x\|_p \leq 1\}$. Множество всех ограниченных подмножеств в X обозначим через $\mathcal{B}(X)$.

2. Пространство X называют [17] *квазинормируемым*, если для любого эквинепрерывного множества $A \subset X'$ существует окрестность нуля V в X такая, что сходимость, индуцированная на A сильной топологией $\beta(X', X)$, совпадает с топологией равномерной сходимости на V .

Можно показать, что квазинормируемость пространства X равносильна каждому из следующих условий:

$$\begin{aligned}
 & (\forall p) (\exists q > p) (\forall t > 0) (\exists B \in \mathcal{B}(X)) : U_q \subset B + \frac{1}{t}U_p, \\
 & (\forall p_0) (\exists p > p_0) (\forall p_1 > p) (\forall t > 0) (\exists M > 0) : U_p \subset MU_{p_1} + \frac{1}{t}U_{p_0}, \\
 & (\forall p_0) (\exists p > p_0) (\forall p_1 > p) (\forall t > 0) (\exists M > 0) : \\
 & \|x'\|'_p \leq M\|x'\|'_{p_1} + \frac{1}{t}\|x'\|'_{p_0} \quad (\forall x \in X),
 \end{aligned}$$

где $(\|\cdot\|'_p)$ — набор сопряженных норм в X :

$$\|x'\|'_p := \{|x'(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

3. Пространство X называют [24] асимптотически нормируемым, если выполняется следующее условие: существует p_0 такое, что для произвольного $p > p_0$ найдется $p_1 > p$ такое, что всякая последовательность элементов пространства X , фундаментальная относительно нормы $\|\cdot\|_{p_1}$ и сходящаяся к нулю относительно нормы $\|\cdot\|_{p_0}$, будет сходиться к нулю относительно нормы $\|\cdot\|_p$.

Пространство X асимптотически нормируемо тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих равносильных условий:

$$\begin{aligned}
 & (\exists p_0) (\forall p > p_0) (\exists p_1 > p) (\forall t > 0) (\exists M > 0) : \\
 & \|x\|_p \leq M\|x\|_{p_0} + \frac{1}{t}\|x\|_{p_1} \quad (\forall x \in X), \\
 & (\exists p_0) (\forall p > p_0) (\exists p_1 > p) (\forall t > 0) (\exists M > 0) : \\
 & U_p^\circ \leq MU_{p_0}^\circ + \frac{1}{t}U_{p_1}^\circ \quad (\forall x \in X).
 \end{aligned}$$

Обзор свойств квазинормируемых и асимптотически нормируемых пространств содержится в [14, 21, 25].

2. Функциональные пространства со свойствами нормируемости

1. Пусть $A = (a_{p,n})_{p,n \in \mathbb{N}}$ бесконечная матрица (называемая матрицей Кёте) такая, что

$$(i) \quad (\forall p, n) \quad a_{p,n} \geq 0;$$

- (ii) $(\forall n) (\exists p): a_{p,n} > 0;$
- (iii) $(\forall p, n) a_{p,n} \leq a_{p+1,n}.$

Пространством Кёте, определяемым матрицей Кёте $A = (a_{p,n})$, называют векторное пространство

$$K(A) = \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p := \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| a_{p,n} < +\infty \ (\forall p) \right\}.$$

Набор норм $(\|\cdot\|_p)$ определяет на $K(A)$ топологию пространства Фреше.

Специфика пространств Кёте состоит в том, что последовательность ортов образует абсолютный базис в произвольном пространстве Кёте. В частности это означает, что условия типа нормальности можно проверять соответственно только на элементах базиса или только на элементах последовательности координатных функционалов.

Предложение 1. Следующие утверждения равносильны для произвольного пространства Кёте $K(A)$:

1. $K(A)$ — асимптотически нормально,
2. $(\forall p_0) (\exists p) (\forall p_1) (\forall t > 0) (\exists M > 0) :$
 $a_{p,n} \leq M a_{p_0,n} + \frac{1}{t} a_{p_1,n} \ (\forall n).$

Предложение 2. Следующие утверждения равносильны для произвольного пространства Кёте $K(A)$:

1. $K(A)$ — квазинормируемо,
2. $(\exists p_0) (\forall p) (\exists p_1) (\forall t > 0) (\exists M > 0) :$
 $(\forall n) a_{p,n}^{-1} \leq M a_{p_1,n}^{-1} + \frac{1}{t} a_{p_0,n}^{-1}.$

Неметризуемые пространства Кёте со свойствами типа нормальности изучались в [30].

2. Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — возрастающая функция, $\varphi_\zeta(\cdot) = \varphi^d(\cdot)$ и $d = d(\zeta) \geq 1$. Идеал $(D_\varphi) := (DN_\varphi)$ был введен А. П. Гончаровым [1] и М. Тидтеном [26]. Из полученных в этих работах результаты следует асимптотическая нормируемость пространств бесконечно дифференцируемых функций, определенных на компактах специального вида.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ограниченная область и $\bar{\Omega}$ — ее замыкание. Пространство $C^\infty(\bar{\Omega})$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, у которых конечны нормы $\|f\|_p := \max_{|k| \leq p} \sup_{x \in \Omega} |f^{(k)}(x)|$, где

1. $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$,
2. $|k| = k_1 + k_2$,
3. $f^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} f(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}}$.

Если $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная возрастающая функция и $\psi(0) = 0$, то положим

$$\Omega_\psi := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, |x_2| < \psi(x)\}.$$

Предложение 3 [1]. Следующие условия равносильны:

1. $C^\infty(\overline{\Omega}_\psi) \in (DN_{\overline{\varphi}})$, где множество $\overline{\varphi}$ состоит из функций $\varphi^d(\cdot)$ и $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная, возрастающая и неограниченная функция такая, что $\varphi(+0) = 0$.

2. $(\exists C, M, N > 0) : \psi^{-1}(t) \leq C\varphi^M(t^{-N}) \ (\forall t > 0)$.

В частности, пространство $C^\infty(\overline{\Omega}_\psi)$ асимптотически нормируемо.

3. Пусть $\Omega \in \mathbb{C}^n$ — область (т. е. открытое связное множество). Пространство $A(\Omega)$ состоит из всевозможных функций, аналитических в этой области, и наделяется топологией ядерного пространства Фреше, совпадающей с топологией равномерной сходимости на компактах из Ω . Это пространство будет квазинормируемым и асимптотически нормируемым. Это следует из того, что $A(\Omega) \in (\Omega) \cap (\overline{DN})$. Последнее утверждение следует, например, из доказанных В. П. Захарютой [5] теорем о шкалах для аналитических функций и аналитических функционалов.

3. Пространственные идеалы

1. Множество $\mathbf{I}$ называют [10, определения 1.1.1 и 29.2.1; 19] пространственным идеалом, если выполняются следующие условия:

1. $\mathbf{I}$ содержит все конечномерные пространства Фреше;
2. если $X, Y \in \mathbf{I}$, $X \times Y \in \mathbf{I}$;
3. если $X \in \mathbf{I}$ и пространство Фреше Y изоморфно дополняемому подпространству в X , то $Y \in \mathbf{I}$.

Можно показать, что множества квазинормируемых и асимптотически нормируемых пространств являются пространственными идеалами.

2. Для уточнения степени квазинормируемости и асимптотической нормируемости вводятся [27–29] пространственные идеалы (DN_φ) (Ω_φ). Обзор свойств этих идеалов содержится в [10, 18].

В этих работах предполагается, что $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — возрастающая функция.

В интересах применения квазинормируемых и асимптотически нормируемых пространств в структурной теории пространств в предлагаемой статье будет рассматриваться обобщение этих идеалов, определяемое не одной функцией, а некоторым счетным семейством. Через $\mathcal{P}$ обозначим множество троек натуральных чисел (p_0, p, p_1) таких, что $p_0 < p < p_1$.

Пусть множество $\overline{\varphi}$ состоит из возрастающих функций $\varphi_\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Будем говорить, что пространство X обладает свойством $(DN_{\overline{\varphi}})$ (и писать $X \in (DN_{\overline{\varphi}})$), если

$$(\exists p_0) (\forall p > p_0) (\exists p_1 > p) (\forall t > 0) (\exists \varphi = \varphi_\zeta \in \overline{\varphi}) : \\ \|x\|_p \leq \varphi_\zeta(t) \|x\|_{p_0} + \frac{1}{t} \|x\|_{p_1} \quad (\forall x \in X), \quad \zeta = (p_0, p, p_1).$$

Соответственно, будем говорить, что пространство X обладает свойством $(\Omega_{\overline{\varphi}})$ (и писать $X \in (\Omega_{\overline{\varphi}})$), если выполняется одно из следующих равносильных условий:

$$(\forall p_0) (\exists p > p_0) (\forall p_1 > p) (\exists \varphi = \varphi_\zeta \in \overline{\varphi}) (\exists C > 0) (\forall t > 0) : \\ U_p \leq C \left(\varphi_\zeta(t) U_{p_1} + \frac{1}{t} U_{p_0} \right), \\ (\forall p_0) (\exists p > p_0) (\forall p_1 > p) (\exists \varphi = \varphi_\zeta \in \overline{\varphi}) (\exists C > 0) (\forall t > 0) : \\ (\forall x \in X) \|x'\|'_p \leq C \left(\varphi_\zeta(t) \|x'\|'_{p_1} + \frac{1}{t} \|x'\|'_{p_0} \right), \quad \zeta = (p_0, p, p_1).$$

Очевидно, что множества $(DN_{\overline{\varphi}})$ и $(\Omega_{\overline{\varphi}})$ являются пространственными идеалами.

ПРИМЕР 1. Пусть $\varphi_\zeta(t) = t^d$ и $d = \frac{p_1 - p_0}{p_1 - p} \geq 1$ для произвольного $\zeta = (p_0, p, p_1) \in \mathcal{P}$. Тогда $(DN_{\overline{\varphi}}) = (\underline{DN})$, $(\Omega_{\overline{\varphi}}) = (\Omega)$. Идеалы $(\underline{DN})$ и (Ω) были введены соответственно в [28, 29]. В последующем эти классы были обобщены Х. Ахоненом [12].

3. Для построения изоморфной классификации пространств аналитических функций В. П. Захарюта [5] использовал классы пространств, аналогичные $(\underline{DN})$ и (Ω) (которые он обозначал соответственно через (Ω_2) и (Ω_1)), и эти классы он описывал терминах комплексных шкал.

Позже (аналогичное утверждение доказано в [8] для операторных идеалов, определяемых пространственными идеалами $(\overline{DN})$ и (Ω)) принадлежность пространства Фреше пространственным идеалам $(\overline{DN})$ и (Ω) можно сформулировать в терминах метода вещественной интерполяции.

В следующих двух утверждениях предполагается, что в X существует непрерывная норма и X_p — пополнение X по норме $\|\cdot\|_p$. Эти пополнения могут быть построены так, что X_p непрерывно и плотно вкладывается в X_p .

Предложение 4 [11]. Пусть X — пространство Фреше и $s \in [1, +\infty)$. Следующие условия равносильны:

1. $X \in (\overline{DN})$,
2. $(\exists p_0) (\forall p) (\exists p_1) (\exists \tau \in (0, 1)) : X_p \supset (X_{p_0}, X_{p_1})_{\tau, s}$.

Предложение 5 [11]. Пусть X — пространство Фреше и $s \in [1, +\infty)$. Следующие условия равносильны:

1. $X \in (\Omega)$,
2. $(\forall p_0) (\exists p) (\forall p_1) (\exists \tau \in (0, 1)) : X_p \subset (X_{p_0}, X_{p_1})_{\tau, s}$.

Ниже предложения 1–2 будут частично перенесены на идеалы $(DN_{\overline{\varphi}})$ и $(\Omega_{\overline{\varphi}})$, в которых вместо метода вещественно интерполяции будут применены обобщенные абстрактные пространства Лоренца и Марцинкевича.

4. Интерполяционные функторы и их характеристические функции

1. В статье без предварительного определения используются некоторые понятия из теории интерполяции линейных операторов (интерполяционная пара банаховых пространств, интерполяционный функтор), которые цитируются по [6–9, 16].

Интерполяционную пару пространств Фреше $[X_0, X_1]$ называют регулярной, если существует векторное подпространство E в $X_0 \cap X_1$, являющееся всюду плотным векторным подпространством в X_0 и X_1 .

Пусть $\overline{E} = [E_0, E_1]$ — интерполяционная пара банаховых пространств и $|\cdot|_j$ — норма в E_j , $j = 0, 1$ и $1 \leq p < +\infty$. Для произвольных положительных t , t_0 , t_1 положим

$$K(t, x) = K(t, x; \overline{E}) := \inf(|x_0|_0 + t|x_1|_1),$$

$$K(t_0, t_1, x) = K(t_0, t_1, x; \overline{E}) := \inf(t_0|x_0|_0 + t_1|x_1|_1)$$

для произвольного $x \in E_0 + E_1$. Точная нижняя грань берется по множеству всех разложений $x = x_0 + x_1$, в которых $x_j \in E_j$, $j = 0, 1$.

2. Интерполяционный функтор F (определенный на категории интерполяционных пар банаховых пространств) называют нормализованным [7, § 1, п. 13], если

$$\|T : F(\overline{X}) \rightarrow F(\overline{Y})\| \leq \max_{j=0,1} \|T : X_j \rightarrow Y_j\|$$

для всех интерполяционных пар банаховых пространств $\overline{X} = [X_0, X_1]$, $\overline{Y} = [Y_0, Y_1]$ таких, что $X_1 \stackrel{1}{\subset} X_0$, $Y_1 \stackrel{1}{\subset} Y_0$. В этом определении используются следующие обозначения:

1. например, $X_1 \stackrel{1}{\subset} X_0$ означает, что X_1 является векторным подпространством в X_0 и $\|x\|_0 \leq \|x\|_1$ для произвольного $x \in X_1$;
2. $\|\cdot\|_j$, $|\cdot|_j$ — нормы соответственно в X_j и Y_j , $j = 0, 1$;
3. $\|T : E \rightarrow F\| := \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$ — норма линейного непрерывного оператора, действующего из банахова пространства E в банахово пространство F (наделенных соответственно нормами $\|\cdot\|_E$ и $\|\cdot\|_F$).

Пусть F — нормализованный интерполяционный функтор, заданный на множестве одномерных пар $[t_0\mathbb{R}, t_1\mathbb{R}]$. Отображение $\Phi : (t_0, t_1) \mapsto F(t_0\mathbb{R}, t_1\mathbb{R})$ называют характеристической функцией интерполяционного функтора (в дальнейшем подобные функции будем называть характеристическими). Эта терминология используется в [7]. В работах других авторов [18, 22] подобные функции называются интерполяционными функциями. В обзоре В. И. Овчинникова [8] содержится анализ свойств характеристических функций.

В [2–3] доказывается, что функция $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ будет характеристической функцией некоторого интерполяционного функтора тогда и только тогда, когда $\Phi \not\equiv 0$ и

- I. Φ — однородная функция, т. е. $\Phi(tx, ty) = t\Phi(x, y)$ для произвольных положительных чисел x, y, t ;
- II. Φ — неубывающая функция по каждой переменной.

ПРИМЕР 2. Функция $\Phi_\tau, \Phi_\tau(t_0, t_1) := t_0^{1-\tau} t_1^\tau$, $\tau \in (0, 1)$, является характеристической.

ПРИМЕР 3. Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная, возрастающая функция такая, что $\varphi(+0) = 0$, $\varphi(+\infty) = +\infty$. Функция $\Phi(\cdot, \cdot; \varphi)$, определяемая равенством $\Phi(x, y; \psi) := \inf_{t>0} (\psi(t)x + \frac{1}{t}y)$, является соответственно характеристической.

Лемма 1. Предположим, что функция $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ является дважды непрерывно дифференцируемой, выпуклой. Тогда функция $\Phi_\varphi(\cdot)$ непрерывно дифференцируема.

В лемме 2 используются следующие обозначения:

1. если даны положительные функции F_0 и F_1 , определенные на одном и том же множестве D , то выражение $F_0(x) \asymp F_1(x)$ на D означает существование числа $C > 0$ такого, что $C^{-1}F_0(x) \leq F_1(x) \leq CF_0(x)$ для произвольного $x \in D$;
2. $\varphi_0(x) := \varphi(\rho(x))$;
3. функция ρ определяется условием: $t\varphi(t) = \lambda$, если $t = \rho(\lambda)$.

Лемма 2. При сделанных в предыдущей лемме предположениях имеет место оценка $\Phi(x, y; \varphi) \asymp x\varphi_0(x/y)$ на $\mathbb{R}_+^2$.

Доказываемая оценка получается при сравнении значений функций $\Phi(x, y; \varphi)$ и $\Phi(t; x, y; \varphi) := \varphi(t)x + \frac{1}{t}y$ для фиксированных положительных x, y при $t_0 = \rho(y/x)$ (оценка сверху), $t \in (0, \frac{y}{x\varphi_0(y/x)})$ и $t \in (\frac{y}{x\varphi_0(y/x)}, +\infty)$ (оценка снизу).

В дальнейшем понадобится следующая «мультипликативная» характеристика идеалов $(DN_{\overline{\varphi}})$ и $(\Omega_{\overline{\varphi}})$:

$$\begin{aligned} X \in (DN_{\overline{\varphi}}) &\iff \\ &(\exists p_0) (\forall p > p_0) (\exists p_1 > p) (\exists \varphi = \varphi_\zeta \in \overline{\varphi}) (\exists C > 0) (\forall t > 0) : \\ &\|x\|_p \leq C\Phi(\|x\|_{p_0}, \|x\|_{p_1}; \varphi_\zeta) \quad (\forall x \in X); \\ X \in (\Omega_{\overline{\varphi}}) &\iff \\ &(\forall p_0) (\exists p > p_0) (\forall p_1 > p) (\exists \varphi = \varphi_\zeta \in \overline{\varphi}) (\exists C > 0) (\forall t > 0) : \\ &\|x'\|'_p \leq C\Phi(\|x'\|'_{p_1}, \|x'\|'_{p_0}; \varphi_\zeta) \quad (\forall x' \in X'). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4. Пусть $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная возрастающая функция и $f(0) = 0$. В общем случае функция Ψ , определяемая равенством $\Psi(x, y) := yf(x/y)$, $x, y > 0$, не является характеристической функцией. Например, если $f(t) := e^{(t^\alpha)} - 1$, $t > 0$, $\alpha > 0$, то $\Psi(1, t) = t(e^{(t^{-\alpha})} - 1) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +0$.

3. Пусть Φ — характеристическая функция и $\overline{X} = [X_0, X_1]$ — интерполяционная пара банаховых пространств.

Пространство $\Lambda_{\Phi,p}(\overline{X}) = \Lambda_{\Phi,p}(X_0, X_1)$ состоит из тех $x \in X_0 + X_1$, для которых конечна норма $\|\cdot\|_{\Phi,p}^\Lambda = \|\cdot\|_{\Lambda_{\Phi,p}(X_0, X_1)}$,

$$\|\cdot\|_{\Phi,p}^\Lambda := \inf \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi^p(\|x_k\|_0, \|x_k\|_1) \right)^{1/p},$$

где точная нижняя грань берется по множеству разложений

$$x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k, \quad x_k \in X_0 \cap X_1.$$

Пусть функция Φ непрерывно дифференцируема по второй переменной. Пространство $M_{\Phi,p}(\overline{X}) = M_{\Phi,p}(X_0, X_1)$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$, для которых конечна норма $\|\cdot\|_{\Phi,p}^M = \|\cdot\|_{M_{\Phi,p}(X_0, X_1)}$,

$$\|x\|_{\Phi,p}^M := \begin{cases} \left\{ \int_0^{+\infty} \left[\frac{K(t, x, X_0, X_1)}{\Phi^*(t)} \right]^p \frac{d\Phi^*(t)}{\Phi^*(t)} \right\}^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{t_0 > 0, t_1 > 0} \left[\frac{K(t_0, t_1, x, X_0, X_1)}{\Phi^*(t_0, t_1)} \right], & p = \infty. \end{cases}$$

Из определения пространства $M_{\Phi,p}(X_0, X_1)$ следует, что оно является банаховой решеткой над измеримым пространством $(\mathbb{R}_+, \frac{d\Phi^*(t)}{\Phi^*(t)})$.

Если в этом определении заменить множитель $\frac{d\Phi^*(t)}{\Phi^*(t)}$ на $\frac{dt}{t}$, то получится определение пространства $K_E(\cdot)$, где E — банахово пространство, состоящее классов эквивалентности измеримых функций f таких, что

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{K(t, x, X_0, X_1)}{\Phi^*(t)} \right]^p \frac{dt}{t} < +\infty.$$

Теорема 1. *Отображения $\overline{X} \mapsto \Lambda_{\Phi,p}(\overline{X})$ и $\overline{X} \mapsto M_{\Phi,p}(\overline{X})$ определяют нормализованные интерполяционные функторы в категории интерполяционных пар банаховых пространств.*

Функторы, построенные в этом утверждении обозначим соответственно через $\Lambda_{\Phi,p}$ и $M_{\Phi,p}$.

4. Рассмотрим некоторые свойства построенных интерполяционных методов.

Теорема 2. Пусть Φ — характеристическая функция и $\overline{X} = [X_0, X_1]$ — произвольная интерполяционная пара банаховых пространств. Тогда

1) характеристическая функция функтора $\Lambda_{\Phi,p}$ эквивалентна функции Φ ;

2) если $1 \leq p_0 < p_1 < +\infty$, то

$$\Lambda_{\Phi,1}(\overline{X}) \subset \Lambda_{\Phi,p_0}(\overline{X}) \subset \Lambda_{\Phi,p_1}(\overline{X}) \subset \Lambda_{\Phi,\infty}(\overline{X});$$

3) если $x \in X_0 \cap X_1$, то $\|x\|_{\Phi,p}^{\Lambda} \leq \Phi(\|x\|_0, \|x\|_1)$;

4) если $\overline{X} = [X_0, X_1]$ — регулярная пара и $1 < p < +\infty$, то $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в $\Lambda_{\Phi,p}(\overline{X})$.

Теорема 3. Пусть Φ — характеристическая функция, дифференцируемая по второй переменной, и $\overline{X} = [X_0, X_1]$ — произвольная интерполяционная пара банаховых пространств. Тогда

1) существует $C > 0$ такое, что

$$K(t, x) \leq C\Phi^*(t)\|x\|_{\Phi,p}^M \quad (\forall t > 0);$$

$$K(t_0, t_1, x) \leq C\Phi^*(t_0, t_1)\|x\|_{\Phi,p}^M \quad (\forall t_0 > 0, t_1 > 0);$$

2) если $1 \leq p_0 < p_1 < +\infty$, то

$$M_{\Phi,1}(\overline{X}) \subset M_{\Phi,p_0}(\overline{X}) \subset M_{\Phi,p_1}(\overline{X}) \subset M_{\Phi,\infty}(\overline{X});$$

3) характеристическая функция функтора $M_{\Phi,p}$ эквивалентна функции Φ ;

4) если $x \in X_0 \cap X_1$ и $1 < p < +\infty$, то $\|x\|_{\Phi,p}^M \leq \Phi(\|x\|_0, \|x\|_1)$.

5) если $\overline{X} = [X_0, X_1]$ — регулярная пара, то $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в $M_{\Phi,p}(\overline{X})$. Экстремальное свойство абстрактных пространств Лоренца и Марцинкевича, доказанное в [1], состоит в следующем утверждении:

Предложение 6. Пусть F — нормализованный интерполяционный функтор в категории интерполяционных пар банаховых пространств и Ψ — его характеристическая функция. Тогда $\Lambda_{\Psi,1}(\overline{X}) \subset F(\overline{X}) \subset M_{\Psi,\infty}(\overline{X})$ для произвольной интерполяционной пары банаховых пространств $\overline{X} = [X_0, X_1]$, $X_1 \stackrel{1}{\subset} X_0$.

Говорят [20], что банахово пространство E (с нормой $|\cdot|$) имеет тип $p \in [1, +\infty)$, если существует число $C > 0$ такое, что

$$\left| \sum_{j=1}^s x_j \right| \leq C \left(\sum_{j=1}^s |x_j|^p \right)^{1/p}$$

для произвольного конечного семейства $\{x_1, \dots, x_s\}$ элементов пространства E .

Теорема 3. *Предположим, что*

- I. $\overline{X} = [X_0, X_1]$ — интерполяционная пара банаховых пространств такая, что $X_1 \stackrel{1}{\subset} X_0$;
 II. пространство $M_{\Phi,p}(\overline{X})$ имеет тип p .
 Тогда $\Lambda_{\Phi,p}(\overline{X}) \subset M_{\Phi,p}(\overline{X})$.

5. Теорема двойственности

1. Пусть $[X_0, X_1]$ — регулярная интерполяционная пара и X — произвольное банахово пространство (с нормой $\|\cdot\|_X$), промежуточное между X_0 и X_1 , и E — векторное пространство, всюду плотное в X_0 , X_1 и X . Положим $X^\# := (E, \|\cdot\|_X)'$. Тогда с нормой $\|\cdot\|_X^\#$ пространство $X^\#$ будет банаховым пространством.

Известно, что любой линейный непрерывный функционал на X однозначно определяется своим сужением на E . Поэтому пространства X' и $X^\#$ изометрически изоморфны. Свойства пространства $X^\#$ изучались в [16]. Известно, $[X_0^\#, X_1^\#]$ будет интерполяционной парой банаховых пространств. Если E всюду плотно в X , то $X^\#$ будет промежуточным между $X_0^\#$ и $X_1^\#$.

Лемма 3. $(X_0 + X_1)^\# = X_0^\# \cap X_1^\#$.

Лемма 4. Пусть E_j — пространство, промежуточное между X_0 и X_1 , $j = 0, 1$ и E всюду плотно в E_0 и E_1 . Тогда следующие условия равносильны:

1. $E_1 \subset E_0$,
2. $E_0^\# \subset E_1^\#$.

2. Всюду до конца статьи предполагается, что $[X_0, X_1]$ — регулярная пара пространств Фреше, $1 < p < +\infty$ и $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$.

Теорема 4. Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — дважды непрерывно дифференцируемая, выпуклая и возрастающая функция такая, что

$\varphi(+0) = 0$, $\varphi(+\infty) = +\infty$. Если $\Psi = \Psi(\cdot, \cdot, \varphi)$. Тогда

$$\Lambda_{\Psi, p}^{\#}(X_0, X_1) = M_{\Psi^*, q}(X_0^{\#}, X_1^{\#})$$

для произвольной регулярной пары $\overline{X} = [X_0, X_1]$.

Для пространства $K_E(\cdot)$ (в которых банахова решетка определяется условием (1)), теоремы двойственности были доказаны в [9].

6. Интерполяционное описание

1. Теперь вся информация, необходимая для формулирования и доказательства основных результатов статьи. В этом разделе будет предполагаться, что

I. множество $\overline{\varphi}$ состоит из дважды непрерывно дифференцируемых, возрастающих, выпуклых функций и $\varphi(+0) = 0$, $\varphi(+\infty) = +\infty$;

II. для любой функции $\varphi_0 \in \overline{\varphi}$ найдется $\varphi_1 \in \overline{\varphi}$ такая, что

$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{\Phi_0(1, t)}{\Phi_1^*(1, t)} \right]^s \frac{d\Phi_1^*(1, t)}{\Phi_1^*(1, t)} < +\infty, \quad \Phi_j(\cdot, \cdot) := \Phi(\cdot, \cdot; \varphi_j);$$

III. для любой функции $\varphi \in \overline{\varphi}$ найдется число $r > 1$ такое, что $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\varphi^{r-1}(t)}{t} < +\infty$.

Совокупность всех множеств $\overline{\varphi}$, для которых выполняются условия I–III, обозначим через M .

Кроме того, пусть

- X_r — пополнение X по норме $\|\cdot\|_r$,
- $q \in [1, +\infty, \frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$.

Доказательство следующих утверждений обобщает доказательство интерполяционных характеристик операторных идеалов в [8].

Теорема 5. Имеет место цепочка импликаций $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$:

1. существует множество функций $\overline{\varphi} \in M$ такое, что

$$(\forall p_0) (\exists p) (\forall p_1) (\exists \varphi_\zeta \in \overline{\varphi}) X_p \subset M_{\Phi_\zeta, q}(X_{p_0}, X_{p_1});$$

2. существует множество функций $\overline{\varphi} \in M$ такое, что $X \in (DN_{\overline{\varphi}})$ (в частности, пространство X асимптотически нормируемо);

3. существует множество функций $\overline{\varphi} \in M$ такое, что

$$(\forall p_0) (\exists p) (\forall p_1) (\exists \varphi_\zeta \in \overline{\varphi}) X_p \subset \Lambda_{\Phi_\zeta, q^*}(X_{p_0}, X_{p_1}).$$

$\triangleleft$ В доказательстве нуждается только импликация $2 \Rightarrow 3$. Ограничимся случаем $q = 2$, общий случай доказывается аналогично. Предположим, что $X \in (DN_{\overline{\varphi}})$ и выполняется условие:

$$(\exists p_0) (\forall p > p_0) (\exists p_1 > p) (\exists \varphi_0 \in \overline{\varphi}) (\forall t > 0) : \\ U_p^\circ \leq \varphi_0(t) U_{p_0}^\circ + \frac{1}{t} U_{p_1}^\circ \quad (\forall x \in X).$$

Фиксируем тройку индексов норм $p_0 < p < p_1$ и функцию $\varphi_0 \in \overline{\varphi}$, для которых выполняется условие (1), а функция $\varphi_1 \in \overline{\varphi}$ строится по функции φ_0 с помощью условия II.

Пусть $0 < \nu < \nu_0 = \varphi_1(1)$. При сделанных предположениях существует положительное число $C' > 0$ такое, что из

$$\frac{(\Phi_1^*(1, t))^r}{t} = \frac{1}{t \Phi_1^r(1, t)} = \frac{1}{\Phi_1^r(t^{1/r}, t^{1/r-1})} \asymp \frac{1}{t \varphi_0(t^{-1})} = \frac{\lambda}{\phi_{0,0}^{r-1}(\lambda)} \geq \delta$$

следует, что $U_p \subset C_4 \frac{(\Phi_1^*(t))^r}{t} U_{p_0}$.

Пусть $t > \nu_0$. Сделаем в условии принадлежности пространства классу $DN_{\overline{\varphi}}$ замену переменных $\nu = t \varphi_\zeta(t)$:

$$U_p^\circ \subset \varphi_\zeta(t) \left(U_{p_0}^\circ + \frac{C}{t \varphi_\zeta(t)} U_{p_1}^\circ \right) = \\ = \varphi_0(\nu) \left(U_{p_0}^\circ + \frac{C}{\nu} U_{p_1}^\circ \right) = \Phi_0(t) \left(U_{p_0}^\circ + \frac{C}{\nu} U_{p_1}^\circ \right).$$

Из полученных оценок следует, что

$$K(\nu, x') \leq \begin{cases} C_2 \Phi_0(\nu), & \nu > \nu_0, \\ C_4 (\Phi_1^*(\nu))^2, & 0 < \nu \leq \nu_0, \end{cases}$$

для произвольных $x' \in U_p'$. Тогда в силу теоремы двойственности имеется цепочка неравенств

$$(\exists C_6, C_7 > 0) : \|x'\| \Lambda_{\Phi_0, q^*}(X_{p_0}, X_{p_1})^\# \leq \\ \leq C_6 \|x'\| M_{\Phi_0, q}(X_{p_0}^\#, X_{p_1}^\#) \leq C_6 \|x'\|_p^\# \quad (\forall x' \in X^\#).$$

Следовательно, $X_p^\# \subset \Lambda_{\Phi_0, q^*}^\#(X_{p_0}, X_{p_1})$ с непрерывным оператором вложения и, следовательно, $X_p \supset \Lambda_{\Phi_0, q^*}(X_{p_0}, X_{p_1})$. $\triangleright$

Теорема 6. *Имеет место цепочка импликаций $1' \Rightarrow 2' \Rightarrow 3'$:*

1'. существует множество функций $\overline{\varphi} \in M$ такое, что

$$(\exists p_0) (\forall p) (\exists p_1) (\exists \varphi_\zeta \in \overline{\varphi}) X_p \supset \Lambda_{\Phi_\zeta, q}(X_{p_1}, X_{p_0});$$

*2'. существует множество функций $\overline{\varphi} \in M$ такое, что $X \in (\Omega_{\overline{\varphi}})$
(в частности, пространство X квазинормируемо);*

3'. существует множество функций $\overline{\varphi} \in M$ и такое, что

$$(\exists p_0) (\forall p) (\exists p_1) (\exists \varphi_\zeta \in \overline{\varphi}) X_p \supset M_{\Phi_\zeta, q^*}(X_{p_1}, X_{p_0}).$$

Свойства пространств Фреше, которые можно сформулировать в терминах подходящих интерполяционных функторов, которые применяются к пространствам из проективного спектра, определяющего данное пространство, будем называть внутренними интерполяционными свойствами. Таким образом, рассмотренные в статье свойства типа нормированности являются внутренними интерполяционными свойствами.

Литература

1. Гончаров А. П. Изоморфизмы пространств бесконечно дифференцируемых функций // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. Есеств. наук.—1983.—№ 2.—С. 28.
2. Дмитриев А. А. Об интерполяции линейных операторов // Сб. тр. НИИ Мат. Воронеж. ун-та.—1973.—Вып. 11.—1973.—С. 31–43.
3. Дмитриев В. И., Крейн С. Г., Овчинников В. И. Основы теории интерполяции линейных операторов // Геометрия линейных пространств и теория операторов.—Ярославль, 1977.—С. 31–74.
4. Захарюта В. П. Экстремальные плюрисубгармонические функции, гильбертовы шкалы и изоморфизм пространств аналитических функций многих переменных // Теор. функций, функ. ан. и их прилож.—Харьков, 1974.—Т. 19.—С. 133–157; 1974.—Т. 21.—С. 65–83.
5. Захарюта В. П. Изоморфизмы пространств аналитических функций // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 255, № 1.—С. 11–14.
6. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1978.—400 с.
7. Крейн С. Г., Семенов Е. М., Брудный Ю. А. Интерполяция линейных операторов // Мат. анализ. Итоги науки и техники.—М.: ВИНТИ, 1986.—Т. 24.—С. 3–164.
8. Овчинников В. И. Интерполяционные функции и интерполяционная конструкция Лионса — Петре // Успехи мат. наук.—2014.—Т. 69, вып. 4.—С. 103–168.
9. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.—М.: Мир, 1980.—664 с.
10. Пич А. Операторные идеалы.—М.: Мир, 1982.—536 с.

11. Шубарин М. А. Операторные идеалы, определяемые инвариантными классами пространств Фреше // Мат. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по мат. анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 240–252.—(Итоги науки. Юг России).
12. Ahonen H. On nuclear Kothe spaces defined by Dragilev functions: Dis. doct. mathematis.—Helsinki, 1981.—57 p.—(Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A; № 38).
13. Bastin F., Ernst B. A criterion for $CV(X)$ to be quasinormable // Result Math.—1988.—Vol. 14.—P. 223–230.
14. Bierstedt K. D., Bonet J. Some aspects of the modern theory of Frechet spaces // RASCAM. Ser. A.—P. 1–30.
15. Brudnyi Yu. A., Krugljak N. Ya. Interpolation Functors and Interpolation Spaces. Vol. I // North-Holl. Math. Lib.—1991.—Vol. 47.—P. 735.
16. Cwikel M. Lecture notes on duality and interpolation spaces.—2008.—arXiv preprint arXiv:0803.3558.
17. Grothendieck A. Sur les espaces (F) et (DF) // Summa Brazil Math.—1954.—Vol. 57—122.
18. Janson S. Minimal and maximal methods of interpolation // J. Funct. Anal.—1981.—Vol. 44.—P. 50–73.
19. Junek H. Locally Convex Spaces and Operator Ideals.—Leipzig: Teubner-Texte zur Math.—Bnd. 56.—300 p.
20. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces I, II.—Berlin-Heidelberg-New York, 1977, 1979.
21. Meise R., Vogt D. A Characterization of the Quasi-Normable Frechet Spaces // Math. Nachr.—1985.—Vol. 122.—P. 141–150.
22. Mastyllo M. Interpolative construction and the generalized cotype of abstract Lorentz spaces // J. Math. Anal. Appl.—2006.—Vol. 319, № 2.—P. 460–474.
23. Ovchinnikov V. I. The methods of orbits in interpolation theory // Math. Rep.—Vol. 1.—1984.—P. 349–516.
24. Terzioglu T., Vogt D. On asymptotically normable Frechet spaces // Note Mat.—1991.—Vol. 11.—P. 289–296.
25. Terzioglu T., Yurdakul M., Zachariuta V. On some normability condition // Math. Nachr.—2005.—Vol. 278, № 14.—P. 1714–1725.
26. Tidten M. An example of a continuum pairwise non-isomorphic spaces C^∞ -function // Stud. Math.—1984.—Vol. 78.—P. 267–274.
27. Vogt D. Charakterisierung der Unterräume eines nuklearen Potenzreihenraumes von endlichem Typ // Stud. Math.—1982.—Vol. 71.—P. 251–270.
28. Vogt D., Wagner M. J. Charakterisierung der Unterräume und Quotientenräume der nuklearen stabilen Potenzreihenräumen von unendlichem Typ // Stud. Math.—1981.—Vol. 70.—P. 63–80.
29. Vogt D., Wagner M. J. Charakterisierung der Quotientenräume von s und eine Vermutung von Martineau // Stud. Math.—1980.—Vol. 67.—P. 225–240.
30. Bierstedt K. D., Meise R., Summers W. Kothe sets and Kothe sequence spaces // Funct. Anal., Holomorphy and Approx. Theory.—Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1982.—P. 27–91.

ШУБАРИН МИХАИЛ АЛЕКСАНДРОВИЧ
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: mas102@mail.ru

INTERPOLATION PROPERTIES OF
LOCALLY CONVEX SPACES WITH
NORMABILITY TYPE PROPERTIES

Shubrin M. A.

This is a survey on quasi-normable and asymptotically normable locally convex spaces introduced by Grothendieck and by Terzioglu and Vogt, respectively. It is proved that quasi-normability and asymptotically normability are internal interpolation properties. These properties are formulated in terms of abstract Lorentz and Marcinkiewicz spaces introduced by Dmitriev, S. Krein, and Ovchinnikov.

Key words: asymptotically normable spaces, quasi-normable spaces, Fréchet spaces, interpolation classes, interpolation functors.

Секция

Математический анализ

ОПЕРАТОРЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ
И ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ВЕСОВЫХ
ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ¹

А. В. Абанин, Фам Чонг Тиен

Установлены необходимые и достаточные условия непрерывности операторов дифференцирования и интегрирования, действующих из одного весового пространства целых функций в другое. Получено полное описание весовых пространств целых функций, задаваемых радиальными весами и инвариантных относительно дифференцирования и интегрирования.

Ключевые слова: весовые пространства, операторы дифференцирования, операторы интегрирования.

1. Введение

Пусть $H(\mathbb{C})$ — пространство всех целых функций. Для положительной непрерывной функции (*веса*) v на $\mathbb{C}$ мы определим следующее банахово пространство:

$$H_v(\mathbb{C}) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_v := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\}.$$

Пространства такого типа и классические операторы между ними играют важную роль в анализе и его приложениях (см. обзор Х. Бонета [5]). По этой причине они интенсивно исследовались многими авторами (см. [1–4, 6, 7, 9–12]). В частности, в семидесятых годах прошлого столетия Ю. Ф. Коробейник, О. В. Епифанов, В. А. Богачев в [10, 12] изучали некоторые конкретные классы весовых пространств целых функций, инвариантных относительно операторов

¹Исследование А. В. Абанина выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-0140415 а. Исследование Фам Чонг Тиена выполнено при финансовой поддержке гранта Института естественных наук, ВНУ, № TN. 15. 01.

дифференцирования и интегрирования. Недавно В. Луски и А. Арутюнян [9] провели исследование непрерывности этих двух операторов в весовых пространствах целых функций, задаваемых произвольным радиальным весом. Напомним, что вес v на $\mathbb{C}$ называется *радиальным*, если

$$v(z) = v(|z|), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{и} \quad \log r = o(\log v(r)) \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Отметим, что основные результаты в работе [9] были получены при следующем ограничении:

(НЛ) *всякое $r > 0$ при некотором $n \in (0, \infty)$ является глобальной максимальной точкой функции $\gamma_n(r) := r^n/v(r)$ на $[0, \infty)$,*

которое не так просто проверить. В настоящей работе мы развиваем новый метод изучения непрерывности классических операторов в весовых пространствах целых функций, задаваемых общим весом, и получаем полное описание классов пространств, задаваемых радиальными весами и инвариантных относительно рассматриваемых операторов. Более того, последние описания в ряде случаев оказываются более простыми по сравнению с [9] (см. ниже условие (iii) в теореме 1), а некоторые результаты удастся установить без ограничений, использованных в [9] (см. ниже замечание 3).

