

ЮМИ

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTRE OF THE RUSSIAN FEDERATION
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE NORTH OSSETIAN STATE UNIVERSITY
SOUTH FEDERAL UNIVERSITY

REVIEW OF SCIENCE • THE SOUTH OF RUSSIA

MATHEMATICAL FORUM

V o l u m e 8
Part 2

STUDIES ON
DIFFERENTIAL EQUATIONS,
MATHEMATICAL MODELING,
AND PROBLEMS IN
MATHEMATICAL EDUCATION

Vladikavkaz
2014

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ
НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
СЕВЕРО-ОСЕТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Л. ХЕТАГУРОВА
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И Т О Г И Н А У К И • Ю Г Р О С С И И

С Е Р И Я

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФОРУМ

Т о м 8

Часть 2

ИССЛЕДОВАНИЯ

ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ,
МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ
И ПРОБЛЕМАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБРАЗОВАНИЯ

Владикавказ
2014

ББК 22.161.6
УДК 517.9
М34

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ:

д. ф.-м. н. Ю. Ф. Коробейник,
д. ф.-м. н. А. Г. Кусраев

РЕДАКТОР ТОМА:

д. ф.-м. н. А. О. Ватульян,
д. пед. н. И. Е. Малова,
д. ф.-м. н. Ю. А. Устинов

Математический форум. Т. 8, ч. 2. Исследования по дифференциальным уравнениям, математическому моделированию и проблемам математического образования.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2014.—346 с.—(Итоги науки. Юг России).

Настоящий сборник представляет собой вторую часть восьмого тома серии «Математический форум», в который вошли материалы Международной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.), посвященной 60-летию д. ф.-м. н., проф. А. Г. Кусраева.

Mathematical Forum. Vol. 8, Part 2. Studies on Differential Equations, Mathematical Modeling, and Problems in Mathematical Education.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—346 p.—(Review of Science: The South of Russia).

This collection is Part II of the eighth volume in “Mathematical Forum” series and comprises proceedings of the International Conference “Order Analysis and Related Problems of Mathematical Modeling” (Vladikavkaz, Russia, July 14–20, 2013) in honor of Professor Anatoly Kusraev on the occasion of his 60th birthday.

ISBN 978-5-904695-21-7
ISBN 978-5-904695-23-1 (ч. 2)

© Южный математический институт
ВНИЦ РАН и РСО-А, 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник представляет собой вторую часть восьмого выпуска серии «Математический форум», которая издается совместно Южным математическим институтом Владикавказского научного центра Российской академии наук и факультетом математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета. Цель издания — укрепление позиций фундаментальной математики и интеграция научных исследований на Юге России, расширение и углубление научных контактов математиков региона с российскими и зарубежными коллегами.

В сборник вошли материалы X Международной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования», состоявшейся в высокогорном курорте «Цей» Республики Северная Осетия-Алания с 14 по 20 июля 2013 г. (По традиции в четные годы название конференции меняется — «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование»). Организаторами конференции выступили, как и в прежние годы, Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН (г. Владикавказ), Южный федеральный университет (г. Ростов-на-Дону), Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса (г. Шахты Ростовской области) и Волгодонский институт сервиса (филиал) ЮРГУЭС (г. Волгодонск). Проведение конференции осуществлялось при поддержке гранта РФФИ, проект № 13-01-06818-мол_г.

В работе конференции приняли участие специалисты по дифференциальным уравнениям, математическому моделированию и вопросам математического образования из разных городов России, а также зарубежья.

Вторая часть восьмого тома содержит статьи, посвященные дифференциальным и интегральным уравнениям, математическому моделированию и вопросам математического образования.

Открывается вторая часть статьями, написанными на основе пленарных докладов.

В статье В. А. Батищева, А. А. Поддубного, Ю. А. Устинова представлен краткий обзор результатов, полученных авторами в области математического моделирования спиральных течений в крупных и периферийных артериальных сосудах, детально изложена модель винтового движения крови в аорте, для описания винтовых движений крови в периферийных толстостенных сосудах, приведены основные соотношения одномерной математической модели.

В статье А. О. Ватульяна и Р. Д. Недина представлен обзор и проведен сравнительный анализ различных линейаризованных теоретических моделей предварительных напряжений, представлены постановки задач для пластин, рассмотрена обратная задача о восстановлении неоднородного плоского напряженного состояния в тонкой пластине на основе акустического метода.

В статье С. С. Кутателадзе обсуждены некоторые современные тенденции в математике и ее преподавании.

Статья Е. И. Смирнова посвящена анализу ключевых факторов совершенствования профессиональной подготовки и деятельности педагога в условиях модернизации образовательного пространства. Основное внимание уделяется современным образовательным технологиям фундирования опыта личности, наглядного моделирования объектов, явлений и процессов в математической деятельности, а также использованию информационных и коммуникационных средств.

В статье А. Б. Шабата рассмотрена обратная спектральная задача для уравнений второго порядка с общей квадратичной зависимостью от спектрального параметра, построен класс потенциалов, для которых формулы квазиклассического приближения являются точными.

Далее представлены статьи по секциям.

В секции дифференциальных и интегральных уравнений представлены 10 докладов.

В работе С. Н. Асхабова исследовано дискретное уравнение типа свертки с нечетностепенной нелинейностью, методом потенциальных монотонных операторов доказано, что это уравнение имеет единственное решение в весовом вещественном пространстве числовых последовательностей и это решение может быть найдено градиентным методом.

В работе В. Б. Васильева рассмотрены многомерные уравнения свертки в конусе, с использованием концепции волновой фактори-

зации эллиптического символа оператора описана структура общего решения такого уравнения в пространствах Соболева.

В работе К. А. Волосова, Л. В. Пугиной, А. К. Волосовой обсуждена возможность записи широкого класса нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными как системы функциональных линейных алгебраических уравнений, на основе которого строится метод построения точных и приближенных решений широкого класса гиперболических, эллиптических и параболических линейных уравнений с переменными коэффициентами и нелинейных уравнений с частными производными с переменными коэффициентами; метод применен также к уравнениям с частными производными высоких порядков, в частности, к уравнению Кортевега де Фриза.

В работе Н. С. Ивлевой и В. Б. Левенштама рассмотрена эволюционная система полулинейных дифференциальных уравнений в частных производных с высокочастотными младшими членами, среди которых имеются пропорциональные высокой частоте; для нее обоснован метод усреднения Крылова — Боголюбова.

В работе К. И. Ильина, А. Б. Моргулиса изучены спектры краевых задач, возникающих при линеаризации уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости вблизи безвихревого течения в кольцевой области.

В работе Л. Ю. Плиевой изучены интегралы типа Коши с весами Якоби на отрезке $[-1, 1]$, построены интерполяционные квадратурные формулы для приближенного вычисления интегралов типа Коши и их производных, представлены оценки погрешности.

В работе С. В. Ревинной построена длинноволновая асимптотика при анализе задачи устойчивости двумерных сдвиговых течений, периодических по одной из пространственных переменных и условно периодических по другой; показано, что рекуррентные формулы для членов асимптотики, полученные в периодическом случае, переносятся на случай условно-периодической внешней силы.

В работе Л. И. Сазонова для стационарной системы Навье — Стокса исследованы вопросы существования решений в пространствах суммируемых функций и изучено их асимптотическое поведение на бесконечности.

В работе О. В. Филипповой рассмотрена задача Коши для управляемой импульсной системы с запаздыванием, имеющей фазовые ограничения по управлению и содержащей параметр; показано, что

если множество решений этой задачи Коши при каком-либо значении параметра априорно ограничено, то оно будет априорно ограничено при всех значениях параметра из некоторой окрестности этой точки.

В работе Ш. С. Хубежты представлено применение квадратурных формул для вычисления сингулярных интегралов типа метода дискретных особенностей высокого порядка точности к решению некоторых задач для упругих тел с трещинами; в ряде случаев даны равномерные оценки погрешности.

В секции математического моделирования были представлены следующие 6 докладов.

В работе С. Н. Алехина, С. П. Петросова, И. В. Фетисова, В. Г. Фетисова представлено исследование проблемы моделирования вибраций стиральных машин барабанного типа и перспективах снижения их уровня.

В работе О. И. Горбаневой рассмотрена система, состоящая из верхнего и нижнего уровней, причем каждый из двух участников имеет общесистемные и частные интересы, а доход от общей деятельности делится между двумя уровнями в равных долях; задача представлена в виде иерархической игры, в которой находилось равновесие по Штакельбергу.

В работе М. Ф. Мицика, В. Г. Фетисова предлагается метод определения геометрии крайних линий тока и параметров бурного потока при его свободном растекании с учетом сил сопротивления.

В работе И. Д. Музаева изучена задача о совместных сейсмических колебаниях системы, состоящей из двух слоев грунта, фундаментного массива и высотного сооружения.

В работе И. Д. Музаева и Н. И. Музаева представлена математическая модель гидродинамических процессов в системе стратифицированный водоем — селективное водозаборное устройство при заборе воды из внутреннего пространства.

В работе Н. С. Орловой исследован процесс виброкипения гранулированного материала с использованием различных математических моделей (двухжидкостная модель на основе закона Дарси и гидродинамическая модель гранулярного газа); даны рекомендации о выборе режимов виброкипания, обеспечивающих наибольшую площадь поверхности контакта фаз.

Среди докладов, представленных на секции, посвященной вопросам математического образования, в сборник включены следующие.

В работе В. С. Абатуровой рассматривается актуальная проблема школьного математического образования — формирование научного стиля мышления школьников в ходе обучения математике и одно из средств ее решения — применения технологии математического моделирования при обучении школьников решению задач практико-ориентированного и междисциплинарного характера.

В статье Ю. А. Дробышева представлен опыт использования российскими математиками и методистами элементов истории математики в обучении учащихся, проанализирован период с XVIII по начало XX века, выделены основные этапы использования принципа историзма и представлены их характеристики.

В работе В. Н. Дубровского рассматриваются способы визуализации соотношений в динамических моделях на основе программной образовательной среды «Математический конструктор», которые позволяют в ходе наблюдения за поведением моделей строить гипотезы об их свойствах.

Статья В. Н. Дятлова посвящена обсуждению трехчастной формы организации учебного материала по математике, включающая теоретическую, технологическую и практическую части. Основное внимание уделено технологической части как промежуточной между теорией и практикой. На конкретном материале показаны способ организации технологической части, ее существенность и эффективность.

В статье М. Д. Макаренко обсуждено понятие плохо поставленной задачи, приведен разбор такого типа задач на конкретном примере, проанализировано влияние анализа плохо поставленных задач на развитие практического мышления, обосновано их использование в курсах обучения как школьников, так и студентов.

В статье И. Е. Маловой обсуждены три ситуации, в которых происходит обучение или самообучение формулированию вопросов: постановка учебных целей, анализ математического содержания, анализ процесса достижения целей.

В статье В. П. Оди́нца представлены материалы о работе известного российского ученого-математика и педагога Г. М. Фихтенгольца в ЛГПИ им. А. И. Герцена с 1918 по 1949 гг.

В статье М. А. Холодной обсуждены пути интеллектуального развития учащихся, в частности, разработка учебников и учебных материалов нового типа, специально сконструированных развивающих учебных текстов.

Авторы и редакторы настоящего издания выражают глубокое уважение и свою благодарность профессору Анатолию Георгиевичу Кусраеву, прекрасному математику-профессионалу, организатору науки и образования на Северном Кавказе, сплотившем в стенах Южного математического института специалистов в различных областях математики и математического моделирования из разных регионов нашей страны, внимательному и чуткому человеку, и желают новых творческих успехов, талантливых учеников и последователей.

*А. О. Ватульян,
И. Е. Малова,
Ю. А. Устинов*

АНАТОЛИЮ ГЕОРГИЕВИЧУ КУСРАЕВУ — 60 ЛЕТ¹



14 февраля 2013 г. — день 60-летия Анатолия Георгиевича Кусраева, выдающегося ученого и организатора науки.

А. Г. Кусраев принадлежит к научной школе академика Л. В. Канторовича и внес выдающийся вклад в пограничные разделы функционального анализа и оптимизации.

Широкий резонанс и мировое признание получили исследования А. Г. Кусраева по векторной двойственности, субдифференциальному исчислению, теории мажорированных операторов и другим актуальным разделам порядкового анализа.

А. Г. Кусраев — один из мировых лидеров в области применения методов математической логики к задачам анализа. Используя технику булевозначного анализа, он дал характеристики новых классов банаховых пространств и операторных алгебр, построил новые мощные версии векторного интегрирования, доказал реализационные теоремы нового типа, связанные с эффектами цикличности структуры идемпотентов.

Первоклассные результаты получены А. Г. Кусраевым в сфере оптимизации, где его техника общего положения дала возможность существенно дополнить признаки оптимальности в экстремальных задачах.

А. Г. Кусраев внес достойный вклад в развитие науки на Северном Кавказе. Он является основателем и бессменным директором Южного математического института РАН и Правительства Республики Северная Осетия-Алания, организатором и бессменным председателем Владикавказского научного центра, создателем и бессменным главным редактором научных журналов «Вестник ВНЦ» и «Владикавказский математический журнал». Благодаря личным усилиям А. Г. Кусраева наука юга России получила новые возможности для своего плодотворного развития.

¹Статья опубликована в журнале «Сибирские электронные математические известия» (2013, Том 10, С. А.13–А.29).

Постоянные научные связи соединяют А. Г. Кусраева с Институтом математики им. С. Л. Соболева СО РАН и Новосибирским государственным университетом, где он прошел путь от студента до ведущего сотрудника и профессора. Коллеги и друзья Анатолия Георгиевича сердечно поздравляют его с юбилеем, желают ему успехов на всех направлениях его многогранной деятельности и надеются на новые добрые встречи и совместные дела.

*С. К. Водопьянов, Е. И. Гордон, А. Е. Гутман, А. В. Коптев,
С. С. Кутателадзе, С. А. Малюгин, Ю. Г. Решетняк*

Пленарные доклады

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ
КРОВИ В АРТЕРИАЛЬНЫХ СОСУДАХВ. А. Батищев, А. А. Поддубный,
Ю. А. Устинов

Дается краткий обзор результатов, полученных авторами в области математического моделирования спиральных течений в крупных и периферийных артериальных сосудах. Наиболее подробно изложена модель винтового движения крови в аорте. Для описания винтовых движений крови в периферийных толстостенных сосудах приведены основные соотношения одномерной математической модели.

Ключевые слова: упругая оболочка, спиральные волны, стационарный поток, пограничный слой.

Введение

Математическое моделирование пульсового движения крови в артериальных сосудах берет свое начало в работе [1], в которой построена одномерная математическая модель распространения гармонических волн в системе «стенка сосуда — кровь», при этом стенка сосуда рассматривается как тонкая упругая изотропная оболочка, напряженно деформированное состояние (НДС) которой описывается безмоментной теорией, а кровь — как идеальная жидкость. Эти предположения в конечном итоге приводят к уравнениям

$$c_0^2 \partial_z^2 p - \partial_t^2 p = 0, \quad \rho \partial_t v - \partial_z p = 0, \quad c_0^2 = \frac{G_0}{\rho}, \quad G_0 = \frac{hE}{2a}. \quad (0.1)$$

Здесь ∂_z , ∂_t — частные производные по продольной координате z и времени t соответственно, h — толщина стенки сосуда, a — радиус ее срединной поверхности, p — давление, v — среднее значение по сечению скорости крови, E — модуль Юнга. Приведенная выше формула для жесткости на «раздувание» G_0 справедлива при условии, что $h \ll a$.

Заметим, что в иностранной литературе скорость волны, определяемая формулой (0.1), принято называть скоростью волны Моуэнса — Кортвега [2].

Существуют и другие одномерные математические модели, основанные на представлениях: сосуд — упругая трубка постоянного сечения, кровь — идеальная жидкость. Одна из таких моделей достаточно подробно описана в [2, разд. 2.1.4], в [3] аналогичная модель применяется для описания пульсирующего течения в кровеносных капиллярах. В качестве основных полевых характеристик в этих моделях используются площадь поперечного сечения $S(t)$ и давление $p = P(S) + N(S, \partial_t S)$. Нелинейность последней модели позволяет моделировать эффекты типа «ударной волны».

В середине прошлого века для исследования влияния вязкости крови на характер ее пульсового движения были построены математические двухмерные модели, в которых стенка сосуда моделировалась тонкой оболочкой из упругого или вязкоупругого материала, а движение крови — линейными уравнениями Навье — Стокса [2, разд. 2.2]. Из этих моделей вытекало, что все полевые характеристики (скорость крови, давление, смещение стенки сосуда и возникающее в ней напряженно-деформированное состояние) описываются двумя типами гармонических волн. Волны первого типа практически не имеют дисперсии и значение отвечающей им фазовой скорости близко к значению c_0 , а значения усредненных по диаметру сосуда давления и скорости потока крови близки к значениям скорости и давления, вытекающих из описанной выше одномерной теории. Волны второго типа имеет более высокую фазовую скорость, а распределение амплитуды продольной скорости по радиусу имеет характер погранслоя, локализованного у стенки сосуда.

В конце прошлого и начале текущего столетий появились сообщения [4, 5] о винтовых потоках крови в артериальной системе человека и животных. Здесь уместно отметить, что еще в семнадцатом веке W. Harvey [6] наблюдал закрученное движение крови в сердце.

В работе [4] на основе анализа экспериментальных данных установлено, что закрученное течение крови возникает в левом желудочке сердца в диастолу и усиливается в систолу (диастола и систола — две фазы сердечного цикла). В диастолу клапан, отделяющий отверстие между левым желудочком и аортой, закрыт, а клапан между левым предсердием и левым желудочком открыт. В систолу в результате сокращения мышц левого желудочка под давлением крови первый клапан открывает отверстие, а второй — перекрывает. Основной причиной возникновения винтового потока является структура внутренней поверхности стенки левого желудочка, которая не является

гладкой, а гофрирована таким образом, что при сокращении желудочка (систолы) уже в нем возникает закрученный поток. В этой работе отсутствует математическая модель, описывающая дальнейшее движение крови в аорте.

В работе [5] причина, порождающая винтовое движение крови, сформулирована следующим образом: «теоретически и экспериментально обнаружено неизвестное ранее универсальное явление образования закрученного потока биологических сред в транспортных каналах человека и животных на примере сердечно-сосудистой, пищеварительной и мочевыделительной систем, обусловленное возникновением за счет трения соответствующих этому движению двух составляющих касательных напряжений при взаимодействии среды с волной скручивания, возбуждаемой в стенке канала сокращением спирально ориентированных мышечных и эластических элементов».

В связи с вышесказанным остановимся вкратце на описании структуры стенок артериальных сосудов.

Накопленный обширный экспериментальный материал [2], позволяет рассматривать стенки артериальных сосудов, как многослойные полые цилиндры, материал которых обладает анизотропными вязко-упругими свойствами. Согласно этим работам стенки всех артерий имеют сходное строение и состоят из одних и тех же материалов. Соотношения между материалами в стенках сосудов разных отделов системы кровообращения различны. В [6] выделены три основных типа артериальных сосудов: эластического, смешанного и мышечного. Традиционно стенка делится на три слоя: внутреннюю (интима), среднюю (медия) и наружную (адвентиция). Принято считать, что влияние интимы и адвентиции на механические свойства стенки незначительны, в силу чего упругие свойства стенки сосуда определяются медией. Медия состоит из множества концентрических слоев упругой ткани: эластина и мышечной ткани, оплетенных тончайшими волокнами коллагена. Полости между слоями заполнены различными губчатыми тканями и жидкостью. Относительная концентрация мышечной ткани и эластина определяет тип сосуда. Согласно [2] все мелкие артериальные сосуды относятся к мышечному типу. Средний слой этих сосудов почти полностью состоит из *спирально расположенных* гладкомышечных клеток, размещенных также в виде слоев с незначительным количеством коллагена и эластина. Согласно [6] к этому же типу относятся все артерии головного мозга, а также подвздошная, поверхностная височная, плечевая

и ряд других артерий. Угол между направлением волокон и продольной осью сосуда согласно различным источникам может иметь значения в интервале 30° – 80° . На эластин, коллаген и мышечную ткань приходится около 50% материала стенки.

Возвращаясь к приведенному выше заявлению об «открытии нового явления» авторами работы [4] (заметим, что Российская Академия Естествознания действительно зарегистрировала описанное явление как «открытие»), следует отметить, что авторы правильно описали физическую природу, порождающую пристеночное винтообразное движение крови, но построенная ими математическая модель не корректна с точки зрения описания таких движений.

В данном сообщении основное внимание уделено краткому изложению математической модели, описывающей винтовое движение в аорте, возникающее сразу после открытия клапана левого желудочка. Что касается математической модели, описывающей пристеночное винтового движения крови, то она достаточно подробно описана в [9, 10] и излагалась в докладе на аналогичной конференции в 2008 г. Ниже будет дано краткое описание одномерных модели для толстостенных артериальных сосудов.

1. Математическая модель движения крови в аорте

Рассматривается задача о распространении спиральных волн малой амплитуды в аорте на фоне стационарного потока вязкой жидкости. Стенка аорты моделируется тонкой упругой изотропной цилиндрической оболочкой кругового поперечного сечения, с радиусом срединной поверхности a и толщиной стенки h , напряженно-деформированное состояние (НДС) которой описывается соотношениями безмоментной теории оболочек [2, гл. 2].

Движение жидкости исследуется на основе уравнений Навье — Стокса

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ — вектор скорости, p — давление, ρ — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости, (r, θ, z) — цилиндрические координаты.

Рассматривается осесимметричная задача, когда вектор скорости, давление и все полевые характеристики оболочки (смещения точек срединной поверхности, деформации и усилия) не зависят от окружной координаты θ . Течение жидкости периодически по времени

с заданным периодом $T = 1/\omega$, где ω — круговая частота сердечного цикла. При расчетах принималось $\omega = 4\pi$, что отвечает пульсу собаки — два удара в секунду.

Задача приводится к безразмерному виду. В качестве масштабов длины, времени, скорости, давления и смещений точек оболочки приняты соответственно следующие параметры: a , T , U , ρU^2 , $T \cdot U$. Здесь U — максимальное значение скорости частиц жидкости в поле длинных продольных волн.

Уравнение для окружной компоненты скорости в безразмерных переменных приводится к виду

$$\partial_t v_\theta + R(v_r \partial_r v_\theta + v_z \partial_z v_\theta + v_r v_\theta / r) = \varepsilon_\nu^2 (\nabla^2 v_\theta - v_\theta^2 / r^2). \quad (1)$$

Здесь $R = U/a\omega$, $\varepsilon_\nu = \sqrt{\nu/\omega^2 a}$. Предполагается, что параметр ε_ν принимает малые значения. Согласно [2] для аорты собаки $\varepsilon_\nu \simeq 1/13$.

Из трех уравнений движения оболочки приведем здесь только одно, которое описывает крутильные ее колебания. Если обозначить через u_θ нормированную (безразмерную) компоненту вектора смещений, то с учетом гидродинамического воздействия на срединную поверхность оболочки ($r = 1$) имеем

$$\begin{aligned} \partial_z^2 u_\theta - \varepsilon_k^2 m \partial_t^2 u_\theta &= \varepsilon_k^2 \varepsilon_\nu^2 (1 + \nu_0) (\partial_r v_\theta - v_\theta / r), \\ v_\theta &= \partial_t u_\theta, \quad \varepsilon_k^2 = 2a^3 \omega^2 \rho / hE, \quad m = \frac{h\rho_0}{\rho a} (1 + \nu_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь E , ν_0 , ρ_0 — модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность материала оболочки соответственно. При расчетах коэффициенту Пуассона придавалось значение 0.5, параметр ε_k мал, поскольку имеет порядок 10^{-2} .

2. Асимптотические разложения

Решение задачи, описывающей спиральные волны, представим в виде суммы трех вектор-функций

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0(r, z) + \mathbf{V}_1(r, z_1, t) + \mathbf{V}_2(r, z, z_1, t). \quad (3)$$

Здесь $z_1 = \varepsilon z$ — «медленная» осевая координата, вектор $\mathbf{V}_1 = (v_r, v_\theta, v_z, p, u_r, u_\theta, u_z)$ — описывает длинные волны, зависящие только от медленной осевой координаты, радиальной координаты и времени, вектор $\mathbf{V}_2 = (w_r, w_\theta, w_z, q, u_z^1, u_\theta^1, u_z^1)$ — описывает короткие

волны малой амплитуды. Заметим, что первые четыре компоненты векторов символизируют гидродинамические полевые характеристики, а именно, координаты вектора скорости и давление, а последние три — координаты вектора смещение срединной поверхности стенки сосуда. В работах [9, 10] стационарный поток жидкости в кровеносном сосуде моделируется течением Пуазеля. В связи с этим, предположим, что стационарное течение жидкости определяется полем скоростей, у которого поперечная и окружная компоненты отсутствуют, а осевая компонента изменяется квадратично по радиальной координате

$$v_z = V(r) = \alpha_0(1 - r^2), \quad p = c - 4\varepsilon_\nu^2 \alpha_0 R z / R.$$

Здесь $\alpha_0 = U_p/U$, $U_p = 2Q/\pi a^2$, Q — средний по времени расход жидкости в сосуде. Отметим, что стационарное решение точно удовлетворяет уравнениям Навье — Стокса.

Распространение длинных продольных волн $\mathbf{V}_1$ в жидкости, заполняющей круговой цилиндр, ограниченный тонкой упругой изотропной оболочкой изучалось во многих работах, начиная со второй половины девятнадцатого века. О некоторых таких исследованиях шла речь выше. В случае оболочки с винтовой анизотропией, которая присуща артериальным сосудам мышечного типа, эта проблема исследована в [8–10], где показано, что винтовая анизотропия приводит к возникновению длинных спиральных волн. Однако, если длинные продольные волны заполняют все поперечное сечение цилиндра, то длинные спиральные волны локализованы только в тонком слое вблизи стенки цилиндра.

Предположим, что амплитуда длинных спиральных волн мала и имеет порядок $O(\varepsilon_k)$. Асимптотические разложения решений, описывающих длинные волны, представим в виде

$$\begin{aligned} v_z &= V(r) + v_{z0} + \varepsilon_k v(z_1) + \dots, \\ v_\theta &= \varepsilon_k v_\theta + \dots, \\ v_r &= \varepsilon_k v_{r1} + \dots, \\ u_z &= U_z + u_{z1} + \varepsilon_k v_{z1} + \dots \end{aligned} \tag{4}$$

Остальные компоненты вектора $\mathbf{V}_1$ отыскиваются в виде аналогичных разложений. Главные члены этих разложений можно определить в виде отрезков рядов Фурье по времени, задав аппроксимацию сердечного «систола–диастола», как это сделано, например, в [9, 10].

Покажем, что длинные спиральные волны локализованы только в пограничном слое вблизи стенки сосуда и, в следствии условия прилипания, индуцируются упругими волнами, распространяющимся в стенке. Функции $v_{\theta 0}$, $u_{\theta 0}$ будем отыскивать в виде:

$$v_{\theta 0} = V_{\theta} \exp(i(k_c z_1 - nt)), \quad u_{\theta 0} = U_{\theta} \exp(i(k_c z_1 - nt)).$$

Аналогичное выражение записываем и для компоненты. Функцию $v_{\theta 0}$ и комплексное волновое число k_c разлагаем в асимптотические ряды по степеням малого параметра ε_{ν} . Вводя преобразование растяжения $s_1 = (1 - r)\varepsilon_{\nu}$ и применяя метод пограничного слоя к уравнениям (1), (2), получаем следующие выражения для главных членов асимптотических разложений:

$$V_{\theta} = \exp(\beta s_1) + O(\varepsilon_{\nu}), \quad u_{\theta 0} = U_{\theta} \exp(i(k_c z_1 - nt)),$$

$$k_c = n \left(1 + \varepsilon_{\nu} \frac{(1+i)a\rho}{2\rho_0 h \sqrt{2n}} + O(\varepsilon_{\nu}^2) \right) \sqrt{2n} + O(\varepsilon_{\nu}^2) \sqrt{\frac{(1+\nu_0)h\rho_0}{a\rho}}.$$

Здесь $\beta = (i-1)(n/2)^{1/2}$, $U_{\theta} = iV_{\theta}/n$.

Итак, длинные спиральные волны локализованы только вблизи стенки сосуда в слое, толщиной порядка $O(\varepsilon_{\nu})$. Упругие свойства оболочки определяют их фазовую скорость, а вязкость жидкости — декремент затухания. Они обладают слабой дисперсией, а главный член асимптотического разложения фазовой скорости этих волн выражается следующей формулой

$$c_2 = \sqrt{\frac{h\mu}{2a\rho}}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu_0)}.$$

Короткие спиральные волны. В отличие от длинных спиральных волн, короткие спиральные волны заполняют все поперечное сечение цилиндра. Эти волны описываются окружной компонентой w_{θ} вектора $\mathbf{V}_2$.

Предположим, что компонента w_{θ} имеет порядок $O(\varepsilon_{\nu})$, т. е. имеет тот же порядок малости, что и v_{θ} . Покажем, что короткие спиральные волны слабо зависят от упругих свойств оболочки, а механизмом их переноса является стационарный поток. Порядки остальных компонент вектора $\mathbf{V}_2$ находятся при анализе порядков всех

членов системы уравнений Навье — Стокса и динамических уравнений оболочки. Асимптотические разложения компонент вектора $\mathbf{V}_2$ при $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$ представим в виде

$$w_\theta = \varepsilon_k w_{\theta 1} + \dots, \quad w_z = \varepsilon_k^2 w_{z1} + \dots, \quad u_\theta^1 = \varepsilon_k^3 + \dots \quad (4)$$

Остальные компоненты разлагаются в аналогичные ряды, при этом все коэффициенты разложений зависят от переменных z, z_1, r, t .

После подстановки разложений (3), (4) в динамические уравнения теории оболочек и уравнения Навье — Стокса, после группировки коэффициентов при одинаковых степенях ε_k главного члена асимптотического разложения $w_{\theta 1}$, получаем краевую задачу, учитывающую конвективный перенос стационарным потоком и длинными продольными волнами

$$\partial_t w_{\theta 1} + RV_z \partial_z w_{\theta 1} = \varepsilon_\nu^2 (\nabla^2 w_{\theta 1} - w_{\theta 1}/r^2), \quad V_z = v_{z0}(r, z_1, t), \quad (5)$$

$$w(0, z, t) = 0, \quad w(1, z, t) = 0, \quad w_{\theta 1} \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty). \quad (6)$$

Заметим, что «медленная переменная» z_1 в выражениях (5), (6) выполняет роль параметра. По переменной t выполняется условие периодичности. Краевое условие при $r = 1$ означает выполнение условия прилипания на границе жесткого цилиндра и не учитывает упругих свойств оболочки в главном приближении. Упругие свойства оболочки проявляются у коротких волн только в высших членах асимптотики.

Построим решение задачи (5), (6) в виде отдельных мод. Заметим, что коэффициент в конвективном члене в уравнении (5) (второе слагаемое в левой части этого уравнения) зависит только от медленной осевой переменной z_1 и не зависит от переменной z . Это обстоятельство позволяет разделить переменные, отыскивая решение в виде

$$w_1 = W_{\theta 1}(r, z_1, t) \exp(ikz). \quad (7)$$

После подстановки (7) в соотношения (5), (6) и очевидных преобразований получим краевую задачу относительно функции $W_{\theta 1}$, которая получается заменой производной ∂_z на множитель ik .

Длинные продольные волны при малых значениях параметра имеют характер пограничного слоя вблизи оболочки. Функцию v_{z0} представим в виде

$$v_{z0} = v_{z0}^0(z_1, t) + h_{z0}(t, z_1, s_1).$$

Здесь первое слагаемое v_{z0}^0 описывает осевую компоненту скорости вне области пограничного слоя, а функция h_{z0} локализована в пограничном слое вблизи оболочки и устраняет невязку в краевом условии при $r = 1$. Функция v_{z0}^0 не зависит от радиальной координаты r , а ее среднее по времени значение равно нулю. В результате, функцию $W_{\theta 1}$ можно представить в виде

$$W_{\theta 1} = Q(t, z_1)W, \quad Q = \exp\left(-ikR \int v_{z0}^0(t, z_1) dt\right). \quad (8)$$

Это преобразование позволяет исключить из уравнения для функции W «внешнее» решение v_{z0}^0 .

Положим $W = w + H$, где w определяет значение функции W вне области пограничного слоя, а H — малая поправка, которая определена в области пограничного слоя и исчезает при выходе из этого слоя. Учитывая, что вне области пограничного слоя функция $h_{z0} = 0$, получаем уравнению для функции w

$$\frac{\partial w}{\partial t} + ikRV(r)w = \varepsilon_\nu^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) w \right). \quad (9)$$

Краевые условия для функции w берем те же, что и в задаче (5).

Разделяя переменные, решение представим в виде $w = F(r) \exp(-int)$. Амплитуда $F(r)$ и комплексное волновое число k находятся из краевой задачи на собственные значения

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{in}{\varepsilon_\nu^2} + \frac{ikR_p(1-r^2)}{\varepsilon_\nu^2} \right) F = 0, \quad (10)$$

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 0.$$

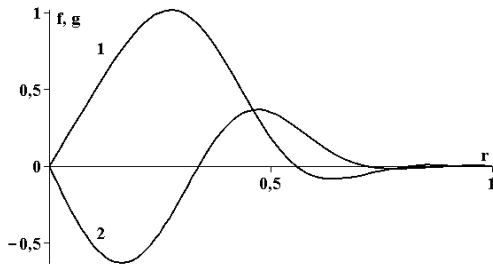
Здесь $R_p = U_p/(a\omega)$.

Задача (10) решалась численно. При $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$ вблизи оси цилиндра возникает тонкий критический слой, в котором локализована функция F . При каждом фиксированном значении индекса n найдено счетное число собственных функций $F_{n,m}$ и собственных чисел $k_{n,m}$, где $n, m = 1, 2, 3, \dots$

Расчеты спиральных мод. Приведем решение задачи (10) в виде отдельных спиральных мод

$$w_{\theta 1} = Q_{n,m}(t, z_1) (F_{n,m}(r) + H_{n,m}) \exp(i(k_{n,m}z - nt)). \quad (11)$$

Здесь $n, m = 1, 2, 3, \dots$. Функции $Q_{n,m}$ находятся по формуле (8), в которой Q, k следует заменить на $Q_{n,m}, k_{n,m}$ соответственно. Функция $F_{n,m}$ описывает спиральную моду вне области пограничного слоя. Функция $H_{n,m}$ — малая поправка, локализованная в пограничном слое D_S и исчезающая вне D_S . Задача (10) решалась численно методом пристрелки. Интегрирование проводилось от стенки к оси цилиндра с использованием метода Рунге-Кутты. Вблизи оси цилиндра проводилось сращивание численного решения со степенной асимптотикой. Комплексное волновое число и собственную функцию представим в виде $k_{n,m} = k_r + ik_i$, $F_{n,m} = g_{n,m} + if_{n,m}$. Численные расчеты показали, что декремент затухания k_i и волновое число k_r монотонно убывают с ростом параметра R_p (с ростом скорости стационарного потока). При увеличении значений R_p параметры k_i и k_r в ноль не обращаются. При $m = 1, n \geq 1$ с ростом индекса n увеличиваются значения параметров k_r и k_i , а функции $f_{n,m}$ и $g_{n,m}$ локализуются вблизи оси цилиндра. Локализация усиливается с уменьшением параметра ε_ν . Для параметров $m = 1, n = 3, R_p = 2, \varepsilon_\nu = 1/13.116$ приведем численные значения $k_{3,1} = 1.6832 + i0.2192$. На фиг. 1 изображена зависимость функций $g_{3,1}$ (кривая 1) и $f_{3,1}$ (кривая 2) от радиальной координаты r при $n = 3, m = 1$. Отметим, что с ростом индекса m число нулей функций $f_{n,m}$ и $g_{n,m}$ увеличивается.



Фиг. 1. Распределение функций $f_{3,1}, g_{3,1}$ по сечению цилиндра.

Физические и геометрические параметры, выбранные для расчетов, соответствуют аорте собаки [2]:

$$\rho = 1.05 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad a = 0.74 \text{ cm}, \quad h = 0.06 \text{ cm}, \quad \nu = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega = 4\pi \text{ c}^{-1}, \quad \rho_0 = 1.15 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad E = 490.5 \text{ kN/m}^2.$$

Окрестность критического слоя. При исчезающей вязкости часть спиральных мод локализуется вблизи оси цилиндра. В этом случае для мод $m = 1$, $n \geq 1$ возникает вязкий критический слой с толщиной порядка $O(\sqrt{\varepsilon_\nu})$. При выходе из этого слоя спиральные моды затухают по экспоненциальному закону. Асимптотические разложения решений задачи (10) строятся в виде рядов по степеням параметра ε_ν :

$$F = F_0(s) + \varepsilon_\nu F_1(s) + \dots, \quad k = k_0 + \varepsilon_\nu k_1 + \dots$$

Здесь введено преобразование растяжения $s = r/\sqrt{\varepsilon_\nu}$. Для функций F_0 , F_1 потребуем выполнения условия убывания при выходе из области критического слоя. В первом приближении находим $k_0 = nR_p$. Во втором приближении получаем краевую задачу на собственные значения для определения функции $F_0(s)$ и поправки k_1 . Расчеты приводят к асимптотической формуле

$$k = \frac{n}{R_p} + \varepsilon_\nu \frac{2\sqrt{2n}(1+i)}{R_p} + O(\varepsilon_\nu^2). \quad (12)$$

Полученная формула определяет асимптотическое поведение волнового числа k от параметров задачи и результаты расчета по этой формуле достаточно хорошо совпадают с результатами численного интегрирования.

Приведем асимптотическую формулу для функции $F_0(s)$ при больших значениях переменной

$$F_0(s) = As^{2m-1} \exp\left((i-1)s^2\sqrt{2n}/4\right) (1 + O(s^{-2})). \quad (13)$$

Постоянная A находится путем сращивания асимптотических и численных значений функции $F_0(s)$.

Оценка поправки. Функция $H_{n,m}$ в (11) локализована в пограничном слое вблизи стенки цилиндра и исчезает вне этого слоя. Приведем асимптотическую формулу для оценки этой функции при $m = 1$, $n \geq 1$

$$H = \delta(\varepsilon_\nu) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\nu}} \exp\left(-\frac{\sqrt{2n}}{4\varepsilon_\nu}\right)\right) \quad (\varepsilon_\nu \rightarrow 0).$$

Эта формула получена с учетом поведения функции h_{z0} в пограничном слое. Функция H убывает с ростом индекса n , с уменьшением вязкости жидкости и при выходе из области пограничного слоя.

Отметим, что в области пограничного слоя окружная компонента скорости v_θ для длинных спиральных волн имеет порядок $O(\varepsilon_k)$. Амплитуда коротких спиральных волн при $m = 1$, $n \geq 1$ имеет более высокий порядок малости $O(\varepsilon_k \delta(\varepsilon_\nu))$. Следовательно, в пограничном слое вблизи стенки цилиндра короткой спиральной модой можно пренебречь по сравнению с длинными спиральными волнами.

При $R_p = 0$ краевая задача (10) имеет точное решение. Из этого решения следует, что при отсутствии стационарного потока декремент затухания коротких спиральных волн имеет порядок $O(1/\varepsilon_\nu)$. В случае $R_p = 0$ и при наличии стационарного потока — декремент затухания мал и имеет порядок $O(\varepsilon_\nu)$. Следовательно, стационарный поток является механизмом переноса коротких спиральных волн, так как при отсутствии потока перенос спиральных мод длинными продольными волнами незначителен.

Квазистационарные моды. Короткие и длинные спиральные моды изменяют направление вращения жидкости как по сечению, так и со временем в течении систолы. Построим асимптотические разложения решений системы Навье — Стокса и динамических уравнений оболочки, которые в главном приближении не зависят от времени, а первая мода не изменяет направления вращения по пространственным координатам. Малые параметры ε_ν и ε_k свяжем по формуле $\varepsilon_k = c_\varepsilon \varepsilon_\nu^2$. Для параметров, соответствующих аорте собаки $c_\varepsilon \approx 3.44$. Асимптотические разложения, построенные с учетом пограничного слоя на стенке цилиндра, имеют вид

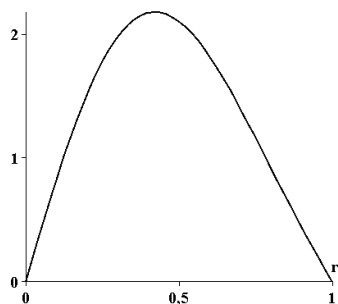
$$w_\theta = \varepsilon_k w_0 + \varepsilon_k^2 w_1 + \varepsilon_k^{5/2} H_0 + O(\varepsilon_k^3) \quad (\varepsilon_k \rightarrow 0). \quad (14)$$

Здесь w_0 , w_1 описывают решения вне области пограничного слоя, H_0 локализована в пограничном слое и компенсирует невязку, порождаемую функцией w_0 на поверхности оболочки, которая определяется из следующей краевой задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} - \frac{w_0}{r^2} - c_\varepsilon R V_0(r) \frac{\partial w_0}{\partial z_1} &= 0, \\ w_0 &= 0(r = 1), \quad w_0 = 0(r = 0), \quad w_0 \rightarrow 0 \quad (z_1 \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (15)$$

Решение этой задачи находится методом разделения переменных. Переходя от координаты z_1 к координате z и вводя число Рейнольдса $Re = U_p a / \nu$, функцию w_0 представим в виде $w_0 =$

$W_0(r) \exp(-\lambda z / \text{Re})$. Значения параметра λ и отвечающие им собственные функций W_0 определяется численным интегрированием. Таким образом для первого собственного числа получаем $\lambda_1 = 21.38$. На фиг. 2 изображена зависимость функции $W_{01}(r)$.



Фиг. 2. Первая квазистационарная мода.

В результате численного интегрирования получены значения λ_k для $k = 1, \dots, 5$ и, отвечающие им, собственные функции $W_{0k}(r)$. Поскольку краевая задача (15) определяется неограниченным оператором, то, как и следовало ожидать, все собственные значения растут с ростом k (так, например, $\lambda_2 = 74.779$), а осцилляция собственных функций возрастает. Так, например, $W_{0k}(r)$ внутри интервала $(0, 1)$ изменяют знак $(k - 1)$ раз.

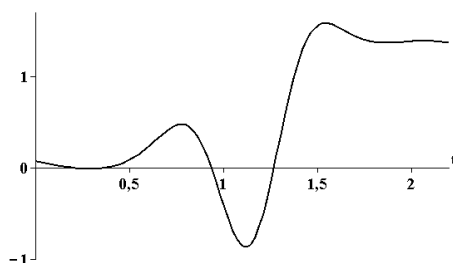
Итак, первая квазистационарная мода не изменяет направления вращения жидкости ни со временем, ни по сечению и убывает по экспоненциальному закону вдоль стационарного потока.

Свойства спиральных мод. Приведем результаты расчетов коротких спиральных мод по формуле (8), описывающей их поведение вне области пограничного слоя D_S . На фиг. 3 изображена зависимость во время систолы амплитуды спиральной моды $w_{\theta 1}$ для $n = m = 1$ и фиксированных значений пространственных координат.

Как показывают расчеты, максимальное по модулю значение компонента $w_{\theta 1}$ достигает во второй половине систолы.

Расчеты проводились для различных значений координаты z , при $r = 0.5$. Анализ численных результатов приводит к следующим выводам. Возможно однонаправленное вращение жидкости, которое описывается квазистационарной модой. Сумма первой ($n = 1, m = 1$) и квазистационарной мод также может приводить к однонаправленному вращению жидкости. Однако, направление вращения может

изменяться на противоположное несколько раз во время систолы. Возможен режим, полученный экспериментально в работе [11]. Направление вращения жидкости изменяется на противоположное в течение небольшого отрезка времени, продолжительность которого мала по сравнению с продолжительностью сердечного цикла. Этот отрезок может находиться вблизи любой временной точки систолы.



Фиг. 3. Зависимость от времени в течении систолы спиральной моды $n = m = 1$.

Наибольшее значение окружной компоненты скорости достигается во второй половине систолы вблизи входа в аорту. В начале систолы существует небольшой временной отрезок, в течение которого компонента $w_{\theta 1}$ изменяется незначительно. Длина этого временного отрезка увеличивается как при удалении от входного сечения цилиндра, так и с ростом индекса m . Высшие моды $m \geq 3$ возбуждаются в конце систолы. При удалении от входного сечения спиральные моды затухают, причем старшие моды затухают сильнее, чем первая мода. При фиксированных пространственных координатах окружная компонента скорости осциллирует по времени, причем частота осцилляции увеличивается с ростом индекса n .

3. Математические модели движения крови в толстостенных сосудах

Ниже приводятся основные соотношения двух одномерных моделей, для описания пульсовых движений в системе «кровь–стенка сосуда». Обе модели строятся на основе физических соображений о жесткости стенки сосуда как бесконечного полого упругого цилиндра с внутренним радиусом r_1 и внешним — r_2 .

Первая модель. Предполагается, что материал стенки — изотропный, упругий с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν .

Предлагаемая модель описывается соотношениями вида (0.1), в которых G_0 — «жесткость на раздувание». Под «жесткостью на раздувание» здесь понимается коэффициент пропорциональности в соотношении

$$p = Gu_1, \quad (16)$$

где p — внутреннее давление в сосуде, u_1 — радиальное смещение его внутренней стенки.

В предлагаемой модели u_1 определяется на основании решения задачи Ляме [12]. Эти соображения приводят к следующей формуле:

$$G = \frac{E(1-x^2)}{2(1+x^2+\nu(1-x^2))}, \quad x = \frac{r_1}{r_2}.$$

Соответственно, скорость «волны давления» определяется формулой

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

При этом для коэффициента Пуассона $\nu = 0.5$, $\Delta c = (c_0 - c)/c_0 \leq 0.03$ при $0.9 \leq x \leq 1$, т. е. для тонкостенных сосудов.

Вторая модель. Для описания пульсового движения крови в периферийных артериальных сосудах мышечного типа предлагается новая математическая модель типа модели, основанной на соотношениях (0.1). В предлагаемой модели стенка сосуда рассматривается как упругий полый цилиндр с винтовой анизотропией, порождаемой структурой распределения мышечных волокон, кровь — как вязкая несжимаемая жидкость.

Для описания динамических процессов в системе «стенка сосуда–кровь» используются новые динамические уравнения, описывающие длинноволновые продольно-крутильные колебания стенки сосуда [13, 14]. С учетом гидродинамического воздействия на внутреннюю стенку сосуда эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} d_{11}\partial_z^2 u_z + d_{12}\partial_z^2 \phi_z &= \rho_0 S \partial_t^2 u_z + 2\pi r_1 q_z, \\ d_{12}\partial_z^2 u_z + d_{22}\partial_z^2 \phi_z &= \rho_0 I_p \partial_t^2 \phi + 2\pi r_1 q_\theta, \\ c^2 \partial_z^2 p - \partial_t^2 p &= 0, \quad \rho \partial_t v - \partial_z p = 0, \quad c^2 = \frac{G}{\rho}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $u_z = u_z(z, t)$ — продольные смещения точек оси сосуда, $\phi_z = \phi_z(z, t)$ — угол поворота поперечного сечения сосуда, ρ — плотность крови, $S = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ — площадь поперечного сечения сосуда, $I_p = 1/4\pi(r_2^4 - r_1^4)$ — полярный момент инерции поперечного сечения, q_θ , q_z — касательные напряжения, возникающие между стенкой сосуда и кровью, течение которой моделируется линейными уравнениями Навье — Стокса и выражаются через проекции скоростей потока следующими формулами

$$\begin{aligned} q_z &= -\rho\nu[\partial_r v_z + \partial_z v_r]_{r=a}, \\ q_\theta &= -\rho\nu[\partial_r v_\theta - v_\theta/r]_{r=a}. \end{aligned} \quad (18)$$

Процедура построения решения аналогична той, что описана в работах [8–10].

Жесткость G определяется на основании решения задачи Ляме для полого цилиндра с винтовой анизотропией. Эта задача сведена к интегрированию краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами (постановке этой задачи, методу интегрирования и результатам исследования предполагается посвятить отдельную публикацию).

Проведенный предварительный анализ волновых процессов показал, что первые два уравнения описывают распространение квазипродольных и квазикрутильных волн, фазовые скорости которых определяются, главным образом, упругими и геометрическими параметрами стенки. Гидродинамическая сторона процесса описывается в основном третьим уравнением.

Литература

1. Громека И. С. О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубках // Собр. соч.—М.: Изд-во АН СССР, 1952.—С. 172–183.
2. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов.—М.: Мир, 1983.—400 с.
3. Хмель Т. А., Федоров А. В. Моделирование пульсирующих течений в капиллярах // Матем. биология и биоинформ.—2013.—Т. 8, № 1.—С. 1–11.
4. Кикнадзе Г. И., Олейников В. Г. и др. О структуре потока в левом желудочке сердца и аорте с применением точных решений нестационарных уравнений гидродинамики и морфометрических исследований // Докл. АН.—1996.—Т. 351, № 1.—С. 119–122.
5. Harvey W. Movement of the heart and blood in animals. An anatomical essay, 1628 // Kenneth J.—Franklin Oxford: Blackwell, 1957.—247 p.
6. Пурия Б. А., Касьянов В. А. Биомеханика крупных кровеносных сосудов.—Рига: Зинатне, 1980.—260 с.

7. Багаев С. Н., Захаров В. А., Орлов В. А. О необходимости винтового движения крови // Рос. журн. биомеханики.—2002.—Т. 6, № 4.—С. 30–51.
8. Устинов Ю. А. Модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах // Докл. АН.—2004.—Т. 398, № 3.—С. 71–76.
9. Устинов Ю. А. Некоторые задачи для тел с винтовой анизотропией // Успехи механики.—2003.—Т. 2, № 4.—С. 37–62.
10. Богаченко С. Е., Устинов Ю. А. Модель движения крови в артериальном сосуде во время систолы и анализ напряженного состояния стенки с учетом винтовой анизотропии // Рос. журн. биомеханики.—2009.—Т. 13, № 1.—С. 29–42.
11. Orlovsky P. I., Gritsenko V. V., Uglov F. G. *etc.* Whether to take account of the swirling flow of blood in the left ventricle and aorta in the design of artificial valves? // J. of Surgery.—1998.—Vol. 157, № 1.—P. 10–16.
12. Лурье А. И. Теория упругости.—М.: Наука, 1970.—939 с.
13. Панфилов И. А., Устинов Ю. А. Исследование гармонических колебаний полого цилиндра с винтовой анизотропией на основе трехмерных уравнений теории упругости и анализ областей применимости некоторых прикладных теорий // Владикавказ. мат. журн.—2011.—Т. 13, вып. 2.—С. 35–44.
14. Панфилов И. А., Устинов Ю. А. Колебания и волны в цилиндре с винтовой анизотропией // Акуст. журн.—2010.—Т. 56, № 6.—С. 759–766.

Батищев Владимир Андреевич
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: batishev-v@mail.ru

Поддубный Алексей Андреевич
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: poddubny_sfedu@mail.ru

Устинов Юрий Анатольевич
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: ustinov_rsu@mail.ru

MATHEMATICAL MODELS OF BLOOD FLOW IN ARTERIAL VESSELS

Batishev V. A., Poddubny A. A., Ustinov Y. A.

This is a brief overview of the results obtained by the authors in the field of mathematical modeling of spiral flow in large and peripheral arterial vessels is given. Helical model of the blood flow in the aorta is set out with precised description. To describe the screw movements in the peripheral blood vessels thick-walled basic relations of the one-dimensional mathematical model are presented.

Key words: elastic shell, spiral waves, steady-state stream, boundary layer.

МОДЕЛИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И ПРИНЦИПЫ ЕГО ИДЕНТИФИКАЦИИ¹

А. О. Ватульян, Р. Д. Недин

В настоящей работе приведен обзор различных теоретических моделей предварительных напряжений, используемых на сегодняшний день. Осуществлено сравнение моделей для различных типов предварительного напряженного состояния для пластин по динамическим характеристикам пластин. Рассмотрена обратная задача о восстановлении неоднородного плоского напряженного состояния в тонкой пластине на основе метода акустического зондирования. Приведены результаты вычислительных экспериментов по идентификации; даны практические рекомендации по выбору частотного диапазона для получения наилучшей точности реконструкции.

Ключевые слова: модели предварительных напряжений, неоднородность, колебания, обратная задача, реконструкция, акустический метод, итеративная регуляризация, метод конечных элементов, пластина.

1. Введение

Анализ неоднородных полей предварительных напряжений (ПН) в телах представляет собой важнейшую задачу механики деформируемого твердого тела. Практически все структуры в человеческом теле находятся под действием предварительного напряженного состояния (ПНС), начиная от живых клеток на микроуровне и заканчивая кожей, костной и мышечной тканью на макроуровне. Кроме того, несомненный интерес представляют модели ПНС для горной механики и геофизики. Учет ПНС позволяет корректировать ряд моделей и более адекватно моделировать подземные сооружения, трубопроводы и методы их диагностики на основе акустических методов зондирования.

Основным направлением развития современных методик численного моделирования (особенно МКЭ) является выбор наиболее адекватной теоретической модели ПН для постановки и решения кон-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00196, а также Южного федерального университета и Южного математического института ВЦ РАН и РСО-А.

кретной практической задачи. Развитие моделей механики деформируемого твердого тела, описывающих поведение тела при наличии ПН, началось с начала XIX века. Для описания поведения объемных тел на основе структуры материала и гипотез о природе ПНС созданы современные модели, каждая из которых отличается видом определяющих соотношений. Несмотря на существование различных с точки зрения механики сплошных сред подходов к моделированию ПНС в телах, на сегодняшний день в мировой литературе практически отсутствуют полноценные обзорные статьи или монографии, в которых были бы собраны все известные или наиболее распространенные модели ПН, проведен анализ их сравнения друг с другом и выявлены наиболее эффективные модели, в рамках каких-либо постановок прямых краевых задач для конкретных материалов. В то же время, понимание того, какие именно модели адекватно описывают наличие ПН в телах, представляет собой насущную проблему.

В настоящее время при моделировании и идентификации ПНС в рамках неразрушающего контроля часто используются модели с постоянными ПН. Одним из эффективных способов получения дополнительной информации о наличии концентратора и поля напряжений в его окрестности является метод акустического зондирования. Этот метод с успехом применяется для идентификации однородного ПНС. Вместе с тем наиболее востребованными моделями, описывающими напряженное состояние в текущей конфигурации, являются модели, позволяющие определять неоднородное ПНС по данным о полях смещения или деформациях на границе тела с использованием современных вычислительных алгоритмов [1–3]. В работах [4, 7, 9, 10] рассмотрены некоторые обратные задачи по восстановлению различных типов неоднородного ПНС в стержнях и пластинах на основе акустического метода неразрушающего контроля. В настоящей работе проведен сравнительный анализ наиболее распространенных моделей ПН и рассмотрены новые подходы к идентификации неоднородного плоского ПНС в тонкой пластине.

2. Модели ПН

Существует два подхода описания движения или равновесия предварительно напряженных тел. В первом из них в качестве отсчетной конфигурации выбирается естественное недеформированное состояние тела, и в уравнения входит начальная деформация в явном виде. В рамках второго подхода отсчетной конфигурацией считается

начальное деформированное состояние, при этом причины образования ПНС не учитываются, таким образом начальная деформация не участвует в уравнениях. Ниже приводятся наиболее распространенные на сегодняшний день модели ПН в рамках обоих подходов.

2.1. Модели, не учитывающие начальную деформацию.

Рассмотрим упругое тело в двух конфигурациях (см. рис. 1). В начальной деформированной конфигурации κ_0 в результате действия некоторых конечных деформаций в теле присутствует самоуравновешенное поле начальных (предварительных) напряжений. Будем считать эту конфигурацию отсчетной и использовать материальный (лагранжевый) способ описания движения, т. е. относительно координат вектора $\underline{R}_0 = (X_1^0, X_2^0, X_3^0)$. Далее, возмущая конфигурацию κ_0 и накладывая на нее малые деформации, получим вторую конфигурацию κ . Будем считать, что тело в конфигурации κ имеет объем V , ограниченный поверхностью $S = S_u \cup S_\sigma$; тело жестко защемлено на части границы S_u и нагружено меняющейся во времени нагрузкой $\underline{P}$ на части границы S_σ .

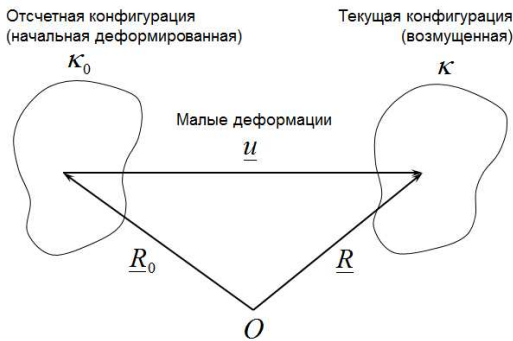


Рис. 1. Тело, рассмотренное в двух состояниях: в начальном деформированном (конфигурация κ_0) и в возмущенном (конфигурация κ). Естественная недеформированная конфигурация при этом не учитывается (т. е. начальные деформации как причины образования ПНС не рассматриваются).

Линеризованная краевая задача о колебаниях предварительно напряженного тела имеет следующий вид:

$$\nabla_0 \cdot \underline{T} + \rho_0 \dot{\underline{b}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\underline{T} = \underline{\Gamma}(\underline{\sigma}_0, \underline{e}, \underline{\omega}) + \underline{L}(\underline{e}), \quad (2)$$

$$\nabla_0 \cdot \underline{\underline{\sigma}}_0 + \rho_0 \underline{\underline{b}}_0 = 0, \quad (3)$$

$$\underline{\underline{u}}_0|_{S_u^0} = \underline{\underline{f}}_0, \quad \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_0|_{S_\sigma^0} = \underline{\underline{P}}_0, \quad (4)$$

$$\underline{\underline{u}}|_{S_u} = 0, \quad \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{T}}|_{S_\sigma} = \underline{\underline{P}}, \quad (5)$$

где $\nabla_0 \cdot = \underline{\underline{i}}_k \frac{\partial}{\partial X_k^0}$ — набла-оператор в метрике начального деформированного состояния²; ρ_0 , $\underline{\underline{b}}_0$ и $\underline{\underline{b}}$ — соответственно начальная плотность (т. е. плотность тела в начальной конфигурации), начальная и добавочная массовая сила; $\underline{\underline{P}}_0$ и $\underline{\underline{P}}$ — соответственно начальная и добавочная поверхностная нагрузка; $\underline{\underline{u}}$ — вектор добавочных малых перемещений, $\underline{\underline{T}}$ — несимметричный добавочный тензор напряжений Пиолы (при этом $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{T}}$ — полный тензор Пиолы, отнесенный к начальной конфигурации); $\underline{\underline{\sigma}}_0$ — тензор ПН Коши, отнесенный к начальной конфигурации; $\underline{\underline{\Gamma}}$ — тензор, зависящий в общем случае от компонент тензора ПН $\underline{\underline{\sigma}}_0$ и градиента перемещений $\nabla_0 \underline{\underline{u}}$; $\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\nabla_0 \underline{\underline{u}} + \nabla_0 \underline{\underline{u}}^T)$ — тензор малых деформаций; $\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2} (\nabla_0 \underline{\underline{u}}^T - \nabla_0 \underline{\underline{u}})$ — тензор поворотов; $\underline{\underline{L}}$ — добавочный материальный тензор объективных напряжений, задаваемый материальными константами и тензором деформаций (в монографии [6] он носит название тензора линейной упругости). При этом $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{L}}$ — полный материальный тензор объективных напряжений. В случае линейно упругого тела, в качестве тензора $\underline{\underline{L}}$ следует рассмотреть тензор напряжений в рамках классического закона Гука $\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{c}} \odot \underline{\underline{e}}$, где $\underline{\underline{c}}$ — тензор упругих модулей 4-го ранга.

В описанной выше краевой задаче (1)–(5) уравнение (2) является определяющим соотношением, связывающим общий добавочный тензор напряжений Пиолы с тензором ПН и добавочным тензором напряжений, причем от компонент ПН в явном виде зависит только тензор $\underline{\underline{\Gamma}}$. Различные существующие модели ПН, используемые в настоящее время, отличаются структурой тензора $\underline{\underline{\Gamma}}$. Уравнение (3) описывает равновесие поля ПН. (4) и (5) представляют собой граничные условия соответственно для предварительных и добавочных перемещений и напряжений.

Рассмотрим три основные группы моделей ПН:

²Всюду далее будем использовать систему написания и обозначений А. И. Лурье для набла-оператора, мер деформаций и тензоров напряжений и деформаций. В данном случае материальный градиент деформации определяется согласно формуле

$$\underline{\underline{C}} = \nabla_0 \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{i}}_m \frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial X_m^0} = \frac{\partial X_n}{\partial X_m^0} \underline{\underline{i}}_m \underline{\underline{i}}_n.$$

I) модель, предложенная Е. Треффтцем, В. В. Новожиловым, А. Н. Гузем, К. Васидзу, Л. Робертсоном и др. [5]:

$$\underline{\underline{\Gamma}}^I(\underline{\underline{\sigma}}_0, \underline{\underline{e}}, \underline{\underline{\omega}}) = \underline{\underline{\sigma}}_0 \cdot \nabla_0 \underline{\underline{u}}; \quad (6)$$

II) модель, предложенная М. Био, А. Хогер, Л. М. Зубовым и др. [8]:

$$\underline{\underline{\Gamma}}^{II}(\underline{\underline{\sigma}}_0, \underline{\underline{e}}, \underline{\underline{\omega}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\sigma}}_0 \cdot \underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_0) - \underline{\underline{\sigma}}_0 \cdot \underline{\underline{\omega}}; \quad (7)$$

III) модель, предложенная К. Бицено, Х. Генки, К. Трусделлом и др. [6]:

$$\underline{\underline{\Gamma}}^{III}(\underline{\underline{\sigma}}_0, \underline{\underline{e}}, \underline{\underline{\omega}}) = (\text{tr } \underline{\underline{e}})\underline{\underline{\sigma}}_0 - \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_0 - \underline{\underline{\sigma}}_0 \cdot \underline{\underline{\omega}}. \quad (8)$$

Модель III иногда используют без члена $(\text{tr } \underline{\underline{e}})\underline{\underline{\sigma}}_0$ в определяющем соотношении. В таком виде ее впервые предложил Р. Саусвелл:

$$\underline{\underline{\Gamma}}^{III}(\underline{\underline{\sigma}}_0, \underline{\underline{e}}, \underline{\underline{\omega}}) = -\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_0 - \underline{\underline{\sigma}}_0 \cdot \underline{\underline{\omega}}. \quad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко показать, что модель I является упрощением модели II.

Важно отметить, что в постановке (1)–(5) тензоры предварительных и объективных напряжений принадлежат разным типам. К примеру, в рамках модели I добавочный тензор объективных напряжений $\underline{\underline{L}}$ совпадает с тензором напряжений Кирхгофа относительно начальной конфигурации, тогда как ПН описываются тензором Коши.

2.2. Модель, учитывающая начальную деформацию. Рассмотрим теперь упругое тело в трех конфигурациях: добавим к рассмотренным в п. 2.1 двум конфигурациям κ_0 и κ естественную недеформированную конфигурацию $\overset{\circ}{\kappa}$, и на этот раз будем считать ее отсчетной (см. рис. 2).

А. Н. Гузь предложил модель ПН, в рамках которой в определяющее соотношение входят компоненты вектора начальных перемещений $\underline{\underline{u}}_0$ [5]. Для этого он воспользовался идеей, предложенной В. В. Новожиловым, о наложении малых деформаций на конечные, по аналогии с задачами устойчивости деформируемых тел.

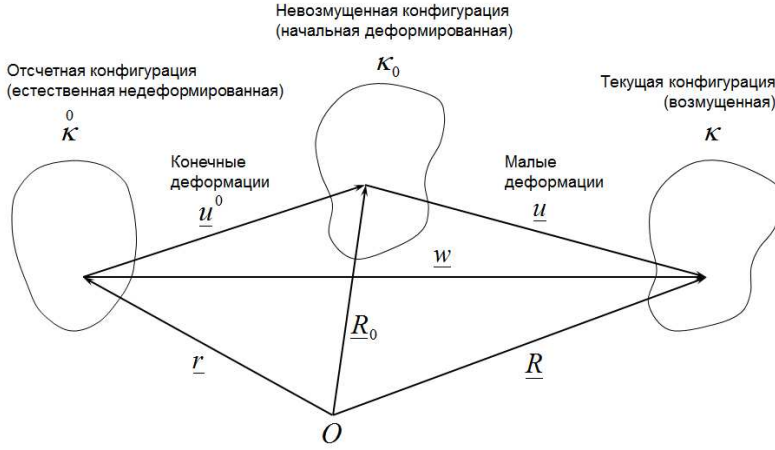


Рис. 2. Тело рассмотрено в трех конфигурациях: естественной недеформированной ($\overset{\circ}{\kappa}$), начальной деформированной (κ_0) возмущенной (κ). Конечные деформации, вызванные полем перемещений $\underline{u}_0$, считается начальным; поле перемещений $\underline{u}$ — малые деформации, наложенные на конфигурацию κ_0 .

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \underline{\underline{T}} + \overset{\circ}{\rho} \dot{\underline{b}} = \overset{\circ}{\rho} \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}, \quad (10)$$

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{S}}_0 \cdot \overset{\circ}{\nabla} \underline{u} + \underline{\underline{L}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \underline{u}_0 + \underline{\underline{L}}, \quad (11)$$

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot [\underline{\underline{S}}_0 \cdot (\overset{\circ}{\nabla} \underline{u}_0 + \underline{\underline{E}})] + \rho_0 \underline{b}_0 = 0, \quad (12)$$

$$\underline{u}_0|_{S_u^0} = \underline{f}_0, \quad \underline{n} \cdot [\underline{\underline{S}}_0 \cdot (\overset{\circ}{\nabla} \underline{u}_0 + \underline{\underline{E}})]|_{S_u^0} = \underline{P}_0, \quad (13)$$

$$\underline{u}|_{S_u} = 0, \quad \underline{n} \cdot \underline{\underline{T}}|_{S_\sigma} = \underline{\dot{P}}, \quad (14)$$

где $\overset{\circ}{\nabla} \cdot = \underline{i}_k \frac{\partial \cdot}{\partial x_k}$ — набла-оператор в метрике недеформированного естественного состояния тела (в конфигурации $\overset{\circ}{\kappa}$)³; $\underline{\underline{S}}_0$ и $\underline{\underline{L}}$ — мате-

³Здесь $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)$, $\underline{R} = (X_1, X_2, X_3)$; материальный градиент деформации теперь определяется по формуле:

$$\underline{\underline{C}} = \overset{\circ}{\nabla} \underline{R} = \underline{i}_m \frac{\partial \underline{R}}{\partial x_m} = \frac{\partial X_n}{\partial x_m} \underline{i}_m \underline{i}_n.$$

риальный тензор объективных напряжений в начальной деформированной конфигурации и его добавка (добавочная часть) соответственно:

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}_0 + \eta \underline{\underline{L}}, \quad \underline{\underline{L}} = \dot{\underline{\underline{S}}} = \frac{d}{d\eta} [\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{R}}_0 + \eta \underline{\underline{u}})]|_{\eta=0},$$

где η — формальный малый параметр.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что здесь тензор ПН $\underline{\underline{S}}_0$ не является тензором Коши ($\underline{\underline{S}}_0 \neq \underline{\underline{\sigma}}_0$), в отличие от постановки (1)–(5); $\underline{\underline{S}}_0$ и $\underline{\underline{L}}$ являются членами разложения одного тензора объективных напряжений $\underline{\underline{S}}$. Также важно отметить, что в этой постановке тензор $\underline{\underline{L}}$ зависит от тензора конечных деформаций $\underline{\underline{\epsilon}}$.

Таким образом, представление для тензора $\underline{\underline{T}}$ примет вид:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{S}}_0 \cdot \overset{\circ}{\nabla} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{C}}_0, \quad (15)$$

где $\underline{\underline{E}}$ — единичный тензор, $\underline{\underline{C}}_0 = \overset{\circ}{\nabla} \underline{\underline{u}}^0 + \underline{\underline{E}}$ — начальная деформация.

ЗАМЕЧАНИЕ. Модель ПН А. Н. Гузя (10)–(14) принципиально отличается от моделей ПН I–III в рамках краевой задачи (1)–(5): она в некотором смысле более частная, так как она подразумевает знание определяющего соотношения для ПН и вида упругого потенциала, тогда как модели I–III были выведены без уточнения причины образования ПН и их структуры и, следовательно, вида упругого потенциала (при таком подходе в отсчетной конфигурации уже содержатся ПН, и начальная деформация не учитывается, что представляет большое удобство в плане задач идентификации ПН, по сравнению с моделью Гузя).

3. Сравнительный анализ моделей ПН

Осуществим сравнение моделей ПН I, II и III, не учитывающие начальную деформацию. Для этого сперва выведем постановки краевых задач о продольных и изгибных колебаниях предварительно растянутой (или сжатой) консоли для каждой модели. После этого на основе метода конечных элементов осуществим численное сравнение моделей по динамическим характеристикам (амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и собственные частоты) плоской предварительно напряженной области в прямоугольном сечением, защемленной одной гранью.

3.1. Планарные колебания предварительно напряженной пластины. Для проведения вычислительных экспериментов по численному сравнению различных моделей ПН использован метод конечных элементов⁴ на основе слабой постановки исходной краевой задачи, преобразованной для случая плоской задачи. В качестве конечноэлементной модели рассмотрим тонкую прямоугольную прямоугольную пластину в режиме планарных колебаний, вызываемых равномерно распределенной на верхней грани периодически меняющейся нагрузкой с амплитудой q (рис. 3). Параметры пластины приняты следующими: $l = 1$ м, $h = 0,5$ м, $b = 0,1$ м (толщина), $E = 1,96 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,28$, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³ (материал — сталь).

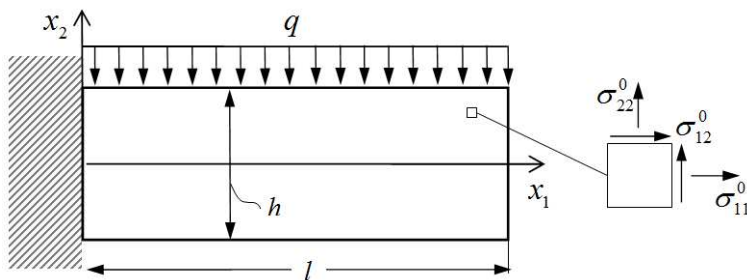


Рис. 3. Установившиеся планарные колебания тонкой пластины, вызванные равномерно-распределенной нагрузкой $\underline{\hat{q}} = \underline{q}e^{i\omega t}$, $\underline{q} = (0, 0, -q)$, приложенной к верхней грани $x_2 = h/2$. В пластине содержится плоское предварительное напряженное состояние, характеризующееся тремя компонентами тензора ПН σ_{11}^0 , σ_{12}^0 , σ_{22}^0 .

На рис. 4 изображены ветви АЧХ в частотном диапазоне до четвертого резонанса, соответствующие трем различным предварительно напряженным состояниям пластины ($\sigma_{\alpha\beta}^0 = \text{const}$, $\alpha, \beta = 1, 2$) и ненапряженному состоянию ($\sigma_{\alpha\beta}^0 = 0$). Чтобы разница в характере АЧХ была различимой на рисунке (для наглядности), величина ПН $\sigma_{\alpha\beta}^0$ принята достаточно большой: $\sigma_{11}^0 = 0,5 \cdot 10^{-2}$, что выходит за рамки диапазона $\frac{\max |\sigma_{11}^0|}{E} = 10^{-5} \div 10^{-3}$. Все ветви на рисунке соответствует модели ПН I, однако в таком масштабе две другие модели практически не отличаются от первой.

⁴Численные расчеты проводились в конечноэлементном пакете FreeFem++.

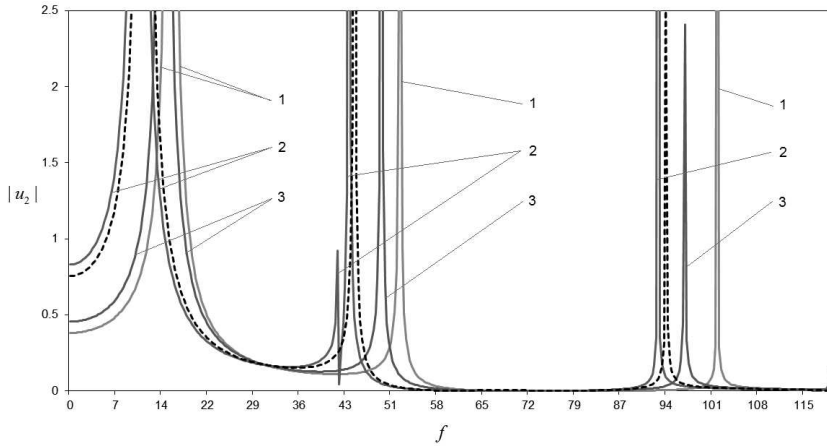


Рис. 4. Четыре АЧХ, соответствующие различным случаям распределения ПН в пластине: 1 — предварительное растяжения вдоль оси x_1 ($\sigma_{11}^0 = \text{const}$), 2 — предварительный чистый сдвиг ($\sigma_{12}^0 = \text{const}$), 3 — предварительное растяжения вдоль оси x_2 ($\sigma_{22}^0 = \text{const}$), пунктир — ПН отсутствуют ($\sigma_{\alpha\beta}^0 = 0$).

Шкала оси ординат приведена в см, оси абсцисс — в Гц.

Пусть в пластине имеется однородное поле ПН, определяемое компонентой $\sigma_{11}^0 = \text{const}$ (остальные компоненты тензора ПН равны нулю). Ниже приведены результаты сравнения АЧХ пластины в точке $\{x = l, y = 0\}$.

На рис. 5 изображены ветви АЧХ для вертикальной компоненты смещения u_2 ниже первой резонансной частоты f_1 (значения на оси ординат для удобства приводятся в см). Параметр σ_{11}^0/E составляет $0,5 \cdot 10^{-2}$. На рисунке видно, что даже при таком большом значении растягивающих ПН, ветви АЧХ, соответствующие всем трем моделям, практически совпадают друг с другом; при этом все эти ветви достаточно далеко остоят от ветви, соответствующей ненапряженному состоянию (т. е. при отсутствии ПН). Например, значения амплитуды смещения при частоте колебаний $f = 9$ Гц (крайняя правая точка на графиках) для каждой модели составили:

$$|u_2^I| = 1,5001 \text{ см}, \quad |u_2^{II}| = 1,5147 \text{ см}, \quad |u_2^{III}| = 1,5201 \text{ см}.$$

Отметим, что для ненапряженного состояния первая резонансная частота равна $f_1 = 10,65$ Гц, тогда как при введенном одноосном ПН $f_1 = 11,21$ Гц (практически одинаково для всех моделей).

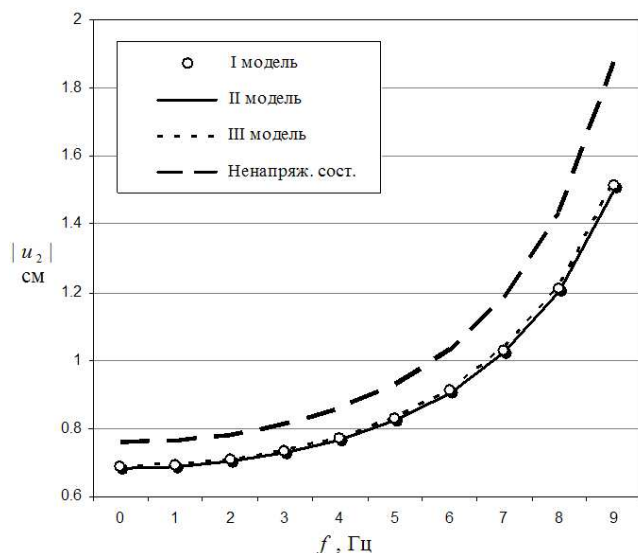


Рис. 5. Здесь приведены четыре ветви АЧХ в диапазоне до первой резонансной частоты, соответствующие моделям ПН I–III (для случая $\sigma_{11}^0 = \text{const}$, $\sigma_{12}^0 = \sigma_{22}^0 = 0$) и ненапряженному предварительному состоянию ($\sigma_{11}^0 = \sigma_{12}^0 = \sigma_{22}^0 = 0$).

Далее приводятся результаты анализа собственных частот (СЧ) для трех моделей ПН. На этот раз рассмотрим узкую прямоугольную пластину, имитирующую форму балки: $l = 1$ м, $b = 0,05$ м, $h = 0,1$ м, остальные параметры остаются такими же, как в предыдущем случае. С помощью МКЭ исследовано влияние величины предварительного одноосного сжатия пластины-балки на первые несколько СЧ, в рамках каждой модели ПН. Выяснилось, что наиболее существенное влияние ПН оказывают на первые (нижние) СЧ. Поэтому, целесообразно изучать это влияние для первой СЧ. Ниже, на рис. 6, представлен график зависимости нижней СЧ f (Гц) от величины предварительного сжимающего напряжения в безразмерном виде $\sigma_{11}^0/E = \text{const} < 0$. Разница между моделями при этом неразличима: все три графика сливаются в один (СЧ различаются после 5-го знака после запятой).

ЗАМЕЧАНИЕ. При проведении экспериментов также рассматривалась вариация модели III по Био — Саусвеллу (9), однако она мало отличалась от модели III по Бицено — Генки (8), поэтому не включена в сравнение, чтобы не загромождать рисунки с графиками.

Также были проведены аналогичные исследования АЧХ и СЧ в рамках моделей I–III для других случаев предварительного напряженного состояния: $\sigma_{11}^0 = 0$, $\sigma_{12}^0 = \text{const}$, $\sigma_{22}^0 = 0$ — предварительный чистый сдвиг, $\sigma_{11}^0 = 0$, $\sigma_{12}^0 = 0$, $\sigma_{22}^0 = \text{const}$ — предварительное растяжение/сжатие вдоль оси x_2 . В этих случаях тоже имеет место хорошее согласование моделей I–III.

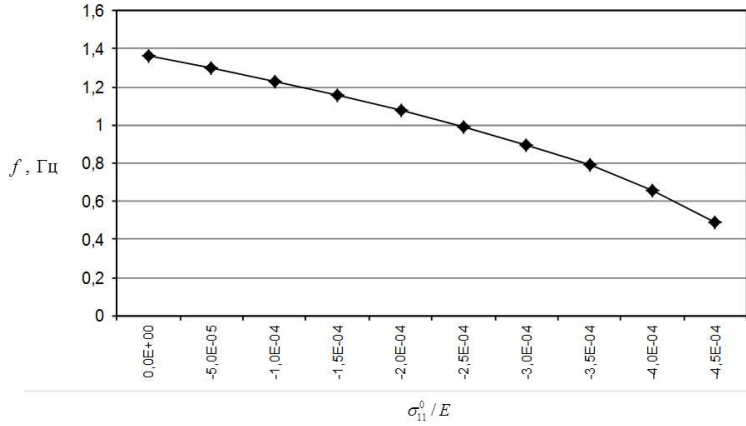


Рис. 6. Зависимость первой (нижней) изгибной СЧ (соответствующей амплитуде $|u_2|$) пластины от параметра σ_{11}^0/E . Графики зависимостей для моделей ПН I–III сливаются в один график.

3.2. Некоторые замечания. Таким образом, несмотря на различную структуру определяющих соотношений и на то, что модели были выведены разными способами, в рассмотренных выше случаях распределения ПН в стержнях и пластинах модели I–III весьма близки между собой с точки зрения АЧХ и СЧ. Важно отметить, что в реальных механических конструкциях (когда ПН изменяются в пределах диапазона

$$\frac{\max |\sigma_{11}^0|}{E} = 10^{-5} \div 10^{-3}$$

коэффициенты дифференциальных операторов в уравнениях для предварительно напряженных тел (в частности, балок и пластин) мало отличаются от ненапряженного предварительного состояния, поэтому реакция предварительно напряженного тела на нагрузку будет мало отличаться от реакции в ненапряженном случае. Однако, на частотах, близких к резонансным, или при нагрузках, близким

к критическим, ситуация резко меняется, и влияние ПН становится весьма существенным, что означает возможность применения процедур реконструкции ПНС по информации об изменениях АЧХ (в работах [9, 10] проведен анализ влияния величин ПН на АЧХ пластины в режимах планарных и изгибных колебаний для модели ПН I).

4. Идентификация ПН в пластине

4.1. Постановка обратной задачи. Рассмотрим задачу об идентификации неоднородного поля ПН $\sigma_{xx}^0(x, y)$, $\sigma_{yy}^0(x, y)$, $\sigma_{xy}^0(x, y)$, содержащегося в тонкой пластине, заземленной одним концом (как на рис. 3)⁵. Параметры материала (коэффициенты Ламе и плотность) и геометрия пластины заданы. Воспользуемся идеей акустического метода неразрушающего контроля: приложим периодически меняющуюся зондирующую равномерно распределенную касательную нагрузку к верхней грани пластины, реализуя ее планарные колебания (в работе [4] описывались различные типы зондирующих нагрузок, приложенных к границе пластины, но выяснилось, что этот тип дает самые точные результаты идентификации одноосных ПН). Также будем считать, что известна дополнительная информация о поле смещений $\underline{u}|_{l_\sigma}$ под нагрузкой в конечном наборе частот $\omega_k \in [\omega_-, \omega_+]$, моделирующая данные зондирования [1–3]⁶. В качестве модели ПН будем использовать модель I (6).

4.2. Итерационный процесс. Отметим, что сформулированная выше задача об отыскании предварительного поля напряжений представляет собой малоисследованную коэффициентную обратную задачу, которая является нелинейной некорректной проблемой. В работе [9] приведено два способа вывода соотношения, позволяющее для вышеописанной пластины реализовать итерационный процесс по определению поправок компонент тензора предварительных напряжений по отношению к некоторому выбранному начальному состоянию (один из них основан на использовании слабой постановки исходной прямой задачи и применении обобщенного соотношения взаимности):

$$\int_{\Omega} \left[\sigma_{xx}^{0(n)} K_{xx}^{(n-1)} + \sigma_{yy}^{0(n)} K_{yy}^{(n-1)} + \tau_{xy}^{0(n)} K_{xy}^{(n-1)} \right] d\Omega = F^{(n-1)}, \quad (16)$$

⁵Здесь и далее будем использовать обозначения для осей x, y вместо x_1, x_2 .

⁶На практике измерение смещений под зондирующей нагрузкой может осуществляться тензодатчиками, оптическими и лазерными датчиками и пр.

$$\begin{aligned}
K_{xx}^{(n-1)} &= (u_{x,x}^{(n-1)})^2 + (u_{y,x}^{(n-1)})^2, \quad K_{yy}^{(n-1)} = (u_{x,y}^{(n-1)})^2 + (u_{y,y}^{(n-1)})^2, \\
K_{xy}^{(n-1)} &= 2 \left(u_{x,x}^{(n-1)} u_{x,y}^{(n-1)} + u_{y,x}^{(n-1)} u_{y,y}^{(n-1)} \right), \\
F^{(n-1)} &= \int_{l_\sigma} \tau (u_x^{(n-1)} - f_x) - q (u_y^{(n-1)} - f_y) dl_\sigma.
\end{aligned}$$

Здесь Ω — площадь плоской области, занимаемой пластиной; верхние индексы (n) и $(n-1)$ означают номера итерации; $\sigma_{xx}^{0(n)}$, $\sigma_{yy}^{0(n)}$, $\sigma_{xy}^{0(n)}$ — поправки к соответствующим компонентам предварительных напряжений на текущей итерации (при этом $\sigma_{ij}^{0(0)}$ — заранее выбранное начальное приближение); $K_{xx}^{(n-1)}$, $K_{yy}^{(n-1)}$, $K_{xy}^{(n-1)}$ — ядра интегрального уравнения, выраженные через производные смещений, вычисленных на предыдущем шаге $(n-1)$; f_x — компонента заданного поля смещений под зондирующей нагрузкой (дополнительная информация в постановке обратной задачи); τ и q — соответственно касательная и нормальная составляющая вектора зондирующей нагрузки, распределенной на верхней грани пластины $l_\sigma = \{x \in [0, l], y = h/2\}$.

Это соотношение можно трактовать как интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода относительно поправок к ПН, если предварительно решена прямая задача о нахождении полей смещений и деформаций во всей области пластины. Таким образом, на каждом шаге итерационного процесса решается прямая краевая задача для текущего приближения для ПН $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^0$ и вычисляется соответствующее поле смещений и деформаций, после чего из уравнения (16) находят новые поправки к неизвестным функциям ПН, и в конце итерации текущее приближение уточняется с учетом вычисленной поправки: $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^0 := \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^0 + \sigma_{\alpha\beta}^{0(n)}$. Детально подобные итерационные процессы рассмотрены в работе [9], с приведением блок-схем и пошаговым описанием.

Ниже рассмотрим два подхода решения поставленной выше обратной задачи в рамках итерационного процесса (16).

4.2.1. Первый подход. Выразим поправки $\sigma_{xx}^{0(n)}$, $\sigma_{yy}^{0(n)}$, $\sigma_{xy}^{0(n)}$ через одну функцию напряжений Эри $\Phi(x, y)$:

$$\sigma_{xx}^{0(n)} = \Phi_{,yy}^{(n)}; \quad \sigma_{yy}^{0(n)} = \Phi_{,xx}^{(n)}; \quad \tau_{xy}^{0(n)} = -\Phi_{,xy}^{(n)} \quad (17)$$

(далее номер итерации (n) будем опускать). Представим функцию Эри в виде суммы бигармонических полиномов:

$$\Phi = \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \dots, \quad (18)$$

итерации. Решение этой системы фактически означает нахождение всех трех поправок σ_{xx}^0 , σ_{yy}^0 , τ_{xy}^0 к компонентам предварительным напряжениям на текущей итерации (см. формулы (16)).

Таким образом, решение уравнения (16) можно свести к решению плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений относительно α_k . Для ее решения следует использовать регуляризующие алгоритмы, например, метод регуляризации А. Н. Тихонова.

4.2.2. Второй подход. Разобьем область пластины Ω равномерной сеткой на N суперэлементов (подобластей) $\{\Omega_k\}_{k=1}^N$ и зададим функцию Эри на каждом из них: $\Phi_k|_{\Omega_k}(x, y)$. В общем случае представим функции Φ_k в виде линейно комбинации бигармонических полиномов, как это было сделано в предыдущем пункте (см. уравнение (18)). В этом случае можно аналогичным образом свести уравнение (16) к плохо обусловленной системе линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения каждой функции $\Phi_k|_{\Omega_k}$; таким образом, всего будем иметь $3N$ неизвестных. К примеру, в самом простом случае можно задать аппроксимации для функций Эри в виде квадратичных полиномов

$$\Phi_k = \frac{a_k}{2}x^2 + b_kxy + \frac{c_k}{2}y^2, \quad k = 1, \dots, N.$$

Отсюда получим, что поправки к ПН задаются в виде кусочно-постоянных функций на всей области Ω :

$$\sigma_{xx}^0|_{\Omega_k} = c_k, \quad \sigma_{yy}^0|_{\Omega_k} = a_k, \quad \sigma_{xy}^0|_{\Omega_k} = -b_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (21)$$

В этом случае уравнение (16) примет вид:

$$\sum_{k=1}^N \left[c_k \int_{\Omega_k} K_{xx} d\Omega_k + a_k \int_{\Omega_k} K_{yy} d\Omega_k - b_k \int_{\Omega_k} K_{xy} d\Omega_k \right] = F. \quad (22)$$

Соответственно, если провести измерения АЧХ в наборе частот колебаний ω_i ($i = 1, \dots, m$), то уравнение (22) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно $3N$ неизвестных: a_k , b_k , c_k ($k = 1, \dots, N$).

4.3. Вычислительные эксперименты. В настоящем параграфе приведены результаты вычислительных экспериментов по идентификации неоднородных ПН в рамках двух вышеописанных подходов для стальной пластины с параметрами $l = 1$ м, $b = 0,5$ м,

$h = 0,1$ м, $E = 1,96 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,28$, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³ (форма и условия заделки как на рис. 3). Точные ПН задавались в виде многочленов третьего порядка, что соответствует функции Эри пятого порядка:

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^{0*} = c_2 + c_3x + d_3y + c_4x^2 + d_4xy - (2c_4 + a_4)y^2 - \\ \quad - (2c_5 + 3a_5)xy^2 - \frac{1}{3}(b_5 + 2d_5)y^3, \\ \sigma_{yy}^{0*} = a_2 + a_3x + b_3y + a_4x^2 + b_4xy + c_4y^2 + a_5x^3 + \\ \quad + b_5x^2y + c_5xy^2 + \frac{1}{3}d_5y^3, \\ \sigma_{xy}^{0*} = -b_2 - b_3x - c_3y - \frac{1}{2}b_4x^2 - 2c_4xy - \frac{1}{2}d_4y^2 - \\ \quad - \frac{1}{3}b_5x^3 - c_5x^2y - d_5xy^2 + \frac{1}{3}(2c_5 + 3a_5)y^3, \end{cases} \quad (23)$$

при следующих значениях коэффициентов: $a_2 = 20$, $b_2 = 10$, $c_2 = 10$, $a_3 = 0,001221$, $b_3 = 0,123$, $c_3 = -0,1$, $d_3 = 0,02$, $a_4 = 0$, $b_4 = 0,01$, $c_4 = 0,01$, $d_4 = 0,001$, $a_5 = 0,001$, $b_5 = 0,001$, $c_5 = -0,001$, $d_5 = 0,001$ (получаемые при этом компоненты ПН измеряются в кг/см²).

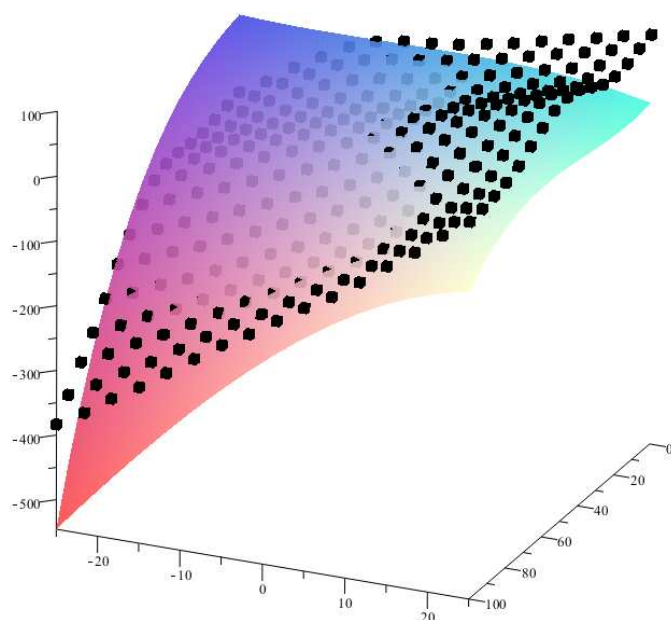
В рамках первого подхода рассмотрим случай, когда специальный поиск начального приближения не осуществляется; трем поправкам в самом начале итерационного процесса просто присваиваются нулевые значения: $\sigma_{xx}^{0(n)} = 0$, $\sigma_{yy}^{0(n)} = 0$, $\sigma_{xy}^{0(n)} = 0$. Результаты проведения вычислительных экспериментов показали, что в этом случае реконструкция проходит успешно, если порядок полиномов в представлении функции Эри не превышает трех, что соответствует линейным зависимостям компонент ПН.

Ниже описан эксперимент по идентификации ПН в рамках второго подхода. При этом рассмотрен случай аппроксимации функций Эри $\Phi_k|_{\Omega_k}$ в виде квадратичных полиномов, и решение обратной задачи сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений вида (22). Область пластины Ω была разбита на 30 суперэлементов сеткой $[6 \times 5]$, таким образом система линейных уравнений (22) решалась относительно 90 неизвестных коэффициентов разложения⁷.

⁷ Не следует путать конечные элементы (для численного решения прямой задачи по методу конечных элементов) и суперэлементы (формальное разбиение пластины для решения обратной задачи); в общем случае, эти разбиения вводятся независимо. Во всех экспериментах было использовано конечноэлементное разбиение области пластины $[18 \times 15]$.

На этот раз начальное приближение искалось в классе линейных функций; в качестве начального приближения использовалось решение соответствующей обратной задачи, найденное по первому подходу. Таким образом, решалось две обратные задачи: первая, в рамках первого подхода, для нахождения начального приближения неизвестных функций ПН, и вторая, в рамках второго подхода, для уточнения этого приближения в классе кусочно-постоянных функций (21). На рис. 7 приведены результаты реконструкции ПН, заданных в виде (23) в классе кусочно-постоянных функций; результат реконструкции был сглажен с помощью кубической сплайн-аппроксимации.

Для наиболее точной идентификации было зафиксировано 11 частот колебаний, равномерно распределенных между первой и второй резонансными частотами; выявлено, что концы диапазона должны быть достаточно близко к резонансам, чтобы получить приемлемую точность реконструкции. Также стоит отметить, что рассмотрение частотного диапазона ниже первой резонансной частоты дает реконструкцию худшей точности.



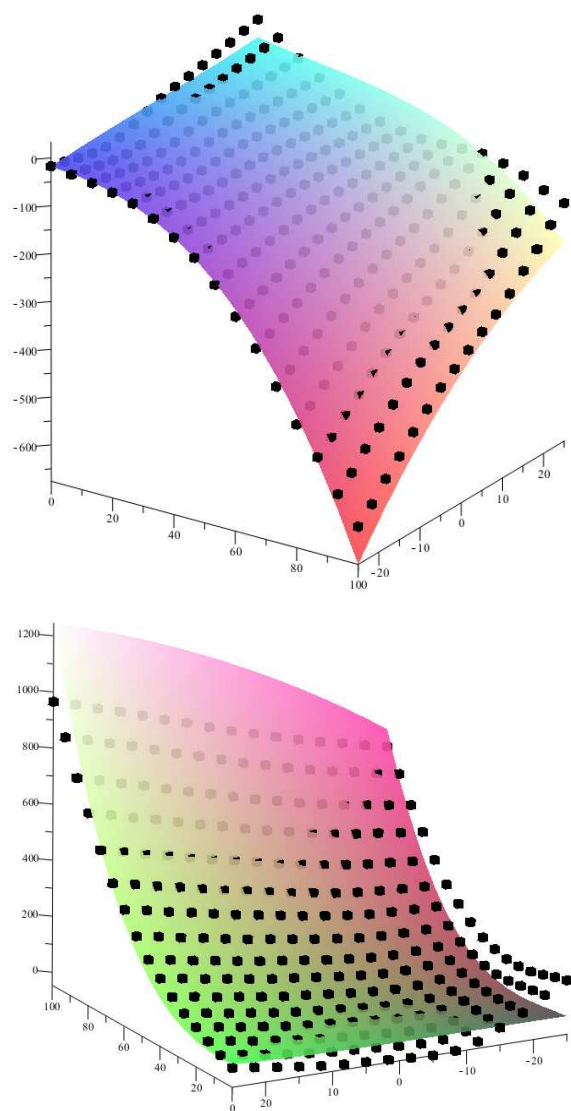


Рис. 7. Слева направо: σ_{xx}^0 (кг/см²), σ_{yy}^0 (кг/см²), σ_{xy}^0 (кг/см²). Сплошная поверхность — точный закон, точки — восстановленный закон (результат применения сплайн-аппроксимации к кусочно-постоянным функциям восстановленных ПН). Шкалы x , y приведены в см. Количество итераций: 19.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае идентификации одноосных ПН, задаваемых одной функцией от одной координаты, было достаточно зафиксировать 5–6 частот для получения приемлемых результатов реконструкции; более того, фиксирование большего числа частот не улучшало точность реконструкции [4, 7, 9, 10]. Однако, в случае решения двухмерной обратной задачи в ходе проведения вычислительных экспериментов выяснилось, что для восстановления некоторых законов неоднородности ПН следует фиксировать больше частот для достижения наилучшей точности идентификации.

Таким образом, результаты вычислительных экспериментов демонстрируют возможность использования предложенной схемы идентификации достаточно гладких неоднородных компонент ПН в рамках плоского предварительного напряженного состояния.

5. Заключение

Приведен полный обзор основных теоретических моделей ПН, используемых в настоящее время; рассмотрены модели, как учитывающие начальную деформацию, так и не учитывающие; описана теория, с помощью которой можно связать все модели друг с другом. Осуществлено сравнение рассмотренных моделей ПН без учета предварительных перемещений в рамках планарных колебаний тонких пластин; с помощью метода конечных элементов осуществлен анализ влияния компонент ПН на динамические характеристики (амплитудно-частотные характеристики и на спектр собственных частот). Выявлено, что численные результаты, полученные для всех моделей, близки между собой. Рассмотрена обратная задача о восстановлении неоднородного плоского напряженного состояния в тонкой пластине на основе метода акустического зондирования в режиме планарных колебаний. Описаны два подхода решения обратной задачи, основанных на итерационных процессах и конечномерной аппроксимации функции напряжений Эри, через которую выражены поправки к компонентам тензора ПН. Первый из предложенных подходов использован для поиска начального приближения к неизвестным функциям, а второй — для уточнения приближения в классе кусочно-непрерывных функций. Приведены результаты вычислительных экспериментов по идентификации неоднородных ПН в тонкой прямоугольной пластине; даны практические рекомендации по выбору частотного диапазона для получения наилучшей точности реконструкции.

Литература

1. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела.—М.: Физматлит, 2007.—223 с.
2. Ватульян А. О. Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел // Вестн. Сам. гос. ун-та.—2007.—Вып. 54, № 4.—С. 93–103.
3. Ватульян А. О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ.—2010.—№ 6.—С. 911–918.
4. Ватульян А. О., Недин Р. Д. К идентификации неоднородных предварительных напряжений // Вестн. СПбГУ. Сер. Математика, механика, астрономия.—2011.—С. 38–44.
5. Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуца О. И. Введение в акустоупругость.—Киев: Наукова думка, 1977.—162 с.
6. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.—М.: Мир, 1975.—592 с.
7. Dudarev V. V., Vatulyan A. O. On restoring of the pre-stressed state in elastic bodies // J. Appl. Math. Mech.—2011.—Vol. 91, № 6.—P. 485–492.
8. Hoger A. On the determination of residual stress in an elastic body // J. of Elasticity.—1986.—Vol. 16.—P. 303–324.
9. Nedin R. D., Vatulyan A. O. Inverse problem of non-homogeneous residual stress identification in thin plates // International J. of Solids and Structures.—2013.—№ 50.—P. 2107–2114.
10. Nedin R. D., Vatulyan A. O. On the Reconstruction of Inhomogeneous Initial Stresses in Plates // Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications.—2011.—Vol. 15.—P. 165–182.

Ватульян Александр Ованесович

Южный федеральный университет

РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А

РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Недин Ростислав Дмитриевич

Южный федеральный университет

РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а

E-mail: rdn90@bk.ru

MODELS OF RESIDUAL STRESS STATE AND PRICIPLES OF ITS IDENTIFICATION

Vatulyan A. O., Nedin R. D.

In the present paper the review of different theoretical models of residual stresses being used today is given. A comparison of the models for various types of the residual stress state of plates is made by their dynamical characteristics.

The inverse problem on identification of plane residual stress state in a thin plate is considered on the basis of the acoustical probing method. The results of computational experiments on the reconstruction are presented; practical recommendations on the frequency range choice are formulated to obtain the best reconstruction accuracy.

Key words: residual stress models, inhomogeneity, oscillations, inverse problem, reconstruction, acoustical method, iterative regularization, finite element method, plate.

НОВЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В МАТЕМАТИКЕ

С. С. Кутателадзе

Обсуждаются некоторые современные тенденции в математике и ее преподавании.

Ключевые слова: предмет математики, проблемы социума, топология знаний, логика, булевозначный анализ, дискретизация, гипераппроксимация, скаляризация.

1. Предмет математики

Математика — древнейшая наука. Однако сначала было слово. Полезно помнить, что старинный «логос» живет не в грамматике, а в логике и логистике. Порядок в мыслях и порядок хранения — драгоценные дары наших пращуров.

Предмет математики — количественные формы человеческого мышления. Математика функционирует как наука доказательных исчислений, постоянно обновляясь и наращивая объем накопленных знаний. Со временем меняются требования к строгости доказательств и технологиям их получения, возникает деление математики на чистую и прикладную.

Математика — наука о простейших и универсальных формах мышления. Математика — вдохновение *per se*.

2. Математика как часть культуры

Масса иллюзий господствует в общенаучных и общекультурных воззрениях. Национальные и региональные традиции превалируют над свободным мышлением повсеместно. Господствуют представления о превосходстве современных оценок над суждениями предков, безошибочности прогресса и вневременном характере математических суждений.

Связь научных и, прежде всего, математических идей с господствующей идеологией не всегда осознается отчетливо. Например, недооценивается влияния идей христианства на развитие европейской математической мысли.

3. От механики и физики к проблемам социума

Традиционной сферой приложения математики XIX века была классическая механика, понимаемая в самом широком смысле. Отражением этой исторической традиции служат механико-математические факультеты ведущих университетов России.

Начало XX века отмечено резким расширением сферы приложений математики. Возникла квантовая механика, потребовавшая развития нового математического аппарата. Теория операторов в гильбертовых пространствах и теория обобщенных функций были ориентированы, прежде всего, на адаптацию эвристических методов новой физики.

В 1920–1930 гг. социальные феномены стали предметом небывалых исследований, требовавших создания специальных математических методов. Существенно возросла потребность в статистической обработке данных. Создание новых производств, внедрение передовых технологий, оборудования и материалов вызвали потребность совершенствования техники расчетов. Бурному развитию прикладной математики способствовала автоматизация и механизация процесса вычислений.

4. Топология знаний

На интеллектуальном поле не действует закон убывающего плодородия. Чем больше мы узнаем, тем значительнее становится граница с неизвестным, тем чаще мы сталкиваемся с неведомым. Двадцатый век обогатил наши геометрические представления понятиями пространства-времени и фрактальности. Каждое конкретное знание — это событие, элемент пространства Минковского. Познанное нами образует явно ограниченное множество знаний.

Рубежи науки составляют границу познанного с неведомым, которая несомненно фрактальна, и у нас нет никаких оснований предполагать ее спрямляемость или измеримость. Стоит при этом отметить, что маршруты к передовым границам науки, прокладываемые преподавателями в сфере образования, достаточно гладкие. Педагогика не любит скачков и резкой смены сложившейся парадигмы. Возможно, что эти топологические препятствия отражают объективные трудности модернизации образования.

Не счесть доказательств фрактальности границы знания и незнания. Среди них такие негативные явления, как безудержный рост псевдонауки, мистицизма и иных форм мракобесия, заползающих во все лакуны непознанного. Проявлениями фрактальности служат также самые неожиданные, прекрасные и поразительные взаимосвязи внешне далеких отраслей и разделов науки.

5. Логика сегодня

Революционные изменения математики на рубеже девятнадцатого и двадцатого веков связаны не только с новым исчислением бесконечности, созданным Кантором в его теории множеств. Не меньшее значение имело становление и развитие математической логики, подвергшей строгому анализу сам процесс математического доказательства. Разрешимость и неразрешимость, доказуемость и недоказуемость, противоречивость и непротиворечивость вошли в исследовательский лексикон совершенного математика. Математика стала рефлексивной наукой, занятой не только поиском истины, но и изучающей собственные способы ее поиска.

Логика Аристотеля, апории Зенона, бритва Вильяма из Оккама, осел Буридана, *Calculus* Лейбница и алгебры Буля — выдающиеся достижения человеческого гения, осветившие дорогу к новому этапу логических исследований. Фреге обессмертил свое имя, создав исчисление предикатов — основу современной математической логики.

Двадцатый век отмечен стремительным проникновением идей математической логики во многие разделы науки и техники. Логика не только организует и упорядочивает мышление, но и освобождает нас от догматизма при выборе объектов и методов математического анализа. Логика наших дней — важнейший инструмент и институт математической свободы.

6. Булевозначный анализ

Современная техника математического моделирования позволила показать, что основные свойства решеточно нормированных пространств представляют собой булевозначные интерпретации свойств классических нормированных пространств. Произвольное банахово пространство внутри булевозначной модели при внешней расшиф-

ровке представляет собой расширенное пространство Банаха — Канторовича. При этом каждое решеточно нормированное пространство может быть реализовано как плотное подпространство некоторого банахова пространства в подходящей булевозначной модели.

7. Дискретизация

Уравнение

$$Tx = y,$$

где $T : X \rightarrow Y$, а X и Y банаховы пространства заменяют на уравнение

$$T_N x_N = y_N$$

подбором конечномерных аппроксимирующих подпространств X_N , Y_N и вложений ι_N, j_N :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \iota_N \uparrow & & \uparrow j_N \\ X_N & \xrightarrow{T_N} & Y_N \end{array}$$

8. Гипераппроксимация

Нестандартные модели дают метод внешней аппроксимации:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ \varphi_E \downarrow & & \downarrow \varphi_F \\ E^\# & \xrightarrow{T^\#} & F^\# \end{array}$$

Здесь E и F — нормированные векторные пространства над одним и тем же полем скаляром, T — ограниченный линейный оператор из E в F , а $^\#$ — символ перехода к нестандартной оболочке.

Пространство $E^\#$ автоматически оказывается банаховым для каждого внутреннего (не обязательно полного) нормированного пространства E . Если внутренняя размерность внутреннего нормиро-

ванного пространства E конечна, то пространство E называют *гиперконечномерным*. Для каждого нормированного векторного пространства E существует гиперконечномерное подпространство $F \subset {}^*E$, содержащее все стандартные элементы внутреннего пространства ${}^*E$.

Инфинитезимальные методы позволяют предложить и новые схемы гипераппроксимации общих компактных пространств. В качестве таких приближений к компактному множеству сверху могут выступать произвольные конечные внутренние множества, содержащие все стандартные элементы подлежащего аппроксимации компакта.

9. Скаляризация

Скаляризация в самом общем смысле — это приведение к числу, неизбежное в задачах многоцелевой оптимизации. Особенность экстремальных задач экономики состоит в наличие большого числа противоречивых целей и интересов, подлежащих согласованию. Это приводит к серьезным трудностям, отсутствующим в случае скаляров. На первый план выходит анализ разумных понятий оптимальности для многоцелевых задач, среди которых можно выделить идеальный и обобщенный оптимумы, оптимум в смысле Парето, а также приближенный и инфинитезимальный оптимумы.

ϵ -решение при достаточно малом ϵ можно рассматривать как претендента на «практический оптимум» — на приемлемое на практике решение исходной задачи. Правила вычисления ϵ -субдифференциалов доставляют формальный аппарат учета границ точности решения экстремальной задачи. Соответствующая техника в настоящее время весьма совершенна и, можно сказать, изящна и изощрена. В то же время возникающие точные формулы трудно обозримы и не вполне соответствуют практическим приемам оптимизации, при которых применяют эвристические правила «отбрасывания малых». Лишенный этих недостатков адекватный аппарат инфинитезимальных субдифференциалов связан с современными возможностями нестандартной теории множеств.

10. Перспективы

Адаптация современных идей теории моделей для функционального анализа представляется важнейшим направлением развития

синтетических методов прикладной и теоретической математики. Здесь возникают новые модели чисел, пространств, видов уравнений. Расширяется содержание всех имеющихся теорем и алгоритмов, обогащается и обновляется вся методология математического моделирования, открывая совершенно фантастические возможности. Классический функциональный анализ далеко не сразу занял свое теперешнее место языка непрерывной математики. Сейчас настали времена новых мощных технологий математического анализа. Пути назад в науке нет — новые методы со временем станут столь же элементарными и общеупотребительными в исчислениях и вычислениях как банаховы пространства и линейные операторы.

Литература

1. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.—526 с.
2. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения.—М.: Наука, 2007.—560 с.
3. Гордон Е. И., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Инфинитезимальный анализ. Избранные темы.—М.: Наука, 2011.—400 с.

КУТАТЕЛАДЗЕ СЕМЕН САМСОНОВИЧ
Институт математики им. С. Л. Соболева
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Коптюга 4
E-mail: sskut@math.nsc.ru

NEW TRENDS IN MATHEMATICS

Kutateladze S. S.

Under discussion are some modern trends in mathematics and the teaching of mathematics.

Key words: math's subject, social medium problems, topology of knowledge, logic, Boolean valued analysis, discretization, hyperapproximation, scalarization.

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ И «ВЫЗОВЫ» В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКЕ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПЕДАГОГА В УСЛОВИЯХ МОДЕРНИЗАЦИИ

Е. И. Смирнов

В статье анализируются ключевые факторы в совершенствовании профессиональной подготовки и деятельности педагога в условиях модернизации образовательного пространства России. Делается акцент на современные образовательные технологии фундирования опыта личности, наглядного моделирования объектов, процессов и явлений в математической деятельности, использование информационных и коммуникационных средств.

Ключевые слова: профессиональная подготовка педагога, фундирование опыта личности, наглядное моделирование, информационные технологии.

Следующие объективные условия, под действием которых оказалось современное общее образование, определяются содержанием следующих факторов, нарастающее влияние которых, не может оставаться незамеченным в становлении профессиональной компетентности учителя и «вызовы», ими порождаемые, требуют включения адекватных и обоснованных компенсаторных механизмов и управленческих решений в образовательной практике.

- *Доминирующее влияние информационно-коммуникационных технологий и необходимость роста информационной культуры и компетентности, как педагога, так и ученика.*

В настоящее время современный период в развитии ИКТ в учебной деятельности можно охарактеризовать двумя существенными тенденциями. С одной стороны, осуществляется постепенный переход от использования ИКТ с точки зрения непосредственно локального пользователя на реализацию дистанционного взаимодействия между различными пользователями (учащимися и преподавателями) в рамках локальных или глобальной сетей. С другой стороны, наблюдается постепенный переход от использования стационарных средств ИКТ к применению мобильных ИКТ, трактуемых как малые средства информатизации (графические калькуляторы, КПК, сотовые телефоны, смартфоны, коммуникаторы и т. д.). Следует отметить, что в настоящее время данные направления рассматриваются

как полностью самостоятельные, не имеющие существенных точек функционального пересечения. Уже через несколько лет развитие социальных сетей (Facebook, Twitter, MySpace, Windows Live Spaces, В Контакте и др.) и планшетные ноутбуки с огромным количеством встроенных функций и дидактических возможностей (офисные программы, сетевые ресурсы, компьютерная алгебра, динамическая геометрия и др.), наряду с компактностью, мобильностью и удобным интерфейсом, настоятельно потребуют от педагога тщательного учета эффективности и включенности этих каналов информации в проектировании образовательных воздействий при освоении учениками предметных областей. В дальнейшем предлагается реализация возможной интеграции вышеуказанных тенденций развития ИКТ в рамках учебной деятельности, благодаря использованию разрабатываемой информационной системы мониторинга дистанционных учебных проектов, обучающихся с точки зрения использования доступа в данную среду. При этом интерактивная деятельность возможна как с обычных персональных компьютеров через глобальную сеть Интернет, так и с определенных представителей малых средств информатизации (мобильные телефоны, смартфоны, коммуникаторы) при наличии технологии GPRS, допускающей использование протокола HTTP при работе в сети Интернет. Это в конечном итоге позволит реализовать единую среду дистанционного обучения, объединяющую всех участников учебного процесса вне зависимости как от наличия дисплейного класса при проведении аудиторных занятий, подразумевающих использование ИКТ в различных интерпретациях, так и географического положения участников учебного процесса при реализации самостоятельной деятельности учащихся и мониторинга учебной деятельности.

• *Информационный «взрыв» на фоне необходимости интеграции науки и образования в контексте формирования приемов научного познания у школьников.*

Современное общество находится «под прессом» экспоненциального роста объема информации и углубления противоречий между ограниченными возможностями человека по восприятию и переработке информации и интенсивностью массивов потенциально доступных информационных ресурсов. Конкретный индивид не только объективно получает большое количество (в том числе, бесполезной для собственного образования и развития) информации из окружающего мира, но и зачастую не в состоянии осуществить отбор и

усвоение полезной информации, в том числе, учебного характера, ввиду отсутствия ее структурированности, неадекватности кодирования, наличия проблем восприятия и т. п. Большой урон наносит эффект «поверхностного» знания, когда происходит освоение индивидом несущественных свойств предмета, процесса или явления, а сущность при этом ускользает, и как правило, «переобучение» дается с трудом, так, что индивид овладевает опытом «псевдознаний», что, в конечном итоге, наносит ущерб его компетентности. В то же время, усилиями коллективного научного поиска человечество уже создало универсальные и оптимальные образцы научной продукции, научных знаний и процедур, которые объективно выстраивают связующие цепочки поэтапного перехода от сущности к ее проявлениям и наоборот, иногда доступные для воспроизведения в образовательных процессах [1]. Так изучение фрактальной геометрии позволит находить интегративные связи и проявлять сущности в информатике, математике, физике, экономике, биологии и медицине, нанотехнологии фундируют сущности микробиологии, физики, химии, достижения геномной инженерии наглядно моделируют клеточные процессы, фундаментальные зависимости микробиологических процессов и т. п. *Поиск, отбор, анализ и оценка подобных фундирующих цепочек и комплексов на основе интеграции научных результатов, включение их в образовательные процессы остается далеко не решенной проблемой общего и высшего образования.*

● *Возросшая потребность в самореализации и креативности педагога на основе актуализации индивидуального стиля как ответ на изменчивость, вариативность и открытость образовательных ситуаций, необходимость использования «мягких» моделей образования и развития.*

Проблема развития мотивационной сферы учителя представляется особенно актуальной в современный период в связи, с одной стороны, с растущими возможностями интеграции образования с различными сферами функционирования науки, жизни и деятельности общества (фракталы, fuzzy-логика, нечеткие множества, нанотехнологии, геном человека, вейвлеты, линейное и нелинейное программирование и др.), с другой стороны, необходимостью актуализации этих процессов в профессиональной деятельности учителя с целью эффективного развития учащихся средствами учебного предмета на основе глубокого проникновения в сущность и разнообразие приложений научных феноменов, творческого их дидактического осмыс-

ления, в том числе, на основе конструктивного генезиса и использования информационно-коммуникационных технологий [2]. Инновационный процесс развития профессиональной мотивации учителя разворачивается в педагогических условиях: информационной насыщенности и обогащенности образовательной среды, актуализации перехода процессов развития в процессы саморазвития, формирования творческой среды на базе освоения новых методов, средств и механизмов профессионально-ориентированного освоения и адаптации предметной и дидактической информации в учебный материал [3].

● *Необходимость инновационной реализации стандартов общего образования второго поколения на компетентностной основе и решения задачи формирования универсальных учебных действий у школьников.*

Современные требования к проектированию и организации инновационной деятельности педагога неразрывно связаны со следующими характеристиками системогенетического обеспечения индивидуально-личностного процесса профессионализации педагога:

– предоставление каждому субъекту профессионального педагогического образования *возможности и условий для поэтапного становления характеристик индивидуального стиля и развития профессиональных компетентностей* согласно его способностям, с учетом его мотивов и склонностей при сочетании традиционных и инновационных подходов в профессиональной деятельности;

– направленность образовательной среды *на выявление личностных смыслов, креативности и развитие способностей педагога к рефлексии и самоанализу* в целях самостоятельного приобретения новых знаний и ценностей, адекватно влияющих на проектирование и успешность педагогического процесса, с целью совершенствования навыков межличностного общения и развития познавательных возможностей и нравственных качеств ученика;

– предоставление педагогу *современных методик психодиагностики и инструментария* для проведения мониторинга учебной и профессиональной деятельности, рефлексивного и мотивационного управления, позволяющего эффективно осуществлять педагогический процесс и процедуры самоанализа;

– организация коммуникативной сети, связывающей андрагогов институтов повышения квалификации, работников муниципальных управлений образования, руководителей образовательных учреждений и педагогов образовательных учреждений, позволяющей сле-

дуя принципам информационного взаимодействия, осуществлять самоуправление в системе профессионального педагогического образования.

- *Важность развития исследовательского поведения на основе «переживания» инсайта и овладения педагогическими теориями и инновационными методиками изучения и обучения.*

Вступление России в Болонский процесс, сближение и ассимиляция образовательных систем неизбежно приводят к более тщательному анализу и осмыслению передовых западных образовательных теорий и технологий. К таковым относится так называемый «американский конструктивизм» или конструктивистские подходы, ведущие свое начало от прогрессивного образования Дж. Дьюи, когнитивного развития Ж. Пиаже, теории социокультурного развития Л. С. Выготского, теории научения путем открытия Дж. Брунера и др.

Исследовательское поведение учащегося — неотъемлемый атрибут конструктивистского подхода в обучении. Это требует организации процесса обучения, основанного на включении элементов актуализации и эффективного развития личностного потенциала ученика, овладения методами научного мышления, научной деятельности и социальной коммуникации. Поэтому реально конструктивистский подход можно эффективно реализовывать на специально разработанных формах учебного взаимодействия — ресурсных занятиях, предполагающих информационную интеграцию двух или более учебных предметов в одном уроке с управлением двумя учителями. При этом рефлексия и интеллектуальное напряжение, такие неотъемлемые атрибуты научного познания как инсайт и нелинейное мышление, наглядное моделирование, антиципации, обострение и расчленение проблем, умение рассуждать, — должны получить адекватное отражение в поисковой активности и исследовательской деятельности школьников в контексте продуктивного социального взаимодействия.

- *Важность развития метакогнитивных стратегий исследовательского поведения на основе актуализации рефлексивных умений и процессов регуляции когнитивных, процессуальных и социальных взаимодействий.*

Готовность к реализации исследовательского поведения школьников как единой системы учебной деятельности требует рассмотрения механизмов рефлексивной регуляции в рамках интеллектуаль-

ного, личностного и коммуникативного компонентов совместного решения творческих задач за счет расширения и углубления репертуара когнитивных стратегий, способа их применения, структуры метакогнитивных навыков, расширения процедур и форм активизации рефлексивных актов (обмен мнениями, распределение социальных ролей, процедуры мониторинга учебной ситуации, контроль понимания и коррекция процедур развертывания и др.). Интеллектуальная рефлексия выступает при этом как фактор организации мышления через определение направления познавательной активности школьника в виде фиксации разрывов, оценивания их и создания средств для их конструктивного преодоления.

Будущий и настоящий учитель должен освоить единство предметного знания не только с методологических, философских и теоретических позиций на основе развитой профессиональной мотивации, но и технологически осмыслить и инновационно разрешить серию конкретных проблем освоения учебного предмета обучающимся через обобщенные конструкты и конструирование комплексов задач с интегративным содержанием. С учетом целевой функции педагогического образования при проектировании его содержания в основу должно быть положено содержание школьного образования. И это содержание должно последовательно углубляться за счет изучения предметов высшего образования. Такой процесс мы называем фундированием содержания предметной подготовки педагога [4]. Эти задачи должны быть разрешены использованием современных универсальных и специальных методов интеграции различных дисциплин, видов и приемов инновационной деятельности на основе развития познавательной самостоятельности и рефлексии школьника в принятии решений (в том числе, исследовательских) на основе поэтапного фундирования опыта личности и актуализации индивидуального стиля деятельности педагога.

Литература

1. Смирнов Е. И. Технология наглядно-модельного обучения математике.— Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1998.—323 с.
2. Арнольд В. И. Мягкие и жесткие математические модели.—М.: МЦМНО, 2000.—32 с.
3. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы. Учебное пособие / Под ред. В. Д. Шадрикова.—М.: Гардарики, 2002.—313 с.

4. Смирнов Е. И. Фундирование опыта личности в профессиональной подготовке и деятельности педагога.—Ярославль: Изд-во Канцлер, 2012.—650 с.
5. Смирнов Е. И., Зубова Е. А., Осташков В. Н. Критерии отбора исследовательских профессионально-ориентированных задач в обучение математике // Ярославский пед. вестник.—Ярославль: Изд-во ЯГПУ.—2008.—№ 4.—С. 16–22.

Смирнов Евгений Иванович
Ярославский государственный педагогический
университет им. К. Д. Ушинского
РОССИЯ, 150000, Ярославль, ул. Республиканская, 108
E-mail: e.smirnov@yspu.org

MODERN PROBLEMS IN TEACHER TRAINING IN RUSSIAN EDUCATIONAL SYSTEM

Smirnov E. I.

In this paper the key factors in the modernization of teacher training and activity are analysed. We pay the basic attention to modern educational technologies: founding, visual modeling, information and communication technology.

Key words: teacher training, founding, visual modeling, information and communication technologies.

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ¹

А. Б. Шабат

Рассматривается обратная спектральная задача для уравнений второго порядка с общей квадратичной зависимостью от спектрального параметра. Построен класс потенциалов, для которых формулы квазиклассического приближения являются точными.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, функции Йоста, квазиклассика, интерполяция.

1. Введение

Мы рассмотрим здесь один из вариантов задачи о восстановлении коэффициентов дифференциального уравнения второго порядка с квадратичным потенциалом

$$\psi_{xx} = U\psi, \quad U = U(x, k) = k^2 + ku_1(x) + u_2(x) \quad (1)$$

по, так называемым, спектральным данным. Роль спектральных данных в этом случае играют коэффициенты пропорциональности двух специальных решений (1) в нулях их вронскиана. Для определения этих специальных решений (функций Йоста) $\psi^\pm(x, k)$ используются их высокочастотные разложения, которые строятся при помощи уравнения Риккати

$$\begin{aligned} f_x + f^2 &= k^2 + ku_1 + u_2 = U, \\ f^\pm &= \begin{cases} k + a_0 + a_1 k^{-1} + \dots; \\ -k + b_0 + b_1 k^{-1} + \dots, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

соответствующего рассматриваемой спектральной задаче (1). Для уравнения Риккати коэффициенты высокочастотных разложений

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №№ 2012-1.5-12-000-1003-011, 13-01-12460-0ФИ-М-2013, а также Программы поддержки научных школ, грант № НШ-5377.2012.2.

находятся однозначно по простым рекуррентным формулам и, например,

$$f_x + f^2 = k^2 + u \Rightarrow f^+ = k + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{(2k)^j}, \quad (3)$$

$$f_1 = u, \quad f_2 = -u_x, \quad f_3 = u_{xx} - u^2, \dots$$

Функциями Йоста $\psi^{\pm}$ мы называем решения линейного уравнения (1) такие, что

$$D \log \psi^{\pm} = \frac{\psi_x^{\pm}}{\psi^{\pm}} = f^{\pm}.$$

Предполагается, что

$$\psi^+(k, x) = e^{kx} P(k, x), \quad \psi^-(k, x) = e^{-kx} Q(k, x), \quad (4)$$

где P и Q многочлены от k одной и той же степени $n \geq 1$. Это означает в частности, что вронскиан функций Йоста

$$\langle \psi^+, \psi^- \rangle = \psi^+ \psi_x^- - \psi^- \psi_x^+ = PQ_x - P_x Q - 2kPQ \quad (5)$$

является многочленом от k степени $2n+1$ с постоянными по переменной x коэффициентами. Явные формулы для коэффициентов этого многочлена в терминах интегралов по переменной x от дифференциальных полиномов типа (3) от функций $u_i(x)$, $i = 1, 2$, для рассматриваемой спектральной задачи (1) можно получить, исходя из коэффициентов разложений (2). Эти явные формулы играют большую роль в обратной спектральной задаче и не зависят по существу от предположения полиномиальности (4). Для нас в дальнейшем важны только положения нулей многочлена (5).

Полезным дополнением к сказанному выше является следующее утверждение, справедливость которого можно проверить непосредственными вычислениями.

Лемма о шварцциане. Пусть ψ_1, ψ_2 линейно независимые решения линейного дифференциального уравнения $\psi_{xx} = U(x)\psi$. Тогда их отношение $\varphi = \psi_1/\psi_2$ и произведение $\Phi = \psi_1\psi_2$ удовлетворяют, соответственно, уравнениям

$$\frac{3\varphi_{xx}^2}{4\varphi_x^2} - \frac{\varphi_{xxx}}{2\varphi_x} = U(x), \quad 4U(x)\Phi^2 + \Phi_x^2 - 2\Phi\Phi_{xx} = w^2, \quad (6)$$

где $w = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \psi_1\psi_{2,x} - \psi_{1,x}\psi_2$ вронскиан решений ψ_1 и ψ_2 .

Заканчивая это краткое введение, следует отметить, что, в случае общего положения, ряды (2), по обратным степеням спектрального параметра, являются лишь асимптотическими и предположение об их сходимости выделяет довольно специальный, но важный класс потенциалов, имеющих непосредственное отношение к задаче обобщения известных солитоноподобных решений нелинейного уравнения Шредингера и уравнения Кортевега-де Вриза. С другой стороны формулы типа (4) используются при построении квазиклассических приближенных решений спектральной задачи и, можно сказать, что мы рассматриваем случай, когда эти квазиклассические формулы являются точными.

2. Интерполяция

Считая заданными коэффициенты c_j пропорциональности функций Йоста (4) в нулях $k = k_j$ вронскиана (5) мы формулируем следующую интерполяционную задачу:

$$\frac{P(k)}{Q(k)} = \frac{p_0 k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \dots + p_n}{q_0 k^n + q_1 k^{n-1} + q_2 k^{n-2} + \dots + q_n} = \rho_j, \quad (7)$$

$$k = k_j, \quad j = 1, 2, \dots, 2n+1.$$

Так как $\rho_j = c_j \exp -2k_j x$, то должны выполняться уравнения

$$\frac{d}{dx} \rho_j + 2k_j \rho_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n+1. \quad (8)$$

Дополнительно накладываются два нормировочных условия:

$$k_{2n+1} = 0, \quad p_0 q_0 = 1. \quad (9)$$

Второе из них обусловлено выбором значения старшего коэффициента вронскиана (5), а первое достигается за счет сдвига спектрального параметра, что, как легко видеть, не ограничивает общности.

Таким образом в рассматриваемой задаче (7), (9) (ср. [1]) общее число неизвестных коэффициентов многочленов $P(k)$ и $Q(k)$ совпадает с числом уравнений, а независимая переменная x становится внешним параметром. Чтобы убедиться, что, построенные по многочленам $P(k)$ и $Q(k)$ функции (4), удовлетворяют одному и тому же линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$\psi'' = U\psi$ достаточно проверить, что их вронскиан не меняется при изменении x и мы имеем:

Лемма 1. *Предположим, что выполнены условия (8), (9) и, что соответствующая интерполяционной задаче линейная система алгебраических уравнений относительно коэффициентов многочленов $P(k)$ и $Q(k)$, является невырожденной. Тогда вронскиан (5) функций Йоста (4) выражается формулой*

$$\langle \psi^+, \psi^- \rangle = \psi^+ \psi_x^- - \psi^- \psi_x^+ = -2k \prod_{j=1}^{2n} (k - k_j). \quad (10)$$

◁ Из формулы (5) следует, что вронскиан является многочленом от k степени $2n + 1$ со старшим коэффициентом равным -2 . Этот многочлен обращается в нуль в $2n + 1$ точках $k = k_j$ в силу уравнений (8), обеспечивающих пропорциональность функций (4). Указанные нули однозначно определяют рассматриваемый многочлен и поэтому справедлива формула (10). ▷

В качестве иллюстрации к доказанной выше лемме обсудим кратко явные формулы для коэффициентов многочленов $P(k)$ и $Q(k)$ при $n = 1$.