Наша идея основывается на следующих соображениях. Как известно (см. [1, 4]), получить полную характеристику свойств пространств $H_v(\mathbb{C})$ и операторов между ними в терминах исходных весов, вообще говоря, невозможно. С этой целью необходимо использовать, так называемые, ассоциированные веса. Напомним (см. [4]), что для данного веса v на $\mathbb{C}$ его *ассоциированный вес* определяется по следующей формуле:

$$\tilde{v}(z) := \sup \{ |f(z)| : f \in H_v(\mathbb{C}), \|f\|_v \leq 1 \}.$$

Для нетривиального пространства $H_v(\mathbb{C})$ всегда $0 < \tilde{v} \leq v$ на $\mathbb{C}$, $\log \tilde{v}$ является непрерывной субгармонической функцией на $\mathbb{C}$ и $H_{\tilde{v}}(\mathbb{C}) = H_v(\mathbb{C})$ изометрически. Нетрудно видеть, что для радиального веса v его ассоциированный вес $\tilde{v}$ также является радиальным и при этом $\tilde{v}(r)$ — возрастающая *log-выпуклая* функция (т. е. функция $\log \tilde{v}(e^x)$ выпукла). Поэтому, чтобы получить полное описание некоторых топологических свойств пространств $H_v(\mathbb{C})$ или линейных операторов

между ними в терминах радиальных весов, нам необходимо использовать log-выпуклые веса.

В разделе 2 доказываются необходимые и достаточные условия для ограниченности оператора дифференцирования $D : f \mapsto f'$ в общем и радиальном случаях. Далее, при естественном предположении, что v является log-выпуклым радиальным весом, получено полное описание класса пространств $H_v(\mathbb{C})$, инвариантных относительно оператора D , в терминах роста v . В разделе 3 примерно по тому же плану изучается оператор интегрирования $I : f \mapsto \int_0^z f(t) dt$. По ходу исследования будут построены примеры, показывающие существование требования log-выпуклости веса v .

2. Оператор дифференцирования

В этом разделе мы изучаем непрерывность оператора дифференцирования в весовых пространствах целых функций. Начнем с простых необходимых и достаточных условий непрерывности оператора $D : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_w(\mathbb{C})$.

Назовем произвольную непрерывную функцию $\rho : \mathbb{C} \rightarrow (0, 1]$ *функцией расстояния* на $\mathbb{C}$. Для веса v и функции расстояния ρ на $\mathbb{C}$ определим следующий новый вес:

$$v_\rho(z) := \frac{1}{\rho(z)} \max_{|\zeta| \leq \rho(z)} v(z + \zeta), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ясно, что $v(z) \leq v_\rho(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

Предложение 1. Для любых веса v и функции расстояния ρ на $\mathbb{C}$ оператор дифференцирования $D : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_{v_\rho}(\mathbb{C})$ непрерывен.

◁ По формуле Коши для любой целой функции f имеем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho(z)} \frac{f(z+\zeta)}{\zeta^2} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда для всех $z \in \mathbb{C}$ и $f \in H_v(\mathbb{C})$

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{\rho(z)} \|f\|_v \max_{|\zeta| \leq \rho(z)} v(z + \zeta) = \|f\|_v v_\rho(z).$$

Отсюда следует, что $\|f'\|_{v_\rho} \leq \|f\|_v$ для всех $f \in H_v(\mathbb{C})$. Последнее завершает доказательство. ▷

Следствие 1. Пусть v и w — два веса и ρ — функция расстояния на $\mathbb{C}$. Если существует константа $C > 0$ такая, что $v_\rho(z) \leq Cw(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$, то оператор $D : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_w(\mathbb{C})$ непрерывен.

Применяя следствие 1 к радиальным весам на $\mathbb{C}$ с функцией расстояния $\rho(z) = 1$, получаем следующий результат.

Следствие 2. Пусть v и w — два радиальных веса на $\mathbb{C}$ такие, что при некотором $C > 0$

$$v(1+r) \leq Cw(r) \quad \text{для всех } r \in [0, +\infty).$$

Тогда оператор $D : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_w(\mathbb{C})$ непрерывен.

Теперь приведем необходимые условия непрерывности оператора дифференцирования.

Предложение 2. Пусть v и w — два веса на $\mathbb{C}$. Если оператор $D : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_w(\mathbb{C})$ непрерывен, то имеется константа $C > 0$ такая, что

$$\limsup_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\tilde{v}(z + \Delta z) - \tilde{v}(z)}{\Delta z} \right| \leq Cw(z) \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Если $D : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_w(\mathbb{C})$ является непрерывным, то существует константа $C > 0$ такая, что $\|f'\|_w \leq C$ при всех f из единичного шара $B_v(\mathbb{C})$ пространства $H_v(\mathbb{C})$.

Фиксируем произвольные $z \in \mathbb{C}$ и $\Delta z \in \mathbb{C}$. Не нарушая общности считаем, что $\tilde{v}(z + \Delta z) \geq \tilde{v}(z)$. В соответствии с [4, 1.2 (iv)] найдется функция f в $B_v(\mathbb{C})$ с $f(z + \Delta z) = \tilde{v}(z + \Delta z)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(z + \Delta z) - \tilde{v}(z)| &= \tilde{v}(z + \Delta z) - \tilde{v}(z) \leq f(z + \Delta z) - |f(z)| \leq \\ &\leq |f(z + \Delta z) - f(z)| \leq |f'(\xi)| |\Delta z| \end{aligned}$$

для некоторой точки $\xi \in [z, z + \Delta z]$. Поэтому $|\tilde{v}(z + \Delta z) - \tilde{v}(z)| \leq Cw(\xi)|\Delta z|$, откуда легко следует (1). $\triangleright$

Применим этот результат к радиальным весам на $\mathbb{C}$. Как было уже отмечено выше, для радиального веса v функция $\tilde{v}(r)$ является возрастающей и log-выпуклой. Следовательно, $\tilde{v}$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, исключая не более чем счетное число точек, а ее правая производная существует всюду на $\mathbb{R}$ и возрастает. Всюду далее мы будем использовать обозначение $\tilde{v}'$ для правой производной функции $\tilde{v}$. Из предложения 2 непосредственным образом получаем

Следствие 3. Пусть v и w — два радиальных веса на $\mathbb{C}$. Если оператор $D : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_w(\mathbb{C})$ непрерывен, то

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\tilde{v}'(r)}{w(r)} < \infty.$$

Теперь рассмотрим случай когда $w = v$ на $\mathbb{C}$ и докажем в этом случае критерий непрерывности оператора дифференцирования для $\log$ -выпуклых весов. Для этого нам понадобится вспомогательный результат, касающийся правила Лопиталья.

Лемма 1. Пусть f и g — две дифференцируемые функции на $(a, +\infty)$, $a > 0$, $g'(x) \neq 0$ на $(a, +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$1) \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2) Пусть функция f является возрастающей и выпуклой на $(a, +\infty)$ и $x = o(g(x))$ при $x \rightarrow +\infty$. Если $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$

и $\beta_g := \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g'(x)} \inf_{x < t} \frac{g(t)}{t-x} < \infty$, то

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \beta_g \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Первое утверждение леммы 1 — классическое правило Лопиталья, а второе — вариант его обращения, установленный А. В. Брагищевым [11] в более общей форме.

Применив второе утверждение леммы 1 к функциям $\log v$ и $\log h$, получаем такое полезное следствие.

Следствие 4. Пусть v и h — две возрастающие дифференцируемые функции на $(a, +\infty)$ такие, что $v(r)$ является $\log$ -выпуклой, $h'(r) \neq 0$ на $(a, +\infty)$ и $\lim_{r \rightarrow +\infty} v(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} h(r) = \infty$. Если $\log v(r) = O(\log h(r))$ и $\log r = o(\log h(r))$ при $r \rightarrow +\infty$ и $\beta_{lh} := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{h(r)}{r h'(r)} \inf_{r < t} \frac{\log h(t)}{\log(t/r)} < \infty$, то

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{v'(r)}{v(r)} \frac{h(r)}{h'(r)} \leq \beta_{lh} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log v(r)}{\log h(r)}.$$

Теорема 1. Пусть v — $\log$ -выпуклый радиальный вес на $\mathbb{C}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (i) Оператор $D : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ непрерывен.
 - (ii) $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} < \infty$.
 - (iii) $\log v(r) = O(r)$ при $r \rightarrow \infty$.
- $\triangleleft$ (i) $\implies$ (iii): По следствию 3 из (i) следует, что

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\tilde{v}'(r)}{\tilde{v}(r)} < \infty.$$

Применив правило Лопиталья к $f(r) := \log \tilde{v}(r)$ и $g(r) := r$, получим

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \tilde{v}(r)}{r} < \infty.$$

Поэтому $\log \tilde{v}(r) \leq C(r+1)$ для некоторого $C > 0$ и всех $r \geq 0$. Как известно (см. [4, с. 157]), $v(r) \leq r\tilde{v}(r)$ для всех $r \geq 1$. Значит, $\log v(r) \leq C(r+1) + \log r$ при всех $r \geq 1$, откуда следует (iii).

(iii) $\implies$ (ii): Пусть $h(r) := e^r$, имеем

$$\inf_{t > r} \frac{\log h(t)}{\log(t/r)} = \frac{\log h(t)}{\log(t/r)} \Big|_{t=er} = er.$$

Тогда

$$\beta_{lh} := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{h(r)}{rh'(r)} \inf_{t > r} \frac{\log h(t)}{\log(t/r)} = e.$$

Используя следствие 4, получим

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} \leq e \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log v(r)}{r}.$$

Это неравенство обеспечивает то, что (iii) $\implies$ (ii).

(ii) $\implies$ (i): (ii) означает, что имеется константа $C > 0$ такая, что $(\log v(r))' \leq C$ при всех $r > 0$. Используя то, что вес v является $\log$ -выпуклым, имеем

$$\log \frac{v(r+1)}{v(r)} \leq C(r+1) \log \frac{r+1}{r} \leq 2C \quad \text{для всех } r \geq 1.$$

Остается применить следствие 2, чтобы получить (i). $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В этом пункте, мы за счет новых методов фактически заменили трудно проверяемое предположение (HL) на более естественное требование о том, что радиальный вес v является log-выпуклым. Следующий пример покажет, что log-выпуклость веса v существенна в теореме 1.

ПРИМЕР 1. Пусть (a_n) и (b_n) — две последовательности положительных чисел со следующими свойствами:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = +\infty$; 2) $a_n < b_n, \forall n \geq 2$;
- 3) $(a_n + b_n) \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \exp \sum_{k=1}^{n-1} (a_k + b_k) = 0$;
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \exp \sum_{k=1}^{n-1} (a_k + b_k) = L \in (0, +\infty)$.

Например, мы можем взять $a_n = 3^{-n}$, $b_n = \log(1 + \frac{1}{n}) - 3^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Обозначим

$$S_n := \sum_{k=1}^n (a_k + b_k), \quad n \in \mathbb{N},$$

и определим

- * $\varphi(t) := 1$ при $t \in (-\infty, a_1]$ и $\varphi(t) := \frac{1}{b_1}(t - a_1) + 1$ при $t \in (a_1, S_1]$;
- * для $n \geq 2$,

$$\varphi(t) := \frac{1}{a_n} (t - S_{n-1}) + 2n - 2, \quad t \in (S_{n-1}, S_{n-1} + a_n],$$

и

$$\varphi(t) := \frac{1}{b_n} (t - S_{n-1} - a_n) + 2n - 1, \quad t \in (S_{n-1} + a_n, S_n].$$

Нетрудно видеть, что функция φ является возрастающей и непрерывной на $\mathbb{R}$. Далее, для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi'(t) = 1/a_n \text{ на } (S_{n-1}, S_{n-1} + a_n) \text{ и } \varphi'(t) = 1/b_n \text{ на } (S_{n-1} + a_n, S_n).$$

Отсюда с учетом свойства 2) следует, что функция φ не является выпуклой на $\mathbb{R}$, а ее наибольшая выпуклая миноранта $\overline{\varphi}$ определяется следующим образом:

$$\overline{\varphi}(t) := \frac{2}{a_n + b_n} (t - S_{n-1}) + 2n - 2, \quad t \in [S_{n-1}, S_n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как $\bar{\varphi}'(t) = 2/(a_n + b_n)$ на (S_{n-1}, S_n) для любого $n \in \mathbb{N}$, то $\bar{\varphi}'(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Отсюда, в частности, следует, что $t = o(\bar{\varphi}(t))$ при $t \rightarrow +\infty$. Тем более, $t = o(\varphi(t))$ при $t \rightarrow +\infty$.

Таким образом, функции $v(r) := \exp(\varphi(\log r))$ и $\bar{v}(r) := \exp(\bar{\varphi}(\log r))$ являются радиальными весами на $\mathbb{C}$.

Простые вычисления показывают, что при любом $n \in \mathbb{N}$

$$V(r) := \frac{v'(r)}{v(r)} = \frac{1}{a_n r} \quad \text{для всех } r \in (e^{S_{n-1}}, e^{S_{n-1}+a_n}).$$

В частности,

$$V(e^{S_{n-1}+a_n/2}) = \frac{1}{a_n \exp(S_{n-1} + a_n/2)}.$$

Отсюда с учетом свойства 4) получаем, что

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} = \infty. \quad (2)$$

С другой стороны, при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\bar{V}(r) := \frac{\bar{v}'(r)}{\bar{v}(r)} = \frac{2}{(a_n + b_n)r} \quad \text{для всех } r \in (e^{S_{n-1}}, e^{S_n}).$$

Поэтому при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\max_{(e^{S_{n-1}}, e^{S_n})} \bar{V}(r) = \frac{2}{(a_n + b_n) \exp S_{n-1}}.$$

Используя свойство 5), имеем

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\bar{v}'(r)}{\bar{v}(r)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{(e^{S_{n-1}}, e^{S_n})} \bar{V}(r) = \frac{2}{L}.$$

Тогда по теореме 1 оператор дифференцирования $D : H_{\bar{v}}(\mathbb{C}) \rightarrow H_{\bar{v}}(\mathbb{C})$ непрерывен. Кроме того, так как $\tilde{v}(r) \leq \bar{v}(r) \leq v(r)$ на $[0, \infty)$ и $H_{\tilde{v}}(\mathbb{C}) = H_v(\mathbb{C})$ изометрически, то также $H_{\bar{v}}(\mathbb{C}) = H_v(\mathbb{C})$ изометрически. Поэтому оператор дифференцирования $D : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ тоже является непрерывным. Отсюда и из (2) следует, что в теореме 1 нельзя отказаться от требования log-выпуклости веса без нарушения ее справедливости.

3. Оператор интегрирования

В этом параграфе мы изучаем оператор интегрирования

$$I : H_w(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C}), \quad If(z) := \int_{\ell[0,z]} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \mathbb{C},$$

где интеграл берется по некоторой спрямляемой кривой $\ell[0, z]$, соединяющей 0 и z . Как в разделе 2, начнем с достаточных условий непрерывности оператора I в общем случае.

Предложение 3. Допустим, что веса v и w на $\mathbb{C}$ таковы, что

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{w_{in}(z)}{v(z)} < \infty,$$

где

$$w_{in}(z) := \inf_{\ell[0,z]} \int_{\ell[0,z]} w(\zeta) |d\zeta|, \quad z \in \mathbb{C},$$

и инфимум берется по всем спрямляемым кривым $\ell[0, z]$, соединяющим 0 и z . Тогда оператор $I : H_w(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ непрерывен.

◁ Для произвольной функции $f \in H_w(\mathbb{C})$, точки $z \in \mathbb{C}$ и спрямляемой кривой $\ell[0, z]$, имеем

$$|If(z)| = \left| \int_{\ell[0,z]} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_{\ell[0,z]} |f(\zeta)| |d\zeta| \leq \|f\|_w \int_{\ell[0,z]} w(\zeta) |d\zeta|.$$

Отсюда следует, что

$$|If(z)| \leq M \|f\|_w v(z) \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C} \text{ и } f \in H_w(\mathbb{C}),$$

где $M := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{w_{in}(z)}{v(z)}$. Итак, $\|If\|_v \leq M \|f\|_w$, $\forall f \in H_w(G)$, что завершает доказательство. ▷

Используя правило Лопиталя и предложение 3, получаем

Следствие 5. Пусть v и w — два радиальных веса на $\mathbb{C}$. Рассмотрим следующие утверждения:

$$(i) \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{w(r)}{v'(r)} < \infty.$$

$$(ii) \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{v(r)} \int_0^r w(t) dt < \infty.$$

(iii) Оператор интегрирования $I : H_w(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ непрерывен.

Тогда (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В [9, Предложение 2.2 (а)] импликация (i) $\implies$ (iii) была доказана при дополнительном ограничении, что $H_v(\mathbb{C})$ изоморфно l_∞ .

Обсудим теперь вопрос о том, когда условие (ii) в следствии 5 является необходимым для непрерывности соответствующего оператора интегрирования.

Будем говорить, что радиальный вес w на $\mathbb{C}$ принадлежит классу $R_{\mathbb{C}}$, если существуют числа $c > 0$ и $r_0 \in (0, \infty)$ такие, что для произвольного $r \in (r_0, \infty)$ найдется функция f_r в единичном шаре $B_w(\mathbb{C})$, для которой

$$f_r(t) \geq cw(t) \quad \text{для всех } t \in [r_0, r].$$

Предложение 4. Пусть $w \in R_{\mathbb{C}}$ и v — произвольный радиальный вес на $\mathbb{C}$. Оператор интегрирования $I : H_w(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ непрерывен тогда и только тогда, когда выполнено условие (ii) в следствии 5.

◁ В силу следствия 5 нам достаточно доказать только необходимость. Пусть $I : H_w(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ непрерывен. Тогда для некоторого $A \in (0, \infty)$

$$\|If\|_v \leq A \quad \text{для всех } f \in B_w(\mathbb{C}).$$

Используя то, что $w \in R_{\mathbb{C}}$, и беря r_0, c и f_r как в определении $R_{\mathbb{C}}$, получим, что для $r \in (r_0, \infty)$

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{1}{v(r)} \left| \int_0^r f_r(t) dt \right| \geq \frac{1}{v(r)} \int_{r_0}^r f_r(t) dt - \frac{r_0 w(r_0)}{v(r)} \geq \\ &\geq \frac{c}{v(r)} \int_{r_0}^r w(t) dt - \frac{r_0 w(r_0)}{v(r)} \geq \frac{c}{v(r)} \int_0^r w(t) dt - \frac{(c+1)r_0 w(r_0)}{v(r)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{v(r)} \int_0^r w(t) dt \leq \frac{A}{c} < \infty. \quad \triangleright$$

Дж. Клуни и Т. Ковари [8] установили достаточные условия на радиальный вес w , при которых существуют функция $f \in B_w(\mathbb{C})$ и числа $r_0 \in [0, \infty)$ и $c > 0$ такие, что

$$f(t) \geq cw(t) \quad \text{для всех } t \in [r_0, \infty).$$

Обозначим через $CR_{\mathbb{C}}$ множество всех радиальных весов на $\mathbb{C}$, обладающих последним свойством. Очевидно, $CR_{\mathbb{C}} \subset R_{\mathbb{C}}$.

В соответствии с [8, теорема 4] любой $\log$ -выпуклый вес w на $\mathbb{C}$ может быть представлен в следующей форме:

$$w(r) = w(1) \exp \int_1^r \frac{\omega(\rho)}{\rho} d\rho, \quad r \geq 1, \quad (3)$$

с некоторой возрастающей функцией ω . Будем называть w *весом Клуни — Ковари* на $\mathbb{C}$, если w является $\log$ -выпуклым и, для ω как в (3), найдется $c > 1$ с $\omega(cr) - \omega(r) \geq 1$ при всех $r \geq 1$. Из [8, теорема 4] (см. также доказательство предложения 3.1 (b) в [4]) следует, что для любого веса Клуни — Ковари w существует целая функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ с $a_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$) такая, что

$$1 \leq \frac{w(r)}{M(f, r)} \leq C, \quad r \geq 1,$$

при некотором $C \geq 1$. Как обычно, $M(f, r) := \max_{|z|=r} |f(z)|$. Отсюда следует, что $f \in B_w(\mathbb{C})$ и, так как $M(f, r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = f(r)$, то $f(r) \geq \frac{1}{C} w(r)$ для всех $r \geq 1$. Следовательно, $w \in CR_{\mathbb{C}}$. Применяя предложение 4, получаем следующий результат.

Следствие 6. Пусть w — вес Клуни — Ковари и v — произвольный радиальный вес на $\mathbb{C}$. Тогда оператор интегрирования $I : H_w(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ непрерывен тогда и только тогда, когда имеет место условие (ii) следствия 5.

Исследуем теперь непрерывность оператора интегрирования в случае, когда $w = v$ on $\mathbb{C}$. Другими словами, мы рассмотрим сейчас вопрос об описании класса весовых пространств $H_v(\mathbb{C})$, инвариантных относительно оператора интегрирования.

Теорема 2. Пусть v — $\log$ -выпуклый вес на $\mathbb{C}$. Тогда оператор интегрирования $I : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ непрерывен тогда и только тогда, когда

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} > 0. \quad (4)$$

◁ По следствию 5 выполнение условия (4) влечет непрерывность оператора $I : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$.

Обратно, пусть $I : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ непрерывен. Тогда для некоторого $C > 0$ имеем, что $\|If\|_v \leq C\|f\|_v$ при всех $f \in H_v(\mathbb{C})$. Используя этот факт для $f(z) = z^n \in H_v(\mathbb{C})$, имеем

$$\frac{1}{n+1} \|z^{n+1}\|_v \leq C \|z^n\|_v \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}_0. \quad (5)$$

Далее, при любом $n \in \mathbb{N}_0$

$$\|z^n\|_v = \exp \sup_{r>0} (n \log r - \log v(r)) = \exp \sup_{x \in \mathbb{R}} (nx - \varphi_v(x)) =: \exp A_n,$$

где $\varphi_v(x) := \log v(e^x)$.

Так как v является log-выпуклым весом на $\mathbb{C}$, функция φ_v выпукла на $\mathbb{R}$ и $x = o(\varphi_v(x))$ при $x \rightarrow +\infty$. Не нарушая общности мы можем считать, что φ_v дифференцируема на $\mathbb{R}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}_0$, найдется $x_n \in \mathbb{R}$ такая, что

$$A_n = nx_n - \varphi_v(x_n) \quad \text{и} \quad \varphi'_v(x_n) = n.$$

Отсюда и из (5) следует, что

$$A_{n+1} - A_n \leq \log C(n+1) = \log C(\varphi'_v(x_n) + 1).$$

Очевидно,

$$A_{n+1} - A_n \geq (n+1)x_n - \varphi_v(x_n) - A_n = x_n.$$

Следовательно, $x_n \leq \log C(\varphi'_v(x_n) + 1)$ или

$$\varphi'_v(x_n)e^{-x_n} \geq \frac{1}{C} - e^{-x_n}. \quad (6)$$

Так как φ_v выпукла, то φ'_v возрастает. Отсюда и из определения x_n следует, что $x_n < x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$, и $x_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любого $x \geq x_0$ существует $n \in \mathbb{N}_0$ такое, что $x_n \leq x < x_{n+1}$. Используя (6), получим

$$\varphi'_v(x)e^{-x} \geq \frac{n}{n+1} \varphi'_v(x_{n+1})e^{-x_{n+1}} \geq \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{C} - e^{-x_{n+1}} \right).$$

Поэтому

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi'_v(x)}{e^x} \geq \frac{1}{C} > 0.$$

Ясно, что последнее условие эквивалентно (4). $\triangleright$

Следующий пример показывает, что теорема 2 (ее необходимая часть) может быть неверна для радиальных весов общего вида.

ПРИМЕР 2. Пусть $(\varepsilon_k)_k$ — последовательность положительных чисел такая, что $\varepsilon_1 < 1$, $\varepsilon_k \downarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и $\sum_k e^k(e^{\varepsilon_k} - 1) < \infty$. Например, мы можем взять $\varepsilon_k = e^{-2k}$.

Положим $\varphi(x) := e^x$ при $x \in (-\infty, 1]$ и определим

$$\Delta_k := e^{k+\varepsilon_k} - (e^k + \varepsilon_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Полагая

$$\varphi(x) := x - 1 + \varphi(1) \quad \text{для } x \in (1, 1 + \varepsilon_1]$$

и

$$\varphi(x) := e^x - \Delta_1 \quad \text{для } x \in (1 + \varepsilon_1, 2]$$

и считая, что функция φ определена на $(-\infty, n]$, $n \in \mathbb{N}$, определим ее на $(n, n + 1]$ следующим образом:

$$\varphi(x) := x - n + \varphi(n) \quad \text{для } x \in (n, n + \varepsilon_n]$$

и

$$\varphi(x) := e^x - \sum_{k=1}^n \Delta_k \quad \text{для } x \in (n + \varepsilon_n, n + 1].$$

Нетрудно видеть, что φ является непрерывной и возрастающей, но не выпуклой на $\mathbb{R}$. Из определения φ следует, что

$$e^x - C \leq \varphi(x) \leq e^x \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

где $C := \sum_k \Delta_k = \sum_k (e^k(e^{\varepsilon_k} - 1) - \varepsilon_k) < \infty$.

Рассмотрим два радиальных веса на $\mathbb{C}$ — $v(r) := \exp \varphi(\log r)$ и $\bar{v}(r) := e^r$. Условие (7) означает, что $e^{-C}\bar{v}(r) \leq v(r) \leq \bar{v}(r)$ при всех $r > 0$. Следовательно, $H_v(\mathbb{C}) = H_{\bar{v}}(\mathbb{C})$ как множества и топологически.

Так как

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(x)}{e^x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(n + \varepsilon_n/2)}{e^{n + \varepsilon_n/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{n + \varepsilon_n/2}} = 0,$$

то условие (4) для веса v не выполняется. С другой стороны, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} = 1$. Применяя теорему 2, получаем отсюда непрерывность оператора $I : H_{\overline{v}}(\mathbb{C}) \rightarrow H_{\overline{v}}(\mathbb{C})$ или, равносильно, $I : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$.

Из теорем 1 и 2 вытекает такой результат.

Следствие 7. Пусть v — $\log$ -выпуклый радиальный вес на $\mathbb{C}$. Следующие утверждения равносильны:

- (i) Оператор $D : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ является эпиморфизмом.
- (ii) $0 < \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} < \infty$.
- (iii) Найдутся $A, C \geq 1$ такие, что $\frac{1}{A}e^{r/C} \leq v(r) \leq Ae^{Cr}$ для всех $r \geq 0$.

Замечание 4. Легко видеть, что пример 1 с $a_n = 3^{-n}$ и $b_n = \log(1 + \frac{1}{n}) - 3^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ показывает, что наше предположение о том, что v является $\log$ -выпуклым, существенно для справедливости следствия 7.

Литература

1. Abanin A. V., Pham Trong Tien. Painlevé null sets, dimension and compact embedding of weighted holomorphic spaces // Stud. Math.—2012.—Vol. 213.—P. 169–187.
2. Beltrán M. J., Bonet J., Fernández C. Classical operators on weighted Banach spaces of entire functions // Proc. Amer. Math. Soc.—2013.—Vol. 141.—P. 4293–4303.
3. Beltrán M. J., Bonet J., Fernández C. Classical operators on the Hörmander algebras // Discrete Contin. Dyn. Syst.—2015.—Vol. 35.—P. 637–652.
4. Bierstedt K. D., Bonet J., Taskinen J. Associated weights and spaces of holomorphic functions // Stud. Math.—1998.—Vol. 127.—P. 137–168.
5. Bonet J. Weighted spaces of holomorphic functions and operators between them // Seminar of Mathematical Analysis (Malaga/Seville, 2002/2003).—2003.—P. 117–138.
6. Bonet J. Dynamics of the differentiation operator on weighted spaces of entire functions // Math. Z.—2009.—Vol. 261.—P. 649–677.
7. Bonet J., Bonilla A. Chaos of the differentiation operator on weighted Banach spaces of entire functions // Complex Anal. Oper. Theory.—2013.—Vol. 7.—P. 33–42.
8. Clunie J., Kövári T. On integral functions having prescribed asymptotic growth II // Canad. J. Math.—1968.—Vol. 20.—P. 7–20.
9. Harutyunyan A., Lusky W. On the boundedness of the differentiation operator between weighted spaces of holomorphic functions // Stud. Math.—2008.—Vol. 184, № 3.—P. 233–247.

10. Богачев В. А. Об операторах дифференцирования и интегрирования в некоторых пространствах целых функций // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк. Естеств. науки.—1980.—№ 3.—С. 21–25.
11. Брагищев А. В. Обращение правила Лопиталя // Механика сплошной среды.—Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1985.—С. 28–42.
12. Коробейник Ю. Ф., Елифанов О. В. Оценки производных в весовых пространствах целых функций // Изв. АН АрмССР. Сер. мат.—1973.—Т. 8.—С. 144–156.

АБАНИН АЛЕКСАНДР БАСИЛЬЕВИЧ
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНИЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: abanin@math.rsu.ru

ФАМ ЧОНГ ТИЕН
Институт естественных наук,
Вьетнамский национальный университет
334 Нгуен Чай, Тхань Суан, Ханой, Вьетнам
E-mail: phamtien@mail.ru

DIFFERENTIATION AND INTEGRATION OPERATORS ON WEIGHTED BANACH SPACES OF ENTIRE FUNCTIONS

Abanin A. V., Pham Trong Tien

We establish necessary and sufficient conditions for continuity of differentiation and integration operators acting from a weighted Banach space of entire functions to another one. We obtain a complete description of those spaces of entire functions given by radial weights that are invariant with respect to differentiation and integration.

Key words: weighted spaces, differentiation operators, integration operators.

КОНЕЧНОМЕРНОСТЬ
ХОРДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ БУЗЕМАНА — ПХАДКЕ
НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ¹

П. Д. Андреев

В статье доказывается теорема о конечности топологической размерности для хордовых пространств неположительной кривизны в смысле Буземана — Пхадке. Таким образом, в указанном классе пространств дан положительный ответ на аналог известной проблемы Буземана о конечномерности G -пространств.

Ключевые слова: хордовое пространство, проблема конечномерности, неположительная кривизна, геодезическое пространство.

1. Основные понятия

1.1. Хордовые пространства. Класс хордовых пространств, введенный в книге [1], служит обобщением G -пространств Буземана (см. [2]). В частности, к хордовым пространствам относятся все конечномерные нормированные пространства, в то время как G -пространствами являются конечномерные пространства лишь со строго выпуклой нормой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть (X, d) — *геодезическое пространство*, т. е. метрическое пространство, в котором каждые две точки x, y можно соединить отрезком. Под *отрезком* здесь понимается изометрический образ числового отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Предположим также, что X конечно компактно. Следуя соглашениям и обозначениям из [1], обозначим $T^*(x, y)$ множество всех отрезков в X , считая, что точки x, y пробегает множество всех неупорядоченных пар различных точек в X . В $T^*(x, y)$ выделяется подмножество отрезков $Q(x, y)$, называемых *хордами*, а в $Q(x, y)$ — подмножество $Q^*(x, y)$ *базовых хорд*. Каждая хорда — это отрезок, который является *геодезической*, где под геодезической понимается базовая хорда или объединение конечной или бесконечной последовательности базовых хорд,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-00219.

в которой каждая последующая хорда пересекается с объединением предыдущих по общей базовой хорде.

Пространство X называется *хордовым пространством*, если при перечисленных выше соглашениях выполняются следующие аксиомы (с сохранением нумерации Буземана — Пхадке).

- $\Sigma_2(1)$ Всякая точка $p \in X$ обладает окрестностью $U(p, r(p))$, в которой для любых $a, b \in U(p, r(p))$, $a \neq b$, базовая хорда $Q^*(a, b)$ существует и определена однозначно.
- $\Sigma_2(2)$ Если q — внутренняя точка $Q^*(a, b)$, то $Q^*(a, q) \subset Q^*(a, b)$, и хорда $Q^*(a, b)$ является единственным продолжением хорды $Q^*(a, q)$ за точку q на расстояние $d(q, b)$.
- $\Sigma_2(3)$ Пусть определены базовые хорды $Q^*(a_i, b_i)$ при $i = 0, 1, 2, \dots$. Если $a_i \rightarrow a_0$ и $b_i \rightarrow b_0$ при $i \rightarrow +\infty$, то $Q^*(a_i, b_i) \rightarrow Q^*(a_0, b_0)$.
- $\Sigma_2(4)$ Для любых точек $a, b \in U(p, r(p))$ существует точка $c \neq b \in X$, для которой $Q^*(a, b) \subset Q^*(a, c)$.
- $\Sigma_2(a)$ Для любых $a, b \in X$ и гомотопического класса $\mathcal{K}$ путей из a в b в этом классе существует кратчайшая геодезическая.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отличие в обозначении последней аксиомы обосновывается тем, что она носит глобальный характер, в то время как первые четыре аксиомы локальны. Текст аксиомы $\Sigma_2(2)$ приводится в соответствии с [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. G -пространства служат частным случаем хордовых пространств. В этом случае класс хорд $Q(x, y)$ состоит из всех отрезков, а класс $Q^*(x, y)$ базовых хорд состоит из отрезков, удовлетворяющих условию единственности. Ряд свойств, характерных для G -пространств, выполняется в случае общих хордовых пространств. В частности, всякое хордовое пространство X топологически однородно. Отсюда следует, что X имеет одну и ту же локальную топологическую размерность во всех его точках.

1.2. Пространства неположительной кривизны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Геодезическое пространство (X, d) называется *пространством неположительной кривизны по Буземану*, если в нем средняя линия любого треугольника abc не превосходит половины основания: если m — середина отрезка $[ab]$ и n — середина отрезка $[ac]$, то

$$d(m, n) \leq \frac{1}{2} d(b, c).$$

Основы теории пространств неположительной кривизны по Буземану изложены, например, в [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Хордовое пространство X называется *хордовым пространством неположительной кривизны*, если в нем свойство неположительности кривизны выполнено для всех точек $p \in X$ и всех треугольников, содержащихся в $U(p, r(p))$ и образованных базовыми хордами. X называется *хордовым пространством глобально неположительной кривизны*, если свойство неположительности кривизны выполняется для всех его треугольников, образованных хордами.

Несложно доказать, что всякое хордовое пространство X глобально неположительной кривизны стягиваемо, и каждая пара точек $a, b \in X$ соединяется единственной хордой. Поэтому можно считать, что в таком пространстве $Q^*(x, y) = Q(x, y)$.

Целью настоящей статьи является доказательство конечности топологической размерности хордовых пространств неположительной кривизны. Аналогичная теорема для G -пространств доказана в [5]. Точнее, в [5] доказывается, что всякое G -пространство, в котором шары достаточно малого радиуса выпуклы, имеет конечную топологическую размерность. Обращаясь к хордовым пространствам, следует иметь в виду, что понятие выпуклости в этом случае допускает разные трактовки. Поэтому неправилен сам вопрос о выпуклости шаров без уточнения, о какой именно выпуклости идет речь.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Подмножество $A \subset X$ в хордовом пространстве X называется *хордово выпуклым*, если вместе с каждой парой $a, b \in A$ всякая хорда $Q(a, b)$ содержится в A .

Лемма 1. Пусть X — хордовое пространство неположительной кривизны, $p \in X$. Тогда всякий шар $B(x, r)$, содержащийся в $B(p, r(p)) \subset X$ является хордово выпуклым.

◁ Достаточно доказать, что для любых точек $a, b \in B(x, r)$ расстояние $d(x, m)$, где m — середина хорды $Q^*(a, b)$, оценивается как

$$d(x, m) \leq \max \{d(x, a), d(x, b)\}.$$

Пусть n — середина хорды $Q^*(x, a)$. Для определенности будем считать, что $d(x, a) \geq d(x, b)$. Из неравенства треугольника и свойства неположительности кривизны имеем

$$d(x, m) \leq d(x, n) + d(n, m) \leq \frac{1}{2} d(x, a) + \frac{1}{2} d(x, b) \leq d(x, a),$$

что доказывает лемму. ▷

Следствие 1. Пусть X — хордовое пространство глобально неположительной кривизны. Тогда в X всякий шар $B(x, r) \subset X$ является хордово выпуклым.

2. Доказательство основной теоремы

Теорема конечномерности для хордовых пространств неположительной кривизны имеет естественную формулировку.

Теорема 1. Всякое хордовое пространство X неположительной кривизны имеет конечную топологическую размерность.

◁ Следуя методу В. Н. Берестовского, мы будем строить топологическое вложение малого шара пространства X в евклидово пространство некоторой конечной размерности. Отсюда будет следовать локальная конечность топологической размерности и, в силу замечания 1, конечномерность пространства в целом.

Пусть $p \in X$ и величина $r(p)$ определена аксиомой $\Sigma_2(1)$. Обозначим $\mu = r(p)/3$, $\varepsilon = \mu/3$, и рассмотрим шары $B(p, \mu)$ и $B(p, 2\mu)$. Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть $x \in B(p, \mu)$ и $y \in B(p, 2\mu)$ — такие точки, что $d(x, y) = \varepsilon$, и $z \in B(p, 2\mu)$ — такая точка, что $d(x, z) = \mu$ и $y \in Q^*(x, z)$. Тогда для любого $\varepsilon' > 0$ существует число $\delta = \delta(x, y, \varepsilon') > 0$, для которого выполнено следующее. Пусть для точек $x' \in B(p, \mu)$ и $y', z' \in B(p, 2\mu)$ выполнены условия

- 1) $d(x, x'), d(y, y') < \delta$,
- 2) $d(x', y') = \varepsilon$,
- 3) $d(x', z') = \mu$,
- 4) $y' \in Q^*(x', z')$.

Тогда $d(z, z') < \varepsilon'$.

◁ Применим метод «от противного». Предположим, что утверждение леммы ложно, т. е. для некоторого $\varepsilon' > 0$ каково бы ни было число $\delta > 0$, существуют точки $x'(\delta) \in B(p, \mu)$ и $y'(\delta), z'(\delta) \in B(p, 2\mu)$, для которых выполнены условия 1)–4), но $d(z, z'(\delta)) \geq \varepsilon'$.

Обозначим $\delta_k = \frac{1}{k}$ и $x'_k = x'(\delta_k)$, $y'_k = y'(\delta_k)$ и $z'_k = z'(\delta_k)$. При $k \rightarrow +\infty$ имеем сходимость $x'_k \rightarrow x$ и $y'_k \rightarrow y$. В силу компактности шара $B(p, 2\mu)$, перейдя, если необходимо, к подпоследовательности, мы можем считать, что последовательность z'_k при $k \rightarrow +\infty$ является сходящейся к некоторой точке $z' \neq z$, для которой $d(z, z') \geq \varepsilon'$.

По аксиоме $\Sigma_2(3)$ хорды $Q^*(x'_k, z'_k)$ сходятся к $Q^*(x, z')$, а по аксиоме $\Sigma_2(2)$ хорда $Q^*(x, y)$ содержится в $Q^*(x, z')$. Противоречие с единственностью продолжения базовых хорд доказывает лемму. $\triangleright$

Следствие 2. В обозначениях леммы 2, если $\varepsilon' \leq \varepsilon$, то

$$d(z', x) < d(z', u)$$

для любой точки $u \in B(p, \mu)$, для которой $Q^*(z, x) \subset Q^*(z, u)$.