ПРИМЕР 1. При $n = 1$ мы имеем $P = p_0 k + p_1$, $Q = q_0 k + q_1$, причем из условий (9), следуют соотношения $p_0 q_0 = 1$ и $q_1 = p_1 \alpha$, где α произвольная постоянная. Уравнения (7) дают, очевидно, два уравнения для двух коэффициентов многочлена $P = p_0 k + p_1$, которые удобно переписать в терминах $a = p_0^2$, $b = p_0 p_1$. Это дает

$$\begin{aligned} k_j a + b &= \rho_j (k_j + \alpha b), \quad j = 1, 2 \Rightarrow \\ b &= \frac{1}{\alpha} D_x \log [k_2 - k_1 + \alpha(k_1 \rho_2 - k_2 \rho_1)]. \end{aligned} \quad (11)$$

При этом функция

$$\Phi = PQ = \frac{1}{a} (k + \alpha b)(ak + b)$$

дает пример полиномиального по спектральному параметру решения уравнения (6) из введения. Отметим еще, что непосредственное вычисление коэффициентов вронскиана (5)

$$PQ_x - P_x Q - 2kPQ = -2(k^3 + w_2 k^2 + w_1 k),$$

который должен не меняться при изменении x , приводит к довольно сложной динамической системе для коэффициентов многочлена $P = p_0 k + p_1$. Однако это позволяет исследовать интересный случай кратных корней вронскиана при $w_2 = w_1 = 0$.

Как уже отмечалось из леммы 1 следует, что функции (4) являются решениями дифференциального уравнения вида $\psi_{xx} = U(x, k)\psi$ и остается выяснить характер зависимости потенциала U от спектрального параметра k . Для этого можно воспользоваться общей формулой для построения линейного дифференциального уравнения второго порядка по его фундаментальной системе решений $\psi_1 = \psi^+$, $\psi_2 = \psi^-$

$$\psi_{xx} - V\psi_x - U\psi = \frac{\langle \psi_1, \psi_2, \psi \rangle}{\langle \psi_1, \psi_2 \rangle},$$

$$\langle \psi_1, \psi_2, \psi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi \\ \psi'_1 & \psi'_2 & \psi' \\ \psi''_1 & \psi''_2 & \psi'' \end{pmatrix}.$$

При $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_x = 0$ эта формула дает

$$U(x, k) = \frac{\langle \psi_x^+, \psi_x^- \rangle}{\langle \psi^+, \psi^- \rangle}. \quad (12)$$

Остается заметить, что вронскианы $\langle \psi_x^+, \psi_x^- \rangle$ и $\langle \psi^+, \psi^- \rangle$ являются многочленами от k степени $2n + 3$ и $2n + 1$, соответственно, и что числитель обращается в нуль во всех нулях знаменателя, так как условия (7) гарантируют в точках $k = k_j$ пропорциональность не только функций Йоста $\psi^\pm(x)$, но и их производных $\psi_x^\pm(x)$.

Таким образом решение интерполяционной задачи (7) действительно позволяет восстановить потенциал спектральной задачи (1) по заданным коэффициентам пропорциональности функций Йоста (4). Нули вронскиана (10) играют в этом упрощенном варианте обратной спектральной задачи роль собственных значений.

Открытым вопросом остается качественное исследование решений интерполяционной задачи (7) в общем квадратичном случае потенциала $U = k^2 + u_1 k + u_2$ и приложения результатов этого исследования к связанным с (1) нелинейным уравнениям с частными производными (см. [2, пример 4]) родственным НУШ (эволюционное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью). Хорошо изучен случай $u_1 = 0$, связанный с обратной задачей рассеяния на

прямой для оператора Шредингера $L = -D_x^2 + u(x)$. Результаты качественного исследования, для этого, важного с разных точек зрения, частного случая интерполяционной задачи, кратко обсуждаются в следующем разделе.

2.1. Солитоны. Рассматриваемая в данном разделе спектральная задача

$$L\psi = \lambda\psi \Leftrightarrow \psi_{xx} = (u(x) + k^2)\psi, \quad \lambda \equiv -k^2 \quad (13)$$

обладает симметрией при замене $k \leftrightarrow -k$ (ср. (3)), что приводит к следующему дополнительному соотношению между функциями Йоста (4):

$$\psi^-(x, k) = (-1)^n \psi^+(x, -k) \Leftrightarrow Q(k) = P(-k)(-1)^n. \quad (14)$$

Соответствующая модификации интерполяционной задачи (7)

$$\frac{P(k)}{Q(k)} = \frac{k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \dots + p_n}{k^n + q_1 k^{n-1} + q_2 k^{n-2} + \dots + q_n} = \rho_j, \quad (15)$$

$$k = k_j, \quad j = 1, 2, \dots, 2n$$

обсуждались в моем докладе на семинаре И. М. Гельфанда в 1974 г. (см. Shubin, Gelfand.notes) или url:www.claymath.org/publications/GelfandNotes.

Потенциал спектральной задачи (13) предполагается вещественным, гладким и удовлетворяющим условию достаточно быстрого убывания на бесконечности $u(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \pm\infty$. Дискретный спектр оператора $L = -D^2 + u$ в этом случае располагается на вещественной оси и состоит из конечного набора отрицательных собственных значений $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, n$, которые мы занумеруем в порядке возрастания

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 0.$$

Соответственно нумеруются и $2n$ узлов интерполяции $\pm k_j, k_j^2 = -\lambda_j$. Знаки коэффициентов пропорциональности функций Йоста в точках $k = k_j, k_1 > k_2 > \dots > k_n$ должны чередоваться в силу осцилляционных теорем и, поэтому, в рассматриваемой интерполяционной задаче (15) предполагается, что

$$\rho_j^+ = (-1)^{j+1} \exp(-2y_j); \quad y_j = k_j x + \beta_j, \quad \beta_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (16)$$

В силу (14) функции ρ_j^- , отвечающие отрицательным узлам интерполяции $k = -k_j$ определяются из условия

$$\rho_j^+ \rho_j^- = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Дополнительное $2n + 1$ условие в точке $k = 0$, используемое в доказательстве леммы 1, имеет для задачи (15), следующий вид

$$Q(k) = P(-k)(-1)^n \Rightarrow \frac{p_n}{q_n} = (-1)^n. \quad (18)$$

Таким образом, все полученные ранее результаты для общей интерполяционной задачи (7), переносятся, с очевидными уточнениями, на случай рассматриваемой обратной задачи для оператора Шредингера. Данными здесь являются вронскиан функций Йоста:

$$\langle \psi^+, \psi^- \rangle = -2k \prod_{j=1}^n (k^2 - k_j^2), \quad k_1 > k_2 > \dots > k_n > 0 \quad (19)$$

и коэффициенты пропорциональности $\rho_j^\pm$ удовлетворяющие условиям (16)–(18). Исследование разрешимости этой интерполяционной задачи приводит к следующему результату.

Лемма 2 [4]. Сформулированная интерполяционная задача (15) эквивалентна следующей линейной системе алгебраических уравнений для коэффициентов многочлена $P(k)$

$$\begin{cases} \frac{p_1}{k_1} + \frac{p_2}{k_1^2} \operatorname{th} y_1 + \frac{p_3}{k_1^3} + \dots + \operatorname{th} y_1 = 0, \\ \frac{p_1}{k_2} \operatorname{th} y_2 + \frac{p_2}{k_2^2} + \frac{p_3}{k_2^3} \operatorname{th} y_2 + \dots + 1 = 0, \\ \frac{p_1}{k_3} + \frac{p_2}{k_3^2} \operatorname{th} y_3 + \frac{p_3}{k_3^3} + \dots + \operatorname{th} y_3 = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (20)$$

определитель которой Δ допускает оценку снизу, зависящую только от выбора вронскиана (19):

$$\Delta > \frac{1}{k_1 \dots k_N} \prod_{i>j} \left(\frac{1}{k_i} - \frac{1}{k_j} \right) > 0. \quad (21)$$

ПРИМЕР 2. При $n = 1$ интерполяционная задача (15)–(18) дает

$$p_1 = -k_1 \operatorname{th} y_1, \quad \psi^\pm = (k \pm p_1) e^{\pm kx}, \quad \langle \psi^+, \psi^- \rangle = -2k(k^2 - k_1^2)$$

и, соответствующий оператор Шредингера имеет вид (см. (12)):

$$L = -D_x^2 + u(x), \quad u = -2 k_1^2 / \operatorname{ch}^2(y_1).$$

Для того, чтобы получить достаточно удобную формулу для потенциала $u(x)$ при произвольном n нужно рассмотреть произведение функций Йоста $\Phi = PQ$ (см. введение). В силу условия (14) это произведение является четной функцией k и, следовательно, является многочленом от $\lambda = -k^2$ степени n :

$$PQ \equiv \Phi(x, \lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (\lambda - \gamma_i(x)).$$

Подстановка этого многочлена в уравнение (6) из введения и сравнение коэффициентов при λ^{2n} дает

$$u(x) = 2 \sum_{j=1}^n (\gamma_j(x) - \lambda_j). \quad (22)$$

Остается заметить, что в силу условий (15)–(18) рассматриваемое произведение функций Йоста меняет знак на каждом из n отрезков $\lambda_{j+1} \geq \lambda \geq \lambda_j$, $j = 1, \dots, n$. Значит на каждом из этих отрезков находится один из корней γ_j и, поэтому, при подходящей нумерации справедливы неравенства:

$$\lambda_1 < \gamma_1(x) \leq \lambda_2 \leq \gamma_2(x) \leq \lambda_3, \dots, \lambda_n \leq \gamma_n \leq \lambda_{n+1} = 0. \quad (23)$$

Следствием этих неравенств и формулы (22) является замечательная по своей простоте и не зависящая от n оценка потенциала $u(x)$ через первое собственное λ_1 соответствующего оператора Шредингера (ср. [3]):

$$2\lambda_1 \leq u(x) < 0.$$

Литература

1. Baker G., Graves-Morris P. Pade approximants.—N. Y.: Cambridge Univ. Press, 1996.
2. Шабат А. Б. Симметрические многочлены и законы сохранения // Владикавказ. мат. журн.—2012.—Т. 14, № 4.—С. 83–94.
3. Шабат А. Б. О потенциалах с нулевым коэффициентом отражения // Динамика сплошной среды.—Новосибирск, 1970.—№ 5.—С. 130–145.
4. Адлер В. Э. N-солитонное решение уравнения Кортевега-де Фриза // Асимпт. методы мат. физики.—Уфа, 1989.—С. 3–8.

ШАБАТ АЛЕКСЕЙ БОРИСОВИЧ
Карачаево-Черкесский государственный
университет им. У. Д. Алиева
РОССИЯ, 357190, Карачаевск, ул. Ленина, 29;
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
РОССИЯ, 142432, Черноголовка, пр. Ак. Семенова, д. 1-А
E-mail: shabatab@mail.ru

ON AN INTERPOLATION PROBLEM

Shabat A. B.

The inverse spectral problem for second order equations with a general quadratic dependence in spectral parameter is considered. A class of potentials with an exact quasi-classics approximation formulae is constructed.

Key words: inverse spectral problem, Jost functions, quasi-classics, interpolation.

Секция I

Дифференциальные и интегральные уравнения

ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЕРТКИ
С НЕЧЕТНОСТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ¹

С. Н. Асхабов

Методом потенциальных монотонных операторов доказано, что дискретное уравнение типа свертки с нечетностепенной нелинейностью имеет единственное решение в весовом вещественном пространстве числовых последовательностей $\ell_p(\varrho)$ и это решение может быть найдено градиентным методом.

Ключевые слова: нелинейное дискретное уравнение, оператор типа свертки, потенциальный оператор, монотонный оператор.

1. Введение

Теория линейных дискретных уравнений типа свертки достаточно хорошо разработана и нашла многочисленные и разнообразные приложения (см., например, [1]). Что касается теории нелинейных дискретных уравнений типа свертки, то в настоящее время она находится в стадии становления и в этой области опубликовано не так много работ (см. статьи [2–6], монографию [7, §§ 27–29] и приведенную в них библиографию). Интерес к нелинейным дискретным уравнениям вызван не только их приложениями (например, при решении плоских задач теории упругости, стохастических задач и других, см. [2, 6, 7]), но и тем, что методы и результаты теории линейных дискретных уравнений, как правило, не распространяются на соответствующие им нелинейные уравнения, т. е. имеются принципиальные различия как по методам исследования, так и по характеру получаемых результатов. Как известно, локальные свойства линейных операторов фактически полностью определяют их свойства во всем пространстве. Поэтому в случае линейных уравнений основные результаты имеют место сразу для целой серии пространств $m, c, c_0, \ell_p, \dots$ (подробнее см. [1, 7]). Нелинейные операторы и уравнения такими свойствами не обладают. Например, из непрерывности

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00422.

нелинейного оператора в одной точке пространства не следует его непрерывность во всем пространстве, из непрерывности нелинейного оператора на ограниченном замкнутом множестве не следует его равномерная непрерывность на этом множестве. Кроме того, нелинейный оператор может не обладать свойством непрерывности и при этом быть компактным или же быть непрерывным и не обладать свойством компактности. Поэтому в случае нелинейных уравнений картина принципиально меняется и зависит не только от выбора рассматриваемого пространства, но и от характера допускаемой нелинейности.

В монографии [7, §§ 27–29] для различных классов нелинейных дискретных уравнений типа свертки доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решений в весовых и безвесовых пространствах числовых последовательностей. Кроме того, комбинированием метода монотонных операторов и принципа сжимающих отображений, доказаны теоремы о приближенном их решении в пространстве ℓ_2 . Поскольку рамки пространства ℓ_2 не позволяют охватить дискретные уравнения типа свертки со степенными нелинейностями, то естественно возникла задача приближенного решения таких уравнений в более широких пространствах ℓ_p или ℓ_p с весом. В этой связи в данной работе доказано, что дискретное уравнение типа свертки с нечетностепенной нелинейностью имеет в пространстве $\ell_p(\varrho)$ с общим весом ϱ единственное решение и (основной результат) это решение можно найти градиентным методом (методом наискорейшего спуска).

2. Дискретный оператор свертки

Введем в рассмотрение вещественное весовое пространство $\ell_p(\varrho)$. Пусть $\varrho = \{\varrho_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ есть последовательность положительных чисел. Обозначим через $\ell_p(\varrho)$, $1 < p < \infty$, множество всех вещественных числовых последовательностей $u = \{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ таких, что

$$\|u\|_{p,1} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Если $\varrho_n = 1$ для любого $n \in \mathbf{Z}$, т. е. последовательность ϱ является стационарной ($\varrho = 1$), то вместо $\ell_p(\varrho)$ и $\|\cdot\|_{p,1}$ будем, как обычно, соответственно писать ℓ_p и $\|\cdot\|_p$.

Известно, что $\ell_p(\varrho)$ является рефлексивным банаховым пространством и $\ell_p^*(\varrho) = \ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$, $p' = \frac{p}{p-1}$, есть сопряженное с ним пространство. Норму в $\ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$ обозначим через $\|\cdot\|_{p',1-p'}$.

Будем говорить, что банахово пространство X непрерывно вложено в банахово пространство Y и писать $X \subset Y$, если выполнены три условия: 1) из того, что $x \in X$ следует, что $x \in Y$; 2) пространство Y индуцирует на X структуру векторного пространства, совпадающую со структурой векторного пространства X ; 3) существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|x\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X$ для любого $x \in X$.

Известно, что для пространств ℓ_p имеет место непрерывное вложение $\ell_p \subset \ell_q$, если $p < q$, в отличие от пространств Лебега $L_p(a, b)$, для которых наоборот $L_q(a, b) \subset L_p(a, b)$, если $p < q$. Оказывается, что в случае весовых пространств $\ell_p(\varrho)$, в отличие от весовых пространств $L_p(\varrho)$, возможно обратное вложение: $\ell_q(\varrho_1) \subset \ell_p(\varrho_2)$, если $p < q$. А именно, справедлива следующая простая лемма, которая будет использована ниже.

Лемма 1. Пусть $2 \leq p < \infty$ и вес $\varrho = \{\varrho_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условию:

$$\gamma = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n^{-\frac{2}{p-2}} \right)^{\frac{p-2}{2p}} < \infty \quad (1)$$

(при $p = 2$ под γ понимается $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \varrho_n^{-1/2}$). Тогда справедливы непрерывные вложения

$$\ell_p(\varrho) \subset \ell_2 \subset \ell_{p'}(\varrho^{1-p'}), \quad (2)$$

причем

$$\begin{aligned} \|u\|_2 &\leq \gamma \cdot \|u\|_{p,1} \quad (\forall u \in \ell_p(\varrho)), \\ \|u\|_{p',1-p'} &\leq \gamma \cdot \|u\|_2 \quad (\forall u \in \ell_2). \end{aligned} \quad (3)$$

◁ Пусть $u \in \ell_p(\varrho)$ и $p > 2$ (при $p = 2$ доказательство аналогично и проще). Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\frac{p}{2}$ и $\frac{p}{p-2}$, имеем

$$\|u\|_2 \leq \left[\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n |u_n|^p \right)^{\frac{2}{p}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n^{-\frac{2}{p-2}} \right)^{\frac{p-2}{p}} \right]^{\frac{1}{2}} = \gamma \cdot \|u\|_{p,1},$$

т. е. $\ell_p(\varrho) \subset \ell_2$ и справедливо первое неравенство из (3).

Аналогично, применяя неравенство Гёльдера с показателями $\frac{2}{p'}$ и $\frac{2}{2-p'}$, для любого $u \in \ell_2$ имеем

$$\|u\|_{p', 1-p'} \leq \left[\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^2 \right)^{\frac{p'}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n^{\frac{2(1-p')}{2-p'}} \right)^{\frac{2-p'}{2}} \right]^{\frac{1}{p'}} = \gamma \cdot \|u\|_2.$$

Значит, $\ell_2 \subset \ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$ и справедливо второе неравенство из (3). $\triangleright$

Рассмотрим теперь дискретный оператор свертки H :

$$(Hu)_n = (h * u)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} u_k, \quad n \in \mathbf{Z},$$

в пространстве $\ell_p(\varrho)$, $1 \leq p < \infty$.

Прежде, чем рассмотреть вопрос о положительности и потенциальности оператора свертки H в пространстве $\ell_p(\varrho)$, введем необходимые определения и обозначения. Пусть X есть вещественное банахово пространство, а X^* есть сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y, x \rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$. Функционал (не обязательно линейный) $f : X \rightarrow \mathbf{R}^1$, где $\mathbf{R}^1 = (-\infty, \infty)$, называется дифференцируемым по Гато, если существует оператор $A : X \rightarrow X^*$ такой, что для всех $u, v \in X$ выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + t \cdot v) - f(u)}{t} = \langle Au, v \rangle.$$

При этом оператор A называют *градиентом* функционала f и пишут $A = \text{grad } f$. Оператор $A : X \rightarrow X^*$ называется *потенциальным*, если существует функционал $f : X \rightarrow \mathbf{R}^1$ такой, что оператор A является его градиентом. При этом функционал f называют *потенциалом* оператора A .

Всюду в данной работе, если не оговорено иное, предполагается, что ядро $h = \{h_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ оператора свертки H удовлетворяет условию:

$$h \in \ell_1 \quad \text{и} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \cdot \cos(nt) \geq 0 \quad (\forall t \in [0, \pi]). \quad (4)$$

Заметим (см. [7, с. 247]), что условие (4) не только достаточно, но и необходимо для положительности дискретного оператора свертки H в гильбертовом пространстве ℓ_2 . Примеры ядер h , удовлетворяющих условию (4), приведены в [6] и [7].

При исследовании нелинейного дискретного уравнения типа свертки в весовом пространстве $\ell_p(\varrho)$ существенно будет использоваться следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $2 \leq p < \infty$, ядро h удовлетворяет условию (4), а вес $\varrho = \{\varrho_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — условию (1). Тогда дискретный оператор свертки H действует непрерывно из $\ell_p(\varrho)$ в $\ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$ и положителен, причем

$$\|Hu\|_{p',1-p'} \leq \gamma^2 \cdot \|h\|_1 \cdot \|u\|_{p,1} \quad (\forall u \in \ell_p(\varrho)). \quad (5)$$

Если, дополнительно, $h_{-n} = h_n$ для всех целых n , то оператор H является потенциальным.

◁ Пусть $u \in \ell_p(\varrho)$. В силу вложений (2) и первого неравенства из (3), имеем: $u \in \ell_2$ и $\|u\|_2 \leq \gamma \cdot \|u\|_{p,1}$. Так как, согласно дискретному неравенству Юнга [7, с. 245], $\|Hu\|_2 \leq \|h\|_1 \|u\|_2$ и, в силу второго неравенства из (3), $\|Hu\|_{p',1-p'} \leq \gamma \cdot \|Hu\|_2$, то для любого $u \in \ell_p(\varrho)$ справедливы неравенства

$$\|Hu\|_{p',1-p'} \leq \gamma \cdot \|Hu\|_2 \leq \gamma \cdot \|h\|_1 \cdot \|u\|_2 \leq \gamma^2 \cdot \|h\|_1 \cdot \|u\|_{p,1}.$$

Значит, оператор H действует непрерывно из $\ell_p(\varrho)$ в $\ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$ и выполнено неравенство (5).

Далее, согласно следствию 28.1 из [7], поскольку выполнено условие (4), скалярное произведение $(Hu, u) \geq 0$ для любого $u \in \ell_2$. Поэтому, с учетом первого вложения из (2), имеем

$$\langle Hu, u \rangle = (Hu, u) \geq 0 \quad (\forall u \in \ell_p(\varrho)),$$

т. е. оператор свертки H является положительным.

Наконец, так как в силу условия $h_{-n} = h_n$ для любого $n \in \mathbf{Z}$ оператор свертки H является симметрическим, то (на основании примера 1.2 из [7]) он обладает свойством потенциальности. ▷

3. Нелинейное уравнение типа свертки

Прежде чем приступить к исследованию нелинейного дискретного уравнения типа свертки, введем необходимые определения и обозначения. Пусть, как и выше, X есть вещественное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, а X^* — сопряженное с ним пространство с нормой $\|\cdot\|_*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $u, v \in X$ — произвольные элементы. Оператор $A : X \rightarrow X^*$ (т. е. действующий из X в X^*) называется:

хеминепрерывным, если функция $s \rightarrow \langle A(u + s \cdot v), w \rangle$ непрерывна на $[0, 1]$ при любых фиксированных $u, v, w \in X$;

равномерно монотонным, если $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \beta(\|u - v\|)$, где β — возрастающая на $[0, \infty)$ функция такая, что $\beta(0) = 0$;

ограниченно липшиц-непрерывным, если $\|Au - Av\|_* \leq \mu(r) \cdot \|u - v\|$, где μ — возрастающая на $[0, \infty)$ функция, а $r = \max(\|u\|, \|v\|)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Банахово пространство X называется *строго выпуклым*, если $\forall u, v \in X$ из того, что $u \neq v$, $\|u\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$ следует, что $\|u + v\| < 2$.

Из дискретных неравенств Кларксона для весовых пространств $\ell_p(\varrho)$, $1 < p < \infty$ (см. [8, с. 536], где $\varrho = 1$):

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{p,1}^{p'} + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_{p,1}^{p'} \leq \frac{1}{2^{p'-1}} \left(\|u\|_{p,1}^p + \|v\|_{p,1}^p \right)^{p'-1}, \quad p \leq 2,$$

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{p,1}^p + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_{p,1}^p \leq \frac{1}{2} \left(\|u\|_{p,1}^p + \|v\|_{p,1}^p \right), \quad p \geq 2,$$

непосредственно вытекает, что $\ell_p(\varrho)$ и $\ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$ при $1 < p < \infty$ являются строго выпуклыми пространствами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Оператор $J : X \rightarrow X^*$, где X^* — строго выпуклое пространство, называется *дуализующим отображением*, если для любого $u \in X$ выполняются равенства $\langle Ju, u \rangle = \|u\|^2 = \|Ju\|_*^2$.

Для пространств $\ell_p(\varrho)$, $1 < p < \infty$, дуализующее отображение однозначно определяется по формуле: $Ju = \|u\|_{p,1}^{2-p} \cdot z$, где $z = \{\varrho_n |u_n|^{p-2} u_n\}_{n=-\infty}^\infty$ (случай $\varrho = 1$ см. в [9]).

Следующая теорема является прямым следствием известных результатов, изложенных в [10] (подробное ее доказательство см. в [7]).

Теорема 1 [10]. Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство, и $A : X \rightarrow X^*$ — хеминепрерывный равномерно монотонный коэрцитивный оператор. Тогда уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in X$ при любом $f \in X^*$. Кроме того, если X и X^* — строго выпуклые пространства, а оператор A является потенциальным ограничено липшиц-непрерывным, то последовательность $u_{n+1} = u_n - \delta_n \cdot J^*(Au_n - f)$, где $\delta_n = \min\{1, 2/[\varepsilon + \mu(\|u_n\| + \|Au_n - f\|_*)]\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $J^* : X^* \rightarrow X$ —

дуализующее отображение для X^* , $\varepsilon > 0$ — любое число, сходится к u^* по норме пространства X .

Указанный в теореме 1 способ нахождения решения u^* известен [10] как *градиентный* метод, так как $J^*v = \|v\|_* \cdot \text{grad } \|v\|_*$.

Прежде чем приступить к доказательству следующей (основной) теоремы, заметим, что дуализующее отображение J^* для пространства $\ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$ единственным образом определяется по формуле:

$$J^*v = \|v\|_{p',1-p'}^{2-p'} \cdot z, \quad \text{где } z = \{\varrho_n^{1-p'} |v_n|^{p'-2} v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}. \quad (6)$$

Теорема 2. Пусть $p > 2$ — четное число, ядро h удовлетворяет условию (4), а вес ϱ — условию (1). Тогда при любом $f \in \ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$ нелинейное дискретное уравнение типа свертки

$$\varrho_n \cdot u_n^{p-1} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} u_k = f_n, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (7)$$

имеет единственное решение $u^* \in \ell_p(\varrho)$. Если, дополнительно, $h_{-n} = h_n$ при любом целом n , то к этому решению сходится по норме $\ell_p(\varrho)$ последовательность $u^{(i)} = \{u_n^{(i)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, определяемая по формуле

$$\begin{aligned} u_n^{(i+1)} = & u_n^{(i)} - \delta^{(i)} \cdot \varrho_n^{-\frac{1}{p-1}} \cdot \|Au^{(i)} - f\|_{p',1-p'}^{\frac{p-2}{p-1}} \times \\ & \times |Au_n^{(i)} - f_n|^{\frac{2-p}{p-1}} \cdot (Au_n^{(i)} - f_n), \end{aligned} \quad (8)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$, $u^{(0)} = \{u_n^{(0)}\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell_p(\varrho)$ — любое начальное приближение, $Au = \varrho \cdot u^{p-1} + Hu$,

$$\delta^{(i)} = \min \left\{ 1, \frac{2}{\varepsilon + (p-1)(\|u^{(i)}\|_{p,1} + \|Au^{(i)} - f\|_{p',1-p'})^{p-2} + \gamma^2 \|h\|_1} \right\},$$

$\varepsilon > 0$ — произвольное число.

◁ Запишем уравнение (7) в операторном виде: $Au = f$, где $Au = \varrho \cdot u^{p-1} + Hu$. Легко видеть (подробнее см. [6, с. 29]), что оператор A , как сумма двух непрерывных потенциальных операторов, является непрерывным потенциальным оператором, действующим из $\ell_p(\varrho)$ в $\ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$.

Покажем, что оператор A является равномерно монотонным. Используя лемму 2 и числовое неравенство $(t^{p-1} - s^{p-1})(t - s) \geq$

$2^{2-p}|t-s|^p$, справедливое (см., например, [7]) для всех $t, s \in (-\infty, \infty)$ и четных $p \geq 2$, имеем

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n (u_n^{p-1} - v_n^{p-1})(u_n - v_n) + \langle H(u-v), u-v \rangle \geq \\ &\geq 2^{2-p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n |u_n - v_n|^p = \beta(\|u - v\|_{p,1}) \quad (\forall u, v \in \ell_p(\varrho)), \end{aligned}$$

где $\beta(x) = 2^{2-p}x^p$ — строго возрастающая на $[0, \infty)$ функция такая, что $\beta(0) = 0$. Значит, A — непрерывный равномерно монотонный оператор, и, следовательно, по теореме 1 уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in \ell_p(\varrho)$.

Осталось доказать, что это решение можно найти по итерационной формуле (8). Поскольку пространства $\ell_p(\varrho)$ и $\ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$ являются строго выпуклыми и оператор A является непрерывным, равномерно монотонным и потенциальным, то, с учетом явного вида (6) дуализующего отображения J^* , достаточно доказать (на основании теоремы 1), что оператор A является ограниченно липшиц-непрерывным. Используя числовое неравенство $|t^{p-1} - s^{p-1}| \leq \frac{p-1}{2}|t-s|(t^{p-2} + s^{p-2})$, справедливое (см., например, [7]) для всех $t, s \in (-\infty, \infty)$ и четных $p \geq 2$, для любых $u, v \in \ell_p(\varrho)$ имеем

$$\begin{aligned} \|\varrho u^{p-1} - \varrho v^{p-1}\|_{p', 1-p'} &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n^{1-p'} |\varrho_n (u_n^{p-1} - v_n^{p-1})|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n |u_n^{p-1} - v_n^{p-1}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \\ &\leq \frac{p-1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n |u_n - v_n|^{p'} |u_n^{p-2} + v_n^{p-2}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \\ &= \frac{p-1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n^{p'-1} |u_n - v_n|^{p'} \varrho_n^{2-p'} |u_n^{p-2} + v_n^{p-2}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \\ &(\text{применяем неравенство Гёльдера с показателями } \frac{p}{p'} \text{ и } \frac{p}{p-p'}) \\ &\leq \frac{p-1}{2} \left(\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n^{\frac{(p'-1)p}{p'}} |u_n - v_n|^p \right]^{\frac{p'}{p}} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n^{\frac{(2-p')p}{p-p'}} |u_n^{p-2} + v_n^{p-2}|^{\frac{pp'}{p-p'}} \right]^{\frac{p-p'}{p}} \Big)^{\frac{1}{p'}} = \\
& = \frac{p-1}{2} \|u-v\|_{p,1} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n |u_n^{p-2} + v_n^{p-2}|^{\frac{p}{p-2}} \right)^{\frac{p-2}{p}} \leq \\
& \quad (\text{применяем неравенство Минковского}) \\
& \leq \frac{p-1}{2} \|u-v\|_{p,1} \left(\|u\|_{p,1}^{p-2} + \|v\|_{p,1}^{p-2} \right) \leq (p-1) r^{p-2} \|u-v\|_{p,1},
\end{aligned}$$

где $r = \max(\|u\|_{p,1}, \|v\|_{p,1})$.

Используя последнее неравенство и неравенство (5), получаем

$$\begin{aligned}
\|Au - Av\|_{p',1-p'} & \leq \|\varrho u^{p-1} - \varrho v^{p-1}\|_{p',1-p'} + \|H(u-v)\|_{p',1-p'} \leq \\
& \leq (p-1) r^{p-2} \|u-v\|_{p,1} + \gamma^2 \|h\|_1 \|u-v\|_{p,1} = \mu(r) \|u-v\|_{p,1},
\end{aligned}$$

где $\mu(r) = (p-1) r^{p-2} + \gamma^2 \|h\|_1$ — возрастающая на $[0, \infty)$ функция. Значит, A — ограниченно липшиц-непрерывный оператор. $\triangleright$

В заключение отметим, что в случае, когда ядро $h = \{h_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ оператора свертки H имеет специальный вид:

$$h_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{n+k} \cdot g_k, \quad \text{где } g = \{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell_1,$$

аналог теоремы 2 доказан в [6]. Заметим также, что ядро такого вида удовлетворяет условию (4), причем (см. [7, с. 248])

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \cdot \cos(nt) = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \cdot e^{i n t} \right|^2 \geq 0 \quad (\forall t \in [0, \pi]).$$

Литература

1. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки.—М.: Наука, 1978.—296 с.
2. Дедагич Ф., Забрейко П. П. Об операторах суперпозиции в пространствах ℓ_p // Сиб. мат. журн.—1987.—Т. 28, № 1.—С. 86–98.
3. Асхабов С. Н., Каралетянц Н. К. Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью // Дифференц. уравнения.—1989.—Т. 25, № 10.—С. 1777–1784.

4. Асхабов С. Н., Карапетянц Н. К. Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью в комплексных пространствах // Докл. АН СССР.—1992.—Т. 322, № 6.—С. 1015–1018.
5. Askhabov S. N., Karapetian N. K. Convolution-type discrete equations with monotonous nonlinearity in complex spaces // J. Integral Equat. Math. Phys.—1992.—Vol. 1, № 1.—Р. 44–66.
6. Асхабов С. Н. Приближенное решение нелинейных дискретных уравнений типа свертки // Современная математика. Фундам. направления.—2012.—Т. 45.—С. 18–31.
7. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки.—М.: Физматлит, 2009.—304 с.
8. Mitrinovic D. S., Pecaric J. E., Fink A. M. Classical and New Inequalities in Analysis.—Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publish, 1993.—740 p.
9. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.—М.: Наука, 1972.—416 с.
10. Гаевский Х., Грегер К., Захарнас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.—М.: Мир, 1978.—336 с.

АСХАБОВ СУЛТАН НАЖМУДИНОВИЧ
 Чеченский государственный университет
 РОССИЯ, 364907, Грозный, ул. Шерипова, 32
 E-mail: askhabov@yandex.ru

DISCRETE CONVOLUTION TYPE EQUATION WITH ODDPOWER NONLINEARITY

Askhabov S. N.

It is proven by the potential monotone operators method that the discrete convolution type equation with oddpower nonlinearity has a unique solution in weighted real space of numerical sequences $\ell_p(\varrho)$ and the solution can be found by the gradient method.

Key words: nonlinear discrete equation, convolution type operator, potential operator, monotone operator.

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ В СВЕРТКАХ В МНОГОМЕРНОМ КОНУСЕ

В. Б. Васильев

Рассматриваются многомерные уравнения свертки в конусе, и с использованием концепции волновой факторизации эллиптического символа описывается структура общего решения такого уравнения в пространствах Соболева — Слободецкого.

Ключевые слова: многомерная свертка, волновая факторизация, конус.

1. Введение

В теории псевдодифференциальных уравнений и краевых задач принципиальную роль играет исследование обратимости модельного оператора в канонической области [1]. Такой модельный оператор в известном смысле можно трактовать как оператор свертки. В 90-е гг. автор выдвинул идею рассматривать конус как одну из канонических областей, обслуживающую теорию псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с негладким краем [2]. Наличие специальной волновой факторизации символа эллиптического оператора позволило дать полную картину разрешимости модельного псевдодифференциального уравнения в двумерном случае [3]. Автор выражает надежду, что более детальное рассмотрение проведенных выкладок позволит перенести основные результаты на пространство произвольной размерности.

2. Уравнения и волновая факторизация

Псевдодифференциальный оператор A с символом $A(\xi)$, $\xi \in \mathbf{R}^m$, определяется формулой

$$(Au)(x) = \int_{\mathbf{R}^m} A(\xi) \tilde{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi, \quad (1)$$

где $\tilde{u}$ — преобразование Фурье.

Это — модельный оператор. Вообще-то, рассматриваются псевдодифференциальные операторы с символами, зависящими от пространственной переменной x . Следуя сложившейся традиции, переменную x мы называем пространственной, а ξ — ко-переменной или импульсной переменной. Оператор с символом $A(x, \xi)$ определяется аналогично (1) формулой

$$u(x) \mapsto \int_{\mathbf{R}^m} A(x, \xi) \tilde{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

— «замораживанием» пространственной переменной x .

Здесь мы будем рассматривать следующий класс символов, не зависящих от пространственной переменной x и удовлетворяющих условию: $\exists c_1, c_2$ такие, что

$$c_1 \leq |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| \leq c_2, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^m. \quad (2)$$

Число $\alpha \in \mathbf{R}$ мы назовем порядком псевдодифференциального оператора A .

Класс символов, удовлетворяющих условию (2), обозначим P_α .

Определим функциональные пространства Соболева — Слободецкого $H^s(\mathbf{R}^m)$ как гильбертовы пространства обобщенных функций [1] с нормой

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbf{R}^m} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi.$$

Хорошо известно, что оператор из класса P_α — ограниченный линейный оператор, действующий из пространства $H^s(\mathbf{R}^m)$ в пространство $H^{s-\alpha}(\mathbf{R}^m)$ [1].

Перейдем к изучению разрешимости псевдодифференциальных уравнений

$$(Au)(x) = f(x), \quad x \in C_+^a, \quad (3)$$

в пространствах $H^s(C_+^a)$, где C_+^a — m -мерный конус $C_+^a = \{x \in \mathbf{R}^m : x = (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m), x_m > a|x'|, a > 0\}$, $x' = (x_1, \dots, x_{m-1})$.

По определению, $H^s(C_+^a)$ состоит из обобщенных функций из $H^s(\mathbf{R}^m)$ с носителем в C_+^a . Норма в $H^s(C_+^a)$ индуцирована нормой $H^s(\mathbf{R}^m)$. Правая часть f берется из пространства $H_0^{s-\alpha}(C_+^a)$, которое

состоит из обобщенных функций $S'(C_+^a)$, допускающих продолжение на $H^{s-\alpha}(\mathbf{R}^m)$. Норма в $H_0^{s-\alpha}(C_+^a)$ задается как

$$\|f\|_{s-\alpha}^+ = \inf \|lf\|_{s-\alpha},$$

где *infimum* берется по всем продолжениям l .

Определим далее специальный многомерный сингулярный интеграл формулой

$$(G_mu)(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \int_{\mathbf{R}^m} \frac{u(y', y_m) dy' dy_m}{(|x' - y'|^2 - a^2(x_m - y_m + i\tau)^2)^{m/2}}.$$

Для описания картины разрешимости уравнения (3) введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Под волновой факторизацией символа $A(\xi)$, удовлетворяющего условию (2), мы будем понимать его представление в виде

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi),$$

где множители $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ определены для всех допустимых значений $\xi \in \mathbf{R}^m$, кроме, быть может, точек вида $\{\xi \in \mathbf{R}^m : |\xi'|^2 = a^2\xi_m^2\}$;
- 2) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области $T(C_+^a)$, $T(C_-^a)$ соответственно, которые удовлетворяют оценкам

$$\left| A_{\neq}^{\pm 1}(\xi + i\tau) \right| \leq c_1 (1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm \alpha},$$

$$\left| A_{=}^{\pm 1}(\xi - i\tau) \right| \leq c_2 (1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha - \alpha)} \quad \forall \tau \in C_+^a.$$

Число α называется индексом волновой факторизации.

В дальнейшем предполагаем, что требуемая волновая факторизация существует.

3. Схема исследования

Сейчас мы рассмотрим уравнение (3) только для случая $\alpha - s = n + \delta$, $n \in \mathbf{N}$, $|\delta| < 1/2$. Общее решение может быть сконструировано следующим образом. После волновой факторизации символа с предварительным преобразованием Фурье мы записываем

$$A_{\neq}(\xi)\tilde{u}_+(\xi) + A_{=}^{-1}(\xi)u_-(\xi) = A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{l}f(\xi).$$

Можно заметить, что $A_{\pm}^{-1}(\xi)\tilde{l}f(\xi)$ принадлежит пространству $H^{s-\varpi}(\mathbf{R}^m)$, и если мы выберем многочлен $Q(\xi)$, удовлетворяющий условию

$$|Q(\xi)| \sim (1 + |\xi|)^n,$$

то $Q^{-1}(\xi)A_{\pm}^{-1}(\xi)\tilde{l}f(\xi)$ будет принадлежать пространству $\tilde{H}^{-\delta}(\mathbf{R}^m)$.

Далее, согласно теории многомерной задачи Римана [2], мы можем разложить последнюю функцию на два слагаемых (задача скачка)

$$Q^{-1}A_{\pm}^{-1}\tilde{l}f = f_+ + f_-,$$

где $f_+ \in \tilde{H}(C_+^a)$, $f_- \in \tilde{H}(\mathbf{R}^m \setminus C_+^a)$.

Таким образом, имеем следующее равенство

$$Q^{-1}A_{\neq}\tilde{u}_+ + Q^{-1}A_{=}\tilde{u}_- = f_+ + f_-$$

или

$$Q^{-1}A_{\neq}\tilde{u}_+ - f_+ = f_- - Q^{-1}A_{=}\tilde{u}_-.$$

Другими словами,

$$A_{\neq}\tilde{u}_+ - Qf_+ = Qf_- - A_{=}\tilde{u}_-.$$

Левая часть равенства принадлежит пространству $\tilde{H}^{-n-\delta}(C_+^a)$, а правая часть — пространству $\tilde{H}^{-n-\delta}(\mathbf{R}^m \setminus C_+^a)$, следовательно,

$$F^{-1}(A_{\neq}\tilde{u}_+ - Qf_+) = F^{-1}(Qf_- - A_{=}\tilde{u}_-),$$

где левая часть из $H^{-n-\delta}(C_+^a)$, а правая часть из $H^{-n-\delta}(\mathbf{R}^m \setminus C_+^a)$, откуда немедленно следует, что это обобщенная функция, сосредоточенная на ∂C_+^a .

Как же она выглядит?

Оператор замены переменной обозначим T , переводящий ∂C_+^a в гиперплоскость $x_m = 0$, более точно, это преобразование $\mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ следующего вида

$$\begin{aligned} t_1 &= x_1, \\ &\dots\dots\dots \\ t_{m-1} &= x_{m-1}, \\ t_m &= x_m - a|x'|. \end{aligned}$$

Тогда функция

$$TF^{-1}(A_{\neq}\tilde{u}_+ - Qf_+)$$

будет сосредоточена на гиперплоскости $t_m = 0$ и принадлежать пространству $H^{-n-\delta}(\mathbf{R}^m)$. Такая функция представляет собой линейную комбинацию δ -функции и ее производных и выглядит следующим образом

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k(t') \delta^{(k)}(t_m).$$

Остается сообразить, что такое T в образах Фурье. Ответ довольно простой и получается прямыми вычислениями:

$$FTu = V_a \tilde{u},$$

где V_a — псевдодифференциальный оператор с символом $e^{ia|\xi'|}\xi_m$, и далее можно будет строить общее решение нашего псевдодифференциального уравнения (3).

Стоит отметить, что обобщенные функции, сосредоточенные на поверхности конуса, и их преобразования Фурье рассматривались в [4], однако автор так и не нашел в выпусках этой серии многомерного аналога теоремы о распределении, сосредоточенном в точке. Пришлось как-то выкручиваться.

4. Структура решения

Справедлива следующая

Теорема. Общее решение уравнения (3) в образах Фурье выражается формулой

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi) = & A_{\neq}^{-1}(\xi)Q(\xi)G_mQ^{-1}(\xi)A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{l}f(\xi) + \\ & + A_{\neq}^{-1}(\xi)V_{-a}F\left(\sum_{k=1}^n c_k(\xi')\delta^{(k-1)}(\xi_m)\right), \end{aligned}$$

где $c_k(x') \in H^{s_k}(\mathbf{R}^{m-1})$ — произвольные функции, $s_k = s - \alpha + k - 1/2$, $k = 1, 2, \dots, n$, lf — произвольное продолжение f на $H^{s-\alpha}(\mathbf{R}^m)$.

Основываясь на этом представлении, можно предложить различные постановки краевых задач для уравнения (3).

Литература

1. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1973.—273 с.
2. Васильев В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи.—М.: КомКнига, 2-е изд., 2010.—236 с.
3. Vasilyev V. B. Elliptic equations and boundary value problems in non-smooth domains // Pseudo Differential Operators: Anal. Appl. Comp. / Eds. Rodino L., Wong M. W., Zhu H. Operator Theory: Advances and Applications.—Basel: Birkhäuser, 2011.—Vol. 213.—P. 105–121.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними.—М.: ГИФМЛ, 1959.—470 с.

Васильев Владимир Борисович
Липецкий государственный технический университет
РОССИЯ, 398600, Липецк, ул. Московская, 30
E-mail: vbv57@inbox.ru

ON SOLVABILITY OF CONVOLUTION EQUATIONS IN MULTIDIMENSIONAL CONE

Vasilyev V. V.

The multidimensional convolution equations in a cone is considered. Using the wave factorization concept for elliptic symbol the general solution for such equation in the Sobolev — Slobodetskii spaces is described.

Key words: multi-variable convolution, wave factorization, cone.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК СИСТЕМА
ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙК. А. Волосов, Л. В. Пугина,
А. К. Волосова

В работе обсуждается возможность записи широкого класса нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, как системы функциональных линейных алгебраических уравнений (СФЛАУ). На основе этого факта строится метод построения точных и приближенных решений широкого класса гиперболических, эллиптических и параболических линейных уравнений с переменными коэффициентами и нелинейных уравнений с частными производными с переменными коэффициентами. Метод применяется также к уравнениям с частными производными высоких порядков. В качестве примера рассмотрено уравнение Кортевега де Фриза.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными, точные решения уравнения Кортевега де Фриза и пары Лакса сопутствующего ему уравнения.

1. Нелинейное уравнение

Метод разработан в последние двадцать лет в работах [1–10]. Первой была работа К. А. Волосова [1], в которой были замечены интересные взаимоотношения между производными и функциями квазилинейного параболического уравнения при нефиксированной замене переменных. Дополним систему трех уравнений из [1] равенством смешанных производных. Таким образом была построена функциональная линейная система алгебраических уравнений (СФЛАУ). Обнаружен общий новый важный факт теории дифференциальных уравнений с частными производными (ДУсЧП).

Рассмотрим квазилинейное уравнения

$$\mu Z''_{tt} + K(Z, Z'_x, Z'_t, x, t)Z''_{xx} + F(Z, Z'_x, Z'_t, x, t) = 0. \quad (1)$$

В [2–10] наиболее глубоко разработан случай двух независимых переменных. При увеличении числа независимых переменных требуются дополнительные предположения. Здесь переменную t можно трактовать как время, и если $\mu K(Z, Z'_x, Z'_t, x, t) < 0$, тогда

это квазилинейное уравнение гиперболического типа. Если переменную t трактовать как вторую пространственную переменную и $\mu K(Z, Z'_x, Z'_t, x, t) > 0$, тогда это квазилинейное уравнение эллиптического типа. Наконец, если $\mu = 0$, то в таком обобщенном виде можно записать квазилинейное уравнение параболического типа. Предположим, что $Z(x, t) \in C^2[\text{Re} \otimes \text{Re}]$, где через Re обозначено множество действительных чисел. Предположим, что функции K, F имеют одну непрерывно дифференцируемую производную по всем имеющимся переменным.

Сделаем произвольную, не фиксированную замену переменных:

$$Z(x, t)|_{x=x(\xi, \delta), t=t(\xi, \delta)} = U(\xi, \delta). \quad (2)$$

Обратная замена восстанавливает решение $Z(x, t)$ уравнения (1) по функции $U(\xi, \delta)$, хотя бы локально

$$Z(x, t) = U(\xi, \delta)|_{\xi=\xi(x, t), \delta=\delta(x, t)}. \quad (3)$$

Предположим, что якобиан замены переменных

$$J = \begin{pmatrix} x'_\xi & t'_\xi \\ x'_\delta & t'_\delta \end{pmatrix}$$

отличен от нуля: $\det J = x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta \neq 0$. Тогда существует обратное преобразование, хотя бы локально, $\xi = \xi(x, t)$, $\delta = \delta(x, t)$. При этом существуют формулы пересчета «старых» переменных x, t по «новым» переменным ξ, δ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \det J \frac{\partial \delta}{\partial t}, & \frac{\partial t}{\partial \xi} &= -\det J \frac{\partial \delta}{\partial x}, \\ \frac{\partial x}{\partial \delta} &= -\det J \frac{\partial \xi}{\partial t}, & \frac{\partial t}{\partial \delta} &= \det J \frac{\partial \xi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В истории науки в России выражение «дифференциальная связь» впервые использовал И. В. Мещерский в 1887 г. Его работа «Дифференциальные связи в случае одной материальной точки» опубликована в журнале «Сообщения Харьковского математического общества». В двадцатом веке интерес к «дифференциальным связям» возобновился после работ Н. Н. Яненко [11] и позже книги его учеников А. Ф. Сидорова, В. П. Шاپеева. Данная работа, кроме употребления термина «дифференциальные связи», не имеет с этими работами никакого пересечения.

Введем обозначения (установим дифференциальные связи) [1–4]

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial x} \right|_{x=x(\xi, \delta), t=t(\xi, \delta)} = Y(\xi, \delta), \quad \left. \frac{\partial Z}{\partial t} \right|_{x=x(\xi, \delta), t=t(\xi, \delta)} = T(\xi, \delta). \quad (5)$$

Используя (4) из (5) получим выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta} \frac{\partial t}{\partial \xi} &= Y(\xi, \delta) [x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta], \\ -\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= T(\xi, \delta) [x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta]. \end{aligned} \quad (6)$$

Ниже для краткости записи уравнений аргументы у функций K , F опустим, т. е. ниже в уравнениях пишем

$$\begin{aligned} k &\stackrel{\text{def}}{=} K(U(\xi, \delta), Y(\xi, \delta), T(\xi, \delta), x(\xi, \delta), t(\xi, \delta)), \\ f &\stackrel{\text{def}}{=} F(U(\xi, \delta), Y(\xi, \delta), T(\xi, \delta), x(\xi, \delta), t(\xi, \delta)). \end{aligned}$$

Уравнение (1) принимает промежуточный вид

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} T(\xi(x, t), \delta(x, t)) + k \frac{\partial}{\partial x} Y(\xi(x, t), \delta(x, t)) + f = 0.$$

После дифференцирования и применения формул (4) окончательно в переменных ξ, δ получим

$$\mu \left(-\frac{\partial T}{\partial \delta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \delta} \right) + k \left(\frac{\partial Y}{\partial \delta} \frac{\partial t}{\partial \xi} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \delta} \right) = f [x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta]. \quad (7)$$

С необходимостью должно быть выполнено равенство смешанных производных $Z''_{xt} = Z''_{tx}$ в переменных ξ, δ .

Это соотношение с учетом (4), (5) можно записать:

$$\frac{\partial Y}{\partial \delta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial T}{\partial \delta} \frac{\partial t}{\partial \xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \delta} = 0. \quad (8)$$

В (6), (7) якобиан подробно расписан, чтобы показать, что они выглядят как нелинейные уравнения относительно переменных

$$\mathbf{X} = (x'_\xi, x'_\delta, t'_\xi, t'_\delta). \quad (9)$$

В работах [2–4] впервые доказано, что система (6)–(8) является *линейной*! системой функциональных алгебраических уравнений

(СФЛАУ) относительно переменных (9). На основе этого факта можно строить точные и приближенные решения ДУсЧП. Предложено рабочее название способа: «Метод нефиксированной конструктивной замены переменных» (МНФКЗП).

Теорема 1.1. Пусть дана система (6)–(8) относительно производных (9). Тогда существует единственное точное решение СФЛАУ $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} YU'_\delta & -YU'_\xi & TU'_\delta & -TU'_\xi \\ Y'_\delta & -Y'_\xi & T'_\delta & -T'_\xi \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_\xi \\ x'_\delta \\ t'_\xi \\ t'_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

Здесь вектор $\mathbf{X}$ (9), а вектор $\mathbf{b} = (0, 0, 0, b_4)^\tau$ ¹, где

$$\begin{aligned} b_4 &= U'_\delta (\mu T (T'_\xi Y'_\delta - T'_\delta Y'_\xi) + f (U'_\xi Y'_\delta - Y'_\xi U'_\delta)) + \\ &+ Y [-\mu T'_\delta U'_\delta T'_\xi + \mu (T'_\delta)^2 U'_\xi + k Y'_\delta (Y'_\delta U'_\xi - Y'_\xi U'_\delta)], \\ a_{31} &= \mu Y T'_\delta, \quad a_{32} = -\mu Y T'_\xi, \\ a_{33} &= -k Y Y'_\delta - f U'_\delta, \quad a_{34} = k Y Y'_\xi + f U'_\xi, \\ a_{44} &= (\mu T^2 + k Y^2) (Y'_\delta T'_\xi - Y'_\xi T'_\delta) + \\ &+ f (Y (U'_\delta T'_\xi - U'_\xi T'_\delta) + T (Y'_\delta U'_\xi - Y'_\xi U'_\delta)). \end{aligned} \quad (10)$$

КОММЕНТАРИИ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ. Коротко укажем, как из четырех уравнений (6)–(8) строим СФЛАУ.

Второе уравнение (6) умножим на Y , а первое уравнение (6) умножим на T , и вычитаем. Получим линейное уравнение относительно производных (9)

$$YU'_\delta x'_\xi - YU'_\xi x'_\delta + TU'_\delta t'_\xi - TU'_\xi t'_\delta = 0. \quad (11)$$

Этому уравнению соответствует первая строка матрицы $\mathbf{A}$.

Уравнению (8) соответствует вторая строка матрицы $\mathbf{A}$.

Умножим уравнение (7) на множитель Y , а первое уравнение (6) умножим на f и вычитаем. Отсюда следует третья строка матрицы $\mathbf{A}$.

Далее мы можем выразить любые три производные, например, x'_ξ , x'_δ , t'_ξ , из (9) через одну t'_δ .

¹Знак τ означает транспонирование.

После подстановки полученных выражений в любое уравнение системы (6)–(8) имеем линейное алгебраическое уравнение на t'_δ или тождество. Таким образом получаем четвертую строку матрицы **A**.

Теорема 1.2. Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда система (6)–(8) имеет единственное решение

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \Psi_1(\xi, \delta), \quad \frac{\partial x}{\partial \delta} = \Psi_2, \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} = \Psi_3(\xi, \delta), \quad \frac{\partial t}{\partial \delta} = \Psi_4. \quad (12)$$

Это новая система уравнений с частными производными первого порядка с формально «известной» правой частью, где

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} \left[U'_\xi [f(U'_\delta T'_\xi - U'_\xi T'_\delta) + k Y (Y'_\delta T'_\xi - Y'_\xi T'_\delta)] + \right. \\ &+ T [-U'_\xi (\mu T'_\xi T'_\delta + k Y'_\xi Y'_\delta) + U'_\delta (\mu (T'_\xi)^2 + k (Y'_\xi)^2)] \Big] / a_{44}, \\ \Psi_2(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} \left[U'_\delta (f(U'_\delta T'_\xi - U'_\xi T'_\delta) + k Y (Y'_\delta T'_\xi - T'_\delta Y'_\xi)) + \right. \\ &+ T [\mu T'_\delta U'_\delta T'_\xi - \mu (T'_\delta)^2 U'_\xi + k Y'_\delta (Y'_\xi U'_\delta - Y'_\delta U'_\xi)] \Big] / a_{44}, \\ \Psi_3(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} \left[U'_\xi (\mu T (Y'_\delta T'_\xi - Y'_\xi T'_\delta) + f(Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi)) + \right. \\ &+ Y [U'_\xi (\mu T'_\delta T'_\xi + k Y'_\delta Y'_\xi) - U'_\delta (\mu (T'_\xi)^2 + k (Y'_\xi)^2)] \Big] / a_{44}, \\ \Psi_4(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} b_4 / a_{44}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь b_4 , a_{44} определены в теореме 1. Якобиан имеет вид

$$\begin{aligned} \det J &= \left[\mu ((T'_\delta)^2 + k (Y'_\delta)^2) (U'_\xi)^2 - 2 U'_\delta U'_\xi [\mu T'_\delta T'_\xi + k Y'_\delta Y'_\xi] + \right. \\ &+ (U'_\delta)^2 (\mu (T'_\xi)^2 + k (Y'_\xi)^2) \Big] / a_{44}. \end{aligned} \quad (14)$$

КОММЕНТАРИИ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ. Хорошо известно, что условие разрешимости системы (12), (13) такого типа получается вычислением смешанных производных функций $x = x(\xi, \delta)$, $t = t(\xi, \delta)$ по аргументам ξ и δ и приравниваем полученных выражений друг другу $x''_{\xi\delta} = x''_{\delta\xi}$, $t''_{\xi\delta} = t''_{\delta\xi}$. Таким образом, на первый взгляд кажется, что формально возникают два условия разрешимости системы (12), (13). Однако в [2–6] выяснено, что условие только одно.

Один из центральных результатов цитируемых работ состоит в следующем:

Теорема 1.3. Пусть выполнены условия теорем 1.1, 1.2. Тогда
1) Имеет место тождество

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial \delta} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} \right) / T \Big|_{x'_\xi = \Psi_1, x'_\delta = \Psi_2, t'_\xi = \Psi_3, t'_\delta = \Psi_4} \equiv \\ & \equiv \left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial \delta} - \frac{\partial \Psi_4}{\partial \xi} \right) / Y \Big|_{x'_\xi = \Psi_1, x'_\delta = \Psi_2, t'_\xi = \Psi_3, t'_\delta = \Psi_4}, \end{aligned} \quad (15)$$

где функции Ψ_i , $i = 1, 4$, определены равенствами (13).

2) Два условия разрешимости системы (12), (13) сводятся к одному соотношению

$$\left(\frac{\partial}{\partial \delta} \Psi_3 - \frac{\partial}{\partial \xi} \Psi_4 \right) \Big|_{x'_\xi = \Psi_1, x'_\delta = \Psi_2, t'_\xi = \Psi_3, t'_\delta = \Psi_4} = 0, \quad (16)$$

где Ψ_j , $j = 1, 4$, заданы формулами (13).

КОММЕНТАРИИ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ. Доказательство теоремы 1.3 производится прямыми вычислениями производных выражений системы (13). При дифференцировании переменных коэффициентов $t(\xi, \delta)$, $x(\xi, \delta)$ производные (9) исключаются с помощью подстановки правых частей (13). Таким образом, следует тождество (15), т. е. левая часть совпадает с правой. Таким образом, вместо двух соотношений условия разрешимости имеем одно соотношение. Всегда существует нетривиальный общий множитель (16). Теоремы 1.1, 1.2 демонстрируют некоторое скрытое, ранее неизвестное, свойство квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными, которое позволяет конструировать новые решения уравнения (1) в «неявной, параметрической форме».

Следствие 1. Если какая-то тройка непрерывно дифференцируемых функций U , Y , T , имеющих одну производную по обоим переменным, удовлетворяет соотношению (16), то соответствующая система (12), (13) разрешима. При условии, что якобиан (14) не равен нулю, решение уравнения (1) восстанавливается по формуле (3) или решение записывается в неявной параметрической форме. Если задача содержит малый параметр и якобиан является малым, то можно удовлетворить приближенно условиям разрешимости (16) и приближенно проинтегрировать систему (12), (13). Таким образом, можно строить приближенные асимптотические решения.

Примеры решений можно найти в [2–10].

2. Уравнение Кортевега де Фриза

В 2008 г. на конференции в г. Суздаль с результатами полученными МНФКЗП, изложенными в работах [1–4], был ознакомлен академик РАН В. И. Арнольд. Он одобрил исследование и посоветовал применить метод ко многим проблемам и в частности к уравнениям связанным с КдВ в тех случаях, когда не работает МОЗ. Сначала нами были изучены работы классиков, подробные ссылки на которые приведены в [12–14]. Было выяснено, что в них нижеприведенного или подобного анализа этого уравнения ранее никто не проводил.

Рассмотрим обобщенное уравнение КдВ содержащее третью производную:

$$Z'_t + R(t, Z, Z'_x) + Z'''_{xxx} = F(t, Z). \quad (17)$$

Сделаем произвольную замену переменных (2). Введем дифференциальные связи (5), (6) и дополним их еще одним соотношением:

$$\left. \frac{\partial Y(\xi(x, t), \delta(x, t))}{\partial x} \right|_{x=x(\xi, \delta), t=t(\xi, \delta)} = M(\xi, \delta). \quad (18)$$

Аналогично (6), из (18) получим формулу:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial Y}{\partial \delta} \frac{\partial t}{\partial \xi} \right) = [x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta] M(\xi, \delta). \quad (19)$$

Здесь $M(\xi, \delta)$ произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Уравнение (17) примет вид

$$\left(-\frac{\partial M}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \delta} + \frac{\partial M}{\partial \delta} \frac{\partial t}{\partial \xi} \right) = s \det J. \quad (20)$$

Для краткости записи формул введено обозначение

$$s \stackrel{\text{def}}{=} [T + R(t(\xi, \delta), U, Y) - F(t, U)].$$

Для функции $Z(x, t)$, с необходимостью, должно быть выполнено условие непрерывности (8).

В данной задаче мы имеем пять уравнений (6), (8), (19), (20) для четырех переменных: x'_ξ , x'_δ , t'_ξ , t'_δ .

Построим СФЛАУ относительно переменных (9).

Теорема 2.1. Пусть дана система (6), (8), (19), (20) относительно переменных (9). Тогда СФЛАУ $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} YU'_\delta & -YU'_\xi & TU'_\delta & -U'_\xi \\ -Y'_\delta & Y'_\xi & -T'_\delta & T'_\xi \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_\xi \\ x'_\delta \\ t'_\xi \\ t'_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\mathbf{X}$ определяется (9), $\mathbf{b} = (0, 0, 0, b_4)^\tau$. Тогда СФЛАУ имеет единственное решение:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = g_1(\xi, \delta), \quad \frac{\partial x}{\partial \delta} = g_2(\xi, \delta), \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} = g_3(\xi, \delta), \quad \frac{\partial t}{\partial \delta} = g_4(\xi, \delta). \quad (21)$$

Функции $g_j(\xi, \delta)$, $j = 1 \div 4$ вычисляются аналогично теореме 1.2 [10]. Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} g_1(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} [TY'_\xi(Y'_\xi U'_\delta - U'_\xi Y'_\delta) + U'_\xi[Y(Y'_\delta T'_\xi - Y'_\delta T'_\xi) + \\ &\quad + M(T'_\delta U'_\xi - T'_\xi U'_\delta)]]/a_{44}, \\ g_2(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} [Y(Y'_\delta T'_\xi - T'_\delta Y'_\xi)U'_\delta + MU'_\delta(T'_\delta U'_\xi - U'_\delta T'_\xi) + \\ &\quad + TY'_\delta(Y'_\xi U'_\delta - Y'_\delta U'_\xi)]/a_{44}, \\ g_3(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} (-YY'_\xi + MU'_\xi)(Y'_\xi U'_\delta - Y'_\delta U'_\xi)/a_{44}, \\ g_4(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} b_4/a_{44} = (YY'_\delta - MU'_\delta)(Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi)/a_{44}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{33} &= -MU'_\delta + YY'_\delta, \quad a_{34} = MU'_\xi - YY'_\xi, \\ a_{44} &= Y^2(T'_\xi Y'_\delta - T'_\delta Y'_\xi) + MY(T'_\delta U'_\xi - U'_\delta T'_\xi) + \\ &\quad + MT(U'_\delta Y'_\xi - U'_\xi Y'_\delta). \end{aligned} \quad (23)$$

Якобиан имеет вид

$$\det J = (U'_\xi Y'_\delta - U'_\delta Y'_\xi)^2 / a_{44}. \quad (24)$$

Функция T имеет вид

$$\begin{aligned} T(\xi, \delta) &= [M(M'_\xi U'_\delta - M'_\delta U'_\xi) + Y(M'_\delta Y'_\xi - M'_\xi Y'_\delta) + \\ &\quad + (F(t(\xi, \delta), U) - R(t(\xi, \delta), U, Y))(Y'_\delta U'_\xi - Y'_\xi U'_\delta)]/P_2, \end{aligned} \quad (25)$$

где $P_2 = Y'_\delta U'_\xi - Y'_\xi U'_\delta$.

КОММЕНТАРИИ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ. Умножим второе уравнение (6) на функцию Y , а первое уравнение (6) на функцию T и вычтем. Этому соотношению соответствует первая строка матрицы. Уравнению (8) соответствует вторая строка матрицы. Умножим первое уравнение (6) на функцию M , а уравнение (19) на функцию Y и вычтем. Получим соотношение которому соответствует третья строка матрицы.

Далее мы можем выразить любые три производные, например, x'_ξ , x'_δ , t'_ξ , через одну из них t'_δ .

После подстановки полученных выражений в любое уравнение системы (6), (8), (19) имеем линейное алгебраическое уравнение на t'_δ . Таким образом, получаем четвертую строку матрицы, приведенной в теореме 2.1.

Подставим (21) в (20). Интересно отметить, что все производные T'_ξ , T'_δ сокращаются. Тогда следует дифференциальная связь (25). Т. е. окончательно в формулы (22) следует подставить (25).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие разрешимости явно вычисляется аналогично теореме 1.2. В результате получим соотношение, которое аналогично соотношению (16), где букву Ψ следует заменить на букву g . Это соотношение рассматривать как сопутствующее к KdV уравнение. Легко видеть, что это уравнение имеет точные решения, связанные с классическими группами преобразования сдвига и растяжения. Они строятся аналогично решениям, приведенным, например, в [13] и справочниках [14]. Это исследование классическое, и поэтому здесь не будем его рассматривать. Можно провести тест Пенлеве и построить иерархию сопутствующих к KdV уравнений, аналогично [13].

Примеры.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Заметим, что две последние формулы (22) содержат множитель. Формулы упрощаются, если предположить, что $t(\xi, \delta) = \xi$.

Тогда $t'_\xi = 1$, $t'_\delta = 0$. Отсюда из четвертого уравнения (22) получим $g_4 = 0$ и дифференциальную связь $M(\xi, \delta) = Y(\xi, \delta)Y'_\delta/U'_\delta$.

Предположим, что $Y(\xi, \delta) = G(\xi, U(\xi, \delta))$. Тогда система (21), (22) интегрируется.

Теорема 2.2. Пусть дано уравнение (17) и выполнены условия теоремы 2.1 и $t(\xi, \delta) = \xi$, $M(\xi, \delta) = Y(\xi, \delta)Y'_\delta/U'_\delta$, $Y(\xi, \delta) = G(\xi, U(\xi, \delta))$. Тогда точное решение уравнения (17) в переменных

$x(\xi, \delta)$, $t(\xi, \delta) = \xi$ определяется решением СФЛАУ

$$\begin{aligned} x'_\xi &= R(\xi, U, G(\xi, U))/G + (G'_U(\xi, U))^2 + \\ &+ GG''_{UU} + U'_\xi/G(\xi, U) - F(\xi, U)/G(\xi, U), \\ x'_\delta &= U'_\delta/G(\xi, U), \end{aligned} \quad (26)$$

$\widetilde{\det J} = -U'_\delta/G(\xi, U)$. Решение уравнения $Z(x, t)$ (17) записывается в неявной, параметрической форме, как интеграл системы (26)

$$x(\xi, \delta) = s_0(\xi) + \int (1/G(\xi, U)) dU,$$

где $s_0(\xi)$ -произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Условие разрешимости системы (21) имеет вид нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка сопутствующего уравнению (17)

$$\begin{aligned} G'_\xi + 3G^2G'_UG''_{UU} + G^3G'''_{UUU} - GF'_U + FG'_U + \\ + GG'_UR'_G + GR'_U - R(\xi, U, G)G'_U = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

КОММЕНТАРИИ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ. Доказательство проводится явными вычислениями.

Далее можно сформулировать вопрос: при каких условиях существуют пары Лакса для уравнения (27). Можно расширить класс уравнений имеющих пары Лакса.

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Пусть функции в (17) имеют вид

$$\begin{aligned} R(t, Z, Z'_x) &= b(t)Z(x, t)Z'_x - \alpha(t)(Z'_x)^2 - \sigma(t)(Z'_x)^3, \\ \alpha(t) &= 3c(t)b(t) = [2\sigma(t)c'(t) - c(t)\sigma'(t)]/[2c^2(t)], \\ F(t, Z) &= -\phi(t) - Z(x, t)c'(t)/c(t). \end{aligned}$$

Тогда пара Лакса для уравнения (27) имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi''_{UU} &= (c(\xi)/G(\xi, U) + \sigma(\xi)/2)\Psi(\xi, U), \\ \Psi'_\xi &= \Psi(\xi, U)(k(\xi) - c'(\xi)/(2c(\xi)) + c(\xi)G(\xi, U)G'_U(\xi, U)) + \\ &+ \Psi'_U(\phi(\xi) - c(\xi)G^2(\xi, U) + Uc'(\xi)/c(\xi)), \end{aligned} \quad (28)$$

$k(\xi)$ -дважды непрерывно дифференцируемая произвольная функция.

КОММЕНТАРИИ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ. Прямая проверка доказывает справедливость утверждения. Вычисления проводятся аналогично [12, 13]. Должно быть выполнено соотношение $(\Psi''_{UU})'_\xi = (\Psi'_\xi)''_{UU}$.

Далее можно построить иерархию уравнений (27) и провести исследование аналогично [13].

Алгоритм легко программируется. Примеры применения метода для систем параболических уравнений можно найти в [9, 15]. Авторы готовы предоставить программы и провести консультации всем желающим.

Выражаем благодарность В. П. Маслову, В. В. Жикову, А. А. Давыдову, М. В. Карасеву, В. Г. Данилову, А. С. Братусю за полезные обсуждения.

Литература

1. Волосов К. А. Преобразование приближенных решений линейных параболических решений в асимптотические решения квазилинейного параболического уравнения // Мат. заметки.—1994.—Т. 56, № 6.—С. 122–126. English transl.: Transformation of Approximate solutions of liner parabolic equations into asymptotic solutions of quasilinear parabolic equations // Math. Notes.—1994.—Vol. 56, № 5–6.—P. 1295–1299.
2. Волосов К. А. Метод построения решений квазилинейных параболических уравнений в параметрической форме // Изв. РГПУ им. А. И. Герцена. Естеств. и точные науки.—2007.—№ 7(26).—С. 13–20.—(URL: <http://lib.herzen.spb.ru/page154a.asp?s=11>).
3. Волосов К. А. Новый способ построения решений квазилинейных параболических уравнений в параметрическом виде // Диф. уравнения.—2007.—Т. 43, № 4.—С. 492–497. English transl.: Differential Equations.—2007.—Vol. 43, № 4.—P. 507–512.
4. Волосов К. А. Методика анализа эволюционных систем с распределенными параметрами: Дис... канд. физ.-мат. наук.—М.: МИИТ, 2007.—(URL: <http://eqworld.ipmnet.ru>, www.aplsmath.ru).
5. Волосов К. А. Формулы для точных решений квазилинейных уравнений с частными производными в неявной форме // Докл. АН.—2008.—Т. 77, № 1.—С. 1–4. English transl.: Dokl. Akad. Nauk.—2008.—Vol. 418, № 1.—P. 11–14.
6. Волосов К. А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными // Сиб. журн. индустр. мат.—2008.—Т. 11, № 2.—С. 29–39. English transl.: J. Applied Industr. Math.—2009.—Vol. 3, № 4.—P. 519–527.—(URL: www.aplsmath.ru, www.springerlink.com/content/h347004463516r68).
7. Volosova A. K., Volosov K. A. Construction of solutions of PDE in parametric form // Inter. J. of Math. and Math. Sci.—Vol. 2009, Article ID, 319268.—17 p.—(URL: <http://www.hindawi.com/journals/ijmms/2009/319269.html>, doi: 10.1155/2009/319269, www.aplsmath.ru).

8. Волосова А. К. Математическое моделирование нелинейной динамики системы открытого гиперцикла: Дис. . . канд. физ.-мат. наук.—М.: МИИТ, 2011.—(URL: www.aplsmath.ru, <http://vteorii.ru/?book=cat&cat=fizmat&str=22208nomer=2221>).
9. Волосова А. К. К теории нелинейной диффузии и теплопроводности // Тр. МФТИ.—2011.—Т. 3, № 1 (9).
10. Volosov K. A., Vdovina E. K. About expansion of number of models which have pairs of Lax's // Inter. J. Diff. Eq. Appl.—2012.—Vol. 11, № 1.—P. 27–36.
11. Яненко Н. Н. О инвариантных дифференциальных связях для гиперболических систем квазилинейных уравнений // Изв. вузов. Математика.—1961.—№ 3.—P. 186–194.
12. Bullough R. K., Caudrey Ph. J. (Eds.) Solitons.—Berlin: Springer, 1980.—389 p.
13. Кудряшов Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений.—М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.—361 с.
14. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения.—М.: Физматлит, 2002.—432 с.
15. Волосов К. А., Вдовина Е. К. Моделирование спиральных волн в процессе свертывания крови // Мат. моделирование.—2013.—Т. 25, № 3.—С. 14–25.
16. Волосов К. А., Вдовина Е. К. Пары Лакса для класса нелинейных уравнений // Междунар. конф. по дифференц. уравнениям.—Суздаль, 2012.—С. 41–43.

Волосов Константин Александрович
МГУ Путей сообщения (МИИТ)
РОССИЯ, 127994, Москва, ул. Образцова, 9
E-mail: konstantinvolosov@yandex.ru

Пугина Лидия Вячеславовна
МГУ Путей сообщения (МИИТ)
РОССИЯ, 127994, Москва, ул. Образцова, 9
E-mail: pugina_lidia@mail.ru

Волосова Александра Константиновна
МГУ Путей сообщения (МИИТ)
РОССИЯ, 127994, Москва, ул. Образцова, 9
E-mail: alya01@yandex.ru

NONLINEAR EQUATIONS VIA SYSTEMS OF LINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS

Volosov K. A., Pugina L. V., Volosova A. K.

A new important property of a wide class of PDE found by the first author is discussed in the paper. In case of two independent variables it is always possible to express a PDE of this class as a system of linear functional equations. As an illustration the generalized KdV equation is also considered.

Key words: nonlinear PDE, exact solutions of KdV equation, Lax pairs.

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОНВЕКЦИИ¹

Н. С. Ивлева, В. Б. Левенштам

Рассматривается эволюционная система полулинейных дифференциальных уравнений в частных производных с высокочастотными младшими членами, среди которых имеются пропорциональные высокой частоте. Для нее обоснован метод усреднения Крылова — Боголюбова.

Ключевые слова: метод усреднения, обобщенная задача конвекции.

Введение

В работе [1] при помощи метода усреднения Крылова — Боголюбова исследовалась задача о возникновении конвекции вязкой несжимаемой жидкости в сосуде, который совершает малые (по амплитуде) вертикальные высокочастотные вибрации конкретного вида. В статье [2] установлена справедливость применения метода усреднения в [1]. В работах [3, 4] метод усреднения обоснован для более широкого, нежели в [1, 2], класса гармонических вертикальных и наклонных вибраций в поле силы тяжести и невесомости. В данной работе метод усреднения обоснован для задачи о периодических по времени решениях эволюционной системы дифференциальных уравнений в частных производных с высокочастотными младшими членами, среди которых имеется гармоническое слагаемое, пропорциональное высокой частоте. Эта система является значительным обобщением задачи о возникновении конвекции, исследовавшейся в [1–4].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00402-а, а также Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., заявки №№ 2012-1.1-12-000-1003-1775, 2012-1.2.1-12-000-1001-4594.

1. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. В цилиндре $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о $2\pi\omega^{-1}$ -периодических по t решениях системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla)v = -\nabla q + \nu \Delta v + \omega \sum_{0 < |k| \leq m} a_k(x) e^{ik\omega t} T + \\ + g_1 \left(x, v, \frac{\partial v}{\partial x}, T, \frac{\partial T}{\partial x}, \omega t \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} b_j(x, \omega t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (v, \nabla T) = \chi \Delta T + g_2 \left(x, v, \frac{\partial v}{\partial x}, T, \frac{\partial T}{\partial x}, \omega t \right),$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad T|_{\partial\Omega} = h.$$

Здесь $m \in \mathbb{N}$, $\nu, \chi > 0$, ω — большой параметр, $v(x, t)$ и $T(x, t)$ — неизвестные вещественные трехмерная и одномерная вектор-функции. Далее, при $(x, v, w, T, S, \tau) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ вектор-функции $g_1(x, v, w, T, S, \tau)$, $g_2(x, v, w, T, S, \tau)$, $b_j(x, \tau)$, $j = 1, 2, 3$, и $h(x)$ вещественнозначны, $a_k(x) = \overline{a_{-k}(x)}$, где чертой над функцией обозначена операция комплексного сопряжения. Пусть $a_k \in C^1(\overline{\Omega})$, $0 < |k| \leq m$, g_1, g_2 — полиномы степени, не выше $n_0 (\in \mathbb{N})$, относительно v, w, T, S с зависящими от (x, τ) коэффициентами, которые удовлетворяют условию Гёльдера по x равномерно относительно x, τ , вектор-функции $g_1(x, v, w, T, S, \tau)$, $g_2(x, v, w, T, S, \tau)$, $b_j(x, \tau)$, $j = 1, 2, 3$, 2π -периодичны по τ , $b_j \in C(\mathbb{R}, C^\mu(\overline{\Omega}))$, $\mu \in (0, 1)$, $h \in C^2(\partial\Omega)$.

2. Основной результат

Пусть $q > 1$. Обозначим через $J_q(\overset{\circ}{J}_q^2)$ замыкание в $L_q(W_q^2)$ множества гладких соленоидальных ($\operatorname{div} u = 0$) трехмерных вектор-функций, определенных в $\overline{\Omega}$ и исчезающих на границе $\partial\Omega$. Символом Π обозначим известный проектор из L_q на J_q , который при $q = 2$ ортогонален (см., например, [5, 6]). Пусть A_1 и A_2 — операторы, действующие соответственно в J_q и L_q по законам

$$\begin{aligned} A_1 u &= -\Pi \Delta u, \quad u \in D(A_1) = \overset{\circ}{J}_q^2, \\ A_2 T &= -\nu \Delta T, \quad T \in D(A_2) = \overset{\circ}{W}_q^2, \end{aligned}$$

а I_1 и I_2 — единичные операторы в J_q и L_q соответственно. Здесь $D(A_1)$, $D(A_2)$ — соответственно области определения операторов A_1 , A_2 , $\overset{\circ}{W}_q^2$ — замыкание в W_q^2 множества гладких в Ω функций, которые исчезают на границе $\partial\Omega$.

Пусть $q > 3n_0$. Следуя [2], подействуем на задачу (1) проектором Π , а также проведем в этой задаче замену переменных $Q = T - \Phi$, $u = v - N(\omega t)T - M_\omega(t)T$. Здесь $\Phi(x)$ — решение задачи Дирихле

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= 0, \quad \Phi|_{\partial\Omega} = h, \\ N(\tau)T &= \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} e^{ik\tau} \Pi a_k T, \\ M_\omega(t)T &= \omega \Pi \sum_{0 < |k| \leq m} (ik\omega I_1 + A_1)^{-1} a_k T e^{ik\omega t} - N(\omega t)T.\end{aligned}$$

Тогда система (1) перейдет в систему вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + A_1 u &= f_1\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, x, \omega t\right) + \\ &+ \varphi_{\omega,1}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, x, t\right) + \Pi \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} b_j(x, \omega t), \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + A_2 Q &= f_2\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, x, \omega t\right) + \varphi_{\omega,2}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, x, t\right)\end{aligned}\quad (2)$$

с однородными краевыми условиями.

Прежде чем выписать выражения f_i , $\varphi_{\omega,i}$, $i = 1, 2$, для каждой непрерывной 2π -периодической по τ (вектор)-функции $s(\dots, \tau)$ положим

$$\langle s(\dots, \tau) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(\dots, \tau) d\tau.$$

(Вектор)-функции $f_1 : (W_q^1 \cap J_q) \times L_q \times W_q^2 \times W_q^1 \times \Omega \times (-\infty, \infty) \rightarrow J_{q_1}$, $f_2 : (W_q^1 \cap J_q) \times L_q \times W_q^2 \times W_q^1 \times \Omega \times (-\infty, \infty) \rightarrow L_{q_1}$, $\varphi_{\omega,1} : (W_q^1 \cap J_q) \times L_q \times W_q^2 \times W_q^1 \times \Omega \times (-\infty, \infty) \rightarrow J_{q_1}$, $\varphi_{\omega,2} : (W_q^1 \cap J_q) \times$

$L_q \times W_q^2 \times W_q^1 \times \Omega \times (-\infty, \infty) \rightarrow L_{q_1}$, $q_1 = \frac{q}{n_0}$, заданы равенствами

$$\begin{aligned} f_1(u, w, Q, S, x, \tau) &= F_1(u, w, Q, S, x) - \Pi(N(\tau)T, \nabla)u - \\ &- \Pi(u, \nabla)N(\tau)T + \Pi \sum_{\substack{0 < |k|, |s| \leq m, \\ k+s \neq 0}} (ks)^{-1} e^{i(k+s)\tau} \left[(\Pi a_k T, \nabla) \Pi a_s T - \right. \\ &- \left. a_k (\Pi a_s T, \nabla T) \right] + \left[K_1(x, u, w, T, S, \tau) - \langle K_1(x, u, w, T, S, \tau) \rangle \right] - \\ &- N(t)(\chi \Delta Q - (v, \nabla T)), \\ F_1(u, w, Q, S, x) &= -\Pi(u, \nabla)u - \Pi \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} \left[(\Pi a_k T, \nabla) \Pi a_{-k} T - \right. \\ &- \left. a_k (\Pi a_{-k} T, \nabla T) \right] + \langle K_1(x, u, w, T, S, \tau) \rangle, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_1(x, u, w, T, S, \tau) &= \\ &= \Pi g_1 \left(x, u + N(\tau)T, w + \frac{\partial(N(\tau)T)}{\partial x}, T, S + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tau \right) + \\ &+ \Pi \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} b_j(x, \tau) - N(t)g_2 \left(x, u + N(\tau)T, w + \frac{\partial(N(\tau)T)}{\partial x}, T, S + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tau \right), \\ f_2(u, w, Q, S, x, \tau) &= F_2(u, w, Q, S, x) - (N(\tau)T, \nabla T) + \\ &+ [K_2(x, u, w, T, S, \tau) - \langle K_2(x, u, w, T, S, \tau) \rangle], \\ F_2(u, w, Q, S, x) &= -(u, \nabla T) + \langle K_2(x, u, w, T, S, \tau) \rangle, \end{aligned}$$

где $K_2(x, u, w, T, S, \tau) = \Pi g_2 \left(x, u + N(\tau)T, w + \frac{\partial(N(\tau)T)}{\partial x}, T, S + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tau \right)$.

Выражения вектор-функций $\varphi_{\omega,1}$, $\varphi_{\omega,2}$ мы не выписываем явно ввиду их громоздкости.

Пусть усредненная задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + A_1 u &= F_1 \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \tau, \frac{\partial \tau}{\partial x}, x \right), \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + A_2 \tau &= F_2 \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \tau, \frac{\partial \tau}{\partial x}, x \right) \end{aligned} \quad (3)$$

с однородными краевыми условиями имеет стационарное решение $(\overset{\circ}{v}, \overset{\circ}{\tau}) \in \overset{\circ}{J} \times \overset{\circ}{W}$. С целью линеаризации в этой точке вектор-

функций $\gamma_1 \equiv \Pi\langle K_1(x, v, w, T, S, \tau) \rangle$, $\gamma_2 \equiv \Pi\langle g_2(x, v, w, T, S, \tau) \rangle$ выделим линейные части соответствующих разностей:

$$\begin{aligned} & \gamma_1(x, v, w, T, S) - \gamma_1\left(x, \overset{\circ}{v}, \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial x}, \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial \overset{\circ}{\tau}}{\partial x}\right) = \\ & = L_{1v}(x)(v - \overset{\circ}{v}) + L_{1w}(x)\left(w - \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial x}\right) + L_{1T}(x)(T - \overset{\circ}{\tau}) + L_{1S}(x)\left(S - \frac{\partial \overset{\circ}{\tau}}{\partial x}\right), \\ & \gamma_2(v, w, T, S, x) - \gamma_2\left(\overset{\circ}{v}, \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial x}, \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial \overset{\circ}{\tau}}{\partial x}, x\right) = \\ & = L_{2v}(x)(v - \overset{\circ}{v}) + L_{2w}(x)\left(w - \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial x}\right) + L_{2T}(x)(T - \overset{\circ}{\tau}) + L_{2S}(x)\left(S - \frac{\partial \overset{\circ}{\tau}}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим в пространстве $J_q \times L_q$ оператор A с областью определения $D(A) = \overset{\circ}{J}_q^2 \times \overset{\circ}{W}_q^2$, который действует по закону

$$A \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 v + B_1 v + C_1 \tau + L_{1v} v + L_{1w} \frac{\partial v}{\partial x} + L_{1T} \tau + L_{1S} \frac{\partial \tau}{\partial x} \\ A_2 \tau + B_2 \tau + C_2 v + L_{2v} v + L_{2w} \frac{\partial v}{\partial x} + L_{2T} \tau + L_{2S} \frac{\partial \tau}{\partial x} \end{pmatrix},$$

$$(v, \tau) \in D(A).$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_1 v &= -\Pi(\overset{\circ}{v}, \nabla)v - \Pi(v, \nabla) \overset{\circ}{v}, \\ C_1 \tau &= -\Pi \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} \left[(\Pi a_k \overset{\circ}{\tau}', \nabla) \Pi a_{-k} \tau + (\Pi a_k \tau, \nabla) \Pi a_{-k} \overset{\circ}{\tau}' - \right. \\ & \quad \left. - a_k (\Pi a_{-k} \overset{\circ}{\tau}', \nabla \tau') - a_k (\Pi a_{-k} \tau, \nabla \overset{\circ}{\tau}') \right], \\ B_2 \tau &= -(\overset{\circ}{v}, \nabla \tau), \quad C_2 v = (v, \nabla \overset{\circ}{\tau}'), \quad \overset{\circ}{\tau}' = \overset{\circ}{\tau} + \Phi. \end{aligned}$$

В системе (2) заменим u на $u + \overset{\circ}{v}$, а Q на $Q + \overset{\circ}{\tau}$ и перепишем систему в виде

$$\frac{\partial z}{\partial t} + Az = f\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, t, \omega\right), \quad (4)$$

где $z = (u, Q)$,

$$\begin{aligned} f\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, t, \omega\right) = & \left(f_1\left(u + \overset{\circ}{v}, \frac{\partial(u + \overset{\circ}{v})}{\partial x}, Q + \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial(Q + \overset{\circ}{\tau})}{\partial x}, x, \omega t\right) - \right. \\ & - F_1\left(\overset{\circ}{v}, \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial x}, \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial \overset{\circ}{\tau}}{\partial x}, x\right) - B_1 u - C_1 Q - L_{1u} u - L_{1w} \frac{\partial u}{\partial x} - \\ & - L_{1T} Q - L_{1S} \frac{\partial Q}{\partial x} + \varphi_{\omega,1}\left(u + \overset{\circ}{v}, \frac{\partial(u + \overset{\circ}{v})}{\partial x}, Q + \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial(Q + \overset{\circ}{\tau})}{\partial x}, x, t\right), \\ & f_2\left(u + \overset{\circ}{v}, \frac{\partial(u + \overset{\circ}{v})}{\partial x}, Q + \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial(Q + \overset{\circ}{\tau})}{\partial x}, x, \omega t\right) - F_2\left(\overset{\circ}{v}, \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial x}, \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial \overset{\circ}{\tau}}{\partial x}, x\right) - \\ & - B_2 Q - C_2 u - L_{2u} u - L_{2w} \frac{\partial u}{\partial x} - L_{2T} Q - L_{2S} \frac{\partial Q}{\partial x} + \\ & \left. + \varphi_{\omega,2}\left(u + \overset{\circ}{v}, \frac{\partial(u + \overset{\circ}{v})}{\partial x}, Q + \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial(Q + \overset{\circ}{\tau})}{\partial x}, x, t\right)\right). \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть усредненная задача (3) имеет стационарное решение $(\overset{\circ}{v}, \overset{\circ}{\tau})$, и спектр Λ оператора A не содержит нуля. Тогда при $q > 3n_0$ справедливы следующие утверждения:

1) существуют такие положительные числа ω_0 и r_0 , что при $\omega > \omega_0$ система (1) имеет единственное в шаре

$$\left\|T - (\overset{\circ}{\tau} + \Phi)\right\|_{C_0(W_q^1)} + \left\|v - \left(\overset{\circ}{v} + \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} e^{ik\omega t} \Pi a_k(\overset{\circ}{\tau} + \Phi)\right)\right\|_{C_0(W_q^1)} < r_0$$

$2\pi\omega^{-1}$ -периодическое по t решение (v_ω, T_ω) , причем

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} & \left(\left\|T_\omega - (\overset{\circ}{\tau} + \Phi)\right\|_{C_0(W_q^1)} + \right. \\ & \left. + \left\|v_\omega - \left(\overset{\circ}{v} + \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} e^{ik\omega t} \Pi a_k(\overset{\circ}{\tau} + \Phi)\right)\right\|_{C_0(W_q^1)} \right) = 0; \end{aligned}$$

2) если спектр Λ лежит в правой полуплоскости, то указанное решение асимптотически устойчиво при больших ω по норме $(J_q \times W_q^1) \times W_q^1$;

3) если спектр Λ не имеет точек на мнимой оси и имеет хотя бы одну точку в левой полуплоскости, то при больших ω решение (v_ω, T_ω) неустойчиво по норме $(J_q \times W_q^1) \times W_q^1$.

Литература

1. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ.—1966.—№ 5.—С. 51–55.
2. Симоненко И. Б. Обоснование метода усреднения для задачи конвекции в поле быстроосциллирующих сил и для других параболических уравнений // Мат. сб.—1972.—Т. 87, № 2.—С. 236–253.
3. Левенштам В. Б. Метод усреднения в задаче конвекции при высокочастотных наклонных вибрациях // Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37, № 5.—С. 1103–1116.
4. Левенштам В. Б. Обоснование метода усреднения для задачи конвекции при высокочастотных вибрациях // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 2.—С. 92–109.
5. Юдович В. И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики.—2006.—Т. 4, № 3.—С. 26–158.
6. Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости.—Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1984.—192 с.

ЛЕВЕНШТАМ ВАЛЕРИЙ БОРИСОВИЧ
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: vleven@math.rsu.ru

ИВЛЕВА НАТАЛЬЯ СЕРГЕЕВНА
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: ivleva.n.s@yandex.ru

AVERAGING METHOD JUSTIFICATION
FOR THE GENERALIZED CONVECTION PROBLEM

Ivleva N. S., Levenshtam V. B.

We consider evolution system of semilinear differential equations with high junior terms, some of which are proportional to frequency. The averaging Krylov–Bogolyubov method for this system is justified.

Key words: averaging method, generalized convection problem.

О СПЕКТРАХ ОТКРЫТЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВЫХ ОБЛАСТЯХ

К. И. Ильин, А. Б. Моргулис

Изучаются спектры краевых задач, возникающих при линеаризации уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости вблизи безвихревого течения в кольцевой области (см. рис. 1). Течение *открыто*, т. е. жидкость втекает в область и вытекает из нее. Это обстоятельство делает задачу неконсервативной, что, в свою очередь, проявляется в ее спектральных свойствах: возможно, например, расположение спектра в левой полуплоскости.

Ключевые слова: спектр, устойчивость, открытое течение, уравнения Эйлера, идеальная жидкость.

1. Введение

Говоря об идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости, мы привычно представляем себе консервативную систему, при движении которой сохраняются полная энергия и циркуляции поля скорости по замкнутым материальным контурам. Однако, это верно лишь до тех пор, пока жидкость заключена в непроницаемые для нее границы, или поставлены условия пространственной периодичности. Законы сохранения нарушаются, если течение *открыто*, т. е. определенные части границы представляют собой вход и выход потока (рис. 1). В таком случае материальные частицы, входящие в область течения, вносят в нее энергию и вихрь, а уходящие — уносят. В результате включаются и накачка, и диссипация энергии, причем механизм последней совершенно отличен от вязкого случая.

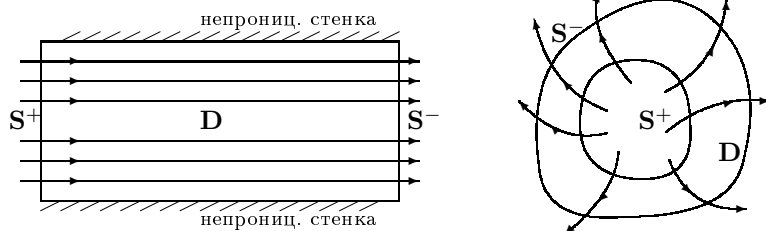


Рис. 1. Открытые течения. Прямой канал и кольцевая область.

Таким образом, открытое течение — неконсервативная система (даже при нулевой вязкости), и потому следует ожидать динамических явлений общего положения, таких, например, как установление определенного режима течения со временем [1–3], причем начальное состояние потока в той или иной степени забывается. Предельный режим может быть стационарным или колебательным; колебания могут быть периодическими, квазипериодическими и даже более сложными. Все эти возможности реализуются в динамике течений в прямолинейном канале (рис. 1, слева) при весьма простых граничных условиях [4–5]. В настоящем сообщении речь идет о другой геометрии: рассматриваются области типа кольца или зазора между цилиндрами (сферами, торами и т. д.), пример см. рис. 1, справа. Обсуждаются простейшие граничные условия, порождающие безвихревые течения и спектры краевых задач, возникающих при линеаризации уравнений гидродинамики на таких течениях.

Важность спектров линеаризации обусловлена следующими соображениями. Рассмотрим систему $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$ (пусть конечномерную), и предположим, что $\mathbf{V}$ — равновесие, так что $\mathbf{F}(\mathbf{V}) = 0$. Простейшее средство описания эволюции малых возмущений такого режима движения — линеаризация уравнений движения вблизи него. Для этого положим $\mathbf{v} := \mathbf{V} + \mathbf{v}$, учтем, что $\mathbf{V}$ — точное решение, и отбросим все слагаемые, нелинейные по $\mathbf{v}$. Имея в виду изучение в первую очередь собственных мод вида $\mathbf{v} = e^{\lambda t} \hat{\mathbf{v}}$, перейдем к однородному резольвентному уравнению $\lambda \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{v}}$, где $\mathbf{A}$ — дифференциал Фреше отображения $\mathbf{F}$ в точке $\mathbf{V}$. Нам потребуется найти собственные числа $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых уравнение $\lambda \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{v}}$ имеет ненулевые решения¹. Множество собственных чисел λ основного режима $\mathbf{V}$ обозначим $\Lambda(\mathbf{V})$. Значительный интерес представляет расположение $\Lambda(\mathbf{V})$ на комплексной плоскости. Если $\sup_{\Lambda} \operatorname{Re} \lambda < 0$, то все собственные моды экспоненциально затухают при $t \rightarrow \infty$, что свидетельствует об установлении режима $\mathbf{V}$ при $t \rightarrow \infty$ (т. е. о его асимптотической устойчивости), и, напротив, неравенство $\sup_{\Lambda} \operatorname{Re} \lambda > 0$ делает такое установление невозможным, т. е. свидетельствует о неустойчивости. Возмущения неустойчивого режима, изначально малые, нарастают,

¹Числа $e^{\lambda t}$ принадлежат к точечному спектру операторов полугруппы, ассоциированной с линеаризованной задачей. В бесконечномерных задачах требуется, вообще говоря, более тонкий анализ резольвенты, включая исследование разрешимости неоднородного уравнения $\lambda \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{v} + \mathbf{f}$ в том или ином функциональном пространстве, что мы пока оставляем в стороне.

так что точка $\mathbf{v}(t)$ с ростом t уходит из его окрестности, и в результате устанавливается иной, отличный от $\mathbf{V}$, режим движения.

В консервативной (гамильтоновой) динамике установления равновесий не бывает, а около устойчивых равновесий происходят незатухающие колебания. Соответственно, спектр равновесия консервативной системы симметричен относительно мнимой оси [6].

Заметим, что основной режим $\mathbf{V}$, как правило, естественным образом зависит от ряда числовых параметров. В нашем случае такими параметрами могут быть, например, расход жидкости сквозь вход, характерный размер области и т. д. Поэтому естественно поставить вопрос о поведении $\Lambda(\mathbf{V})$ при плавном изменении $\mathbf{V}$ вследствие изменения параметров задачи. Особый интерес представляют те особые (критические) значения параметров, при которых пересечение $\Lambda(\mathbf{V})$ с мнимой осью непусто. В таком случае происходят изменения устойчивости основного решения, которые, вообще говоря, сопровождаются перестройками динамики потока; например, возможен переход от установившегося течения к автоколебательному (бифуркация Пуанкаре — Андронова — Хопфа [7, 9]).

В бесконечномерном случае все сказанное представляет эвристические соображения «физического уровня строгости», которые нуждаются и в уточнении, и в обосновании. Такие обоснования известны в случае вязкой жидкости [8, 9], а для идеальной — получены лишь частично. В рамках этой заметки, однако, мы сосредоточимся исключительно на исследовании спектров $\Lambda(\mathbf{V})$.

2. Постановка начально-краевых задач

Уравнения движения идеальной несжимаемой и однородной жидкости — уравнения Эйлера — имеют вид

$$\mathbf{v}_t + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla H; \quad H = P + \mathbf{v}^2/2; \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}; \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Здесь векторное поле $\mathbf{v}$ (скорость течения) и скалярное поле P (давление) неизвестны, и должны быть определены в каждый момент времени в каждой точке области, занятой жидкостью (область течения). В наших рассуждениях область течения $D \subset \mathbb{R}^3$ (или $D \subset \mathbb{R}^2$) будет задана и неизменна, хотя, вообще говоря, в гидродинамике ставятся также задачи со свободными и (или) переменными границами. Далее область D считается ограниченной и, во всяком случае, кусочно гладкой. Орт *внешней* нормали к $S = \partial D$ обозначается $\mathbf{n}$. При

каждом t имеет место разбиение $S = S^+(t) \cup S^-(t) \cup S^0(t)$ (с точностью до множества меры нуль), где $S^+(t) = \{x \in S : \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n} < 0\}$ — вход потока (сквозь него жидкость втекает), $S^-(t) = \{x \in S : \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n} > 0\}$ — выход, и $S^0(t) = \{x \in S : \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n} = 0\}$ — непроницаемая стенка. По определению, в открытом течении вход и выход не пусты. Более того, они известны, если поставлено граничное условие

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \gamma(x, t), \quad x \in S = \partial D; \quad \int_S \gamma ds = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где $\gamma \neq 0$ — заданная функция. Однако, корректная постановка начально-краевой задачи для уравнений Эйлера требует дополнительного граничного условия². Вопрос о выборе такого условия не прост. Вероятно, его всегда следует ставить на входе; по крайней мере известно несколько способов сделать это. Можно, например, задать тангенциальный вихрь на входе, так что

$$\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^+) = 0 \quad \text{на } S^+, \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\omega}^+$ — заданное векторное поле на S^+ . Это условие ввел В. И. Юдович [11]. Он исследовал плоскую задачу, где $D \subset \mathbb{R}^2$, $\text{rot } \mathbf{v} = \omega \mathbf{e}_z$, и $\omega = v_y - u_x$ — скаляр, так что условие (3) принимает вид $\omega - \omega^+ = 0$ на S^+ , при заданной скалярной функции ω^+ . В. И. Юдович установил, что классическое решение существует, единственно и неограниченно продолжаемо по времени при любых данных, удовлетворяющих лишь естественным условиям регулярности. Позднее А. В. Кажихов распространил граничное условие Юдовича на трехмерный случай [12], а также показал (см. [13]), что вместо (3) можно поставить условие

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}^+) = 0 \quad \text{на } S^+, \quad (4)$$

где $\mathbf{v}^+$ — заданное векторное поле на S^+ , т. е. вместо вихря на входе можно задавать тангенциальную скорость. Отметим, что для двумерной задачи Кажихова неограниченная продолжаемость решения не установлена, и примеры коллапса также неизвестны. Для трехмерных задач та же проблема существует при всех типах граничных

²Если поставлено условие $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \equiv 0$, так что $S^0 = S$ для всех t , то достаточно поставить начальное условие, и полученная начально-краевая задача будет корректна. Ей посвящена обширная литература (см. ссылки в [10]).

условий, включая и полностью непроницаемые стенки, и условия пространственной периодичности.

3. Функционалы Ляпунова

Пусть $W : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ — функционал на фазовом пространстве $\mathbb{Y}$ некоторой динамической системы $\mathcal{S}_t : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$, $t \geq 0$; пусть $x \in \mathbb{Y}$, положим $w_x(t) = W(\mathcal{S}_t x)$. Существование такого функционала W , что w_x монотонна (и не постоянна) для всех x из «достаточно представительного» множества $\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$ — существенное проявление неконсервативности системы $\mathcal{S}_t$. Допуская некоторую вольность речи, будем называть такие W функционалами Ляпунова (классическую теорию см. в [14]). Приведем примеры задач Кажихова и Юдовича, допускающих функционалы Ляпунова.

Пусть Ω и U — постоянные векторы, положим $V = \Omega \times \mathbf{x} + U$. Поле V — поле скорости твердотельного движения жидкости, т. е. движения без деформации. Рассмотрим задачу Кажихова (1–2–4) с $\gamma = V \cdot \mathbf{n}$ и $\mathbf{v}^+ = V$, и пусть $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\cdot, t)$ — ее решение. Непосредственно проверяется тождество

$$\frac{d}{dt} \int_D (\mathbf{v} - V)^2 dx = - \int_{S^-} \gamma (\mathbf{v} - V)^2 dS \leq 0.$$

При его проверке полезно вспомнить, что $\omega \times \mathbf{v} = (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^2 / 2$.

Рассмотрим плоскую задачу Юдовича, где γ задана произвольно, но $\omega^+ = \Omega \equiv \text{const}$. Пусть $f = f(r) > 0$ при $r \neq 0$, $f(0) = 0$, тогда

$$\frac{d}{dt} \int_D f(\omega - \Omega) dx = - \int_{S^-} f(\omega - \Omega) \gamma ds \leq 0. \quad (5)$$

Тождество следует непосредственно из уравнения вихря, которое получается применением rot к (1). В случае течений в канале (рис. 1, слева) можно указать гораздо более широкие классы граничных условий, допускающих функционал Ляпунова типа (5).

Теперь рассмотрим плоскую задачу Юдовича в кольце (как на рис. 1 справа, или с большим числом дырок). Пусть γ задана так, что вход содержит замкнутый контур Γ . Тогда

$$\frac{d}{dt} \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\Gamma} \omega^+ \gamma ds, \quad (6)$$

где ω^+ и γ заданы. Таким образом, вдув завихренной жидкости генерирует, вообще говоря, линейный рост циркуляции вокруг входа, что, в частности, влечет невозможность стационарного (установившегося) режима течения. Пусть теперь $\omega^+ = \Omega \equiv \text{const} \neq 0$. Тогда задача Юдовича в кольцевой области имеет как возрастающий (по абсолютной величине), так и убывающий положительный функционалы Ляпунова одновременно.

4. Резольвентное уравнение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Поле $\mathbf{V}$ в D , (не обязательно касающееся ее границы), назовем *гармоническим*, если $\text{rot } \mathbf{V} = 0$, $\text{div } \mathbf{V} = 0$ в D .

Аналогично определяются гармонические поля на гладких поверхностях. Гармонические поля, тангенциальные к границе, порождают базис сингулярных одномерных кохомологий области (рассматриваемой как гладкое 3-х или 2-х-мерное многообразие).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Кольцевой* назовем гладкую область D такую, что или $\partial D = S_1 \cup S_2$, S_1 и S_2 — непересекающиеся связные гладкие замкнутые поверхности, гомеоморфные друг другу, и любой замкнутый путь в D стягиваем к (гомологичен) некоторому пути на S_1 , или D — зазор между периодически искривленными плоскостями или цилиндрами, где границы периодов отождествлены³.

Рассмотрим кольцевую область D . Пусть на $S = \partial D$ задана нормальная скорость γ такая, что $S_1 = S^+$ и $S_2 = S^-$ (как на рис. 1, справа). Тогда задача Юдовича в кольцевой области с $\omega^+ = 0$ на S^+ имеет бесконечно много гармонических решений, все они стационарны, причем $H \equiv \text{const}$, где константу можно считать нулевой без потери общности. Избежать этой неединственности можно, обратившись к условиям Кажихова. Предположим дополнительно, что тангенциальная скорость $\mathbf{v}^+$ задана так, что задача Кажихова имеет гармоническое решение $\mathbf{V}$ (с $H \equiv \text{const}$). Это решение единственно в классе гармонических полей. В самом деле, граничное условие (4) определяет, в частности, циркуляции поля по всем граничным контурам, принадлежащим входу, и, следовательно, по любому замкнутому пути в D (в силу определения кольцевой области).

Пусть задача Кажихова (1)–(2)–(4) в кольцевой области D имеет гармоническое решение $\mathbf{V}$, причем $S_1 = S^+$ и $S_2 = S^-$ (как на

³В этом случае решение подчиняется надлежащим условиям периодичности.

рис. 1, справа). Линеаризуем задачу вблизи $\mathbf{V}$, рассмотрим собственные моды вида $\mathbf{v} = e^{\lambda t} \hat{\mathbf{v}}(x)$, $H = e^{\lambda t} \hat{H}(x)$, и перейдем к задаче на собственные значения

$$\lambda \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = -\nabla H; \quad \text{rot } \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}; \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ на } S^+, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ на } S. \quad (8)$$

Множество собственных чисел λ течения $\mathbf{V}$ обозначим $\Lambda(\mathbf{V})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Стационарное течение назовем сквозным, если его поле скорости не имеет особых точек в $\bar{D}$, т. е. $\inf_D |\mathbf{V}| > 0$.

Пусть $\mathcal{B}$ — пространство ограниченных операторов в $L_2(S^+)$.

Теорема 1. Пусть течение $\mathbf{V}$ в кольцевой области D сквозное и гармоническое. Тогда найдется целая функция $K : \lambda \mapsto K(\lambda) \in \mathcal{B}$ такая, что $\Lambda(\mathbf{V}) = \{\lambda : \ker K(\lambda) \neq \{0\}\}$.

Замечание 1. Другими словами, задача (7)–(8) сводится к однородному скалярному интегральному уравнению 1-го рода на входе, причем ядро соответствующего интеграла — целая функция λ .

Лемма 1. В кольцевой области D рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \text{ в } D; \\ \mathbf{v} \times \mathbf{n} &= 0 \text{ на } S_1, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } S_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — гладкое поле, такое, что $\text{div } \boldsymbol{\omega} = 0$ и $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ на S_1 . Тогда имеется ровно одно гладкое решение $\mathbf{v}$.

◁ **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.** В силу граничного условия на S_1 , любое решение задачи (9) имеет нулевую циркуляцию по любому замкнутому пути, лежащему на S_1 . Следовательно, решение $\mathbf{u}$ однородной задачи (9) имеет нулевую циркуляцию по любому замкнутому пути в D (так как D — кольцевая область), и потому потенциально, т. е. $\mathbf{u} = \nabla \phi$, где ϕ — однозначная скалярная функция. Тогда $\Delta \phi = 0$ в D , $d\phi/dn = 0$ на S_2 , и $\phi \equiv \text{const}$ на S_1 ; отсюда $\phi \equiv \text{const}$ и $\mathbf{u} \equiv 0$ в D . Обратимся к построению решения. Будем, не нарушая общности, считать, что S_1 лежит внутри S_2 . Продолжим поле $\boldsymbol{\omega}$ до поля $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ на $\mathbb{R}^3$, полагая $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = 0$ внутри S_1 , и $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \nabla \psi$ во внешности S_2 , где $\Delta \psi = 0$, $d\psi/dn = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ на S_2 , и $\psi(x) = o(1)$, $|x| \rightarrow \infty$. Поле $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ имеет тангенциальный разрыв на S_2 , но остается соленоидальным на $\mathbb{R}^3$ в обобщенном смысле, и хорошо затухает на бесконечности. Положим $G_0 = (4\pi|x|)^{-1}$, $\mathbf{b} = G_0 * \tilde{\boldsymbol{\omega}}$. Заметим, что $\text{rot rot } \mathbf{b} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}$. Так

как $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ на S_1 и D — кольцевая область, найдется гармоническое и тангенциальное к S поле $\mathbf{h}$ такое, что $\mathbf{b}_0 = \text{rot} \mathbf{b} + \mathbf{h}$ имеет нулевые циркуляции по любому замкнутому пути на S_1 , так что найдется скалярная функция $\phi_0 : (\mathbf{b}_0 - \nabla \phi_0) \times \mathbf{n} = 0$ на S_1 . Наконец, положим $\mathbf{v} = \mathbf{b}_0 + \nabla \phi$, $\Delta \phi = 0$ в D , $\phi = -\phi_0$ на S_1 , и $d\phi/dn = -\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{n}$ на S_2 . $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Коммутатор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{b}$ векторных полей $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ выражается в виде

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\text{div} \mathbf{b}) \mathbf{a} + (\text{div} \mathbf{a}) \mathbf{b}. \quad (10)$$

Отсюда, применив rot к (7), выводим уравнение вихря

$$\lambda \boldsymbol{\omega} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{V}] = 0 \iff \dot{\boldsymbol{\omega}}_s = (\mathcal{D} - \lambda E) \boldsymbol{\omega}, \quad (11)$$

где $(\cdot)_s$ обозначает дифференцирование вдоль траекторий поля $\mathbf{V}$ (s — параметр на траектории), E — единичная матрица и $\mathcal{D} = \nabla \mathbf{V}$. Проинтегрируем уравнение (11). Так как поле $\mathbf{V}$ — гладкое, и не имеет особых точек в $\bar{D}$, для каждой точки $x \in D$ существует ровно один отрезок l_x траектории поля $\mathbf{V}$, соединяющий ее со входом. Таким образом, определено гладкое отображение $x \mapsto (a^+, t^+)$, где $a^+(x) = l_x \cap S^+$, и $t_+(x)$ — время, за которое материальная частица проходит отрезок l_x . Гладкость вытекает из отсутствия особых точек и гладкости входа. Далее, определим отображение $X(s) : a \mapsto X(s)a$ как решение задачи Коши $\dot{X}_s = \mathbf{V} \circ X$, $X = a \in D$ при $s = 0$, и рассмотрим уравнение в вариациях $\dot{X}'_s(a, s) = \mathcal{D}(X(s)a)X'(a, s)$, $X'(a, 0) = E$, где $X'(a, s)$ — дифференциал $X(s)$ в точке a . Тогда

$$\boldsymbol{\omega}(x) = e^{-\lambda t^+} X'(a^+, t^+) \boldsymbol{\omega}^+(a^+), \quad x \in D. \quad (12)$$

где $\boldsymbol{\omega}^+$ — след $\boldsymbol{\omega}$ на S^+ , причем $\boldsymbol{\omega}^+ \cdot \mathbf{n} \equiv 0$. Последнее вытекает из (8), если учесть, что нормальная компонента вихря rot_n не содержит нормальных производных и не зависит от нормальной компоненты поля. Далее, из равенства касательных компонент правой и левой частей (7) следует, что

$$\boldsymbol{\omega}^+ = -\gamma^{-1} \mathbf{n} \times \nabla H. \quad (13)$$

Однако произвольное поле вида (12) не обязано быть представимо в виде $\text{rot} \mathbf{v}$. Для этого достаточно выполнения равенств $\text{div} \boldsymbol{\omega} = 0$

и равенства нулю потоков поля (12) через каждую компоненту границы. При этом последнее требование вытекает из первого, так как $\boldsymbol{\omega}^+ \cdot \mathbf{n} \equiv 0$. Пусть теперь $\boldsymbol{\omega}^+$ определено в (13), $\boldsymbol{\omega}$ определено в (12), и $\rho = \operatorname{div} \boldsymbol{\omega}$. Тогда, в силу (10) и (11) $\lambda \rho + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho = 0$, так что $\rho \equiv 0$ при условии $\rho^+ \equiv 0$, где ρ^+ — след ρ на S^+ . Спроектировав (11) на нормаль к S^+ , найдем $\rho^+ = \gamma^{-1} \operatorname{rot}_n((\gamma^{-1} \mathbf{n} \times \nabla H) \times \mathbf{V}) \equiv 0$, что и требовалось. Таким образом, определена целая оператор-функция $K(\lambda) : \chi \mapsto \mathbf{n} \cdot \operatorname{GL}^+(\lambda) \chi$, где χ — след H на S^+ , оператор $L_+(\lambda) : \chi \mapsto \boldsymbol{\omega}$ определен в (12)–(13), а через G обозначен оператор восстановления векторного поля по вихрю, описанный в лемме 1. Решения однородной задачи (7)–(8) — элементы $\ker K(\lambda)^4$. $\triangleright$

6. Явное выражение «определителя» $K(\lambda)$

Пусть D — зазор между круговыми коаксиальными цилиндрами радиусов 1 и $a > 1$, и r, θ, z — цилиндрические координаты в D , $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ — орты координатных направлений, $\gamma = -1$ при $r = 1$, $\gamma = 1/a$ при $r = a$, так что $S^+ = \{r = 1\}$, $S^- = \{r = a\}$; $\mathbf{v}^+ = \Gamma \mathbf{e}_\theta$, $\Gamma \in \mathbb{R}$ — параметр (циркуляция потока вокруг входа $= 2\pi\Gamma$). Вдоль оси z — условия периодичности с периодом L . Положим $\mathbf{V} = r^{-1}(\mathbf{e}_r + \Gamma \mathbf{e}_\theta)$. Ввиду симметрии задачи, $K(\lambda)$ представляет собой мультипликаторное преобразование рядов Фурье, т. е. $\chi_{n\alpha} \mapsto \kappa_{n,\alpha}(\lambda) \chi_{n\alpha}$ для каждой гармоники $\chi_{n\alpha}(\theta, z) = \exp i(n\theta + \alpha z)$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \alpha_0 \mathbb{Z}$, $\alpha_0 = 2\pi/L$, $n^2 + \alpha^2 \neq 0$. Таким образом, $\Lambda(\mathbf{V})$ совпадает с объединением множеств нулей всех мультипликаторов $\kappa_{n,\alpha}$. Вычислим их, полагая $n \neq 0$ ⁵. Положим $\mathbf{v} = \chi_{n\alpha} \hat{\mathbf{v}}(r)$, $\boldsymbol{\omega} = \chi_{n\alpha} \hat{\boldsymbol{\omega}}(r)$, где $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \xi \mathbf{e}_r + \eta \mathbf{e}_\theta + \zeta \mathbf{e}_z$, $\hat{\mathbf{v}} = u \mathbf{e}_r + v \mathbf{e}_\theta + w \mathbf{e}_z$. В соответствии с (13), $\boldsymbol{\omega}^+ = i \chi_{n\alpha} (\alpha \mathbf{e}_\theta - n \mathbf{e}_z)$, так что уравнение (11), граничные условия на S^+ и условие $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0$ примут вид

$$\lambda \xi - i n r^{-2}(\eta - \Gamma \xi) - i \alpha r^{-1} \zeta = 0; \quad \xi|_{r=1} = 0; \quad (14)$$

$$\lambda \eta - i \alpha \Gamma r^{-1} \zeta + (r^{-1}(\eta - \Gamma \xi))_r = 0; \quad \eta|_{r=1} = i \alpha; \quad (15)$$

$$\lambda \zeta + r^{-1} \zeta_r + i n \Gamma r^{-2} \zeta = 0; \quad \zeta|_{r=1} = -i n; \quad (16)$$

$$r^{-1}((r \xi)_r + i n \eta) + i \alpha \zeta = 0. \quad (17)$$

⁴Мы опускаем детальное доказательство ограниченности K .

⁵Случай $n = 0$ не требует новых идей.

С помощью (17) исключим η , ζ из (14). Получим

$$r\lambda\xi + \xi_r + r^{-1}(in\Gamma + 1)\xi = 0, \quad \xi(1) = 0.$$

Отсюда следует, что $\xi \equiv 0$. В таком случае уравнения (15), (16) и (17) зависимы и легко интегрируются, так что

$$\zeta = -in\mathcal{E}(r); \quad \eta = i\alpha r\mathcal{E}(r); \quad \mathcal{E}(r) = \mathcal{E}(r, \lambda, n\Gamma) = r^{-in\Gamma} e^{-\lambda(r^2-1)/2}.$$

Далее восстановим скорость по найденному вихрю, с учетом граничных условий для касательной скорости. Получим

$$w(r) = \int_1^r (i\alpha u - \eta) ds; \quad rv(r) = \int_1^r (s\zeta + inu) ds.$$

Подставив эти выражения в условие $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, получим неоднородную краевую задачу для уравнения Бесселя — Макдональда:

$$r^2\phi_{rr} + r\phi_r - (n^2 + \alpha^2 r^2)\phi = -r^2 F_{n,\alpha}; \quad \phi(1) = 0, \quad \phi_r(a) = 0,$$

где

$$\phi(r) = \int_1^r u(s) ds; \quad F_{n,\alpha}(r, \lambda, n\Gamma) = ((n/r)^2 + \alpha^2) \int_1^r \mathcal{E}(s, \lambda, n\Gamma) s ds.$$

Теперь $\kappa_{n,\alpha}(\lambda) = \kappa_{n,\alpha}(\lambda, n\Gamma, a) = u(1) = \phi_r(1)$. Более явно,

$$\kappa_{n,\alpha}(\lambda, n\Gamma, a) = C \int_1^a K_{\alpha,n,a}(s) F_{n,\alpha}(s, \lambda, n\Gamma) s ds, \quad C \neq 0,$$

где C — ненулевая постоянная, и $K_{\alpha,n,a}$ — решение задачи Коши

$$r^2 K_{rr} + r K_r - (n^2 + r^2 \alpha^2) K = 0; \quad K(a) = 1, \quad K_r(a) = 0.$$

Дальнейшие упрощения достигаются в плоской задаче, т. е. при $\alpha = 0$. Тогда $K_{0,n,a} = ((r/a)^n + (r/a)^{-n})/2$, и

$$\kappa_{n,0}(\lambda, n\Gamma, a) = C_1 \int_1^a ((a/r)^n - (r/a)^n) r^{-in\Gamma} e^{-\lambda(r^2-1)/2} r dr, \quad C_1 \neq 0.$$

Аналогичное выражение получается и в том случае, если вход и выход поменять местами.

Вопрос о расположении спектра $\Lambda(\mathbf{V})$ приводит к проблеме Рауса — Гурвица для целых функций $\kappa_{n,\alpha}$. Например, непосредственно из теоремы Пойа о нулях интегралов Лапласа (см. [15, 16]) следует

Теорема 2. Пусть D — зазор между двумя коаксиальными цилиндрами, и $\mathbf{V} = \pm r^{-1} \mathbf{e}_r$. Рассмотрим плоскую задачу Кажихова в сечении $z = \text{const}$. Тогда $\Lambda(\mathbf{V}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$, и $\sup \text{Re } \Lambda_n < 0$.

Вероятно, теорема 2 может быть уточнена и обобщена с использованием других результатов теории целых функций.

Детальное численное исследование нулей $\kappa_{n,0}(\lambda, 0, a)$ при $\Gamma \neq 0$ см. в [17]. В частности, на плоскости параметров a, Γ при разных n построены критические кривые, на которых $\Lambda(\mathbf{V})$ содержит числа $\pm ic$, $c > 0$, и обнаружены пересечения таких кривых.

В заключение вернемся к задаче Юдовича, и рассмотрим уравнение (7) с граничным условием $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0$ на S^+ . Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, найдем, что (а) если область течения неодносвязна, то задача имеет нулевое собственное значение, причем собственные поля — гармонические и тангенциальные к границе; (б) собственные значения $\lambda \neq 0$ существуют, если уравнение $\lambda \sigma + \text{rot}_n(\sigma \mathbf{n} \times \mathbf{V}) = 0$ на S^+ имеет решение $\sigma \neq 0$ с нулевым средним по S^+ . (Функция σ рассматривается как нормальная компонента вихря на S^+ .) Взяв в качестве D зазор между коаксиальными цилиндрами, нетрудно убедиться, что в случае $\mathbf{V} = \pm r^{-1} \mathbf{e}_r$ таких $\lambda \neq 0$ не существует. Если же $\mathbf{V} = r^{-1}(\mathbf{e}_r + \Gamma \mathbf{e}_\theta)$, то при любом Γ существует счетное число собственных значений на мнимой оси.

Литература

1. Моргулис А. Б., Юдович В. И. Асимптотическая устойчивость стационарного режима протекания идеальной несжимаемой жидкости // Сиб. мат. журн.—2002.—Т. 43, № 4.—С. 840–857.
2. Morgulis A. B., Yudovich V. I. Arnold's method for asymptotic stability of steady inviscid incompressible flow through a fixed domain with permeable boundary // Chaos.—2002.—Vol. 12, № 2.—P. 356–371.
3. Morgulis A. B. Non-linear asymptotic stability for the through-passing flows of inviscid incompressible fluid // Asympt. Anal.—2010.—Vol. 66.—P. 229–247.
4. Govorukhin V. N., Morgulis A. B., Vladimirov V. A. Planar inviscid flows in a channel of finite length: washout, trapping and self-oscillations of vorticity // J. Fluid Mech.—2010.—Vol. 659.—P. 420–472.
5. Моргулис А. Б., Говорухин В. Н., Владимиров В. А. Динамика течений идеальной несжимаемой жидкости с граничными условиями Юдовича // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск «Актуальные проблемы математической гидродинамики».—2009.—С. 51–72.
6. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.—М.: Наука, 1989.—472 с.
7. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.—М.: Мир, 1983.—301 с.

8. Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости.—Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1984.—192 с.
9. Юдович В. И. Возникновение автоколебаний в жидкости // Прикл. мат. и мех.—1971.—Т. 35, № 4.—С. 638–655.
10. Morgulis A., Shnirelman A., Yudovich V. Loss of smoothness and inherent instability of 2D inviscid fluid flows // Commun. Part. Diff. Eq.—2008.—Vol. 33, № 6.—Р. 943–968.
11. Юдович В. И. Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости через заданную область // Мат. сб.—1964.—Т. 64 (106), № 4.—С. 562–588.
12. Кажихов А. В. Замечание к постановке задачи протекания для уравнений идеальной жидкости // Прикл. мат. и мех.—1980.—Т. 44, № 5.—С. 947–949.
13. Антонцев С., Кажихов А., Монахов В. Краевые задачи механики неоднородной жидкости.—Новосибирск: Наука, 1983.—320 с.
14. Четаев Н. Г. Устойчивость движения.—М.: Наука, 1990.—176 с.
15. Островский И. В. Исследования М. Г. Крейна по теории целых и мероморфных функций и их дальнейшее развитие // Укр. мат. журн.—1994.—Т. 46, № 1.—С. 87–99.
16. Седлецкий А. М. О нулях преобразований Лапласа // Мат. заметки.—2004.—Т. 76, № 6.—С. 883–892.
17. Ilin K., Morgulis A. Instability of diverging and converging flows in an annulus.—2012.—arXiv: 1211.5710v1 [physics.flu-dyn].

МОРГУЛИС Андрей Борисович
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344099, Ростов-на-Дону, Мильчакова, 8а;
Южный математический институт ВНЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: amor@math.sfedu.ru

Ильин Константин Иванович
The University of York
Heslington, York, YO10 5DD, United Kingdom
E-mail: konstantin.ilin@york.ac.uk

THE SPECTRA OF THE OPEN FLOWS OF INVISCID FLUID IN THE RING-SHAPED DOMAINS

Ilin K. I., Morgulis A. B.

We study the spectra of boundary-value problems that arise as a result of the linearizing of the Euler equation of the inviscid incompressible fluid near the irrotational flows in the ring-shaped domains. The flows are open in the sense that there is inflow and outflow of the fluid. As a result the flow dynamics gets a non-conservatism that, in turn, manifests itself via spectral properties. For instance, the spectrum belongs to left semi-plane under certain conditions.

Key words: spectrum, stability, open flow, Euler equations, inviscid fluid.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КВАДРАТУРНЫХ
ФОРМУЛАХ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ
С ВЕСАМИ ЯКОБИ

Л. Ю. Плиева

Рассматриваются интегралы типа Коши с весами Якоби на отрезке $[-1, 1]$. Строятся интерполяционные квадратурные формулы для приближенного вычисления интегралов типа Коши и их производных. Даются оценки погрешностей.

Ключевые слова: оценка погрешности, квадратурная формула, интеграл типа Коши, весовая функция, интерполяционный многочлен, нули многочлена.

Интегралы типа Коши являются весьма удобным аппаратом для решения краевых задач теории аналитических функций комплексного переменного. Одной из классических областей приложения интегралов типа Коши является решение краевой задачи Римана. Кроме этого интегралы типа Коши имеют широкое приложение в задачах теории упругости. В частности при нахождении компонентов напряжений и смещений.

Огромный вклад в развитие теории интегралов типа Коши внесли Ю. В. Сохоцкий, А. Harnac, I. Plemelj, И. И. Привалов, Н. И. Мусхелишвили и др. А в развитие точных и приближенных методов вычисления интегралов типа Коши внесли Г. Н. Пыхтеев, Д. Г. Саникидзе, Ш. С. Хубежты и другие математики.

В данной работе строятся квадратурные формулы для приближенного вычисления интегралов типа Коши вида:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad (1)$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad (2)$$

и для их производных

$$\Phi_1'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt, \quad (3)$$

$$\Phi_2'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt, \quad (4)$$

где z не принадлежит отрезку интегрирования $[-1, 1]$ и $\varphi(t)$ достаточно гладкая функция, принадлежащая классу $H_r(\alpha)$ ($0 < \alpha \leq 1$, $r \geq 1$).

Прежде докажем теорему.

Теорема. Пусть многочлены $C_n(t)$ и $S_n(t)$ имеют вид

$$C_n(t) = \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}\theta)}{\cos \frac{\theta}{2}}, \quad S_n(t) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}\theta)}{\sin \frac{\theta}{2}},$$

$$\theta = \arccos t,$$

тогда справедливы формулы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_n(t)}{t-z} dt = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} (1 + z - \sqrt{z^2 - 1}), \quad (5)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{S_n(t)}{t-z} dt = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} (1 - z + \sqrt{z^2 - 1}). \quad (6)$$

Многочлены $C_n(t)$ и $S_n(t)$ ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ соответственно по весам $p(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$, $p(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$.

Представим многочлен $C_n(t)$ через многочлены Чебышева первого рода

$$C_n(t) = \frac{T_n(t) + T_{n+1}(t)}{1+t},$$

будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{T_n(t) + T_{n+1}(t)}{(1+t)(t-z)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t) + T_{n+1}(t)}{t-z} dt.$$

Используя формулу [3]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)}{t-z} dt = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}},$$

получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t) + T_{n+1}(t)}{t-z} dt = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}} (1 + z - \sqrt{z^2-1}).$$

Аналогично полагая

$$S_n(t) = \frac{T_n(t) - T_{n+1}(t)}{1-t},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{S_n(t)}{t-z} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t) - T_{n+1}(t)}{t-z} dt = \\ &= \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}} (1 - z + \sqrt{z^2-1}). \end{aligned}$$

Под $\sqrt{z^2-1}$ подразумевается фиксированная ветвь, однозначная в плоскости с разрезом вдоль отрезка $[-1, 1]$ действительной оси и принимающая на $(1, +\infty)$ действительные значения. $\triangleright$

Формулы (3) и (4) используются при построении квадратурных формул для интегралов типа Коши (1)–(4).

Итак, заменим в интеграле (1) плотность $\varphi(t)$ следующим интерполяционным многочленом:

$$L_{n-1}(\varphi, t) = \sum_{k=1}^n \frac{C_n(t)}{(t-x_k)C'_n(x_k)} \varphi(x_k), \quad (7)$$

где $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+1} \pi$ ($k = 1, \dots, n$) — нули многочлена $C_n(t)$.

Используя формулу (5), после вычисления соответствующих коэффициентов получим следующую квадратурную формулу для интеграла (1):

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &\approx \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{1-x_k^2}}{z-x_k} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)} \times \\ &\times \mu_k(z) \varphi(x_k) \equiv \Phi_{1n}(z), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\mu_k(z) = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} (1 + z - \sqrt{z^2 - 1}) - \frac{1}{2i} S_n(x_k),$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Аналогично предыдущему, построим интерполяционную квадратурную формулу для интеграла (2). Заменим плотность $\varphi(t)$ в интеграле многочленом Лагранжа

$$L_{n-1}(\varphi, t) = \sum_{k=1}^n \frac{S_n(t)}{(t - \bar{x}_k) S'_n(\bar{x}_k)} \varphi(\bar{x}_k), \quad (9)$$

где $\bar{x}_k = \cos \frac{2k}{2n+1} \pi$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — нули многочлена $S_n(t)$.