$\triangleleft$ Из неположительности кривизны автоматически следует, что ограничение функции $d_{z'}(v) = d(z', v)$ на произвольную хорду, параметризованную натуральным параметром, является выпуклой функцией. В частности, это относится к хорде $Q^*(z, x)$ и ее продолжению $Q^*(z, u)$. При этом $d_{z'}(z) = d(z', z) < \varepsilon'$ и $d_{z'}(x) > \varepsilon$. Поэтому $d_{z'}$ является строго возрастающей функцией натурального параметра на продолжении хорды $Q^*(z, x)$ за точку x , откуда получаем требуемое утверждение. $\triangleright$

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1. Пусть

$$A \subset B(p, \mu) \times B(p, 2\mu)$$

— подмножество, состоящее из таких пар (x, y) , что $d(x, y) = \varepsilon$. На A определим максимум-метрику:

$$d_A((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max \{d(x_1, x_2), d(y_1, y_2)\}.$$

Для каждой пары $(x, y) \in A$ лемма 2 определяет величину $\delta(x, y, \varepsilon)$ и, следовательно, открытый шар $U((x, y), \delta(x, y, \varepsilon))$. Такие шары образуют покрытие множества A . В силу компактности A из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N U((x_i, y_i), \delta(x_i, y_i, \varepsilon)).$$

По каждому $i \leq N$ рассмотрим точку z_i , для которой $d(x_i, z_i) = \mu$ и $Q^*(x_i, y_i) \subset Q^*(x_i, z_i)$. Построим отображение $\varphi : B(p, \mu) \rightarrow \mathbb{R}^N$ по правилу

$$\varphi(x) = (d_{z_1}(x), \dots, d_{z_N}(x)).$$

Оно непрерывно, так как непрерывны дистанционные функции d_{z_i} . Для произвольной пары $x, u \in B(p, \mu)$ рассмотрим такую точку

$y \in B(p, 2\mu)$, что $d(x, y) = \varepsilon$ и $Q^*(x, u) \subset Q^*(y, u)$. Поскольку $(x, y) \in A$, и шары $U((x_i, y_i), \delta(x_i, y_i, \varepsilon))$ образуют открытое покрытие A , найдется номер $k \leq N$, для которого

$$d_A((x, y), (x_k, y_k)) < \delta(x_k, y_k, \varepsilon).$$

В силу следствия 2 $d_{z_k}(x) < d_{z_k}(u)$. Поэтому $\varphi(x) \neq \varphi(u)$, и отображение φ инъективно. Поскольку шар $B(p, \mu)$ компактен, φ является вложением. Отсюда следует утверждение теоремы. $\triangleright$

Литература

1. Busemann H., Phadke B. Spaces with Distinguished Geodesics.—N. Y.: Dekker, 1987.—159 p.
2. Буземан Г. Геометрия геодезических.—М.: Физматлит, 1962.—503 с.
3. Busemann H., Phadke B. Novel results in the geometry of geodesics // Adv. Math.—1993.—Vol. 101.—P. 180–219.
4. Papadopoulos A. Metric Spaces, Convexity and Non-Positive Curvature.—Zurich: EMS Publ. House, 2005.—287 p.
5. Берестовский В. Н. К проблеме конечномерности G -пространства Буземана // Сиб. мат. журн.—1977.—Т. 18, № 1.—С. 219–221.

АНДРЕЕВ ПАВЕЛ ДМИТРИЕВИЧ
Северный (Арктический) федеральный
университет им. М. В. Ломоносова
РОССИЯ, 163002, Архангельск, наб. Северной Двины, 17
E-mail: pdandreev@mail.ru

FINITE DIMENSIONALITY OF BUSEMANN-PHADKE CHORD SPACES WITH NON-POSITIVE CURVATURE

Andreev P. D.

A theorem stating finiteness of topological dimension for chord spaces with non-positive curvature in Busemann-Phadke sense is proven. Consequently, in the mentioned class of spaces, the answer in the affirmative is given to the analogue of well-known Busemann's problem of finite dimensionality of G -spaces.

Key words: chord space, problem of dimension finiteness, non-positive curvature, geodesic space.

FINITE FUNCTIONS IN $C(\mathbb{R})$ AND FINITE ELEMENTS IN VECTOR LATTICES¹

M. R. Weber

An inspection of finite functions, i.e. continuous functions with a compact support on some locally compact topological space leads to the abstract notion of finite elements in a vector lattice. The aim of this work is to give a condensed survey on this concept and to answer some natural questions.

Key words: vector lattice, Banach lattice, finite function, finite element, maximal ideal, positive operator, finite-rank operator, Uryson operator.

1. Finite Functions and Three Types of Finite Elements in Vector Lattices

For a positive continuous function φ given on the locally compact topological space $\mathbb{R}$ and having a compact support $\{t \in \mathbb{R}: \varphi(t) \neq 0\}$ consider its natural multiples $n\varphi$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Then take an arbitrary function $x \in C(\mathbb{R})$ and consider the cuts of x with $n\varphi$, i. e. the family of functions $x \wedge n\varphi$ for all $n \in \mathbb{N}$ (see Fig. 1).

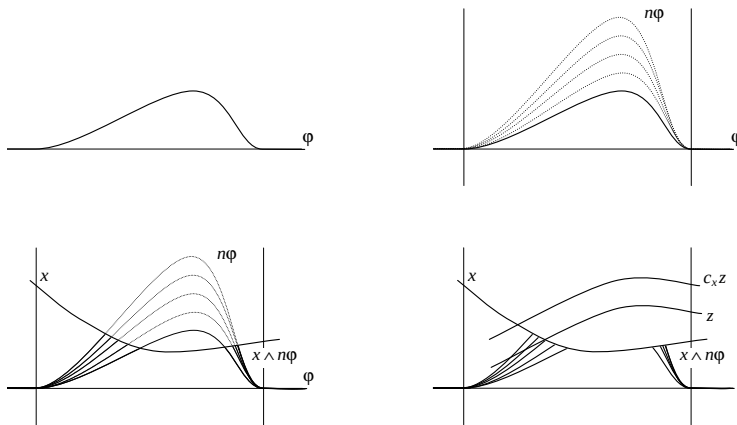


Fig. 1. Finite element φ with majorant z .

¹The author was supported by DFG project CH 1282/2-1 "Positivität in Banachräumen".

Obviously, this family is dominated by a multiple of some function z , in general, depending on x . So we arrive at $x \wedge n\varphi \leq c_x z$, where the constant $c_x > 0$ is also specific for each x .

The monitoring made among the finite functions leads to the following abstract formulation.

A (not necessary positive) function $\varphi \in C(\mathbb{R})$ is *finite*, if $\exists z \in C(\mathbb{R})$ and for each continuous function x on $\mathbb{R}$ there is a number $c_x > 0$ such that

$$(|x| \wedge n|\varphi|)(t) \leq c_x z(t) \quad \text{for } \forall n \in \mathbb{N} \text{ and } \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

where $|y|$ denotes the absolute value of the function y in $C(\mathbb{R})$. Observe that the same formula will be obtained if $\mathbb{R}$ is replaced by an arbitrary locally compact (non-compact) topological Hausdorff space Q . Since all operations used in formula (1) are also available in an arbitrary vector lattice we will select special elements in the latter.

This class of elements in Archimedean vector lattices was introduced by Makarov and Weber in 1972 (see [9]). Recently a systematic treatment of finite elements in vector lattices appeared in [21].

Let E be an Archimedean vector lattice (or equivalently, an Archimedean Riesz space). We define three kinds of finite elements in E .

- An element $\varphi \in E$ is called *finite*, if $\exists z \in E$ such that for $\forall x \in E$ there is $c_x > 0$ with

$$|x| \wedge n|\varphi| \leq c_x z \quad \text{for } \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

The element z is called an *E-majorant* of φ . Denote by $\Phi_1(E)$ the ideal of all finite elements in E .

- An element $\varphi \in E$ is called *totally finite*, if there exists an *E-majorant* $z \in \Phi_1(E)$. Denote by $\Phi_2(E)$ the ideal of all totally finite elements in E .

- An element $\varphi \in E$ is called *self-majorizing*, if $|\varphi|$ is an *E-majorant* of φ , i. e. $\forall x \in E$ there is $c_x > 0$ with

$$|x| \wedge n|\varphi| \leq c_x \varphi \quad \text{for } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Denote by $S(E)$ the set of all self-majorizing elements of E and by $S_+(E) = S(E) \cap E_+$ its positive part. The set $\Phi_3(E) = S_+(E) - S_+(E)$ is also an ideal.

In general, there hold the following relations between the ideals² of

²The sign " $\subseteq$ " has to be understood either as $=$ or as $\subsetneq$.

different finite elements in a vector lattice E :

$$0 \in \Phi_3(E) \subseteq \Phi_2(E) \subseteq \Phi_1(E) \subseteq E.$$

For example, if E is one of the vector lattices $\mathbf{c}$, ℓ^∞ , $L_\infty(\mu)$, then $\Phi_1(E) = \Phi_2(E) = E$.

For $E = C[0, 1]$ one has $\Phi_1(E) = E$, whereas for $E = L_1[0, 1]$ one has $\Phi_1(E) = \{0\}$. In particular, formula (2) shows that $\Phi_1(E) = \Phi_2(E) = \Phi_3(E) = E$ holds if the vector lattice E possesses an order unit.

Although we defined three kinds of finite elements, in order to keep the text at a reasonable length we mostly concentrate on the finite elements only. For more information the reader is referred to [21].

2. Finite Functions and Finite Elements in Vector Lattices of Continuous Functions

We now deal with the question:

Does the set of finite elements in a vector lattice of continuous functions $E(Q)$ on some topological space Q coincide with the set of all finite functions in $E(Q)$?

It is clear that the answer is affirmative if Q is compact and $E(Q) = C(Q)$ or if Q is an arbitrary topological space and $E(Q)$ is the vector lattice of all bounded continuous functions, i. e. there is a function $u \in E(Q)$ such that $|x| \leq \lambda_x u$ for every $x \in E(Q)$. Then the function $\mathbf{1}$, defined as $\mathbf{1}(t) = 1$ for all $t \in Q$ or the function u , are order units in $C(Q)$ and $E(Q)$, respectively. They serve as a majorant for each function of the corresponding vector lattice.

Let Q be a noncompact locally compact space and $E \subset C(Q)$ a vector lattice of continuous functions on Q . Its finite elements coincide with the collection $\Phi_1(E)$. If the set of all finite functions on Q is denoted by $\mathcal{K}(Q)$ then the finite functions on Q belonging to E are $\mathcal{K}(Q) \cap E$.

It is interesting that, in general,

$$(i) \mathcal{K}(Q) \cap E \not\subseteq \Phi_1(E) \quad \text{and} \quad (ii) \Phi_1(E) \not\subseteq \mathcal{K}(Q) \cap E.$$

Consider two examples.

(i) $E = \{x \in C[0, \infty) : x(0) = 0\}$. Define the finite function $\varphi \in E$ as

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, & \text{if } t \in [0, 1], \\ 2 - t, & \text{if } t \in (1, 2], \\ 0, & \text{if } t \in (2, \infty). \end{cases}$$

If φ would be a finite element in E with the majorant z , then due to $\sqrt{z} \in E$ and in view of $\varphi(t) \neq 0$ for $t \in (0, 1)$, the formula (1) yields that $0 < c_0 \leq \sqrt{z(t)}$ for some $c_0 > 0$ depending on $\sqrt{z}$, which prevents that $\sqrt{z(t)} \rightarrow 0$ if $t \rightarrow 0$.

(ii) Let E be the vector lattice consisting of continuous functions on $[1, \infty) \times [0, \infty)$ satisfying the following condition: for every $x \in E$ there are some $\lambda_x > 0$ and a natural $n = n(x)$ such that $|x(s, t)| \leq \lambda_x s^n$ for all $(s, t) \in [1, \infty) \times [0, \infty)$. It can be shown that $x \in \Phi_1(E)$ if and only if $x(s, t) = 0$ on a set $[\alpha, \infty) \times [0, \infty)$ for some $\alpha = \alpha(x) > 1$. It is clear that not all such functions have a compact support.

3. Finite Elements in Sublattices and Banach Lattices

Let E be vector lattice and $H \subset E$ a vector sublattice. We address the following question:

What are the relations between the finite elements $\Phi_1(E)$ and $\Phi_1(H)$?

A glance at formula (2) shows that the question is not trivial. First, the majorant is required to belong to that vector lattice in which the finite element is considered. So it might get lost to be a majorant if the finite element is considered in H instead of E . Second, if φ is a finite element in H then its H -majorant may not serve as an E -majorant, or for φ there is no E -majorant at all.

In general, we are faced with the following situations

- (i) $\Phi_1(H) \subset \Phi_1(E)$,
- (ii) $\Phi_1(E) \cap H \subset \Phi_1(H)$,
- (iii) $\Phi_1(E) \cap H = \Phi_1(H)$,

where none of them may be valid. The two extreme cases are the inclusions $\mathbf{c}_{00} \subset \mathbf{c}_0$ and $C[0, 1] \subset L_1[0, 1]$. The latter was already mentioned at the end of Section 2. In these situations we have

$$\Phi_1(\mathbf{c}_{00}) = \mathbf{c}_{00} = \Phi_1(\mathbf{c}_0) \quad \text{and} \quad \Phi_1(C[0, 1]) = C[0, 1], \quad \Phi_1(L_1[0, 1]) = \{0\},$$

although the norm completion of $\mathbf{c}_{00}$ (with respect to the sup-norm) is $\mathbf{c}_0$ and the one of $C[0, 1]$ (with respect to the integral norm) is $L_1[0, 1]$.

Positive results can be expected if H is a more qualified vector sublattice (see [2, Theorems 2.4, 2.11, 2.7]).

Theorem 1. *If the vector sublattice H majorizes the vector lattice E , i. e. $\forall x \in E, \exists y \in H$ with $x \leq y$, then $\Phi_1(E) \cap H = \Phi_1(H)$.*

The following is immediate

Corollary 2. *If E^δ denotes the Dedekind completion of an Archimedean vector lattice E then $\Phi_1(E) = \Phi_1(E^\delta) \cap E$.*

Theorem 3. *Let H be a projection band in a vector lattice E and P_H the band projection from E onto H . Then $P_H(\Phi_1(E)) = \Phi_1(E) \cap H = \Phi_1(H)$.*

Theorem 4. *Let E be a Banach lattice and H a closed order ideal of E . Then $\Phi_1(H) \subset \Phi_1(E)$. In particular, if H is a band of E then $\Phi_1(H) \subset \Phi_1(E)$.*

A vector sublattice H of a vector lattice E is said to possess a *generalized order unit* if there exists an element $u \in E$ such that for each $x \in H$ there is a $\lambda_x > 0$ with $|x| \leq \lambda_x u$. The finite elements in a Banach lattice are characterized as follows (see [1, Theorem 3.1]).

Theorem 5. *If E is a Banach lattice then $\varphi \in \Phi_1(E)$ if and only if $\{\varphi\}^{dd}$ has a generalized order unit.*

4. Finite Elements in Vector Lattices of Operators

To have the concept of finite (totally finite and self-majorizing) elements at our disposal, one would like to specify them in particular vector lattices, e. g. in vector lattices of functions, sequences and operators, in ℓ -algebras a. o. In this section we provide only some first results for vector lattices of operators, mainly done in [3, 4, 18]. Many important questions in this context are still open, so further research has to be made in order to answer them. In each such individual case the question is:

How to establish the relation (2), i. e. how to describe the interaction of a candidate for a finite element with all other elements in the ambient vector lattice?

At first we deal with vector lattices $\mathcal{V}(E, F)$ of linear operators, where E, F are supposed to be Banach lattices, and in the second part also with vector lattices of nonlinear abstract Uryson operators $\mathcal{U}(E, F)$.

4.1 Linear operators. For two vector lattices E, F the span of all positive linear³ operators is the ordered vector space of all *regular*

³A linear operator $T: E \rightarrow F$ is *positive*, i. e. belongs to $\mathcal{L}_+(E, F)$, if $Tx \geq 0$ for all $x \in E_+$. As usual, the cone of all positive elements of a vector lattice E is denoted by E_+ .

operators, which is denoted by $\mathcal{L}^r(E, F)$. The space $\mathcal{L}^r(E, F)$ is a Dedekind complete vector lattice provided F is Dedekind complete.

If E is a Banach lattice then by E', E'' we denote the first and second norm dual of E , respectively. The dual E' and so, the second dual E'' and any higher dual of a normed vector lattice is a Dedekind complete Banach lattice as well. Let $j_E: E \hookrightarrow E''$ and $J_E: E' \hookrightarrow E'''$ be the corresponding canonical embeddings.

For two Banach lattices E, F denote $\mathcal{A} = \mathcal{L}^r(E, F'')$ and $\mathcal{B} = \mathcal{L}^r(F', E')$ and define the map $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ by $P(T) = T'J_F$ for $T \in \mathcal{A}$, where $T': F''' \rightarrow E'$ is the adjoint operator to $T: E \rightarrow F''$. The following results show the favourable relations between finiteness of operators and their adjoint ones (see [21, Theorem 4.5 (1), Corollaries 4.6.–4.8]).

Theorem 6. *Let E, F be Banach lattices.*

(i) *Then $T \in \mathcal{A}$ is finite if and only if $P(T)$ is finite in $\mathcal{B}$, i. e. $P(\Phi_1(\mathcal{A})) = \Phi_1(\mathcal{B})$.*

(ii) *If $T \in \mathcal{L}^r(E, F)$ then T' is finite in $\mathcal{L}^r(F', E')$ if and only if $j_F T$ is finite in $\mathcal{L}^r(E, F'')$.*

(iii) *If F is a reflexive Banach lattice then for each Banach lattice E , the operator $T \in \mathcal{L}^r(E, F)$ is a finite element if and only if T' is finite in $\mathcal{B}$, i. e.*

$$\Phi_1(\mathcal{B}) = \{T': T \in \Phi_1(\mathcal{L}^r(E, F))\}.$$

Moreover, $U \in \mathcal{L}_+(E, F)$ is an $\mathcal{L}^r(E, F)$ -majorant of T if and only if U' is an $\mathcal{B}$ -majorant of T' .

(iv) *For any Banach lattice E the inclusion mapping j_E is a finite element in $\mathcal{L}^r(E, E'')$.*

The two questions: (i) when is any regular operator a finite element and, (ii) for which Banach lattices the equality $\Phi_1(\mathcal{L}^r(E, F)) = \mathcal{L}^r(E, F)$ holds, are answered for AL -spaces as follows (see [3, Theorem 8])

Theorem 7. *The following statements hold:*

(i) *Let E be an AL -space and F a Dedekind complete Banach lattice with an order unit. Then $\mathcal{L}^r(E, F)$ has a rank one operator as an order unit and $\Phi_i(\mathcal{L}^r(E, F)) = \mathcal{L}^r(E, F)$ for $i = 1, 2, 3$.*

(ii) *Let E and F be Banach lattices and F Dedekind complete. If $\Phi_1(\mathcal{L}^r(E, F)) = \mathcal{L}^r(E, F)$, then E is lattice isomorphic to an AL -space and F is lattice isomorphic to an AM -space.*

(iii) *Let E be a Dedekind complete Banach lattice. Then $\Phi_1(\mathcal{L}^r(E)) = \mathcal{L}^r(E)$ if and only if E is finite-dimensional.*

We consider now general vector lattices $\mathcal{V}(E, F)$ of linear operators, a (of course, by far not complete) list of them is provided in [21, p. 88]. The next theorem generalizes the result of Theorem 7 (i).

Theorem 8. *Let E be an AL-space and F a Banach lattice with order unit $0 < u \in F$. Let $\mathcal{V}(E, F)$ be a vector lattice of operators which contains all rank-one operators of kind $f \otimes u$ for $f \in E'$. Then $\mathcal{V}(E, F)$ possesses a rank-one operator as an order unit and, therefore each $T \in \mathcal{V}(E, F)$ is a finite element of $\mathcal{V}(E, F)$, i. e. $\Phi_i(\mathcal{V}(E, F)) = \mathcal{V}(E, F)$ for $i = 1, 2, 3$.*

Finite rank and, in particular, rank-one operators are of outstanding interest. Their simple structure originates the idea of some link between its finiteness as an operator and the finiteness of its constituents. The main results in this context are collected in the next two theorems (see [21, Theorems 4.14, 4.40, 4.41]).

Theorem 9. *Let E and F be Banach lattices.*

(i) *If F is Dedekind complete and the rank-one operator $T = f \otimes v$ belongs to $\mathcal{L}^r(E, F)$ then T is finite in $\mathcal{L}^r(E, F)$ if and only if $f \in \Phi_1(E')$ and $v \in \Phi_1(F)$.*

(ii) *Let $\mathcal{V}(E, F)$ be a vector lattice of operators which contains all rank-one operators. If for the nonzero elements $f \in E'$ and $v \in F$ the rank-one operator $f \otimes v$ is a finite element in $\mathcal{V}(E, F)$ then $f \in \Phi_1(E')$ and $v \in \Phi_1(F)$.*

Before stating the theorem on finiteness of finite rank operators remember the following classes of linear operators, where E is a Banach lattice and X, Y are Banach spaces.

- An operator $T: E \rightarrow Y$ is called *AM-compact* (shortly written as $T \in \text{AM}(E, F)$), if for each $a \in E$ the subset $T(\{x \in E: |x| \leq a\})$ is relatively compact in Y .

- An operator $T: X \rightarrow Y$ is called *compact* ($T \in \mathcal{K}(E, F)$), if each norm bounded subset of X is mapped onto a relatively norm compact subset of Y .

- An operator $T: X \rightarrow Y$ is called *weakly compact* ($T \in \mathcal{W}(E, F)$), if each bounded subset of X is mapped onto a relatively weakly compact subset of Y .

- An operator $T: X \rightarrow Y$ is called *Dunford-Pettis* ($T \in \text{DP}(E, F)$), whenever $x_n \rightarrow 0$ weakly in X implies $\|Tx_n\| \rightarrow 0$ in Y .

Theorem 10. *Let E, F be Banach lattices and $\mathcal{V}(E, F)$ be a vector lattice of operators. Let $f_1, \dots, f_n$ be finite elements in E' and $v_1, \dots, v_n$*

finite elements in F . Then the operator $T = \sum_{i=1}^n f_i \otimes v_i$ is a finite element in

- (i) $\mathcal{V}(E, F) = \mathcal{K}(E, F) \cap \mathcal{L}^r(E, F)$, if E is an AL -space and F has order continuous norm;
- (ii) $\mathcal{V}(E, F) = \mathcal{W}(E, F)$, if E is an AL -space and F is a KB -space, or if E' is a KB -space and F is a Dedekind complete AM -space with order unit;
- (iii) $\mathcal{V}(E, F) = AM(E, F) \cap \mathcal{L}^r(E, F)$, if F has order continuous norm;
- (iv) $\mathcal{V}(E, F) = DP(E, F) \cap \mathcal{L}^r(E, F)$, if E has order continuous norm and F is an AL -space.

From Theorem 7(ii) it is seen that the condition $\mathcal{V}(E, F) = \Phi_1(\mathcal{V}(E, F))$ has strong consequences for both Banach lattices E and F . Two other situations for Banach lattices E and F are provided in the next theorem.

Theorem 11. *The following statements hold:*

- (i) if $\Phi_1(\mathcal{L}^r(E, F)) = \mathcal{L}^r(E, F)$ and E is an atomic Banach lattice with order continuous norm, then E is lattice isomorphic to an AL -space and F is lattice isomorphic to an AM -space;
- (ii) if $\Phi_1(\mathcal{K}(E, F)) = \mathcal{K}(E, F)$ and F is an AM -space then E is isomorphic to an AL -space.

4.2. Nonlinear operators. The study of nonlinear maps between vector lattices has its background in nonlinear integral operators (see e. g. [5]). The interesting class of nonlinear, order bounded, orthogonally additive operators between two vector lattices E and F , called abstract Uryson operators, was introduced and studied in 1990 by Mazón and Segura de León [14, 15]. Later these operators were defined and studied on lattice-normed spaces by Kusraev and Pliev in [7, 8, 16].

• An operator $T: E \rightarrow F$ is called an *abstract Uryson operator*, if T is orthogonally additive⁴ and T is order bounded.

The collection of all abstract Uryson operators from E to F will be denoted by $\mathcal{U}(E, F)$. If $F = \mathbb{R}$ then an element $f \in \mathcal{U}(E, \mathbb{R})$ is called an *abstract Uryson functional*. The partial order is introduced as follows: $S \leq T$ whenever $T - S$ is positive operator, i. e. $(T - S)(x) \geq 0$ for all $x \in E$ (cf. with the footnote at page 162). In [14], in particular, it is proved that $\mathcal{U}(E, F)$ is a Dedekind complete vector lattice if F is Dedekind complete. Finite elements in some special vector lattices

⁴I. e. $T(x + y) = T(x) + T(y)$ whenever $x, y \in E$ are disjoint elements.

of Uryson operators were first studied in [18]. Let E, F be two vector lattices.

The formulation of the next results requires the notion of σ -laterally continuity. A sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in a vector lattice E is called *laterally converging* to the element $x \in E$, written as $x_n \xrightarrow{\text{lat}} x$, if ⁵ $x_n \sqsubseteq x_m \sqsubseteq x$ for all $n < m$ and $x_n \xrightarrow{(o)} x$.

• An orthogonally additive operator $T: E \rightarrow F$ is called σ -laterally continuous if $x_n \xrightarrow{\text{lat}} x$ implies $Tx_n \xrightarrow{(o)} Tx$. The vector space of all σ -laterally continuous abstract Uryson operators from E to F is denoted by $\mathcal{U}_{\sigma c}(E, F)$ and is a projection band in $\mathcal{U}(E, F)$.

Theorem 12. *Let E be a vector lattice with the projection property and let $\varphi \in \Phi_1(\mathcal{U}_{\sigma c}(E, \mathbb{R}))$. Then there exists a finite dimensional projection band M generated by a (finite) number of mutually disjoint atoms in E , such that $\varphi(x) = 0$ for every $x \in M^\perp = \{x \in E: |x| \wedge |y| \text{ for any } y \in M\}$.*

The description of the finite elements in a more general situation such as $\Phi_1(\mathcal{U}_{\sigma c}(E, F))$ or even $\Phi_1(\mathcal{U}(E, F))$ has not yet been done.

For rank-one operators one has the following result.

Theorem 13. *Let E, F be vector lattices with F Dedekind complete and $F^\sim$ separates the points of F . Let $\varphi \otimes u \in \mathcal{U}(E, F)$ be a rank-one operator for some $\varphi \in \mathcal{U}(E, \mathbb{R})$ and $u \in F$. If $\varphi \otimes u \in \Phi_1(\mathcal{U}(E, F))$ then $\varphi \in \Phi_1(\mathcal{U}(E, \mathbb{R}))$ and $u \in \Phi_1(F)$.*

Whilst for the linear case the inverse statement also holds (see Theorem 9 (i)), the question, whether the statement is true in the nonlinear case, is still open.

5. The Space of All Maximal Ideals and the Topological Characterization of Finite Elements

When the formulas (1) and (2) were developed the original topological background of a finite function, namely the compactness of its support, seemingly got lost.

Is there for a vector lattice E a suitable topological space such that to each finite element of E a reasonable compact subset can be assigned?

The space of all maximal ideals will take over this role. In the course of a topological characterization of finite elements the compactness

⁵For two elements $y, z \in E$ the notion $y \sqsubseteq z$ means that $|y| \wedge |z - y| = 0$.

will appear again as the compactness of an abstract support of those elements.

If the set of all maximal ideals $\mathfrak{M}(E)$ (shortly written as $\mathfrak{M}$) of an Archimedean radical-free⁶ vector lattice E is equipped with the hull-kernel topology τ_{hk} then $(\mathfrak{M}, \tau_{hk})$ becomes a Hausdorff space⁷. For any $x \in E$ the closure in $\mathfrak{M}$ of the τ_{hk} -open⁸ set $G_x = \{M \in \mathfrak{M}(E) : x \notin M\}$ is denoted by $\text{supp}_{\mathfrak{M}}(x)$ and called the *abstract support* of the element x . Further on the important subset of $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M}_{\Phi}(E) = \bigcup_{\varphi \in \Phi_1(E)} G_{\varphi} = \{M \in \mathfrak{M}(E) : \exists \varphi \in \Phi_1(E), \varphi \notin M\}$$

will be used for our topological characterization of totally finite elements as well as in Section 7 for representation of vector lattices with sufficiently many finite elements. Next we provide the topological characterization of all kind of finite elements of a radical-free Archimedean vector lattice E .

Theorem 14 [10, 11, 19]. *In a radical-free vector lattice E the following assertions hold:*

- (i) *An element $\varphi \in E$ is finite if and only if $\text{supp}_{\mathfrak{M}}(x)$ is a compact subset of $\mathfrak{M}(E)$.*
- (ii) *An element $z \in E_+$ is an E -majorant of the finite element φ if and only if $\text{supp}_{\mathfrak{M}}(\varphi) \subseteq G_z$.*
- (iii) *An element φ is totally finite if and only if $\text{supp}_{\mathfrak{M}}(\varphi)$ is compact and $\text{supp}_{\mathfrak{M}}(\varphi) \subseteq \mathfrak{M}_{\Phi}(E)$.*
- (iv) *Each totally finite element has a totally finite E -majorant.*
- (v) *An element $\varphi \in E$ is self-majorizing if and only if $\text{supp}_{\mathfrak{M}}(\varphi)$ is compact and $\text{supp}_{\mathfrak{M}}(\varphi) = G_{\varphi}$. In particular, G_{φ} is an open-closed subset of $\mathfrak{M}(E)$.*

6. The Subspace $\mathfrak{M}_{\Phi}(E)$

Consider the subset $\mathfrak{M}_{\Phi}(E)$ with the induced topology τ_{hk} . The main properties of the space $(\mathfrak{M}_{\Phi}(E), \tau_{hk})$ (shortly denoted by $\mathfrak{M}_{\Phi}$) are listed subsequently.

- (1) The space $(\mathfrak{M}_{\Phi}(E), \tau_{hk})$ is locally compact, and the largest locally compact subspace in $\mathfrak{M}$.

⁶I. e. $\bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M = \{0\}$.

⁷In this topology the closure of a subset $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}$ is defined as the set of all maximal ideals M_0 such that $M_0 \supseteq \bigcap_{M \in \mathcal{A}} M$.

⁸This fact easily can be established by using the definition of τ_{hk} .

(2) Both systems $(G_\varphi)_{\varphi \in \Phi_1(E)}$ and $(G_\psi)_{\varphi \in \Phi_2(E)}$ are bases of the topology τ_{hk} in $\mathfrak{M}_\Phi$.

(3) If $\mathfrak{M}_\Phi$ is closed in $\mathfrak{M}$ then $\Phi_1(E) = \Phi_2(E)$.

(4) $\mathfrak{M}_\Phi$ is everywhere dense in $\mathfrak{M}$ if and only if $x \perp \Phi_1(E)$ implies $x = 0$ (i. e. $\Phi_1(E)$ is complete in E).

There were already examples demonstrating that the space $\mathfrak{M}_\Phi(E)$ comprises many information on the finite elements in the vector lattice E . This essentially refers to the special class of vector lattices introduced next.

• A vector lattice E is called of *type* (Σ) , if E possesses a sequence of elements $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ such that the condition

$$(\Sigma') \begin{cases} e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n \leq \dots, \\ \text{for any } x \in E \text{ there exist } n \in \mathbb{N} \text{ and } C > 0, \\ \text{such that } |x| \leq C e_n \end{cases}$$

is satisfied and E does not contain any order unit.

Any vector lattice of type (Σ) is radical-free. We supplement the list by

(5) For $\mathfrak{M}_\Phi(E) = \overline{\mathfrak{M}_\Phi(E)}$ it is necessary and in case of uniform completeness of E also sufficient that (see [12])

(i) $\Phi_1(E) = \Phi_2(E)$ and (ii) $\Phi_2(E)$ is of type (Σ) .

(6) If E is a uniformly complete vector lattice of type (Σ) then the conditions (i) and (ii) of the previous part together with the completeness of $\Phi_1(E)$ in E imply that the space $\mathfrak{M}(E)$ is locally compact and σ -compact.

7. Representations of Vector Lattices Containing Finite Elements

The last question which will be dealt with is the following:

Is the concept of finite elements based on formula (2) indeed the appropriate generalization of finite functions insofar as representations of abstract vector lattices containing nontrivial finite elements assign a finite function to each finite element?

A *representation of a vector lattice* E is a pair $(E(Q), i)$ consisting of a vector lattice $E(Q)$ of continuous functions on some topological Hausdorff space Q and a vector lattice isomorphism i from E onto $E(Q)$.

A more qualified representation should exhibit the following natural properties:

- for any $t \in Q$ there is a function $x \in E(Q)$ such that $x(t) \neq 0$;
- any finite element in $E(Q)$ is a finite function (condition (Φ));
- the set $\mathcal{K}(Q) \cap E(Q)$ strongly separates the points of Q (condition (α)).

Such a representation is called a $\Phi\alpha$ -representation. If both conditions (Φ) and (α) are satisfied for a vector lattice $E(Q) \subset C(Q)$ then Q is homeomorphic to $\mathfrak{M}_\Phi$ and $\Phi_1(E(Q)) = \mathcal{K}(Q) \cap E(Q)$.

For vector lattices of type (Σ) the existence of a $\Phi\alpha$ -representation is guaranteed by

Theorem 15 [9]. *Let E be a vector lattice of type (Σ) . For the existence of a $\Phi\alpha$ -representation $(E(Q), i)$ of E on a σ -compact locally compact space Q it is sufficient and in case of uniform completeness of E also necessary that a sequence $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of finite elements exists in E such that*

$$\mathfrak{M}(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{\varphi_n}.$$

It is clear that under the conditions of the theorem one has $\mathfrak{M}_\Phi(E) = \mathfrak{M}(E)$. So, even Q and $\mathfrak{M}(E)$ are homeomorphic.

References

1. *Chen Z. L., Weber M. R.* On finite elements in vector lattices and Banach lattices // *Math. Nachr.*—2006.—Vol. 279, № 5–6.—P. 495–501.
2. *Chen Z. L., Weber M. R.* On finite elements in sublattices of Banach lattices // *Math. Nachr.*—2007.—Vol. 280, № 5–6.—P. 485–494.
3. *Chen Z. L., Weber M. R.* On finite elements in lattices regular operators // *Positivity*.—2007.—Vol. 11.—P. 563–574.
4. *Hahn N., Hahn S., Weber M. R.* On some vector lattices of operators and their finite elements // *Positivity*.—2008.—Vol. 12.—P. 485–494.
5. *Krasnosel'skij M. A., Zabrejko P. P., Pustil'nikov E. I., Sobolevskij P. E.* Integral Operators in Spaces of Summable Functions.—Leiden: Noordhoff Int. Publ., 1976.—520 p.
6. *Kusraev A. G.* Dominated Operators.—Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 2000.—445 p.
7. *Kusraev A. G., Pliev M. A.* Orthogonally additive operators on lattice-normed spaces // *Vladikavkaz Math. J.*—1999.—№ 3.—P. 33–43.
8. *Kusraev A. G., Pliev M. A.* Weak integral representation of the dominated orthogonally additive operators // *Vladikavkaz Math. J.*—1999.—№ 4.—P. 22–39.

9. Makarow B. M., Weber M. On the representation of vector lattices I // Math. Nachr.—1974.—Vol. 60.—P. 281–296.—(Russian).
10. Makarow B. M., Weber M. Einige Untersuchungen des Raumes der maximalen Ideale eines Vektorverbandes mit Hilfe finiter Elemente I // Math. Nachr.—1977.—Vol. 79.—P. 115–130.
11. Makarow B. M., Weber M. Einige Untersuchungen des Raumes der maximalen Ideale eines Vektorverbandes mit Hilfe finiter Elemente II // Math. Nachr.—1977.—Vol. 80.—P. 115–125.
12. Makarow B. M., Weber M. Über die Realisierung von Vektorverbänden III // Math. Nachr.—1978.—Vol. 86.—P. 7–14.
13. Malinowski H., Weber M. R. On finite elements in f -algebras and product algebras // Positivity.—2013.—Vol. 17.—P. 819–840.
14. Mazón J. M., S. Segura de León. Order bounded orthogonally additive operators // Rev. Roumaine Math. Pures Appl.—1990.—Vol. 35, № 4.—P. 329–353.
15. Mazón J. M., Segura de León S Uryson operators // Rev. Roumaine Math. Pures Appl.—1990.—Vol. 35, № 5.—P. 431–449.
16. Pliev M. A. Uryson operators on the spaces with mixed norm // Vladikavkaz Math. J.—2007.—№ 3.—P. 47–57.
17. Pliev M. A., Weber M. R. Disjointness and Order Projections in the Vector Lattices of Abstract Uryson Operators.—arXiv:1507.07372.
18. Pliev M. A., Weber M. R. Finite Elements in Some Vector Lattice of Nonlinear Operators.—arXiv:1508.03984.
19. Teichert K., Weber M. R. On self-majorizing elements in Archimedean vector lattices // Positivity.—2014.—Vol. 18.—P. 823–837.
20. Weber M. R. On finite and totally finite elements in vector lattices // Anal. Math.—1995.—Vol. 21.—P. 237–244.
21. Weber M. R. Finite Elements in Vector Lattices.—Berlin–Boston: W. de Gruyter GmbH, 2014.

WEBER, MARTIN RICHARD
 Dresden University of Technology
 01062 Dresden, Germany
 E-mail: martin.weber@tu-dresden.de

ФИНИТНЫЕ ФУНКЦИИ В $C(\mathbb{R})$ И ФИНИТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ

Вебер М. Р.

Цель статьи — дать сжатый обзор известных результатов о финитных элементах в векторных решетках, а также ответить на некоторые естественные вопросы, возникающие в связи с этим классом элементов. Понятие финитного элемента в векторной решетке является естественным обобщением понятия непрерывной функции с компактным носителем, заданной на локально компактном топологическом пространстве. Приводятся основные свойства и топологическая характеристика финитных элементов, а также их описание в различных векторных и банаховых решетках. В частности, дано их описание в некоторых векторных решетках линейных и нелинейных операторов. Весьма важным оказывается топологизированное пространство максимальных идеалов для ответа на вопрос о реализации векторных решеток, содержащих достаточно много финитных элементов.

Ключевые слова: векторная решетка, банахова решетка, финитная функция, финитный элемент, максимальный идеал, положительный оператор, оператор конечного ранга, оператор Урысона.

О ЦИКЛИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТАХ ОПЕРАТОРА СДВИГА ВЛЕВО В ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

О. А. Иванова, С. Н. Мелихов

В статье описаны циклические элементы оператора сдвига влево (оператора Поммье), действующего в весовых пространствах целых функций экспоненциального типа.

Ключевые слова: циклический элемент, оператор сдвига влево, целая функция.

1. Введение

В настоящей работе идет речь о циклических элементах оператора сдвига влево (оператора Поммье)

$$D_0(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t) - f(0)}{t}, & t \neq 0, \\ f'(0), & t = 0, \end{cases}$$

действующего в пространствах целых функций экспоненциального типа, которые можно отождествить с сильными сопряженными к пространствам функций, аналитических на выпуклых компактах в комплексной плоскости. При этом для локально выпуклого пространства (ЛВП) E , линейного непрерывного оператора A в E элемент $x \in E$ называется *циклическим элементом* оператора A в E , если система $\{A^n(x) : n \geq 0\}$ полна в E , т. е. замыкание ее линейной оболочки (в E) совпадает с E . Исследование циклических элементов оператора D_0 началось более полувека назад. М. Г. Хапланов [6] доказал достаточные условия полноты системы $\{D_0^n(f) : n \geq 0\}$ в пространстве функций, аналитических в круге $|t| < R$. В работе [3] Ю. А. Казьмин установил критерии полноты системы $\{D_0^n(f) : n \geq 0\}$ в пространстве функций, аналитических в односвязной области $G \subseteq \mathbb{C}$, содержащей 0.

Циклические элементы и коммутанты оператора D_0 в пространстве $A(G)$ всех функций, аналитических в области G в $\mathbb{C}$, изучены

Н. Е. Линчук [5]. Ю. С. Линчук [13] (также в $A(G)$) исследовал коммутанты и циклические элементы одномерного возмущения оператора D_0 , а именно, оператора $A(f) = D_0(f) + f(0)\varphi$, где φ — фиксированная функция из $A(G)$.

В [11] изучены циклические элементы и инвариантные подпространства оператора D_0 в пространстве Харди H^2 в единичном круге (в [11] D_0 назван оператором сдвига влево). В работе [12] введен обобщенный оператор сдвига влево в банаховом пространстве, исследованы его коммутанты и установлены общие свойства его циклических элементов.

Основным результатом данной работы является теорема 10. В ней доказано, что в рассмотренных пространствах циклическими элементами D_0 являются все функции из этих пространств, отличные от многочлена, и только они.

2. Абстрактные критерии цикличности

Далее K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, содержащий 0; $A(K)$ — пространство ростков всех функций, аналитических на K (т. е. в некоторой открытой окрестности K), снабженное естественной индуктивной топологией (LB)-пространства. Пусть $H_K(z) := \sup_{t \in K} \operatorname{Re}(tz)$, $z \in \mathbb{C}$, — опорная функция K . Введем весовое (ненормируемое) пространство Фреше целых функций

$$E := \left\{ f \in A(\mathbb{C}) \mid \forall n \in \mathbb{N} \|f\|_n := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(H_K(z) + |z|/n)} < +\infty \right\}.$$

Через $\mathcal{F}$ обозначим преобразование Лапласа:

$$\mathcal{F}(\varphi)(z) := \varphi_t(e^{tz}), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \varphi \in A(K)'.$$

При этом для ЛВП F через F' обозначается топологическое сопряженное к F пространство. По [7, теорема 4.5.3] $\mathcal{F}$ является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного к $A(K)$ на E .

Для ЛВП F символ $\mathcal{L}(F)$ обозначает пространство всех линейных непрерывных операторов в F . Для оператора $A \in \mathcal{L}(F)$ пусть $\operatorname{Cycl}_F(A)$ — множество всех циклических элементов A в F .

Далее E — пространство, как выше. Будем писать $\operatorname{Cycl}(A)$ вместо $\operatorname{Cycl}_E(A)$.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 1. Пусть F — ЛВП и оператор $A \in \mathcal{L}(F)$ сюръективен. Тогда

$$A(\text{Cycl}_F(A)) \subseteq \text{Cycl}_F(A).$$

Следствие 2. Имеет место вложение

$$D_0(\text{Cycl}(D_0)) \subseteq \text{Cycl}(D_0).$$

$\triangleleft$ Оператор $D_0 : E \rightarrow E$ сюръективен. Действительно, если $f \in E$, то функция $g(z) = zf(z)$, $z \in \mathbb{C}$, принадлежит E и $D_0(g) = f$. По лемме 1 $D_0(\text{Cycl}(D_0)) \subseteq \text{Cycl}(D_0)$.

Введем оператор сдвига для оператора D_0 [9, 10]:

$$T_z(f)(t) := \begin{cases} \frac{tf(t) - zf(z)}{t - z}, & t \neq z, \\ zf'(z) + f(z), & t = z, \end{cases}$$

$f \in E$. Оператор T_z , $z \in \mathbb{C}$, линейно и непрерывно отображает E в E [2, лемма 1]. $\triangleright$

Далее нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 3. Для любого целого $n \geq 0$

$$D_0^n(f)(z) = \varphi_n(T_z(f)), \quad f \in E, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где

$$\varphi_n(g) := \frac{g^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \geq 0, \quad g \in E.$$

Через $\tau := \tau(E', E)$ обозначим топологию Макки в E' , т. е. топологию равномерной сходимости на семействе всех абсолютно выпуклых $\sigma(E, E')$ -компактных подмножеств E [8, гл. 8, 8.3.3]. Здесь $\sigma(E, E')$ — слабая топология в E , заданная естественной двойственностью между E и E' .

Для $f \in E$ положим

$$\tilde{f}(t, z) := T_z(f)(t), \quad t, z \in \mathbb{C}.$$

Лемма 4. Пусть сеть $\Psi_\mu \in E'$, $\mu \in M$, сходится к $\psi \in E'$ в (E', τ) . Тогда для любой функции $f \in E$ в E

$$\begin{aligned}(\Psi_\mu)_z(\tilde{f}(\cdot, z)) &\xrightarrow{\mu \in M} \psi_z(\tilde{f}(\cdot, z)), \\ (\Psi_\mu)_t(\tilde{f}(t, \cdot)) &\xrightarrow{\mu \in M} \psi_t(\tilde{f}(t, \cdot)).\end{aligned}$$

Лемма 5. Пусть φ_n , $n \geq 0$, — функционалы, как в лемме 3. Для любой целой в $\mathbb{C}^2$ функции h , для любых целых $j, k \geq 0$

$$(\varphi_j)_z((\varphi_k)_t(h(t, z))) = (\varphi_k)_t((\varphi_j)_z(h(t, z))).$$

Лемма 6. Пусть $f \in \text{Cycl}(D_0)$. Тогда для любого ненулевого функционала $\varphi \in E'$ функция $\varphi(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}$, отлична от тождественного нуля.

◁ Пусть $\varphi \in E' \setminus \{0\}$. По [2, теорема 4] ненулевой оператор $B(g)(z) := \varphi(T_z(g))$, $g \in E$, $z \in \mathbb{C}$, линейно и непрерывно отображает E в E и на E удовлетворяет равенству $BD_0 = D_0B$. Предположим, что $\varphi(T_z(f)) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$, т. е. $B(f) = 0$. Тогда для любого $n \geq 0$

$$0 = D_0^n(B(f)) = B(D_0^n(f)).$$

Значит, $D_0^n(f) \in \text{Ker } B$ для любого $n \geq 0$. Поэтому $\text{span}\{D_0^n(f) : n \geq 0\} \subseteq \text{Ker } B$. Так как $\text{Ker } B$ — замкнутое подпространство E , отличное от E , то f не является циклическим элементом D_0 . Получено противоречие. ▷

Для $z \in \mathbb{C}$ введем оператор Поммье

$$D_z(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t) - f(z)}{t - z}, & t \neq z, \\ f'(z), & t = z, \end{cases}$$

линейно и непрерывно отображающий E в E (см. [1, лемма 6]).

Теорема 7. Следующие утверждения равносильны:

- (i) $f \in \text{Cycl}(D_0)$.
- (ii) Система $\{T_z(f) : z \in \mathbb{C}\}$ полна в E .
- (iii) Система $\{D_z(f) : z \in \mathbb{C}\}$ полна в E .

◁ Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) вытекает из леммы 6 и критерия полноты (см., например, [8, теорема 2.3.1]).

(ii)⇒(i): Пусть система в (ii) полна в E . Возьмем $l \in E'$ такое, что $l(D_0^n) = 0$ для любого $n \geq 0$. Система (см. лемму 3) $\{\varphi_j : j \geq 0\}$ полна (E', τ) , так как для $g \in E$ из равенств $g^{(n)}(0) = 0, n \geq 0$, следует, что $g \equiv 0$. Поэтому существует сеть $\{\Phi_\alpha = \sum_{j=0}^{m_\alpha} a_{j\alpha} \varphi_j : \alpha \in \Lambda\}$, сходящаяся к l в (E', τ) .

Пусть, как и прежде,

$$\tilde{f}(t, z) := T_z(f)(t), \quad f \in E, \quad t, z \in \mathbb{C}.$$

Тогда $\tilde{f} \in A(\mathbb{C}^2)$. По лемме 3

$$D_0^n(f)(z) = (\varphi_n)_t(\tilde{f}(t, z)), \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \geq 0.$$

Зафиксируем $n \geq 0$. Учитывая леммы 5 и 4, получим

$$\begin{aligned} 0 &= l(D_0^n(f)) = l_z((\varphi_n)_t(\tilde{f}(t, z))) = \\ &= \left(\lim_{\alpha \in \Lambda} \Phi_\alpha \right)_z((\varphi_n)_t(\tilde{f}(t, z))) = \lim_{\alpha \in \Lambda} \left((\Phi_\alpha)_z(\varphi_n)_t(\tilde{f}(t, z)) \right) = \\ &= \lim_{\alpha \in \Lambda} \sum_{j=0}^{m_\alpha} a_{j\alpha} (\varphi_j)_z((\varphi_n)_t(\tilde{f}(t, z))) = \lim_{\alpha \in \Lambda} \sum_{j=0}^{m_\alpha} a_{j\alpha} (\varphi_n)_t((\varphi_j)_z(\tilde{f}(t, z))) = \\ &= \lim_{\alpha \in \Lambda} (\varphi_n)_t \left(\sum_{j=0}^{m_\alpha} a_{j\alpha} (\varphi_j)_z(\tilde{f}(t, z)) \right) = \lim_{\alpha \in \Lambda} (\varphi_n)_t((\Phi_\alpha)_z(\tilde{f}(t, z))) = \\ &= (\varphi_n)_t \left(\lim_{\alpha \in \Lambda} (\Phi_\alpha)_z(\tilde{f}(t, z)) \right) = (\varphi_n)_t(l_z(\tilde{f}(t, z))) = \\ &= (\varphi_n)_t(l_z(T_z(f)(t))) = (\varphi_n)_t(l_z(T_t(f)(z))) = (\varphi_n)_t(l(T_t(f))). \end{aligned}$$

Таким образом (производные берутся по переменной t), $(l(T_t(f)))^{(n)}(0) = 0$ для любого $n \geq 0$. Значит, $l(T_t(f)) = 0$ для любого $t \in \mathbb{C}$. Так как система $\{T_t(f) : t \in \mathbb{C}\}$ полна в E , то $l = 0$. Следовательно, система $\{D_0^n(f) : n \geq 0\}$ тоже полна в E .

(ii)⇒(iii): Пусть выполнено (ii). Так как при $t \neq z$ имеет место равенство

$$f(t) - \frac{tf(t) - zf(z)}{t - z} = -z \frac{f(t) - f(z)}{t - z},$$

то

$$f - T_z(f) = -z D_z(f), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Возьмем $l \in E'$ такое, что $l(D_z(f)) = 0, z \in \mathbb{C}$. Подействуем l на равенство (2). Получим

$$l(f) = l(T_z(f)), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

Положим

$$B(h)(z) := l(T_z(h)), \quad h \in E, \quad z \in \mathbb{C}.$$

По [2, теорема 4] $BD_0 = D_0B$ в E . Поэтому, в силу (3), для любого $t \in \mathbb{C}$ для функции $f_0 \equiv 1$

$$0 = l(f)D_0(f_0)(t) = D_0(B(f))(t) = B(D_0(f))(t) = l(T_t(D_0(f))).$$

Вследствие (ii) $\Rightarrow$ (i) $f \in \text{Cycl}(D_0)$. По следствию 2 $D_0(f) \in \text{Cycl}(D_0)$. В силу (i) $\Rightarrow$ (ii) $l = 0$. Следовательно, система $\{D_z(f) : z \in \mathbb{C}\}$ полна в E .

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Пусть выполняется (iii). Возьмем $l \in E'$ такое, что $l(T_z(f)) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Действуя l на равенство (2), получим

$$l(f) = -zl(D_z(f)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Значит, $l(f) = 0$. Поэтому целая (по z) функция $l(D_z(f))$ равна тождественно нулю. По (iii) $l = 0$. Таким образом, система $\{T_z(f) : z \in \mathbb{C}\}$ полна в E .

Положим

$$M(f)(z) := zf(z), \quad f \in E, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Оператор M умножения на независимую переменную линейно и непрерывно отображает E в E . Через I обозначим тождественный оператор в E .

Лемма 8. Пусть система $\{T_z(f) : z \in \mathbb{C}\}$ полна в E . Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ система $\{T_z((M - \alpha I)(f)) : z \in \mathbb{C}\}$ также полна в E .

$\triangleleft$ Воспользуемся равенством

$$tf(t) - \frac{t(t - \alpha)f(t) - z(z - \alpha)f(z)}{t - z} = -(z - \alpha) \frac{tf(t) - zf(z)}{t - z}, \quad t \neq z.$$

Отсюда следует, что

$$M(f) - T_z((M - \alpha I)(f)) = -(z - \alpha)T_z(f), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Предположим, что система $\{T_z(f) : z \in \mathbb{C}\}$ полна в E . Возьмем $l \in E'$ такое, что $l(T_z((M - \alpha I)(f))) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Подействовав l на равенство (4), получим

$$\text{const} = l(M(f)) = -(z - \alpha)l(T_z(f)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Значит, $l(M(f)) = 0$. Поскольку $l(T_z(f))$ — целая (по z) функция, то $l(T_z(f)) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Так как система $\{T_z(f) : z \in \mathbb{C}\}$ полна в E , то $l = 0$. Значит, и система $\{T_z((M - \alpha I)(f)) : z \in \mathbb{C}\}$ полна в E .

Следствие 9. Если $f \in \text{Cycl}(D_0)$, то для любого ненулевого многочлена P также $Pf \in \text{Cycl}(D_0)$.

◁ Ясно, что достаточно доказать следующее утверждение. Если $f \in \text{Cycl}(D_0)$, то $(z - \alpha)f(z) \in \text{Cycl}(D_0)$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$. Оно же справедливо в силу теоремы 7 и леммы 8. ▷

3. Аналитическая реализация

Теорема 10. Следующие условия равносильны:

(i) $f \in \text{Cycl}(D_0)$.

(ii) Функция f отлична от многочлена.

◁ (ii) ⇒ (i): Согласно [4, гл. 4, § 2] функция $f \in E$ задает интерполирующую функцию ω_f следующим образом:

$$\omega_f(\mu, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_0^t x(t - \xi) e^{\mu \xi} d\xi \right) dt, \quad x \in A(K),$$

где γ — функция, ассоциированная по Борелю с f , C — (выпуклый) контур, охватывающий K и лежащий в области аналитичности x вместе со своей внутренностью.

По [1, § 3, п. 1] (здесь $\mathcal{F} : A(K)' \rightarrow E$ — преобразование Лапласа)

$$\omega_f(\mu, x) = \mathcal{F}^{-1}(D_\mu(f))(x), \quad x \in A(K), \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

Значит, по теореме 7 и [8, теорема 2.3.1] f — циклический элемент D_0 в E тогда и только тогда, когда выполняется следующая импликация:

$$\omega_f(\mu, x) = 0 \quad \text{для любого} \quad \mu \in \mathbb{C} \Rightarrow x = 0. \quad (5)$$

Согласно [4, теорема 4.3.1], если f имеет бесконечно много нулей, то импликация (5) выполняется.

Рассмотрим случай, когда функция $f \in E$ отлична от многочлена и имеет не более конечного числа нулей.

1) Пусть f не имеет нулей. Тогда существует $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, такое, что $f(z) = e^{\lambda z}$, $z \in \mathbb{C}$. Заметим, что $\gamma_f(t) = \frac{1}{t-\lambda}$. Поэтому для $\mu \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\omega_f(\mu, x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma_f(t) \left(\int_0^t x(t-\xi) e^{\mu \xi} d\xi \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dt}{t-\lambda} \int_0^t x(t-\xi) e^{\mu \xi} d\xi = \int_0^\lambda x(\lambda-\xi) e^{\mu \xi} d\xi = e^{\mu \lambda} \int_0^\lambda x(t) e^{-\mu t} dt.\end{aligned}$$

Пусть $\omega_f(\mu, x) = 0$ для любого $\mu \in \mathbb{C}$. Тогда $\int_0^\lambda x(t) e^{\mu t} dt = 0$ для любого $\mu \in \mathbb{C}$. Отсюда следует, что $x \equiv 0$ на отрезке $[0, \lambda]$, а значит, x — нулевой элемент $A(K)$. Следовательно, выполняется импликация (5), и f — циклический элемент оператора D_0 .

2) Пусть функция f имеет конечное число нулей и отлична от многочлена. Тогда существует многочлен P степени не ниже 1 и $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, такие, что $f(z) = P(z)e^{\lambda z}$. По 1) функция $g(z) = \exp(\lambda z)$ — циклический элемент D_0 в E . По следствию 9 $f = Pg$ — тоже циклический элемент оператора D_0 .

(i) $\Rightarrow$ (ii): Предположим, что $f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ — многочлен. Тогда $D_0^m(f) = 0$ для любого $m > n$. Отсюда следует, что замыкание линейной оболочки $\{D_0^m(f) : m \geq 0\}$ в E не содержит ни одной функции, отличной от многочлена, и ни одного многочлена степени больше, чем n . Значит, $f \notin \text{Cycl}(D_0)$. $\triangleright$

Литература

1. Иванова О. А., Мелихов С. Н. Об интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева // Уфим. мат. журн.—2014.—Т. 6, № 3.—С. 17–27.
2. Иванова О. А., Мелихов С. Н. О коммутантах оператора типа Поммье // Мат. форум. Т. 9. Исслед. по мат. анализу, диф. уравнениям и мат. моделированию.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2015.—С. 140–146.—(Итоги науки. Юг России).
3. Казьмин Ю. А. О последовательных остатках ряда Тейлора // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.—1963.—№ 5.—С. 35–46.
4. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
5. Линчук Н. Е. Представление коммутантов оператора Поммье и их приложения // Мат. заметки.—1988.—Т. 44, № 6.—С. 794–802.
6. Хапланов М. Г. О полноте некоторых систем аналитических функций // Учен. зап. РГПИ: сб. статей.—Ростов н/Д., 1955.—Вып. 3.—С. 53–58.
7. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.—М.: Мир, 1968.—279 с.

8. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
9. Binderman Z. Functional shifts induced by right invertible operators // Math. Nachr.—1992.—Vol. 157.—P. 211–224.
10. Dimovski I. N., Hristov V. Z. Commutants of the Pommiez operator // Int. J. Math. and Math. Sci.—2005.—Vol. 8.—P. 1239–1251.
11. Douglas R. G., Shapiro H. S., and Shields A. I. Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator // Ann. Inst. Fourier (Grenoble).—1970.—Vol. 20, № 1.—P. 37–76.
12. Godefroy G., Shapiro J. H. Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds // J. Funct. Anal.—1991.—Vol. 98.—P. 229–269.
13. Linchuk Yu. S. Cyclical elements of operators which are left-inverses to multiplication by an independent variable // Meth. Funct. Anal. Topol.—2006.—Vol. 12, № 4.—P. 384–388.

ИВАНОВА ОЛЬГА АЛЕКСАНДРОВНА
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: ivolga@sfedu.ru

МЕЛИХОВ СЕРГЕЙ НИКОЛАЕВИЧ
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНИЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: melih@math.rsu.ru

ON CYCLIC ELEMENTS OF THE BACKWARD SHIFT OPERATOR IN SPACES OF ENTIRE FUNCTIONS OF EXPONENTIAL TYPE

Ivanova O. A., Melikhov S. N.

In the article cyclic elements of the backward shift operator (Pommiez operator) in spaces of entire functions of exponential type are described.

Key words: cyclic element, backward shift operator, entire function.

ОБ ОДНОМ ОСНАЩЕНИИ ВЕСОВОГО
ПРОСТРАНСТВА L_2

М. В. Кукушкин

В данной работе рассматривается возможность построения Гильбертова пространства путем пополнения унитарного пространства, порожденного оператором дробного дифференцирования. Способ построения пространства аналогичен [1, с. 44] но в то же время в некотором смысле является более общим, поскольку в билинейной форме присутствует весовая функция. Доказывается теорема вложения построенного Гильбертова пространства в весовое пространство Лебега суммируемых с квадратом функций, следствием которой является соответствующее оснащение весового пространства Лебега суммируемых с квадратом функций в смысле [7, с. 47].

Ключевые слова: энергетическое пространство, дробное интегро-дифференцирование.

В работе [1, с. 44] А. М. Нахушевым описывается способ построения унитарных пространств с помощью операторов дробного дифференцирования и интегрирования. Вопрос построения пространств дробно-дифференцируемых функций изучался И. А. Киприяновым. В данном направлении известна его работа [2, с. 166], в которой рассматриваются Банаховы пространства дробно-дифференцируемых функций, доказываются теоремы вложения в пространство Соболева. Также известна работа Л. М. Энеевой [3], одним из результатов которой является теорема о полноте пространства, порожденного оператором дробного интегро-дифференцирования. В данной работе рассматривается возможность построения Гильбертова пространства путем пополнения унитарного пространства, порожденного оператором дробного дифференцирования. Способ построения пространства аналогичен [1, с. 44], но в то же время в некотором смысле является более общим, поскольку в билинейной форме присутствует весовая функция. Доказывается теорема вложения пространства $N_{\alpha,c}(\Omega)$ в пространство $L_2(\varphi, \Omega)$, следствием которой является оснащение пространства $L_2(\varphi, \Omega)$. Если это не оговорено дополнительно, везде будем полагать $\alpha \in (0, 1)$, $x \in \Omega = (a, b)$. Интегрирование будем понимать в смысле Лебега. Будем использовать

обозначения

$$\langle f, g \rangle_0 \equiv \langle f, g \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx, \quad \|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\langle f, g \rangle_{\psi,0} \equiv \langle f, g \rangle_{L_2(\psi,\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)\psi(x) dx,$$

$$I_{b-}^{\alpha}(L_q) = \{f(x) : f(x) = D_{bx}^{-\alpha}\varphi(t), \varphi(x) \in L_q(\Omega)\}.$$

Допустим, что действительные числа θ, q удовлетворяют условиям

$$\frac{2}{\theta} + \frac{1}{q} \leq 1 + 2\alpha, \quad \frac{2}{1+2\alpha} < \theta < \frac{1}{\alpha}, \quad 1 < q < \frac{1}{\alpha}, \quad (1)$$

и пусть $c(x) \in I_{b-}^{\alpha}(L_q)$, $\varphi(x) > 0$ почти всюду. Рассмотрим линейное множество вида $I_{a+}^{\alpha}(L_{\theta})$, заметим, что данное множество является линейным пространством над полем действительных чисел. Определим на $I_{a+}^{\alpha}(L_{\theta})$ билинейную форму

$$\langle u, v \rangle_{\alpha,c} = \frac{1}{2} \langle u, cD_{ax}^{\alpha}v \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle v, cD_{ax}^{\alpha}u \rangle_0, \quad u, v \in I_{a+}^{\alpha}(L_{\theta}). \quad (2)$$

Для данной билинейной формы выполнение аксиом скалярного произведения очевидно, кроме аксиомы

$$\langle u, u \rangle_{\alpha,c} > 0, \quad u \neq 0. \quad (3)$$

Имеет место следующая лемма позволяющая утверждать, что пара билинейная форма (2) и $I_{a+}^{\alpha}(L_{\theta})$ образует унитарное пространство.

Лемма. Пусть выполнены условия (1), $u(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_{\theta})$. Тогда имеет место (3).

◁ Воспользовавшись рассуждениями в ходе доказательства утверждения 2 [4], изменив порядок интегрирования, а за тем интегрируя по частям, имеем для $\{u_n\} \in I_{a+}^{\alpha}(C_0^{\infty})$, $u_n \neq 0$

$$\begin{aligned} \langle u_n, u_n \rangle_{\alpha,c} &= \langle u_n, cD_{ax}^{\alpha}u_n \rangle_0 \geq \\ &\geq \langle u_n u'_n, D_{bx}^{\alpha-1}c \rangle_0 = \frac{1}{2} \int_a^b u_n^2(x) \varphi(x) dx > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть теперь $u \in I_{a+}^\alpha(L_\theta)$, тогда согласно теореме 3.5 [5, с. 64]

$$I_{a+}^\alpha : L_\theta \rightarrow L_p, \quad p = \frac{\theta}{1 - \alpha\theta}. \quad (5)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} & \langle u_n^2, \varphi \rangle_0 - \langle u^2, \varphi \rangle_0 = \langle (u_n - u)(u_n + u), \varphi \rangle_0 \leq \\ & \leq \|u_n - u\|_{L_p} \|(u_n + u)\varphi\|_{L_\gamma} \leq \|u_n - u\|_{L_p} \|u_n + u\|_{L_{\gamma t}} \|\varphi\|_{L_{\gamma s}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $p, \gamma, t, s > 1$ соответственно взаимно сопряженные. Для доказательства ограниченности правой части (6) преобразуем условие (1):

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\theta} + \frac{1}{q} \leq 1 + 2\alpha, \\ & \frac{1}{\theta} - \alpha \leq 1 + \alpha - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{q}, \quad 0 < q(1 - \alpha\theta) \leq q(\theta(1 + \alpha) - 1) - \theta, \\ & \frac{q(\theta(1 + \alpha) - 1)}{q(\theta(1 + \alpha) - 1) - \theta} \leq \frac{\theta(1 + \alpha) - 1}{1 - \alpha\theta}, \\ & t \leq \frac{\theta}{(1 - \alpha\theta)} \frac{(\theta(1 + \alpha) - 1)}{\theta}, \quad t \geq \frac{q(\theta(1 + \alpha) - 1)}{q(\theta(1 + \alpha) - 1) - \theta} > 1, \\ & \frac{1}{t} \leq 1 - \frac{\theta}{q(\theta(1 + \alpha) - 1)}, \quad 1 - \frac{1}{t} \geq \frac{\theta}{q(\theta(1 + \alpha) - 1)}, \\ & \frac{t}{t - 1} \leq \frac{q(\theta(1 + \alpha) - 1)}{\theta}, \quad \frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{(\theta(1 + \alpha) - 1)}{\theta}, \\ & \begin{cases} t \leq \frac{\theta}{(1 - \alpha\theta)} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \\ \frac{t}{t - 1} \leq q \left(1 - \frac{1}{p}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma t \leq p, \\ \gamma s \leq q. \end{cases} \end{aligned}$$

Из чего следует ограниченность правой части (6). Поскольку согласно теореме 3.5 [5, с. 64]

$$\|u_n - u\|_{L_p} = \|D_{ax}^{-\alpha}(\psi_n - \psi)\|_{L_p} \leq C_1 \|\psi_n - \psi\|_{L_\theta}, \quad (7)$$

так как $C_0^\infty(\Omega)$ всюду плотно в $L_\theta(\Omega)$ по норме L_θ , то

$$\lim \langle u_n^2, \varphi \rangle_0 = \langle u^2, \varphi \rangle_0. \quad (8)$$

Далее, используя неравенство Коши — Шварца, имеем оценку

$$\begin{aligned} \langle u_n - u, u_n - u \rangle_{\alpha, c} &\leq \| (u_n - u)c \|_{L_\mu} \| \psi_n - \psi \|_{L_\theta} \leq \\ &\leq \| (u_n - u) \|_{L_{\mu s}} \| c \|_{L_{\mu t}} \| \psi_n - \psi \|_{L_\theta}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mu, \theta, s, t > 1$ соответственно взаимно сопряженные. Покажем, что правая часть (9) стремится к нулю, для этого преобразуем условие (1):

$$\begin{aligned} \frac{2}{\theta} + \frac{1}{q} &\leq 1 + 2\alpha, \\ \frac{1}{q} - \alpha &\leq (1 + \alpha) - \frac{2}{\theta}, \quad 0 < \frac{\theta(1 - \alpha q)}{q} \leq \theta(1 + \alpha) - 2, \\ t &\leq \frac{\theta - 1}{\theta} \frac{q}{1 - \alpha q}, \quad t \geq \frac{\theta - 1}{\theta(1 + \alpha) - 2} > 1, \\ \begin{cases} t \frac{\theta}{\theta - 1} \leq \frac{q}{1 - \alpha q}, \\ \frac{t}{t - 1} \frac{\theta}{\theta - 1} \leq \frac{\theta}{1 - \alpha \theta}, \end{cases} &\quad \begin{cases} \mu t \leq \frac{q}{1 - \alpha q}, \\ \mu s \leq \frac{\theta}{1 - \alpha \theta} = p. \end{cases} \end{aligned}$$

Учитывая, что $C_0^\infty(\Omega)$ всюду плотно в $L_\theta(\Omega)$ делаем вывод, что правая часть (9) стремится к нулю, откуда из свойств скалярного произведения следует

$$\lim \langle u_n, u_n \rangle_{\alpha, c} = \langle u, u \rangle_{\alpha, c}. \quad (10)$$

Воспользовавшись (8)–(10), осуществив предельный переход в (4), имеем следующее неравенство:

$$0 < \frac{1}{2} \int_a^b u^2(x) \varphi(x) dx \leq \langle u, u \rangle_{\alpha, c} < \infty, \quad u \neq 0. \quad \triangleright \quad (11)$$

Поскольку на линейном пространстве $I_{a+}^\alpha(L_\theta)$ определено скалярное произведение, то данное пространство является унитарным. Согласно общей теории, например [6, с. 14], норму в этом пространстве можно определить стандартным образом:

$$\|u\|_{\alpha, c} = \langle u, u \rangle_{\alpha, c}^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Обозначим данное пространство $\tilde{N}_{\alpha,c}(\Omega)$. Пополняя его относительно введенной нормы, получим Гильбертово пространство $N_{\alpha,c}(\Omega)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пространство $N_{\alpha,c}(\Omega)$ вложено в $L_2(\varphi, \Omega)$.

◁ Для доказательства достаточно показать, что пополнение пространства $\tilde{N}_{\alpha,c}(\Omega)$ лежит $L_2(\varphi, \Omega)$, что непосредственно следует из вышедоказанной леммы, нужно лишь рассмотреть фундаментальную последовательность в $\tilde{N}_{\alpha,c}(\Omega)$, и используя неравенство (11), воспользоваться полнотой пространства $L_2(\varphi, \Omega)$ [5, с. 27]. ▷

Следствие. При предположениях (1) относительно q, θ множество $I_{a+}^\alpha(L_\theta)$ всюду плотно в пространстве $L_2(\varphi, \Omega)$.

В силу доказанной теоремы любой элемент $N_{\alpha,c}(\Omega)$ можно приблизить элементами $I_{a+}^\alpha(L_\theta)$ в смысле нормы $L_2(\varphi, \Omega)$. Рассмотрим введенный в [7, с. 46] оператор I , непрерывно действующий из $L_2(\varphi, \Omega)$ в $N_{\alpha,c}(\Omega)$. Так как $N_{\alpha,c}(\Omega) \subseteq L_2(\varphi, \Omega)$, то [7, с. 50] этот оператор можно рассматривать как действующий в $L_2(\varphi, \Omega)$. Вводя обозначение $\hat{I} : \hat{I} = OI$, где O — оператор вложения из $N_{\alpha,c}(\Omega)$ в $L_2(\varphi, \Omega)$, имеем, согласно [7, с. 51], $R(\hat{I})$ всюду плотно в $L_2(\varphi, \Omega)$. Следовательно $I_{a+}^\alpha(L_\theta)$ всюду плотно в $L_2(\varphi, \Omega)$, поскольку $R(\hat{I}) \subseteq N_{\alpha,c}(\Omega)$. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ. Применяя терминологию [7, с. 46], согласно сказанному выше можно утверждать, что $N_{\alpha,c}(\Omega) \equiv H_+$ является позитивным пространством относительно нулевого пространства $L_2(\varphi, \Omega) \equiv H_0$. Используя рассуждения [7, с. 46, 47] можно построить негативное пространство H_- такое, что

$$H_- \supset H_0 \supset H_+, \quad \|u\|_- \leq \|u\|_{\varphi,0} \leq \|u\|_+ \quad (u \in H_+),$$

и показать, что существует линейный непрерывный оператор $\mathbf{I}$ изометрически отображающий H_- на H_+ .

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. Бжихатлов Х. Г., Карасев И. М., Лесковский И. П., Нахушев А. М. Избранные вопросы дифференциальных и интегральных уравнений.—Нальчик: КБГУ, 1972.—290 с.
3. Энеева Л. М. О пространстве порожденном оператором дробного интегро-дифференцирования // Материалы междунар. Российско-Казахского симпозиума.—2003.—С. 191–192.

4. Кукушкин М. В. Априорная оценка решения уравнения второго порядка с дробной производной // Докл. Адыг. (Черкесской) Междунар. АН.—2014.—Т.16, № 3.—С. 17–21.
5. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
6. Морен К. Методы гильбертова пространства.—М.: Мир, 1965.—570 с.
7. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.—Киев: Наукова-думка, 1965.—798 с.

Кукушкин Максим Владимирович
Институт прикладной математики и автоматизации
РОССИЯ, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, д. 89/а
E-mail: Kukushkinmv@rambler.ru

ON AN EQUIPMENT OF WEIGHTED L_2 SPACE

Kukushkin M. V.

We consider a method of constructing a Hilbert space by completion of a unitary space generated by the fractional differentiation operator. The method is similar to [1, p. 44] but at the same time more general, in a sense, since the bilinear form of the unitary space includes a weight function. It is proved that the constructed Hilbert space is embedding in the weighted Lebesgue space of square integrable functions. It follows that the weighted Lebesgue space of square integrable functions admits an appropriate equipment in the sense of [7, p. 47].

Key words: energy space, fractional integrodifferentiation.

О ВЛОЖЕНИИ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ $L_W^{p(x)}$ В ПРОСТРАНСТВО L^1

М. Г. Магомед-Касумов

В статье исследуются условия на вес $w(x)$, при которых будет справедливо вложение пространства $L_w^{p(x)}$ в пространство L^1 . Найдено необходимое условие вложения. С помощью этого условия выведено несколько признаков, в частных случаях позволяющих легко определить наличие свойства вложенности $L_w^{p(x)} \subset L^1$.

Ключевые слова: весовое пространство Лебега с переменным показателем, вложение в L^1 .

При исследовании некоторых вопросов теории приближений в весовых пространствах Лебега $L_w^{p(x)}(E)$ с переменным показателем $p(x)$ возникает задача поиска условий на вес $w(x)$, обеспечивающих вложение:

$$L_w^{p(x)}(E) \subset L^1(E). \quad (1)$$

В частности, такая задача возникает при изучении аппроксимативных свойств частичных сумм Фурье — Хаара в $L_w^{p(x)}([0, 1])$. Действительно, для построения ряда Фурье — Хаара $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k(x)$, $c_k = \int_0^1 f(t) \chi_k(t) dt$, для функции $f(x) \in L_w^{p(x)}([0, 1])$ требуется найти коэффициенты c_k , которые, как видно из задающей их формулы, будут определены и конечны в том и только том случае, когда $f(x)$ является суммируемой.

Легко показать, что вложение (1) имеет место не для всякого веса $w(x)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять $p(x) = 1$, $w(x) = x$ и рассмотреть функцию $f(x) = \frac{1}{x} \notin L^1([0, 1])$, которая, как легко проверить, принадлежит $L_w^{p(x)}([0, 1])$.

В данной работе исследуются условия на вес $w(x)$, при которых будет справедливо указанное вложение.

Введем некоторые определения. Пусть E — множество с конечной мерой Лебега, $p(x)$ — неотрицательная измеримая и конечная почти всюду на E функция (показатель), $w(x)$ — неотрицательная,

почти всюду положительная суммируемая функция (вес), определенная на множестве E . Весовым пространством Лебега с переменным показателем $L_w^{p(x)}(E)$ называется множество измеримых на E функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $\int_E |f(x)|^{p(x)} w(x) dx < \infty$. Как известно [1–3], если

$$1 \leq \operatorname{ess\,inf}_{x \in E} p(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in E} p(x) < \infty, \quad (2)$$

то топология пространства $L_w^{p(x)}(E)$ нормируема и одну из эквивалентных норм можно определить, полагая для $f \in L_w^{p(x)}(E)$

$$\|f\|_{p(\cdot), w}(E) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} w(x) dx \leq 1 \right\}.$$

Символом $\mathcal{P}(E)$ будем обозначать множество заданных на E показательных функций $p(x)$, удовлетворяющих условию (2). Нам также понадобится обозначение $\hat{\mathcal{P}}(E)$ для подмножества из $\mathcal{P}(E)$, включающего только те $p(x)$, которые удовлетворяют дополнительному ограничению $1 < \operatorname{ess\,inf}_{x \in E} p(x)$.

Множество весовых функций $w(x)$, удовлетворяющих условиям

$$(H1) \quad w(x) \geq c(w) > 0, \quad x \in E_1 = \{x \in E : p(x) = 1\} \text{ (почти всюду),}$$

$$(H2) \quad \|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p'(\cdot)}(E_2) < \infty, \quad E_2 = E \setminus E_1,$$

будем обозначать через $\mathcal{H}_{p(\cdot)}(E)$.

В работе [4] было показано, что условия (H1), (H2) являются достаточными для справедливости соотношения (1). В той же работе было также показано, что условие (H1) является и необходимым для вложения (1). Приведем тут соответствующие результаты из упомянутой работы.

Теорема 1. Если $w(x) \in \mathcal{H}_{p(\cdot)}(E)$, $p(x) \in \mathcal{P}(E)$, то имеет место вложение (1), причем

$$\|f\|_1(E) \leq c(p, w) \|f\|_{p(\cdot), w}(E).$$

Теорема 2. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}(E)$ и имеет место (1). Тогда вес $w(x)$ будет удовлетворять условию (H1).

Однако неисследованным оставался вопрос о необходимости условия (Н2). В данной работе предпринята попытка частично восполнить этот пробел. Основным результатом этой статьи является следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $p(x) \in \hat{\mathcal{P}}(E)$. Для того чтобы имело место вложение (1), необходимо, чтобы $w(x)^{\alpha(x)} \in L^1(E)$ для любой измеримой функции $\alpha(x)$, которая при некотором $\varepsilon > 0$ почти всюду на E , удовлетворяло условию

$$-\frac{1}{p(x)-1} + \varepsilon \leq \alpha(x) \leq 1, \quad x \in E. \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $p(x) \in \hat{\mathcal{P}}(E)$. Тогда достаточное условие (Н2) и необходимое условие (3) вложения (1) можно переписать соответственно в следующем виде:

$$\int_E \left[\frac{1}{w(x)} \right]^{\frac{1}{p(x)-1}} dx < \infty, \quad \int_E \left[\frac{1}{w(x)} \right]^{\frac{1}{p(x)-1} - \varepsilon} dx < \infty \quad (\forall \varepsilon > 0),$$

откуда следует, что условие (Н2) в определенном смысле близко к необходимому.

Для доказательства теоремы 3 нам потребуются некоторые свойства суммируемых функций.

Лемма. Пусть E — множество с конечной мерой Лебега μ , а $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — измеримые на E функции. Тогда

- а) если $0 \leq \alpha(x) \leq \beta(x)$ почти всюду на E , то из $|f(x)|^{\beta(x)} \in L^1(E)$ следует $|f(x)|^{\alpha(x)} \in L^1(E)$;
- б) если $\alpha(x) \leq \beta(x) \leq 0$ почти всюду на E , то из $|f(x)|^{\alpha(x)} \in L^1(E)$ следует $|f(x)|^{\beta(x)} \in L^1(E)$.

◁ Положим $E_1 = \{x : |f(x)| \leq 1\}$, $E_2 = \{x : |f(x)| > 1\}$. Первый пункт леммы следует из соотношений

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)|^{\alpha(x)} dx &= \int_{E_1} |f(x)|^{\alpha(x)} dx + \int_{E_2} |f(x)|^{\alpha(x)} dx \leq \\ &\leq \mu(E_1) + \int_{E_2} |f(x)|^{\beta(x)} dx < \infty. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается и второй пункт:

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)|^{\beta(x)} dx &= \int_{E_1} |f(x)|^{\beta(x)} dx + \int_{E_2} |f(x)|^{\beta(x)} dx \leq \\ &\leq \int_{E_1} |f(x)|^{\alpha(x)} dx + \mu(E_2) < \infty. \quad \triangleright \end{aligned}$$

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Ввиду того, что $w(x) \in L^1(E)$, справедливость утверждения теоремы для $0 \leq \alpha(x) \leq 1$ следует из пункта а) леммы. Пусть теперь $-\frac{1}{p(x)-1} + \varepsilon \leq \alpha(x) \leq 0$. Прежде всего, покажем, что для $\beta_n(x) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{p^k(x)}$ и любого $n = 1, 2, \dots$ будет выполняться соотношение

$$w(x)^{\beta_n(x)} \in L^1(E). \quad (4)$$

Сделаем это по индукции. Для $n = 1$ имеем

$$\int_E |w(x)^{\beta_1(x)}|^{p(x)} w(x) dx = \int_E (w(x)^{-\frac{1}{p(x)-1}})^{p(x)} w(x) dx = \mu(E) < \infty,$$

следовательно, $w(x)^{\beta_1(x)} \in L_w^{p(x)}(E)$ и в силу (1) $w(x)^{\beta_1(x)} \in L^1(E)$. Считая выполненным (4) для n , докажем его для $n + 1$. В самом деле,

$$\begin{aligned} &\int_E |w(x)^{\beta_{n+1}(x)}|^{p(x)} w(x) dx = \\ &= \int_E w(x)^{-1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{p^k(x)}} w(x) dx = \int_E w(x)^{\beta_n(x)} dx < \infty. \end{aligned}$$

Стало быть, $w(x)^{\beta_{n+1}(x)} \in L_w^{p(x)}(E)$, из чего согласно (1) следует $w(x)^{\beta_{n+1}(x)} \in L^1(E)$.