Используя формулу (6), после вычисления соответствующих коэффициентов получим следующую квадратурную формулу для интеграла (2):

$$\Phi_2(z) \approx \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{1 - \bar{x}_k^2}}{z - \bar{x}_k} \times$$

$$\times \sin \frac{k\pi}{2n+1} \bar{\mu}_k(z) \varphi(\bar{x}_k) \equiv \Phi_{2n}(z), \quad (10)$$

где

$$\bar{\mu}_k(z) = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} (1 - z + \sqrt{z^2 - 1}) + \frac{1}{2i} C_n(\bar{x}_k),$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Для квадратурных формул (8), (10) получены следующие оценки погрешности:

$$|\Phi_i(z) - \Phi_{in}(z)| < \frac{M}{4\rho},$$

где $M = \max_{t \in [-1, 1]} \frac{|\varphi^{(n+1)}(\xi(t))|}{(n+1)!}$, $\min_{t \in [-1, 1]} |t - z| = \rho$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим интеграл (3) и путем замены плотности $\varphi(t)$ полиномом (7) и применением формулы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_n(t)}{(t-z)^2} dt = \frac{i}{2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} \frac{n(z-1) - n\sqrt{z^2 - 1} - 1}{z-1},$$

получим следующую квадратурную формулу:

$$\Phi'_{1n}(z) \equiv \sum_{k=1}^n \frac{1}{C'_n(x_k)(z-x_k)^2} \left[\frac{i}{2} \frac{(z-\sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}} \tau(z) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2i} S_n(x_k) \right] \varphi(x_k), \quad (11)$$

$$\tau(z) = \frac{(z-x_k)(n(z-1)-n\sqrt{z^2-1}-1)-(z-1)(1+z-\sqrt{z^2-1})}{z-1}, \\ C'_n(x_k) = \frac{2n+1}{2} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{1-x_k^2} \cos \frac{2k-1}{2(2n+1)} \pi}, \\ x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+1} \pi \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Аналогично для интеграла (4) заменой его плотности многочленом (9) и применением формулы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{S_n(t)}{(t-z)^2} dt = \frac{i}{2} \frac{(z-\sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}} \frac{n\sqrt{z^2-1}-n(z+1)-1}{z+1},$$

получим квадратурную формулу

$$\Phi'_{2n}(z) \equiv \sum_{k=1}^n \frac{1}{S'_n(\bar{x}_k)(z-\bar{x}_k)^2} \left[\frac{i}{2} \frac{(z-\sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}} \tau_1(z) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2i} C_n(\bar{x}_k) \right] \varphi(\bar{x}_k), \quad (12)$$

$$\tau_1(z) = \frac{(z-\bar{x}_k)(n\sqrt{z^2-1}-n(z+1)-1)-(z+1)(1-z+\sqrt{z^2-1})}{z-1}, \\ S'_n(\bar{x}_k) = \frac{2n+1}{2} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{1-\bar{x}_k^2} \sin \frac{k\pi}{2n+1}}, \\ \bar{x}_k = \cos \frac{2k}{2n+1} \pi \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Для квадратурных формул (11) и (12) получены следующие оценки погрешностей:

$$|\Phi'_1(z) - \Phi'_{1n}(z)| \leq \frac{C_1}{n^r} \frac{1}{\sqrt{z+1}\sqrt{(z-1)^3}},$$

$$|\Phi'_2(z) - \Phi'_{2n}(z)| \leq \frac{C_2}{n^r} \frac{1}{\sqrt{z-1}\sqrt{(z+1)^3}} \quad (r \geq 1, C_1, C_2 = \text{const}).$$

Если плотность $\varphi(t)$ в приведенных интегралах представляет собой многочлен степени $m \leq n-1$, то квадратурные формулы дают точные значения интегралов типа Коши с точностью до ошибки представления чисел в ЭВМ.

Литература

1. Ахиезер Н. И. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов // Изв. АН СССР.—1945.—Т. 9, №4.—С. 275–290.
2. Хубежты Ш. С., Плиева Л. Ю., Бесаева З. В. О квадратурных формулах для сингулярных интегралов и формулы обращения // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, № 2.—С. 56–53.
3. Пыхтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши.—Новосибирск: Наука, 1980.—120 с.
4. Лифанов И. К. Численное решение одномерных сингулярных интегральных уравнений.—М.: ТОО Янус, 1995.—520 с.
5. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.—М.: Наука, 1982.—344 с.
6. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями.—М.: Наука, 1986.—336 с.

ПЛИЕВА ЛЮБОВЬ ЮРЬЕВНА
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
E-mail: plieva-21@mail.ru

ON INTERPOLATION OF QUADRATURE FORMULAS FOR CAUCHY TYPE INTEGRALS WITH JACOBI WEIGHTS

Plieva L. Yu.

Integrals of Cauchy type with Jacobi weights on the interval $[-1, 1]$ are considered. Interpolation of quadrature formulas for approximate calculation of Cauchy type integrals and derivatives are constructed. Errors estimates are also given.

Key words: estimates of the errors, quadrature formula, Cauchy type integral, weight function, interpolating polynomial, the zeros of polynomial.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННО- ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

С. В. Ревина

Построена длинноволновая асимптотика задачи устойчивости двумерных сдвиговых течений, периодических по одной из пространственных переменных и условно периодических по другой. Показано, что рекуррентные формулы k -го члена асимптотики, полученные в периодическом случае, переносятся на случай условно-периодической внешней силы.

Ключевые слова: течение Колмогорова, длинноволновая асимптотика, рекуррентные формулы.

1. Введение

Рассматривается двумерное $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in R^2$ течение вязкой несжимаемой жидкости, описываемое уравнениями Навье — Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Поле скорости $\mathbf{v}$ отыскивается в том же классе вектор-функций, что и $\mathbf{F}$. Пусть сначала поле внешних сил $\mathbf{F}$ периодически по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами L_1, L_2 , причем один из пространственных периодов $L_2 = \frac{2\pi}{\alpha}$ стремится к бесконечности, когда волновое число $\alpha \rightarrow 0$.

Угловыми скобками будем обозначать среднее функции по одной из пространственных переменных, а двойными угловыми скобками — среднее по прямоугольнику периодов $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} f(\mathbf{x}, t) dx_1, \quad \langle\langle f \rangle\rangle(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2.$$

Среднее поля скорости по прямоугольнику периодов считается заданным:

$$\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle = \mathbf{q}. \quad (2)$$

К рассматриваемому классу принадлежит течение Колмогорова

$$\mathbf{V} = \left(0, -\frac{\gamma}{\nu} \sin x\right),$$

для которого внешняя сила имеет вид $\mathbf{F} = (0, \gamma \sin x)$. Это классическое течение находит многочисленные применения при моделировании физических процессов и до сих пор привлекает внимание исследователей [1–3].

Впервые длинноволновая асимптотика ($\alpha \rightarrow 0$) задачи устойчивости двумерных параллельных пространственно-периодических течений общего вида построена в [4]. Исследованию автоколебаний, возникающих при потере устойчивости параллельных течений относительно длинноволновых возмущений, посвящена работа [5]. Линейная задача устойчивости трехмерных стационарных течений вида

$$\mathbf{V} = (\alpha V_1, \alpha V_2, V_3)$$

рассмотрена в [6] в предположениях, что один из пространственных периодов стремится к бесконечности, когда два остальных фиксированы. В частности, показано, что если среднее продольной компоненты скорости отлично от нуля $\langle V_3 \rangle \neq 0$, то при уменьшении вязкости происходит колебательная потеря устойчивости.

В [7] явно построены главные члены асимптотики автоколебательного режима, отвечающего от основного течения при малых α , когда число Рейнольдса переходит критическое значение, найденное в [6]. Изучение автоколебаний, возникающих при потере устойчивости двумерных и трехмерных стационарных течений относительно длинноволновых возмущений было продолжено в [8–10]. Найденны главные члены асимптотики вторичных режимов для основного течения вида $\mathbf{V} = (\alpha V_1, V_2)(\mathbf{x})$ с ненулевым средним $\langle V_2 \rangle \neq 0$, а также для основного течения, близкого к параллельному $\mathbf{V} = (\alpha V_1(x_2), V_2(x_1))$ с нулевым средним $\langle V_2 \rangle = 0$.

В работе [10] построена длинноволновая асимптотика задачи устойчивости стационарных сдвиговых течений

$$\mathbf{V} = (0, V(x_1)). \quad (3)$$

Показано, что при условии $\langle V \rangle \neq 0$ происходит колебательная потеря устойчивости, выведены рекуррентные формулы и дан алгоритм нахождения k -го члена асимптотики.

Целью настоящей работы является распространение результатов [10] для периодических течений на почти периодические по одной из пространственных переменных течения в предположении, что поле внешних сил $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ условно периодически по x_1 , а поведение по x_2 остается прежним. В математической постановке задачи в этом случае вместо (2) задается выражение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dx_1 \frac{1}{L_2} \int_0^{L_2} v(x_1, x_2, t) dx_2 = q. \quad (4)$$

2. Вспомогательные утверждения

Сначала сформулируем некоторые определения и докажем вспомогательные утверждения, относящиеся к обыкновенным дифференциальным уравнениям в классе условно периодических функций.

Пусть $C(R)$ — множество непрерывных на вещественной оси комплекснозначных функций. Под почти периодической функцией будем понимать почти периодическую в смысле Бора функцию [11]. Известно, что для каждой почти периодической функции $f(x)$ существует конечное среднее значение

$$M(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx.$$

Если $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, то ее среднее по периоду совпадает со средним значением в смысле почти периодических функций:

$$M(f) = \langle f \rangle.$$

Пусть натуральное число $n \geq 2$ фиксировано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Числа $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ называются *рационально независимыми*, если из равенства $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_n\omega_n = 0$ с целыми k_j , $j = 1, 2, \dots, n$ следует $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$.

Через Y_n будем обозначать множество условно-периодических функций, представимых в виде линейной комбинации n периодических функций с несоизмеримыми частотами таких, что среднее по

периоду каждой функции равно нулю:

$$Y_n = \left\{ f(x) \mid f(x) = \sum_{k=1}^n c_k g_k(x) : g_k \in C(R), g_k\left(x + \frac{2\pi}{\omega_k}\right) = g_k(x), \right. \\ \left. \langle g_k \rangle = 0, (\omega_1, \dots, \omega_n) - \text{рационально независимые числа} \right\}.$$

Легко видеть, что если функция принадлежит рассматриваемому классу: $f(x) \in Y_n$, то ее среднее значение в смысле почти периодических функций равно нулю $M(f) = 0$.

Чтобы включить в рассмотрение условно-периодические функции с ненулевым средним, определим еще одно функциональное пространство. Пусть q — некоторая комплексная константа. Через Y_n^q будем обозначать множество функций, представимых в виде:

$$Y_n^q = \{h(x) \in C(R) \mid h(x) = f(x) + q : f \in Y_n\}.$$

Очевидно, что пространства Y_n и Y_n^0 совпадают. Среднее любой функции из Y_n^q равно q :

$$(\forall h \in Y_n^q) \quad M(h) = q.$$

Введем интегральный оператор $I : Y_n^0 \rightarrow Y_n^0$, действующий по правилу

$$I(f)(x) = \int_0^x f(s) ds - M\left(\int_0^x f(s) ds\right).$$

Тогда для простейших дифференциальных уравнений первого и второго порядка справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dx} = f(x), \quad M(u) = q. \quad (5)$$

Пусть $f \in Y_n$. Тогда существует единственное решение задачи $u \in Y_n^q$ и оно задается формулой:

$$u(x) = I(f) + q.$$

Лемма 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad M(u) = q. \quad (6)$$

Пусть $f \in Y_n$. Тогда существует единственное решение задачи $u \in Y_n^q$ и оно задается формулой:

$$u(x) = I^2(f) + q.$$

В качестве следствия лемм 1 и 2 получаем утверждение, которое понадобится в дальнейшем.

Лемма 3. *Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (5) и задачи (6) в классе условно-периодических функций Y_n^q является равенство нулю среднего правой части $M(f) = 0$.*

Вернемся к исходной постановке задачи (1), (4) в классе условно-периодических функций. Сначала найдем основное решение.

Лемма 4. *Пусть поле внешних сил имеет вид $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (0, f(x_1))$, где $f \in Y_n^c$ и $\mathbf{q} = (0, Q)$. Тогда существует единственное сдвиговое течение вида (3), которое удовлетворяет (1), (4), причем*

$$V(x_1) = -\frac{1}{\nu} I^2(f(x_1) - c) + Q; \quad p(x) = cx_2 + \text{const}. \quad (7)$$

3. Линейная спектральная задача

Разыскивая решение линеаризованного на основном течении (7) уравнения возмущений в виде нормальных колебаний

$$\tilde{\mathbf{v}}(x, z, t) = e^{\sigma t} \boldsymbol{\varphi}(x, z), \quad \tilde{p}(x, z, t) = e^{\sigma t} P(x, z),$$

(здесь и в дальнейшем $x = x_1$, $z = \alpha x_2$), приходим к линейной спектральной задаче:

$$\begin{aligned} \sigma \varphi_1 + \alpha V \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \nu_c \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x}, \\ \sigma \varphi_3 + \alpha V \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \varphi_1 \frac{\partial V}{\partial x} - \nu_c \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) &= -\alpha \frac{\partial P}{\partial z}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

$$M(\varphi_2(\cdot, z)) = 0, \quad \int_0^{2\pi} \varphi_1(x, z) dz = 0.$$

Критическим назовем значение параметра ν , при котором одно или несколько собственных значений σ выходят на мнимую ось.

Неизвестные собственные значения σ , вектор-функцию φ и функцию $P(x, z)$, а также критическое значение вязкости ν , будем разыскивать в виде рядов по степеням параметра α :

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \alpha^k, \quad \nu_c = \nu^* + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \alpha^k,$$

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k \alpha^k, \quad P = \sum_{k=0}^{\infty} P^k \alpha^k.$$

Подставим эти разложения в уравнения и приравняем коэффициенты при α^k . Сначала приравняем коэффициенты при α^0 . Из уравнения неразрывности следует, что $\varphi_1^0 = \varphi_1^0(z)$. Тогда первое уравнение системы принимает вид

$$\sigma_0 \varphi_1^0 = \frac{\partial P^0}{\partial x}.$$

Воспользовавшись условием разрешимости, найденным в лемме 3, осредним это уравнение по переменной x . Отсюда находим нулевой член разложения собственных значений $\sigma_0 = 0$ и выводим, что функции P^0 зависят только от z : $P^0 = P^0(z)$.

Далее, нам понадобится вспомогательная функция θ , которая определяется как решение задачи:

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} = V - M(V), \quad M(\theta) = 0.$$

Фигурными скобками будем обозначать отклонение функции от ее среднего значения

$$\{F\} = F(x) - M(F).$$

Для нахождения $\varphi_2^0(x, z)$ получаем задачу:

$$-\nu_* \frac{\partial^2 \varphi_2^0}{\partial x^2} + \varphi_1^0 \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad M(\varphi_2^0) = 0.$$

Снова воспользовавшись леммой 2, находим

$$\varphi_2^0 = \frac{1}{\nu_*} \varphi_1^0(z) \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\nu_*} \varphi_1^0(z) a_0(x), \quad a_0(x) = \frac{d\theta}{dx}.$$

В порядке α^k , $k \geq 1$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \nu_* \frac{\partial^2 \varphi_1^k}{\partial x^2} &= \frac{\partial P^k}{\partial x} + \sum_{j=1}^k \sigma_j \varphi_1^{k-j} + V \frac{\partial \varphi_1^{k-1}}{\partial z} - \\ &- \sum_{j=1}^{k-1} \nu_j \frac{\partial^2 \varphi_1^{k-j}}{\partial x^2} - \sum_{j=0}^{k-2} \nu_j \frac{\partial^2 \varphi_1^{k-2-j}}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \nu_* \frac{\partial^2 \varphi_2^k}{\partial x^2} &= \frac{\partial P^{k-1}}{\partial z} + \sum_{j=1}^k \sigma_j \varphi_2^{k-j} + V \frac{\partial \varphi_2^{k-1}}{\partial z} - \\ &- \sum_{j=1}^k \nu_j \frac{\partial^2 \varphi_2^{k-j}}{\partial x^2} - \sum_{j=0}^{k-2} \nu_j \frac{\partial^2 \varphi_2^{k-2-j}}{\partial z^2} + \varphi_1^k \frac{dV}{dx}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varphi_1^k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2^{k-1}}{\partial z} = 0, \quad M(\varphi_2^k(\cdot, z)) = 0, \quad \int_0^{2\pi} \varphi_1^k dz = 0. \quad (10)$$

Предполагается, что суммирование происходит по тем значениям j , для которых верхняя граница суммы не меньше нижней.

По лемме 3, условно-периодическое решение уравнения (8) существует тогда и только тогда, когда среднее правой части равно нулю. Осреднив уравнение (8), при $k = 1$ приходим к задаче на собственные значения:

$$\sigma_1 \varphi_1^0(z) + M(V) \frac{d\varphi_1^0}{dz} = 0. \quad (11)$$

Отсюда находим σ_1 и φ_1^0 :

$$\sigma_1 = \text{im } M\{V\}, \quad \varphi_1^0 = e^{-\text{im } z},$$

где $m \neq 0$ — волновое число.

При $k \geq 2$, учитывая уравнение неразрывности (10) и найденное значение σ_1 , условие разрешимости уравнения (8) запишем в виде:

$$\begin{aligned} M(V) \left(\text{im } M(\varphi_1^{k-1}) + \frac{dM(\varphi_1^{k-1})}{dz} \right) &= \nu_* \frac{d^2}{dz^2} M(\varphi_1^{k-2}) - \\ &- \frac{d^2}{dz^2} M(\theta' \varphi_2^{k-2}) - \sum_{j=2}^k \sigma_j M(\varphi_1^{k-j}) + \sum_{j=1}^{k-2} \nu_j \frac{d^2}{dz^2} M(\varphi_1^{k-2-j}). \end{aligned} \quad (12)$$

Так как φ_1^0 и φ_2^0 уже известны, то полагая $k = 2$ в (12), приходим к уравнению для нахождения среднего $M(\varphi_1^1(\cdot, z))$:

$$\begin{aligned} M(V) \left(\text{im } M(\varphi_1^1) + \frac{d}{dz} M(\varphi_1^1) \right) = \\ = \nu_* \frac{d^2 \varphi_1^0}{dz^2} - \frac{d^2}{dz^2} M(\theta' \varphi_2^0) - \sigma_2 \varphi_1^0(z). \end{aligned} \quad (13)$$

Из условия разрешимости уравнения (13) — ортогональности правой части решению однородного сопряженного уравнения — находим ν_*^2 , σ_2 и среднее $M(\varphi_1^1(\cdot, z))$:

$$\nu_*^2 = M(\theta' a_0(x)) = M(\theta'^2), \quad \sigma_2 = 0, \quad M(\varphi_1^1) = 0.$$

По доказанным леммам, условие разрешимости уравнения (9) такое же, как и уравнения (8) — равенство нулю среднего правой части по переменной x . Отсюда на k -ом шаге находим среднее давления:

$$\frac{d}{dz} M(P^{k-1}) = -2 \frac{d}{dz} M(V(x) \varphi_2^{k-1}).$$

Полагая $k = 1$ в уравнении неразрывности (10) и обращая оператор дифференцирования, находим φ_1^1 :

$$\varphi_1^1 = -\frac{1}{\nu_*} \frac{d\varphi_1^0}{dz} I(a_0). \quad (14)$$

Для нахождения P^1 уравнение (8) преобразуем к дивергентному виду:

$$\frac{\partial P^1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_* \frac{\partial \varphi_1^1}{\partial x} - \frac{d\theta}{dx} \frac{d\varphi_1^0}{dz} \right).$$

Отсюда, пользуясь известным выражением φ_1^1 (14), находим P^1 :

$$P^1 = q_1(x) \frac{d\varphi_1^0}{dz} + \langle P^1 \rangle; \quad q_1(x) = -2 \frac{d\theta}{dx} = -2a_0(x).$$

Для нахождения φ_2^1 преобразуем правую часть уравнения (9) при $k = 1$:

$$\sigma_1 \varphi_2^0 + V \frac{\partial \varphi_2^0}{\partial z} + \varphi_1^1 \frac{\partial V}{\partial x} = W(\varphi_1^1, \theta'').$$

Здесь через

$$W(f, g) = f \frac{\partial g}{\partial x} - g \frac{\partial f}{\partial x}$$

обозначен вронскиан.

Тогда уравнение (9) при $k = 1$ приводится к виду

$$\nu_* \frac{\partial^2 \varphi_2^1}{\partial x^2} = \{W(\varphi_1^1, \theta'')\} - \nu_1 \frac{\partial^2 \varphi_2^0}{\partial x^2}. \quad (15)$$

Подставляя в (15) известное выражение функции φ_1^1 , находим φ_2^1

$$\varphi_2^1 = \frac{1}{\nu_*^2} \frac{d\varphi_1^0}{dz} a_1(\theta) - \frac{\nu_1}{\nu_*} \varphi_2^0, \quad a_1 = I\{W(\theta', \theta)\}.$$

Схема нахождения следующих членов асимптотики такая же, как и в периодическом случае. Зная φ_2^{k-1} , сначала из уравнения неразрывности (10) находим φ_1^k .

Затем обращаемся к уравнению (8). Выполнение условия разрешимости уравнения (8) обеспечено на $k - 1$ -ом шаге. Тогда из уравнения (8) можно определить P^k с точностью до среднего значения.

После этого из уравнения (9) находим φ_2^k . Попутно из условия разрешимости уравнения (9) определяем производную по z среднего значения давления $M(P^{k-1})$.

Найденные на k -ом шаге величины позволяют выписать условие разрешимости уравнения (8) для $k + 2$ -го члена асимптотики. Оно имеет вид (12), если в этом уравнении k заменить на $k + 2$, и служит для нахождения $M(\varphi_1^{k+1})$. Из условия разрешимости этого уравнения находим σ_{k+2} и ν_k , а затем из уравнения определяется среднее значение $M(\varphi_1^{k+1})$. Далее процесс повторяется.

4. Основные результаты

Теорема 1. Пусть основное решение задачи (1), (4) — сдвиговое течение (3) с ненулевым средним $M(V) \neq 0$, принадлежащее классу условно-периодических функций $\{V\} \in Y_n^0$. Тогда коэффициенты разложений по степеням α собственных функций линейной спектральной задачи (8)–(10) имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} \varphi_1^k &= -\frac{1}{\nu_*^k} \frac{d^k \varphi_1^0}{dz^k} I(a_{k-1}(\theta)) - \frac{\nu_{k-1}}{\nu_*} \varphi_1^1, \\ P^k &= \frac{1}{\nu_*^{k-1}} \frac{d^k \varphi_1^0}{dz^k} q_k(\theta) - \frac{\nu_{k-2}}{\nu_*} \{P^2\} + M(P^k), \\ \varphi_2^k &= \frac{1}{\nu_*^{k+1}} \frac{d^k \varphi_1^0}{dz^k} a_k(\theta) - \frac{\nu_k}{\nu_*} \varphi_2^0, \end{aligned}$$

где a_k, q_k выражаются через a_j, q_j при $j \leq k-1$. Слагаемое, содержащее ν_{k-2} в выражении коэффициентов давления R^k , появляется при четных k , удовлетворяющих условию $k \geq 4$.

Критические собственные значения σ являются нечетными по α функциями, а критическое значение вязкости ν -четной функцией волнового числа. Коэффициенты разложений собственных значений и критического значения вязкости при четных $j \leq k$ выражаются по формулам:

$$\sigma_j = 0; \quad \nu_j = (-1)^{\frac{j}{2}} \frac{m^j}{2\nu_*^{j+1}} M(\theta' a_j(\theta)),$$

а при нечетных $j \leq k$:

$$\sigma_{j+2} = (-1)^{\frac{j+1}{2}} \frac{im^{j+2}}{\nu_*^{j+1}} M(\theta' a_j(\theta)); \quad \nu_j = 0.$$

◁ Теорема доказывается по индукции. ▷

Приведем более подробные выражения коэффициентов разложений собственных функций по степеням α . Пусть k — четное. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1^k = & -\frac{1}{\nu_*^k} \frac{d^k \varphi_1^0}{dz^k} I(b_{k-1}(\theta)) - \sum_{j=2}^{k-4} \frac{\nu_j}{\nu_*} \varphi_1^{k-j} - \frac{2\nu_{k-2}}{\nu_*} \varphi_1^2 - \\ & - \sum_{j=2}^{k-4} \frac{\nu_j}{\nu_*} I^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{k-2-j}}{\partial z^2} + \sum_{j=3}^{k-1} \frac{\sigma_j}{\nu_*} I^2(\varphi_1^{k-j}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2^k = & -\frac{1}{\nu_*^{k+1}} \frac{d^k \varphi_1^0}{dz^k} b_k(\theta) - \sum_{j=2}^k \frac{\nu_j}{\nu_*} \varphi_2^{k-j} - \\ & - \sum_{j=2}^{k-4} \frac{\nu_j}{\nu_*} I^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{k-2-j}}{\partial z^2} + \sum_{j=3}^{k-1} \frac{\sigma_j}{\nu_*} I^2(\varphi_2^{k-j}). \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты $b_m(\theta)$ при четном m находятся по формуле:

$$b_m(\theta) = I^2[\{W(\theta''), I a_{m-1}\} + \nu_*^2(q_{m-1} - a_{m-2})],$$

при m — нечетном в последнем выражении появляется дополнительное слагаемое:

$$b_m(\theta) = I^2\left[\{W(\theta''), I a_{m-1}\} + \nu_*^2(q_{m-1} - a_{m-2}) - \frac{1}{2} M(\theta' a_{m-3}) q_2\right],$$

а коэффициенты $q_m(\theta)$ для любого m находятся по формуле:

$$q_m(\theta) = I\{\theta'' I a_{m-2}\} - b_{m-1}(\theta) - \nu_*^2 I^2(a_{m-3}).$$

Подробные выражения коэффициентов разложений собственных функций по степеням α при k нечетном имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1^k = & -\frac{1}{\nu_*^k} \frac{d^k \varphi_1^0}{dz^k} I(b_{k-1}(\theta)) - \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\nu_j}{\nu_*} \varphi_1^{k-j} - \\ & - \sum_{j=2}^{k-5} \frac{\nu_j}{\nu_*} I^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{k-2-j}}{\partial z^2} + \sum_{j=3}^{k-2} \frac{\sigma_j}{\nu_*} I^2(\varphi_1^{k-j}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2^k = & -\frac{1}{\nu_*^{k+1}} \frac{d^k \varphi_1^0}{dz^k} b_k(\theta) - \sum_{j=2}^{k-3} \frac{\nu_j}{\nu_*} \varphi_2^{k-j} - \frac{2\nu_{k-1}}{\nu_*} \varphi_2^1 - \\ & - \sum_{j=2}^{k-3} \frac{\nu_j}{\nu_*} I^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{k-2-j}}{\partial z^2} + \sum_{j=3}^k \frac{\sigma_j}{\nu_*} I^2(\varphi_2^{k-j}), \end{aligned}$$

где $b_m(\theta)$, $q_m(\theta)$ определены выше.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если отклонение основного профиля скорости от его среднего значения $V(x) - M(V)$ в некоторой точке обращается в ноль и является нечетной функцией относительно этого нуля, то собственные значения находятся точно и равны

$$\sigma = \pm \operatorname{im} \alpha M(V).$$

Литература

1. Опарина Е. И., Трошкин О. В. Устойчивость течения Колмогорова в канале с твердыми стенками // Докл. АН СССР.—2004.—Т. 398, № 4.—С. 487–491.
2. Legras B., Villore B. Large-scale instability of a generalized turbulent Kolmogorov flow // Nonlin. Prosses Geophys.—2009.—Vol. 16.—P. 569–567.
3. Manela A., Zhang J. The effect of compressibility on the stability of wall-bounded Kolmogorov flow // J. Fluid Mech.—2012.—Vol. 694.—P. 29–49.
4. Юдович В. И. О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений // Численные методы решения задач мат. физики.—М.: Наука, 1966.—С. 242–249.

5. Юдович В. И. Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений // Изв. АН СССР. МЖГ.—1973.—№ 1.—С. 32–35.
6. Юдович В. И. Неустойчивость длинноволновых течений вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.—1990.—№ 4.—С. 31–35.
7. Ревина С. В., Юдович В. И. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических трехмерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ.—2001.—№ 2.—С. 29–41.
8. Мелехов А. П., Ревина С. В. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических двумерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ.—2008.—№ 2.—С. 41–56.
9. Ревина С. В. Длинноволновая асимптотика задачи устойчивости сдвиговых течений // Исслед. по мат. анализу и дифференц. уравнениям.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2011.—Т. 5.—С. 212–215.—(Мат. форум. Итоги науки. Юг России).
10. Ревина С. В. Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений // ЖВМ и МФ.—2013.—Т. 53, № 8.—С. 1387–1401.
11. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.—М.: Наука, 1967.—176 с.

РЕВИНА СВЕТЛАНА ВАСИЛЬЕВНА
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНИЦ РАН и РСО-А
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: revina@math.rsu.ru

THE STABILITY OF PERIODIC AND ALMOST PERIODIC VISCOUS FLOWS

Revina S. V.

The long-wavelength asymptotics of two-dimensional shear flows are constructed in the case of periodic with respect to one variable and quasi periodic to another variable main flow. Recurrence formulas are obtained for the k -th term of the asymptotics.

Key words: Kolmogorov flow, long wavelenght asymptotics, recurrence formulas.

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ — СТОКСА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ АСИМПТОТИКА

Л. И. Сазонов

Для стационарной системы Навье — Стокса исследуются вопросы существования решений в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ и их асимптотическое поведение при $|x| \mapsto \infty$.

Ключевые слова: система Навье — Стокса, существование и асимптотика стационарных решений.

Существование «малых» решений

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ систему Навье — Стокса

$$\begin{cases} \Delta u - \nabla p = (u, \nabla)u + f, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \quad (1)$$

с условием на бесконечности

$$u|_{\infty} = u^{\infty} = a(1, 0, 0, \dots).$$

Полагая $u = v + u^{\infty}$, имеем для определения v систему Озеена

$$\begin{cases} \Delta v - a\partial_1 v - \nabla p = (\nabla, v)v + f, \\ \operatorname{div} v = 0, \quad v|_{\infty} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Будем разыскивать решения системы (2) в пространствах n -мерных векторных полей с координатами из $L_p(\mathbb{R}^n)$, считая f некоторым распределением и понимая (2) в смысле распределений. Далее в скалярном и векторном случае будем использовать одно и тоже обозначение $L_p(\mathbb{R}^n)$. Данное замечание относится и к другим встречающимся ниже пространствам.

Применяя преобразование Фурье

$$(\mathcal{F}g)(\xi) = \hat{g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-i(x,\xi)} dx$$

к системе (2), аналогично [1], получим

$$\begin{cases} -(\xi^2 + ia\xi_1)\hat{v} - i\xi\hat{p} = \hat{F}, & F = (\nabla, v)v + f, \\ i\xi\hat{v} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Формально разрешая (3) относительно $\hat{p}$ и $\hat{v}$, имеем

$$i\xi\hat{p} = -\frac{\xi(\xi, \hat{F})}{\xi^2},$$

$$\hat{v} = -\frac{1}{\xi^2 + ia\xi_1} \hat{\Pi}(\xi) \hat{F},$$

где

$$(\hat{\Pi}(\xi) \hat{F})_k = \sum_{j=1}^n \left(\delta_{k,j} - \frac{\xi_k \xi_j}{\xi^2} \right) \hat{F}_j.$$

После применения обратного преобразования Фурье получаем уравнения для определения v и p :

$$v = R((\nabla, v)v + f), \quad (4)$$

$$\nabla p = -(I - \Pi)((\nabla, v)v + f),$$

в которых

$$R = -\mathcal{F}^{-1} \frac{\hat{\Pi}(\xi)}{\xi^2 + ia\xi_1} \mathcal{F}, \quad \Pi = \mathcal{F}^{-1} \hat{\Pi}(\xi) \mathcal{F}.$$

Операторы $R\partial^\alpha$ и Π будем понимать как мультипликаторы преобразования Фурье. Из теорем о мультипликаторах [2] вытекает, что оператор $\Pi : L_p(\mathbb{R}^n) \mapsto L_p(\mathbb{R}^n)$ ограничен при любом $p \in (1, \infty)$, а для оператора $R\partial^\alpha$ справедливы оценки ограниченности

$$\|R\partial^\alpha\|_{L_p(\mathbb{R}^n) \mapsto L_q(\mathbb{R}^n)} < \infty \quad (5)$$

для всех $1 < p \leq q < \infty$, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{2-|\alpha|}{n+1} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{2-|\alpha|}{n}, \quad |\alpha| = 0, 1, 2,$$

$$0 \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{1}{n}, \quad \alpha = (1, 0, 0, \dots),$$

при $a \neq 0$ и

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{2-|\alpha|}{n}, \quad |\alpha| = 0, 1, 2,$$

при $a = 0$ (в последнем соотношении $|\alpha| = 0$ только при $n > 2$).

Обозначим через $S_p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$) подпространство соленоидальных полей в $L_p(\mathbb{R}^n)$, являющееся замыканием в $L_p(\mathbb{R}^n)$ множества всех финитных гладких соленоидальных полей $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n) = \{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n); \operatorname{div} u = 0\}$. Оператор Π является ограниченным проектором из $L_p(\mathbb{R}^n)$ в $S_p(\mathbb{R}^n)$.

Пусть f является таким распределением, что уравнение (4) имеет решение $v \in S_p(\mathbb{R}^n)$, тогда v есть решение системы (2), т. е. существует распределение p такое, что для v и p выполняется (2) в смысле распределений. Действительно, для любого поля $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\langle R((\nabla, v)v + f), (\Delta + a\partial_1)\varphi \rangle = \langle (\nabla, v)v + f, \varphi \rangle.$$

Поэтому справедливо тождество

$$\langle \Delta v - a\partial_1 v - (\nabla, v)v - f, \varphi \rangle = 0. \quad (6)$$

Но тогда из характеристики градиента распределения (см., например, [3]) следует, что существует распределение p такое, что

$$\Delta v - a\partial_1 v - \nabla p = (\nabla, v)v + f.$$

Рассмотрим в пространстве $S_p(\mathbb{R}^n)$ уравнение

$$v = R(\nabla, v)v + F, \quad (7)$$

при $F \in S_p(\mathbb{R}^n)$ и найдем условия, при которых существуют его малые (по норме) решения. Из оценок

$$\|R(\nabla, v)v\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq c_{pq}\|v\|_{S_q(\mathbb{R}^n)}^2,$$

справедливых при $1 < p, q < \infty, q > 2$,

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{2}{q} - \frac{1}{p} \leq \frac{1}{n}$$

при $a \neq 0$ и

$$\frac{2}{q} - \frac{1}{p} = \frac{1}{n}$$

при $a = 0$ получаем, что оператор $\mathcal{R}v = R(\nabla, v)v$ действует в любом пространстве $S_p(\mathbb{R}^n)$ при выполнении условий

$$2 < p \leq 3, n = 2; \quad n \leq p \leq n+1, n > 2$$

при $a \neq 0$, и

$$p = n, \quad n > 2$$

при $a = 0$ и для указанных p верны неравенства

$$\|R(\nabla, v)w\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq c_{p,n} \|v\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \|w\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \|R(\nabla, v)v - R(\nabla, w)w\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq \\ & \leq c_{p,n} (\|v\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} + \|w\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}) \|v - w\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где константы $c_{p,n}$ не зависят от полей v, w .

Теорема 1. Существует такая константа R_{pn} , что при выполнении для F условия $\|F\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2}R_{pn}$ уравнение (7) имеет единственное решение в шаре $\{v; \|v\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq R_{pn}\}$ пространства $S_p(\mathbb{R}^n)$ при всех p таких, что:

$$2 < p \leq 3, n = 2; \quad n \leq p \leq n+1, n > 2 \quad \text{при } a \neq 0$$

и

$$p = n, \quad n > 2 \quad \text{при } a = 0.$$

◁ Ввиду неравенств (8), (9) легко устанавливается, что при $R_{pn} = \frac{1}{4c_{pn}}$ оператор $v \mapsto R(\nabla, v)v + F$ при выполнении условия $\|F\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2}R_{pn}$ сохраняет шар $\|v\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq R_{pn}$ и является в нем сжимающим оператором. ▷

В качестве следствия из теоремы 1 получаем следующий результат о существовании малых решений уравнения (4).

Теорема 2. Пусть выполнено одно из условий:

при $a = 0$:

- 1) $f = g$, $g \in L_{\frac{n}{3}}(\mathbb{R}^n)$, $n > 3$;
- 2) $f = \sum_j \partial_j g_j$, $g_j \in L_{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$, $n > 2$;
- 3) $f = \sum_{i,j} \partial_i \partial_j g_{ij}$, $g_{ij} \in L_n(\mathbb{R}^n)$, $n > 2$;

при $a \neq 0$:

- 1) $f = g$, g принадлежит одному из пространств $L_q(\mathbb{R}^n)$ при $q \in [\frac{n}{3}, \frac{n+1}{3}]$, $n > 3$ ($q \in (1, \frac{4}{3}]$, $n = 3$), и p — одно из чисел, удовлетворяющих неравенству

$$\max \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{q} - \frac{2}{n} \right) \leq \frac{1}{p} \leq \min \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{q} - \frac{2}{n+1} \right);$$

- 2) $f = \sum_j \partial_j g_j$, g_j принадлежит одному из пространств $L_q(\mathbb{R}^n)$ при $q \in [\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}]$, $n > 2$ ($q \in (1, \frac{3}{2}]$, $n = 2$), и p — одно из чисел, удовлетворяющих неравенству

$$\max \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{q} - \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{p} \leq \min \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{q} - \frac{1}{n+1} \right);$$

- 3) $f = \sum_{i,j} \partial_i \partial_j g_{ij}$, где g_{ij} принадлежит одному из пространств $L_q(\mathbb{R}^n)$ при $q \in [n, n+1]$, $n > 2$ ($q \in (2, 3]$, $n = 2$) и $p = q$. Тогда для каждого из перечисленных случаев существует такое число $N_{p,q,j,a} > 0$, в котором j — номер случая, что при выполнении условия $\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq N_{p,q,1,a}$ в случае 1; $\max_j \|g_j\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq N_{p,q,2,a}$ в случае 2; $\max_{i,j} \|g_{ij}\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq N_{p,q,3,a}$ в случае 3; уравнение (4) имеет малое решение, принадлежащее пространству $S_p(\mathbb{R}^n)$ с указанным p .

◁ Теорема 2 вытекает непосредственно из теоремы 1, так как ввиду оценки (5) при указанных условиях на f , функция Rf принадлежит пространству $S_p(\mathbb{R}^n)$. ▷

Асимптотика решений при $|x| \mapsto \infty$

Целью данного параграфа является исследование асимптотического поведения при $|x| \mapsto \infty$ решения системы Навье — Стокса v из пространств $S_n(\mathbb{R}^n)$ при $a = 0$.

Будем рассматривать случай: $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Согласно теоремам о регулярности из [4] при $a = 0$, $n \geq 4$ для решения $v \in S_n(\mathbb{R}^n)$ имеют место включения: $\partial^\alpha v \in S_q(\mathbb{R}^n)$, где $q > \frac{n}{n-2}$, если $|\alpha| = 0$; $q > \frac{n}{n-1}$, если $|\alpha| = 1$; $q > 1$, если $|\alpha| \geq 2$.

Из этих оценок ввиду теорем вложения для соболевских пространств [5] получается, что $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\partial^\alpha v(x) \mapsto 0$ при $|x| \mapsto \infty$ для всех $|\alpha| = 0, 1, 2, \dots$

Для получения асимптотических оценок используем интегральное уравнение

$$v = R(\nabla, v)v + Rf. \quad (10)$$

Заметим, что R является оператором свертки с однородной степени $n - 2$ матрицей-функцией

$$H_{i,j}(x) = -\mathcal{F}^{-1} \left[\left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i \xi_j}{\xi^2} \right) \frac{1}{\xi^2} \right].$$

Поэтому уравнение (10) можно представить в виде

$$v_i(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_k H_{i,j}(x-y) v_k(y) v_j(y) dy + F_i(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$F_i(x) = \int_{\mathbb{R}^n} H_{i,j}(x-y) f_j(y) dy,$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до n . Поле $F(x)$ ввиду компактности носителя $f(x)$ при достаточно больших $|x|$ разлагается в ряд

$$F(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} F^{(\alpha)}(x),$$

в котором

$$F_i^{(\alpha)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^\alpha H_{i,j}(x)(-y)^\alpha}{\alpha!} f_j(y) dy$$

определены на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и при $|x| \mapsto \infty$

$$F(x) - \sum_{|\alpha|=0}^m F^\alpha(x) = O(|x|^{-n-m+1}), \quad (11)$$

в частности,

$$F(x) = O(|x|^{-n+2}). \quad (12)$$

Предварительно установим некоторые «затравочные» оценки.

Лемма 1. При $a = 0$, $n = 3$, $F^{(0)} = 0$

$$|v(x)| \leq c|x|^{-2};$$

при $a = 0$, $n \geq 4$

$$|v(x)| \leq c|x|^{-n+2}.$$

◁ Пусть $a = 0$, $n \geq 4$. Для $v(x)$ при достаточно больших $|x|$ имеем оценку

$$|v(x)| \leq c \left(\sum_{j=1}^3 J_j(x) + |x|^{-n+2} \right),$$

в которой

$$J_j(x) = \int_{D_j} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} |v(y)|^2 dy,$$

$$D_1 = \left\{ |y| < \frac{|x|}{2} \right\}, \quad D_2 = \left\{ |y| \geq \frac{|x|}{2} \right\} \cap \{|y-x| < 1\},$$

$$D_3 = \left\{ |y| > \frac{|x|}{2} \right\} \cap \{|y-x| \geq 1\}.$$

Для интегралов с учетом того, что $v \in S_p(\mathbb{R}^n)$ при $p > \frac{n}{n-2}$, получаем оценки

$$\begin{aligned} J_1(x) &\leq \frac{c}{|x|^{n-1}} \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} |v(y)|^2 dy \leq \\ &\leq \frac{c}{|x|^{n-1}} \left(\int_{|y| < \frac{|x|}{2}} |v(y)|^{2p} dy \right)^{1/p} \left(\int_{|y| < \frac{|x|}{2}} dy \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Отсюда следует, что

$$J_1(x) \leq \frac{c_\varepsilon}{|x|^{n-1-\varepsilon}}, \quad (13)$$

где $\varepsilon = 0$ при $n \geq 5$ и $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало при $n = 4$.

$$J_2(x) \leq \sup_{|y| > \frac{|x|}{2}} |v(y)|^2 \int_{D_2} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dy \leq c \cdot \sup_{|y| > \frac{|x|}{2}} |v(y)|^2, \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
J_3(x) &\leq \int_{|y| > \frac{|x|}{2}} \frac{1}{(|x-y|+1)^{n-1}} |v(y)|^2 dy \leq \\
&\leq \left(\int_{|y| > \frac{|x|}{2}} \frac{1}{(|x-y|+1)^{(n-1)p}} dy \right)^{1/p} \left(\int_{|y| > \frac{|x|}{2}} |v|^{2q} dy \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Для сходимости первого интеграла нужно, чтобы $(n-1)p > n$, поэтому

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} > 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n},$$

т. е. $q < n$.

Так как q можно выбрать сколь угодно близким к n , то

$$J_3(x) \leq c \cdot \max_{|y| > \frac{|x|}{2}} |v(y)|^l, \quad (15)$$

где l любое, меньшее $2 - \frac{1}{n-2}$.

Используя установленные оценки интегралов (13)–(15), получаем

$$\max_{|y| \geq |x|} |v(y)| \leq c \left(\max_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} |v(y)|^l + |x|^{-n+2} \right). \quad (16)$$

Для дальнейших оценок используем лемму 3.3 из работы [5], формулировка которой приводится ниже для полноты изложения.

Лемма 2. Пусть $f(t)$ и $\varphi(t)$ неотрицательные непрерывные монотонно убывающие функции на $[1, \infty]$, удовлетворяющие условиям

$$f(t), \varphi(t) \mapsto 0 \quad \text{при} \quad t \mapsto \infty,$$

$$f(t) \leq \delta f(2t), \quad \delta > 1,$$

$$\varphi(2t) \leq c\varphi^l(t) + f(2t), \quad l > 1.$$

Тогда существует $\gamma > 0$ такое, что $\varphi(t) \leq \gamma f(t)$.

Полагая $f(t) = \max_{|y| \geq t} |v(y)|$, $\varphi(t) = t^{-n+2}$, из оценки (16) получаем, что

$$|v(x)| \leq c|x|^{-n+2}. \quad (17)$$

Если $n = 3$, $F^{(0)} = 0$, то $F \in S_p(\mathbb{R}^3)$ при $p > \frac{3}{2}$. Приведенные выше рассуждения проходят и в этом случае и приводят к оценке

$$|v(x)| \leq c|x|^{-2}. \quad (18)$$

Рассмотрим интеграл

$$J(x) = \int_{\mathbb{R}} \partial_k H_{i,j}(x-y) v_k(y) v_j(y) dy$$

и представим его в виде

$$J(x) = \sum_{|\alpha|=0}^m (J^{(\alpha)}(x) + R^{(m)}(x)), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} J_i^{(\alpha)}(x) &= \frac{\partial_k \partial^\alpha H_{i,j}(x)}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} (-y)^\alpha v_k(y) v_j(y) dy, \\ R_i^{(m)}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\partial_k H_{i,j}(x-y) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{\partial_k \partial^\alpha H_{i,j}(x)}{\alpha!} (-y)^\alpha \right) v_k(y) v_j(y) dy \end{aligned} \quad (20)$$

и m выбрано так, чтобы существовали моменты

$$\int_{\mathbb{R}^n} y^\alpha v_k(y) v_j(y) dy.$$

Ввиду оценки (17) и суммируемости $v(x)$ со степенью $p > \frac{n}{n-2}$ получаем $|\alpha| < (2 - \frac{n}{n-2})(n-2) = n-4$. Следовательно, $m = n-5$.

В случае $n = 4$, $m = -1$, это означает отсутствие первой суммы в (19). Для остатка $R^{(m)}(x)$ имеем оценку

$$|R^{(m)}(x)| \leq \sum_{j=1}^3 |R_j^{(m)}(x)|,$$

где $R_j^{(m)}(x)$ определены интегралами вида (20), в которых $\mathbb{R}^n$ заменяется на область D_j . Для остатков справедливы оценки

$$\begin{aligned} |R_1^{(m)}(x)| &\leq \frac{c}{|x|^{2n-5}} \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} |y|^{m+1} |v(y)|^2 dy \leq \frac{c}{|x|^{2n-5}} \ln |x|, \quad n \geq 4, \\ |R_2^{(m)}(x)| &\leq \frac{c}{|x|^{2n-4}}, \end{aligned}$$

$$|R_3^{(m)}(x)| \leq c \left(\int_{|y| > \frac{|x|}{2}} \frac{1}{(|x-y|+1)^{n-1}} |v(y)|^2 dy + \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{1}{|x|^{n-1+|\alpha|}} \int_{|y| > \frac{|x|}{2}} |y|^{|\alpha|-2n+4} dy \right).$$

Для первого интеграла верна оценка (15), поэтому

$$|R_3^{(m)}(x)| \leq c \left(\max_{|y| > \frac{|x|}{2}} |v(y)|^l + \frac{1}{|x|^{2n-5}} \right),$$

где $l < 2 - \frac{1}{n-2}$. Следовательно,

$$|R_3^{(m)}(x)| \leq \frac{c}{|x|^{2n-5-\varepsilon}},$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало.

В результате справедлива

Теорема 3. Пусть $a = 0$, $n \geq 4$. Тогда справедливо асимптотическое представление

$$v_i(x) = \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{\partial_k \partial^\alpha H_{i,j}(x)}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} (-y)^\alpha v_k(y) v_j(y) dy + \sum_{|\alpha|=0}^{m+1} \frac{\partial^\alpha H_{i,j}(x)}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} (-y)^\alpha f_j(y) dy + O\left(\frac{1}{|x|^{2n-5-\varepsilon}}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, $m = n-5$ при $n \geq 5$, а при $n = 4$ первая сумма отсутствует.

Аналогичным образом исследуется случай $n = 3$.

Теорема 4. Пусть $a = 0$, $n = 3$, $\int_{\mathbb{R}^3} f_j(x) dx = 0$, $j = 1, 2, 3$. Тогда справедливо асимптотическое представление

$$v_i(x) = \partial_k H_{i,j}(x) \int_{\mathbb{R}^3} v_i(y) v_j(y) dy + \sum_{|\alpha|=1} \partial^\alpha H_{i,j}(x) \int_{\mathbb{R}^3} (-y)^\alpha f_j(y) dy + O\left(\frac{1}{|x|^{3-\varepsilon}}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало.

Литература

1. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.—М.: Наука, 1970.—288 с.
2. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.—М.: Наука, 1969.—455 с.
3. Темам Р. Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ.—М.: Мир, 1981.—408 с.
4. Ваксман Д. Л., Сазонов Л. И. Стационарные решения системы Навье — Стокса в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ // Диф. уравнения.—2014.—Вып. 1.—С. 49–57.
5. Сазонов Л. И. Об асимптотике решения задачи трехмерного обтекания вдали от обтекаемых тел // Изв. РАН. Сер. мат.—1995.—Т. 59, № 5.—С. 173–196.

САЗОНОВ ЛЕОНИД ИВАНОВИЧ
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: lsznv.46@mail.ru

STATIONARY SOLUTIONS OF THE NAVIER-STOKES
EQUATION IN A MULTIDIMENSIONAL SPACE
AND THEIR SPATIAL ASYMPTOTICS

Sazonov L. I.

The problems of existence and asymptotics of solutions of the stationary Navier-Stokes system in the spaces $L_p(\mathbb{R}^n)$ are considered.

Key words: Navier-Stokes system, existence and asymptotics of stationary solutions.

ОЦЕНКИ А. Ф. ФИЛИПОВА ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО УПРАВЛЕНИЮ

О. В. Филиппова

Рассмотрена задача Коши для управляемой импульсной системы с запаздыванием, имеющей фазовые ограничения по управлению и содержащей параметр. Показано, что если множество решений данной задачи Коши в какой-либо точке параметра априорно ограничено, то оно будет априорно ограничено при всех значениях параметра из некоторой окрестности этой точки. Для такой управляемой системы получены оценки в пространстве кусочно-непрерывных функций нормы разности допустимой траектории и наперед заданной функции.

Ключевые слова: управляемая импульсная система, дифференциальное включение, априорная ограниченность, априорная ограниченность в совокупности.

В работе используются следующие обозначения: для метрического пространства $\mathbf{X}$, если $x, y \in \mathbf{X}$, $U, U_1 \subset \mathbf{X}$, то $\rho_{\mathbf{X}}[x; y]$ — расстояние между точками x, y в пространстве $\mathbf{X}$; $\rho_{\mathbf{X}}[x; U]$ — расстояние от точки x до множества U ; $h_{\mathbf{X}}^+[U_1; U] \equiv \sup_{x \in U_1} \rho_{\mathbf{X}}[x, U]$ — полуотклонение по Хаусдорфу от U до U_1 ; $h_{\mathbf{X}}[U_1; U] = \max\{h_{\mathbf{X}}^+[U_1; U]; h_{\mathbf{X}}^+[U; U_1]\}$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U ; $\mathbb{R}^n$ — n -мерное пространство вектор-столбцов с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\text{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; $\text{conv}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; μ — мера Лебега на $\mathbb{R}$; $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ — измеримое ограниченное множество с мерой $\mu(\mathcal{U}) > 0$; $\mathbf{L}_{\infty}^n(\mathcal{U})$ — пространство измеримых ограниченных в существенном функций $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}_{\infty}^n(\mathcal{U})} = \text{vraisup}\{|x(t)| : t \in \mathcal{U}\}$; $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ — пространство суммируемых функций $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \int_{\mathcal{U}} |x(s)| ds$; $\mathbf{L}_+^1(\mathcal{U})$ — множество неотрицательных функций пространства $\mathbf{L}^1(\mathcal{U})$; $\text{Sw}(\mathbf{L}^n(\mathcal{U}))$ — множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$.

Пусть $t_k \in [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, m$ ($a < t_1 < \dots < t_m < b$) — конечный набор точек. Обозначим через $\tilde{C}^n[a, b]$ множество всех непрерывных на каждом из промежутков $[a, t_1]$, $(t_1, t_2]$, $\dots$, $(t_m, b]$ ограниченных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k , $k = 1, 2, \dots, m$, с нормой $\|x\|_{\tilde{C}^n[a, b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$.

Пусть Ξ — метрическое пространство. И пусть отображение $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям:

- 1) при каждом фиксированном $(x, u, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi$ функция $f(\cdot, x, u, \xi)$ измерима по Лебегу;
- 2) при почти всех $t \in [a, b]$ отображение $f(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ непрерывно;
- 3) для каждого ограниченного множества $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi$ существует суммируемая функция $m_W : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, u, \xi) \in W$ выполняется неравенство

$$|f(t, x, u, \xi)| \leq m_W(t).$$

Пусть также многозначное отображение $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^m]$ обладает свойствами:

- 4) при каждом $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$ отображение $U(\cdot, x, \xi)$ измеримо;
- 5) при почти всех $t \in [a, b]$ отображение $U(t, \cdot, \cdot)$ непрерывно по Хаусдорфу;
- 6) для каждого ограниченного множества $V \subset \mathbb{R}^n \times \Xi$ существует такая константа m_V , что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, \xi) \in V$ выполняется неравенство

$$\max_{u \in U(t, x, \xi)} |u| \leq m_V.$$

Рассмотрим управляемую систему, зависящую от параметра, с запаздыванием и импульсными воздействиями

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x[p(t)], u(t), \xi), x[p(t)] = \varphi(t), \text{ если } p(t) < a, t \in [a, b], \\ u(t) &\in U(t, x[g(t)], \xi), x[g(t)] = \psi(t), \text{ если } g(t) < a, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k), \xi), \quad k = 1, \dots, p, \quad (2)$$

$$x(a) = x_0, \quad (3)$$

где $\xi \in \Xi$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, измеримые по Борелю функции $\varphi : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ограничены, а измеримые по Лебегу функции $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ для любого $t \in [a, b]$ удовлетворяют

неравенствам $p(t) \leq t$, $g(t) \leq t$. Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, p$, непрерывны, $\Delta(x(t_k)) = x(t_k+0) - x(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, p$.

Пусть $\tau \in [a, b]$. Определим непрерывные операторы

$$P_\tau : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] \rightarrow \mathbf{L}_\infty^n[a, \tau], \quad G_\tau : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] \rightarrow \mathbf{L}_\infty^n[a, \tau]$$

равенствами

$$(P_\tau x)(t) = \begin{cases} x[p(t)], & \text{если } p(t) \in [a, \tau], \\ \varphi[p(t)], & \text{если } p(t) < a; \end{cases} \quad (4)$$

$$(G_\tau x)(t) = \begin{cases} x[g(t)], & \text{если } g(t) \in [a, \tau], \\ \psi[g(t)], & \text{если } g(t) < a. \end{cases}$$

Под допустимым управлением на отрезке $[a, \tau]$ ($\tau \in (a, b]$) системы (1)–(3) будем понимать такую измеримую по Лебегу функцию $u : [a, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$, для которой существует кусочно-непрерывная функция $x : [a, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая при всех $t \in [a, \tau]$ представлению

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, (P_\tau x)(s), u(s), \xi) ds + \sum_{k: t_k \in [a, \tau]} \chi_{(t_k, b]}(t) I_k(x(t_k), \xi),$$

что при почти всех $t \in [a, \tau]$ выполняется включение

$$u(t) \in U(t, (G_\tau x)(t), \xi).$$

Пару (u, x) будем называть допустимой на отрезке $[a, \tau]$. Системе (1)–(3) будем называть управляемой импульсной системой с фазовыми ограничениями по управлению и запаздыванию, поскольку выбор управления зависит от состояния управляемого объекта.

Пусть отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ определено равенством

$$F(t, x, y, \xi) = f(t, x, U(t, y, \xi), \xi), \quad (6)$$

если $x = y$, то коротко будем писать

$$f(t, x, U(t, x, \xi), \xi) = F(t, x, \xi).$$

Тогда, в силу теоремы об измеримом выборе [1, 2], управляемая система (1), (2) с начальным состоянием (3) эквивалентна задаче Коши для дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(t, (P_\tau x)(t), (G_\tau x)(t), \xi), \quad t \in [a, \tau], \quad (7)$$

с импульсными воздействиями (2) и начальным условием (3), где операторы $P_\tau : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] \rightarrow \mathbf{L}_\infty^n[a, \tau]$, $G_\tau : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] \rightarrow \mathbf{L}_\infty^n[a, \tau]$ определены равенствами (4), (5), соответственно.

Включение (7) с импульсными воздействиями (2) и начальным условием (3) будем называть дифференциальным включением, порожденным управляемой импульсной системой (1), (2) с начальным состоянием (3).

Обозначим $\tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$ множество всех фазовых траекторий $x(t)$ управляемой импульсной системы (1), (2) с начальным состоянием (3) на отрезке $[a, \tau]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что множество решений задачи (7), (2), (3) совпадает с множеством $\tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что множество $\tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$ *априорно ограничено в точке* $(x_0, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$, если найдется такое число $\mathbf{r} > 0$, что для всякого $\tau \in (a, b]$ не существует $x \in \tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$, для которого выполняется неравенство $\|x\|_{\tilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau]} > \mathbf{r}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \Xi$. Множество $\tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$ *априорно ограничено в совокупности на множестве* $S \times B$, если оно априорно ограничено в каждой точке множества $S \times B$, и константа $\mathbf{r} > 0$ в определении 1 является общей для всех точек из множества $S \times B$.

Теорема 1. Пусть множество $\tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$ априорно ограничено в точке $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$. Тогда для любого $\tau \in (a, b]$ множество $H(x_0, \tau, \xi_0) \neq \emptyset$ и существует такое $\varepsilon > 0$, что множество фазовых траекторий управляемой импульсной системы (1)–(3) априорно ограничено в совокупности на множестве $B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \varepsilon) \times B_\Xi(\xi_0, \varepsilon)$, где $B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \varepsilon)$ — шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x_0 радиуса ε , $B_\Xi(\xi_0, \varepsilon)$ — шар в пространстве Ξ с центром в точке ξ_0 радиуса ε .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Эта теорема говорит о том, что если в заданной точке параметра множество $\tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$ априорно ограничено, то оно априорно ограничено при всех значениях параметра из некоторой

окрестности этой точки, причем условие априорной ограниченности гарантирует существование допустимых пар (а, следовательно, и фазовых траекторий) задачи (1)–(3) при всех значениях параметра из найденной окрестности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что отображения $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^m]$ и импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, p$, обладают свойством $\mathcal{D}$ в точке $\xi_0 \in \Xi$, если

1) отображения $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^m]$, при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $\xi \in \Xi$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m$ удовлетворяют неравенствам

$$|f(t, x_1, u_1, \xi_0) - f(t, x_2, u_2, \xi)| \leq \\ \leq l_1(t, \rho_\Xi[\xi_0, \xi])|x_1 - x_2| + l_2(t, \rho_\Xi[\xi_0, \xi])|u_1 - u_2|,$$

$$h[U(t, y_1, \xi_0), U(t, y_2, \xi)] \leq l_3(t, \rho_\Xi[\xi_0, \xi])|y_1 - y_2|,$$

где функции $l_1 : [a, b] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $l_2 : [a, b] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $l_3 : [a, b] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ при каждом $\xi \in \Xi$ суммируемы по первому аргументу, причем произведение функций $l_2(t, \rho[\xi_0, \xi])$ и $l_3(t, \rho[\xi_0, \xi])$ суммируемо;

2) для каждого $k = 1, 2, \dots, p$ найдется такая непрерывная функция $\tilde{I}_k : \mathbb{R}_+^1 \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}_+^1$, неубывающая по первому аргументу при каждом фиксированном $\xi \in \Xi$ и удовлетворяющая равенству $\tilde{I}_k(0, \xi_0) = 0$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и каждом $\xi \in \Xi$ выполняется оценка

$$|I_k(x, \xi) - I_k(y, \xi)| \leq \tilde{I}_k(|x - y|, \xi);$$

3) множество решений задачи

$$\dot{y}(t) = \omega(t, y(t), y(t), \xi), \quad \Delta(y(t_k)) = \tilde{I}_k(y(t_k), \xi), \\ k = 1, \dots, p, \quad y(a) = \gamma_0$$

априорно ограничено в точке $(\gamma_0, \xi_0) \in \Xi \times [0, \infty)$, функция $\omega : [a, b] \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times \Xi \rightarrow [0, \infty)$ определена равенством

$$\omega(t, x, y, \xi) = l_1(t, \rho_\Xi[\xi_0, \xi])x + l_2(t, \rho_\Xi[\xi_0, \xi])l_3(t, \rho_\Xi[\xi_0, \xi])y. \quad (8)$$

Пусть оператор Немыцкого

$$N : \mathbf{L}_\infty^n[a, b] \times \mathbf{L}_\infty^n[a, b] \times \Xi \rightarrow \text{Sw}(\mathbf{L}^n[a, b]),$$

порожденный отображением $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ (см. (6)), задан соотношением

$$N(x, y, \xi) = \left\{ z \in \mathbf{L}^n[a, b] : z(t) \in F(t, x(t), y(t), \xi) \right. \\ \left. \text{при почти всех } t \in [a, b] \right\}.$$

Будем считать, что отображения $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^m]$ и импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, p$ обладают свойством $\mathcal{D}$ в точке $\xi_0 \in \Xi$. Из свойства $\mathcal{D}$ вытекает, что множество решений включения (7) с импульсными воздействиями (2) и начальным условием (3) в фиксированной точке $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$ априорно ограничено, а по теореме 1 это означает, что множество решений данной задачи не пусто. Пусть $x_{\xi_0} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — решение задачи (7), (2), (3). Тогда для функции $x_{\xi_0} \in \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ найдется такой элемент $q_{\xi_0} \in N(P_b x_{\xi_0}, G_b x_{\xi_0}, \xi_0)$, где операторы $P_b : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{L}_\infty^n[a, b]$, $G_b : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{L}_\infty^n[a, b]$ определены при $\tau = b$ равенствами (4), (5) соответственно, что функция $x_{\xi_0} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ представима в виде

$$x_{\xi_0}(t) = x_0 + \int_a^t q_{\xi_0}(s) ds + \sum_{k=1}^p \chi_{(t_k, b]}(t) I_k(x_{\xi_0}(t_k), \xi). \quad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Согласно теореме 1, если множество $\tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$ априорно ограничено в точке $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$, то существует такое $\delta > 0$, что множество $\tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$ априорно ограничено в совокупности на множестве $B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \times B_\Xi(\xi_0, \delta)$. Поэтому для любого $\xi \in B_\Xi(\xi_0, \delta)$ множество $\tilde{H}(x_0, b, \xi) \neq \emptyset$, и существует такое $r > 0$, что при всех $\tau \in (a, b]$ для каждого $x_\xi \in H(x_0, \tau, \xi)$ выполняется неравенство $\|x_\xi\|_{\tilde{\mathbf{C}}[a, \tau]} \leq r$ (см. [3]).