Далее, заметим, что $\beta_n(x) \rightarrow \beta(x) = -\frac{1}{p(x)-1}$, причем, так как $\underline{p} = \operatorname{ess\,inf}_E p(x) > 1$ и почти всюду на E

$$|\beta(x) - \beta_n(x)| = \frac{1}{p(x)-1} - \frac{p^n(x)-1}{p^n(x)(p(x)-1)} \leq \frac{1}{\underline{p}^n(\underline{p}-1)},$$

то для любого $\varepsilon > 0$ всегда найдется такой номер n , что $\beta_n(x) \leq -\frac{1}{p(x)-1} + \varepsilon \leq \alpha(x)$ для почти всех $x \in E$. Для завершения доказательства остается только воспользоваться пунктом b) приведенной выше леммы. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ. Надо отметить, что условие, приведенное в теореме 3, не является достаточным. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функцию $\phi_\gamma(x) = \frac{1}{x|\ln x|^\gamma}$. Ввиду того, что

$$\int \frac{dx}{x(-\ln x)^\gamma} = - \int \frac{d(-\ln x)}{(-\ln x)^\gamma} = \begin{cases} -\ln(-\ln x), & \gamma = 1, \\ \frac{1}{(\gamma-1)(-\ln x)^{\gamma-1}}, & \gamma \neq 1, \end{cases} \quad (5)$$

имеем

$$\phi_\gamma(x) \in L^1([0, A]), \quad \gamma > 1 \quad \text{и} \quad \phi_\gamma(x) \notin L^1([0, A]), \quad \gamma \leq 1,$$

где $A < 1$ — некоторое фиксированное число. Возьмем теперь $p(x) = 2$, $w(x) = x$ и множество $E = [0, A]$, $A < 1$. Тогда функция $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, с одной стороны, будет принадлежать пространству $L_w^{p(x)}(E)$, поскольку

$$\int_0^A \frac{1}{x^2 \ln^2 x} x dx = \int_0^A \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_0^A \phi_2(x) < \infty,$$

с другой стороны, она не является суммируемой, так как $f(x) = \phi_1(x)$, т. е. $f(x) \notin L^1(E)$. Стало быть, вложение (1) не имеет места, при этом условие теоремы 3 выполнено ($w(x)^{\alpha(x)} = x^{-1+\varepsilon} \in L^1(E)$ для любого $\varepsilon > 0$).

Рассмотрим некоторые свойства весовых функций $w(x)$, которые позволяют судить о наличии вложения $L_w^{p(x)}(E) \subset L^1(E)$.

Утверждение 1. Если весовая функция $w(x)$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{ess\,inf}_E w(x) > 0,$$

то $L_w^{p(x)}(E) \subset L^1(E)$.

$\triangleleft$ Очевидно, что условие (H1) выполнено. Пусть $E_2 = \{x : p(x) > 1\}$ и $\underline{w} = \underline{w}(E)$. Тогда, взяв $\alpha = \max\{1, \frac{1}{\underline{w}}\}$ и замечая, что $w(x) \geq \frac{1}{\alpha}$,

получим

$$\int_{E_2} \left| \frac{w(x)^{-\frac{1}{p(x)}}}{\alpha} \right|^{p'(x)} dx \leq \int_{E_2} \left| \frac{\alpha^{\frac{1}{p(x)}}}{\alpha} \right|^{p'(x)} dx \leq \int_{E_2} \left| \frac{\alpha}{\alpha} \right|^{p'(x)} dx = \mu(E_2) < \infty.$$

Следовательно, $\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p'(\cdot)}(E_2) < \infty$, и условие (H2) также выполнено. $\triangleright$

Основной интерес представляет случай, когда $\operatorname{ess\,inf}_E w(x) = 0$. Для постоянного показателя нам удалось получить следующие результаты.

Утверждение 2. Пусть на множестве $E = [0, 1]$ задан вес вида $w(x) = x^\beta$, $\beta > 0$. Тогда

- $L_w^p(E) \subset L^1(E)$ при $p > \beta + 1$;
- $L_w^p(E) \not\subset L^1(E)$ при $1 \leq p \leq \beta + 1$.

$\triangleleft$ Поскольку $w(x)^{-\frac{1}{p-1}} = x^{-\frac{\beta}{p-1}}$, то при $p > \beta + 1$ показатель $-\frac{\beta}{p-1} > -1$, поэтому будет выполнено достаточное условие (H2). Если же $1 < p < \beta + 1$, то нарушается необходимое условие (см. теорему 3), так как для $\alpha = -\frac{1}{\beta} > -\frac{1}{p-1}$ получим $w(x)^\alpha = x^{-1} \notin L^1(E)$. Для $p = 1$ утверждение следует из теоремы 2.

Осталось рассмотреть случай $p = \beta + 1$. Отметим, что в этом случае необходимое условие вложения (3) выполнено, однако нарушается достаточное условие (H2). Рассмотрим функцию ($A < 1$)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x|\ln x|}, & x \in [0, A], \\ 0, & x \in (A, 1]. \end{cases}$$

Из (5) следует, что $f(x) \notin L^1(E)$. В то же время, согласно (5) имеем

$$\int_0^A |f(x)|^p w(x) dx = \int_0^A \frac{x^\beta dx}{x^{\beta+1} |\ln x|^{\beta+1}} = \int_0^A \frac{dx}{x |\ln x|^{\beta+1}} < \infty,$$

что означает $f(x) \in L_w^p(E)$. $\triangleright$

Это утверждение допускает следующее очевидное обобщение.

Утверждение 3. Пусть $w(x)$ — непрерывная весовая функция, положительная всюду на множестве $E = [a, b]$ за исключением одной точки $x_0 \in [a, b]$, в которой она принимает нулевое значение. Если $w(x) \asymp |x - x_0|^\beta$, $x \rightarrow x_0$, то

- $L_w^p(E) \subset L^1(E)$ при $p > \beta + 1$;
- $L_w^p(E) \not\subset L^1(E)$ при $1 \leq p \leq \beta + 1$.

◁ Из условия утверждения следует, что существуют постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{V}(x_0)$ точки x_0 выполняются неравенства

$$c_1|x - x_0|^\beta \leq w(x) \leq c_2|x - x_0|^\beta. \quad (6)$$

В силу того, что вне упомянутой окрестности функция $w(x)$ существенно ограничена от нуля, то согласно утверждению 1 имеет место вложение на множестве $E_1 = E \setminus \overset{\circ}{V}(x_0)$: $L_w^p(E_1) \subset L^1(E_1)$, $p \geq 1$. Следовательно, наличие свойства вложенности $L_w^p(E) \subset L^1(E)$ или его отсутствие на всем множестве E будет определяться исключительно наличием или отсутствием оно на множестве $\overset{\circ}{V}(x_0)$. С другой стороны, из свойств весовых пространств $L_w^{p(x)}$ и из (6) вытекает, что $L_w^p(\overset{\circ}{V}(x_0)) = L_u^p(\overset{\circ}{V}(x_0))$, где $u(x) = |x - x_0|^\beta$. Для завершения доказательства остается только воспользоваться утверждением 2. ▷

Данное утверждение можно легко распространить на случай, когда весовая функция $w(x)$ обращается в 0 на конечном множестве точек. В частности, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. Если заданная на множестве $E = [a, b]$ функция $w(x)$ представима в виде $w(x) = c \prod_{i=1}^k |x - x_i|^{\beta_i}$, $\beta_i > 0$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, то

- $L_w^p(E) \subset L^1(E)$ при $p > \max_i \{\beta_i\} + 1$;
- $L_w^p(E) \not\subset L^1(E)$ при $1 \leq p \leq \max_i \{\beta_i\} + 1$.

Литература

1. Шарапудинов И. И. О топологии пространства $L^{p(t)}([0, 1])$ // Мат. заметки.— 1979.—Т. 26, № 4.—С. 613–632.
2. Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents.—Berlin: Springer, 2011.—P. 509.—(Lect. Notes in Math.; 2017).—DOI 10.1007/978-3-642-18363-8.
3. Cruz-Uribe D., Fiorenza A. Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis.—Basel: Springer, 2013.—P. 312.—DOI 10.1007/978-3-0348-0548-3.
4. Магомед-Касумов М. Г. Базисность системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Владикавказ. мат. журн.—2014.—Т. 16, № 3.—С. 38–46.

МАГОМЕД-КАСУМОВ МАГОМЕДРАСУЛ ГРОЗБЕКОВИЧ
Южный математический институт ВЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
E-mail: rasuldev@gmail.com

ON AN EMBEDDING
OF WEIGHTED VARIABLE LEBESGUE SPACES $L_w^{p(x)}$
INTO L^1 SPACE

Magomed-Kasumov M. G.

The paper deals with conditions on a weight $w(x)$ under which a variable Lebesgue space $L_w^{p(x)}$ embeds into L^1 space. Some necessary condition for such embedding is obtained. Using this result simple criterions for embedding $L_w^{p(x)} \subset L^1$ are deduced in some particular cases.

Key words: weighted variable Lebesgue space, embedding into L^1 .

ИНФИНИТЕЗЕМАЛЬНЫЕ АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

В. А. Попов

Пусть $\mathfrak{h}$ — стационарная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ всех инфинитезимальных аффинных преобразований аналитического пространства аффинной связности и пусть G — односвязная группа Ли, порожденная алгеброй $\mathfrak{g}$ и H ее подгруппа, порожденная подалгеброй $\mathfrak{h}$. Тогда, если алгебра $\mathfrak{g}$ имеет нулевой центр, то подгруппа H замкнута в G .

Ключевые слова: аффинное многообразие, аффинное преобразование, векторное поле, группа Ли, замкнутая подгруппа.

1. Введение

Хорошо известна теория аналитического продолжения голоморфных функций комплексного переменного. В какой мере эта теория может обобщаться на локально заданное аффинное преобразование пространства аффинной связности? Вопрос об аналитическом продолжении аффинного преобразования, заданного на шаре $U \subset \mathbb{R}^n$, тесно связан с аналитическим продолжением аффинной связности, заданной на множестве U до аффинной связности глобального многообразия M , содержащего U , т. е. с аналитическим продолжением пространств аффинной связности как таковых.

Известно, что изометрия $f : U \rightarrow V$ между двумя открытыми подмножествами полного односвязного многообразия M аналитически продолжается до изометрии $f : M \rightarrow M$ [1]. Однако далеко не всегда локально заданную риманову аналитическую метрику можно аналитически продолжить до метрики полного многообразия. Естественным обобщением понятия полноты является понятие непродолжаемости, рассмотренное еще в классической монографии Хелгасона [1]. Изучению непродолжаемых собственно римановых многообразий и возможности продолжения локально заданных на них изометрий при некотором довольно общем ограничении на алгебру Ли векторных полей Киллинга посвящены работы [2, 4].

Для произвольного аналитического преобразования аффинной связности $f : U \rightarrow V$ непреодолимым препятствием его аналитического продолжения до аффинного диффеоморфизма $f : M \rightarrow M$ является невозможность аналитического продолжения локально однородного пространства аффинной связности до однородного пространства. Это связано с тем, что если мы рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ всех инфинитезимальных аффинных преобразований, ее стационарную подалгебру $\mathfrak{h}$, односвязную группу Ли G , порожденную алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и подгруппу $H \subset G$, порожденную подалгеброй $\mathfrak{h}$, то H может оказаться незамкнутой в G . В этом случае фактор пространство G/H не является многообразием.

Рассмотрим аффинные связности, для которых алгебра Ли всех инфинитезимальных преобразований имеет нулевой центр и докажем возможность аналитического продолжения инфинитезимальных аффинных преобразований до аффинных преобразований некоторого пространства аффинной связности. Это является обобщением работ [2, 4], в которых изучались римановы связности.

2. Основные результаты

Инфинитезимальные аффинные преобразования на многообразии аффинной связности Γ_{ij}^k — это векторные поля $\xi^k(x)$, удовлетворяющие следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l} \xi^l - \Gamma_{ij}^l \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + \Gamma_{lj}^k \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} + \Gamma_{il}^k \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} \right) = 0.$$

Теорема 1. Пусть M — аналитическое многообразие аффинной связности, X — инфинитезимальное аффинное преобразование, заданное в области $U \subset M$, и пусть $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, непрерывная кривая в M такая, что $\gamma(0) \in U$. Тогда векторное поле X аналитически продолжаемо вдоль γ .

◁ Предположим, что X аналитически продолжаемо в окрестность любой точки $\gamma(t)$ при $t < t_1 < 1$. Докажем, что X продолжается и в окрестность точки $q = \gamma(t_1)$. Пусть V — нормальная окрестность точки q , являющаяся нормальной окрестностью каждой из своих точек [1]. Рассмотрим $t < t_1$ такое, что $p = \gamma(t) \in V$.

Векторное поле X порождает локальную однопараметрическую группу аффинных преобразований φ_s в окрестности каждой точки $\gamma(t)$, $t < t_1$. Докажем, что для всех достаточно малых значений s

локальные изометрии φ_s аналитически продолжаются и в окрестность точки $q = \gamma(t_1)$. Тогда векторное поле скоростей этой локальной группы изометрий и будет аналитическим продолжением векторного поля X в окрестность точки q .

Рассмотрим связное открытое множество V_0 , принадлежащее V вместе со своим замыканием $\overline{V}_0$ и содержащее точки $p, q, p, q \in V_0 \subset \overline{V}_0 \subset V$. Рассмотрим малую окрестность $V' \subset V_0$ точки q и соединим точку p отрезком геодезической $\alpha(t)$, $0 \leq t \leq 1$, с произвольной точкой $q' \in V'$. Пусть $Y = \frac{d\alpha}{dt}(0) \in T_p M$ и $p_s = \varphi_s(p)$, $Y_s = \varphi_s(Y)$. Из точки p_s проведем геодезическую $\beta(t)$, $0 \leq t \leq 1$, такую, что $\frac{d\beta}{dt}(0) = Y_s$. При достаточно малых значениях s $\beta(t) \in V_0$, $0 \leq t \leq 1$. Положим $\varphi_s(q') = \beta(1)$. Полученное таким образом отображение и есть аналитическое продолжение аффинного отображения φ_s .

Принципиальная невозможность продолжения инфинитезимального аффинного преобразования до аффинного преобразования многообразия M в целом в общем случае заключается в том, что пара, состоящая из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и ее стационарной подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, может не порождать однородного многообразия. Точнее, при условии продолжаемости каждой локальной однопараметрической группы, порожденной векторным полем $X \in \mathfrak{g}$, возникает группа аффинных преобразований G многообразия M и орбита $K \subset M$ этой группы. А это возможно не всегда.

Результат теоремы 1 позволяет отождествить алгебру Ли $\mathfrak{g}$ всех инфинитезимальных аффинных преобразований, заданных в некоторой окрестности точки $p \in M$, с алгеброй Ли всех инфинитезимальных аффинных преобразований на аналитическом многообразии аффинной связности M . Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — стационарная подалгебра, $X \in \mathfrak{h}$ тогда и только тогда, когда $X(p) = 0$. Пусть G — односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и $H \subset G$ — подгруппа, порожденная подалгеброй $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Экспоненциальное отображение задает аффинное действие группы G в некоторой окрестности U точки p , определенное для всех элементов $\mathfrak{g} \in W$ из некоторой окрестности 0 в G . Продолжение этих аффинных преобразований на все многообразие M , порождает орбиту точки p , диффеоморфную фактор группе G/H . Однако фактор группа G/H является дифференцируемым многообразием тогда и только тогда, когда подгруппа H замкнута в G . Для многообразия аффинной связности удастся найти довольно общее условие на метрику, при выполнении которого подгруппа H замкнута в G . Это неожиданное условие состоит в том, что алгебра $\mathfrak{g}$ имеет нулевой центр. $\triangleright$

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли всех инфинитезимальных аффинных преобразований на аналитическом многообразии аффинной связности M , $p \in M$ — произвольная фиксированная точка и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ стационарная подалгебра, состоящая из векторных полей $X \in \mathfrak{g}$ таких, что $X(p) = 0$, G — односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, $H \subset G$ — подгруппа, порожденная подалгеброй $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Тогда если $\mathfrak{g}$ имеет нулевой центр, то H замкнута в G .

◁ Предположим, что подгруппа H не замкнута в G , и пусть группа $\overline{H}$ является замыканием H в G , а $\overline{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $\overline{H} \subset G$. Как доказано в классической работе А. И. Мальцева [4] подалгебра $\mathfrak{h}$ является нормальным делителем алгебры Ли $\overline{\mathfrak{h}}$. Поэтому присоединенное представление Ad группы G в алгебре $\mathfrak{g}$, $Adg(X) = g^{-1}Xg$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, $g \in G$, определяет линейное отображение в линейном пространстве $V = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, если $g \in \overline{H}$.

Рассмотрим нормальную окрестность $U \subset M$ точки p и замкнутый шар радиуса r (в нормальных координатах) $B_r \subset U$. Ввиду компактности B_r существует такая окрестность единицы $W \subset G$, что все элементы $g \in W$ определяют изометрии $g : B_r \rightarrow U$ (g принадлежит локальной однопараметрической группе преобразований, порожденной каким-нибудь векторным полем $X \in \mathfrak{g}$ на M). В касательном пространстве T_pM , отождествленном с линейным пространством $V = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, выберем базис и будем рассматривать преобразования Adh , $h \in H \cap W$ и Adg , $g \in \overline{H}$, как матрицы.

Рассмотрим векторное поле $Z \in \overline{\mathfrak{h}}$, $Z \notin \mathfrak{h}$, и локальную однопараметрическую подгруппу $H_t \in \overline{H}$, порожденную векторным полем Z . Каждый элемент $h_t \in H_t \cap W$ является пределом последовательности элементов $H_n \in H$, причем, начиная с некоторого номера $h_n \in W$. При $t \leq 1$ нормы матриц линейных преобразований Adh_t и Adh_n линейного пространства V ограничены некоторой константой C . Поэтому отображения Adh_t и AdH_n отображают шар B_δ в шар B_r , $B_\delta \subset B_r \subset V$, $\delta \leq \frac{r}{C^2 n}$. Ограниченная последовательность матриц Adh_n задает последовательность аффинных отображений, определенных на окрестности $B_\delta \subset M$ точки $p \in M$. Тогда отображение Adh_t также задает (в нормальных координатах) аффинное отображение, определенное на B_δ .

Умножение справа на элемент h_t задает линейное отображение на касательном пространстве $T_pM = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, которое, в свою очередь, задает при всех $t \leq 1$ аффинное отображение, определенное на некоторой окрестности точки $p \in M$, так как умножение справа на h_t являет-

ся суперпозицией аффинных отображений $Adh_t : X \rightarrow h_t^{-1}Xh_t$ и $h_t : X \rightarrow h_tX$. Таким образом, имеется однопараметрическая группа аффинных преобразований $X \rightarrow Xh_t$, коммутирующая с действием каждого достаточно малого элемента группы G на U . Следовательно, векторное поле Киллинга, соответствующее указанной однопараметрической группе «умножений справа», коммутирует со всей алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, что противоречит условию теоремы.

Кроме незамкнутости вышеупомянутой подгруппы H , порожденной стационарной подалгеброй, существует множество других препятствий для продолжения локально заданной изометрии риманова аналитического многообразия. Так локально заданная изометрия полного многообразия M аналитически продолжается в окрестность любой точки этого многообразия (и то, возможно неоднозначно). При удалении из M замкнутого подмножества свойство продолжаемости локальных аффинных преобразований утрачивается.

Построим аналитическое продолжение локально заданной аффинной связности Γ до пространства аффинной связности M такого, что все инфинитезимальные аффинные преобразования на M аналитически продолжаются до аффинных преобразований всего пространства M . Рассмотрим малый шар U с аффинной связностью Γ . Пусть k минимальная по всем $x \in U$ размерность стационарной в точке x подалгебры $\mathfrak{h}(x)$ алгебры всех инфинитезимальных преобразований $\mathfrak{g}$. Тогда множество $U' \subset U$ таких точек $x \in U$, что $\dim \mathfrak{h}(x) = k$, является открытым подмножеством U . Рассмотрим аналитическое подмногообразие $V' \subset U'$ такое, что $\dim V' = \dim M - \dim G + k$, $\mathfrak{h}(x) = \mathfrak{h}(y) = \mathfrak{h} \forall x, y \in V', \forall g \in G$, $g(x) = g(y) \Leftrightarrow x = y$. Профакторизуем $G \times V'$ по отношению $g_1(x) = g_2(x) \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in H$. В результате получим многообразие M . Для малой окрестности единицы $U \subset G$ подмногообразие $U \times V'$ естественным образом отождествляется с некоторым открытым множеством первоначально заданного многообразия, аффинная связность которого естественным образом переносится на многообразие M . $\triangleright$

3. Аналитическое продолжение римановой метрики

Продолжение аналитических многообразий естественным образом реализуется в случае, когда аффинная связность порождена римановой метрикой. Рассмотрим класс римановых аналитических многообразий локально изометричных друг другу, т. е. имеющих

изометричные открытые подмножества. Такой класс многообразий определяется только локальными свойствами метрики. Возникает вопрос, для каких метрик можно найти многообразие M , обладающее свойством аналитической продолжаемости локально заданных изометрий $\varphi : U \rightarrow V$ до изометрий $\varphi : M \rightarrow M$, и какими свойствами должно обладать это многообразие. Прежде всего такое многообразие должно быть непродолжаемо.

Предложение 1. *Псевдориманово аналитическое многообразие M называется непродолжаемым, если оно не может быть аналитически вложено в качестве открытого подмножества в псевдориманово аналитическое многообразие N , отличное от M .*

Как показывает пример нетривиальной покрывающей евклидовой плоскости с выколотой точкой свойство непродолжаемости является далеко недостаточным для продолжаемости локально заданных изометрий до изометрий всего многообразия. Определить многообразие, обладающее свойством продолжаемости всех локально заданных изометрий до изометрий всего многообразия, удастся для метрик, алгебра Ли векторных полей Киллинга которых имеет нулевой центр.

Определение 2. Ориентированное риманово аналитическое многообразие M называется *квазиполным*. Если оно непродолжаемо и не допускает нетривиальных сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга изометрий $\varphi : U \rightarrow V$ между своими открытыми подмножествами.

Теорема 3. *Любой риманов шар с аналитической метрикой такой, что алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на этом шаре имеет нулевой центр, содержится в квазиполном многообразии.*

Теорема 4. *Любая изометрия $\varphi : U \rightarrow V$ между открытыми подмножествами квазиполных многообразий M и N аналитически продолжается до изометрии $\varphi : M \rightarrow N$.*

Идея доказательства теоремы 4 состоит в том, что непродолжаемость изометрии φ противоречит непродолжаемости многообразия N .

Из теоремы 4 следует, что квазиполное многообразие, единственно в классе локально изометричных друг другу многообразий. Термин квазиполное многообразие связан с тем, что полное многообразие, алгебра Ли векторных полей Киллинга которого не имеет центра, является и квазиполным. Доказательство теорем 3 и 4 и другие свойства квазиполных многообразий приведены в [3].

Литература

1. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.—М.: Мир, 1964.—540 с.
2. Popov V. A. On analytic extensions of Riemannian manifolds // Contemporary Problems of Math., Mech. and Comput. Sci.—Kharkov: Apostrof, 2011.—P. 323–326.
3. Попов В. А. Продолжаемость локальных групп изометрий // Мат. сб.—1988.—Т. 135(177), № 1.—С. 45–64.
4. Попов В. А. Аналитическое продолжение локально заданных изометрий псевдориманова многообразия // Мат. форум. Т. 9. Исследования по мат. анализу, дифференц. уравнениям и мат. моделированию.—Владикавказ, 2015.—193–199.—(Итоги науки. Юг России).
5. Мальцев А. И. К теории групп Ли в целом // Мат. сб.—1945.—Т. 16, № 38.—С. 163–190.

Попов Владимир Александрович
Финансовый университет при Правительстве РФ
РОССИЯ, 125993, Москва, Ленинградский пр., 49
E-mail: vlapopov@gmail.com

INFINITESIMAL AFFINE TRANSFORMATIONS
AND THEIR ANALYTIC EXTENSIONS

Popov V. A.

Let $\mathfrak{g}$ be algebra Lie of all infinitesimal affine transformations on analytic manifold with affine connection, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ stationary subalgebra, G simply connected group corresponding to algebra $\mathfrak{g}$ and $H \subset G$ is subgroup corresponding to subalgebra $\mathfrak{h}$. If algebra $\mathfrak{g}$ has zero center then subgroup H is closed in G .

Key words: affine connection, affine transformation, analitic extension, vector field, group Lie, closed subgroup.

СУЩЕСТВЕННЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ СПЕКТРЫ ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ЧЕТЫРЕХЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ В МОДЕЛИ ХАББАРДА

С. М. Ташпулатов

Исследованы спектральные свойства четырехэлектронной системы в рамках модели Хаббарда. Доказано, что существенный спектр рассматриваемой системы в квинтетном состоянии состоит из единственного отрезка, а четырехэлектронное связанное состояние отсутствует. Показано, что в синглетных состояниях существенный спектр системы представляет собой объединение не более чем трех отрезков. Также доказано, что в синглетных состояниях существуют четырехэлектронные связанные состояния.

Ключевые слова: модель Хаббарда, четырехэлектронная система, квинтетное состояние, синглетное состояние, триплетное состояние, существенный спектр, дискретный спектр, четырехэлектронное связанное состояние, четырехэлектронное антисвязанное состояние, дискретный оператор Шредингера.

1. Введение

В начале 70-х годов прошлого века почти одновременно и независимо появились три работы [1–3], в которых была предложена простая модель металла, ставшая фундаментальной моделью теории сильно коррелированных электронных систем. В этой модели рассматривается единственная невырожденная зона электронов с локальным кулоновским взаимодействием.

Гамильтониан модели содержит всего два параметра: матричный элемент t перескока электрона с узла на соседний узел решетки и параметр U кулоновского отталкивания двух электронов на одном узле. В представлении вторичного квантования гамильтониан записывается в виде

$$H = t \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow}. \quad (1)$$

Здесь $a_{m,\gamma}^+$ ($a_{m,\gamma}$) — ферми-оператор рождения (уничтожения) электрона на узле m со спином γ , τ означает суммирование по ближайшим соседям в решетке.

Предложенная в [1–3] модель получила название модели Хаббарда в честь Джона Хаббарда, внесшего фундаментальный вклад в изучение статистической механики этой системы, хотя локальная форма кулоновского взаимодействия впервые введена Андерсоном для примесной модели в металле [4].

Следует также напомнить, что модель Хаббарда является частным случаем полярной модели Шубина — Вонсовского [5], появившейся за тридцать лет до работ [1–3]. В последней наряду с кулоновским взаимодействием на одном узле, учитывается взаимодействие электронов на соседних узлах.

Модель Хаббарда является приближением, используемое в физике твердого тела для описания перехода между проводящим и диэлектрическим состояниями. Она представляет собой простейшую модель, описывающую взаимодействие частиц в решетке. Ее гамильтониан содержит только два слагаемых: кинетический член, соответствующий туннелированию (перескокам) частиц между узлами решетки, и слагаемое, соответствующее внутриузловому взаимодействию. Частицы могут быть фермионами, как в исходной работе Хаббарда, а также бозонами.

Простота и достаточность гамильтониана (1) сделала модель Хаббарда весьма популярной и эффективной для описания сильно коррелированных электронных систем.

Модель Хаббарда хорошо описывает поведение частиц в периодическом потенциале при достаточно низких температурах, когда все частицы находятся в нижней блоховской зоне, а дальними взаимодействиями можно пренебречь. Если учитывается взаимодействие между частицами на разных узлах, то такую модель часто называют расширенной моделью Хаббарда. Впервые эта модель была предложена для описания электронов в твердых телах. С тех пор она представляет особый интерес при изучении высокотемпературной сверхпроводимости. Позднее расширенная модель Хаббарда стала использоваться и при описании поведения ультрахолодных атомов в оптических решетках.

При рассмотрении электронов в твердых телах, модель Хаббарда можно считать усложнением модели сильно связанных электронов, которая учитывает только член гамильтониана, связанный с перескоками электронов. В случае сильных взаимодействий эти две модели могут давать значительно отличающиеся друг от друга результаты. При этом модель Хаббарда точно предсказывает существование

так называемых изоляторов Мотта, в которых проводимость отсутствует из-за сильного отталкивания между частицами.

Модель Хаббарда основана на приближении сильно-связанных электронов. В приближении сильной связи электроны изначально занимают стандартные орбитали в атомах (узлах решетки), а затем перескакивают на другие атомы в процессе проведения тока. Математически это представляется так называемым интегралом перескока. Этот процесс можно рассматривать как физическое явление, благодаря которому появляются электронные зоны в кристаллических материалах. Однако в более общих зонных теориях взаимодействие между электронами не рассматривается. Кроме интеграла перескока, объясняющего проводимость материала, модель Хаббарда содержит так называемое внутриузловое отталкивание, соответствующее кулоновскому отталкиванию между электронами. Это приводит к конкуренции между интегралом перескока, зависящим от взаимного расположения узлов решетки, и внутриузловым отталкиванием, которое от расположения атомов не зависит. Благодаря этому факту модель Хаббарда объясняет переход проводник–диэлектрик в оксидах некоторых переходных металлов. При нагревании такого материала расстояния между ближайшими соседними узлами в нем увеличиваются, интеграл перескока уменьшается, и внутриузловое отталкивание становится доминирующим фактором.

В настоящее время модель Хаббарда является одной из наиболее интенсивно изучающихся многоэлектронных моделей металла [6–10]. Однако до сих пор имеется очень мало точных результатов для спектра и волновых функций кристалла, описываемого моделью Хаббарда, и получение соответствующих утверждений представляет большой интерес.

В работе [6] изучался спектр и волновые функции системы двух электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда. Известно, что двухэлектронные системы могут находиться в двух состояниях: триплетном и синглетном [6–10]. В работе [6] доказано, что спектр гамильтониана H^t системы в триплетном состоянии чисто непрерывен и совпадает с отрезком $[m, M]$, а у оператора H^s системы в синглетном состоянии, кроме непрерывного спектра $[m, M]$, при некоторых значениях квазиимпульса существует единственное антисвязанное состояние.

Для антисвязанного состояния реализуется такое коррелированное движение электронов, при котором велик вклад двоичных состо-

яний. При этом в силу замкнутости системы энергия должна оставаться постоянной и большой. Это вынуждает электроны не расходиться на большие расстояния. Далее, существенным является то обстоятельство, что связанные состояния (их иногда называют состояниями типа рассеяния) ниже непрерывного спектра не формируются. Это вполне понятно, так как взаимодействие имеет характер отталкивания. Заметим, что при $U < 0$ реализуется обратная ситуация: ниже непрерывного спектра имеется связанное состояние (антисвязанные состояния отсутствуют), поскольку в этом случае электроны притягиваются друг к другу.

Для первой полосы спектр не зависит от параметра U кулоновского взаимодействия двух электронов на одном узле и соответствует энергии двух невзаимодействующих электронов, в точности совпадая с триплетной полосой.

Вторая полоса в гораздо большей степени определяется кулоновским взаимодействием: от U зависят как амплитуды, так и энергия двух электронов, причем сама полоса исчезает при $U \rightarrow 0$, а при $U \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает. Вторая полоса в основном соответствует одночастичному состоянию, а именно, движению двойки, т. е. двухэлектронным связанным состояниям.

В работе [11] изучался спектр и связанные состояния (СС) или антисвязное состояние (АСС) трехэлектронных систем в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда.

В настоящей работе рассматривается оператор энергии четырехэлектронных систем в модели Хаббарда и описывается структура существенного и дискретного спектров системы для квинтетных и синглетных состояний.

2. Гамильтониан системы и спектр оператора в квинтетном состоянии

Гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид

$$H = A \sum_{m,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + \\ + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow}. \quad (2)$$

Здесь A — энергия электрона в узле решетки; B — интеграл переноса между соседними узлами (для удобства считаем, что $B > 0$);

$\tau = \pm e_j, j = 1, 2, \dots, \nu$, где e_j — единичные орты, т. е. суммирование ведется по ближайшим соседям; U — параметр кулоновского взаимодействия двух электронов на одном узле; γ — спиновый индекс, $\gamma = \uparrow$ или $\gamma = \downarrow$, через $\uparrow$ и $\downarrow$ обозначены, соответственно, значения спина $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$; $a_{m,\gamma}^+$ и $a_{m,\gamma}$ соответственно операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^\nu$.

Энергия системы зависит от ее полного спина S . В случае насыщенного ферромагнитного состояния ($S = \frac{N_e}{2}$, где N_e — число электронов в системе) решение задачи является точным и тривиальным для любого допустимого числа электронов N_e . В этом случае, система представляет собой идеальный ферми-газ электронов с одним направлением проекции спинов.

Наряду с гамильтонианом, N_e -электронная система характеризуется полным спином S , $S = S_{\max}, S_{\max} - 1, \dots, S_{\min}$, где $S_{\max} = \frac{N_e}{2}, S_{\min} = 0$ или $\frac{1}{2}$.

Гамильтониан (2) коммутирует со всеми компонентами оператора полного спина системы $S = (S^+, S^-, S^z)$, поэтому структура собственных функций и собственные значения системы зависят от S .

Гамильтониан H действует в антисимметрическом пространстве Фока $\mathcal{H}_{as}$.

Пусть φ_0 — вакуумный вектор в пространстве $\mathcal{H}_{as}$. Квинтетное состояние соответствует свободному движению четырех электронов на решетке, и ему отвечают следующие базисные функции: $k_{p,q,r,t}^2 = a_{p\uparrow}^+ a_{q\uparrow}^+ a_{r\uparrow}^+ a_{t\uparrow}^+ \varphi_0$.

Подпространство $\mathcal{H}_4^k$, соответствующее квинтетному состоянию, есть множество всех векторов вида $\psi = \sum_{p,q,r,t \in Z^\nu} f(p, q, r, t) k_{p,q,r,t}^2$, $f \in l_2^{as}$, где l_2^{as} — пространство антисимметричных функций из пространства $l_2((Z^\nu)^4)$.

Теорема 1. Пространство $\mathcal{H}_4^k$ инвариантно относительно оператора H , и сужение $H_4^k = H|_{\mathcal{H}_4^k}$ оператора H на подпространство $\mathcal{H}_4^k$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор $\bar{H}_4^k$. В квазиимпульсном представлении оператор $\bar{H}_4^k$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{as}((T^\nu)^4)$ по формуле $\bar{H}_4^k \tilde{f}(\lambda; \mu; \gamma; \theta) = h(\lambda; \mu; \gamma; \theta) \tilde{f}(\lambda; \mu; \gamma; \theta)$, где $\tilde{f} \in L_2^{as}((T^\nu)^4)$, L_2^{as} — подпространство антисимметричных функ-

ций в $L_2((T^\nu)^4)$ и

$$h(\lambda; \mu; \gamma; \theta) = 4A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} (\cos \lambda_i + \cos \mu_i + \cos \gamma_i + \cos \theta_i). \quad (3)$$

Очевидно, что спектр оператора $\tilde{H}_4^k$ чисто непрерывен и совпадает с множеством значений функции $h(\lambda; \mu; \gamma; \theta)$, т. е. с множеством $G = [m_\nu, M_\nu] = [4A - 8B\nu, 4A + 8B\nu]$, где $m_\nu = \min_{\lambda, \mu, \gamma, \theta \in T^\nu} h(\lambda; \mu; \gamma; \theta)$, $M_\nu = \max_{\lambda, \mu, \gamma, \theta \in T^\nu} h(\lambda; \mu; \gamma; \theta)$.

Следовательно, спектр квинтетного состояния не зависит от кулоновского взаимодействия U и представляет собой энергии четырех невзаимодействующих электронов, движущихся в кристалле. Такой результат является вполне естественным, поскольку квинтетное состояние не может содержать состояний с двумя электронами в узле.

Таким образом, в квинтетном состоянии спектр четырехэлектронных систем вычисляется точно и чисто непрерывен.

Эта задача является частным случаем задачи нахождения спектра систем N невзаимодействующих электронов в кристаллической решетке.

По правилу Хунда в N -электронных системах минимальную энергию имеет состояние, в котором все спины направлены вверх, т. е. состояния $\uparrow\uparrow \dots \uparrow$. В силу запрета Паули такое состояние не может содержать состояний с двумя электронами в одном узле. В этом случае спектр системы не зависит от кулоновского взаимодействия U и представляет собой зонную энергию N невзаимодействующих электронов, которые движутся в кристалле. При этом спектр системы чисто непрерывен.

3. Спектр оператора в синглетных состояниях

Теперь рассмотрим синглетные состояния. В системе имеется два синглетных состояния, и они имеют различное происхождение.

Синглетному состоянию соответствуют следующие базисные функции: ${}^1s_{p,q,r,t}^0 = a_{p\uparrow}^+ a_{q\uparrow}^+ a_{r\downarrow}^+ a_{t\downarrow}^+ \varphi_0$ и ${}^2s_{p,q,r,t}^0 = a_{p\uparrow}^+ a_{q\downarrow}^+ a_{r\uparrow}^+ a_{t\downarrow}^+ \varphi_0$.

3.1. Первое синглетное состояние. Подпространство ${}^1\mathcal{H}_4^s$, соответствующее первому синглетному состоянию, — это множество всех векторов вида $\psi = \sum_{p,q,r,t \in Z^\nu} f(p, q, r, t) {}^1s_{p,q,r,t}^0$, $f \in l_2^{as}$. Пусть φ_0 — вакуумный вектор в пространстве $\mathcal{H}_{as}$.

Теорема 2. Пространство ${}^1\mathcal{H}_4^s$ инвариантно относительно оператора H , и сужение ${}^1H_4^s = H|_{{}^1\mathcal{H}_4^s}$ оператора H на подпространство ${}^1\mathcal{H}_4^s$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор $\widetilde{{}^1H_4^s}$, действующий в пространстве l_2^{as} . В квазимпульсном представлении оператор ${}^1H_4^s$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{as}((T^\nu)^4)$ по формуле

$$\begin{aligned} (\widetilde{{}^1H_4^s}f)(\lambda; \mu; \gamma; \theta) &= h(\lambda; \mu; \gamma; \theta)\widetilde{f}(\lambda; \mu; \gamma; \theta) + \\ &+ U \int_{T^\nu} \widetilde{f}(s; \mu; \lambda + \gamma - s; \theta) ds + U \int_{T^\nu} [\widetilde{f}(\lambda; k; \mu + \gamma - k; \theta) dk + \\ &+ \widetilde{f}(s; \mu; \gamma; \lambda + \theta - s) ds + \widetilde{f}(\lambda; k; \gamma; \mu + \theta - k) dk], \end{aligned}$$

где $\widetilde{f} \in L_2^{as}((T^\nu)^4)$, L_2^{as} — подпространство антисимметричных функций в $L_2((T^\nu)^4)$ и $h(\lambda; \mu; \gamma; \theta)$ имеет вид (3).

Используя понятие тензорного произведения линейных операторов в гильбертовых пространствах, оператор $\widetilde{{}^1H_4^s}$ можно представить в виде $\widetilde{{}^1H_4^s} = \widetilde{{}^1H_2^s} \otimes I \otimes I + I \otimes K \otimes I + I \otimes I \otimes \widetilde{{}^2H_2^s}$, где

$$\begin{aligned} (\widetilde{{}^1H_2^s}f)(\lambda, \gamma) &= \left\{ -2A - 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \lambda_i + \cos \gamma_i] \right\} f(\lambda, \gamma) - \\ &- U \int_{T^\nu} f(s, \lambda + \gamma - s) ds, \\ (\widetilde{{}^2H_2^s}f)(\mu, \theta) &= \left\{ -2A - 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \mu_i + \cos \theta_i] \right\} f(\mu, \theta) - \\ &- U \int_{T^\nu} f(k, \mu + \theta - k) dk, \\ (Kf)(\lambda, \mu) &= 2U \int_{T^\nu} f(s, \lambda + \mu - s) ds. \end{aligned}$$

Исследуя спектры операторов $\widetilde{{}^1H_2^s}$, K и $\widetilde{{}^2H_2^s}$ и используя понятие спектра тензорного произведения линейных операторов в гильбертовых пространствах, получаем описание структуры существенного спектра и дискретный спектр оператора $\widetilde{{}^1H_4^s}$.

Положим $\Lambda_1 = \lambda + \gamma$, $\Lambda_2 = \mu + \theta$, $a_1 = -2A - 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2}$, $a_2 = -2A + 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2}$, $z_1 = -2A - \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}$, $b_1 = -2A - 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2}$, $b_2 = -2A + 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2}$, $z_2 = -2A - \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_2}{2}}$.

Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то $\sigma_{\text{cont}}(\widetilde{{}^1H_2^s}) = [a_1, a_2]$ и $\sigma_{\text{disc}}(\widetilde{{}^1H_2^s}) = \{z_1\}$, и он лежит ниже области непрерывного спектра оператора $\widetilde{{}^1H_2^s}$, а $\sigma_{\text{cont}}(\widetilde{{}^2H_2^s}) = [b_1, b_2]$ и $\sigma_{\text{disc}}(\widetilde{{}^2H_2^s}) = \{z_2\}$, и он лежит ниже области непрерывного спектра оператора $\widetilde{{}^2H_2^s}$, и $\sigma(K) = \sigma_{\text{disc}}(K) = \{2U\}$.

Теорема 3. Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора первого синглета $\widetilde{{}^1H_4^s}$ состоит из объединения трех отрезков: $\sigma_{\text{ess}}(\widetilde{{}^1H_4^s}) = [2U + a_1 + b_1, 2U + a_2 + b_2] \cup [2U + z_2 + a_1, 2U + z_2 + a_2] \cup [2U + z_1 + b_1, 2U + z_1 + b_2]$, а дискретный спектр первого синглета состоит из единственной точки: $\sigma_{\text{disc}}(\widetilde{{}^1H_4^s}) = \{2U + z_1 + z_2\}$ (существует единственная АСС), лежащий ниже области существенного спектра системы.

В двумерном случае также имеет место аналогичная картина.

Теперь рассмотрим трехмерный случай. Для простоты, рассмотрим случай, когда $\Lambda_1 = (\Lambda_1^1, \Lambda_1^2, \Lambda_1^3) = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$ и $\Lambda_2 = (\Lambda_2^1, \Lambda_2^2, \Lambda_2^3) = (\Lambda_2^0, \Lambda_2^0, \Lambda_2^0)$.

Рассмотрим интеграл Ватсона

$$W = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{3 dx dy dz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} = 1,516.$$

Поскольку мера ν нормированная, то

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{dx dy dz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} = \\ &= \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{dx dy dz}{3 + \cos x + \cos y + \cos z} = \frac{1}{3} W. \end{aligned}$$

Положим $c_1 = -2A - 12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, $c_2 = -2A + 12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, $d_1 = -2A - 12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, $d_2 = -2A + 12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$.

Если $\nu = 3$, $\Lambda_1 = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$, $\Lambda_2 = (\Lambda_2^0, \Lambda_2^0, \Lambda_2^0)$ и $U > 0$, $U > \frac{12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, то $\sigma_{\text{cont}}(\widetilde{H_2^s}) = [c_1, c_2]$, и $\sigma_{\text{disc}}(\widetilde{H_2^s}) = \{\tilde{z}_1\}$, и он лежит ниже области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H_2^s}$, а $\sigma_{\text{cont}}(\widetilde{H_2^s}) = [d_1, d_2]$, и при условии, что $U > \frac{12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, $\sigma_{\text{disc}}(\widetilde{H_2^s}) = \{\tilde{z}_2\}$, и он лежит ниже области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H_2^s}$, и $\sigma(K) = \sigma_{\text{disc}}(K) = \{2U\}$.

Теорема 4. а) Пусть $\nu = 3$, $\Lambda_1 = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$, $\Lambda_2 = (\Lambda_2^0, \Lambda_2^0, \Lambda_2^0)$ и $U > \frac{12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > 0$, $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} \geq \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$. Тогда существенный спектр оператора первого синглета $\widetilde{H_4^s}$ состоит из объединения трех отрезков: $\sigma_{\text{ess}}(\widetilde{H_4^s}) = [2U + c_1 + d_1, 2U + c_2 + d_2] \cup [2U + \tilde{z}_2 + c_1, 2U + \tilde{z}_2 + c_2] \cup [2U + \tilde{z}_1 + d_1, 2U + \tilde{z}_1 + d_2]$, а дискретный спектр первого синглета состоит из единственной точки: $\sigma_{\text{disc}}(\widetilde{H_4^s}) = \{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + 2U\}$, где $\tilde{z}_1$ является собственным значением для оператора $\widetilde{H_2^s}$, а $\tilde{z}_2$ есть собственное значение для оператора $\widetilde{H_2^s}$ (существует единственная АСС), лежащий ниже области существенного спектра системы.

б) Пусть $\nu = 3$, $\Lambda_1 = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$, $\Lambda_2 = (\Lambda_2^0, \Lambda_2^0, \Lambda_2^0)$ и $\frac{12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} < U \leq \frac{12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > 0$, $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > 0$. Тогда существенный спектр оператора первого синглета $\widetilde{H_4^s}$ состоит из объединения двух отрезков: $\sigma_{\text{ess}}(\widetilde{H_4^s}) = [2U + c_1 + d_1, 2U + c_2 + d_2] \cup [2U + \tilde{z}_1 + d_1, 2U + \tilde{z}_1 + d_2]$, а дискретный спектр первого синглета пуст.

в) Пусть $\nu = 3$, $\Lambda_1 = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$, $\Lambda_2 = (\Lambda_2^0, \Lambda_2^0, \Lambda_2^0)$ и $\frac{12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} < U \leq \frac{12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > 0$, $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > 0$. Тогда существенный спектр оператора первого синглета $\widetilde{H_4^s}$ состоит из объединения двух отрезков: $\sigma_{\text{ess}}(\widetilde{H_4^s}) = [2U + c_1 + d_1, 2U + c_2 + d_2] \cup [2U + \tilde{z}_2 + c_1, 2U + \tilde{z}_2 + c_2]$, а дискретный спектр первого синглета пуст.

г) Пусть $\nu = 3$, $\Lambda_1 = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$, $\Lambda_2 = (\Lambda_2^0, \Lambda_2^0, \Lambda_2^0)$ и $U < \frac{12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} \leq \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > 0$, $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > 0$. Тогда существенный спектр оператора первого синглета $\widetilde{H_4^s}$ состоит из единственного отрезка: $\sigma_{\text{ess}}(\widetilde{H_4^s}) = [2U + c_1 + d_1, 2U + c_2 + d_2]$, а дискретный спектр первого синглета пуст.

3.2. Второе синглетное состояние. Подпространство ${}^2\mathcal{H}_4^s$, соответствующее второму синглетному состоянию, есть множество всех векторов вида $\Phi = \sum_{p,q,r,t \in Z^\nu} f(p,q,r,t) {}^2s_{p,q,r,t}^0$, $f \in l_2^{as}$.

Пространство ${}^2\mathcal{H}_4^s$ инвариантно относительно оператора H , и сужение ${}^2H_4^s = H|_{{}^2\mathcal{H}_4^s}$ оператора H на подпространство ${}^2\mathcal{H}_4^s$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор ${}^2\widetilde{H}_4^s$, действующий в пространстве l_2^{as} . В квазиимпульсном представлении оператор ${}^2H_4^s$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{as}((T^\nu)^4)$ по формуле

$$\begin{aligned} ({}^2\widetilde{H}_4^s \widetilde{f})(\lambda; \mu; \gamma; \theta) &= h(\lambda; \mu; \gamma; \theta) \widetilde{f}(\lambda; \mu; \gamma; \theta) + \\ &+ U \int_{T^\nu} \widetilde{f}(s; \lambda + \mu - s; \gamma; \theta) ds + U \int_{T^\nu} [\widetilde{f}(\lambda; \mu; k; \gamma + \theta - k) dk + \\ &+ \widetilde{f}(s; \mu; \gamma; \lambda + \theta - s) ds + \widetilde{f}(\lambda; k; \mu + \gamma - k; \theta) dk], \end{aligned}$$

где $\widetilde{f} \in L_2^{as}((T^\nu)^4)$, L_2^{as} — подпространство антисимметричных функций в $L_2((T^\nu)^4)$ и $h(\lambda; \mu; \gamma; \theta)$ имеет вид (3).

Оператор ${}^2H_4^s$ представим в виде

$${}^2\widetilde{H}_4^s = {}^3\widetilde{H}_2^s \otimes I \otimes I + I \otimes I \otimes {}^4\widetilde{H}_2^s + I \otimes K \otimes I,$$

где

$$\begin{aligned} ({}^3\widetilde{H}_2^s f)(\lambda, \mu) &= \left\{ 2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \lambda_i + \cos \mu_i] \right\} f(\lambda, \mu) + \\ &+ U \int_{T^\nu} f(s, \lambda + \mu - s) ds, \\ ({}^4\widetilde{H}_2^s f)(\gamma, \theta) &= \left\{ 2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \gamma_i + \cos \theta_i] \right\} f(\gamma, \theta) + \\ &+ U \int_{T^\nu} f(k, \gamma + \theta - k) dk, \\ (Kf)(\mu, \gamma) &= 2U \int_{T^\nu} f(k, \mu + \gamma - k) dk. \end{aligned}$$

Исследуя спектры операторов ${}^3\widetilde{H}_2^s$, K и ${}^4\widetilde{H}_2^s$ и используя понятие спектра тензорного произведения линейных операторов в гильбер-

товых пространствах, получаем описание структуры существенного спектра и дискретный спектр оператора $\widetilde{H}_4^s$.

Положим $\Lambda_3 = \lambda + \mu$, $\Lambda_4 = \gamma + \theta$, $e_1 = 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_3}{2}$, $e_2 = 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_3}{2}$, $z' = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_3}{2}}$, $f_1 = 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_4}{2}$, $f_2 = 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_4}{2}$, $z'' = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_4}{2}}$.

Если $\nu = 1$ и $U < 0$, то $\sigma_{\text{cont}}(\widetilde{H}_2^s) = [e_1, e_2]$ и $\sigma_{\text{disc}}(\widetilde{H}_2^s) = \{z'\}$, и он лежит ниже области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_2^s$, а $\sigma_{\text{cont}}(\widetilde{H}_2^s) = [f_1, f_2]$ и $\sigma_{\text{disc}}(\widetilde{H}_2^s) = \{z''\}$, и он лежит ниже области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_2^s$, и $\sigma(K) = \sigma_{\text{disc}}(K) = \{2U\}$.

Теорема 5. Если $\nu = 1$ и $U < 0$, то существенный спектр оператора второго синглета $\widetilde{H}_4^s$ состоит из объединения трех отрезков: $\sigma_{\text{ess}}(\widetilde{H}_4^s) = [2U + e_1 + f_1, 2U + e_2 + f_2] \cup [2U + z'' + e_1, 2U + z'' + e_2] \cup [2U + z' + f_1, 2U + 4A + z' + f_2]$, а дискретный спектр второго синглета состоит из единственной точки: $\sigma_{\text{disc}}(\widetilde{H}_4^s) = \{2U + z' + z''\}$ (существует единственная СС), лежащий ниже области существенного спектра системы.

В двумерном случае также имеет место аналогичная картина.

Положим $p_1 = -2A - 12B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, $p_2 = -2A + 12B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, $q_1 = -2A - 12B \cos \frac{\Lambda_4^0}{2}$, $q_2 = -2A + 12B \cos \frac{\Lambda_4^0}{2}$.

Если $\nu = 3$, $\Lambda_3 = (\Lambda_3^0, \Lambda_3^0, \Lambda_3^0)$, $\Lambda_4 = (\Lambda_4^0, \Lambda_4^0, \Lambda_4^0)$ и $U > 0$, $U > \frac{12B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, то $\sigma_{\text{cont}}(\widetilde{H}_2^s) = [p_1, p_2]$ и $\sigma_{\text{disc}}(\widetilde{H}_2^s) = \{\tilde{z}_1\}$, и он лежит ниже области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_2^s$, а $\sigma_{\text{cont}}(\widetilde{H}_2^s) = [q_1, q_2]$, и при условии, что $U > \frac{12B \cos \frac{\Lambda_4^0}{2}}{W}$, $\sigma_{\text{disc}}(\widetilde{H}_2^s) = \{\tilde{z}_2\}$, и он лежит ниже области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_2^s$, и $\sigma(K) = \sigma_{\text{disc}}(K) = \{2U\}$.

Теорема 6. а) Пусть $\nu = 3$, $\Lambda_3 = (\Lambda_3^0, \Lambda_3^0, \Lambda_3^0)$, $\Lambda_4 = (\Lambda_4^0, \Lambda_4^0, \Lambda_4^0)$ и $U < -\frac{12B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 0$, $\cos \frac{\Lambda_4^0}{2} \geq \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$. Тогда существенный спектр оператора второго синглета $\widetilde{H}_4^s$ состоит из объединения трех отрезков: $\sigma_{\text{ess}}(\widetilde{H}_4^s) = [2U + p_1 + q_1, 2U + p_2 + q_2] \cup [2U + \tilde{z}_2 + p_1, 2U + \tilde{z}_2 + p_2] \cup [2U + \tilde{z}_1 + q_1, 2U + \tilde{z}_1 + q_2]$, а дискретный спектр второго синглета состоит из единственной точки: $\sigma_{\text{disc}}(\widetilde{H}_4^s) = \{2U + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2\}$, где $\tilde{z}_1$ является собственным значением для оператора $\widetilde{H}_2^s$, а $\tilde{z}_2$

есть собственное значение для оператора $\widetilde{H}_2^s$ (существует единственная CC), лежащий ниже области существенного спектра системы.

б) Пусть $\nu = 3$, $\Lambda_3 = (\Lambda_3^0, \Lambda_3^0, \Lambda_3^0)$, $\Lambda_4 = (\Lambda_4^0, \Lambda_4^0, \Lambda_4^0)$ и $-\frac{12B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} < U \leq -\frac{12B \cos \frac{\Lambda_4^0}{2}}{W}$, $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 0$, $\cos \frac{\Lambda_4^0}{2} > 0$, $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} \geq \cos \frac{\Lambda_4^0}{2}$. Тогда существенный спектр оператора второго синглета $\widetilde{H}_4^s$ состоит из объединения двух отрезков: $\sigma_{\text{ess}}(\widetilde{H}_4^s) = [2U + p_1 + q_1, 2U + p_2 + q_2] \cup [2U + \tilde{z}_2 + p_1, 2U + \tilde{z}_2 + p_2]$, а дискретный спектр второго синглета пуст.

с) Пусть $\nu = 3$, $\Lambda_3 = (\Lambda_3^0, \Lambda_3^0, \Lambda_3^0)$, $\Lambda_4 = (\Lambda_4^0, \Lambda_4^0, \Lambda_4^0)$ и $-\frac{12B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} < U \leq \frac{12B \cos \frac{\Lambda_4^0}{2}}{W}$, $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 0$, $\cos \frac{\Lambda_4^0}{2} > 0$, $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} \leq \cos \frac{\Lambda_4^0}{2}$. Тогда существенный спектр оператора второго синглета $\widetilde{H}_4^s$ состоит из объединения двух отрезков: $\sigma_{\text{ess}}(\widetilde{H}_4^s) = [2U + p_1 + q_1, 2U + p_2 + q_2] \cup [2U + \tilde{z}_1 + q_1, 2U + \tilde{z}_1 + q_2]$, а дискретный спектр второго синглета пуст.

д) Пусть $\nu = 3$, $\Lambda_3 = (\Lambda_3^0, \Lambda_3^0, \Lambda_3^0)$, $\Lambda_4 = (\Lambda_4^0, \Lambda_4^0, \Lambda_4^0)$ и $U \geq -\frac{12B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} \leq \cos \frac{\Lambda_4^0}{2}$, $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 0$, $\cos \frac{\Lambda_4^0}{2} > 0$. Тогда существенный спектр оператора второго синглета $\widetilde{H}_4^s$ состоит из единственного отрезка: $\sigma_{\text{ess}}(\widetilde{H}_4^s) = [2U + p_1 + q_1, 2U + p_2 + q_2]$, а дискретный спектр второго синглета пуст.

Полученные результаты показывают, что спектры этих синглетных состояний существенно отличаются друг друга.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы рассмотрели случай, когда $\cos \frac{\Lambda}{2} > 0$. Остальные случаи исследуются аналогично.

Следовательно, в синглетных состояниях четырехэлектронная система имеет не более одного антисвязанного состояния или не более одного связанного состояния, соответственно при значениях $U > 0$ и $U < 0$. А существенный спектр системы состоит из объединения не более трех отрезков.

Литература

1. Hubbard J. Electron correlations in narrow energy bands // Proc. Roy. Soc. A.—1963.—Vol. 276, № 1365.—P. 237–257.
2. Gutzwiller M. C. Effect of Correlation on the Ferromagnetism of Transition Metals // Phys. Rev. Lett.—1963.—Vol. 10.—P. 159–162.
3. Kanamori J. Electron correlation and ferromagnetism of transition metals // Prog. Theor. Phys.—1963.—Vol. 30.—P. 275–289.

4. Anderson P. W. Localized magnetic states in metals // Phys. Rev.—1961.—Vol. 124.—P. 41.
5. Shubin S. P., Wonsowsky S. V. On the electron theory of metals // Proc. Roy. Soc. A.—1934.—Vol. A145.—P. 159–180.
6. Карпенко Б. В., Дякин В. В., Будрина Г. Л. Два электрона в модели Хаббарда // Физика металлов и металловедение.—1986.—Т. 61, № 4.—С. 702–706.
7. Mattis D. The few-body problems on a lattice // Rev. Mod. Phys.—1986.—Vol. 58.—P. 361–379.
8. Lieb E. Two theorems on the Hubbard model // Phys. Rev. Lett.—1989.—Vol. 62.—P. 1201–1204.
9. Tsvelick A. M., Wiegman P. B. Exact results in the theory of magnetic alloys // Adv. Phys.—1983.—Vol. 32.—P. 453–713.
10. Изюмов Ю. Ф., Скрябин Ю. Н. Статистическая механика магнитоупорядоченных систем.—М.: Наука, 1987.—264 с.
11. Tashpulatov S. M. Spectral Properties of three-electron systems in the Hubbard model // Theor. Math. Phys.—2014.—Vol. 179, № 3.—P. 712–728.

ТАШПУЛАТОВ САЪДУЛЛА МАМАРАЖАБОВИЧ
 Институт ядерной физики АН РУз
 УЗБЕКИСТАН, 100214, Ташкент, пос. М. Улугбек, ул. У. Гулямова, 11
 E-mail: toshpul@inp.uz, sadullatashpulatov@yandex.ru

ESSENTIAL AND DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF FOUR-ELECTRON SYSTEM IN THE HUBBARD MODEL

Tashpulatov S. M.

The spectral properties of the four-electron systems in the Hubbard model are investigated. We shows that the essential spectrum of the system in the quintet state consists of the single interval and the system do not have four-electron bound states. In the singlet states the essential spectrum of the system consists of the union of at most three intervals and there exist four-electron bound states.

Key words: Hubbard model, four-electron system, quintet state, singlet state, triplet state, essential spectra, discrete spectrum, four-electron bound state, four-electron antibound state, discrete Shrödinger operator.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАНЫМ РАЗНОСТЯМ

С. А. Унучек

В работе рассматривается задача оптимального восстановления разделенной разности k -го порядка последовательности по ее неточно заданным разделенным разностям. Построено семейство оптимальных методов восстановления.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, оператор разделенной разности, неточная информация, экстремальная задача.

1. Введение

Впервые задача оптимального восстановления линейного функционала по значениям других линейных функционалов была поставлена С. А. Смоляком [1]. В основе этой постановки лежали идеи А. Н. Колмогорова, связанные с n -поперечником [2] и квадратурными формулами [3]. Задача об оптимальном восстановлении по неточно заданной информации была поставлена в работе [4]. В данной работе изучается задача восстановления оператора k -й разделенной разности последовательности в среднеквадратичной норме по неточно заданным разделенным разностям $k_1, k_2, \dots, k_n$ порядков. Аналогичная задача оптимального восстановления решения уравнения теплопроводности по приближенным измерениям в другие моменты времени рассматривалась в работе [5]. Задача оптимального восстановления k -й производной функции по приближенно известным производным других порядков рассматривалась в работе [6]. Результат, полученный в данной работе, в предельном случае переходит в результат, полученный в работе [6].

2. Основные понятия

Рассмотрим пространство $l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h > 0$, всех последовательностей $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ таких, что $\|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = (h \sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^2)^{1/2} < \infty$.

Напомним определение оператора разделенных разностей:

$$\Delta_h^1 x = \Delta_h x = \left\{ \frac{x_{j+1} - x_j}{h} \right\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad \Delta_h^k x = \Delta_h (\Delta_h^{k-1} x).$$

Образом Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ является функция $(Fx)(\omega) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\omega} \in \mathbb{L}_2([-\pi/h, \pi/h])$, образами Фурье для операторов разделенных разностей — функции

$$(F\Delta_h x)(\omega) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{h} \right) e^{-ijh\omega} = \frac{e^{ih\omega} - 1}{h} (Fx)(\omega),$$

$$(F\Delta_h^k x)(\omega) = \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} (Fx)(\omega).$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что для каждой последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ неточно известны разделенные разности $k_1, k_2, \dots, k_n$ порядков $(0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n)$, т. е. известны последовательности $y_1, y_2, \dots, y_n$ такие, что $\|\Delta_h^{k_j} x - y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j, j = 1, \dots, n$.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора k -й разделенной разности $\Delta_h^k x$ ($0 \leq k \leq k_n$) последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения $m : (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \rightarrow l_{2,h}(\mathbb{Z})$. Погрешностью метода m называется величина

$$e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}, m) = \sup_{\substack{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}), \\ \overline{Y} \in (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n, \\ \|\Delta_h^{k_j} x - y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|\Delta_h^k x - m(\overline{Y})\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})},$$

где $\overline{K} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $\overline{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, $\overline{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

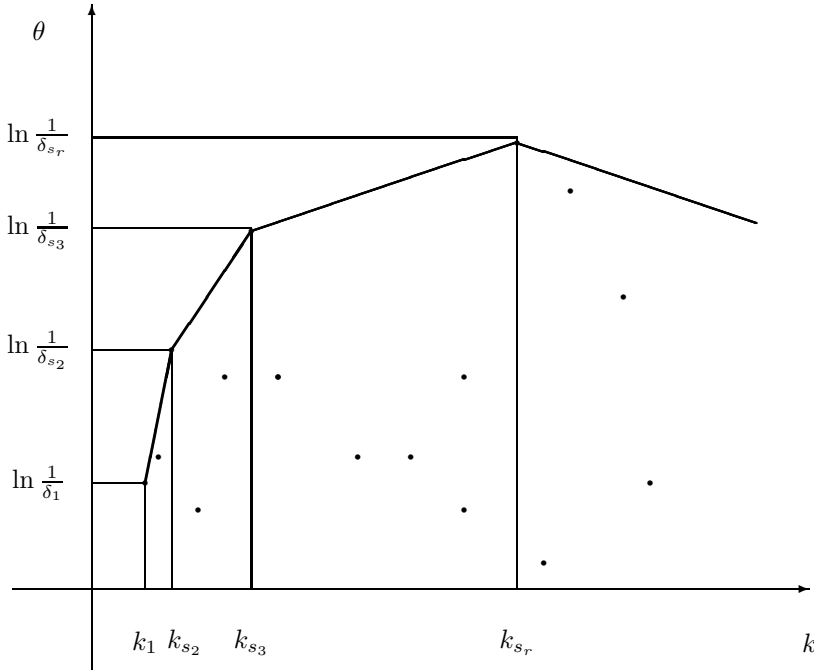
$$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \inf_{m: (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \rightarrow l_{2,h}(\mathbb{Z})} e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}, m).$$

Метод $\hat{m}$, на котором достигается нижняя грань, будем называть оптимальным методом.

3. Основные результаты

Пусть $k, k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_1 < k_2 < \dots \leq k_n$, $0 \leq k \leq k_n$ и $\delta > 0$.

Положим $M = co\{(k_j, \ln 1/\delta_j), 1 \leq j \leq n\} + \{(t, t \ln \frac{h}{2}) : t \geq 0\}$, где $co A$ обозначает выпуклую оболочку множества A . Пусть функция $\theta(\cdot)$ на промежутке $[0, +\infty)$ задана равенством $\theta(k) = \max\{x : (k, x) \in M\}$, причем $\theta(k) = -\infty$, если $(k, x) \notin M$, для любого x . На промежутке $[k_1, +\infty)$ функция $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная. Пусть $k_{s_1}, k_{s_2}, \dots, k_{s_r}$ — ее точки излома (см. рисунок). Очевидно, что $k_{s_1} = k_1$, и $k_{s_1}, k_{s_2}, \dots, k_{s_r}$ — подмножество точек $k_1, k_2, \dots, k_n$.



Пусть

$$g(\omega) = \frac{e^{ih\omega} - 1}{h}, \quad w_h^k = \frac{|e^{ih\omega} - 1|^{2k}}{h^{2k}},$$

$$\hat{\lambda}_{s_j L} = \frac{k_{s_{j+1}} - k}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{2 \frac{k - k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}},$$

$$\hat{\lambda}_{s_j R} = \frac{k - k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}} \right)^{2 \frac{k_{s_{j+1}} - k}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}}.$$

Теорема 1. Для любого $k \geq 0$ погрешность оптимального восстановления равна $E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}) = e^{-\theta(k)}$.

1. Если $0 \leq k < k_1$, то любой метод является оптимальным.
2. Если $k = k_{s_j}$, $1 \leq j \leq r$, то метод $\hat{m}$ такой, что $\hat{m}(\overline{Y}) = y_{s_j}$, является оптимальным.
3. Если $r \geq 2$, $k \in (k_{s_j}, k_{s_{j+1}})$, $1 \leq j \leq r-1$, то любой метод вида $\hat{m}(\overline{Y}) = \Lambda_{s_{jL}} y_{s_j} + \Lambda_{s_{jR}} y_{s_{j+1}}$, где $\Lambda_{s_{jL}}, \Lambda_{s_{jR}} : (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \rightarrow l_{2,h}(\mathbb{Z})$ — линейные непрерывные операторы, действие которых в образах Фурье имеет вид $F(\Lambda_{s_{jL}} y_{s_j})(\omega) = \alpha_{s_{jL}}(\omega)(F y_{s_j})(\omega)$, $F(\Lambda_{s_{jR}} y_{s_{j+1}})(\omega) = \alpha_{s_{jR}}(\omega)(F y_{s_{j+1}})(\omega)$, $\alpha_{s_{jL}}(\omega), \alpha_{s_{jR}}(\omega) \in \mathbb{L}_\infty[-\pi/h, \pi/h]$ — периодические функции, удовлетворяющие условиям

$$\left| \alpha_{s_{jL}}(\omega) - \frac{\hat{\lambda}_{s_{jL}} g^{k-k_{s_j}}(\omega)}{\hat{\lambda}_{s_{jR}} w_h^{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}} + \hat{\lambda}_{s_{jL}}} \right| \leq \\ \leq \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_{s_{jL}} \hat{\lambda}_{s_{jR}} w_h^{k-k_{s_{j+1}}}}}{\hat{\lambda}_{s_{jR}} + \hat{\lambda}_{s_{jL}} w_h^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}} \cdot \sqrt{\hat{\lambda}_{s_{jL}} w_h^{k_{s_j}-k} + \hat{\lambda}_{s_{jR}} w_h^{k_{s_{j+1}}-k} - 1},$$

$\alpha_{s_{jR}}(\omega) = g^{k-k_{s_{j+1}}}(\omega) - g^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}(\omega) \alpha_{s_{jL}}(\omega)$, является оптимальным.

4. Если $k > k_{s_r}$, то метод $\hat{m}$ такой, что $\hat{m}(\overline{Y}) = \Delta_h^{k-k_{s_r}} y_{s_r}$, является оптимальным.

◁ Докажем, что имеет место неравенство

$$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}) \geq \sup_{\substack{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}), \\ \|\Delta_h^{k_j}\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}. \quad (1)$$

Для любой последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ такой, что выполнено неравенство $\|\Delta_h^{k_j}\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j$, $j = 1, \dots, n$, и для любого метода m имеем

$$2\|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \|\Delta_h^k(x) - \Delta_h^k(-x) + m(0) - m(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \\ \leq \|\Delta_h^k(x) - m(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} + \|\Delta_h^k(-x) - m(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq 2e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}, m).$$

Т. е. для любого метода m

$$e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}, m) \geq \sup_{\substack{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) \\ \|\Delta_h^{k_j} x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.$$

Отсюда следует неравенство (1).

Т. е. погрешность оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \rightarrow \max, \|\Delta_h^{k_j} x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Перейдем к квадрату задачи (2) и запишем ее в образах Фурье:

$$\frac{1}{2\pi} \|(F\Delta_h^k x)(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 \rightarrow \max, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2\pi} \|(F\Delta_h^{k_j} x)(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n.$$

По теореме Планшереля имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^m x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \|F(\Delta_h^m x)(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\pi/h, \pi/h])}^2, \\ \|\Delta_h^m x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{|e^{ih\omega} - 1|^{2m}}{h^{2m}} |Fx(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Потому задача (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} w_h^k |(Fx)(\omega)|^2 d\omega &\rightarrow \max, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} w_h^{k_j} |(Fx)(\omega)|^2 d\omega &\leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

Покажем, что значение задачи (4) не меньше, чем $e^{-\theta(k)}$. Рассмотрим 3 случая:

- (а) $k \in [k_{s_j}, k_{s_{j+1}}]$, $1 \leq j \leq r-1$,
- (б) $k \geq k_{s_r}$,
- (в) $k < k_1$.

(а) Пусть $k \in [k_{s_j}, k_{s_{j+1}}]$. Рассмотрим прямую $p(k)$, проходящую через точки $(k_{s_j}, \ln \frac{1}{\delta_{s_j}})$ и $(k_{s_{j+1}}, \ln \frac{1}{\delta_{s_{j+1}}})$:

$$p(k) = \ln \frac{1}{\delta_{s_j}} \cdot \frac{k - k_{s_{j+1}}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} + \ln \frac{1}{\delta_{s_{j+1}}} \cdot \frac{k - k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}.$$

По построению ломаной $\theta(\cdot)$ все точки $(k_j, \ln \frac{1}{\delta_j})$, $j = 1, \dots, n$, лежат не выше ее графика, а так как эта ломаная вогнута, то ее график лежит не выше прямой $p(k)$.

Положим

$$\omega_0 = \frac{2}{h} \arcsin \left(\frac{h}{2} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{\frac{1}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}} \right),$$

$$S(m) = \sqrt{2\pi m} \delta_{s_j}^{\frac{k_{s_{j+1}}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{-\frac{k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}}.$$

Рассмотрим последовательность функций x_m , для которой

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} S(m), & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0], \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0]. \end{cases}$$

Так как

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \omega_h^{k_j} |(Fx_m)(\omega)|^2 d\omega = \frac{S^2(m)}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} \omega_h^{k_j} d\omega \leq \\ & \leq \frac{S^2(m)}{2\pi m} \left(\frac{2 \sin(\frac{h\omega_0}{2})}{h} \right)^{2k_j} = e^{-2 \ln p(k_j)} \leq e^{-2 \ln \frac{1}{\delta_j}} = \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

то последовательность функций x_m допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \omega_h^k |(Fx_m)(\omega)|^2 d\omega = \frac{S^2(m)}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} \omega_h^k d\omega \geq \\ & \geq \frac{S^2(m)}{2\pi m} \left(\frac{2 \sin(h \frac{\omega_0 - \frac{1}{m}}{2})}{h} \right)^{2k}. \end{aligned}$$

При $m \rightarrow \infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к $\frac{2^{\frac{k_{sj}+1-k}{k_{sj}+1-k_{sj}}}}{\delta_{sj}} \frac{2^{\frac{k-k_{sj}}{k_{sj}+1-k_{sj}}}}{\delta_{sj+1}}$. Мы получили, что значение задачи не менее величины $e^{-2p(k)} = e^{-2\theta(k)}$.

(b) Рассмотрим случай $k \geq k_{sr}$, где k_{sr} — последняя точка излома функции $\theta(\cdot)$. На участке $[k_{sr}, +\infty)$ графиком этой части функции является наклонная $p(k) = \ln \frac{1}{\delta_{sr}} + (k - k_{sr}) \cdot \ln \frac{h}{2}$, это означает, что для любых точек $(k_j, \ln \frac{1}{\delta_j})$, $j = 1, \dots, n$, верно неравенство $\ln \frac{1}{\delta_j} \leq \ln \frac{1}{\delta_{sr}} + (k - k_{sr}) \cdot \ln \frac{h}{2}$. Аналогично предыдущему случаю, положим

$$\omega_0 = \begin{cases} \frac{2}{h} \arcsin h/2, & \frac{h}{2} \leq 1, \\ \frac{\pi}{h}, & \frac{h}{2} > 1, \end{cases}$$

и рассмотрим допустимую в задаче (4) последовательность функций x_m :

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} \delta_{sr} \left(\frac{2}{h}\right)^{k-k_{sr}} \sqrt{\frac{2\pi m}{h}}, & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0], \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0]. \end{cases}$$

Значение этой задачи не менее величины $e^{-2\theta(k)}$.

(c) Пусть $k < k_1$. Покажем, что в этом случае значение задачи (4) равно $+\infty$. Пусть $x_0 > 0$. Очевидно, что существует прямая $x = ak + b$, $a > 0$, $a \geq \ln h/2$, разделяющая точку $(k, -x_0)$ и множество $M : -ak - x_0 \geq b \geq -ak_j + \ln \frac{1}{\delta_j}$, $j = 1, \dots, n$. Пусть $\omega_0 = \frac{2}{h} \arcsin \left(\frac{he^{-a}}{2}\right)$. Рассмотрим последовательность функций x_m , для которой

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} e^{-b\sqrt{2\pi m}}, & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0], \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0]. \end{cases}$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \omega_h^{k_j} |(Fx_m)(\omega)|^2 d\omega &= \frac{e^{-2b\sqrt{2\pi m}}}{2\pi h} \int_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} \omega_h^{k_j} d\omega \leq \\ &\leq \frac{e^{-2b} m}{m} \left(\frac{2 \sin(\frac{h\omega_0}{2})}{h} \right)^{2k_j} = e^{-2b} e^{-2ak_j} \leq e^{-2 \ln \frac{1}{\delta_j}} = \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

последовательность функций x_m допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \omega_h^k |(Fx_m)(\omega)|^2 d\omega &= \frac{e^{-2b} 2\pi m}{2\pi h} \int_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} \omega_h^k d\omega \geq \\ &\geq \frac{e^{-2b} m}{m} \cdot \left(\frac{2 \sin(h \frac{\omega_0 - \frac{1}{m}}{2})}{h} \right)^{2k}. \end{aligned}$$

При $m \rightarrow \infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к $e^{-2b-2ak} \geq e^{2x_0}$. В силу произвольности x_0 значение задачи (4) равно $+\infty$.

Тем самым, мы показали, что для всех $k \geq 0$ погрешности оптимального восстановления $E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}) \geq e^{-\theta(k)}$.

Займемся построением оптимальных методов. Также рассмотрим 3 случая.

(а) Пусть $k \in [k_{s_j}, k_{s_{j+1}}]$. Оптимальные методы будем искать среди методов вида $\hat{m}(\overline{Y}) = \Lambda_{s_{jL}} y_{s_j} + \Lambda_{s_{jR}} y_{s_{j+1}}$, где $\Lambda_{s_{jL}}, \Lambda_{s_{jR}} : (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \rightarrow l_{2,h}(\mathbb{Z})$ — линейные непрерывные операторы, действие которых в образах Фурье имеет вид $F(\Lambda_{s_{jL}} y_{s_j})(\omega) = a_{s_{jL}}(\omega)(Fy_{s_j})(\omega)$, $F(\Lambda_{s_{jR}} y_{s_{j+1}})(\omega) = a_{s_{jR}}(\omega)(Fy_{s_{j+1}})(\omega)$, где $a_{s_{jL}}(\omega), a_{s_{jR}}(\omega) \in \mathbb{L}_\infty[-\pi/h; \pi/h]$ — периодические функции.

Для оценки оптимальной погрешности рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^k x - \Lambda_{s_{jL}} y_{s_j} - \Lambda_{s_{jR}} y_{s_{j+1}}\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} &\rightarrow \max, \\ \|\Delta_h^{k_j} x - y_j(\cdot)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} &\leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}), \quad y_j \in l_{2,h}(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

В образах Фурье задача принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \left| \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} Fx(\omega) - \alpha_{s_{jL}}(\omega)(Fy_{s_j})(\omega) - \right. \\ \left. - \alpha_{s_{jR}}(\omega)(Fy_{s_{j+1}})(\omega) \right|^2 d\omega \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \left| \frac{(e^{ih\omega} - 1)^{k_j}}{h^{k_j}} Fx(\omega) - (Fy_j)(\omega) \right|^2 d\omega \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n.$$

Положим $z_j(\omega) = g^{k_j}(\omega)Fx(\omega) - (Fy_j)(\omega)$, $j = 1, \dots, n$.

Если $\Delta_h^{k_{s_j}}$ и $\Delta_h^{k_{s_{j+1}}}$ известны точно, то оптимальный метод должен давать точный результат: $\Delta_h^k x = \Lambda_{s_{jL}} \Delta_h^{k_{s_j}} x + \Lambda_{s_{jR}} \Delta_h^{k_{s_{j+1}}} x$,

$$\begin{aligned} & g^k(\omega)(Fx)(\omega) = \\ & = g^{k_{s_j}}(\omega)\alpha_{s_{jL}}(\omega)(Fx)(\omega) + g^{k_{s_{j+1}}}(\omega)\alpha_{s_{jR}}(\omega)(Fx)(\omega), \end{aligned} \quad (6)$$

тогда подынтегральную функцию максимизируемого выражения можно представить в виде

$$\begin{aligned} & g^k(\omega)Fx(\omega) - \alpha_{s_{jL}}(\omega)(Fy_{s_j})(\omega) - \alpha_{s_{jR}}(\omega)(Fy_{s_{j+1}})(\omega) = \\ & = \alpha_{s_{jL}}(\omega)z_{s_j}(\omega) + \alpha_{s_{jR}}(\omega)z_{s_{j+1}}(\omega), \end{aligned}$$

и задача (5) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} |\alpha_{s_{jL}}(\omega)z_{s_j}(\omega) + \alpha_{s_{jR}}(\omega)z_{s_{j+1}}(\omega)|^2 d\omega \rightarrow \max, \quad (7) \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} |z_j(\omega)|^2 d\omega \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Оценим подынтегральное выражение из первого интеграла, применив неравенство Коши — Буняковского:

$$\begin{aligned} & |\alpha_{s_{jL}}(\omega)z_{s_j}(\omega) + \alpha_{s_{jR}}(\omega)z_{s_{j+1}}(\omega)|^2 \leq \\ & \leq \left(\frac{|\alpha_{s_{jL}}(\omega)|^2}{\hat{\lambda}_{s_{jL}}} + \frac{|\alpha_{s_{jR}}(\omega)|^2}{\hat{\lambda}_{s_{jR}}} \right) \left(\hat{\lambda}_{s_{jL}}|z_{s_j}(\omega)|^2 + \hat{\lambda}_{s_{jR}}|z_{s_{j+1}}(\omega)|^2 \right). \end{aligned}$$

Пусть $Q(\omega) = \frac{|\alpha_{s_{jL}}(\omega)|^2}{\hat{\lambda}_{s_{jL}}} + \frac{|\alpha_{s_{jR}}(\omega)|^2}{\hat{\lambda}_{s_{jR}}}$. Тогда, если выполняется условие $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi/h, \pi/h])} \leq 1$, значение задачи не больше, чем

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} |\alpha_{s_{jL}}(\omega)z_{s_j}(\omega) + \alpha_{s_{jR}}(\omega)z_{s_{j+1}}(\omega)|^2 d\omega \leq \\ & \leq \hat{\lambda}_{s_{jL}}\delta_{s_j}^2 + \hat{\lambda}_{s_{jR}}\delta_{s_{j+1}}^2. \end{aligned}$$

Подставим значения $\hat{\lambda}_{s_{jL}} \geq 0$, $\hat{\lambda}_{s_{jR}} \geq 0$. Тогда

$$D \leq \delta_{s_j}^{\frac{2^{k_{s_{j+1}}-k}}{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{\frac{2^{k-k_{s_j}}}{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}} = e^{-2\theta(k)} = E^2(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}).$$

Покажем, что условие $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([- \pi/h, \pi/h])} \leq 1$ выполнимо. Из равенства (6) вытекает, что $g^k(\omega) = g^{k_{sj}}(\omega)\alpha_{sjL}(\omega) + g^{k_{sj+1}}(\omega)\alpha_{sjR}(\omega)$, $\alpha_{sjR}(\omega) = g^{k-k_{sj+1}}(\omega) - g^{k_{sj}-k_{sj+1}}(\omega)\alpha_{sjL}(\omega)$. Тогда

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= \frac{|\alpha_{sjL}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{sjL}} + \frac{|g^{k-k_{sj+1}}(\omega) - g^{k_{sj}-k_{sj+1}}(\omega)\alpha_{sjL}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{sjR}} = \\ &= \frac{\widehat{\lambda}_{sjR} + \widehat{\lambda}_{sjL} w_h^{k_{sj}-k_{sj+1}}}{\widehat{\lambda}_{sjL} \widehat{\lambda}_{sjR}} \left| \alpha_{sjL}(\omega) - \frac{\widehat{\lambda}_{sjL} g^{k-k_{sj}}(\omega)}{\widehat{\lambda}_{sjR} w_h^{k_{sj+1}-k_{sj}} + \widehat{\lambda}_{sjL}} \right|^2 + \\ &\quad + \frac{w_h^{k-k_{sj+1}}}{\widehat{\lambda}_{sjR} + \widehat{\lambda}_{sjL} w_h^{k_{sj}-k_{sj+1}}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что для всех функций $\alpha_{sjL}(\omega)$, для которых выполняется условие

$$\begin{aligned} &\left| \alpha_{sjL}(\omega) - \frac{\widehat{\lambda}_{sjL} g^{k-k_{sj}}(\omega)}{\widehat{\lambda}_{sjR} w_h^{k_{sj+1}-k_{sj}} + \widehat{\lambda}_{sjL}} \right| \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_{sjL} \widehat{\lambda}_{sjR} w_h^{k-k_{sj+1}}}}{\widehat{\lambda}_{sjR} + \widehat{\lambda}_{sjL} w_h^{k_{sj}-k_{sj+1}}} \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_{sjL} w_h^{k_{sj}-k} + \widehat{\lambda}_{sjR} w_h^{k_{sj+1}-k} - 1} \end{aligned}$$

при указанных $\widehat{\lambda}_{sjL}, \widehat{\lambda}_{sjR} \geq 0$ выполняется неравенство $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([- \pi/h, \pi/h])} \leq 1$.