Зафиксируем $\xi \in B_\Xi(\xi_0, \delta)$. По определению решения задачи (7), (2), (3) для любого $x_\xi \in \tilde{H}(x_0, b, \xi)$ существует такое $q_\xi \in N(P_b x_\xi, G_b x_\xi, \xi)$, что функция $x_\xi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ представима в виде (9) при $\xi_0 = \xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что множество фазовых траекторий, порожденных управляемой импульсной системой (1)–(3)

почти реализует расстояние до произвольной суммируемой функции, если для любых $v \in \mathbf{L}^n[a, b]$ и $\eta > 0$ существует такое решение $x_{\xi\eta} \in \tilde{H}(x_0, b, \xi)$, что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется неравенство

$$\|q_{\xi\eta} - v\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leq \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v, N(P_b x_{\xi\eta}, G_b x_{\xi\eta}, \xi)] + \eta \mu(\mathcal{U}), \quad (10)$$

где $q_{\xi\eta} \in N(P_b x_{\xi\eta}, G_b x_{\xi\eta}, \xi)$ при всех $t \in [a, b]$ удовлетворяет равенству (9) при $\xi_0 = \xi$, непрерывные отображения $P_b : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{L}_\infty^n[a, b]$, $G_b : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{L}_\infty^n[a, b]$ определены равенствами (4), (5) при $\tau = b$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что согласно [3], если множество всех фазовых траекторий задачи (1)–(3) априорно ограничено в совокупности на множестве $B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \times B_\Xi(\xi_0, \delta)$, то оно почти реализует расстояние до произвольной суммируемой функции при каждом $\xi \in B_\Xi(\xi_0, \delta)$. Поэтому для функции $q_{\xi_0} \in \mathbf{L}^n[a, b]$ (см. (9)) при любом $\eta > 0$ существует такое решение $x_{\xi\eta} \in \tilde{H}(x_0, b, \xi)$, что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ справедливо неравенство (10) при $v = q_{\xi_0}$.

Пусть $\eta > 0$, и пусть решение $x_{\xi\eta} \in \tilde{H}(x_0, b, \xi)$ удовлетворяет неравенству (10) при $v = q_{\xi_0}$. Определим измеримую по первому аргументу функцию $\varkappa_0 : [a, b] \times \Xi \rightarrow [0, \infty)$ равенством

$$\begin{aligned} \varkappa_0(t, \xi) = h \Big[& F(t, (P_b x_{\xi_0})(t), (G_b x_{\xi_0})(t), \xi_0), \\ & F(t, (P_b x_{\xi_0})(t), (G_b x_{\xi_0})(t), \xi) \Big], \end{aligned} \quad (11)$$

где отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ задано формулой (6), операторы $P_b : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{L}_\infty^n[a, b]$, $G_b : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{L}_\infty^n[a, b]$ определены при $\tau = b$ равенствами (4), (5) соответственно.

Далее, определим отображение $\tilde{N} : \tilde{\mathbf{C}}_+^1[a, b] \times \Xi \rightarrow \mathbf{L}_+^1[a, b]$ равенством

$$\tilde{N}(x, \xi)(t) = \omega(t, x(t), x(t), \xi),$$

где функция $\omega : [a, b] \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times \Xi \rightarrow [0, \infty)$ задана соотношением (8).

Теорема 3. Пусть для отображений $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^m]$ и импульсных воздействий $I_k :$

$\mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, p$, в точке $\xi_0 \in \Xi$ выполняется свойство $\mathcal{D}$, и пусть множество $H(x_0, \tau, \xi)$ априорно ограничено в точке $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что для любого $\eta > 0$, удовлетворяющего неравенству $\eta < \delta$, любого $\xi \in B_\Xi(\xi_0, \delta)$ и всех $\tilde{x}_0 \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta)$ найдется такое решение $x_{\xi\eta} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ задачи (1)–(3), заданное равенством (9) при $\xi_0 = \xi$, $x_0 = \tilde{x}_0$ и удовлетворяющее соотношению (10) при $v = q_{\xi_0}$, что при любом $t \in [a, b]$ выполняется оценка

$$|x_{\xi\eta}(t) - x_{\xi_0}(t)| \leq \zeta(\kappa_0(\cdot, \xi), \eta, \gamma)(t), \quad (12)$$

и при почти всех $t \in [a, b]$ справедливо соотношение

$$|q_{\xi\eta}(t) - q_{\xi_0}(t)| \leq \kappa_0(t, \xi) + \eta + \tilde{N}(\zeta(\kappa_0(\cdot, \xi), \eta, \gamma), \xi)(t), \quad (13)$$

где $\zeta(\kappa_0(\cdot, \xi), \eta, \gamma)$ — решение задачи

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \kappa_0(t, \xi) + \eta + \tilde{N}(z, \xi)(t), \\ \Delta(z(t_k)) &= \tilde{I}_k(z(t_k), \xi), \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad z(a) = \gamma, \end{aligned} \quad (14)$$

$\kappa_0 : [a, b] \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ определена равенством (11), $\gamma = |x_0 - \tilde{x}_0|$, $q_{\xi\eta} \in N(P_b x_\xi, G_b x_\xi, \xi)$ удовлетворяет соотношению (9) при $\xi_0 = \xi$ и $x_0 = \tilde{x}_0$.

Задача (14) — это задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с импульсными воздействиями, поэтому оценки (12), (13) фазовых траекторий управляемой системы (1), (2) с начальным состоянием (3) могут быть найдены в явном виде.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если для запаздываний выполняются равенства $p(t) = t$ и $q(t) = t$, то приведенные оценки (12), (13) в регулярном случае (без импульсных воздействий), с точностью до произвольного $\eta > 0$, совпадают с оценками А. Ф. Филиппова [4].

Литература

1. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.—М.: Наука, 1974.—480 с.
2. Филиппов А. Ф. О существовании решений многозначных дифференциальных уравнений // Мат. заметки.—1971.—Т. 10, № 3.—С. 307–313.
3. Булгаков А. И., Корчагина Е. В., Филиппова О. В. Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Ч. 1–6 // Вестн. Тамбовского ун-та. Сер. Естеств. и технические науки.—2009.—Т. 14, вып. 6.—С. 1275–1313.
4. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.—М.: Наука, 1985.—224 с.

Филиппова Ольга Викторовна
Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина
РОССИЯ, 392000, Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: philippova.olga@rambler.ru

A. F. FILIPPOV'S ESTIMATES
OF PHASE TRAJECTORIES OF THE CONTROLLABLE
IMPULSE PROCESSES WITH DELAY
AND WITH PHASE CONSTRAINTS BY CONTROL

Filippova O. V.

Cauchy's task for the controllable impulse delay processes with phases constraints by control is considered. The property of a-priori boundedness of this controllable impulse delay processes is discussed. For phases trajectories of the controllable impulse processes with delay and with phases constraints by control is founded estimations similarly to estimations of A. F. Filippov.

Key words: controllable impulse system, differential inclusion, a-priori boundedness, a-priori boundedness in the aggregate.

К РАСЧЕТУ НАПРЯЖЕНИЙ И СМЕЩЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ТРЕЩИН

Ш. С. Хубежты

Указывается применение квадратурных формул для сингулярных интегралов типа метода дискретных особенностей высокого порядка точности к численному решению некоторых задач теории трещин. Соответствующие компоненты напряжений и смещений также вычисляются с высокой точностью. При определенных условиях даются равномерные оценки погрешностей.

Ключевые слова: компоненты напряжения и смещения, сингулярный интеграл, интеграл типа Коши, квадратурная формула, комплексные потенциалы, оценки погрешностей.

1. Постановка задачи

Основной целью решения задач плоской теории упругости является определение компонентов векторов напряжений X_x , Y_y , X_y и смещений u , v в любой точке заданного тела.

В работах Г. В. Колосова [1] и Н. И. Мусхелишвили [2, 3] показано, что компоненты напряжения X_x , Y_y , X_y и смещения u , v в декартовой системе координат выражаются через две аналитические функции (комплексные потенциалы) $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ от одного комплексного аргумента $z = x + iy$ формулами

$$\begin{aligned} X_x + Y_y &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \\ Y_y - X_x + 2iX_y &= 2[\bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z)], \\ 2\mu(u + iv) &= \kappa \varphi(z) - z \overline{\Phi(z)} - \overline{\Psi(z)}, \\ \Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) &= \psi'(z), \quad \Phi'(z) = \varphi''(z), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w(t)}{t - z} dt, \\ \psi(z) &= -\frac{\kappa}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{w}(t)}{t - z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w(t) d\bar{t}}{t - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}w(t)}{(t - z)^2} dt, \end{aligned} \quad (2)$$

L — замкнутый или разомкнутый гладкий контур, $z \in L$, функция $w(t)$, называемая плотностью, является решением соответствующей граничной задачи, которая выражается сингулярным интегральным уравнением [2–4].

2. Система произвольно ориентированных трещин в упругой плоскости

Пусть в упругой изотропной плоскости, связанной с декартовой системой координат xOy , имеется N прямолинейных разрезов (трещин) длиной $2l_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Центры разрезов O_k определяются координатами $z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0$. В точках O_k размещены начала локальных систем координат $x_k O_k y_k$. Оси x_k совпадают с линиями трещин и образуют углы α_k с осью x .

Далее мы будем рассматривать случай коллинеарных трещин ($\alpha_k = 0$, $y_k^0 = 0$, $k = 1, 2, \dots, N$). В этом случае определение компонентов напряжений и смещений сводится к решению следующей системы сингулярных интегральных уравнений I-го рода на отрезках интегрирования:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l_n}^{l_n} \frac{g'_n(t)}{t-x} dt + \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq n}}^N \frac{1}{\pi} \int_{-l_k}^{l_k} \frac{g'_k(t)}{t-x+x_k^0-x_n^0} dt = p_n(x), \quad |x| < l_n, \quad (3)$$

($n = 1, 2, \dots, N$), $p_n(x)$ — функция нагрузки на берегах трещин.

Решение полученной системы ищется в виде [3]

$$g'_n(x) = \frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}} \varphi_n(x), \quad |x| < l_n,$$

при условии

$$\int_{-l_n}^{l_n} g'_n(t) dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N),$$

так как разрывы перемещения $g_n(-l) = g_n(l) = 0$.

Систему сингулярных интегральных уравнений (3) мы будем решать методом квадратур. Этот метод мы будем иллюстрировать, когда имеется две коллинеарные трещины.

Итак, пусть имеются две коллинеарные трещины. С учетом всех вышеуказанных высказываний, из (3) получается следующая система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \int_{-l_1}^{l_1} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - t^2}} \cdot \frac{\varphi_1(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-l_2}^{l_2} \frac{1}{\sqrt{l_2^2 - t^2}} \cdot \frac{\varphi_2(t)}{t-x+x_2-x_1} dt = p_1(x), \\ \quad -l_1 < x < l_1, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-l_2}^{l_2} \frac{1}{\sqrt{l_2^2 - t^2}} \cdot \frac{\varphi_2(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-l_1}^{l_1} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - t^2}} \cdot \frac{\varphi_1(t)}{t-x+x_1-x_2} dt = p_2(x), \\ \quad -l_2 < x < l_2, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-l_1}^{l_1} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - t^2}} \varphi_1(t) dt = 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-l_2}^{l_2} \frac{1}{\sqrt{l_2^2 - t^2}} \varphi_2(t) dt = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

После преобразования переменных по формулам $t \sim l_1 t$, $x \sim l_1 x$ для первого уравнения и $t \sim l_2 t$, $x \sim l_2 x$ для второго уравнения получается следующая система сингулярных интегральных уравнений с условиями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi l_1} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\varphi_{10}(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\varphi_{20}(t)}{l_2 t - l_1 x + x_2 - x_1} dt = \\ \quad = p_1(l_1 x), \quad -1 < x < 1, \\ \frac{1}{\pi l_2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\varphi_{20}(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\varphi_{10}(t)}{l_1 t - l_2 x + x_1 - x_2} dt = \\ \quad = p_2(l_2 x), \quad -1 < x < 1, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \varphi_{10}(t) dt = 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \varphi_{20}(t) dt = 0, \end{array} \right. \quad (5)$$

где $\varphi_{10}(t) = \varphi_1(l_1 t)$, $\varphi_{20}(t) = \varphi_2(l_2 t)$.

Применяя квадратурные формулы для сингулярных и регулярных интегралов (см. [5, 6]) в соответственном виде:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{1-x_k^2}}{x-x_k} (u_{n-1}(x) - u_{n-1}(x_k)),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \varphi(t) dt \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(x_k),$$

где

$$u_{n-1}(x) = \frac{\sin n \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

— многочлен Чебышева II-го рода, $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi$, система (5) сводится к системе линейных алгебраических уравнений порядка $2n \times 2n$ относительно неизвестных $\varphi_{10}(x_1), \varphi_{10}(x_2), \dots, \varphi_{10}(x_n), \varphi_{20}(x_1), \varphi_{20}(x_2), \dots, \varphi_{20}(x_n)$. Тестовые примеры показали эффективность указанного подхода.

Отметим, что в теории трещин особое место занимают коэффициенты интенсивности, которые вычисляются по формуле [4]

$$k_1^{\pm} - ik_2^{\pm} = \mp \lim_{t \rightarrow \pm l} \left(\sqrt{l^2 - t^2} g'(t) \right),$$

где «+» означает значение в правом конце отрезка $[-l; l]$, а «-» — в левом конце (см. также [7]).

3. Компоненты напряжений и смещений

1. Как было отмечено выше, компоненты напряжений и смещений X_x, Y_y, X_y, u, v вычисляются с помощью комплексных потенциалов вида (1)–(2). Заметим, что при фиксированных в области D значениях z в данной области соответствующие интегралы Коши могут быть вычислены непосредственным применением обычных квадратурных формул. Однако, понятно, что точность такого рода формул, как правило, существенным образом понижается по мере приближения z к граничным точкам области. Мы предлагаем новый подход, не имеющий указанный недостаток, для вычисления интегралов типа Коши следующего вида:

$$\begin{aligned} S^{(0)}(\varphi, z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \\ S^{(1)}(\varphi, z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt. \end{aligned} \tag{6}$$

Этот подход удобно реализуется и при этом позволяет получать равномерные (относительно z) оценки погрешности для всех значений $z \in [-1; 1]$.

2. Построение квадратурных формул.

Разделим отрезок $[-1; 1]$ на n частей точками $x_j = -1 + hj$, $j = 0, 1, \dots, n$, $h = \frac{2}{n}$. Пусть $t \in [x_\sigma, x_{\sigma+1}]$, $t_0 \in [x_\nu, x_{\nu+1}]$, $(\sigma, \nu = 0, 1, \dots, n-1)$. Построим линейный интерполяционный многочлен

$$L_\sigma(\varphi; t) = l_{\sigma 0}(t)\varphi(x_\sigma) + l_{\sigma 1}(t)\varphi(x_{\sigma+1}), \quad t \in [x_\sigma, x_{\sigma+1}],$$

где

$$l_{\sigma 0}(t) = \frac{t - x_{\sigma+1}}{x_\sigma - x_{\sigma+1}},$$

$$l_{\sigma 1}(t) = \frac{t - x_\sigma}{x_{\sigma+1} - x_\sigma} \quad (\sigma = 0, 1, \dots, n-1).$$

Плотность $\varphi(t)$ аппроксимируем следующим образом:

$$\varphi(t) \approx L_\nu(\varphi; t_0) + (t - t_0) \sum_{k=0}^1 l_{\sigma k}(t) \frac{\varphi(x_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}(\varphi; t_0)}{x_{\sigma+k} - t_0}, \quad (7)$$

где

$$L_{\sigma k}(\varphi; t_0) = \begin{cases} \varphi(t_0), & \sigma + k \neq \nu, \nu \pm 1, \\ L_\nu(\varphi; t_0), & \sigma + k = \nu, \nu \pm 1. \end{cases}$$

Остаточный член представления (7) имеет вид

$$R_{n\sigma}(\varphi; t, t_0) = \varphi(t_0) - L_\nu(\varphi; t_0) + (t - t_0)r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0), \quad (8)$$

где

$$r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0) = \varphi(t, t_0) - \sum_{k=0}^1 l_{\sigma k}(t) \frac{\varphi(x_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}(\varphi; t_0)}{x_{\sigma+k} - t_0}, \quad (9)$$

$\varphi(t, t_0)$ — разностное отношение вида $\varphi(t, t_0) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}$.

Рассмотрим прежде всего интеграл $S^{(0)}(\varphi; z)$, заменим в нем функцию $\varphi(t)$ по приближенной формуле (7), получим

$$\begin{aligned}
 S^{(0)}(\varphi; z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\varphi(t)}{t-z} dt \approx \frac{1}{\pi} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{x_\sigma}^{x_{\sigma+1}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{1}{t-z} \times \\
 &\times \left(L_\nu(\varphi; t_0) + (t-t_0) \sum_{k=0}^1 l_{\sigma k}(t) \frac{\varphi(x_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}(\varphi; t_0)}{x_{\sigma+k} - t_0} \right) dt = \\
 &= L_\nu(\varphi; t_0) \gamma_0(z) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^1 \frac{1}{\pi} \int_{x_\sigma}^{x_{\sigma+1}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{(t-t_0) l_{\sigma k}(t)}{t-z} dt \times \\
 &\times \frac{\varphi(x_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}(\varphi; t_0)}{x_{\sigma+k} - t_0} = L_\nu(\varphi; t_0) \gamma_0(z) + \\
 &+ \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^1 P_{\sigma k}^{(0)}(t_0, z) \frac{\varphi(x_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}(\varphi; t_0)}{x_{\sigma+k} - t_0} \equiv S_n^{(0)}(\varphi; z),
 \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\gamma_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{dt}{t-z}, \tag{11}$$

$$P_{\sigma k}^{(0)}(t_0, z) = \frac{1}{\pi} \int_{x_\sigma}^{x_{\sigma+1}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{(t-t_0) l_{\sigma k}(t)}{t-z} dt. \tag{12}$$

Переходим к вычислению интеграла $S^{(1)}(\varphi; z)$. Для него полагаем вновь $t \in [x_\sigma, x_{\sigma+1}]$ ($\sigma = 0, 1, \dots, n-1$). Будем аппроксимировать плотность $\varphi(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &\approx \varphi(t_0) + (t-t_0)\varphi(t_0, t_1) + \\
 &+ (t-t_0)(t-t_1) \sum_{k=0}^1 l_{\sigma k}(t) \frac{\varphi(x_{\sigma+k}, t_1) - \varphi(t_0, t_1)}{x_{\sigma+k} - t_0},
 \end{aligned} \tag{13}$$

где $t_0 \neq t_1$ — произвольные параметры из отрезка $[x_\nu, x_{\nu+1}]$, $\varphi(t_0, t_1)$, $\varphi(x_{\sigma+k}, t_1)$ — разделенные разности первого порядка.

Далее, разделенную разность

$$\varphi(x_{\sigma+k}, t_1) = \frac{\varphi(x_{\sigma+k}) - \varphi(t_1)}{x_{\sigma+k} - t_1}$$

в выражении (13) заменим, полагая $\sigma + k = \nu, \nu + 1$, отношением

$$\frac{\varphi(x_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}(\varphi; t_1)}{x_{\sigma+k} - t_1} \quad (x_{\sigma+k} \neq t_1),$$

а $\varphi(t_0, t_1)$ приблизим выражением

$$\frac{L_\nu(\varphi, t_1) - L_\nu(\varphi; t_0)}{t_1 - t_0}.$$

В результате мы получим аппроксимацию $\varphi(t)$ по схеме

$$\begin{aligned} \varphi(t) \approx & \varphi(t_0) + (t - t_0) \frac{L_\nu(\varphi; t_1) - L_\nu(\varphi; t_0)}{t_1 - t_0} + (t - t_0)(t - t_1) \times \\ & \times \sum_{k=0}^1 \frac{l_{\sigma k}(t)}{x_{\sigma+k} - t_0} \left(\frac{\varphi(x_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}(\varphi; t_1)}{x_{\sigma+k} - t_1} - \frac{L_\nu(\varphi; t_1) - L_\nu(\varphi; t_0)}{t_1 - t_0} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где подразумевается $t \in [x_\sigma, x_{\sigma+1}]$; $t_0, t_1 \in [x_\nu, x_{\nu+1}]$; $t_0 \neq t_1$ ($\nu, \sigma = 0, 1, \dots, n-1$).

После внесения (13) в выражение для $S^{(1)}(\varphi; z)$ будем иметь:

$$\begin{aligned} S^{(1)}(\varphi; z) \approx & \gamma_1(z)\varphi(t_0) + \frac{L_\nu(\varphi; t_1) - L_\nu(\varphi; t_0)}{t_1 - t_0} (\gamma_0(z) + \\ & + (z - t_0)\gamma_1(z)) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^1 P_{\sigma k}^{(1)}(t_0, t_1, z) \frac{1}{x_{\sigma+k} - t_0} \times \\ & \times \left(\frac{\varphi(x_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}(\varphi; t_1)}{x_{\sigma+k} - t_1} - \frac{L_\nu(\varphi; t_1) - L_\nu(\varphi; t_0)}{t_1 - t_0} \right) \equiv S_n^{(1)}(\varphi; z), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$P_{\sigma k}^{(1)}(t_0, t_1, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{(t-t_0)(t-t_1)l_{\sigma k}(t)}{(t-z)^2} dt, \quad (16)$$

$$\gamma_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{dt}{(t-z)^2},$$

$$t \in [x_\sigma, x_{\sigma+1}], \quad t_0, t_1 \in [x_\nu, x_{\nu+1}] \quad (t_0 \neq t_1).$$

3. Оценка погрешности квадратурных формул.

Для оценки погрешностей квадратурных формул (10) и (15) справедлива теорема.

Теорема. Если $\varphi(t)$ имеет ограниченную вторую производную, то для приближенных квадратурных формул (10) и (15) при соответствующем выборе параметров t_0, t_1 для остаточных членов справедлива оценка

$$|S^{(i)}(\varphi; z) - S_n^{(i)}(\varphi; z)| \leq O(h^2)M \quad (i = 0, 1),$$

$$M = \max_{t \in [-1, 1]} |\varphi''(t)|.$$

Доказательство теоремы приводится в [8].

Литература

1. Колосов Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости.— М.—Л.: ОНТИ, 1935.—224 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.—М.: Наука, 1966.—720 с.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1966.—512 с.
4. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках.—Киев: Науково думка, 1976.—442 с.
5. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: Янус, 1995.—520 с.
6. Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011.—239 с.
7. Плиева Л. Ю., Цуцаев А. О. Численное решение одной задачи произвольно ориентированных трещин в упругой плоскости // Тр. XVI междунар. симпозиума (МДОЗМФ – 2013).—Харьков–Херсон, 2013.—С. 323–325.
8. Хубежты Ш. С., Плиева Л. Ю. Об аппроксимации интегралов типа Коши с весовыми функциями на отрезках интегрирования // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2013.—Вып. 5.—С. 25–29.

ХУБЕЖТЫ ШАЛВА СОЛОМОНОВИЧ
Южный математический институт ВЦ РАН и РСО-А
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: shalva57@rambler.ru

CALCULATION OF STRESSES AND DISPLACEMENTS IN SOME PROBLEMS OF THE THEORY OF CRACKS

Khubezthy Sh. S.

Quadrature formulas for singular integrals of the method of discrete features high precision are applied to the numerical solution of certain problems of cracks theory. The respective components of stress and displacement are also calculated with high precision. Under certain conditions uniform error estimates are given.

Key words: the components of stress and displacement, singular integral, Cauchy-type integral, quadrature formula, complex potentials, error estimates.

Секция II

Математическое моделирование

СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ СНИЖЕНИЯ ВИБРАЦИИ СТИРАЛЬНЫХ МАШИН БАРАБАННОГО ТИПА

**С. Н. Алехин, С. П. Петросов,
И. В. Фетисов, В. Г. Фетисов**

В работе содержатся новые результаты о состоянии и перспективах снижения вибрации стиральных машин барабанного типа.

Ключевые слова: динамика стиральных машин, нелинейные колебательные системы, снижение виброактивности, синтез системы.

1. Введение

Стиральная машина как объект, являющийся нелинейной динамической системой, представляет особый интерес для исследования малоизученного вопроса снижения вибраций из-за сложности процесса колебаний, обусловленных:

- наличием переменной массы текстильных изделий при отжиме;
- случайным характером их распределения по периферии стирального барабана;
- изменением положения центра масс изделий при центробежном отжиме и рядом других факторов.

Как известно [1], существует множество подходов к определению и методологии исследования систем различного типа. В общем случае система — это совокупность объектов, обладающих определенными свойствами, находящихся в отношениях и связях друг с другом, образующих определенную целостность и единство. Основными задачами теории систем являются задачи их анализа и синтеза [2].

Под задачей анализа всякой системы подразумевается нахождение точного аналитического или приближенного решения соответствующей математической модели, описывающей рассматриваемую систему, и ее дальнейшее исследование в заданной области пространства состояний.

В свою очередь, задача синтеза системы [3], как правило, являющаяся более сложной, сводится к формированию оптимальных программных и стабилизирующих управлений, построению алгоритмов

обработки входных наблюдений и структурных схем в рамках заданных критериев качества при наличии возмущающих факторов различной природы.

Для синтеза системы требуется предварительное построение как моделей собственно объекта управления, так и окружающей среды. И если модель объекта может быть описана в терминах «вход-выход», то влияние окружающей среды может быть учтено с помощью специального описания пространства сигналов, действующих на объект.

Большинство математических моделей, описывающих поведение подвесной части стиральной машины барабанного типа, было основано на предположении о детерминированном внешнем воздействии на неуравновешенный барабан машины и постоянстве параметров в рассматриваемой динамической системе (см., например, работы [4, 5] и диссертацию [6]).

2. Полученные результаты и дальнейшие перспективы

Решение актуальной задачи синтеза системы случайных вынужденных колебаний подвесной части, ее устойчивого состояния, обусловленных изменением пространственных координат центра масс изделий при отжиге, учета координат крепления упругих элементов и демпферов, их ориентации в пространстве, коэффициентов жесткости и диссипации, вариации эксцентриситета, все еще далеко от своего сколь-нибудь полного завершения.

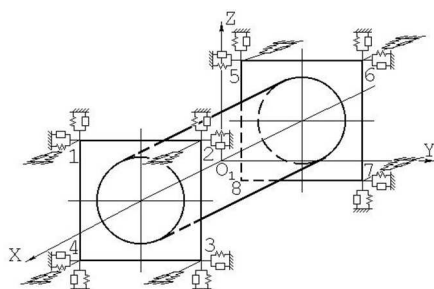


Рис. 1. Схематическая модель и основные параметры.

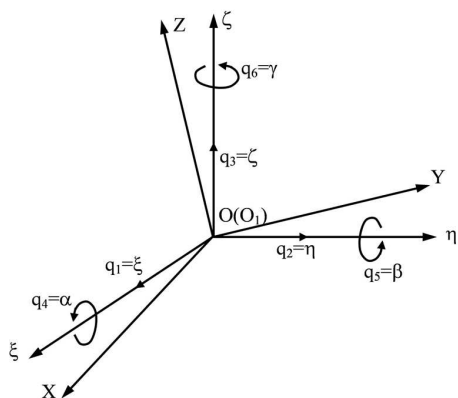


Рис. 2. Подвижная и неподвижная системы координат.

Обобщенными координатами служат линейные перемещения центра масс системы подвески $q_1 = \xi$, $q_2 = \eta$, $q_3 = \zeta$ и три угла поворота $q_4 = \alpha$, $q_5 = \beta$, $q_6 = \gamma$.

Как видим, данная расчетная схема соответствует всем конструктивным схемам подвески моечного узла стиральных машин барабанного типа. Рассматриваемая модель имеет шесть степеней свободы.

В качестве варьируемых рассматривались следующие параметры: M , b_i , c_k , I_z , N , ω , e . Здесь M — масса, b_i — коэффициенты демпфирования, c_k — коэффициенты жесткости упругих элементов, I_z — моменты инерции, N — число демпферов и пружин, ω — частота колебаний вынуждающей силы, e — эксцентриситет.

Одной из главных задач являлось максимальное снижение виброактивности системы подвески при различных выходных характеристиках, в пробных точках механизма системы подвески и на различных частотах.

Для вывода уравнений колебаний подвесной части традиционными являются следующие основные допущения:

- расчетная схема колебательной системы стиральных машин представляет собой однокаскадную систему виброизоляции с одним колеблющимся материальным телом;
- колебания подвесной части в принципе можно рассматривать как колебания твердого тела;
- расчетная схема учитывает особенности конструктивного оформления стирально-отжимных машин, в которых вполне обеспе-

чивается симметрия подвесной части относительно ее главных центральных осей инерции;

– вектор неуравновешенной центробежной силы располагается в центральной поперечной плоскости подвесной части;

– согласно теории колебаний перемещения подвесной части при колебаниях описываются обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка вида:

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = F(t),$$

где q — вектор обобщенных координат, характеризующий перемещения подвесной части при колебаниях; A — матрица инерционных коэффициентов; B — матрица коэффициентов диссипации; C — матрица упругих коэффициентов; F — вектор внешних возмущающих сил, действующих на подвесную часть.

В диссертации [7] при создании математической модели отмечалось, что число возможных перемещений подвесной части равно шести: трем линейным вдоль координатных осей и трем вращательным вокруг этих осей. В общем случае колебания упруго подвешенного тела по всем координатам связаны между собой (иными словами, при возбуждении колебаний по какому-либо одному направлению тело совершает связанные колебания по всем шести возможным направлениям). Автор сделал следующий вывод о связанных колебаниях подвесной части: с учетом симметричного относительно вертикальной оси расположения упругих элементов и демпферов подвесная часть имеет три формы колебаний:

– вертикальные;

– поперечные связанные горизонтальные и вращательные, которые в результате наложения друг на друга образуют качательные колебания вокруг центров, расположенных на вертикали по обе стороны от центра тяжести подвесной части. Низшая из указанных двух форм связанных колебаний представляет собой преимущественно поперечные линейные колебания, а высшая — поперечную качку.

Для оценки амплитуд y поперечных горизонтальных колебаний и φ — угловой поперечной качки в резонансной области в [7] были получены следующие формулы:

$$y = \frac{mr_e}{c_y} \cdot \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\sigma 1}^2}\right)^2 + v_y^2 \frac{\omega^2}{\omega_{\sigma 1}^2}}},$$

$$\varphi = \frac{mr_e H}{c_z B^2 \left(1 - \frac{\omega_{o2}^2}{\omega_{o1}^2}\right)} \cdot \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{o2}^2}\right)^2 + v_\varphi^2 \frac{\omega^2}{\omega_{o2}^2}}}.$$

Здесь c_y — суммарная горизонтальная жесткость упругих опор; $\omega_{o1} = \sqrt{c_y/M}$ — собственная частота горизонтальных поперечных колебаний подвесной части; $v_y = \frac{b_y}{2M}$ — коэффициент затухания при колебаниях вдоль горизонтальной оси Y ; b_y — приведенный коэффициент сопротивления демпферов вдоль горизонтальной оси Y ; H — расстояние от центра тяжести подвесной части до центра упругих сил (упругих опор); B — расстояние между опорами подвесной части; v_φ — коэффициент затухания при угловых колебаниях вокруг продольной оси X ; b_φ — приведенный коэффициент сопротивления демпферов вокруг продольной оси X ; I_X — момент инерции подвесной части относительно продольной оси X ; ω_{o2} — собственная частота вращательных колебаний подвесной части вокруг продольной оси X ; $c_\varphi = c_z B$ — суммарная вращательная жесткость упругих опор вокруг продольной оси X .

Исследователем, также подробно рассмотревшим вопросы снижения виброактивности стирально-отжимных машин бытового назначения, был А. В. Малыгин [8].

Приведем основные допущения, принятые в [8] при разработке математической модели:

- упругие характеристики амортизаторов машины — линейные;
- деформациями бака и барабана можно пренебречь. Крепление барабана в баке абсолютно жесткое;
- положение центра масс барабана с бельем априори неизвестно и соответствует случаю наибольшей неуравновешенности центробежных сил от неравномерной раскладки белья. В исходном состоянии барабан без белья идеально сбалансирован.

При анализе полученных дифференциальных уравнений были сделаны следующие выводы:

- 1) в общем случае система бак-барабан совершает шестисвязные колебания, что усложняет задачу виброизоляции и снижения динамической активности системы бак-барабан;
- 2) для полного разделения колебаний необходимо, чтобы матрицы коэффициентов жесткости, диссипации и инерционных коэффициентов имели диагональный вид;

3) из-за неравномерного распределения белья в барабане, что ведет к несовпадению центра масс барабана с бельем и бака, а также из-за гироскопической связи между обобщенными координатами угловых колебаний вокруг поперечных осей обеспечить полную независимость колебаний практически невозможно.

Вместе с тем, были приведены рекомендации, соблюдая которые при конструировании стиральных машин возможно добиться минимальной связности колебаний, т. е. практически свести их к независимым и, как следствие, обеспечить снижение амплитуд колебаний:

1) центр масс подвесной части должен находиться на оси вращения барабана;

2) ось вращения барабана должна являться главной центральной осью инерции барабана;

3) при равномерном распределении белья центр масс подвесной части должен совпадать с центром масс загруженного барабана;

4) центр жесткости системы упругих опор должен совпадать с центром тяжести подвесной части, а главные оси жесткости — с главными центральными осями инерции подвесной части;

5) главные оси постоянных вязкого трения должны совпадать с главными центральными осями инерции подвесной части.

Что же касается случайных колебаний, то механические системы, нагруженные случайными возмущениями, имеют широкое применение в технике, например, в амортизаторах систем виброзащиты приборов, машин, конструкций. Решение такого типа нелинейных задач динамики, как правило, связано с большими вычислительными трудностями. Как известно, получить решение нелинейного дифференциального уравнения общего вида в аналитической форме (даже для наиболее простого уравнения второго порядка) нельзя, не говоря уже о решении системы нелинейных уравнений движения механических систем, нагруженных детерминированными или случайными силами.

Еще сравнительно недавно считалось, что при детерминированных нагрузках решение нелинейных уравнений является детерминированным, а при случайных нагрузках — случайным. Исследования в области нелинейной динамики, которые проводятся в последние годы с использованием современной вычислительной техники, позволили установить новые физические явления, казавшиеся ранее просто невозможными в рамках традиционной нелинейной механики.

Было установлено, что в детерминированной нелинейной системе возможны хаотические (непредсказуемые) движения, иными словами, нелинейные системы без внешних случайных воздействий могут сами являться генераторами случайных процессов.



Рис. 3. Схема имитационного алгоритма решения поставленной задачи.

В диссертации [9] (см. также фундаментальную работу [10]) рассматривалась задача статистического анализа динамики случай-

ных колебаний подвесной части стиральной машины с горизонтально расположенным неуравновешенным ротором, которая заключалась в расчете вероятностных характеристик выходной реакции $Y(t)$ по известным вероятностным характеристикам входного случайного воздействия $X(t)$ и дальнейшей фильтрации процесса по схеме Калмана — Бьюси.

Целесообразно упомянуть, что авторским коллективом изготовлен и используется действующий экспериментальный стенд, на котором в течение ряда лет проводятся экспериментальные исследования в реальных условиях функционирования стиральных машин барабанного типа с целью контрольной проверки адекватности полученных вероятностных характеристик процесса колебаний подвесной части при случайных воздействиях на нее и эмпирических данных, а также оптимизации параметров подвесной части при решении основной задачи снижения его виброактивности.

Основу предлагаемого расчетного алгоритма, приведенного на рис. 3, составляет численное трехэтапное зондирование пространства параметров рассматриваемой системы подвески стиральной машины, подробнее см. [11].

Литература

1. Пупков К. А., Егупов Н. Д. Методы классической и современной теории автоматического управления. 2-е изд., перераб. и доп. Т. 3: Синтез регуляторов систем автоматического управления.—М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.—616 с.
2. Огурк И. А. Новые методы синтеза линейных и нелинейных динамических систем.—М.—Л.: Наука, 1965.—207 с.
3. Балакшин О. Б. Синтез систем.—М.: Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, 1995.—400 с.
4. Блехман И. И. Вибрационная механика.—М.: Физматлит, 1994.—400 с.
5. Справочник. Вибрации в технике. Т. 2: Колебания нелинейных механических систем / Ред. К. А. Пупков, Н. Д. Егупов.—М.: Машиностроение, 1979.—351 с.
6. Рябинький Л. М. Исследование виброизоляции стирально-отжимных машин для текстильных материалов: Дис. ... канд. техн. наук.—Л., 1972.—153 с.
7. Алехин С. Н. Теоретические и экспериментальные исследования динамики стиральных машин барабанного типа: Дис. ... канд. техн. наук.—М., 2000.—275 с.
8. Мадьгин А. В. Снижение виброактивности стирально-отжимных машин бытового назначения: Дисс. ... канд. техн. наук.—М., 1991.—127 с.
9. Фетисов И. В. Исследование случайных воздействий на вибрационные характеристики стиральных машин барабанного типа при отжиге: Дис. ... канд. техн. наук.—Шахты, 2011.—204 с.

10. Фетисов И. В. Решение модельной задачи о случайных колебаниях подвешенной части стиральной машины // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии.—2012.—№ 4 (294).—С. 84–95.
11. Соболев И. М., Статников Р. Е. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями.—М.: Дрофа-плюс, 2006.—176 с.

АЛЕХИН СЕРГЕЙ НИКОЛАЕВИЧ
Институт сферы обслуживания и предпринимательства
(филиал Донского государственного технического университета)
РОССИЯ, 346500, Шахты, ул. Шевченко, 147
E-mail: alex_cn@mail.ru

ПЕТРОВСКИЙ СЕРГЕЙ ПЕТРОВИЧ
Институт сферы обслуживания и предпринимательства
(филиал Донского государственного технического университета)
РОССИЯ, 346500, Шахты, ул. Шевченко, 147
E-mail: alex_cn@mail.ru

ФЕТИСОВ ИГОРЬ ВАЛЕРЬЕВИЧ
ООО «Пневмакс»
РОССИЯ, 141402, Москва, Водный стадион, 8
E-mail: fetisov_vg@sssu.ru

ФЕТИСОВ ВАЛЕРИЙ ГЕОРГИЕВИЧ
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Институт сферы обслуживания и предпринимательства
(филиал Донского государственного технического университета)
РОССИЯ, 346500, Шахты, ул. Шевченко, 147
E-mail: fetisov_vg@sssu.ru

STATE AND PROSPECTS OF SOLVING THE PROBLEM OF REDUCING THE VIBRATION OF DRUM-TYPE WASHING MACHINES

Alekhin S. N., Petrosov S. P., Fetisov I. V., Fetisov V. G.

The work contains new results of the state of and prospects for reducing the vibration of the drum type washing machines.

Key words: dynamics of washing machines, nonlinear oscillating systems, reduction of vibration activity, synthesis system.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ КАК БАЛАНС МЕЖДУ ЦЕЛЕВЫМИ И НЕЦЕЛЕВЫМИ ИНТЕРЕСАМИ

О. И. Горбанева

В статье рассматривается система, состоящая из двух уровней: верхнего и нижнего. Каждый из двух участников имеет общесистемные интересы, которые мы назовем целевыми, и свои частные интересы, которые мы назовем нецелевыми. Доход от общей деятельности делится между двумя уровнями напополам. Задача представлена в виде иерархической игры, в которой находилось равновесие по Штакельбергу.

Ключевые слова: распределение ресурсов, целевые интересы, нецелевые интересы, равновесие по Штакельбергу, иерархическая система.

1. Введение

Нецелевое использование бюджетного финансирования широко распространено на практике и может рассматриваться как разновидность оппортунистического поведения, отвечающего частным интересам активных агентов [8]. Нецелевое использование ресурсов тесно связано с коррупцией, в особенности с так называемыми «откатами», когда бюджетные средства по тем или иным программам выделяются в обмен на взятку и лишь частично используются по назначению, а в значительной степени расходуются в личных интересах агентов-взяткодателей. Проблему нецелевого использования ресурсов естественно трактовать с точки зрения согласования интересов в иерархических системах управления. Это позволяет использовать математический аппарат теории иерархических игр [9], теории контрактов [10], информационной теории иерархических систем [3], теории активных систем [1] и теории организационных систем [7]. В то же время, собственно модели распределения ресурсов в иерархических системах с учетом их нецелевого использования мало изучены и анализируются в авторской линии исследований [4–6].

Основное внимание в настоящей статье уделяется вопросу о том, как зависит распределение ресурсов между целевым и нецелевым

направлениями для различных классов функций выигрыша, характеризующих общий (общественный) интерес и частные интересы распорядителя и получателя ресурсов, если оба уровня участвуют в доходе от общей деятельности поровну.

2. Структура исследования

Будем рассматривать двухуровневую систему управления, состоящую из одного элемента верхнего уровня А1 (распорядителя ресурсов) и одного элемента нижнего уровня А2 (получателя ресурсов). Верхний уровень имеет некоторое количество ресурсов, которое без ограничения общности примем за единицу. Часть средств распорядитель передает получателю для целевого использования, оставшуюся часть оставляет себе на нецелевые расходы. В свою очередь, нижний уровень забирает часть средств на свои нужды (нецелевое использование), а оставшаяся часть расходуется на общие цели (целевое использование). Оба уровня участвуют в доходе от целевой деятельности и имеют свои функции выигрыша

Модель строится в виде иерархической игры двух лиц, в которой ищется равновесие по Штакельбергу [9]. В функцию выигрыша каждого игрока включаются два слагаемых: доход от нецелевой деятельности и соответствующая доля дохода от целевой деятельности системы. Функции выигрыша имеют следующий вид:

$$g_1(u_1, u_2) = a_1(1 - u_1, u_2) + b(u_1, u_2) \cdot c(u_1, u_2) \rightarrow \max_{u_1};$$

$$g_2(u_1, u_2) = a_2(u_1, 1 - u_2) + b(u_1, u_2) \cdot c(u_1, u_2) \rightarrow \max_{u_2}$$

при ограничениях

$$0 \leq u_i \leq 1, \quad i = 1, 2,$$

и условиях на функции a , b , и c

$$a_i \geq 0; \quad \frac{\partial a_i}{\partial u_i} \leq 0, \quad \frac{\partial a_i}{\partial u_{j \neq i}} \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

$$b_i \geq 0; \quad \frac{\partial b_i}{\partial u_i} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad \frac{\partial c}{\partial u_i} \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Здесь u_i — доля ресурсов, выделенных i -м уровнем на развитие системы (соответственно, $1 - u_i$ остается на нецелевое использование

ресурсов в личных интересах), g_i — функция выигрыша i -го уровня, a_i — функция частного выигрыша i -го уровня, b_i — доля от дохода общей деятельности, получаемая i -м уровнем, c — целевой доход системы.

В качестве функций a и c рассматриваются степенные, линейные, показательные и логарифмические функции относительно переменных u_1 и u_2 и кумулятивные по их совокупности, т. е.

$$a_1 = a_1(1 - u_1), \quad a_2 = a_2(u_1(1 - u_2)), \quad c = c(u_1 u_2).$$

Соотношения $a_1 = a_1(1 - u_1)$, $a_2 = a_2(u_1(1 - u_2))$ отражают иерархическую структуру системы. Доход от нецелевой деятельности верхнего уровня не зависит от того, какую часть средств нижний уровень направит на общие цели. Но доход от нецелевой деятельности нижнего уровня зависит от того, какую часть средств передаст ему верхний уровень на общие цели.

Рассматривается равномерное распределение b , при котором доли участия в доходе от целевой деятельности одинаковы для обоих игроков:

$$b_i = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Стратегией игрока является доля u_i от имеющихся у него средств, направляемых на общие цели. Право первого хода принадлежит игроку верхнего уровня, который выбирает и сообщает игроку нижнего уровня значение u_1 , после чего второй игрок, зная решение первого, выбирает оптимальное для себя значение u_2 .

Целью исследования является изучение влияния соотношения функций a_1 , a_2 , c на решение игры (равновесие по Штакельбергу).

В качестве функций нецелевого использования ресурсов брались:

- степенная с показателем меньше единицы ($a(x) = ax^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $a > 0$);
- линейная ($a(x) = ax$, которая является частным случаем степенной с показателем, равным 1);
- степенная с показателем больше единицы ($a(x) = ax^k$, $k > 1$, $a > 0$);
- экспоненциальная ($a(x) = a(1 - e^{-\lambda x})$, $\lambda > 0$, $a > 0$);
- логарифмическая ($a(x) = a \log_2(1 + x)$, $a > 0$).

Как правило, функции выбирались с условиями $\frac{\partial a}{\partial x} \geq 0$, $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \leq 0$. Первому условию подходят все функции, второму условию не подходит только функция $a(x) = ax^k$, $k > 1$. Первые две функции являются производственными. Последние две функции не являются таковыми, так как для них не выполняется свойство отдачи от расширения масштабов производства.

Аналогично, в качестве функций целевого использования ресурсов брались функции:

- степенная с показателем меньше единицы ($c(x) = cx^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $c > 0$);
- линейная ($c(x) = cx$);
- степенная с показателем больше единицы ($c(x) = cx^k$, $k > 1$, $c > 0$);
- экспоненциальная ($c(x) = c(1 - e^{-\lambda x})$, $\lambda > 0$, $c > 0$);
- логарифмическая ($c(x) = c \log_2(1 + x)$, $c > 0$).

Из возможных комбинаций функций a и c (двадцати пяти вариантов) аналитически исследованы тринадцать, а именно: случаи сочетания однотипных функций, когда в качестве a и c брались либо только степенные, либо только экспоненциальные, либо только логарифмические; случаи сочетания любой функции нецелевого использования с линейной функцией целевого использования; случаи сочетания линейной функции нецелевого использования с любой функцией целевого использования. Шесть из оставшихся двенадцати случаев исследованы численно.

3. Аналитическое исследование

Рассмотрим случай, когда функция дохода от нецелевой деятельности линейна, функция дохода от целевой деятельности логарифмическая, т. е.

$$a_1(u_1, u_2) = a_1(1 - u_2),$$

$$a_2(u_1, u_2) = a_2 u_1(1 - u_2),$$

$$c(u_1, u_2) = c \log_2(1 + u_1 u_2).$$

В этом случае функции выигрыша имеют вид

$$g_1(u_1, u_2) = a_1(1 - u_1) + \frac{c}{2} \log_2(1 + u_1 u_2),$$

$$g_2(u_1, u_2) = a_2 u_1(1 - u_2) + \frac{c}{2} \log_2(1 + u_1 u_2)$$

при ограничениях

$$0 \leq u_i \leq 1, \quad i = 1, 2.$$

Найдем равновесие по Штакельбергу. Нахождение равновесия разобьем на два этапа и опишем в этом случае подробно.

Сначала решим задачу оптимизации нижнего уровня, предполагая значение u_1 известным. Найдем производную функции g_2 по переменной u_2 и приравняем ее к нулю:

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u_1, u_2) = -a_2 u_1 + \frac{c u_1}{2(1 + u_1 u_2) \ln 2} = 0.$$

Решим полученное уравнение. Случай $u_1 = 0$ не представляет собой практического интереса, поэтому на u_1 можно поделить обе части уравнения и выразить u_2 :

$$u_2^* = \frac{1}{u_1} \left(\frac{c}{2a_2 \ln 2} - 1 \right).$$

Найдя вторую производную функции g_2 по переменной u_2 , убеждаемся, что точка u_2^* является точкой максимума:

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial u_2^2}(u_1, u_2) = -\frac{c u_1^2}{2(1 + u_1 u_2)^2 \ln 2} < 0.$$

Учитывая ограничение на u_2 , заметим, что окончательный вид оптимальной стратегии игрока нижнего уровня

$$u_2^* = \begin{cases} 0, & a_2 \ln 2 \geq \frac{c}{2}, \\ \frac{1}{u_1} \left(\frac{c}{2a_2 \ln 2} - 1 \right), & 0 < \frac{1}{u_1} \left(\frac{c}{2a_2 \ln 2} - 1 \right) < 1, \\ 1, & \frac{c}{2a_2 \ln 2} \geq 1 + u_1. \end{cases}$$

Решим задачу верхнего уровня, зная оптимальную реакцию нижнего уровня в ответ на его решение u_1 . Рассмотрим три случая.

1. $u_2^* = 0$. В этом случае

$$g_1(u_1, 0) = a_1(1 - u_1) + \frac{c}{2} \log_2(1) = a_1(1 - u_1).$$

Так как функция g_1 убывает по u_1 , то оптимальная стратегия для элемента верхнего уровня $u_1^* = 0$, т. е. если верхний уровень знает, что нижний уровень все полученные от него ресурсы потратит на частные цели, то он ничего нижнему уровню и не передаст, а потратит эти ресурсы на свои частные цели.

2. $u_2^* = \frac{1}{u_1} \left(\frac{c}{2a_2 \ln 2} - 1 \right)$. В этом случае

$$g_1(u_1, u_2^*) = a_1(1 - u_1) + \frac{c}{2} \log_2 \frac{c}{2a_2 \ln 2}.$$

Здесь, аналогично предыдущему случаю, функция g_1 убывает по u_1 . Заметим, что здесь нижний уровень подбирает свою стратегию так, что на общие цели идет постоянная величина.

Следовательно, чем больше выделено ресурсов верхним уровнем, тем больше ресурсов нижний уровень может направить на свои частные цели (как разность между тем, что передал верхний уровень, и постоянной величиной $u_1 u_2 = \frac{c}{2a_2 \ln 2} - 1$, которую нижний уровень направляет на общие цели). И наоборот, чем меньше выделено ресурсов верхним уровнем, тем меньше ресурсов нижний уровень может направить на свои частные цели. Следовательно, учитывая убывание функции по u_1 , верхнему уровню выгодно как можно меньше ресурсов потратить на общие цели, чтобы нижний уровень как можно меньше ресурсов выделил на свои частные цели. Итак, верхнему уровню выгодно пустить на общие цели ровно столько ресурсов, сколько нижний центр направляет на общие цели, т. е. $u_1^* = \frac{c}{2a_2 \ln 2} - 1$, тем самым заставляя нижний уровень все эти ресурсы потратить на общие цели, т. е. $u_2 = 1$.

3. $u_2^* = 1$. В этом случае

$$g_1(u_1, 1) = a_1(1 - u_1) + \frac{c}{2} \log_2(1 + u_1).$$

Максимизируем эту функцию с учетом условия $0 \leq u_1 \leq 1$.

Найдем производную функции g_1 по переменной u_1 и приравняем ее к нулю:

$$\frac{\partial g_1}{\partial u_1}(u_1, 1) = -a_1 + \frac{c}{2(1 + u_1) \ln 2} = 0.$$

Решим полученное уравнение:

$$u_1 = \frac{c}{2a_1 \ln 2} - 1.$$

Найдя вторую производную функции g_1 по переменной u_1 , убеждаемся, что точка u_1^* является точкой максимума.

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial u_1^2}(u_1, u_2^*(u_1)) = -\frac{c}{2(1+u_1)^2 \ln 2} < 0.$$

Учитывая ограничение на u_1 , получаем окончательный вид оптимальной стратегии верхнего уровня

$$u_1^* = \begin{cases} c/0, & a_1 \ln 2 \geq \frac{c}{2}, \\ \frac{c}{2a_1 \ln 2} - 1, & 0 < \frac{c}{2a_1 \ln 2} - 1 < 1, \\ 1, & \frac{c}{2a_1 \ln 2} \geq 2. \end{cases}$$

Как видно, если нижнему уровню выгодно хоть какую-то долю выделить на общие цели, верхний уровень может заставить нижний потратить все средства на общие цели. Иначе говоря, нижний уровень все доставшиеся ему от верхнего уровня ресурсы направляет либо только на общие цели, либо только на частные.

Рассмотрим каждую ветвь равновесия по Штакельбергу в отдельности:

1. $u = (0; 0)$, если $a_2 > \frac{c}{2 \ln 2}$ либо $a_1 > \frac{c}{2 \ln 2}$, т. е. кому-то из игроков значительно больший доход приносит частная деятельность, чем общая, и ему невыгодно вкладывать ресурсы в общее дело, а, следовательно, и другому игроку тогда либо незачем передавать ресурсы на общие цели (в случае верхнего уровня), либо они ему просто не достаются (в случае нижнего уровня). Выигрыши игроков в данном случае: $g_1 = a_1$, $g_2 = 0$.

2. $u = (1; 1)$, если $a_2 < \frac{c}{4 \ln 2}$ и $a_1 < \frac{c}{4 \ln 2}$, т. е. обоим игрокам значительно больший доход приносит общая деятельность, чем частная, и каждый из них все ресурсы пускает на общие цели. Выигрыши игроков: $g_1 = \frac{c}{2}$, $g_2 = \frac{c}{2}$.

3. $u = (\frac{c}{2a_1 \ln 2} - 1; 1)$, если выполняются условия $\frac{c}{4 \ln 2} < a_1 < \frac{c}{2 \ln 2}$ и $a_2 < a_1$, т. е. верхнему уровню выгодно лишь часть ресурсов потратить на общие цели, так как его доходы от обоих видов деятельности сравнимы, в то время как нижнему уровню выгодно все доставшиеся от верхнего уровня ресурсы потратить на общие цели. Выигрыши

игроков:

$$g_1 = 2a_1 - \frac{c}{2 \ln 2} + \frac{c}{2} \log_2 \frac{c}{2a_1 \ln 2},$$

$$g_2 = \frac{c}{2} \log_2 \frac{c}{a_1 \ln 2}.$$

4. $u = (\frac{c}{2a_2 \ln 2} - 1; 1)$, если $\frac{c}{4 \ln 2} < a_2 < \frac{c}{2 \ln 2}$ и $a_2 > a_1$, т. е. как верхнему уровню, так и нижнему уровню выгодно лишь часть ресурсов потратить на общие цели, так как их доходы от обеих видов деятельности сравнимы, причем нижний уровень планирует направить на общую долю фиксированную величину, а излишки потратить на частные цели. Но верхний уровень выделяет нижнему уровню ровно ту фиксированную величину ресурсов, которую тот планировал потратить на общие цели, следовательно, заставляя нижний уровень отказаться от частных интересов и все средства потратить на общие цели. Выигрыши игроков

$$g_1 = 2a_1 - \frac{a_1 c}{2a_2 \ln 2} + \frac{c}{2} \log_2 \frac{c}{2a_2 \ln 2},$$

$$g_2 = \frac{c}{2} \log_2 \frac{c}{2a_2 \ln 2}.$$

4. Численное исследование

Исследуем численно несколько оставшихся случаев.

Пусть функция целевой деятельности экспоненциальная, а функция нецелевой деятельности степенная с показателем, меньшим 1:

$$a_1(u_1, u_2) = a_1(1 - u_2)^\alpha,$$

$$a_2(u_1, u_2) = a_2 u_1^\alpha (1 - u_2)^\alpha,$$

$$c(u_1, u_2) = c(1 - e^{-\lambda u_1 u_2}).$$

В этом случае функции выигрыша имеют вид

$$g_1(u_1, u_2) = a_1(1 - u_1)^\alpha + \frac{c}{2}(1 - e^{-\lambda u_1 u_2}),$$

$$g_2(u_1, u_2) = a_2 u_1^\alpha (1 - u_2)^\alpha + \frac{c}{2}(1 - e^{-\lambda u_1 u_2}).$$

Для нахождения оптимальной стратегии нижнего уровня найдем производную функции g_2 по переменной u_2 и приравняем ее к нулю.

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u_1, u_2) = -\frac{a_2 \alpha u_1^\alpha}{(1-u_2)^{1-\alpha}} + \frac{\lambda c u_1}{2} e^{-\lambda u_1 u_2} = 0. \quad (1)$$

Для решения (5) применим метод половинного деления. Заметим, что вторая производная функции g_2 по переменной u_2 отрицательна,

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial u_2^2}(u_1, u_2) = \frac{a_2 \alpha (\alpha - 1) u_1^\alpha}{(1-u_2)^{2-\alpha}} - \frac{\lambda^2 c u_1^2}{2} e^{-\lambda u_1 u_2} < 0,$$

что говорит о монотонности функции $\partial g_2 / \partial u_2$.

Теперь найдем знаки $\partial g_2 / \partial u_2$ на концах отрезка $[0; 1]$:

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u_1, 0) = -a_2 \alpha u_1^\alpha + \frac{\lambda c u_1}{2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u_1, 1) \xrightarrow{u_2 \rightarrow 1_-} -\frac{a_2 \alpha u_1^\alpha}{0_+} + \frac{\lambda c u_1}{2} e^{-\lambda u_1 u_2} \xrightarrow{u_2 \rightarrow 1_-} -\infty. \quad (3)$$

Если (6) положительно, то уравнение можно решить методом половинного деления, причем полученное решение будет точкой максимума в силу отрицательности второй производной. Если же (6) отрицательно, то метод половинного деления не подходит, но так как левая часть уравнения монотонна, то можно сделать вывод, что она отрицательная на отрезке $[0; 1]$, а, следовательно, функция g_2 убывает, откуда следует, что точка максимума $u_2 = 0$. Т. е.

$$u_2^* = \begin{cases} 0, & -a_2 \alpha u_1^\alpha + \frac{\lambda c u_1}{2} < 0, \\ \in (0; 1), & -a_2 \alpha u_1^\alpha + \frac{\lambda c u_1}{2} > 0. \end{cases}$$

Верхний уровень может использовать эту информацию для того, чтобы побудить нижний уровень выбрать ненулевую стратегию. Чтобы нижний уровень выбрал стратегию $u_2 > 0$, нужно, чтобы $-a_2 \alpha u_1^\alpha + \frac{\lambda u_1 c}{2} > 0$. Решив полученное неравенство относительно u_1 , получим $u_1 > \sqrt[1-\alpha]{(2a_2 \alpha)/(\lambda c)}$.

Итак, для того, чтобы нижний уровень не потратил все ресурсы на частные цели, верхнему уровню рекомендуется выбрать стратегию $u_1 > \sqrt[1-\alpha]{(2a_2 \alpha)/(\lambda c)}$. Понятно, что сделать он это сможет только, если $\sqrt[1-\alpha]{(2a_2 \alpha)/(\lambda c)} < 1$, что равносильно $a_2 < \left(\frac{\lambda c}{2\alpha}\right)^{1-\alpha}$.

В противном случае нижний уровень выбирает стратегию $u_2 = 0$. Найдем в этом случае оптимальное поведение и выигрыш верхнего уровня

$$g_1(u_1, 0) = a_1(1 - u_1)\alpha,$$

откуда видно, что функция g_1 убывает по u_1 , следовательно, $u_1 = 0$.

Подведем некоторые итоги.

1. Если $a_2 > \left(\frac{\lambda c}{2\alpha}\right)^{1-\alpha}$, то верхний уровень не может повлиять на нижний, в этом случае $u_2 = 0$, а значит $u_1 = 0$. Это происходит, когда производственная мощность нецелевой деятельности нижнего уровня значительно больше производственной мощности целевой деятельности.

2. Если $a_2 < \left(\frac{\lambda c}{2\alpha}\right)^{1-\alpha}$, то верхний уровень может заставить нижний уровень потратить какую-то часть ресурсов на общие цели, назначив $u_1 > {}^{1-\alpha}\sqrt{(2a_2\alpha)/(\lambda c)}$.

Это происходит, когда производственная мощность целевой деятельности нижнего уровня значительно больше производственной мощности нецелевой деятельности.

Аналогично рассматривается случай, когда функция целевой деятельности степенная с показателем, меньшим 1, а функция нецелевой деятельности логарифмическая, т. е.

$$a_1(u_1, u_2) = a_1 \log_2(2 - u_1)^\alpha,$$

$$a_2(u_1, u_2) = a_2 \log_2(1 + u_1(1 - u_2)),$$

$$c(u_1, u_2) = c(u_1 u_2)^\alpha.$$

Тогда функции выигрыша имеют вид

$$g_1(u_1, u_2) = a_1 \log_2(2 - u_1) + \frac{c}{2}(u_1 u_2)^\alpha, \quad (4)$$

$$g_2(u_1, u_2) = a_2 \log_2(1 + u_1(1 - u_2)) + \frac{c}{2}(u_1 u_2)^\alpha. \quad (5)$$

Если $a_1 < \frac{\alpha c \ln 2}{2}$ и $a_2 > \frac{\alpha c \ln 2}{2}$, то $u_1 = {}^{1-\alpha}\sqrt{\frac{c\alpha \ln 2}{2a_2}}$, $u_2 = 1$.

Выигрыши участников в этом случае:

$$g_1\left({}^{1-\alpha}\sqrt{\frac{c\alpha \ln 2}{2a_2}}, 1\right) = a_1 \log_2\left(2 - {}^{1-\alpha}\sqrt{\frac{c\alpha \ln 2}{2a_2}}\right) + \frac{c}{2}\left({}^{1-\alpha}\sqrt{\frac{c\alpha \ln 2}{2a_2}}\right)^\alpha,$$

$$g_2\left(\sqrt[1-\alpha]{\frac{c\alpha \ln 2}{2a_2}}, 1\right) = \frac{c}{2}\left(\sqrt[1-\alpha]{\frac{c\alpha \ln 2}{2a_2}}\right)^\alpha.$$

Если $a_1 < \frac{\alpha c \ln 2}{2}$ и $a_2 < \frac{\alpha c \ln 2}{2}$, то обоим уровням выгодно все ресурсы тратить на общие цели. Они могут побудить друг друга потратить какую-то часть ресурсов на общие цели, назначив соответственно $u_1 = 1, u_2 = 1$.

Выигрыши участников в этом случае:

$$g_1(1, 1) = \frac{c}{2}, \quad g_2(1, 1) = \frac{c}{2}.$$

Если $a_1 > \frac{\alpha c \ln 2}{2}$, то верхнему уровню выгодно на общие цели потратить лишь часть средств, $u_1 \in (0; \min\{\sqrt[1-\alpha]{(c\alpha \ln 2)/(2a_2)}; 1\})$.

5. Заключение

В настоящей статье проблема нецелевого использования ресурсов трактуется с точки зрения анализа свойств механизмов управления, обеспечивающих согласование интересов в иерархических (двухуровневых) системах. Проведенное аналитическое и численное исследование позволяет сделать следующие выводы. В случае, когда функции дохода от целевого и нецелевого использования ресурсов являются степенными с показателем, меньшим единицы, игрокам выгодно вкладывать некоторую долю средств на достижение общих целей, а оставшуюся часть на реализацию частных интересов. В случае, когда одна хотя бы одна из функций дохода от целевого или нецелевого использования ресурсов является степенной с показателем, большим единицы, а другая либо также степенная с показателем, большим единицы, либо линейная, игрокам выгодно ассигновать ресурсы либо только на частные цели (стратегия «эгоизма»), либо только на общие цели (стратегия «альтруизма»). В остальных случаях могут возникать следующие ситуации: когда эффект от частной деятельности какого-либо игрока значительно больше эффекта от общей деятельности, то выгодна стратегия чистого «эгоизма»; когда эффект от частной деятельности обоих игроков намного меньше эффекта от общей деятельности, то выгодно применить стратегию чистого «альтруизма»; когда эффекты от частной и общей деятельности игроков сравнимы, то выгодно часть средств направить на общие цели, а другую часть на частные.

Литература

1. Бурков В. Н., Новиков Д. А. Теория активных систем: состояние и перспективы.—М: Синтез, 1999.—161 с.
2. Гермейер Ю. Б., Ванель И. А. Игры с иерархическим вектором интересов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.—1974.—№ 3.—С. 54–69.
3. Горелик В. А., Горелов М. А., Кононенко А. Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системе управления.—М: Радио и связь, 1991.—288 с.
4. Горбанева О. И., Угольников Г. А. Модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной воды // Управление большими системами.—2009.—№ 26.—С. 64–80.
5. Горбанева О. И. Игровые модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной воды // Мат. теория игр и ее приложения.—2010.—Т. 2, №. 1.—С. 27–46.
6. Горбанева О. И., Угольников Г. А. Статические модели учета фактора коррупции при распределении ресурсов в трехуровневых системах управления // Управление большими системами.—2013.—№ 42.—С. 195–216.
7. Новиков Д. А. Теория управления организационными системами.—М: МПСИ, 2005.—584 с.
8. Уильямсон О. Фирмы и рынки // Современная экономическая мысль.—М: 1981.—С. 211–297.
9. Basar T., Olsder G. Y. Dynamic Noncooperative Game Theory.—Philadelphia: SIAM, 1999.—536 p.
10. LaFont J. J., Martimort D. The Theory of Incentive. The Principal-Agent Model.—Princeton: Princeton Univ. Press, 2002.—421 p.