Покажем, что подкоренное выражение неотрицательно. Рассмотрим функцию $\varphi(\xi) = \widehat{\lambda}_{sjL} \xi^{k_{sj}-k} + \widehat{\lambda}_{sjR} \xi^{k_{sj+1}-k} - 1$. Так как

$$\varphi''(\xi) = (k_{sj} - k)(k_{sj} - k - 1)\widehat{\lambda}_{sjL} \xi^{k_{sj}-k-1} + \widehat{\lambda}_{sjR} \xi^{k_{sj+1}-k-1} \geq 0$$

при всех $\xi > 0$, функция $\varphi(\xi)$ выпукла и достигает наименьшего значения в единственной точке $\xi_0 > 0$, т. е. $\varphi(\xi) \geq \varphi(\xi_0)$ при всех $\xi > 0$. При указанных выше значениях $\widehat{\lambda}_{sjL}$ и $\widehat{\lambda}_{sjR}$ $\varphi(\xi_0) = 0$, что говорит о неотрицательности подкоренного выражения при всех значениях ω . Так как верхняя и нижняя оценки погрешности совпадают, метод $\widehat{m}$ — оптимальный.

(b) Аналогично доказывается, что при $k \geq k_{sr}$ оптимальный метод имеет вид $\widehat{m}(\overline{Y}) = \Delta_h^{k-k_{sr}} y_{k_{sr}}$.

(c) Пусть $k < k_1$. Поскольку в этом случае значение задачи (4) равно $+\infty$, любой метод оптимален.

Заметим, что, в пределе при $h \rightarrow 0$ k -я разделенная разность последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ переходит в производную k -го порядка функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, $\lim_{h \rightarrow 0} g(\omega) = i\omega$, $\lim_{h \rightarrow 0} w_h = \omega^2$.

Предельный оптимальный метод совпадает с оптимальным методом, полученным для восстановления k -й производной функции по приближенно известным производным других порядков, полученным в работе [6].

Литература

1. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: дис. ... канд. физ.-мат. наук.—М.: МГУ, 1965.
2. Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика.—М.: Наука, 1985.—470 с.
3. Никольский С. М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // Успехи мат. наук.—1950.—Т. 5, № 2.—С. 165–177.
4. Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Мат. заметки.—1975.—Т. 17, № 3.—С. 359–368.
5. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб.—2009.—Т. 200, № 5.—С. 37–54.
6. Osipenko K. Yu. Optimal recovery of linear operators from inaccurate information // Математический анализ и математическое моделирование: тр. IX региональной шк.-конф. молодых учен.—2015.—В печати.

Унучек Светлана Александровна
Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики (МГТУ МИРЭА)
РОССИЯ, 119454, Москва, пр. Вернадского, 78
E-mail: svun@mail.ru

OPTIMAL RECOVERY OF DIVIDED DIFFERENCE OPERATOR FROM INACCURATELY GIVEN DIFFERENCES

Unuchek S. A.

The problem of optimal recovery of divided difference of the k -th order from inaccurately given differences is considered. The family of optimal recovery methods is constructed.

Key words: optimal recovery, divided difference operator, inaccurate information.

ПОРЯДКОВЫЕ ВЕРСИИ
ТЕОРЕМЫ ХАНА — БАНАХА И ОГИБАЮЩИЕ.
I. ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ

**Б. Н. Хабибуллин, А. П. Розит,
Ф. Б. Хабибуллин**

Мы приводим здесь общую постановку задачи существования и построения верхней и нижней огибающей для произвольной функции со значениями из пополнения упорядоченного множества S по некоторому классу функций со значениями из S . Задача разбирается пока только для простейшего случая модельного класса однородных функций. Рассматриваем лишь порядково-алгебраические версии без привлечения топологии.

Ключевые слова: теорема Хана — Банаха, порядок, пополнение, однородная функция, полугруппа, гомоморфизм, группа, действие группы на множество, огибающая.

1. Введение. Определения и постановки задач

Одна из классических форм теоремы Хана — Банаха для векторных пространств X над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ гласит [1]: *любая положительно однородная субаддитивная, и только такая, функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ равна поточечной точной верхней грани всех линейных функций $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, мажорируемых поточечно функцией f в том смысле, что $\varphi(x) \leq f(x)$ для всех $x \in X$, т. е. функция f совпадает со своей нижней огибающей по классу линейных функций.* В «Математической энциклопедии» [2, теорема Хана — Банаха] формулировка теоремы Хана — Банаха для векторного пространства некорректна: «В случае действительного пространства X полунорму можно заменить положительно однородным функционалом, ...», т. е. опущено требование субаддитивности. Тем не менее, основным ориентиром в выборе терминологии, где это возможно, выбрана именно «Математическая энциклопедия» [2]. При этом, поскольку в различных источниках и у разных авторов терминология зачастую существенно разнится, в нашем изложении по возможности все, даже элементарные, определения, понятия и утверждения, встречавшиеся нам в литературе хотя бы раз в различных смыслах и трактовках, приводятся полностью во избежание разночтений.

Дадим здесь возможную общую постановку этой проблематики, мотивированную для нас предшествующими применениями утверждений подобного рода в теории функций [3, 4] (см. также [5–8]).

1.1. Упорядоченные множества. Пополнение. Пусть S — (частично) упорядоченное множество [1] с отношением порядка (рефлексивным, транзитивным, антисимметричным) $\leq$, т. е. пара $(S, \leq)$; $\geq$ и $>$ — соответственно обратные к $\leq$ и строгому порядку $< := \leq \cap \neq$.

Пара $(S, \leq)$, или множество S , *полное снизу* (соответственно *сверху*), если для каждого непустого подмножества $S_0 \subset S$ существует точная нижняя (соответственно верхняя) граница $\inf S_0$ (соответственно $\sup S_0$). Множество S *полное*, если S полное и снизу, и сверху. Подмножество $S_0 \subset S$ *ограничено снизу* (соответственно *сверху*), если существует элемент $s_0 \in S$, для которого $s_0 \leq s$ (соответственно $s \leq s_0$) для всех $s \in S_0$. Множество S *порядково полное снизу* (соответственно *сверху*) [9–11]¹, если для каждого непустого ограниченного снизу (соответственно сверху) подмножества $S_0 \subset S$ существует $\inf S_0 \in S$ (соответственно $\sup S_0 \in S$). Множество S *порядково полное*, если S порядково полное и снизу, и сверху.

Пусть S — порядково полное. Если $\inf S$ и/или $\sup S$ не существуют, то часто удобна и полезна операция (полу-)пополнения порядково полного S до полного путем добавления символов $\inf S$ и/или $\sup S$, если таких элементов первоначально в S нет. Конкретнее²,

$[\downarrow] S_\downarrow := \{\inf S\} \cup S$ — *полупополнение*, или полурасширение, множества S *вниз*, или влево;

$[\uparrow] S^\uparrow := S \cup \{\sup S\}$ — *полупополнение*, или полурасширение, множества S *вверх*, или вправо;

$[\updownarrow] S_\updownarrow^\updownarrow := S_\downarrow \cup S^\uparrow$ — *пополнение*, или расширение, множества S в порядковом смысле,

где порядок $\leq$ продолжен естественным путем на эти пополнения, т. е. $\inf S \leq s \leq \sup S$ для всех элементов $s \in S_\updownarrow^\updownarrow$. Очевидно, пополнения $S_\downarrow^\updownarrow$, $S_\downarrow$, $S^\uparrow$ с таким отношением порядка соответственно полное, полное снизу, полное сверху упорядоченные множества. При этом,

¹Lower (upper resp.) order-complete.

²В [9] использованы иные обозначения.

в обозначении $\emptyset$ для пустого множества, естественно полагать

$$\begin{aligned} \sup \emptyset &:= \inf S \quad \text{для } \emptyset \subset S_{\downarrow}, S_{\downarrow}^{\uparrow}, \\ \inf \emptyset &:= \sup S \quad \text{для } \emptyset \subset S_{\downarrow}^{\uparrow}, S_{\downarrow}^{\uparrow}. \end{aligned} \quad (0)$$

1.2. Верхняя и нижняя огибающие. Постановки задач.

Для множеств X, Y традиционно через Y^X обозначаем множество всех функций (отображений, операторов, функционалов, форм и проч.)³ $f: X \rightarrow Y$, или $f: x \mapsto f(x)$, $x \in X$, или $x \mapsto f(x)$, $x \in X$, определенных на X . Для $X_0 \subset X$ $f|_{X_0}$ — сужение f на X_0 .

Пишем $\varphi = f$ на X , если $\varphi(x) = f(x)$ для всех $x \in X$. В противном случае $\varphi \neq f$ на X . Пусть $Y = S_{\downarrow}^{\uparrow}$ — пополнение порядково полного $(S, \leq)$. Пишем $\varphi \leq f$ на X , если $\varphi(x) \leq f(x)$ для всех $x \in X$ и говорим, что φ минорирует f , или f мажорирует φ , на X . Отношение « $f \leq \varphi$ на X » определяет отношение поточечного порядка на $(S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$. Очевидно, множество $(S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ с отношением поточечного порядка, обозначаемого тем же символом $\leq$, полное, а именно: для произвольного $F \subset (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ всегда существуют функции

$$\sup F: x \mapsto \sup_{f \in F} f(x) \in S_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad \inf F: x \mapsto \inf_{f \in F} f(x) \in S_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad x \in X,$$

когда на X рассматриваются и постоянные функции

$$\inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X: x \mapsto \inf S \in S_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad \sup (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X: x \mapsto \sup S \in S_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad x \in X, \quad (\star)$$

а для пустого подмножества $\emptyset \subset (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ в соответствии с соглашением (0) определены точные границы

$$\sup \emptyset := \inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X, \quad \inf \emptyset := \sup (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X. \quad (\emptyset)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $(S, \leq)$ порядково полное, $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$, а также $\Phi \subset (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$. Нижнюю (соответственно верхнюю) Φ -огибающую, или огибающую по Φ для f на X определяем как функцию

$$\begin{aligned} \text{IE}_{\Phi}^f: x &\mapsto \sup \{ \varphi(x) : \Phi \ni \varphi \leq f \text{ на } X \} \in S_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad x \in X \\ (\text{uE}_{\Phi}^f: s &\mapsto \inf \{ \varphi(s) : f \leq \varphi \in \Phi \text{ на } X \} \in S_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad x \in X). \end{aligned}$$

³Для $f: X \rightarrow Y$ в основном будем использовать термин функция, индифферентный к природе множеств X и Y [2; функция].

Функция $f: X \rightarrow Y$ с упорядоченными $(X, \leq)$, $(Y, \leq)$ *возрастающая* на X , если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \leq x_2$ следует $f(x_1) \leq f(x_2)$, и *строго возрастающая*, если из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Аналогично для убывания. Функция (строго) *возрастающая* или *убывающая* — (строго) *монотонная*. Очевидно, функции $f \mapsto \text{IE}_\Phi^f$ и $f \mapsto \text{UE}_f^\Phi$, $f \in (S_\downarrow^\uparrow)^X$, возрастающие на полном множестве $(S_\downarrow^\uparrow)^X$, но, вообще говоря, не строго возрастающие.

В приложениях роль X из определения 1 часто играет некоторый класс функций [4–6], а $S = \mathbb{R}$. Основные общие проблемы, диктуемые определением 1 в ракурсе теоремы Хана — Банаха:

ЗАДАЧА 1. Описать по возможности максимальный класс функций $f \in (S_\downarrow^\uparrow)^X$, равных своей нижней (верхней) Φ -огивающей.

ЗАДАЧА 2. Указать метод(ы) в той или иной мере конструктивного построения Φ -огивающих IE_Φ^f и UE_f^Φ для $f \in (S_\downarrow^\uparrow)^X$.

В связи с приложениями к теории функций не меньший, а для определенных применений (см., например, [3–7]) даже больший интерес, чем задача 1, представляет собой менее требовательная

ЗАДАЧА 1^l. Описать по возможности максимальный класс функций $f \in (S_\downarrow^\uparrow)^X$, для которого $\text{IE}_\Phi^f \neq \inf (S_\downarrow^\uparrow)^X$ и/или $\text{UE}_f^\Phi \neq \sup (S_\downarrow^\uparrow)^X$.

В данной работе рассматриваем только классы Φ , состоящие из однородных функций и их естественных обобщений.

Если порядково полное S изначально дополнительно снабжено какими-либо алгебраическими операциями, согласованными с отношением порядка $\leq$, то продолжения этих операций на пополнения, или (полу)расширения, вообще говоря, с ограничениями, может определяться в каждом конкретном случае в зависимости от постановки рассматриваемых проблем (см. и ср. [12, § 4; 9, п. 1.3.1]).

Для пары добавляемых символов $\inf S \notin S$ и/или $\sup S \notin S$ часто, в особенности, если на S используется бинарная операция в аддитивной форме как основная, по аналогии с расширениями вещественной прямой $\mathbb{R}$ (с операцией сложения) вверх и/или вниз, используются соответственно обозначения $-\infty := \inf S$ и/или $+\infty := \sup S$, а также, если на S используется бинарная операция в мультипликативной форме как основная, по аналогии с (полу-)расширениями строго положительного луча $]0, +\infty[:= \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ (с операцией умножения) естественные обозначения 0 и/или $+\infty$. Применяются, но не здесь, — в зависимости от контекста и природы упорядочен-

ного множества $(S, \leq)$, — также и обозначения соответственно $0, 1; 0, 1; -\infty, 0$ и т. п.

$\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ и $\mathbb{Z}$ — множества натуральных и целых чисел. Далее *положительность* понимаем как ≥ 0 , а > 0 — *строгая положительность*. Аналогично понимается *отрицательность*.

Общепринятые алгебраические определения и факты — из стандартного университетского курса алгебры.

2. Огибающие по однородным функциям

2.1. Определение и свойства однородных функций. Пусть $(H, \cdot)$ — полугруппа с мультипликативной формой записи, т. е. множество с ассоциативной бинарной операцией $\cdot : H^2 \rightarrow H$, или $\cdot : (h_1, h_2) \mapsto h_1 \cdot h_2 =: h_1 h_2$, $h_1, h_2 \in H$. Множество X — H -*множество*, если на множестве X определено действие полугруппы H (слева). Точнее, на H -множестве X задана операция умножения (слева) на элементы полугруппы H по правилу $(h, x) \mapsto hx \in X$, $h \in H$, $x \in X$, с аксиомой ассоциативности

$$\text{Ax0. } h_1(h_2x) = (h_1h_2)x \text{ для любых } x \in X \text{ и } h_1, h_2 \in H.$$

Если H — полугруппа с *единичным элементом* 1, т. е. *моноид*, то определение H -множества X дополняем еще одной аксиомой единичного элемента

$$\text{Ax1. } 1x := 1 \cdot x = x \text{ для любого элемента } x \in X.$$

Пусть $(H, \cdot)$ — еще одна, вообще говоря, другая полугруппа H с другой операцией умножения $\cdot : (h_1, h_2) \mapsto h_1 h_2 \in H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть X — H -множество, S — H -множество, а $\mathfrak{h}$ — гомоморфизм полугруппы H в полугруппу H . Функцию $f : X \rightarrow S$ называем $\mathfrak{h}$ -*однородной*, если

$$f(hx) = \mathfrak{h}(h)f(x) \text{ для любых } x \in X \text{ и } h \in H. \quad (\text{hg})$$

Множество $\mathfrak{h}$ -однородных функций $f \in S^X$ обозначаем как $\mathfrak{h}\text{-hg}(X)$.

Всюду далее H и H — как минимум, *полугруппы*, а $\mathfrak{h} : H \rightarrow H$ — *гомоморфизм полугрупп*, X — H -*множество*, S — H -*множество*, а при использовании множества $\mathfrak{h}\text{-hg}(X)$ часто не указываем H -множество X , т. е. пишем просто $\mathfrak{h}\text{-hg}$. Кроме того, всюду далее в

определениях и, как следствие, в утверждениях, фигурирует только образ $\mathfrak{h}(H) \subset H$ полугруппы H . Поэтому, не умаляя общности, можем всюду считать, что $\mathfrak{h}$ — *эпиморфизм полугрупп*. При этом в случае, когда $(H, \cdot, 1)$ еще и *группа*, то гомоморфный образ группы H в полугруппе H можно рассматривать как группу с $1 := \mathfrak{h}(1)$ и $(\mathfrak{h}(h))^{-1} := \mathfrak{h}(h^{-1})$, $h \in H$. Таким образом, в случае группы H , не умаляя общности, можем считать *группой* и $H = \mathfrak{h}(H)$.

Далее J — множество индексов произвольной природы. Примеры 1–7 относятся к классическим видам однородных функций.

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — «проколотая» вещественная ось, $H = H = (\mathbb{R}_*, \cdot, 1)$ — мультипликативная группа с обычным умножением $\cdot$. При фиксированном $p \in \mathbb{Z}$ определен гомоморфизм $\mathfrak{h}: r \mapsto r^p$, $r \in \mathbb{R}_*$. Пусть при каждом $j \in J$ множество C_j — экземпляр вещественной оси $\mathbb{R}$ и при различных $j_1 \neq j_2$ каждые два экземпляра множеств C_{j_1} и C_{j_2} имеют единственную общую точку $0 \in \mathbb{R}$. Полагаем $X := \bigcup_{j \in J} C_j$, $S := \mathbb{R}$. В этих соглашениях $\mathfrak{h}$ -однородные функции — это однородные степени p функции.

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R}: r \geq 0\}$, $\mathbb{R}_*^+ := \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} =]0, +\infty[$; $H = H = (\mathbb{R}_*^+, \cdot, 1)$ — мультипликативная группа строго положительных чисел. При фиксированном $p \in \mathbb{R}$ определен гомоморфизм $\mathfrak{h}: r \mapsto r^p$, $r \in \mathbb{R}_*^+$. Пусть при каждом $j \in J$ множество C_j — экземпляр положительного луча $\mathbb{R}^+$ и каждые C_{j_1} и C_{j_2} при $j_1 \neq j_2$ имеют единственную общую точку $0 \in \mathbb{R}^+$. Полагаем $X := \bigcup_{j \in J} C_j$, $S := \mathbb{R}$. В этих соглашениях $\mathfrak{h}$ -однородные функции — это положительно однородные степени p функции [2, однородная функция].

ПРИМЕР 3. $H = (\mathbb{R}_*, \cdot, 1)$, $H = (\mathbb{R}_*^+, \cdot, 1)$ — мультипликативные группы; при фиксированном $p \in \mathbb{R}$ гомоморфизм $\mathfrak{h}: r \mapsto |r|^p$, $r \in \mathbb{R}_*$; X и S такие же, как в примере 1. В этих соглашениях $\mathfrak{h}$ -однородные функции — это абсолютно однородные степени p функции.

ПРИМЕР 4. Здесь $r_0, \mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}_*^+$; $p \in \mathbb{Z}$; $H = \{r_0^n: n \in \mathbb{Z}\}$, $H = \{\mathbf{r}_0^n: n \in \mathbb{Z}\}$ — мультипликативные циклические группы; гомоморфизм $\mathfrak{h}: r^n \mapsto \mathbf{r}_0^{np}$, $n \in \mathbb{Z}$; X и S такие же, как в примере 2. При этом $\mathfrak{h}$ -однородные функции — это ограничено (относительно H) однородные степени p функции [14].

ПРИМЕР 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$; $H = ((\mathbb{R}_*^+)^n, \cdot, (1, \dots, 1))$ — группа с покомпонентным умножением векторов, $H = (\mathbb{R}_*^+, \cdot, 1)$. При фиксиро-

ванном $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ определен гомоморфизм

$$\vec{r} := (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}_*^+)^n = H, \quad \mathfrak{h}(\vec{r}) := \prod_{k=1}^n r_k^{p_k} \in \mathbb{R}_*^+ = \mathbb{H},$$

$X := \mathbb{R}^n$ — векторы-столбцы $\vec{x} \in X$ и $\vec{r} \cdot \vec{x}$ — скалярное произведение, $S := \mathbb{R}$. Здесь $\mathfrak{h}$ -однородные функции — это положительно однородные степени $\vec{p}$ функции n переменных [2; однородная функция].

ПРИМЕР 6. Пусть $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — проколота комплексная плоскость. $H = (\mathbb{C}_*, \cdot, 1)$, $\mathbb{H} = (\mathbb{R}_*^+, \cdot, 1)$ — группы; при фиксированном $p \in \mathbb{R}$ гомоморфизм $\mathfrak{h}: z \mapsto |z|^p$, $z \in \mathbb{C}_*$. Пусть при $j \in J$ множество C_j — экземпляр комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и каждые C_{j_1} и C_{j_2} при $j_1 \neq j_2$ имеют единственную общую точку $0 \in \mathbb{C}$; $X := \bigcup_{j \in J} C_j$, $S := \mathbb{C}$. При этом $\mathfrak{h}$ -однородные функции — это комплексно однородные степени p функции [13, гл. 1, § 3].

ПРИМЕР 7. Пусть $H = ((\mathbb{C}_*)^n, \cdot, (1, \dots, 1))$ с покомпонентным умножением, $\mathbb{H} = (\mathbb{R}_*^+, \cdot, 1)$, $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ — мультииндекс, для $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_*^n$ положим $\mathfrak{h}(z) := |z|^{\vec{p}} := |z_1|^{p_1} \dots |z_n|^{p_n}$; $X := \mathbb{C}^n$, $S := \mathbb{C}$. При этом $\mathfrak{h}$ -однородные функции — комплексно однородные степени $\vec{p}$ функции n комплексных переменных; ср. с [13, гл. 1, § 3].

Приведем пример с разными видами операций в H и $\mathbb{H}$.

ПРИМЕР 8. Группы $(\mathbb{R}, +, 0)$, $(\mathbb{R}_*^+, \cdot, 1)$, $p \in \mathbb{R}$, изоморфизм $\mathfrak{h} := \exp^p: x \mapsto e^{px}$, $x \in \mathbb{R}$; $X = \mathbb{R} = S$; функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ из класса $\exp^p\text{-hg}(\mathbb{R})$, если и только если $f(h+x) = e^{ph}f(x)$ для всех $h, x \in \mathbb{R}$.

Другие общие примеры можно строить для произвольной группы преобразований H области определения X функций $f \in S^X$, действия-суперпозиции $(h, f) \mapsto f \circ h$, голоморфизма $\mathfrak{h}$ из H в некоторую, вообще говоря, другую группу $\mathbb{H}$ преобразований множества X . При этом $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}(X)$, если и только если $f \circ h = f \circ (\mathfrak{h}(h))$ для всех $h \in H$. Частный случай — классы функций, инвариантные относительно группы преобразований H , когда в роли группы $\mathbb{H}$ — тривиальная одноточечная группа, состоящая из тождественного преобразования id_X множества X , с очевидным гомоморфизмом $\mathfrak{h}(h) = \text{id}_X$ для всех $h \in H$. Возможности дальнейшего развития этого общего примера (примера 8) в части различных H и $\mathbb{H}$ и операций на них, да и классических примеров 1–7 поистине неисчерпаемы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. $\mathbf{H}$ -множество S называем *упорядоченным*, если оно снабжено отношением порядка $\leq$ с аксиомой согласованности

Ax2. Для любых $s_1, s_2 \in S$ и $h \in \mathbf{H}$ из $s_1 \leq s_2$ следует $hs_1 \leq hs_2$

Всюду далее S — *порядково полное упорядоченное $\mathbf{H}$ -множество*.

Распространим понятие $\mathbf{h}$ -однородной функции на $f \in (S^\uparrow)^X$. Для этого доопределим сначала действия $\mathbf{H}$ на точные грани в пополнении $S^\uparrow_\downarrow$. Если изначально существуют $\inf S \in S$ и/или $\sup S \in S$, то необходимости в этом нет. Иначе для любого $h \in \mathbf{H}$ полагаем

$[\downarrow] \quad h \cdot \inf S := \inf S \in S_\downarrow \subset S^\uparrow_\downarrow$, когда не существует $\inf S$ в S ;

$[\uparrow] \quad h \cdot \sup S := \sup S \in S^\uparrow \subset S^\uparrow_\downarrow$, когда не существует $\sup S$ в S .

Таким образом, $\mathbf{H}$ -множество S можно расширить до $\mathbf{H}$ -множества $S^\uparrow_\downarrow$. При этом для любой функции $f: X \rightarrow S^\uparrow_\downarrow$ корректно условие (hg) определения 2, которое теперь можно дословно распространить и на такие функции f . При этом постоянные функции $\inf (S^\uparrow_\downarrow)^X$ и $\sup (S^\uparrow_\downarrow)^X$, определенные в $(\star)$, всегда $\mathbf{h}$ -однородны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Множество $\mathbf{h}$ -однородных функций $f \in (S^\uparrow_\downarrow)^X$ со значениями в $\mathbf{H}$ -множестве $S^\uparrow_\downarrow$ в рамках соглашений $[\downarrow]$ и $[\uparrow]$ обозначаем через $\mathbf{h}\text{-hg}^+_\downarrow(X)$. Далее при использовании такого множества часто не указываем $\mathbf{H}$ -множество X , т. е. пишем просто $\mathbf{h}\text{-hg}^+_\downarrow$.

Во всех примерах 2–7 на множестве S можно задать естественный порядок, при котором S становится порядково полным $\mathbb{R}^+_\star$ -множеством, а $S^\uparrow_\downarrow$ — упорядоченное $\mathbb{R}^+_\star$ -множество. Например, при $S := \mathbb{C}$ в примерах 6–7 можно ввести «покомпонентный» порядок: $z_1 \leq z_2$ означает, что $\operatorname{Re} z_1 \leq \operatorname{Re} z_2$ и $\operatorname{Im} z_1 \leq \operatorname{Im} z_2$, а $\mathbb{C}^\uparrow_\downarrow$, где Re и Im — операции выделения действительной и мнимой части, получается из $\mathbb{C}$ добавлением двух символов $(-\infty) + i(-\infty) := \inf \mathbb{C}$ и $(+\infty) + i(+\infty) := \sup \mathbb{C}$; $r((\pm\infty) + i(\pm\infty)) := (\pm\infty) + i(\pm\infty)$, $r \in \mathbb{R}^+_\star$.

2.1.1. Верхние и нижние границы. Потребуется элементарная

Лемма 1. Пусть $S_0 \subset S^\uparrow_\downarrow$, $h \in \mathbf{H}$. Тогда $\sup_{s \in S_0} hs \leq h \sup_{s \in S_0} s$ и $h \inf_{s \in S_0} s \leq \inf_{s \in S_0} hs$. Если же $\mathbf{H}$ — группа, то в этих двух неравенствах можно поставить знак равенства.

$\triangleleft$ Для $s \in S_0$ из $s \leq \sup_{s \in S_0} s$ и аксиомы Ax2 сразу следует $hs \leq h \sup_{s \in S_0} s$, откуда $\sup_{s \in S_0} hs \leq h \sup_{s \in S_0} s$. Аналогично для $\inf$. Если

H — группа, то для $\sup$ в $S_{\downarrow}^{\uparrow}$ имеем также

$$\mathbf{h} \sup_{s \in S_0} s \stackrel{\text{Ax1}}{=} \mathbf{h} \sup_{s \in S_0} 1s = \mathbf{h} \sup_{s \in S_0} (\mathbf{h}^{-1} \mathbf{h})s \stackrel{\text{Ax0}}{=} \mathbf{h} \sup_{s \in S_0} \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{h}s) \leq$$

$$|\text{из доказанного выше}| \leq \mathbf{h}(\mathbf{h}^{-1} \sup_{s \in S_0} \mathbf{h}s) \stackrel{\text{Ax0}}{=} (\mathbf{h}\mathbf{h}^{-1}) \sup_{s \in S_0} \mathbf{h}s = \sup_{s \in S_0} \mathbf{h}s.$$

Аналогично для $\inf$. Вместе с предшествующим получаем требуемое. $\triangleright$

В дополнение к определениям 2–4 дадим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Функцию $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ называем $\mathbf{h}$ -*полуоднородной снизу* (соответственно *сверху*), если имеем $f(hx) \leq \mathbf{h}(h)f(x)$ (соответственно $\mathbf{h}(h)f(x) \leq f(hx)$) для всех $x \in X$ и $h \in H$. Множество всех таких функций обозначаем как $\mathbf{h}\text{-hg}_{\uparrow}(X)$ (соответственно $\mathbf{h}\text{-hg}_{\downarrow}(X)$). При этом множество X часто не указываем. Очевидно, $\mathbf{h}\text{-hg}_{\uparrow} \cap \mathbf{h}\text{-hg}_{\downarrow} = \mathbf{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$.

Предложение 1. Если $F \subset \mathbf{h}\text{-hg}_{\uparrow}$ (соответственно $F \subset \mathbf{h}\text{-hg}_{\downarrow}$), то функция $\sup F \in \mathbf{h}\text{-hg}_{\uparrow}$ (соответственно $\inf F \in \mathbf{h}\text{-hg}_{\downarrow}$). В частности, если H — это группа, то из $F \subset \mathbf{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$ следует $\sup F, \inf F \in \mathbf{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$.

$\triangleleft$ Для $F \subset \mathbf{h}\text{-hg}_{\uparrow}$ при $F(x) := \{f(x) : f \in F\}$

$$(\sup F)(hx) = \sup_{f \in F} f(hx) \leq \sup_{f \in F} \mathbf{h}(h)f(x) = \sup\{\mathbf{h}(h)s : s \in F(x)\} \leq$$

$$|\text{Лемма 1 с } S_0 := F(x)| \leq \mathbf{h}(h) \sup\{s : s \in F(x)\} = \mathbf{h}(h)(\sup F)(x).$$

Здесь в случае $F \subset \mathbf{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$ первый знак неравенства $\leq$ можно заменить на равенство, а когда H — группа, и следующий знак $\leq$ поменять на знак $=$. Аналогично для $\inf$. $\triangleright$

Для $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ в обозначениях определений 1, 2, 4, 5 всегда существуют участвующие ниже нижние и верхние огибающие

$$\mathbf{l}E_{\mathbf{h}\text{-hg}}^f \leq \mathbf{l}E_{\mathbf{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}^f \leq \mathbf{l}E_{\mathbf{h}\text{-hg}_{\uparrow}}^f \leq f \leq \mathbf{u}E_f^{\mathbf{h}\text{-hg}_{\downarrow}} \leq \mathbf{u}E_f^{\mathbf{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}} \leq \mathbf{u}E_f^{\mathbf{h}\text{-hg}} \quad (\text{E})$$

на X , где в случае $f \in \mathbf{h}\text{-hg}$ всюду можно поставить равенства.

Из предложения 1 и определений легко получаем

Следствие 1. Для $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ всегда

$$\mathbf{l}E_{\mathbf{h}\text{-hg}}^f, \mathbf{l}E_{\mathbf{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}^f, \mathbf{l}E_{\mathbf{h}\text{-hg}_{\uparrow}}^f \in \mathbf{h}\text{-hg}_{\uparrow},$$

$$\mathbf{u}E_f^{\mathbf{h}\text{-hg}}, \mathbf{u}E_f^{\mathbf{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}, \mathbf{u}E_f^{\mathbf{h}\text{-hg}_{\downarrow}} \in \mathbf{h}\text{-hg}_{\downarrow},$$

а если H — группа, то $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f, lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\perp}^f, uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}}, uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\perp} \in \mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\perp$.

Это следствие 1 сразу решает задачу 1 для ряда классов Φ .

Теорема 1. Пусть $f \in (S_\downarrow^\uparrow)^X$. Справедливы утверждения

[l] $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow}^f = f$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow$.

[u] $f = uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\perp}$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\perp$.

Пусть, в дополнение, H — группа. Эквивалентны три соотношения: 1) $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\perp$; 2) $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\perp}^f = f$; 3) $f = uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\perp}$.

Случай класса $\Phi = \mathfrak{h}\text{-hg}$ потребует дополнительных сведений.

Замечание 1. При доказательстве [l–u] дополнительные условия на полугруппы H и H не накладывались. В случае же $\Phi = \mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\perp$ в теореме 1 для возможности использования предложения 1 и леммы 1 предполагалось, что H — группа.

2.1.2. Орбиты и стационарные элементы. Для элемента x из H -множества X определяется орбита этого элемента

$$\text{orb}_X(x) := H \cdot x :=: Hx := \{hx : h \in H\}. \quad (o)$$

Элемент $x \in X$ стационарный, если $\text{orb}_X(x) = \{x\}$.

Основное свойство орбит. Для группы H орбиты не зависят от выбора представителя и либо не пересекаются, либо совпадают.

Пусть H — группа. Тогда для любых $s \in S_\downarrow^\uparrow$ в рамках соглашений [↓] и [↑] определены орбиты $\text{orb}_{S_\downarrow^\uparrow}(s)$, а также стационарные элементы в $S_\downarrow^\uparrow$. В частности, элементы $\inf S \in S_\downarrow^\uparrow$ при $\inf S \notin S$ и $\sup S \in S_\downarrow^\uparrow$ при $\sup S \notin S$ — стационарные. Пусть $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\perp$. Тривиально проверяется

1) $f(\text{orb}_X(x)) \subset \text{orb}_{S_\downarrow^\uparrow} f(x)$; в частности, если $f(x)$ — стационарный элемент в $S_\downarrow^\uparrow$, то $f(\text{orb}_X(x)) = \{f(x)\}$;

2) если $\mathfrak{h}$ — эпиморфизм, то $f(\text{orb}_X(x)) = \text{orb}_{S_\downarrow^\uparrow} f(x)$ и для стационарного элемента $x \in X$ элемент $f(x)$ стационарный в $S_\downarrow^\uparrow$.

Так, для $S := \mathbb{R}$ из примеров 2–5 в $S_\downarrow^\uparrow$ с $-\infty := \inf \mathbb{R}$, $+\infty := \sup \mathbb{R}$ и $H := \mathbb{R}_*^+$ — пять орбит $\{\{-\infty\},]-\infty, 0[, \{0\},]0, +\infty[, \{+\infty\}\}$ и три стационарных элемента $\{-\infty, 0, +\infty\}$, а для $S := \mathbb{C}$ в примерах 6–7 орбиты — это либо $\{0\}$, либо два элемента $(\pm\infty) + i(\pm\infty)$, либо любой из лучей $\{re^{i\theta} : r \in]0, +\infty[\} \subset \mathbb{C}$ со всевозможными $\theta \in (-\pi, \pi]$, а стационарных элементов тоже три: $\{0\}$ и $(\pm\infty) + i(\pm\infty)$.

2.1.3. Расщепление функции по орбитам. Пусть H — группа. По основному свойству орбит из п. 2.1.2 H -множество X можно представить в виде объединения

$$X = \bigcup_{j \in J} \text{orb}_X(x_j), \quad J — \text{множество индексов}, \quad (\text{o1})$$

не пересекающихся орбит $\text{orb}_X(x_j)$ с выбранными по аксиоме выбора представителями $x_j \in \text{orb}_X(x_j)$. Тогда каждую орбиту $\text{orb}_X(x_j)$ можно рассматривать как H -множество, а произвольная функция $f \in (S^\uparrow)^X$ однозначно определяется своими сужениями

$$f_j := f|_{\text{orb}_X(x_j)}, \quad j \in J. \quad (\text{o2})$$

Более того, каждая функция $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\perp$ полностью определяется своими значениями $f(x_j)$, поскольку может быть однозначно продолжена на всю орбиту $\text{orb}_X(x_j)$ по правилу

$$f(hx_j) := \mathfrak{h}(h)f(x_j), \quad h \in H. \quad (\text{o3})$$

Следующий результат решает задачу 1 для класса $\Phi = \mathfrak{h}\text{-hg}$.

Теорема 2. Пусть H и $\mathfrak{H}$ — группы, $f \in (S^\uparrow)^X$, $\text{im } f \subset S^\uparrow$ — образ функции f в $S^\uparrow$. Справедливы следующие три утверждения.

[l] $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f = f$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих взаимоисключающих двух условий:

[l1] $\text{im } f \subset S^\uparrow$ и $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\perp$,

[l2] $\inf S \notin S$ и $f = \inf (S^\uparrow)^X$ на X (см. $(\star)$ в 1.2).

[u] $f = uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}}$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих взаимоисключающих двух условий:

[u1] $\text{im } f \subset S_\downarrow$ и $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\perp$,

[u2] $\sup S \notin S$ и $f = \sup (S^\uparrow)^X$ на X (см. $(\star)$ в 1.2).

[lu] $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f = f = uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}}$, если и только если $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}$.

$\triangleleft$ Утверждение [lu] = [l] $\cap$ [u] следует из [l] и [u]. Утверждение [u] доказывается так же, как и [l], которое и докажем. Сначала необходимость. Если $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f = f$, $\inf S \notin S$, а f принимает значение $\inf S$

хотя бы раз, то множество функций $\varphi \in \mathfrak{h}\text{-hg}$, мажорируемых функцией f , пусто. Следовательно, по определению 1 имеем $f = \inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ (см. 12, ($\emptyset$) в 1.2). Пусть теперь $\inf S \in S$ или функция $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ нигде не принимает значение $\inf S$, что означает выполнение условия $\text{im } f \subset S^{\uparrow}$. Тогда по следствию 1 в части, когда H — группа, имеем $f = \text{IE}_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$, т. е. [11].

Теперь достаточность. Если выполнено [12], то множество функций $\varphi \in \mathfrak{h}\text{-hg}$, мажорируемых функцией $f = \inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$, пусто. Отсюда ввиду ($\emptyset$) из 1.2 нижняя огибающая $\text{IE}_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f$ всюду на X принимает значение $\inf S$, т. е. в этом случае $\text{IE}_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f = \inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$. Допустим теперь, что выполнено [11]. Пусть $x_0 \in X$ и $s_0 \in S$ — произвольный элемент, для которого $s_0 \leq f(x_0)$. Будем пользоваться расщеплением функции f по непересекающимся орбитам, описанном в начале п. 2.1.3 посредством (o1)–(o2). Здесь мы уже пользуемся тем, что H — группа. Найдется индекс j_0 , для которого $x_0 \in \text{orb}_X(x_{j_0})$. Поскольку в этом случае $\text{orb}_X(x_0) = \text{orb}_X(x_{j_0})$, то, используя переиндексацию, можем считать, что $x_{j_0} = x_0$. Для каждой из остальных орбит $\text{orb}_X(x_j)$ с $j \neq j_0$ выберем, вновь используя аксиому выбора, произвольный элемент $s_j \in S$, удовлетворяющий условию $s_j \leq f(x_j)$. Построение функции $\varphi \in \mathfrak{h}\text{-hg}$, мажорируемой функцией $f = \inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$, а также удовлетворяющей условию $\varphi(x_0) = s_0 \leq f(x_0)$, проведем по схеме (o3), а именно: положим $\varphi(x_j) = s_j$ для всех $j \in J$ и продолжим φ с элемента x_j на всю орбиту $\text{orb}_X(x_j)$ по правилу $\varphi(hx_j) := \mathfrak{h}(h)\varphi(x_j) = \mathfrak{h}(h)s_j$, $h \in H$. Построенная функция $\varphi \in \mathfrak{h}\text{-hg}$ минорирует функцию f , откуда, в силу произвола в выборе $s_0 \in S$ с $s_0 \leq f(x_0)$, получаем $\sup\{\varphi(x_0) : \varphi \in \mathfrak{h}\text{-hg}, \varphi \leq f \text{ на } X\} = f(x_0)$. По определению 1 это, ввиду произвола в выборе элемента $x \in X$, означает $\text{IE}_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f = f$, что и требовалось. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На полугруппы H и $\mathfrak{H}$ при доказательстве необходимости накладывалось только одно дополнительное условие: $\mathfrak{H}$ — группа. Напротив, при доказательстве достаточности применялось тоже только одно дополнительное условие, но другое: H — группа, из которого, впрочем, следует, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(H)$ — группа.

2.1.4. Регуляризованные миноранта и мажоранта. Наряду с (E) из п. 2.1.1 дадим еще один способ конструирования миноранты и мажоранты функции $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$. Для этого, в предположении, что $\mathfrak{H}$ — это группа, определим возрастающие на $(S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ функции $f \mapsto f_{\wedge}$

и $f \mapsto f^\vee$, $f \in (S_\downarrow^\dagger)^X$, действующие по правилу

$$f_\wedge(x) := \inf_{h \in H} (\mathfrak{h}(h))^{-1} f(hx), \quad f^\vee(x) := \sup_{h \in H} (\mathfrak{h}(h))^{-1} f(hx), \quad x \in X,$$

— соответственно регуляризованная миноранта и регуляризованная мажоранта функции f . Для моноида H , очевидно, $f_\wedge \leq f \leq f^\vee$ на X .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Любую полугруппу H без единичного элемента можно превратить в моноид, просто присоединив формальный единичный элемент 1 и определив $1h := h := h1$ для всех $h \in H$. При этом, очевидно, гомоморфизм $\mathfrak{h}$ корректно продолжается на моноид $H \cup \{1\}$ по правилу $\mathfrak{h}(1) = 1 \in \mathbb{H}$ — здесь группа.

Предложение 3. Всегда $f_\wedge \in \mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\downarrow$ и $f^\vee \in \mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow$. Если же, в дополнение, H — группа, то $f_\wedge, f^\vee \in \mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\downarrow$.

◁ Для произвольного $h_0 \in H$ имеем

$$\begin{aligned} f_\wedge(h_0x) &= \inf_{h \in H} (\mathfrak{h}(h))^{-1} f(h(h_0x)) = \\ &= \inf_{h \in H} \mathfrak{h}(h_0)(\mathfrak{h}(h)\mathfrak{h}(h_0))^{-1} f((hh_0)x) = \\ &= \inf_{h \in H} \mathfrak{h}(h_0)(\mathfrak{h}(hh_0))^{-1} f((hh_0)x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left| \text{Лемма 1 при } S_0 := \{ (\mathfrak{h}(hh_0))^{-1} f((hh_0)x) : h \in H \} \text{ с } \mathfrak{h}(h_0) \text{ вместо } \mathfrak{h} \right| \\ &= \mathfrak{h}(h_0) \inf_{h \in H} (\mathfrak{h}(hh_0))^{-1} f((hh_0)x) = \mathfrak{h}(h_0) \inf_{h \in Hh_0} (\mathfrak{h}(h))^{-1} f(hx) \geq \\ &\geq \mathfrak{h}(h_0) \inf_{h \in H} (\mathfrak{h}(h))^{-1} f((h)x) = \mathfrak{h}(h_0) f_\wedge(x) \end{aligned}$$

ввиду $Hh_0 := \{hh_0 : h \in H\} \subset H$ для всех $x \in X$. Отсюда сразу следует $f_\wedge \in \mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\downarrow$. Если же H — группа, то $Hh_0 = H$ и знак неравенства $\geq$ здесь можно заменить на $=$. Аналогично рассматривается и $f^\vee$. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из доказательства нетрудно видеть, что для выполнения $f_\wedge \in \mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\downarrow$ достаточно требовать, чтобы в H существовали правый единичный элемент и правый обратный для любого элемента из H . Для $f^\vee \in \mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow$ то же самое, но с левыми.

Следующий результат решает задачу 2 для различных классов Φ однородных функций.

Теорема 3. Пусть $H, \mathfrak{H}$ — группы, $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$. Тогда

- I. $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}^f = f_{\wedge} \leq f \leq f^{\vee} = lE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}$ на X .
- II. $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f = f_{\wedge}$ на X тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух взаимоисключающих условий:
- II1. $\text{im } f_{\wedge} \subset S^{\uparrow}$;
- II2. $\inf S \notin S$ и $f_{\wedge} = \inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ на X (см. $(\star)$ в 1.2).
- III. $f^{\vee} = lE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}}$ на X тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух взаимоисключающих условий:
- III1. $\text{im } f^{\vee} \subset S_{\downarrow}$;
- III2. $\sup S \notin S$ и $f^{\vee} = \sup (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ на X (см. $(\star)$ в 1.2).

$\triangleleft$ I. Рассмотрим регуляризованную миноранту $f_{\wedge} \leq f$. По предложению 3 и определению 1 $f_{\wedge} \leq lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}^f$ на X . Кроме того, для произвольной функции $\varphi \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$, мажорируемой функцией f , при всех $x \in X$ по определению 4 имеем

$$\varphi(x) = (\mathfrak{h}(h))^{-1} \varphi(hx) \stackrel{\text{Ax2}}{\leq} (\mathfrak{h}(h))^{-1} f(hx) \quad \text{для всех } h \in H.$$

Отсюда $\varphi(x) \leq \inf_{h \in H} (\mathfrak{h}(h))^{-1} f(hx) = f_{\wedge}(x)$ для всех $x \in X$. Это означает, что $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}^f \leq f_{\wedge}$ на X , и доказывает I для $f_{\wedge}$.

Аналогично устанавливается равенство для $f^{\vee}$ из I.

II. *Необходимость.* Если $\inf S \notin S$ и $f_{\wedge}(x_0) = \inf S$, то, ввиду доказанного в предыдущем п. I, $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f \leq f_{\wedge}$ на X , т. е. $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f(x_0) = \inf S$. Отсюда множество функций $\varphi \in \mathfrak{h}\text{-hg}$, мажорируемых функцией f , а значит и $f_{\wedge}$, пусто и $\inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X = lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f = f_{\wedge}$. В противном случае остается только ситуация II2, т. е. $\text{im } f_{\wedge} \subset S^{\uparrow}$.

Достаточность. Если выполнено II2, то из п. I сразу следует $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f \leq f_{\wedge} = \inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ на X , что и нужно.

Пусть теперь $\text{im } f_{\wedge} \subset S^{\uparrow}$. По предложению 3 $f_{\wedge} \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$, т. е. выполнено условие [11] теоремы 2 для функции $f_{\wedge}$ вместо f . Следовательно, по теореме 2 имеем $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f = f_{\wedge}$ на X .

III доказывается аналогично. $\triangleright$

Отметим далее некоторые простейшие факты об однородных функциях, которые могут быть полезными.

2.1.5. Умножение функций слева. Для произвольной функции $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ определено умножение (слева) функции f на элементы $\mathfrak{h} \in H$, а именно: $\mathfrak{h}f: x \mapsto \mathfrak{h}f(x)$, $x \in X$.

Предложение 4. Если полугруппа H коммутативна, то для любого элемента $\mathfrak{h} \in H$ из $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\uparrow}$ (соответственно $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\downarrow}$) следует $\mathfrak{h}f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\uparrow}$ (соответственно $\mathfrak{h}f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\downarrow}$). В частности, для $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}$ получаем $\mathfrak{h}f \in \mathfrak{h}\text{-hg}$.

$\triangleleft (f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\uparrow}) \implies (\mathfrak{h}f)(hx) \leq \mathfrak{h}\mathfrak{h}(h)f(x) = |\text{коммутативность}| = \mathfrak{h}(h)\mathfrak{h}f(x) = \mathfrak{h}(h)(\mathfrak{h}f)(x)$, $x \in X$, $h \in H$. Аналогично для $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\downarrow}$. Отсюда заключение и для $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}$. $\triangleright$

2.1.6. Локализуемость (полу)однородных функций. Покажем, что при определенных ограничениях на (полу)группу H условия (полу)однородности из определений 2 и 4–5 можно проверять лишь для порождающей части H . Напомним, что подмножество $H' \subset H$ порождает полугруппу H , если множество всех конечных произведений вида $h_1 \cdots h_n$ с $h_k \in H'$ при каждом $k = 1, \dots, n$ совпадает с H , и порождает группу H , если множество всех конечных произведений того же вида, но с $h_k \in H'$ или $h_k^{-1} \in H'$ при каждом $k = 1, \dots, n$, — это в точности группа H .

Теорема 4. Пусть $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$. Если для любой неодноточечной орбиты $\text{orb}_X(\cdot)$ из (о) п. 2.1.2 найдется подмножество $H' \subset H$, порождающее полугруппу H , с которым

$$f(hx) \leq \mathfrak{h}(h)f(x) \quad (\text{sh})$$

для всех $h \in H'$ и $x \in \text{orb}_X(\cdot)$, то (sh) выполнено для всех $h \in H$ и $x \in X$. Аналогично при замене $\leq$ в (sh) на $\geq$ или $=$.

Если для любой неодноточечной орбиты $\text{orb}_X(\cdot)$ найдется подмножество $H' \subset H$, порождающее группу H , с которым $f(hx) = \mathfrak{h}(h)f(x)$ для всех $h \in H'$ и $x \in \text{orb}_X(\cdot)$, то $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}(X)$.

$\triangleleft$ Пусть сначала H — полугруппа. Тогда в условиях теоремы 4 для произвольного $h \in H$ найдутся $h_1, \dots, h_n \in H'$, $n \in \mathbb{N}$, с которыми $h = h_1 \cdots h_n$. Отсюда $f(hx) = f(h_1 \cdots h_n x) \stackrel{\text{Ax2, (sh)}}{\leq} \mathfrak{h}(h_1) \cdot f(h_2 \cdots h_n x) \stackrel{\text{Ax2, (sh)}}{\leq} \cdots \stackrel{\text{Ax2, (sh)}}{\leq} \mathfrak{h}(h_1) \cdots \mathfrak{h}(h_n)f(x) = \mathfrak{h}(h_1 \cdots h_n)f(x) = \mathfrak{h}(h)f(x)$ для любых $h \in H$ в произвольной орбите $\text{orb}_X(\cdot) \ni x$, а значит и любых $x \in X$, что и требуется. Для $\geq$ и $=$ аналогично.

Пусть теперь H — группа, а значит и $\mathfrak{h}(H)$ — группа. Для фиксированной орбиты $\text{orb}(\cdot)$ с соответствующим порождающим H множеством H' рассмотрим элемент $h \in H$, для которого $h^{-1} \in H'$. Тогда для $x \in \text{orb}(\cdot)$ имеем $f(x) = f(h^{-1}hx) = \mathfrak{h}(h^{-1})f(hx) = (\mathfrak{h}(h))^{-1}f(hx)$, т. е. $f(hx) = (\mathfrak{h}(h))f(x)$ для любых $x \in \text{orb}_X(\cdot)$ и $h^{-1} \in H'$. Таким образом, выполнено (sh) с равенством $=$ вместо неравенства $\leq$ для всех h из множества $H' \cup (H')^{-1} \subset H$, порождающего H как полугруппу. Остается воспользоваться доказанным.

ПРИМЕР 9. При $H = \mathbb{R}_*^+$ с обычной структурой мультипликативной группы достаточно проверять $\mathfrak{h}$ -однородность на сколь угодно коротких непустых открытых интервалах $]r_1, r_2[\subset \mathbb{R}_*^+$, поскольку, как легко показать, любой такой интервал порождает группу $\mathbb{R}_*^+$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ КОММЕНТАРИЙ. Содержательные утверждения по задаче 1¹ легко следуют из теорем 1–3. Другие варианты решения этой задачи, не опирающиеся на эти теоремы нам пока неизвестны. Остается неясным также вопрос — в какой мере установленные здесь результаты для группы H могут быть перенесены на полугруппы H . Скорее всего всегда есть контрпримеры. Дальнейшие перспективы — рассмотрение Φ -огибающих для других классов Φ , как-то: (полу=суб- или супер-)аддитивных, с условиями типа выпуклости–вогнутости, связанных с операциями $\sup$ или $\inf$ (идемпотентные, или тропические, версии) и проч. Возможны вариации и в рамках структуры множества X — теоретико-множественной, алгебраической, топологической, геометрической, порядковой и далее. Объем таких исследований необозрим. При этом представляется важным изучение подобных вопросов для функций со значениями именно в пополнении (расширении) $S_\downarrow^\uparrow$ в связи с приложениями (см., например, [3–6] — в теории функций, [15] — в оптимизации). $\triangleright$

Литература

1. Акилов Г. П. Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства. — Новосибирск: Наука, 1978. — 370 с.
2. Математическая энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия, 1977–1985.
3. Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I // Изв. РАН. Сер. мат. — 2001. — Т. 65, № 4 — С. 205–224.
4. Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II // Изв. РАН. Сер. мат. — 2001. — Т. 65, № 5 — С. 167–190.

5. Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. Ч. I. Комплексный анализ.—Уфа: ИМ с ВЦ УНЦ РАН, 1996.—С. 122–131.
6. Хабибуллин Б. Н. Применения в комплексном анализе двойственного представления функционалов на векторных решетках // Мат. форум. Т. 4. Исследования по мат. анализу, дифферен. уравнениям и их приложениям.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А.—2010.—С. 102–116.—(Итоги науки. Юг России).
7. Картак В. В., Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление функционалов на проективных пределах векторных решеток // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Материалы IX междунар. Казанской летней научн. школы-конференции (Казань, 1–7 июля 2009 г. Казанское мат. об-во).—2009.—Т. 38.—С. 146–148.
8. Хабибуллин Б. Н. Аналоги теоремы Хана — Банаха для (полу)групп: построение нижней огибающей // Материалы междунар. конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань, 2–6 июня 2014 г. Казанский (Приволжский) федеральный университет).—2014.—С. 75–76.
9. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление: теория и приложения.—М.: Наука, 2007.—560 с.
10. Simons S. From Hahn–Banach to Monotonicity.—Berlin: Springer.—2008.—262 p.—(Lect. Notes in Math.; 1693.).
11. Borwein J. M., Vanderwerff J. D. Convex Functions: Constructions, Characterizations and Counterexamples.—N. Y.: Cambridge Univ. Press, 2010.—532 p.
12. Лейхтвейс К. Выпуклые множества.—М.: Наука, 1985.—336 с.
13. Лелон Л., Грuman Л. Целые функции многих комплексных переменных.—М.: Мир, 1989.—348 с.
14. Schlude K. Bemerkung zu beschränkt homogenen Funktionen // Elemente der Mathematik.—1999.—Vol. 54.—P. 30–31.
15. Dinha N., Ernst E., López M. A., Volled M. An approximate Hahn–Banach theorem for positively homogeneous functions // Optimization: A J. of Math. Programming and Operations Research.—2015.—Vol. 64, № 5.—P. 1321–1328.

Хабибуллин Булат Нурмиевич
Башкирский государственный университет
РОССИЯ, 450076, Уфа, ул. З. Валиди, 32
E-mail: Khabib-Bulat@mail.ru

Розит Алексей Петрович
Башкирский государственный университет
РОССИЯ, 450076, Уфа, ул. З. Валиди, 32
E-mail: Rozit@mail.ru

Хабибуллин Фархат Булатович
Башкирский государственный университет
РОССИЯ, 450076, Уфа, ул. З. Валиди, 32
E-mail: KhabibullinFB@list.ru

ORDER VERSIONS
OF THE HAHN — BANACH THEOREM AND ENVELOPES.
I. HOMOGENEOUS FUNCTIONS

Khabibullin B. N., Rozit A. P., Khabibullin F. B.

We present here a general formulation of the problem of existence and construction of upper and lower envelope for a function with values in a completion of ordered set S for a certain class of functions with values in S . The task is parsed only for the simplest case of model class of homogeneous functions. We consider only order-algebraic versions without the involvement of the topology.

Key words: Hahn–Banach theorem, order, completion, homogeneous function, semigroup, homomorphism, group, group action on a set, envelope.

РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ В СМЫСЛЕ СОБОЛЕВА

Т. И. Шарапудинов

Введены ряды Фурье по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке относительно скалярного произведения соболевского типа и установлена их связь со смешанными рядами по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке в классическом смысле. Как следствие, рассмотрены некоторые аппроксимативные свойства указанных рядов Фурье.

Ключевые слова: ортогональные полиномы, многочлены Чебышева, соболевское скалярное произведение, ряды Фурье, ортогональность на сетке.

1. Введение

Полиномы, ортогональные относительно скалярных произведений типа Соболева, в последние годы были исследованы (см. [1–6] и цитированную там литературу) в работах многих авторов. В том числе было показано, что классические полиномы Якоби $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ и Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$ обладают свойством ортогональности относительно скалярного произведения типа Соболева, если параметры α и β принимают целые отрицательные значения. Скалярные произведения типа Соболева содержат, как правило, слагаемые, которые «отвечают» за поведение соответствующих ортогональных полиномов на концах области ортогональности. Полиномы, ортогональные по Соболеву на отрезке $[a, b]$, могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого отрезка. Это свойство имеет важное значение для многих приложений. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на $[a, b]$ весом полиномы этим важным свойством не обладают.

С другой стороны отметим, что в ряде работ И. И. Шарапудинова [7–12] были введены так называемые смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам, частичные суммы которых также обладают свойством совпадения их значений в концах области ортогональности со значениями исходной функции. В работах [7–12]

были подробно исследованы аппроксимативные свойства смешанных рядов для функций из различных функциональных пространств и классов. В частности, было показано, что частичные суммы смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам, в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам, успешно могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и ее несколько производных.

В настоящей работе показано, что классические полиномы Чебышева $T_k^{\alpha-r, \beta-r}(x, N+r)$ ($r \leq k \leq N+r-1$), определяемые разностной формулой Родрига (2.2), при условии $(k + \alpha + \beta)^{[r]} \neq 0$ образуют ортогональную систему относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^N \mu(j) \Delta^r f(j) \Delta^r g(j),$$

где $\Delta f(j) = f(j+1) - f(j)$, $\Delta^r f(j) = \Delta \Delta^{r-1} f(j)$ — конечная разность, $\mu(x)$ — весовая функция. Рассмотрены конечные ряды Фурье дискретных функций по этой системе. Эти ряды представляют собой частный случай смешанных рядов по полиномам Чебышева $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$, исследованных впервые в работе [10]. Нам понадобится ряд свойств полиномов Чебышева $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$, которые мы соберем в следующем параграфе.

2. Некоторые сведения о полиномах Чебышева, ортогональных на равномерной сетке

Пусть N — натуральное, α, β — произвольные вещественные числа. Положим

$$\rho(x) = \rho(x; \alpha, \beta, N) = \frac{\Gamma(x + \beta + 1) \Gamma(N - x + \alpha)}{\Gamma(x + 1) \Gamma(N - x)}, \quad (2.1)$$

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \frac{(-1)^n}{n!(N-1)^{[n]} \rho(x)} \Delta^n \left\{ \rho(x) (x - N - \alpha)^{[n]} x^{[n]} \right\}, \quad (2.2)$$

где $\Delta^n f(x)$ — конечная разность n -го порядка функции $f(x)$ в точке x , т. е. $\Delta^0 f(x) = f(x)$, $\Delta^1 f(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\Delta^n f(x) = \Delta \Delta^{n-1} f(x)$ ($n \geq 1$), $a^{[0]} = 1$, $a^{[k]} = a(a-1) \cdots (a-k+1)$ при

$k \geq 1$. Для каждого $0 \leq n \leq N-1$ равенство (2.2) определяет [13–17] алгебраический полином степени n , для которого

$$T_n^{\alpha, \beta}(N-1, N) = \binom{n+\alpha}{n}, \quad T_n^{\alpha, \beta}(0, N) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}.$$

Полные доказательства приведенных ниже свойств полиномов Чебышева $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$ можно найти, например, в монографии [18]. Прежде всего отметим, что полиномы $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$ допускают следующее явное представление:

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!} \times \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n^{[k]}(n+\alpha+\beta+1)_k x^{[k]}}{\Gamma(k+\beta+1)k!(N-1)^{[k]}}. \quad (2.3)$$

Если $\alpha, \beta > -1$, то полиномы $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$ ($0 \leq n \leq N-1$) образуют ортогональную с весом $\rho(x)$ (см. (2.1)) систему на множестве $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, точнее

$$\sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) T_n^{\alpha, \beta}(x, N) T_m^{\alpha, \beta}(x, N) = h_{n, N}^{\alpha, \beta} \delta_{nm}, \quad (2.4)$$

где δ_{nm} — символ Кронекера,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \mu(x; \alpha, \beta, N) = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \rho(x) = \\ &= \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}, \\ h_{n, N}^{\alpha, \beta} &= \frac{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}{(N-1)^{[n]}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}. \end{aligned}$$

При $n=0$ произведение $(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)$ следует заменить на $\Gamma(\alpha+\beta+2)$. Для $0 \leq n \leq N-1$ положим

$$\tau_n^{\alpha, \beta}(x) = \tau_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \left\{ h_{n, N}^{\alpha, \beta} \right\}^{-1/2} T_n^{\alpha, \beta}(x, N).$$

Очевидно, если $0 \leq n, m \leq N-1$, то

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mu(x) \tau_n^{\alpha, \beta}(x, N) \tau_m^{\alpha, \beta}(x, N) = \delta_{nm}.$$

Другими словами, многочлены $\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)$ ($0 \leq n \leq N-1$) образуют ортонормированную с весом $\mu(x)$ систему на Ω_N .

Формула Кристоффеля — Дарбу для многочленов Чебышева имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x, y) &= \sum_{k=0}^n \tau_k^{\alpha,\beta}(x) \tau_k^{\alpha,\beta}(y) = \sum_{k=0}^n \frac{T_k^{\alpha,\beta}(x) T_k^{\alpha,\beta}(y)}{h_{k,N}^{\alpha,\beta}} = \\ &= \frac{(N-1)^{[n+1]}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}} \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \times \\ &\quad \times \frac{T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) T_n^{\alpha,\beta}(y) - T_n^{\alpha,\beta}(x) T_{n+1}^{\alpha,\beta}(y)}{x-y}. \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta a^{[k]} = ka^{[k-1]}$, то из (2.3) находим

$$\begin{aligned} (n+1)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x, N) + (n+\beta+1)T_n^{\alpha,\beta}(x, N) &= \\ = \frac{2n+\alpha+\beta+2}{N-1} x T_n^{\alpha,\beta+1}(x-1, N-1). \end{aligned}$$

Из равенства $\mu(N-1-x; \beta, \alpha, N) = \mu(x; \alpha, \beta, N)$, непосредственно вытекающего из соотношения ортогональности (2.4), следует, что при $\alpha, \beta > -1$

$$T_n^{\alpha,\beta}(x, N) = (-1)^n T_n^{\beta,\alpha}(N-1-x, N).$$

Поскольку обе части этого равенства аналитичны относительно α и β , то оно справедливо для произвольных α и β . Из (2.10) и (2.11) имеем также следующее равенство:

$$\begin{aligned} (n+\alpha+1)T_n^{\alpha,\beta}(x, N) - (n+1)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x, N) &= \\ = \frac{2n+\alpha+\beta+2}{N-1} (N-1-x) T_n^{\alpha+1,\beta}(x, N-1). \end{aligned}$$

Непосредственно из явной формулы (2.3) мы можем вывести следующее полезное равенство

$$\Delta^m T_n^{\alpha,\beta}(x, N) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_m}{(N-1)^{[m]}} T_{n-m}^{\alpha+m,\beta+m}(x, N-m), \quad (2.5)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1)$ при $k \geq 1$. Если β такое целое число, что $-n \leq \beta \leq -1$, то из (2.5) выводим также

$$T_n^{\alpha,\beta}(x, N) = \frac{(n+\beta)!}{n!} \frac{(n+\alpha)^{[-\beta]} x^{[-\beta]}}{(N-1)^{[-\beta]}} T_{n+\beta}^{\alpha,-\beta}(x+\beta, N+\beta), \quad (2.6)$$

а если α и β — целые, $-n \leq \beta \leq -1$, $-(n + \beta) \leq \alpha \leq -1$, $N \geq 2$, то

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \frac{(-1)^\alpha x^{[-\beta]}(N - x - 1)^{[-\alpha]}}{(N - 1)^{[-\beta]}(N - 1 + \beta)^{[-\alpha]}} T_{n+\alpha+\beta}^{-\alpha, -\beta}(x + \beta, N + \alpha + \beta).$$

Разностная формула Родрига (2.1) допускает следующее обобщение:

$$\begin{aligned} & \rho(x + m; \alpha, \beta, N + m) T_n^{\alpha, \beta}(x + m, N + m) = \\ & = \frac{(-1)^m}{n^{[m]}(N)_m} \Delta^m \left\{ \rho(x; \alpha + m, \beta + m, N) T_{n-m}^{\alpha+m, \beta+m}(x, N) \right\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

которое, впрочем, непосредственно вытекает из (2.1). Заменяя здесь m на ν , α и β на $m - \nu$, n на $k + \nu - m$, мы можем также записать

$$\begin{aligned} & \Delta^\nu \left\{ (x + 1)_m (N - x)_m T_{k-m}^{m, m}(x, N) \right\} = \\ & (-1)^\nu (k + \nu - m)^{[\nu]} (N + \nu - 1)^{[\nu]} (x + 1 + \nu)_{m-\nu} \times \\ & \times (N - x)_{m-\nu} T_{k+\nu-m}^{m-\nu, m-\nu}(x + \nu, N + \nu). \end{aligned}$$

Если в равенстве (2.7) мы заменим α , β и n , соответственно, на $\alpha - m$, $\beta - m$ и $k + m$, то придем к формуле

$$\Delta^m T_{k+m}^{\alpha-m, \beta-m}(x, N) = \frac{(k + \alpha + \beta)^{[m]}}{(N - 1)^{[m]}} T_k^{\alpha, \beta}(x, N - m). \quad (2.8)$$

3. Об ортогональности полиномов Чебышева $T_n^{\alpha-r, \beta-r}(x, N)$ по Соболеву

Для произвольных $\alpha, \beta > -1$ и целого $r \geq 0$ рассмотрим соотношение ортогональности (2.4) и подставим вместо $T_k^{\alpha, \beta}(x, N)$ выражение

$$T_{k-r}^{\alpha, \beta}(x, N) = \frac{(N + r - 1)^{[r]}}{(k - r + \alpha + \beta)^{[r]}} \Delta^r T_k^{\alpha-r, \beta-r}(x, N + r), \quad (3.1)$$

которое вытекает непосредственно из (2.8). Тогда получим

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) \Delta^r T_n^{\alpha-r, \beta-r}(x, N + r) \Delta^r T_m^{\alpha-r, \beta-r}(x, N + r) = \\ & = \left(\frac{(n - r + \alpha + \beta)^{[r]}}{(N + r - 1)^{[r]}} \right)^2 h_{n-r, N}^{\alpha, \beta} \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
& \langle T_n^{\alpha-r, \beta-r}(*, N+r), T_m^{\alpha-r, \beta-r}(*, N+r) \rangle = \\
& = \sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) \Delta^r T_n^{\alpha-r, \beta-r}(x, N+r) \Delta^r T_m^{\alpha-r, \beta-r}(x, N+r) = \\
& = \left(\frac{(n-r+\alpha+\beta)^{[r]}}{(N+r-1)^{[r]}} \right)^2 h_{n-r, N}^{\alpha, \beta} \delta_{nm}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Равенство (3.1), с помощью которого мы вывели (3.2), имеет смысл, если выражение $(k+\alpha+\beta)^{[r]}$ не обращается в нуль. Мы рассмотрим различные случаи.

СЛУЧАЙ 1. Пусть $\beta = 0$, α — нецелое. Тогда очевидно, что каковы бы ни были целые k и r величина $(k+\alpha+\beta)^{[r]}$ не обращается в нуль, т. е. $(k+\alpha+\beta)^{[r]} = (k+\alpha)^{[r]} \neq 0$, следовательно, равенство (3.2) имеет место для произвольных $n, m \geq 0$. В этом частном случае равенству (3.2) можно придать следующий вид ($\mu(x) = \mu(x; \alpha, 0, N)$):

$$\begin{aligned}
& \langle T_n^{\alpha-r, -r}(*, N+r), T_m^{\alpha-r, -r}(*, N+r) \rangle = \\
& = \sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) \Delta^r T_n^{\alpha-r, -r}(x, N+r) \Delta^r T_m^{\alpha-r, -r}(x, N+r) = \\
& = \left(\frac{(n-r+\alpha)^{[r]}}{(N+r-1)^{[r]}} \right)^2 h_{n-r, N}^{\alpha, 0} \delta_{nm} \quad (n, m \geq r).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Равенство (3.3) можно рассматривать как соотношение ортогональности для полиномов Чебышева $T_n^{\alpha-r, -r}(x, N+r)$ ($r \leq n \leq N+r-1$) относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) \Delta^r f(x) \Delta^r g(x). \tag{3.4}$$

СЛУЧАЙ 2. Пусть $\alpha = \beta = 0$, $k \geq 2r$. Тогда $(k-r+\alpha+\beta)^{[r]} = (k-r)^{[r]} \neq 0$, и поэтому снова имеет место равенство (3.2), т. е.

$$\begin{aligned}
& \langle T_n^{-r, -r}(*, N+r), T_m^{-r, -r}(*, N+r) \rangle = \\
& = \sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) \Delta^r T_n^{-r, -r}(x, N+r) \Delta^r T_m^{-r, -r}(x, N+r) = \\
& = \left(\frac{(n-r)^{[r]}}{(N+r-1)^{[r]}} \right)^2 h_{n-r, N}^{0, 0} \delta_{nm} \quad (n, m \geq 2r).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Равенство (3.5) означает, что полиномы $T_n^{-r,-r}(x, N+r)$ ($2r \leq n \leq N+r-1$) ортогональны по Соболеву относительно скалярного произведения (3.4).

4. Ряды Фурье по полиномам Чебышева $T_n^{\alpha-r,-r}(x, N+r)$, ортогональным по Соболеву: случай дробного α

Обозначим через $l_{2,\alpha}^{N+r}$ пространство функций $f = f(x)$, заданных на множестве $\Omega_{N+r} = \{0, 1, \dots, N+r-1\}$, в котором определено скалярное произведение

$$(f, g) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu f(x) \Delta^\nu g(x) \Big|_{x=0} + \sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) \Delta^r f(x) \Delta^r g(x), \quad (4.1)$$

где $f, g \in l_{2,\alpha}^{N+r}$, $\mu(x) = \mu(x; \alpha, 0, N)$, $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$.

Рассмотрим следующие функции:

$$\varphi_k(x) = \frac{x^{[k]}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad (4.2)$$

$$\varphi_k(x) = \frac{(N+r-1)^{[r]}}{(k-r+\alpha)^{[r]}} (h_{k-r,N}^{\alpha,0})^{-\frac{1}{2}} T_k^{\alpha-r,-r}(x, N+r), \quad (4.3)$$

$$r \leq k \leq N+r-1.$$

Из (3.3) нетрудно увидеть, что справедлива следующая

Теорема 1. Функции $\varphi_k(x)$, $0 \leq k \leq N+r-1$, определенные равенствами (4.2) и (4.3), образуют полную в $l_{2,\alpha}^{N+r}$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (4.1).

Для $f \in l_{2,\alpha}^{N+r}$ мы можем определить коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}$:

$$f_k = (f, \varphi_k) = \Delta^k f(0), \quad 0 \leq k \leq r-1,$$

$$f_k = (f, \varphi_k) = \frac{(N+r-1)^{[r]}}{(k-r+\alpha)^{[r]}} (h_{k-r,N}^{\alpha,0})^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sum_{t \in \Omega_N} \mu(t) \Delta^r f(t) \Delta^r T_k^{\alpha-r,-r}(t, N+r), \quad r \leq k \leq N+r-1. \quad (4.4)$$

Соответствующий ряд Фурье функции f по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{N+r-1}$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \mathcal{F}_{r,\alpha}^N(x), \quad (4.5)$$

где

$$\mathcal{F}_{r,\alpha}^N(x) = \sum_{k=r}^{N+r-1} f_k \frac{(N+r-1)^{[r]}}{(k-r+\alpha)^{[r]}} (h_{k-r,N}^{\alpha,0})^{-\frac{1}{2}} T_k^{\alpha-r,-r}(x, N+r). \quad (4.6)$$

С другой стороны, в силу (3.1) и (4.4) имеем

$$f_k = (h_{k-r,N}^{\alpha,0})^{-\frac{1}{2}} \sum_{t \in \Omega_N} \mu(t) T_{k-r}^{\alpha,0}(x, N) \Delta^r f(t), \quad r \leq k \leq N+r-1. \quad (4.7)$$

С учетом (4.7) мы можем переписать (4.6) следующим образом:

$$\mathcal{F}_{r,\alpha}^N(x) = \sum_{k=r}^{N+r-1} \frac{f_k^{\alpha,r}}{(k-r+\alpha)^{[r]} h_{k-r,N}^{\alpha,0}} T_k^{\alpha-r,-r}(x, N+r), \quad (4.8)$$

где

$$f_k^{\alpha,r} = (N+r-1)^{[r]} \sum_{t \in \Omega_N} \mu(t) T_{k-r}^{\alpha,0}(x, N) \Delta^r f(t), \quad r \leq k \leq N+r-1.$$

Если мы воспользуемся свойством (2.6), то можем записать

$$T_k^{\alpha-r,-r}(x, N+r) = \frac{(k-r)!}{k!} \frac{(k-r+\alpha)^{[r]} x^{[r]}}{(N+r-1)^{[r]}} T_{k-r}^{\alpha-r,r}(x-r, N).$$

Подставляя это выражение в (4.8), имеем

$$\mathcal{F}_{r,\alpha}^N(x) = x^{[r]} \sum_{k=r}^{N+r-1} \frac{\hat{f}_k^{\alpha,r}}{k^{[r]}} T_{k-r}^{\alpha-r,r}(x-r, N), \quad (4.9)$$

где

$$\hat{f}_k^{\alpha,r} = \frac{1}{h_{k-r,N}^{\alpha,0}} \sum_{t \in \Omega_N} \mu(t) T_{k-r}^{\alpha,0}(x, N) \Delta^r f(t), \quad r \leq k \leq N+r-1.$$

Ряды вида (4.5), в которых выражение $\mathcal{F}_{r,\alpha}^N(x)$ имеет вид (4.8) или (4.9), называются смешанными рядами по полиномам Чебышева $T_k^{\alpha,0}(x, N)$. Они представляют собой частный случай более общих смешанных рядов по полиномам Чебышева $T_k^{\alpha,\beta}(x, M)$, рассмотренных и исследованных впервые в работах [9, 10].

Литература

1. Kwon K. H., Littlejohn L. L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal.—1995.—Vol. 2.—P. 289–303.
2. Kwon K. H., Littlejohn L. L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math.—1998.—Vol. 28, № 2.—P. 547–594.
3. Marcellan F., Alfaro M., Rezola M. L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // J. Comp. Appl. Math.—1993.—Vol. 48.—P. 113–131.
4. Iserles A., Koch P. E., Norsett S. P., Sanz-Serna J. M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory.—1991.—Vol. 65.—P. 151–175.
5. Meijer H. G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory.—1993.—Vol. 73.—P. 1–16.
6. Marcellan F., Xu Y. On sobolev orthogonal polynomials.—2014.—P. 1–40.—arXiv: 6249v1 [math. CA].
7. Шарапудинов И. И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье Лежандра // Мат. сб.—2000.—Т. 191, № 5.—С. 143–160.
8. Шарапудинов И. И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{U}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Мат. заметки.—2002.—Т. 72, № 5.—С. 765–795.
9. Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам.—Махачкала: Изд-во ДНЦ, 2004.—176 с.
10. Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Мат. заметки.—2005.—Т. 78, № 3.—С. 442–465.
11. Шарапудинов И. И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Мат. сб.—2006.—Т. 197, № 3.—С. 135–154.
12. Шарапудинов И. И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Мат. заметки.—2008.—Т. 197, № 3.—С. 452–471.
13. Чебышев П. Л. О непрерывных дробях (1855) // Полн. собр. соч. Т. 2.—М.: Изд-во АН СССР, 1947.—С. 103–126.
14. Чебышев П. Л. Об одном новом ряде // Полн. собр. соч. Т. 2.—М.: Изд-во АН СССР, 1947.—С. 236–238.
15. Чебышев П. Л. Об интерполировании по способу наименьших квадратов (1859) // Полн. собр. соч. Т. 2.—М.: Изд-во АН СССР, 1947.—С. 314–334.
16. Чебышев П. Л. Об интерполировании (1864) // Полн. собр. соч. Т. 2.—М.: Изд. АН СССР, 1947.—С. 357–374.
17. Чебышев П. Л. Об интерполировании величин равноотстоящих (1875) // Полн. собр. соч. Т. 2.—М.: Изд-во АН СССР, 1947.—С. 66–87.
18. Шарапудинов И. И. Многочлены, ортогональные на сетках.—Махачкала: Изд-во ДГПУ, 1997.—252 с.
19. Cere Г. Ортогональные многочлены.—М.: Физматгиз, 1962.—500 с.

Шарапудинов Тимур Идрисович
Дагестанский научный центр РАН
РОССИЯ, 367025, Махачкала, ул. Гаджиева, 45;
Южный математический институт ВШЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: sharapudinov@gmail.com

FOURIER SERIES IN CHEBYSHEV POLYNOMIALS
ORTHOGONAL ON A UNIFORM GRID WITH RESPECT
TO SOBOLEV-TYPE INNER PRODUCT

Sharapudinov T. I.

Fourier series in Chebyshev polynomials orthogonal on a uniform grid with respect to Sobolev inner product are considered in the paper. Their connection with mixed series in Chebyshev polynomials orthogonal on uniform grid in the classical sense is clarified. Some approximative properties of these series are examined.

Key words: orthogonal polynomials, Chebyshev polynomials, Sobolev inner product, Fourier series, orthogonality on a grid.

Вниманию авторов

«Математический форум (Итоги науки. Юг России)» — научное периодическое издание, выходящее не менее одного раза в год. Сборник издается Южным математическим институтом — филиалом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в сборник принимаются материалы региональных, российских и международных форумов (конференций, симпозиумов, семинаров и т. д.), освещающие новейшие достижения современной математической науки. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в другом издательстве, редколлегией не рассматриваются. При отборе материалов для сборника определяющим является высокий научный уровень. Поступившие в редакцию статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо предоставить на английском и русском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи. В нем должны быть указаны: для статей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листов (≈ 12 с. формата А5). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых

(вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в сборник статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взимается.

Авторские права на сборник в целом принадлежат Южному математическому институту — филиалу ВНЦ РАН и Редколлегии журнала, которые обладают исключительным правом получать и распределять любые платежи, связанные с переуступкой авторских прав на сборник.

АДРЕС РЕДАКЦИИ: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22

ТЕЛЕФОН: (8672) 53-84-62; ФАКС: (8672) 53-93-27

E-MAIL: rio@smath.ru

ЗАВ. РЕДАКЦИЕЙ: Кибизова В. В.

Научное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФОРУМ. Т. 10, ч. 1

**Исследования по математическому анализу,
дифференциальным уравнениям и их приложениям**

Редакторы серии:

Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев

Редактор тома:

А. В. Абанин

Утверждено к печати

Ученым советом ЮМИ ВНЦ РАН

Компьютерная верстка: М. С. Биченова, М. У. Вазагаева

Зав. редакцией: В. В. Кибизова

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИИ № ФС 77-54423 от 10 июня 2013 г.

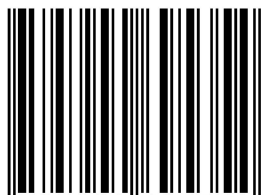
Подписано в печать 28.09.2016. Формат бумаги 60×84¹/₁₆.

Усл. п. л. 14,88. Тираж 200 экз.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.

362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

ISBN 978-5-904695-35-4



9 785904 695354