ГОРБАНЕВА ОЛЬГА ИВАНОВНА
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: gorbaneva@mail.ru

HIERARCHICAL SYSTEM RESOURCE ALLOCATION AS EQUILLIBRIUM PURPOSE AND NON-PURPOSE USE

Gorbaneva O. I.

In the article a two-level control system consisting of one element in top level and one element in bottom level is considered. Both levels have purpose use and non-purpose use interests. Both levels share the purpose benefit in half. The model is built as a two players game where the Stackelberg equilibrium is found.

Key words: resource allocation, purpose aims, non-purpose aim, Stackelberg equilibrium, hierarchical system.

УЧЕТ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ БУРНОМУ ПОТОКУ ПРИ ЕГО СВОБОДНОМ РАСТЕКАНИИ ЗА БЕЗНАПОРНОЙ ВОДОПРОПУСКНОЙ ТРУБОЙ В ШИРОКОЕ ОТВОДЯЩЕЕ РУСЛО

М. Ф. Мицик, В. Г. Фетисов

В работе предлагается метод определения геометрии крайних линий тока и параметров бурного потока при его свободном растекании с учетом сил сопротивления. Учет сил сопротивления потоку реализуется с помощью сведения двухмерного планового потока к одномерному. Параметры потока определяются в среднем по живому сечению. Приведено сравнение геометрии потока по данной модели с моделью без учета сил сопротивления.

Ключевые слова: безнапорная прямоугольная труба, широкое отводящее горизонтальное русло, двухмерный бурный поток, учет сил сопротивления, одномерный поток, свободное растекание потока.

Как известно из экспериментов [1] и аналитических исследований [2], свободное растекание бурного потока в широкое отводящее русло происходит по типу «лепестка» (рис. 1).

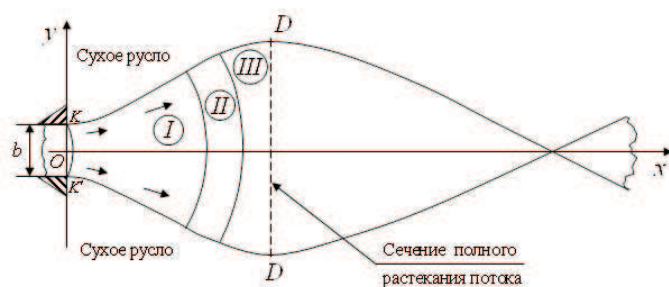


Рис. 1. План свободного растекания потока.

Эти исследования показали, что за водопропускной трубой следует участок потока I, на котором глубины потока уменьшаются, скорости возрастают. Далее следуют участки II, III, на которых характер течения потока изменяется [2].

Поток в области I без учета сил сопротивления удовлетворяет следующей системе уравнений:

- 1) $H_0 = \frac{V_0^2}{2g} + h$ — интеграл Бернулли;
- 2) $\frac{\partial(hu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_y)}{\partial y} = 0$ — уравнение неразрывности потока;
- 3) $\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} = \Omega = 0$ — условие потенциальности движения.

Здесь: $H_0 = \frac{V_0^2}{2g} + h_0$ — полный гидродинамический напор потока; h_0, V_0 — глубина и модуль скорости потока на выходе из трубы; g — ускорение силы тяжести; u_x, u_y — продольная и поперечная проекции вектора скорости на оси координат.

Опишем граничные условия свободного растекания.

На выходе потока из трубы (рис.1) при $x = 0, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$ имеем $u_x = V_0, u_y = 0, h = h_0, \theta = \theta_0$.

На бесконечности вдоль оси симметрии потока при $x \rightarrow \infty, y = 0$,

$$h \rightarrow 0, \quad u \rightarrow V_{\max} = \sqrt{2gH_0}.$$

На бесконечности вдоль крайней линии тока:

$$\theta \rightarrow \theta_{\max}, \quad x \rightarrow \infty, \quad h \rightarrow 0, \quad y = f(x) \rightarrow \infty,$$

где $\theta_{\max}$ — максимальный угол вектора скорости вдоль крайней линии тока при $x \rightarrow \infty$.

Между линией тока $y = f(x)$ и осью симметрии протекает 50% всего потока, т. е. расход потока здесь равен $\frac{Q}{2}$.

В области течения потока I необходимо определить параметры: $u_x(x, y), u_y(x, y)$ — проекции вектора скорости $\vec{V}$; $h(x, y)$ — местную глубину потока; $y = f(x)$ — неизвестную границу области растекания потока.

Задача определения глубин, скоростей и геометрии крайних линий тока для потенциального потока при свободном растекании была решена в работах [3, 4].

Задачей настоящей работы является уточнение параметров реального потока на первом участке, определение границ участка I , а также сравнение адекватности моделей:

- без учета сил сопротивления потоку;
- с учетом сил сопротивления потоку в форме, предлагаемой Б. Т. Емцевым в [5] (иными словами, как сил, отнесенных к единице массы).

Для оценки сил сопротивления потоку сведем двухмерный в плане поток к условному одномерному.

На рисунке (2) приведен план свободного растекания потока на участке I с учетом сил сопротивления и без их учета.

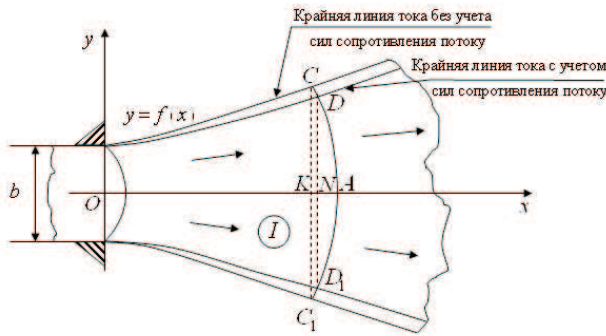


Рис. 2. План растекания потока с учетом сил сопротивления и без их учета.

В работе [4] получено уравнение крайней линии тока в виде:

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{4} + tg^2\theta_{\max} \cdot x^2}. \quad (1)$$

Зададим произвольное значение абсциссы $x = OK$ (рис. 2). Этому значению x соответствует значение y , определяемое по формуле (1), $y = KC$. Текущий угол вектора скорости θ в точке C равен:

$$\theta = \arctg \left\{ \frac{tg^2\theta_{\max} \cdot x}{\sqrt{\frac{b^2}{4} + tg^2\theta_{\max} \cdot x^2}} \right\}. \quad (2)$$

Определим радиус и ширину живого сечения потока, проходящего через точки C , A и C_1 :

$$R = \frac{y}{\sin \theta}, \quad B = 2\theta \cdot R. \quad (3)$$

Средние параметры потока глубину h и скорость V по живому сечению найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} Q = B \cdot h \cdot V; \\ H_0 = \frac{V^2}{2g} + h. \end{cases} \quad (4)$$

Отметим, что система (4) справедлива для потенциального потока.

Первое уравнение является уравнением неразрывности потока, а второе представляет интеграл Бернулли для двухмерного в плане потока, который справедлив для всей области течения модельного потока.

Умножим второе уравнение системы (4) на V и, учитывая, что $h \cdot V = \frac{Q}{B}$, из первого уравнения получим кубическое уравнение относительно величины средней скорости по живому сечению потока:

$$H_0 \cdot V = \frac{V^3}{2g} + \frac{Q}{B}. \quad (5)$$

Искомый корень уравнения (5) должен удовлетворять условию:

$$V_0 \leq V \leq V_{\max}. \quad (6)$$

Средняя глубина по живому сечению потока при этом из первого уравнения системы (4) будет равна

$$h = \frac{Q}{B \cdot V}. \quad (7)$$

Отсюда получим параметры потока как функции от x :

$$y = y(x), \quad \theta = \theta(x), \quad R = R(x), \quad B = B(x), \quad V = V(x), \quad h = h(x). \quad (8)$$

Определим далее аналогичные параметры для потока на участке I (рис. 1) с учетом сил сопротивления потоку.

Считая, что рассогласования по параметрам потока на этом участке будут малы, для упрощения полагаем, что радиус живого сечения DAD_1 совпадает с радиусом живого сечения CAC_1 (рис. 2).

Присвоим всем параметрам в формуле (8) индексы c для потока с учетом сил сопротивления

$$y_c, \theta_c, R_c, B_c, V_c, h_c. \quad (9)$$

Для параметров B_c, V_c, h_c в формуле (9) справедливо уравнение неразрывности:

$$Q = B_c \cdot V_c \cdot h_c. \quad (10)$$

Падение гидродинамического напора удовлетворяет уравнению из [6]:

$$\frac{dH_c}{dx} = -\frac{\lambda_c \cdot F_c}{2}, \quad (11)$$

где λ_c — коэффициент гидравлического трения потока о дно русла, $F_c = \frac{V_c^2}{gh_c}$ — критерий кинетичности потока (иначе говоря, число Фруда).

Коэффициент гидравлического трения будем рассматривать в виде, предложенном в [7]:

$$\lambda_c = K \left(\frac{k_s}{h_c} \right)^{1/3}, \quad (12)$$

где $K = 0,0303$, а k_s — коэффициент шероховатости дна отводящего русла.

Для бетона, согласно данным в [6]:

$$0,3 \text{ mm} \leq k_s \leq 1,5 \text{ mm}. \quad (13)$$

Формула (12) по сути есть известная формула Маннинга [8].

Преобразуем уравнение (11) к виду:

$$H_0 - H_c = \int_0^x \frac{\lambda_c \cdot F_c}{2} dx. \quad (14)$$

Так как на первом участке реального потока в силу малости сил сопротивления потоку функция $f(x) = \lambda_c \cdot F_c$ монотонно возрастает, и при этом глубины уменьшаются, а скорости увеличиваются, то при численном расчете интеграла воспользуемся формулой трапеций.

Тогда уравнение (14) перепишем в дискретном виде:

$$H_0 - H_c = \frac{1}{4} \{ \lambda_0 \cdot F_0 + \lambda_c \cdot F_c \} \cdot x. \quad (15)$$

Придерживаясь аналогии с моделью определения параметров без учета сил сопротивления, полагаем в (15) $x = x_A$, так как необходимо определить параметры потока в живом сечении DAD_1 . Таким образом, уравнение (15) примет вид:

$$H_0 - \frac{V_c^2}{2g} - h_c = \frac{1}{4} \left[\lambda_0 \cdot F_0 + K \left(\frac{k_s}{h_c} \right)^{1/3} \cdot \frac{V_c^2}{g \cdot h_c} \right] \cdot x_A. \quad (16)$$

Из первого уравнения системы (4) и уравнения (10) получим:

$$\delta = \frac{B}{B_c} = \frac{V_c h_c}{V h}. \quad (17)$$

С учетом (17) уравнение (16) примет следующий вид:

$$H_0 h_c^2 - \frac{\delta^2 V^2 h^2}{2g} - h_c^3 = \frac{1}{4} \left[\lambda_0 F_0 h_c^2 + K \left(\frac{k_s}{h_c} \right)^{1/3} \frac{\delta^2 V^2 h^2}{g h_c} \right] x_A. \quad (18)$$

Из (17) и второго из равенств (3) получим

$$\delta = \frac{B}{B_c} = \frac{\theta}{\theta_c}. \quad (19)$$

Из геометрии растекания потока следует:

$$x_A = x + R - R \cos \theta. \quad (20)$$

Выразим из уравнения (18) величину δ

$$\delta = \sqrt{\frac{H_0 h_c^2 - h_c^3 - \frac{1}{4} x_A \lambda_0 F_0 h_c^2}{\frac{V^2 h^2}{2g} \left[1 + \frac{1}{2h_c} x_A K \left(\frac{k_s}{h_c} \right)^{1/3} \right]}}. \quad (21)$$

Так как глубины в реальном потоке убывают медленнее, чем глубины без учета сил сопротивления потоку [2, 7], то полагаем:

$$h_c = h + \Delta h, \quad \Delta h > 0. \quad (22)$$

Численный расчет показывает, что в точке минимума функции (21) Δh действительно является положительной величиной, а $\delta(\Delta h)$ принимает значение на интервале (1; 1,1). При этом оптимальное значение Δh мало, так как каждый раз при численных расчетах $\frac{\Delta h}{h}$ не превосходит 4%.

Таким образом, в работе использовался принцип оптимальности: отклонение параметров потока при наличии возмущений (сил сопротивления потоку) в устойчивой области течения от идеального (без учета сил сопротивления потоку) стремится к минимальному.

Определив δ , Δh по формулам (22), (19), (17) и (10), найдем значения параметров θ_c , B_c , V_c , h_c в живом сечении потока DAD_1 .

Для сравнения ординат крайней линии тока при совпадающих абсциссах определим:

$$x_N = x_A + R \cos \theta_c - R, \quad y_c(x_N) = R \sin \theta_c.$$

Значение $y(x_N)$ определим из формулы (1).

Далее оцениваем относительную погрешность рассогласования ординат крайних линий тока с учетом сил сопротивления и без их учета

$$\delta_y = \frac{|y_c - y|}{y_c} \cdot 100\%.$$

Абсциссу конца первого участка в лепестке растекания потока определим из условия

$$u'_c(x) = 0,$$

т. е. найдем расстояние от кромки выходной трубы до точки окончания возрастания скорости реального потока.

Заключение

Рассогласование ординат вдоль крайней линии тока с учетом сил сопротивления потоку и без их учета не превышает 5–7%, что подтверждается экспериментально. На рис. 2 приведены для сравнения с экспериментом графики крайних линий тока по модели без учета сил сопротивления и с учетом. При этом координаты крайней линии тока, определяемой экспериментально, практически совпадают с координатами на самой линии тока, полученной по модели с учетом сил сопротивления. Также имеет место практическое совпадение глубин и скоростей на оси потока по модели с учетом сил сопротивления и в эксперименте.

Таким образом, сопоставление модели без учета сил сопротивления с экспериментом и модели с их учетом показывает, что адекватность по всему комплексу параметров потока с учетом сил сопротивления потоку возрастает.

Литература

1. Мицик М. Ф. Экспериментальные исследования по свободному растеканию двухмерных бурных в плане потоков воды при их истечении в широкое отводящее русло // Изв. вузов Сев.-Кавк. регион. Техн. науки.—2005.—№ 4—С. 80–82.
2. Косиченко Н. В. Анализ изучения и уточнения методов свободного растекания потока за безнапорными водопропускными отверстиями // Вестн. Саратовского ГАУ.—Саратов: СГАУ, 2011.—№ 9.—С. 27–33.
3. Коханенко В. Н., Волосухин Я. В., Ширяев В. В., Коханенко Н. В. Моделирование одномерных и двухмерных открытых водных потоков.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2007.—168 с.
4. Дуванская Е. В., Коханенко В. Н., Мицик М. Ф. Аппроксимация крайней линии тока в задаче свободного растекания бурного потока за водопропускной трубой // Изв. вузов Сев.-Кавк. регион. Техн. науки.—2010.—№ 6.—С. 90–94.
5. Емцев Б. Т. Двухмерные бурные потоки.—М.: Энергия, 1967.—212 с.
6. Коханенко В. Н., Мицик М. Ф., Алейникова О. А. О плановой задаче растекания бурного потока несжимаемой жидкости // Изв. вузов Сев.-Кавк. регион. Техн. науки.—2012.—№ 6.—С. 82–88.

7. Милитеев А. Н., Тогунова Н. П. Метод расчета сопряжения бьефов в пространственных условиях // Гидравлика сооружений оросительных систем: тр. НИМИ.—Новочеркасск, 1976.—Т. 18.—Вып. 5.—С. 180–194.
8. Справочник по гидравлике / Ред. В. А. Большакова. Изд. 2-е, перераб. и доп.—Киев: Вища школа, 1984.—343 с.

Мицик Михаил Федорович
Институт сферы обслуживания и предпринимательства
(филиал Донского государственного технического университета)
РОССИЯ, 346500, Шахты, ул. Шевченко, 147
E-mail: m_mits@mail.ru

Фетисов Валерий Георгиевич
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Институт сферы обслуживания и предпринимательства
(филиал Донского государственного технического университета)
РОССИЯ, 346500, Шахты, ул. Шевченко, 147
E-mail: fetisov_vg@sssu.ru

CALCULATION OF RESISTING FORCES TO THE TURBULENT FLOW DURING ITS FREE SPREADING AFTER THE NONPRESSURE PIPE THE PASSAGE OF THE WATER IN DIVERTING THE BROAD CHANNEL

Mitsik M. F., Fetisov V. G.

The paper proposes a method for determining the geometry of the outer flow lines and the parameters of turbulent flow during its free spreading taking into account resistance forces. Accounting for power flow resistance is implemented using two-dimensional information of the planned one-dimensional flow. The flow parameters are determined by the average of the living section. The comparison of the geometry of the flow of this model with that of the model without the resistance forces is also given.

Key words: pressureless rectangular tube, wide horizontal outlet channel, two-dimensional turbulent flow, taking into account the forces of resistance, one-dimensional flow, the free spreading of the flow.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ (САПР) СЕЛЕКТИВНЫХ ВОДОЗАБОРНЫХ УСТРОЙСТВ

И. Д. Музаев, Н. И. Музаев

Составлена математическая модель гидродинамических процессов в системе стратифицированный водоем — селективное водозаборное устройство при заборе воды из внутреннего пространства. Модель позволила получить расчетные формулы, позволяющие управлять селективным водозаборным процессом. Результаты работы могут быть использованы в деле автоматизации проектирования селективных водозаборных систем.

Ключевые слова: селективный водозабор, математическая модель гидродинамических процессов, стратифицированный водоем.

При селективном водозаборе из стратифицированного по плотности водохранилища на поверхности раздела слоев воды образуются высокие внутренние гравитационные волны, которые могут спровоцировать затекание воды из недопустимого слоя.

Для обеспечения качественного водоснабжения промышленных предприятий, в том числе и атомных электростанций, необходимы разработки строгих математических моделей для САПР оптимальных вариантов водозаборных устройств.

Модель должна позволить определить высоту критического положения возмущенной поверхности раздела слоев у водозаборного окна. Критическое положение — это предельное положение волновой поверхности раздела слоев, при котором еще не происходит захвата воды из недопустимых слоев.

В работах [1–7] разработаны такие модели, когда окна устраиваются на боковых гранях либо на дне стратифицированного водоема.

В настоящей статье разработана модель этой же проблемы, когда водозаборное окно по необходимости устраивается во внутриводном пространстве водоема.

Предположим, что в прямоугольной системе координат $Oxyz$ часть пространства, ограниченная условиями $0 < x < L$, $0 < y < B$, $-H_2 < z < H_1$, представляет стратифицированное по плотности

водохранилище, схематизированное в виде прямоугольного параллелепипеда длиной L , шириной B и глубиной $H_1 + H_2$ (H_1 и H_2 — глубина верхнего и нижнего слоев соответственно).

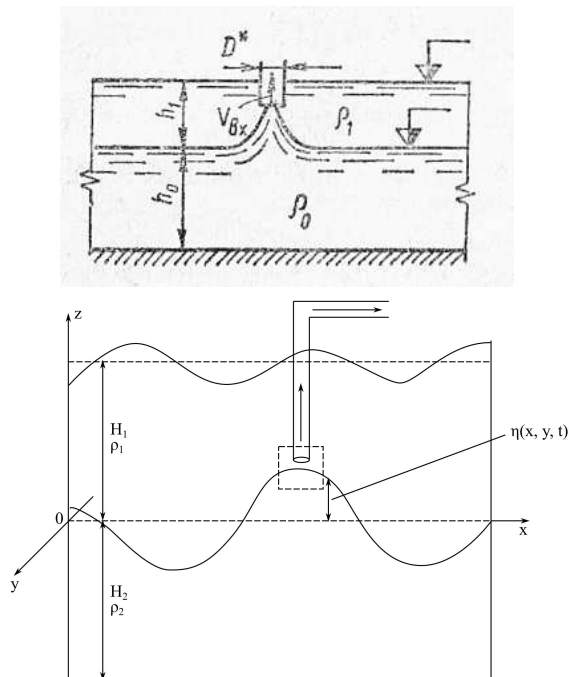


Рис. 1. Схематизация водозабора из внутреннего пространства верхнего слоя.

При заборе воды из внутреннего пространства верхнего слоя, в рамках линейной теории идеальной несжимаемой жидкости математическая модель гидродинамических процессов имеет следующий вид [1–7] (рис. 1):

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = -\frac{Q_0}{8a^3} f(x, y, z), \quad 0 \leq z \leq H_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \varphi_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right|_{y=B} = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right|_{y=B} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = H_1, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \quad \text{при } z = 0, \quad (9)$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \right) \quad \text{при } z = 0, \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=-H_2} = 0, \quad (11)$$

$$\eta(x, y, t) = \frac{\rho_2}{(\rho_2 - \rho_1)g} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\rho_1}{(\rho_2 - \rho_1)g} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \quad \text{при } z = 0, \quad (12)$$

где η — уравнение внутренней волновой поверхности, Q_0 — расход воды забираемого через внутриводное водозаборное отверстие, a — некоторая фиктивная длина. Функцию $f(x, y, z)$ можно представить следующим образом:

$$f(x, y, z) = [1(x - x_0 + a) - 1(x - x_0 - a)] \times \\ \times [1(y - y_0 + a) - 1(y - y_0 - a)] [1(z - z_0 + a) - 1(z - z_0 - a)],$$

$1(x)$ — единичные функции Хевисайда.

Легко заметить, что процесс водозабора из внутреннего пространства водоема смоделирован, как непрерывная система точечных стоков, равномерно распределенных в кубе:

$$\begin{cases} x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \\ y_0 - a \leq y \leq y_0 + a, \\ z_0 - a \leq z \leq z_0 + a. \end{cases}$$

Функцию $f(x, y, z) = f(M)$ можно записать так:

$$f(M) = \begin{cases} 1 & \text{при } M \in \text{кубу}, \\ 0 & \text{при } M \notin \text{кубу}, \end{cases} \quad (13)$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ — координаты геометрического центра куба, a — ребро куба.

Поставленная начально-краевая задача решена путем применения интегрального преобразования Лапласа по переменной t и разложения в двукратные ряды Фурье по переменным x и y .

Уравнение волновой поверхности раздела слоев воды получено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) = & \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{0,m}(t) \cos a_m y + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{n,m}(t) \cos a_m y \cdot \cos a_n x + \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{n,0}(t) \cos a_n x, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \eta_{n,m}(t) = & -\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\text{th} \lambda_{n,m} H_2 \cdot Q_0 \cdot \alpha_{n,m}}{8a^3 \lambda_{n,m} \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \text{th} \lambda_{n,m} H_1 \cdot \text{th} \lambda_{n,m} H_2\right) (\omega_{1,n,m}^2 - \omega_{2,n,m}^2)} \times \\ & \times \left[\beta_{n,m} (\omega_{1,n,m} \cdot \sin \omega_{1,n,m} t - \omega_{2,n,m} \cdot \sin \omega_{2,n,m} t) + \right. \\ & \left. + \bar{\beta}_{n,m} g \lambda_{n,m} \left(\frac{\sin \omega_{2,n,m} t}{\omega_{2,n,m}} - \frac{\sin \omega_{1,n,m} t}{\omega_{1,n,m}} \right) \right], \\ \beta_{n,m} = & \frac{e^{-\lambda_{n,m}(z_0-a)} - e^{-\lambda_{n,m}(2H_1-z_0+a)} - e^{-\lambda_{n,m}(z_0+a)} - e^{-\lambda_{n,m}(2H_1-z_0-a)}}{1 + e^{-2\lambda_{n,m}H_2}}, \\ \bar{\beta}_{n,m} = & \frac{e^{-\lambda_{n,m}(z_0-a)} - e^{-\lambda_{n,m}(2H_1-z_0+a)} - e^{-\lambda_{n,m}(z_0+a)} - e^{-\lambda_{n,m}(2H_1-z_0-a)}}{1 + e^{-2\lambda_{n,m}H_2}}, \\ \omega_{1,n,m} = & \sqrt{g \lambda_{n,m}} \sqrt{\frac{\text{th} \lambda_{n,m} H_1 + \text{th} \lambda_{n,m} H_2 - \sqrt{D_{n,m}}}{2 \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \text{th} \lambda_{n,m} H_1 \cdot \text{th} \lambda_{n,m} H_2\right)}}, \\ \omega_{2,n,m} = & \sqrt{g \lambda_{n,m}} \sqrt{\frac{\text{th} \lambda_{n,m} H_1 + \text{th} \lambda_{n,m} H_2 + \sqrt{D_{n,m}}}{2 \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \text{th} \lambda_{n,m} H_1 \cdot \text{th} \lambda_{n,m} H_2\right)}}, \end{aligned}$$

$$D_{n,m} = (\operatorname{th} \lambda_{n,m} - \operatorname{th} \lambda_{n,m} H_2)^2 + 4 \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{th} \lambda_{n,m} H_1 \cdot \operatorname{th} \lambda_{n,m} H_2 \times \\ \times \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{th} \lambda_{n,m} H_1 \cdot \operatorname{th} \lambda_{n,m} H_2 - \operatorname{th} \lambda_{n,m} H_1 \cdot \operatorname{th} \lambda_{n,m} H_2 \right),$$

$$\lambda_{n,m} = \sqrt{a_n^2 + a_m^2}, \quad a_n = \frac{n\pi}{L}, \quad a_m = \frac{m\pi}{B},$$

$$\alpha_{n,m} = \frac{16}{L \cdot B \cdot a_m \cdot a_n} \cos a_m y_0 \cdot \cos a_n x_0 \cdot \sin a_n a \cdot \sin a_m a,$$

$$\alpha_{n,0} = \frac{8a}{L \cdot B \cdot a_n} \cos a_n x_0 \cdot \sin a_n a, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\alpha_{0,m} = \frac{8a}{L \cdot B \cdot a_m} \cos a_m y_0 \cdot \sin a_m a, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\alpha_{0,0} = \frac{4a^2}{L \cdot B}.$$

При заборе воды из нижнего слоя аналогичным методом получают расчетные формулы для определения верхнего критического положения волновой поверхности раздела слоев

$$\eta_{n,m} = \frac{Q_0}{8a^3} \frac{\alpha_{n,m} \cdot \beta_{n,m}}{\lambda_{n,m} \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{th} \lambda_{n,m} H_1 \cdot \operatorname{th} \lambda_{n,m} H_2 \right) (\omega_{2,n,m}^2 - \omega_{1,n,m}^2)} \times \\ \times \left(\frac{g \lambda_{n,m} \cdot \operatorname{th} \lambda_{n,m} H_1 - \omega_{1,n,m}^2}{\omega_{1,n,m}} \sin \omega_{1,n,m} t + \right. \\ \left. + \frac{\omega_{2,n,m}^2 - g \lambda_{n,m} \operatorname{th} \lambda_{n,m} H_1}{\omega_{2,n,m}} \sin \omega_{2,n,m} t \right),$$

$$\beta_{n,m} = \frac{\operatorname{sh} \lambda_{n,m} (H_2 - z_0 - a) - \operatorname{sh} \lambda_{n,m} (H_2 - z_0 + a)}{\operatorname{ch} \lambda_{n,m} H_2}.$$

Результаты вычислительных экспериментов представлены на рис. 2 и 3. На горизонтальной оси отмерено время в секундах. На вертикальной оси отмерены значения $\frac{\eta}{Q_0}$, где η — возвышение поверхности, Q_0 — расход воды через окно.

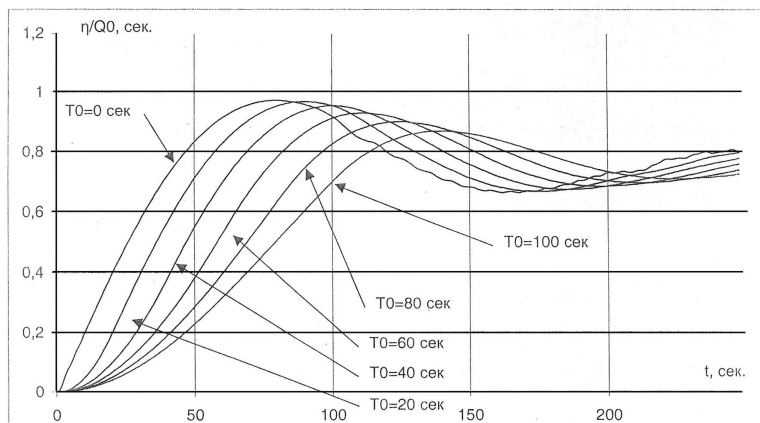


Рис. 2. График колебания поверхности раздела у водозаборного окна при заборе воды из внутреннего пространства верхнего слоя.
 $H_1 = 5$ м, $H_2 = 5$ м, $L = 1000$ м, $B = 2$ м, $z_0 = 2$ м, $h_0 = 0,001$ м,
 $b_0 = 1$ м, $\rho_1 = 1000$ кг/м³, $\rho_2 = 1001$ кг/м³, $x_0 = 500$ м, $y_0 = 1$ м,
 $x = 500$ м, $y = 1$ м, $a = 0,001$ м, $b = 1$ м.

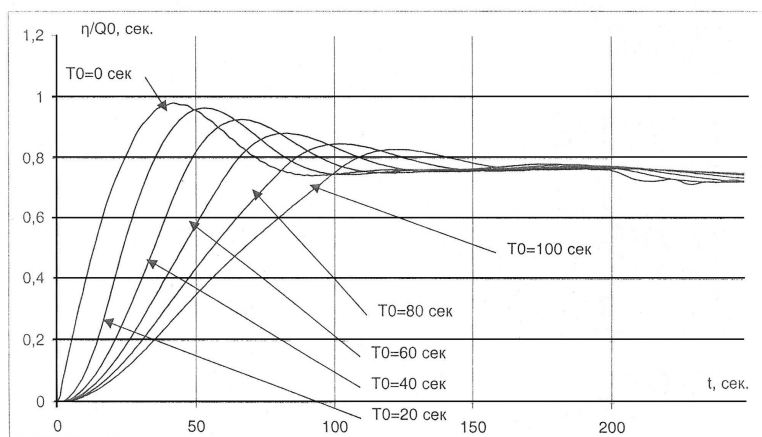


Рис. 3. График колебания поверхности раздела у водозаборного окна при заборе воды из внутреннего пространства верхнего слоя.
 $H_1 = 5$ м, $H_2 = 5$ м, $L = 1000$ м, $B = 2$ м, $z_0 = 2$ м, $h_0 = 0,001$ м,
 $b_0 = 1$ м, $\rho_1 = 1000$ кг/м³, $\rho_2 = 1001$ кг/м³, $x_0 = 100$ м, $y_0 = 1$ м,
 $x = 100$ м, $y = 1$ м, $a = 0,001$ м, $b = 1$ м.

На рис. 4–8 представлены результаты вычислительных экспериментов при заборе воды из верхнего и нижнего слоев.

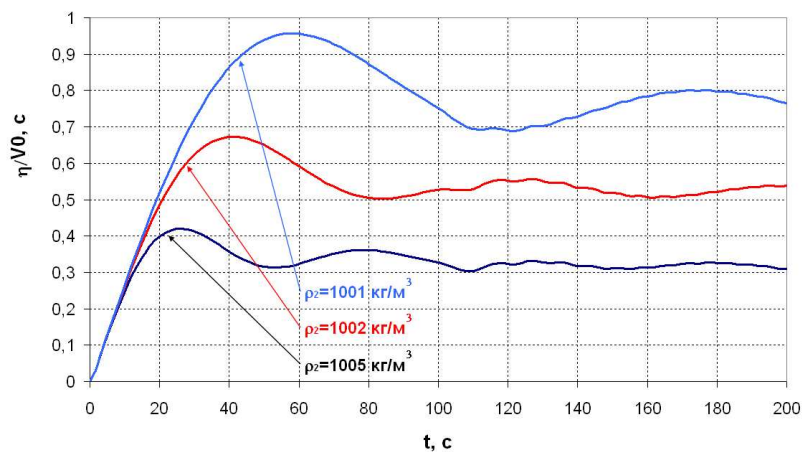


Рис. 4. Графики колебания уровня поверхности раздела у водозаборного окна при заборе воды из верхнего слоя (внутренний).

$H_1 = 5 \text{ м}$, $H_2 = 5 \text{ м}$, $L = 50 \text{ м}$, $B = 2 \text{ м}$, $z_0 = 2,5 \text{ м}$, $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$,
 $y_0 = \frac{B}{2}$, $y = \frac{B}{2}$, $x = x_0 = 10 \text{ м}$, $h_0 = 0,01 \text{ м}$.

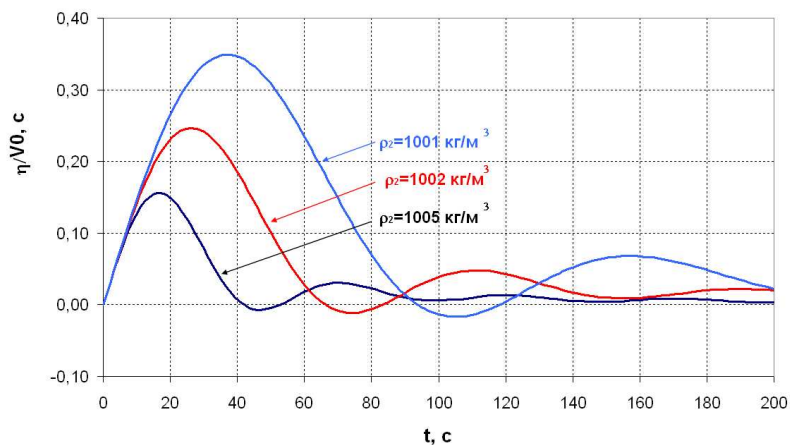


Рис. 5. Графики колебания уровня поверхности раздела у водозаборного окна при заборе воды из верхнего слоя (внутренний).

$H_1 = 5 \text{ м}$, $H_2 = 5 \text{ м}$, $L = 50 \text{ м}$, $B = 50 \text{ м}$, $z_0 = 2,5 \text{ м}$, $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$,
 $y_0 = \frac{B}{2}$, $y = \frac{B}{2}$, $x = x_0 = 10 \text{ м}$, $h_0 = 0,01 \text{ м}$.

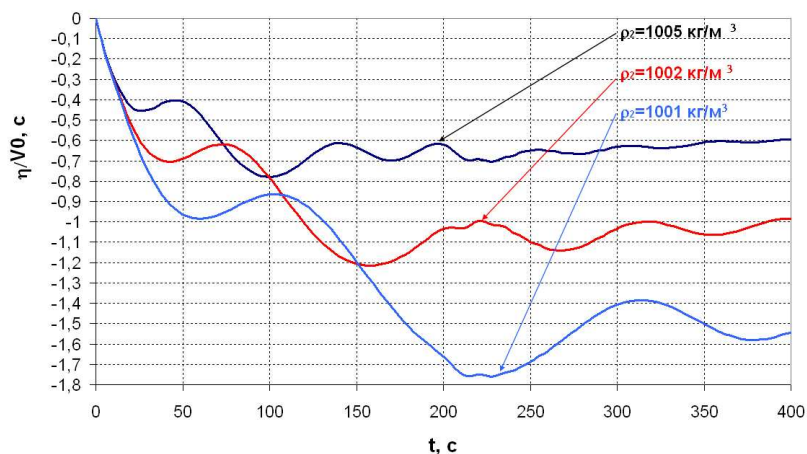


Рис. 6. Графики колебания уровня поверхности раздела у водозаборного окна при заборе воды из нижнего слоя (внутренний).

$H_1 = 5 \text{ м}$, $H_2 = 5 \text{ м}$, $L = 50 \text{ м}$, $B = 50 \text{ м}$, $z_0 = 2,5 \text{ м}$, $a_0 = 1 \text{ м}$, $b_0 = 1 \text{ м}$,
 $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $y_0 = \frac{B}{2}$, $y = \frac{B}{2}$, $x = x_0 = 10 \text{ м}$, $h_0 = 0,01 \text{ м}$.

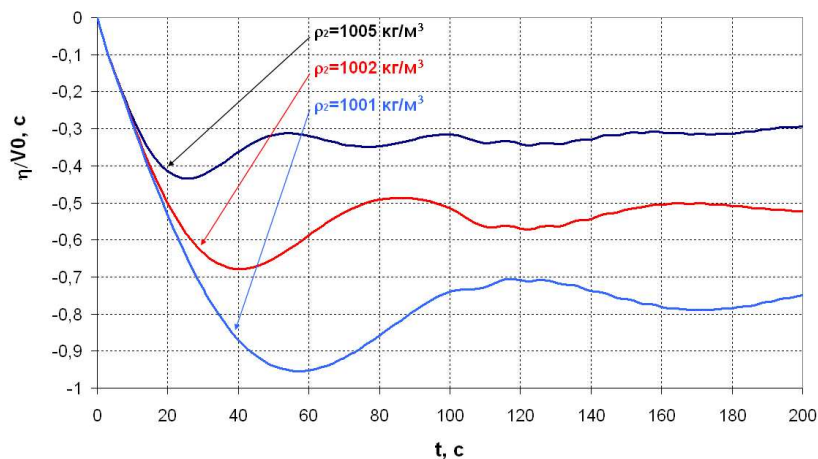


Рис. 7. Графики колебания уровня поверхности раздела у водозаборного окна при заборе воды из нижнего слоя (внутренний).

$H_1 = 5 \text{ м}$, $H_2 = 5 \text{ м}$, $L = 50 \text{ м}$, $B = 2 \text{ м}$, $z_0 = 2,5 \text{ м}$, $a_0 = 1 \text{ м}$, $b_0 = 1 \text{ м}$,
 $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $y_0 = \frac{B}{2}$, $y = \frac{B}{2}$, $x = x_0 = \frac{L}{2}$, $h_0 = 0,01 \text{ м}$.

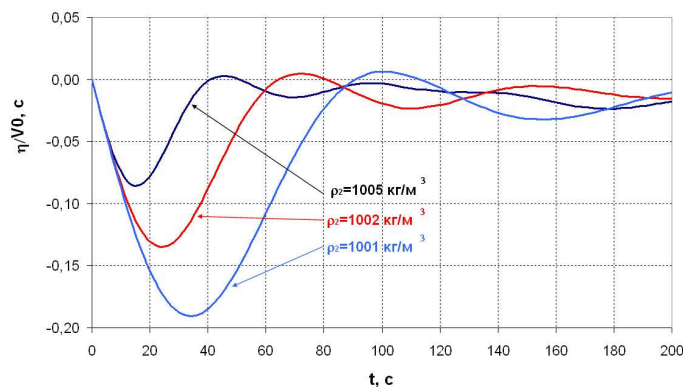


Рис. 8. Графики колебания уровня поверхности раздела у водозаборного окна при заборе воды из нижнего слоя (внутренний).

$H_1 = 5$ м, $H_2 = 5$ м, $L = 50$ м, $B = 50$ м, $z_0 = 2,5$ м, $a_0 = 1$ м, $b_0 = 1$ м,
 $\rho_1 = 1000$ кг/м³, $y_0 = \frac{B}{2}$, $y = \frac{B}{2}$, $x = x_0 = \frac{L}{2}$, $h_0 = 0,01$ м.

Разработанная математическая модель позволяет подбор оптимальных значений габаритов водозаборного устройства и расхода Q_0 , обеспечивающих селективный водозабор из стратифицированного водоема.

Литература

1. Ламб Г. Гидродинамика.—М.—Л.: ОГИЗ, 1947.—927 с.—(Пер. с англ.)
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2.—М.: Наука, 1970.—568 с.
3. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости.—М.: Гостехиздат, 1979.
4. Музаева Т. В. Постановка и решение начально-краевой задачи водоохраны при селективном водозаборе из стратифицированного водоема // Вестн. Междун. акад. наук экологии и безопасности жизнедеятельности.—2000.—С. 44–45.
5. Созанов И. Г., Музаев И. Д., Туаева Ж. Д., Музаева Т. В. Математическое моделирование переходных процессов при селективном водозаборе из стратифицированного водоема // Мат. моделирование и проблемы экологической безопасности.—Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 2000.—С. 179–186.
6. Созанов И. Г., Музаев И. Д., Туаева Ж. Д., Музаева Т. В. Математическое моделирование нестационарных внутренних гравитационных волн в стратифицированном водоеме при селективном водозаборе // Мат. моделирование в науч. исслед.—Ставрополь, 2000.—С. 84–88.
7. Созанов И. Г., Музаев И. Д., Туаева Ж. Д., Музаева Т. В. Постановка и решение начально-краевой задачи внутренних волн при селективном водозаборе из стратифицированного водоема // Изв. Высш. учебных заведений. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки.—2000.—№ 1.—С. 104–106.

Музаев Илларион Давидович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: muzaevid@mail.ru

Музаев Нугзар Илларионович
Центр геофизических исследований ВНЦ РАН и РСО-А
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркова, 93 а
E-mail: muzaevid@mail.ru

MATHEMATICAL MODELING OF SYSTEMS
FOR COMPUTER-AIDED DESIGN (CAD)
SELECTIVE WATER INTAKE

Muzaev I. D., Muzaev N. I.

The mathematical model of hydrodynamic processes in the stratified water, selective water intake when taking water from the interior. The model yields formulas that enables one to control selective water intake process. The results can be used in computer-aided design of selective intake systems.

Key words: selective abstraction, mathematical model of hydrodynamic processes, stratified reservoir.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА УСИЛЕНИЯ ИЛИ ОСЛАБЛЕНИЯ ЭФФЕКТА СЕЙСМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ВЫСОТНОЕ СООРУЖЕНИЕ

И. Д. Музаев

В статье поставлена и решена контактная краевая задача совместных сейсмических колебаний системы, состоящей из двух слоев грунта, фундаментного массива и высотного сооружения. Получены расчетные формулы для вычисления амплитуд колебания тела сооружения.

Ключевые слова: контактная краевая задача, сдвиговые колебания, жесткость высотного сооружения, амплитуды падающих волн.

На рис. 1 представлен схематический чертеж стройплощадки под высотным зданием. Обычно грунты под строительной площадкой представляют собой систему из многих слоев пород с различными физико-механическими характеристиками и мощностями. С точки зрения оценки сейсмического воздействия всегда возникает естественный вопрос: как влияют разные расположения слоев и их физико-механические характеристики, а также габаритные размеры сооружения на уровень его колебаний (усиление или ослабление) [1–4].

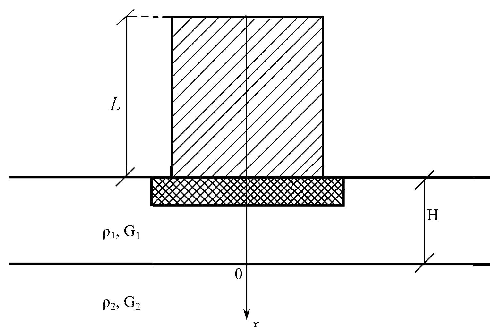


Рис. 1. Расчетная схема поставленной краевой задачи сейсмологии.

С целью упрощения задачи моделирования будем считать, что грунт под данной стройплощадкой состоит из двух слоев, как это показано на рис. 1.

Математическую модель сейсмических колебаний всей системы представляет следующая контактная краевая задача математической физики:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = 0, \quad -H < x < 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - a_2^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (2)$$

$$EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F(x)W) + \rho s \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

$$-(H + L) < x < -H,$$

$$U_1(x, t) = U_2(x, t), \quad x = 0, \quad (4)$$

$$G_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = G_2 \frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad x = 0, \quad (5)$$

$$m \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - G_1 s_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - EJ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0, \quad x = -H, \quad (6)$$

$$W(x, t) = U_1(x, t), \quad x = -H, \quad (7)$$

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = 0, \quad x = -H, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad x = -(H + L), \quad (9)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0, \quad x = -(H + L), \quad (10)$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{G_1}{\rho_1}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{G_2}{\rho_2}}, \quad (11)$$

где приняты следующие обозначения: t — время, x — вертикальная координата, $U_1(x, t)$ и $U_2(x, t)$ — величины горизонтальных сдвиговых колебаний в слоях, EJ — жесткость высотного сооружения при его поперечном колебании, $W(x, t)$ — величина поперечных упругих колебаний сооружения, G_1, ρ_1, G_2, ρ_2 — модули сдвига и плотности грунтов в слоях, s — площадь поперечного сечения сооружения, s_1 — площадь планового сечения фундаментного массива, ρ — объемная

плотность материала сооружения, схематизированного в виде вертикально стоящего бруса, m — масса фундаментного массива, H — мощность верхнего слоя, L — высота сооружения,

$$F(x) = g \cdot \rho \cdot s \cdot (H + L + x),$$

где $F(x)$ — вертикально направленная осевая сила, действующая на сооружение и обусловленная весом сооружения, g — ускорение силы тяжести.

Коэффициент дифференциального уравнения (3) зависит от координаты x . В связи с этим решение поставленной контактной краевой задачи (1)–(11) связано с большими математическими трудностями. Для упрощения пути аналитического решения осевую силу тяжести сооружения заменим на его среднее значение $\bar{F}$ в пределах $-(L + H) < x < -H$.

При условии, что система совершает гармонические колебания с круговой частотой ω , решения дифференциальных уравнений (1) и (2) имеют соответственно следующий вид:

$$U_1(x, t) = A_1 e^{i\omega(t + \frac{x}{a_1})} + B_1 e^{i\omega(t - \frac{x}{a_1})}, \quad (12)$$

$$U_2(x, t) = A_2 e^{i\omega(t + \frac{x}{a_2})} + B_2 e^{i\omega(t - \frac{x}{a_2})}, \quad (13)$$

где A_2 и A_1 — амплитуды падающих волн в нижнем и верхнем слоях соответственно, B_2 и B_1 — амплитуды отраженных волн в тех же средах.

В процессе удовлетворения граничных условий (4), (5) для постоянных A_1, B_1, A_2, B_2 получается следующая система алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \\ k(A_1 - B_1) = A_2 - B_2, \end{cases} \text{ где } k = \frac{\rho_1 a_1}{\rho_2 a_2} = \frac{G_1 a_2}{G_2 a_1}. \quad (14)$$

При гармоническом колебании сооружения

$$W(x, t) = V(x) e^{i\omega t}, \quad (15)$$

неизвестная функция $V(x)$ будет иметь следующий вид:

$$V(x) = A_3 \operatorname{sh} \lambda_1 x + B_3 \operatorname{ch} \lambda_1 x + A_4 \sin \lambda_2 x + B_4 \cos \lambda_2 x, \quad (16)$$

где

$$\lambda_1 = \sqrt{\sqrt{\frac{\bar{F}^2}{4E^2 J^2} + \rho s \omega^2} - \frac{\bar{F}}{2EJ}}; \quad \lambda_2 = \sqrt{\sqrt{\frac{\bar{F}^2}{4E^2 J^2} + \rho s \omega^2} + \frac{\bar{F}}{2EJ}}.$$

В процессе удовлетворения граничных условий (6)–(10) для постоянных коэффициентов A_3, B_3, A_4, B_4 получаются следующие алгебраические уравнения:

$$\begin{aligned} m\omega^2 \left(A_1 e^{-i\frac{\omega H}{a_1}} + B_1 e^{i\frac{\omega H}{a_1}} \right) + G_1 s_1 \frac{i\omega}{a_1} \left(A_1 e^{-i\frac{\omega H}{a_1}} - B_1 e^{i\frac{\omega H}{a_1}} \right) + \\ + EJ \left(\lambda_1^3 \operatorname{ch} \lambda_1 H \cdot A_3 - \lambda_1^3 \operatorname{sh} \lambda_1 H \cdot B_3 - \right. \\ \left. - \lambda_2^3 \cos \lambda_2 H \cdot A_4 - \lambda_2^3 \sin \lambda_2 H \cdot B_4 \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 e^{-i\frac{\omega H}{a_1}} + B_1 e^{i\frac{\omega H}{a_1}} = \\ = -A_3 \operatorname{sh} \lambda_1 H + B_3 \operatorname{ch} \lambda_1 H - A_4 \sin \lambda_2 H + B_4 \cos \lambda_2 H, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \lambda_2 (H + L) A_4 - \cos \lambda_2 (H + L) B_4 = \\ = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \operatorname{sh} \lambda_1 (H + L) \cdot A_3 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \operatorname{ch} \lambda_1 (H + L) \cdot B_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \lambda_2 (H + L) A_4 + \sin \lambda_2 (H + L) B_4 = \\ = \frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3} \operatorname{ch} \lambda_1 (H + L) A_3 - \frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3} \operatorname{sh} \lambda_1 (H + L) B_3, \end{aligned}$$

$$\lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_1 H \cdot A_3 - \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_1 H \cdot B_3 + \lambda_2 \cos \lambda_2 H \cdot A_4 + \lambda_2 \sin \lambda_2 H \cdot B_4 = 0. \quad (17)$$

В дальнейшем считается, что амплитуда падающей волны в нижнем слое A_2 — заданная величина.

В результате решения системы алгебраических уравнений (14) и (17) и подстановки полученных постоянных A_i и B_i , $i = 1, 2, 3, 4$ в выражения (15) и (16), затем выделения из комплексного выражения действительной части, для амплитуды колебания вершины сооружения получены следующие расчетные выражения:

$$\begin{aligned} \operatorname{Amp} W(x, t)|_{x=-(H+L)} = 2A_2 \frac{G_1 s_1 \frac{\omega}{a_1}}{\sqrt{k^2 \varphi_1^2 + \varphi_2^2}} \times \\ \times \left| \psi_1 \operatorname{sh} \lambda_1 (H + L) + \psi_2 \operatorname{ch} \lambda_1 (H + L) - (\psi_1 R_2 - \psi_2 R_1) \times \right. \\ \left. \times \sin \lambda_2 (H + L) + (\psi_1 R_4 - \psi_2 R_3) \cos \lambda_2 (H + L) \right|, \end{aligned}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= [\psi_1(d_2 - z_2 m \omega^2) + \psi_2(d_1 + z_1 m \omega^2)] \cos \frac{\omega H}{a_1} - \\
 &\quad - \left(\psi_1 z_2 G_1 s_1 \frac{\omega}{a_1} - \psi_2 z_1 G_1 s_1 \frac{\omega}{a_1} \right) \sin \frac{\omega H}{a_1}, \\
 \varphi_2 &= [(d_2 - z_2 m \omega^2) \psi_1 + (d_1 + z_1 m \omega^2) \psi_2] \cos \frac{\omega H}{a_1} - \\
 &\quad - (\psi_1 z_2 - \psi_2 z_1) G_1 s_1 \frac{\omega}{a_1} \sin \frac{\omega H}{a_1}, \\
 \psi_1 &= \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_1 H + \lambda_2 R_1 \cos \lambda_2 H + \lambda_2 R_3 \sin \lambda_2 H, \\
 \psi_2 &= -\lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_1 H + \lambda_2 R_2 \cos \lambda_2 H + \lambda_2 R_4 \sin \lambda_2 H, \\
 z_1 &= -\operatorname{sh} \lambda_1 H - R_1 \cdot \sin \lambda_2 H + R_3 \cdot \cos \lambda_2 H, \\
 z_2 &= \operatorname{ch} \lambda_1 H - R_2 \cdot \sin \lambda_2 H + R_4 \cdot \cos \lambda_2 H, \\
 d_1 &= EJ(\lambda_1^3 \operatorname{ch} \lambda_1 H - \lambda_2^3 R_1 \cos \lambda_2 H - \lambda_2^3 R_3 \sin \lambda_2 H), \\
 d_2 &= EJ(\lambda_1^3 \operatorname{sh} \lambda_1 H + \lambda_2^3 R_2 \cos \lambda_2 H + \lambda_2^3 R_4 \sin \lambda_2 H).
 \end{aligned}$$

По полученным формулам выполнены вычислительные эксперименты и тем самым установлены закономерности колебательного процесса вершины сооружения.

Эксперименты показали, что осевая сила $\bar{F}$ практически мало влияет на амплитуду колебания сооружения.

На рис. 2. представлены графики зависимости величины y от высоты сооружения L , физико-механических характеристик слоев грунта. Величина y представляет отношение амплитуды колебания вершины сооружения к амплитуде A_2 падающей сейсмической волны на нижнем слое грунта.

На рис. 3 и 4 представлены графики зависимости параметра y от частоты и периода сейсмической волны.

Вычислительные эксперименты показывают, что значение высоты сооружения, а также размеры поперечного профиля можно подобрать так, чтобы минимизировать влияние сейсмических колебаний строительной площадки.

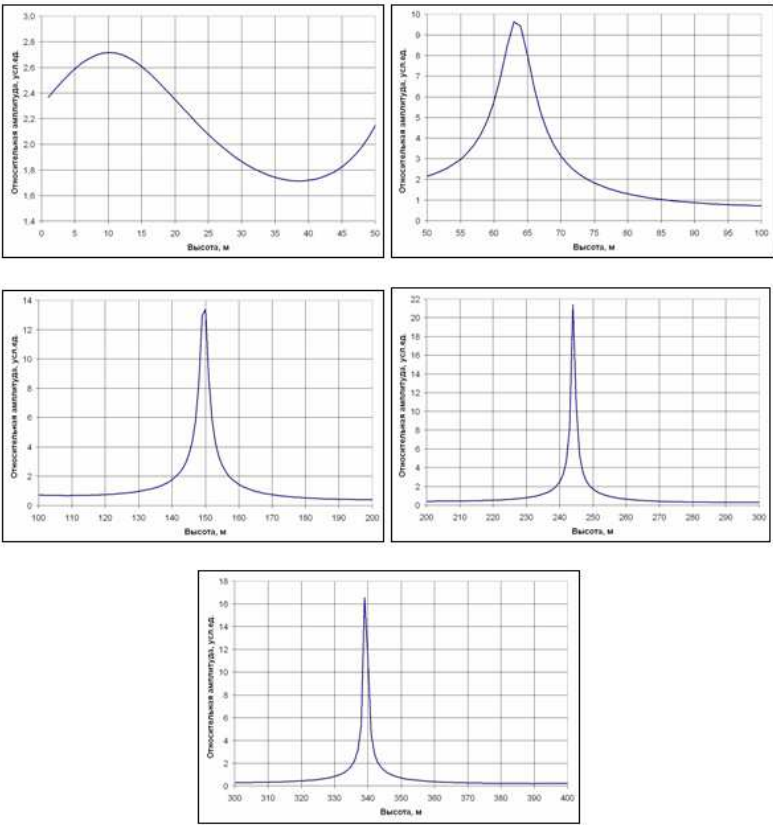


Рис. 2. Зависимость относительной амплитуды колебаний вершины сооружения от его высоты. Частота падающей сейсмической волны 2 Гц.

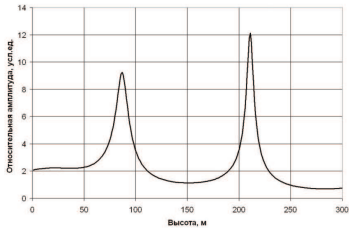


Рис. 3. Зависимость относительной амплитуды колебаний вершины сооружения от его высоты. Частота падающей сейсмической волны 1 Гц.

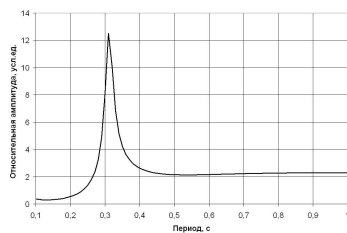


Рис. 4. Зависимость относительной амплитуды колебаний вершины сооружения от периода падающей сейсмической волны. Высота сооружения $L = 50$ м.

Литература

1. Ворович И. И., Бабешко В. А., Прякина О. Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах.—М., 1999.—246 с.
2. Заалишвили В. Б., Музаев И. Д., Туаева Ж. Д. Математическое моделирование сейсмических колебаний грунтовой толщи в основании застройки // Тр. междунар. научно-практической конференции «Опасные природные и техногенные геологические процессы на горных и предгорных территориях Северного Кавказа».—Владикавказ, 2007.—С. 290–298.
3. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.—М: Физматгиз, 1959.—439 с.
4. Хачиян Э. Е. Задача усиления или ослабления эффекта сейсмического воздействия на поверхности земли // Вестн. ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко «Исследования по теории сооружений».—М., 2009.—Т. 26, № 1.—С. 67–80.

Музаев Илларион Давидович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: muzaevid@mail.ru

MATHEMATICAL MODELING OF THE EFFECT OF GAIN OR ATTENUATION OF SEISMIC IMPACT ON THE HIGH-RISE BUILDING

Muzaev I. D.

The contact boundary problem of joint seismic vibrations of a system consisting of two soil layers, foundation and high-rise building is set and solved. The formulas for calculating the oscillations of the body structure amplitude are obtained.

Key words: contact boundary problem, shear waves, the stiffness of high-rise buildings, amplitude of the incident waves.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ ВИБРОКИПЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Н. С. Орлова

Исследовался процесс виброкипения гранулированного материала с использованием различных математических моделей (двухжидкостная модель на основе закона Дарси и гидродинамическая модель гранулярного газа). Полученные расчеты среднего значения объемной доли частиц в слое и степени расширения слоя позволили определить рекомендуемые режимы виброкипения, обеспечивающие наибольшую площадь поверхности контакта фаз.

Ключевые слова: режимы виброкипения, двухжидкостная модель, закон Дарси, гидродинамическая модель гранулярного газа, объемная доля частиц, степень расширения.

1. Введение

Виброкипящий слой гранулированных материалов очень часто используется при очистке газов, сушке и сепарировании зернового материала, а также в химической технологии, так как за счет увеличения площади контакта между газовой и твердой фазами значительно ускоряются процессы тепло- и массопереноса между газом и частицами [1–3]. Площадь контакта, в основном, характеризуется объемной долей газа, т. е. отношением объема газа между частицами к общему объему смеси газа с частицами. Поэтому для обеспечения наибольшей площади поверхности контакта фаз, важно исследовать влияние режимов виброкипения на изменение объемной доли газа (или объемной доли частиц), и, следовательно, на степень расширения виброкипящего слоя.

Для исследования режимов виброкипения использовались результаты расчетов, полученные с использованием двухжидкостной модели на основе закона Дарси и гидродинамической модели гранулярного газа. В предыдущих работах [4–7] было проведено подробное исследование каждой модели. В этих работах на основе результатов сравнения полученных численных расчетов с экспериментальными данными были определены области применения каждой модели, т. е.

для каждой модели был определен диапазон изменения входных параметров, в пределах которого модель качественно описывает эксперименты. В частности, двухжидкостная модель на основе закона Дарси описывает поведение виброкипящего слоя при использовании достаточно толстых слоев относительно мелких частиц (размером меньше 1 мм), т. е. при больших значениях отношения толщины слоя засыпки к характерному размеру частиц (больше 150–200). Гидродинамическую модель гранулярного газа, напротив, лучше использовать при моделировании виброкипящих слоев относительно крупных частиц (1 мм и больше) при небольших значениях отношения толщины слоя засыпки к характерному размеру частиц (меньше 150–200). В связи с этим двухжидкостная модель на основе закона Дарси использовалась для моделирования динамики достаточно толстых слоев относительно мелких частиц (диаметром меньше 1 мм) в процессе виброкипания, а гидродинамическая модель гранулярного газа – для моделирования относительно тонких слоев более крупных частиц (диаметром 1 мм и больше).

2. Результаты расчетов

На рис. 1 приведены результаты расчетов распределения объемной доли частиц (*a*) и давления газа (*b*) в виброкипящем слое частиц стекла (диаметром 0,13 мм) при частоте колебаний полки $f = 50$ Гц и амплитуде $A = 1,42$ мм, а на рис. 2 — расчеты при $A = 2,84$ мм. Толщина слоя засыпки равна $H = 35$ мм.

Кривая 1 на рис. 1, 2 — распределение в момент отрыва слоя частиц от полки, кривая 2 — распределение в момент столкновения слоя с полкой, кривая 3 — распределение объемной доли частиц в начальный момент времени. Расчеты получены с использованием двухжидкостной модели на основе закона Дарси.

Из рис. 1 и 2 видно, что при большем значении амплитуды ($A = 2,84$ мм) виброкипящий слой находится в более разрыхленном состоянии, в отличие от случая, когда амплитуда колебаний равна 1,42 мм. В последнем случае средняя часть виброкипящего слоя, размером примерно 14 мм (рис. 1 *a*), находится в достаточно плотном состоянии. При этом максимальное значение объемной доли частиц в этой зоне соответствует значению в плотноупакованном слое ($\alpha_{\text{max}} = 0,62$).

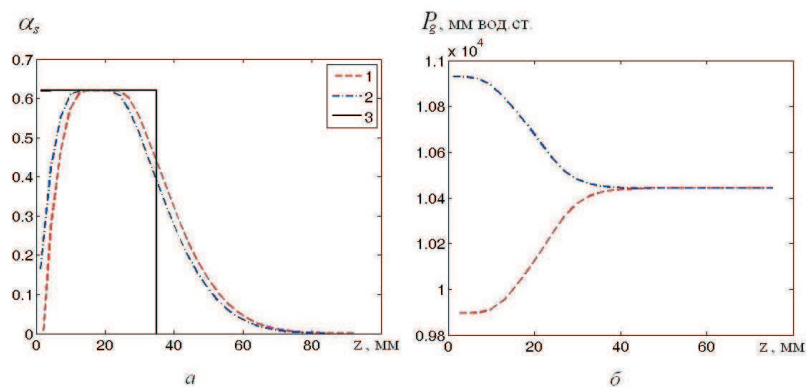


Рис. 1. а) Распределение объемной доли частиц; б) распределение давления газа по высоте виброкипящего слоя ($A = 1,42$ мм).

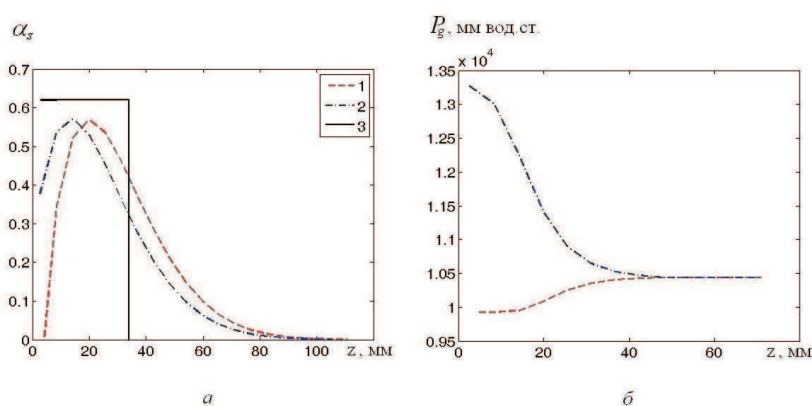


Рис. 2. а) Распределение объемной доли частиц; б) распределение давления газа по высоте виброкипящего слоя ($A = 2,84$ мм).

На рис. 3 а приведены расчеты толщины плотно упакованной зоны h_p виброкипящего слоя при $A = 1,42$ мм и при разных значениях частоты колебаний полки 20–200 Гц. На рис. 3 б для этого же случая приведены результаты расчетов максимального (в момент столкновения слоя с полкой) и минимального (в момент отрыва слоя частиц от полки) значений давления газа вблизи полки. Кривая 1 соответствует максимальным значениям, а кривая 2 — минимальным.

При этом на рис. 3 б представлено изменение разности давления газа вблизи полки и атмосферного давления в миллиметрах водяного столба в зависимости от частоты колебаний.

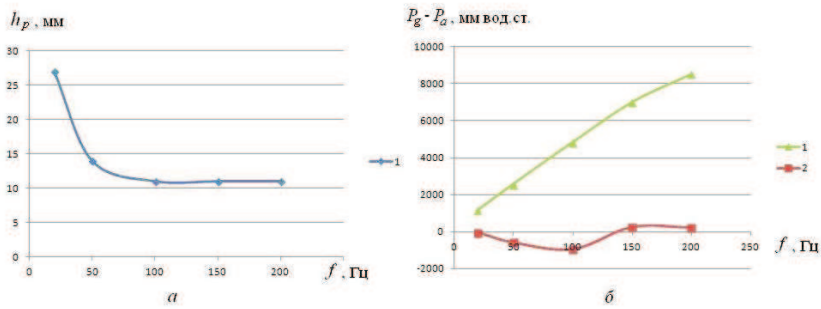


Рис. 3. а) Зависимость толщины плотно упакованной зоны виброкипящего слоя; б) максимальные и минимальные значения давления газа в зависимости от частоты колебаний.

Из рис. 3 а видно, что с увеличением частоты колебаний толщина плотноупакованной зоны в виброкипящем слое уменьшается и, начиная с $f = 100$ Гц, ее значение перестает меняться. Следовательно, при значениях частоты колебаний больше 100 Гц слой находится в более разрыхленном состоянии. Минимальные значения давления газа вблизи полки незначительно меняются с увеличением частоты колебаний, а максимальные значения растут с ее увеличением (рис. 3 б).

В таблице 1 приведены расчеты среднего значения объемной доли частиц в виброкипящем слое $\langle \alpha_s \rangle$ при разных значениях амплитуды A (1, 42–5, 68 мм) и частоты f (20–200 Гц) колебаний полки.

Таблица 1

f , Гц	20	50	100	150	200
$\langle \alpha_s \rangle$ ($A = 1,42$ мм)	0,53	0,41	0,38	0,36	0,36
$\langle \alpha_s \rangle$ ($A = 2,13$ мм)	0,44	0,36	0,36	0,35	0,35
$\langle \alpha_s \rangle$ ($A = 3,55$ мм)	0,36	0,26	0,24	0,24	0,24
$\langle \alpha_s \rangle$ ($A = 5,68$ мм)	0,25	0,24	0,2	0,17	0,17

Из таблицы 1 видно, что при частотах больше 100 Гц среднее значение объемной доли частиц в слое $\langle \alpha_s \rangle$ практически не меняет-

ся. С увеличением амплитуды значение $\langle \alpha_s \rangle$ уменьшается и растет степень расширения слоя, т. е. растет площадь поверхности контакта фаз, и слой частиц лучше разрыхляется. Следует отметить, что давление газа, соответствующее моменту столкновения слоя частиц с полкой, полученное при $A = 2,13$ – $5,68$ мм, имеет более высокие значения, чем при $A = 1,42$ мм. А минимальные значения, соответствующие моменту отрыва слоя частиц от полки, практически совпадают.

Следует обратить внимание, что при более высоких значениях амплитуды колебаний полки (начиная с $A = 2,13$ мм) в виброкипящем слое отсутствует плотно упакованная зона даже при относительно низких значениях частоты колебаний полки.

Следует также отметить, что время установления среднего значения объемной доли частиц в виброкипящем слое и распределения объемной доли частиц равно одной секунде после начала процесса виброкипения при любых значениях частоты колебаний. К этому моменту и далее кривые среднего по времени (за один период колебаний полки) распределения объемной доли частиц по высоте слоя практически не отличаются друг от друга. Поэтому на рисунках и в таблицах приведены кривые распределения объемной доли частиц и давления газа по высоте, а также средние значения объемной доли частиц при установившемся процессе виброкипения.

В литературе [8] приводятся значения объемной доли газа α_g в псевдооживленном, а также кипящем слое, которые изменяются в пределах 0,55–0,75, соответственно значения объемной доли частиц α_s ($\alpha_s = 1 - \alpha_g$) изменяются от 0,25 до 0,45. Переходное состояние от кипения к пневмотранспорту ($\alpha_g = 0,9$ и выше) иногда называют разбавленной фазой [8]. При этом наблюдается унос частиц из слоя. Очень часто (например, в газоочистительных аппаратах, аппаратах для сушки различных материалов и т.д.) процесс виброкипения сопровождается дополнительным продуванием потоком газа. Поэтому при определении рекомендуемых режимов виброкипения важно учитывать эти значения объемной доли газа (или объемной доли частиц). В действительности, распределение объемной доли частиц в кипящем слое по высоте неравномерное, поэтому в расчетах целесообразно использовать среднее значение объемной доли частиц $\langle \alpha_s \rangle$ в слое. Таким образом, рекомендуемые значения $\langle \alpha_s \rangle$ изменяются в диапазоне от 0,25 до 0,45.

Следует обратить внимание на то, что во многих случаях при определенных значениях амплитуды и частоты колебаний полки средние значения $\langle \alpha_s \rangle$ удовлетворяют приведенному условию. При этом не во всех случаях слой разрыхляется в достаточной мере, чтобы обеспечить наибольшую площадь поверхности контакта фаз. А в некоторых случаях наблюдается плотно упакованная зона в средней части слоя даже при высоких значениях частоты колебаний (рис. 3). Поэтому при определении рекомендуемых режимов виброкипения также важно учитывать степень расширения слоя. Чем больше степень расширения, тем более равномерно распределен слой по высоте, что обеспечивает наибольшую площадь поверхности контакта фаз.

На рис. 4 представлены результаты отношения максимальной высоты виброкипящего слоя частиц стекла диаметром 0,13 мм к начальной высоте слоя 35 мм ($H_{\max}/H$) в зависимости от частоты колебаний полки (f) при разных значениях амплитуды колебаний A . Кривая 1 — расчеты при $A = 1,42$ мм; кривая 2 — при $A = 2,13$ мм; кривая 3 — при $A = 3,55$ мм; кривая 4 — при $A = 5,68$ мм.

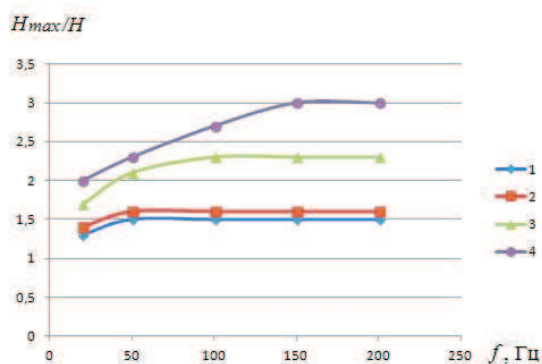


Рис. 4. Зависимость степени расширения виброкипящего слоя от амплитуды и частоты колебаний полки.

Из рис. 4 видно, что с увеличением амплитуды колебаний полки растет степень расширения виброкипящего слоя (т. е. отношение максимальной высоты виброкипящего слоя к его начальной высоте). Также видно, что с увеличением частоты колебаний при фиксированном значении амплитуды значение степени расширения слоя практически не меняется.

Следует отметить, что в результате исследования двухжидкостной модели виброкипящего слоя на основе закона Дарси была определена ее область применения. Модель лучше использовать для описания динамики достаточно толстых слоев относительно мелких частиц, т. е. когда отношение толщины слоя засыпки к характерному размеру частиц H/d_p принимает значения больше 150–200. Поэтому были также проведены расчеты по распределению объемной доли частиц и степени расширения виброкипящего слоя при разных значениях толщины слоя засыпки. Результаты расчетов показали, что относительно тонкий слой в процессе виброкипения находится в более разрыхленном состоянии, особенно при более высоких значениях амплитуды колебаний, когда максимальное значение объемной доли частиц в виброкипящем слое меньше ее значения при плотной упаковке слоя. Поэтому в работе представлены результаты расчетов для слоя с толщиной засыпки 35 мм, когда отношение толщины засыпки к размеру частиц H/d_p составляет примерно 269.

Если рассматривать влияние амплитуды колебаний полки на расширение слоя, то оказывается, что даже при относительно невысоких значениях частоты колебаний полки, слой находится в более разрыхленном состоянии при большем значении амплитуды колебаний (2,13–5,68 мм), в отличие от случая более низких значений амплитуды (1,42 мм).

Далее представлены результаты расчетов, полученные с использованием гидродинамической модели гранулярного газа для процесса виброкипения, которую лучше использовать для описания динамики относительно тонких слоев более крупных частиц, т. е. когда отношение H/d_p меньше значений 150–200. Расчеты проводились для относительно тонких слоев достаточно крупных частиц доломита (средний диаметр равен 1,75 мм) при различных значениях частоты (20–200 Гц) и амплитуды (1,42–5,68 мм) колебаний полки. Как и ожидалось, чем больше отношение толщины засыпки к диаметру, тем меньше степень расширения слоя и больше среднее значение объемной доли частиц в слое, соответственно, виброкипящий слой находится в более плотном состоянии.

Как упоминалось ранее, процесс виброкипения очень часто сопровождается дополнительным продуванием слоя потоком газа. Исходя из этого, важно учитывать отношение толщины засыпки слоя к диаметру частиц, чтобы обеспечить необходимую площадь поверхности контакта фаз. При виброкипании относительно тонких слоев

более крупных частиц диаметром 1 мм и больше, т. е. при низких значениях отношения толщины засыпки к диаметру частиц H/d_p (меньше 30), среднее значение объемной доли частиц в слое меньше 0,2, что может привести к уносу частиц из слоя при дополнительном продувании слоя потоком газа. С другой стороны, при относительно больших значениях отношения H/d_p (больше 60) слой находится в достаточно плотном состоянии, что приводит к уменьшению поверхности контакта фаз. Поэтому чтобы исследовать влияние режимов виброкипения на динамику слоя на основе расчетов по гидродинамической модели гранулярного газа, лучше использовать средние значения отношения H/d_p (от 30 до 60). Далее представлены результаты расчетов, которые производились для слоя частиц доломита с толщиной засыпки $H = 50$ мм.

В таблице 2 представлены результаты расчетов среднего значения объемной доли частиц $\langle \alpha_s \rangle$ при разных значениях амплитуды (2, 13–5, 68 мм) и частоты (20–200 Гц) колебаний полки.

Таблица 2

f , Гц	20	50	100	150	200
$\langle \alpha_s \rangle$ ($A = 2, 13$ мм)	0,42	0,33	0,28	0,23	0,22
$\langle \alpha_s \rangle$ ($A = 3, 55$ мм)	0,3	0,26	0,21	0,2	0,2
$\langle \alpha_s \rangle$ ($A = 5, 68$ мм)	0,26	0,22	0,16	0,15	0,14

На рис. 5 приведены кривые зависимости степени расширения виброкипящего слоя (отношения максимальной высоты слоя к высоте засыпки) от частоты колебаний полки при разных значениях амплитуды колебаний.

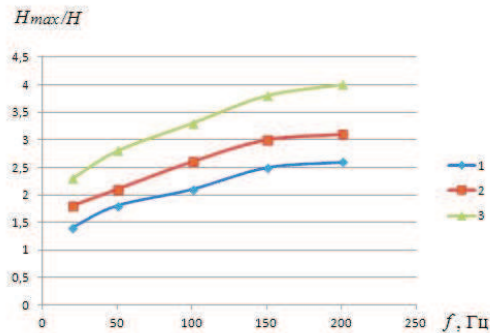


Рис. 5. Зависимость степени расширения виброкипящего слоя от амплитуды и частоты колебаний полки.

Кривая 1 на рис. 5 соответствует расчетам степени расширения слоя при амплитуде колебаний полки $A = 2,13$ мм; кривая 2 — расчетам при $A = 3,55$ мм; кривая 3 — расчетам при $A = 5,68$ мм.

Очевидно, что степень расширения слоя зависит, в основном, от амплитуды колебаний полки, что не противоречит экспериментам в работе [9]. Наблюдается также зависимость расширения слоя от частоты колебаний. Так, при относительно небольших значениях частоты (20–50 Гц) степень расширения виброкипящего слоя гораздо меньше, чем при больших значениях (100–200 Гц).

3. Заключение

На основе полученных результатов с использованием двух разных моделей (двухжидкостная модель на основе закона Дарси и гидродинамическая модель гранулярного газа) можно определить рекомендуемые (с точки зрения обеспечения наибольшей площади поверхности контакта фаз) режимы виброкипения. Как видно из рисунков, с увеличением амплитуды и частоты колебаний полки растет степень расширения слоя и, соответственно, растет площадь поверхности контакта фаз. Но при относительно больших значениях частоты колебаний полки (100–200 Гц) среднее значение объемной доли частиц в виброкипящем слое имеет низкие значения, что увеличивает вероятность уноса частиц из слоя при дополнительном продувании слоя газовым потоком. Поэтому рекомендуемыми значениями амплитуды и частоты колебаний полки являются значения $A = 3–6$ мм и $f = 20–50$ Гц, соответственно.

Литература

1. Гельперин Н. И., Айнштейн В. Г., Кваша В. Б. Основы техники псевдооживления.—М.: Химия, 1967.—664 с.
2. Членов В. А., Михайлов Н. В. Сушка сыпучих материалов в виброкипящем слое.—М.: Стройиздат, 1967.—224 с.
3. Членов В. А., Михайлов Н. В. Виброкипящий слой.—М.: Наука, 1972.—343 с.
4. Орлова Н. С. Тестирование двух моделей виброоживленного слоя // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Технические науки.—2012.—№ 2.—С. 42–45.
5. Орлова Н. С. Сравнение расчетов по двухжидкостной модели виброоживленного слоя с экспериментальными данными // Инженерно-физический журн.—2012.—Т. 85, № 6.—С. 1202–1207.
6. Орлова Н. С., Ахунжанов Р. К. Сравнение применения двухжидкостной модели и модели гранулярного газа для описания процесса виброоживления // Нелинейный мир.—2012.—№ 11.—С. 875–878.

7. Орлова Н. С. Исследование гидродинамической модели гранулярного газа для процесса виброкипения // Тр. XVI Междунар. симп. «Методы дискретных особенностей в задачах мат. физики-2013».—Харьков-Херсон: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2013.—С. 306–309.
8. Лыков М. В. Сушка в химической промышленности.—М.: Химия, 1970.—432 с.
9. Daleffe R. V., Ferreira M. C., Freire J. T. Analysis of the effect of particle size distribution on the fluid dynamic behavior and segregation patterns of fluidized, vibrated and vibrofluidized beds // Asia-Pac. J. Chem. Eng.—2007.—Vol. 2.—P. 3–11.

Орлова Наталья Сергеевна

Южный математический институт ВНЦ РАН и PCO-A

РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: norlova.umi.vnc@gmail.com

INVESTIGATION OF VIBROFLUIDIZATION MODES USING MATHEMATICAL MODELING

Orlova N. S.

The vibrofluidization process of granular material was investigated using mathematical models (two-fluid model based on Darcy law and hydrodynamic model of granular gas). The calculated average particle volume fraction in the bed and degree of bed expansion allowed to determine the recommended modes of vibrofluidization, which provide the largest surface area of contact between the phases.

Key words: modes of vibrofluidization, two-fluid model, Darcy law, hydrodynamic granular gas model, the particle volume fraction, degree of expansion.

Секция III

Современные проблемы математического образования

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ НАУЧНОГО СТИЛЯ МЫШЛЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ

В. С. Абатурова

В статье рассматривается актуальная проблема современного школьного математического образования — поиск средств формирования научного стиля мышления школьников в ходе обучения математике, и одно из средств решения этой проблемы — разработка технологии математического моделирования в обучении решению задач практико-ориентированного и междисциплинарного характера, отражающей механизм решения научных и практических задач научным методом.

Ключевые слова: научный стиль мышления, научный метод, математическое моделирование, задачи практико-ориентированного и междисциплинарного характера.

Введение

Формирование в современном мире шестого технологического уклада, характеризующегося развитием нанотехнологий, биотехнологий и систем искусственного интеллекта, предъявляет к школьному образованию новые требования.

Как известно, смена технологических укладов всегда сопровождается информационными революциями, происходящими вследствие глобальных изменений в обработке информации (появление письменности 5 тысяч лет назад, книгопечатания в 15 веке, появление компьютеров и распространение Интернета в конце 20-го — начале 21 веков). В результате информационных революций меняются институты общества, претерпевает качественные изменения мышление человека, совершенствуются виды его познавательной деятельности.

Возрастающая роль в развитии современной экономики отводится новым знаниям, полученным на основе достижений фундаментальной и прикладной науки, позволяющим создавать инновационные продукты и технологии. Самым ценным ресурсом государства

признается человеческий ресурс, способный формировать новые знания, проектировать новые технологии, участвовать в решении государственных практических задач, отличных по содержанию, степени обобщенности, стратегическому уровню и технологическому решению.

В современном информационном обществе со стремительно развивающимися и внедренными практически во все сферы человеческой деятельности ИТ-технологиями, включая Интернет как новую виртуальную среду и глобальный источник информации, остро ощущается необходимость осуществления человеком индивидуальной познавательной деятельности по поиску, восприятию и отбору достоверной и адекватной информации об объекте познания, а также анализу, синтезу, обработке и преобразованию информации. Полученные знания и умения в сочетании с ментальными инструментами познавательной деятельности человека позволяют ему управлять своей деятельностью по решению возникающих задач, готовить и принимать собственные решения, от оптимальности которых зависит его успех в жизни и обществе.

1. Научный стиль мышления. В наше время интерес у государства к сближению науки и общества возрастает, в связи с чем в стране проводится большое число различных общественных мероприятий по популяризации науки — фестивали науки и технологий, научные и научно-технические выставки, циклы научно-популярных лекций ученых и т. п., основной целью которых является распространение научных знаний в доступной форме для широкого круга людей. Эта деятельность рассматривается также как способ привлечения и стимулирования молодежи и школьников к занятиям исследовательской деятельностью, основанной на научном методе познания.

Тем не менее нетрудно заметить, что выпускники школ, у которых должны быть сформированы в ходе обучения разным учебным предметам представления о научной картине мира и о научном методе познания, часто не умеют анализировать, синтезировать, сравнивать, оценивать жизненную ситуацию, в которой они оказались, в связи с чем готовы скорее принять на веру любой совет и мнение экстрасенсов, гадалок, магов и т. п., чем воспользоваться исследовательским подходом к решению задач. Это говорит о том, что у них не сформированы устойчивые представления о научном методе

познания, а опыт применения научного метода для решения задач недостаточен.

Таким образом, проблема развития у современного человека научного подхода к решению возникающих в жизни задач, т. е. научного стиля мышления, актуальна для школьного образования.

Принцип научности в обучении, введенный в педагогику М. Н. Скаткиным в 1952 г., распространялся в основном на содержание школьного предмета (для формирования человека коммунистического общества в те годы требовалось научное содержание школьного образования). В соответствии с определением, данным в Педагогическом словаре [1], принцип научности в обучении — это «зависимость целей и содержания обучения от потребностей общества на данном этапе исторического развития, соответствие научных трактовок изучаемых явлений реальным учебно-познавательным возможностям учащихся».

Из этого определения видно, что научным является только учебный курс, в котором учащимся для усвоения предлагаются проверенные научные факты, известные законы и признанные теории. Современный этап развития науки, датируемый началом 70-х годов XX века и названный В. С. Стёпиным *постнеклассической наукой*, характеризуется идеей синтеза научных знаний для построения общенаучной картины мира, а основным принципом этой концепции является принцип универсального эволюционизма, объединяющий в единое целое идеи системного и эволюционного подходов. Одним из характерных примеров постнеклассической науки является синергетика, изучающая процессы самоорганизации. Междисциплинарность в научном исследовании становится одним из проявлений постнеклассической науки.

Все эти изменения в философии науки неизбежно отражаются на школьном образовании как в содержательной, так и процессуальной (деятельностной) части. Подтверждением этому является введение в школьное образование проектно-исследовательской деятельности как вида учебно-познавательной деятельности учащихся, результаты которой могут быть представлены на школьных научных конференциях и конкурсах исследовательских работ разного уровня (от школьного до международного). Анализ тем школьных исследовательских работ показывает, что некоторые школьники (вместе со своими научными руководителями) выбирают для своих исследований в области физико-математического и естественно-научного

направления современные темы, связанные с синергетикой, математическим моделированием, фракталами, бифуркацией и др. Таким образом, содержание школьного образования обнаруживает объективную тенденцию к отражению современной естественно-научной картины мира.

Осуществление школьниками учебно-исследовательской деятельности (в тех случаях, когда эта деятельность проводится в соответствии с технологией научного метода познания) способствует формированию устойчивых представлений о применении научного метода познания в решении разных — научных и практических задач, а также развитию особого стиля мышления — научного. Это означает, что учебно-исследовательская деятельность учащихся выступает основой для формирования научного стиля мышления школьников.

Подчеркнем, что термин «стиль мышления» впервые как понятие рассматривается в философии в XX веке (в аспекте стиля научного мышления). Так, И. Б. Новик, анализируя содержательную сторону понятия «стиль мышления», пишет: «Стиль мышления, фиксируя внимание на устойчивых на данном историческом этапе всеобщих тенденциях познавательного процесса, раскрывает объективную природу научного творчества. И в то же время подчеркивает роль личностных моментов творчества» [2, с. 6]. Еще одно определение «стиля мышления» как «исторически обусловленной системы общепринятых методологических нормативов и философских принципов, которыми руководствуются исследователи в данную эпоху», находим у Л. А. Микешиной [3, с. 26].

А. А. Алексеев и Л. А. Громова в своей книге [4] пишут: «под стилем мышления мы понимаем открытую систему интеллектуальных стратегий, приемов, навыков и операций, к которой личность предрасположена в силу своих индивидуальных особенностей (от системы ценностей и мотивации до характерологических свойств). Стили мышления начинают складываться в детстве и развиваются в течение всей жизни человека, сообразно опыту и метаморфозам личности».

Адаптируя характеристики «стиля мышления» этих и других авторов к школьникам, мы считаем возможным ввести понятие *«научный стиль мышления школьников»*, характеризуя его как *систему интеллектуальных учебно-исследовательских стратегий, приемов и операций, основанную на предрасположенности личности в силу своих индивидуальных особенностей*.

Подчеркнем, что учебно-исследовательская деятельность в настоящее время не является основным видом учебной деятельности учащихся основной и старшей школы. Опыт работы со школьниками показывает, что эффективность учебно-исследовательской деятельности школьников возможна лишь тогда, когда эта деятельность достаточно протяжена по времени (от полугода до двух лет) и осуществляется в ходе дополнительного обучения во внеурочное время — на кружках, факультативах и в индивидуальной работе. Поэтому не менее важно, чтобы исследовательский подход в обучении присутствовал в ходе всей учебно-познавательной деятельности учащихся. Эта проблема является важной процессуальной проблемой для современного школьного образования, решение которой позволит реализовать принцип научности в обучении в двух направлениях: в содержательном и процессуальном.

Для формирования у школьников устойчивых представлений о научном методе познания и разработки методики и технологии применения научного метода в учебно-познавательной деятельности школьников необходимо ввести «технологичное» определение научного метода, которое показывает его процессуальную сторону.

Будем понимать под *научным методом* циклический алгоритмический процесс решения научной задачи, состоящий из следующих этапов:

1. Постановка задачи.
2. Наблюдения, эксперименты.
3. Анализ результатов, поиск закономерностей.
4. Выдвижение гипотезы, теории.
5. Проверка гипотезы, выводы.
6. Принятие гипотезы в случае ее подтверждения (задача решена) или непринятие гипотезы и возвращение ко второму этапу алгоритма (продолжение решения задачи).

На наш взгляд, это определение можно взять за основу разработки теории и методики применения научного метода при обучении школьников решению задач практико-ориентированного и междисциплинарного характера и выявления критериев и уровней сформированности научного стиля мышления школьников в разных предметных областях

2. Математическое моделирование в обучении математике. Возникает вопрос: как реализовать описанные выше положения в ходе массового школьного обучения математике, включая тех уча-

щихся, кто не участвует в учебно-исследовательской деятельности, а изучает математику только на уроках в соответствии с учебными программами?

Анализ действующих Федеральных государственных образовательных стандартов основного (общего) и среднего (полного) образования, показал, что в числе основных результатов освоения школьной программы по математике у выпускников должны присутствовать:

по окончании 9 класса —

- «формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;
- развитие умений моделировать реальные ситуации на языке алгебры и геометрии, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры и геометрии, интерпретировать полученный результат;
- развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах» [5].

по окончании 11 класса —

- «сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;
- сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления;
- применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием» [6].

Таким образом, в Стандарте подчеркивается особая роль математики в современной цивилизации и фактически обозначается проблема формирования у школьников представлений о научном методе познания средствами математики и о математическом моделировании как о методе решения задач практико-ориентированного и междисциплинарного характера.

Как известно, решение научных задач средствами математики в разных областях знаний связано с математическим моделированием — одним из научных методов познания.

Именно умение применять математическое моделирование к решению практических задач в разных областях знаний позволило обществу добиться значительных успехов в биологии и химии, экологии, экономике и других науках. Благодаря проникновению математики в различные науки и сферы деятельности человека, были разработаны новые научные направления, такие как математическая экономика, математическая физика, математическая статистика, математическая биология, математическая экология, математическая психология.

Академики А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, описывая суть методологии, отмечали, что изучение объекта с помощью математического моделирования можно представить в виде схемы — «модель — алгоритм — программа». При этом под «моделью» ими понималось уравнение или система уравнений, полученных в ходе изучения законов природы.

Под *методом математического моделирования в обучении математике*, будем понимать процесс построения, исследования и интерпретации математических моделей, возникающих при решении задач практико-ориентированного и междисциплинарного характера.

В предыдущих наших исследованиях, обобщенных в [7], метод математического моделирования в обучении математике был исследован в аспекте его применения для формирования и развития *познавательной самостоятельности школьников*, которая определена нами как качество личности, основанное на собственной познавательной активности и устойчиво проявляющееся в способности учащихся вести целенаправленную познавательную деятельность по приобретению, применению и преобразованию знаний и учебных действий.

На основе концепции фундирования опыта личности в обучении математике и технологии наглядного моделирования, разработанных в научных школах Е. И. Смирнова и В. Д. Шадрикова [8], нами были построены и обоснованы дидактическая модель и методика формирования познавательной самостоятельности учащихся профильных классов экономической направленности средствами математического моделирования реальных экономических и произ-

водственных процессов, описываемых линейными моделями.

В ходе проведенных нами исследований были выявлены следующие методические особенности, направленные на формирование познавательной самостоятельности учащихся.

1. Проектирование учебного материала элективного курса в виде дидактического модуля, построенного в соответствии с технологией наглядного моделирования и реализации комплекса мотивационно-прикладных задач на основе учета особенностей экономического мышления.

2. Актуализация содержания и структуры теоретического, практического, деятельностного и прикладного модулей, универсальная характеристика и спецификация содержания в системе блоков: целеполагания, актуализации знаний, проблемного блока, блока исторического материала, базовых знаний, углубления знаний, обобщения знаний, применения знаний, блока контроля и коррекции знаний, исследовательского блока.

3. Целостность и технологичность использования в обучении математике репродуктивной, частично-поисковой и продуктивной (проектно-исследовательской) учебно-познавательной деятельности учащихся в контексте математического моделирования.

4. Проектирование и применение в обучении математике комплекса спиралей фундирования базовых учебных элементов в структуре дидактического модуля (знаний и универсальных учебных действий).

5. Проектирование и реализация в обучении математике циклов учебных задач и упражнений на формирование универсальных знаково-символических действий моделирования и преобразования модели.

6. Создание педагогических условий для повышения мотивации школьников к ведению проектно-исследовательской деятельности (создание учащимися проектных и исследовательских работ, субъективно новых сюжетных задач по каждой теме дидактического модуля).

Были выявлены и обоснованы педагогические условия формирования познавательной самостоятельности учащихся профильных классов экономической направленности в ходе обучения математике, в числе которых следующие методические условия:

- включение элементов математического моделирования в содержание, формы и средства реализации когнитивных процессов и ре-

зультатов освоения элективного курса по математике «Математическое моделирование — школьникам. Линейные модели»;

- расширение и актуализация межпредметных связей математики с экономикой и информатикой на основе интеграции знаний и универсальных учебных действий.

В ходе исследования был составлен комплекс мотивационно-прикладных задач элективного курса по математике, которые выполняют следующие функции в учебном процессе: *вводно-мотивационную функцию* — возможность менять мотивацию учащихся в учебно-познавательной деятельности от внешней к внутренней (интериоризация мотивации); *иллюстративную и конкретизирующую функции* — возможность иллюстрировать (визуализировать) и конкретизировать математические понятия, отражающие реальные явления и процессы и математические закономерности; функцию *формирования учебных умений и универсальных учебных действий* — возможность формирования определенных учебных умений и универсальных учебных действий в процессе решения специально подобранной системы мотивационно-прикладных задач; *контрольно-оценочную функцию* — возможность внешнего контроля за уровнем овладения школьниками учебным материалом с помощью специально подобранной системы мотивационно-прикладных задач для самостоятельного решения.

Под *мотивационно-прикладной задачей* нами понимается сюжетная прикладная задача, направленная на повышение мотивации учения, описывающая реальные процессы в природе, обществе и производстве и решаемая математическими средствами.

Нами предложен алгоритм решения таких задач, созданный на основе адаптации метода математического моделирования при решении реальных научных задач:

- I этап — постановка проблемы (работа по созданию предмодели);
- II этап — анализ данных задачи, поиск закономерностей;
- III этап — формализация проблемы, построение модели;
- IV этап — внутримодельное решение;
- V этап — интерпретация модели;
- VI этап — проверка адекватности модели;
- VII этап — чувствительность модели.

3. Формирование научного стиля мышления школьников средствами математического моделирования в ходе обучения математике. Представленный выше циклический алгоритми-

ческий процесс решения мотивационно-прикладных задач методом математического моделирования полностью соответствует алгоритму решения задач научным методом. Действительно сопоставим этапы данного алгоритма и алгоритма применения к решению задач научным методом (табл. 1).

Таблица 1

Этапы	Алгоритм метода математического моделирования при решении задач	Алгоритм научного метода решения задач
1	Постановка проблемы (работа по созданию предмодели)	Постановка задачи
2	Анализ данных задачи, поиск закономерностей	Наблюдения, эксперименты; анализ результатов, поиск закономерностей
3	Формализация проблемы, построение модели	Выдвижение гипотезы
4	Внутримodelьное решение	Построение теории
5	Интерпретация модели	Проверка гипотезы, выводы
6	Проверка адекватности модели	Проверка гипотезы, выводы
7	Чувствительность модели (построение модифицированной предмодели)	Принятие гипотезы, в случае ее подтверждения (задача решена) или непринятие гипотезы и возвращение ко второму этапу алгоритма (продолжение решения задачи)

Использование при обучении решению мотивационно-прикладных задач метода математического моделирования способствовало также развитию обобщенных умений и универсальных учебных действий:

- *личностных* — профессиональное самоопределение и действие смыслообразования;
- *регулятивных* — оценка и самооценка, саморегуляция;
- *познавательных: общеучебных* — поиск и выделение необходимой информации; применение методов информационного поиска;

ка, в том числе с помощью компьютерных средств, выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий; определение основной и второстепенной информации; *знаково-символических* — наглядное моделирование, преобразование модели; *логических* — сравнение, опознание, анализ, синтез, обобщение, доказательство, установление аналогий, общий прием решения задач;

- *коммуникативных* — планирование учебного сотрудничества, постановка вопросов и обмен информацией; умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли на основе социальной рефлексии.

Полученные в ходе исследования результаты станут базой для изучения вопроса формирования научного стиля мышления школьников средствами метода математического моделирования в ходе обучения математике.

Заключение

Итак, разработка теории и методики формирования научного стиля мышления школьников средствами математического моделирования в обучении математике предполагает решение следующих задач обучения математике учащихся:

- 1) формирование у учащихся устойчивого представления о научном методе познания в ходе выполнения ими учебно-познавательной деятельности по решению задач практико-ориентированного и междисциплинарного характера;

- 2) формирование у учащихся интеллектуальных умений строить простейшие математические модели реальных ситуаций и процессов (средствами школьного курса математики), исследовать и интерпретировать полученные результаты, преобразовывать и создавать на их основе усложненные математические модели;

- 3) развитие у учащихся интеллектуальных умений по применению технологии научного метода к решению задач практико-ориентированного и междисциплинарного характера: умение ставить (формулировать) задачу, умение наблюдать и проводить эксперимент, умение анализировать, умение синтезировать, умение выдвигать гипотезы и теории, умение проверять гипотезы, умение делать выводы.

Литература

1. Педагогический энциклопедический словарь.—М.: Большая Российская энциклопедия, 2002.
2. Новик И. Б. Системный стиль мышления (Особенности познания и управления в сложных системах.—М.: Знание, 1986.—64 с.—(Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Философия», № 1).
3. Микешина Л. А. Стиль и метод научного познания // Проблемы методологии и научного творчества.—Л.: Изд. Ленинградского ун-та, 1977.—С. 26–32.
4. Алексеев А. А. Поймите меня правильно / Под ред. А. А. Алексеев, Л. А. Громова.—СПб, 1993.—153 с.
5. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования.—С. 13–14.—URL: <http://standart.edu.ru/attachment.aspx?id=370>.
6. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования.—С. 14–15.—URL: <http://standart.edu.ru/attachment.aspx?id=457>.
7. Абатурова В. С. Математическое моделирование в обучении математике.—LAP Lambert Academic Publ. GmbH & Co., 2012.—176 с.
8. Смирнов Е. И. Фундирование опыта личности в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога: монография.—Ярославль, 2012.—646 с.

АБАТУРОВА ВЕРА СЕРГЕЕВНА
Южный математический институт ВНИЦ РАН и РСО-А
РОССИЯ, индекс, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: veronika-abaturova@yandex.ru

MATHEMATICAL MODELLING IN TEACHING MATHEMATICS AS A WAY OF FORMING OF THE SCIENTIFIC STYLE OF THINKING OF SCHOOLCHILDREN

Abaturova V. S.

The article considers an actual problem of modern school mathematical education, namely: the search of means of forming of the scientific style of thinking of schoolchildren in the process of teaching mathematics and one of ways of solving this problem, that is the creation of technology of mathematical modelling in teaching solution of applied tasks, reflecting the way of solution of real problems by a scientific method.

Key words: the scientific style of thinking, mathematical modelling, applied problems.

О ЗАРОЖДЕНИИ ПРИНЦИПА ИСТОРИЗМА В РОССИЙСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Ю. А. Дробышев

В статье представлен опыт использования российскими математиками и методистами элементов истории математики в обучении учащихся. Проанализирован период с XVIII по начало XX века. Выделены основные этапы использования принципа историзма и представлены их характеристики.

Ключевые слова: обучение математике, принцип историзма, историко-генетический метод, элементы истории математики.

Российское математическое образование за многовековую историю накопило большое методическое наследие. Изучение его, с одной стороны, позволяет лучше осознать историю отечественного математического образования и на этой основе формировать будущему учителю свой индивидуальный стиль преподавания, с другой стороны — понимать в каком направлении оно будет развиваться в будущем.

Одна из проблем, которая в настоящее время требует решения в связи с введением федерального государственного образовательного стандарта, связана с тем, что изучение предметной области «Математика» должно обеспечить:

- формирование представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математической науки;
- формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

Ее решение невозможно без использования принципа историзма и историко-генетического метода. В связи с этим есть смысл обратиться к опыту русской математической школы, который она накопила в первые два столетия своего существования.

Анализ учебников математики, используемых в русской школе, работ ученых Т. К. Авдеева, Ю. М. Колягин, Т. С. Полякова, В. Е. Пырков, Ю. В. Романов, О. А. Саввина, О. В. Тарасова, А. Т. Хохлов и др., занимающихся вопросами истории развития

математического образования, позволил в дореволюционном периоде развития отечественного математического образования выделить три различные по продолжительности этапа, характеризующие решение проблемы использования элементов истории математики при ее обучении.

Характерной особенностью первого этапа (первая половина XVIII в.) является то, что обращение к истории науки чаще всего обуславливалось требованиями развития самой науки и дидактико-просветительскими целями.

О роли элементов историзма в это время чаще всего говорили в стенах Академии наук М. В. Ломоносов, Г. Б. Бильфингер, Я. Герман, С. Е. Гурьев, С. К. Котельников, С. Я. Румовский и др. Так, Я. Герман в речи на втором торжественном заседании Академии наук указал на связь задач истории науки с интересами дальнейшего развития научных знаний и отметил, что «каждому академику подобает владеть историческим знанием искусства для распознавания природы и качества того, чем уже располагает его искусство, дабы не случилось ему впасть в такую несообразность, что он выдавал бы нам за новое нечто такое, что уже давно считалось известным, и действовал бы сам, без всякого прибытка для своего искусства или науки».

Полную характеристику дореволюционных учебников математики русской школы с позиций введения в них элементов историзма выполнил А. Т. Хохлов [13]. Особенностью использования элементов историзма в этот период было то, что они достаточно широко были представлены в учебниках, имевших энциклопедический характер. Кроме того, авторы учебников чаще всего были учителями и создавали их с учетом собственного практического опыта. Они использовали в преподавании те исторические сведения, которые помещали в своих учебниках. Наиболее распространенным приемом обучения в XVIII веке было заучивание наизусть содержания учебника, следовательно, учащиеся выучивали исторические сведения вместе с основным текстом. В ряде руководств имелись прямые указания авторов на то, что они используют элементы историзма в своем преподавании (И. Ф. Вейдлер, С. Я. Румовский, А. Г. Кестнер и др.).

В учебнике Л. Ф. Магницкого «Арифметика», книгах по геометрии Я. В. Брюса, А. Д. Фарварсона также представлены элементы историзма, среди которых главное место занимают примеры, демонстрирующие связь теории с практикой.

В начале XVIII в. в России в руководствах по математике начинают появляться элементы рассуждений и логического вывода, обозначается проблема доказательства. Переход к доказательному изложению способствовал увеличению объема учебников, разнообразию применения элементов историзма и их дифференциации. Так, Н. Г. Курганов в учебнике «Универсальная арифметика» (1757 г.) реализует подход, при котором «алгебра должна воссоздаваться на глазах учеников» [7, с. 61]. В этих словах, без сомнения, заключается верная мысль о том, что учащихся на уроках следует ставить в такие условия, чтобы на их глазах и непременно при их активном участии создавались те или иные утверждения.

До 80-х годов XVIII в. отношение автора к использованию элементов истории математики определялось по его учебнику. Согласно данным А. Т. Хохлова, из 86 учебных руководств только в 9 отсутствовали исторические сведения.

Таким образом, для рассматриваемого этапа решения проблемы использования элементов истории математики при обучении учащихся характерно то, что:

- 1) учебники математики содержали разнообразные историко-математические сведения;
- 2) в выступлениях и работах ученых раскрывалась значимость истории науки, как в целях развития науки, так и в целях совершенствования процесса обучения;
- 3) рассматривался разнообразный спектр образовательных, воспитательных и развивающих целей использования элементов истории математики при обучении учащихся.

Данные выводы позволяют утверждать о том, что на первом этапе решения проблемы использования элементов истории математики при обучении учащихся имела место согласованная позиция ученых, авторов учебников математики, преподавателей о целесообразности использования элементов истории математики в процессе обучения учащихся.

Во второй половине XVIII в. в выступлениях и работах ученых-математиков получает развитие теория использования элементов истории математики при обучении учащихся. В 1761 г. С. К. Котельниковым на традиционном публичном собрании Академии наук в речи «Слово о пользе упражнений в чистых математических рассуждениях», в целях доказательства пользы изучения математики для развития умственных способностей человека был использован материал из истории развития математических наук.

В выступлениях профессора прикладной математики Московского университета М. И. Панкевича были развиты идеи С. К. Котельникова. В речи «Слово о подлинной цели математических наук и о сообразном ее расположении упражнений в оных» (1792 г.) он использовал сведения из истории математики для рассмотрения вопроса о соотношении практики и теории, а в речи «Слово об отличительных свойствах и средствах просвещения» (1800 г.) исследовал вопрос развития просвещения и характерных черт образования различных стран древнего мира, средневековья и XVIII в..

По мнению Ю. В. Романова [12, с. 99], новой вехой в развитии русской историко-математической литературы стали работы С. Е. Гурьева. Их отличительной особенностью стало то, что это уже были не дидактические речи о пользе математики, иллюстрируемые историческими примерами, а работы, ставившие такие исторические проблемы, решение которых диктовалось развитием самой науки. «Краткое изложение различных способов изъяснять дифференциальное исчисление» является важнейшей историко-математической работой С. Е. Гурьева.

К середине XVIII в., как отмечает Т. С. Полякова, «образовательное пространство России характеризуется сосуществованием в нем нескольких образовательных систем, а следовательно, и нескольких образовательных парадигм: профессиональной, академической, общеобразовательной, специальной, сословной, духовной» [11, с. 202–203]. В связи с этим учебники (учебные руководства) стали ориентировать на методические идеи, связанные со становлением и развитием различных типов школ. Кроме того, методика преподавания математики, начиная формироваться как область научного знания, вносит свои коррективы в содержание учебника, связанные с такими требованиями, как связность, краткость его изложения. Это приводит к эволюции учебника математики, которая проявляется в большей четкости определений и формулировок; исключении косвенных высказываний. Учебники разгружаются от примеров и задач, которые в начале следующего века выделяются в отдельные задачки. Следствием этого является сокращение в учебниках математики элементов историзма. Для учебников этого этапа характерно то, что все элементы историзма относятся к связи математики с практикой, сведения о развитии математики как науки исключены. Так, в «Теоретической и практической арифметике» (1775, 1788, 1793) Д. С. Аничков рассматривает лишь подробные таблицы древних мер измерения

величин. Н. Г. Курганов в учебнике «Универсальная арифметика» (1757) рассматривает только задачи развлекательного характера, в том числе задачу Архимеда о короне царя Герона.

Следовательно, к концу XVIII в. учебник перестал отражать отношение его автора к проблеме историзма в обучении математике. Кроме того, реформирование учебника способствовало рождению проблемы соотношения исторического и логического в содержании учебника, которая характерна и для современной учебной литературы по математике. З. Е. Гельман по поводу этого пишет: «В большинстве учебников явления науки рассматриваются как отвлеченные давности, а не как итог работы многих поколений исследователей. Поэтому наука воспринимается школьниками как «готовое знание», а не как деятельность, направленная на получение новых знаний, не как сфера духовного производства» [1, с. 25].

Таким образом, для второго этапа решения проблемы использования элементов истории математики при ее обучении характерно противоречие между развитием теории использования элементов истории математики при обучении учащихся, с одной стороны, сокращением в учебниках математики историко-математических сведений и реализацией историко-математической направленности обучения математике в основном только за счет задач прикладного содержания, с другой стороны.

Третий этап решения проблемы использования элементов истории математики в школьном математическом образовании охватывает XIX и начало XX вв. Он характеризуется широким распространением этой идеи в отечественном математическом образовании. В статьях, выступлениях, учебниках и преподавательской деятельности В. В. Бобынина, В. Я. Буняковского, А. Гилле, П. С. Гурьева, Д. Д. Мордухай-Болтовского, М. В. Остроградского, А. Н. Странолюбского, М. Г. Попруженко, П. Л. Чебышева, В. Шидловского, С. И. Шохор-Троцкого и др. получает развитие теория историзма в обучении математике.

Творец методики арифметики П. С. Гурьев, излагая свои методические взгляды, отмечал, что важнее всего возбудить самостоятельность в воспитаннике, представить ему будущую науку с ее лучшей стороны, чтобы он постоянно жаждал познаний и ощущал отраду и наслаждение от изобретений всякого нового познания. Строя свою методику, он пытается установить пути формирования знаний: «Всякое знание человека начинается с чувственного и частного и

только постепенно, посредством отвлечения и соединения переходит к общим законам и правилам; в каждой части сообщаемого материала должна проявляться идея самой науки, а полнота и совершенство этой идеи всегда находится в прямом отношении с массой сведений» [6, с. 32]. П. С. Гурьев построил курс арифметики так, чтобы заинтересовать и просветить ученика, исходя из историко-генетических соображений, чтобы учащийся «сам по возможности доходил до сознания необходимости в том или ином правиле».

По вопросу использования элементов историзма в преподавании арифметики к П. С. Гурьеву присоединился В. Я. Буняковский. В работе «Математический лексикон» (1839 г.) он приводит историко-математические материалы, цель которых — дать точные сведения о важнейших математических теориях, как старых, так и новых.

Развитие идей историзма в преподавании математики у В. Я. Буняковского состоит в том, что он мотивирует введение тех или иных исторических сведений; указывает цели применения историзма; рекомендует элементы историзма при обучении геометрии; высказывает методический тезис о необходимости давать исторические сведения в преподавании математики.

Идеи В. Я. Буняковского развил знаменитый российский математик М. В. Остроградский, педагогические взгляды которого представлены в брошюре «Размышления о преподавании» (1860 г.), написанной им в соавторстве с французским педагогом А. Блумом. М. В. Остроградский считал, что одним из основных положений его доктрины является умение заинтересовать детский разум. Реализация этого положения, в первую очередь, связана с тем, что при ознакомлении с сущностью любого вопроса необходимо развернуть его историю, изложить все методы, все попытки, все успехи, все заблуждения. «Для каждого, кто любит изучать человека и его разум, происхождение его мыслей и развитие его суждений, мы не знаем более увлекательного предмета, чем история научных изобретений и их творцов, чем исследование попыток упростить обучение, чем усовершенствование тех изобретений, которые уже добыты. Мы без колебаний заявляем, что изучение биографий людей, принесших пользу наукам и искусству, является одним из средств, которые мы используем, чтобы привлечь внимание учеников. Это в одно и то же время отличная разрядка и средство с помощью живого рассказа запечатлеть то или иное основное положение либо удачное приложение теоретических принципов» [10, с. 37].

М. В. Остроградский представил развернутую систему методических положений, касающихся историзма в преподавании математики, выделяя в качестве ключевой идею единства воспитания и образования. Он затронул следующие проблемы историзма:

- связь вопроса об использовании историко-математических сведений с общими принципами дидактики;
- цели использования элементов историзма и соответствующие им разновидности этих элементов;
- связь проблемы историзма с возрастными особенностями учащихся;
- воспитательные функции историзма.

Историко-математические сведения в преподавании математики применял также П. Л. Чебышев. Элементы историзма занимают у него важное место в содержании теоретических курсов. Так, например, первую лекцию по теории чисел он посвящал выяснению предмета этой науки, делая исторические экскурсы, указывая на значение работ Диофанта, П. Ферма, Л. Эйлера, Ж. Лежандра, К. Гаусса, и заканчивая современными ему исследованиями в этой области.

А. Н. Странолюбский, написавший по существу первую методику алгебры в России — «Курс алгебры» (1868 г.) указывал, что «преподаваемая в готовом виде научная система, представляющая перед учащимися, не способна ни заинтересовать, ни увлечь учащихся, а педагоги как будто забыли, что прошли целые тысячелетия, прежде чем явилась эта система» [4, с. 12]. Выход из создавшегося положения ученый видит в историко-генетическом пути построения учебника алгебры, так как «...обнажив историю от случайностей и ненужных подробностей и пользуясь в этом уже выработанною научной системой, можно передать науку так, чтобы каждый успех ученика оправдывался и вызывался прежними, чтобы ученики сами создавали, так сказать, систему науки и совершенно усваивали себе связь ее отдельных частей» [4, с. 12].

Знаменитый русский методист С. И. Шохор-Троцкий в работе «Цель и средства преподавания математики с точки зрения требований общего образования» (1892 г.) предлагает вместо исторического прохождения математики делать только экскурсии в область истории данного учения, после того как это учение в современном своем виде учащимися вполне усвоено.

А. Гилле в статье «Дидактическое различие геометрических теорем» (1894 г.) развивает мысли С. И. Шохор-Троцкого. Он счи-

тал, что при объяснении темы необходимо следовать историко-генетическому методу и использовать исторические сведения о предполагаемых путях открытия теоремы для объяснения нового материала. Предлагал использовать старинные задачи для закрепления теоремы, указывает на мировоззренческий характер и большую общекультурную ценность истории математики.

По мнению Ю. В. Романова [12], в середине XIX в. в преподавательской среде зреют идеи, заключающиеся в стремлении положить в основу преподавания исторический ход развития науки. Эти стремления были подкреплены исследованиями в области философии и истории науки. Наиболее ярким сторонником такого подхода были математики В. В. Бобынин и Д. Д. Мордухай-Болтовской, которые внесли наибольший вклад в развитие и популяризацию историко-генетического метода на рубеже XIX–XX веков.

Свои взгляды на использование историко-генетического метода в обучении В. В. Бобынин изложил в следующих статьях: «Философское, научное и педагогическое значение истории математики», «Приложение истории математики к решению и постановке некоторых вопросов преподавания математических наук», «Цели, формы и средства введения исторических элементов в курс математики средней школы», «Об указаниях, получаемых преподаванием математики от ее истории».

В. В. Бобынин считал, что «умственное развитие молодых поколений управляется теми же законами..., которые имели место на соответствующих ступенях умственного развития всего человечества». Отсюда он делал вывод о том, что «преподавание каждой науки должно идти тем же путем, которым шла при своем развитии сама наука и что, следовательно, для правильной и строго научной постановки дела преподавания необходимо знать, во-первых, фазы развития науки в прошлом и, во-вторых, законы и вытекающие из них практические условия этого развития» [5, с. 127].

Он считал, что история математики является теоретической основой методики обучения математике, которая «...должна начертить искусству преподавания математики подробную программу, а также вместе с философией математики указать ему приемы и методы исполнения этой программы» [5, с. 127].

Основой использования истории математики в обучении, по его мнению, должен стать генетический метод — «метод, развивающий

в преподавании положения и выводы науки именно таким образом, как они развивались в действительности».

В. В. Бобынин также отмечал и важное общеобразовательное значение истории математики, которое состоит в том, что история математики является частью общей истории человеческой культуры, и, следовательно, нельзя составить правильное представление и об «истории политической», если не учитывать развитие наук, в том числе и математики, поскольку это развитие, несомненно, оказывало влияние на ход общей истории.

Историзм в преподавании математики у В. В. Бобынина не ограничивается только методом обучения как таковым, ибо сам этот метод предполагает систематическое сообщение историко-математических сведений в процессе преподавания. В частности, это означает, что необходимо раскрывать, хотя бы в общих чертах, тот путь, которым пришли к тому или иному математическому открытию. В противном случае такие открытия своим «величием» психологически подавляют сознание учащегося. Это глубоко справедливое психологическое обоснование историзма в преподавании было высказано еще Ж. Лаландом в XVIII веке.

Он считал, что правильная постановка в курсе математики средней школы исторических элементов может быть достигнута только при наличии целей. Вот какие цели, по его мнению, могут быть решены с помощью использования истории математики:

- 1) устранение отрицательных взглядов на математику;
- 2) убеждение учащихся в пользе и значении математики;
- 3) углубление в достаточной степени понимания учащимися трудных вопросов курса математики и расширение запаса их знаний;
- 4) укрепление в памяти учащихся преподаваемого им содержания;
- 5) развитие сознательного и возможно более глубокого интереса учащихся к математике и ее успехам;
- 6) возбуждение стремлений учащихся к самостоятельной творческой работе в области математики.

Введение исторических элементов в преподавание математики в средней школе он предлагал выполнить либо путем систематического изучения истории математики, либо эпизодического.

Обсуждение его докладов на 1 и 2 Всероссийских съездах преподавателей математики показало, что:

- 1) большинство методической общественности высказалось в под-

держку проблемы историзма как актуальной методической проблемы, и одобрило идеи, высказанные В. В. Бобиным;

2) основными факторами, препятствующими использованию учителями элементов истории математики в процессе обучения учащихся, являются: нехватка времени для проведения такой работы на уроках и недостаточная обеспеченность литературой по истории математики;

3) были предложены два варианта изучения элементов истории математики: эпизодически в курсе математики и в качестве отдельного учебного предмета;

4) важно решить проблему обеспечения преподавателей пособиями по истории математики.

В начале XX в. значительный вклад в решение проблемы использования элементов истории математики в школьном математическом образовании внес Д. Д. Мордухай-Болтовский. Говоря о месте элементов истории в преподавании математики, он замечает, что «история истины это тот диалектический процесс, при помощи которого противные положения, взаимно очищая друг друга от ошибок соединяются в одно, содержащее более истины, чем каждое из них» [8, с. 20].

Д. Д. Мордухай-Болтовский считал, что исторический материал должен войти в обязательное преподавание. В силу того, что изучение истории науки в средней школе является не менее полезным, чем изучение каких-либо междоусобных войн. Иначе будет складываться обманчивое впечатление, что движение человечества вперед создается не великими учеными. Для реализации своей идеи он высказал интересное предложение — уменьшить на один час изучение истории и передать его на преподавание истории физико-математических наук «не эпизодически, а систематически».

Размышляя о психологических проблемах преподавания математики, Д. Д. Мордухай-Болтовский обращает внимание на то, что учащимся различных возрастных групп и с разными индивидуальными особенностями должны предлагаться различные доказательства. И в этом случае им на помощь может прийти история математики.

«История может научить педагога весьма многому. Вопрос о том, как учить ребенка арифметике не может быть разрешен, не затронув другого вопроса, уже исторического, о том, как человечество научилось арифметике» [9, с. 60].

Он считал, что педагог, изучающий онтогенезис, и историк, исследующий филогенезис математической мысли, должны работать вместе. Благодаря такой совместной работе история математики потеряет свой исключительно прагматический характер. Настанет время установки общих выводов, общих законов, которым следует научная мысль при своем развитии. . . Более того, история математики дает нам прекрасный материал для установки таких законов, которым подчиняется не только развитие научной мысли, но и эволюция религиозной и этической мысли [9, с. 63–64].

Д. Д. Мордухай-Болтовский предлагает изучение эволюции математической мысли проводить в связи с общей эволюцией человечества. В качестве примера он сравнивает геометрию греков, в которой на первый план выступает логический элемент, и геометрию индусов, которая была интуитивна, и приходит к выводу, что связано это с различием двух национальностей.

Им была предложена классификация истории элементарной математики на методическую и научную. Если в первой истории математики «материал почти не растет, но изменяется, если так можно выразиться, в своей окраске, пропитываясь различными идеями, идущими сверху, то во второй скорее имеет место обратное: растет материал, а основные общие идеи не эволюционируются» [9, с. 66]. Первую историю он называет методической, а вторую — научной.

Позднее Д. Д. Мордухай-Болтовский в работе «Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики», изучая с методической точки зрения становление буквенной алгебры, отмечал, что «методические изыскания должны идти параллельно историческим. В иных случаях, хотя далеко не всегда, история может кое-чему научить методиста. Я подчеркиваю: не всегда, так как великий биогенетический закон, приравнивающий филогенетическое развитие онтогенетическому, — это только грубое приближение. Бесспорно, что кое-что в алгебре давалось трудно алгебраистам XVI в. по тем же причинам, почему и учеником оно трудно усваивается» [9, с. 302–303].

Таким образом, мы видим, что взгляды двух знаменитых русских математиков, В. В. Бобынина и Д. Д. Мордухай-Болтовского, по отдельным вопросам совпадали (признание того факта, что в процессе обучения математике необходимо знакомить учащихся с генезисом основных идей; использование истории математики в процессе обучения позволяет показать не только развитие научной мысли, но и

раскрыть эволюцию религиозной и этической мысли; признание роли истории математики, как для учеников, так и для учителей), но в тоже время имели и существенные отличия (вместо эпизодического знакомства с историей математики, о котором говорит В. В. Бобынин, Д. Л. Мордухай-Болтовской предлагает за счет часов курса истории ввести отдельный курс истории физико-математических наук и использовать знакомство с древнегреческой философией для раскрытия взаимосвязи ее с математикой; Д. Д. Мордухай-Болтовской в противовес В. В. Бобынину выступает против полного соответствия филогенеза и онтогенеза; Д. Д. Мордухай-Болтовской признает тот факт, что история математики оказывается полезной при обучении учащихся различных возрастных групп и выступает за сотрудничество педагогов и историков науки; Д. Д. Мордухай-Болтовский предлагает взгляд на историю элементарной геометрии, как на историю учебника геометрии).

В 1912 г. в Педагогическом сборнике, издаваемом при Главном управлении Военно-учебных заведений, появилась статья В. Шидловского «О желательности сообщения исторических сведений по истории математики в нашей средней школе». В ней он отмечает, что сведения по истории математики желательно использовать в старших классах в силу того, что они могут «оживить преподавание, придать ему интерес». Кроме того, они имеют общекультурное значение, так как дают возможность учащимся познакомиться с вкладом различных народов «в сокровищницу человеческого знания вообще, и в частности математического» [15, с. 605].

Особое внимание автор уделяет важности знакомства с биографиями знаменитых математиков. Это, по его мнению, имеет большое воспитательное значение, так как жизнь таких известных математиков, как Архимед, Г. Монж, Ж. Фурье, может служить поучительными примерами терпения, настойчивости в достижении цели и бескорыстного служения науке, великого служения Родине в годы бедствий.

В геометрии В. Шидловский предлагает не только знакомить учащихся с именами математиков, но приводить некоторые подробности их деятельности. Большой интерес, считает автор, в историческом отношении представляют задачи о трисекции угла, квадратуре круга, о золотом сечении, Делийская задача.

Особое внимание В. Шидловский обращает на необходимость делать краткие исторические обзоры перед изучением больших разде-

лов (аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисление). В них должны быть раскрыты основные направления изучения этих разделов, биографии творцов и исторические задачи, послужившие толчком к развитию соответствующих теорий, и на примере которых можно выделить общие подходы (методы) к решению изучаемой проблемы.

В силу того, что времени на проведение такой работы на уроках не хватает, В. Шидловский предлагает делать вечерние сообщения или пользоваться предпраздничным временем.

В заключение он обосновывает необходимость создания математической хрестоматии и истории математики, приспособленной к пониманию учащихся.

Н. Г. Лексин в книге «Методика алгебры» (1916 г.) остановился довольно подробно на значении исторических элементов в преподавании алгебры, как для учителя, так и для ученика. Вне исторического освещения основных принципов математики, считает автор, многие новые математические идеи покажутся странными и не вполне ясными для учащихся. Использование учителем «исторического освещения учебного материала» встречает поддержку у учеников в силу того, что тем самым ученикам указывают на связь культурной и научной работы всего человечества и подчеркивается единство человеческого духа.

Для самого преподавателя математики «знакомство с историей развития той или иной математической идеи особенно важно потому, что именно история и показывает нам, какие огромные трудности приходилось преодолевать человеку при разработке различных научных вопросов в области математики» [7, с. 26].

По его глубокому убеждению следует при передаче знаний стремиться выравнять и спрямлять, по мере необходимости и возможности, все зигзаги исторического развития, отделяя тем самым существенное от несущественного, научное от ненаучного.

Свою точку зрения на значение исторического элемента в преподавании алгебры Н. Г. Лексин связывает с реализацией идеи индивидуальных особенностей учащихся («психологии учащихся» — по Н. Г. Лексину) при усвоении понятий. В силу того, что ум одних учеников склонен к логике, а других к интуиции, учителю следует использовать при обучении различные подходы к введению понятий и доказательству теорем, взятые из истории математики. Такое «заглядывание в историю развития алгебры может избавлять его весьма

нередко от грубых тактических ошибок и серьезных педагогических промахов» [7, с. 28]. В этом вопросе его взгляды аналогичны взглядам Д. Д. Мордухай-Болтовского.

Н. Г. Лексин отмечает, что в силу высокого теоретического уровня, достигнутого математикой, она для многих оказывается слишком трудной, и поэтому в настоящее время сложились отрицательные взгляды на математику в «домашней среде учеников». Их устранению может помочь работа, направленная на достижение обеих целей обучения — практической и теоретической. Для этого учащимся предлагается повторить путь, пройденный человечеством и, следовательно, намеченный историей науки, осуществляя переход от практических работ к изучению теоретической части учебного материала. Это позволит показать практическую пользу теоретической математики. «Наиболее действенным и самым лучшим средством для разъяснения ученикам огромной пользы занятий теоретической математикой в настоящее время и признается знакомство их с историей науки, потому что только она одна, то есть история науки, и может дать безусловно прямое и вполне ясное доказательство настоящей пользы и истинного значения не только теоретической математики, но и практической, то есть, другими словами, математики вообще» [7, с. 29].

Он утверждал, что введение исторического элемента в преподавание математики в школе имеет «особую специальную цель, позволяющую учителю легко и правильно отмечать и выделять лиц, по типу их ума, склонных посвятить свою будущую деятельность неустанной работе в области математической мысли» [7, с. 29]. Для этого следует побуждать учащихся к самостоятельной творческой работе, связанной с ознакомлением с биографией и трудами выдающихся математиков.

При этом знакомство с историей математики может проходить как при изучении отдельной дисциплины, так и при чтении популярной историко-математической литературы или составлении и разбора под руководством учителя рефератов.

Из исследования Н. Г. Лексина можно сделать следующие выводы:

- он характеризует значение исторического элемента в профессиональной деятельности учителя и в процессе обучения ученика;
- показывает роль истории математики в установлении связей между алгебраическими формулами и фактами повседневной жизни

и тем самым устраняет у учащихся неправильные представления о математике;

- предпринимает попытку установления зависимости между историей развития математики и развитием методов обучения;

- указывает, что исторический элемент может выступать в качестве средства определения лиц, склонных к математической деятельности;

- характеризует роль ознакомления учащихся с текстами рукописей древних математиков.

Таким образом, анализ работ, выступлений ученых по проблеме использования элементов истории математики в школьном математическом образовании, позволил выделить четыре основные направления теории историзма в обучении математике, получившие развитие на третьем этапе.

Первое направление связано с выявлением и обоснованием целей использования элементов истории математики при ее обучении. В работах и выступлениях В. В. Бобынина, В. Я. Буняковского, М. В. Остроградского, В. Шидловского и др. получают обоснование такие цели, как: устранение отрицательных взглядов на математику; убеждение учащихся в пользе и значении математики; углубление в достаточной степени понимания учащимися трудных вопросов курса математики и расширение запаса их знаний; укрепление в памяти учащихся преподаваемого им содержания; развитие сознательного и возможно более глубокого интереса учащихся к математике и ее успехам; возбуждение стремлений учащихся к самостоятельной творческой работе в области математики; решение задач воспитания на примере жизни и творчества великих ученых.

Второе направление теории историзма в обучении математике связано с обоснованием В. В. Бобыниным, А. Гилле, П. С. Гурьевым, Н. Г. Лексиным, А. Н. Странолюбским, С. И. Шохор-Троцким целесообразности использования историко-генетического метода в обучении, раскрытием его сущности и возможных подходов к реализации. Характеризуя данный метод В. В. Бобынин говорил о нем как о методе, развивающем в преподавании положения и выводы науки именно таким образом, как они развивались в действительности. Говоря о его применении, ученые выделяют два диаметрально противоположных подхода. Согласно первому, необходимо при объяснении темы следовать историко-генетическому методу, использовать исторические сведения о предполагаемых путях открытия теоремы

для объяснения нового материала, использовать старинные задачи для закрепления теоремы. Суть второго подхода состоит в том, что «чаще всего полезно делать только экскурсии в область истории данного учения, после того как это учение в современном своем виде учащими вполне усвоено».

Третье направление развития теории историзма в обучении математике связано с выявлением форм и приемов использования историко-математического содержания при обучении учащихся математике. В работах и выступлениях В. В. Бобынина, В. Е. Загулина, Н. Г. Лексина, С. А. Неаполитанского, М. Г. Попруженко, В. Шидловского рассматриваются такие, как чтение учащимися сочинений по истории математики, краткие исторические очерки, в том числе биографического характера, предлагаемые ученикам в форме бесед, написание рефератов; рассмотрение исторических задач; самостоятельная творческая работа учащихся по ознакомлению с биографиями и трудами выдающихся математиков; чтение популярной историко-математической литературы.

Четвертое направление теории историзма в обучении нашло отражение в выступлениях ученых на I Всероссийском съезде преподавателей математики. В них отмечена необходимость создания учебных пособий по истории математики и историко-математических хрестоматий.

Наряду с отмеченными четырьмя направлениями, в работах Н. Г. Лексина, Д. Д. Мордухай-Болтовского, М. В. Остроградского, В. Шидловского рассматриваются такие аспекты использования историзма в обучении математике, как взаимосвязь между общими принципами дидактики и использованием историко-математических сведений; включение курса истории математики (истории физико-математических наук) в обучение учащихся, взаимосвязь в обучении историзма и учета возрастных и индивидуальных особенностей учащихся; воспитательные функции историзма.

Таким образом, соотнесение теории и практики решения проблемы использования элементов истории математики при обучении учащихся показывает существенное опережение результатов теоретических исследований по отношению к практике использования элементов истории математики в обучении.

Подводя итог анализа исследований, посвященных использованию элементов историзма в обучении математике в русской школе, и опыта их включения в процесс обучения математике, можно сде-

лать вывод, что:

1) математиками, методистами, преподавателями математики России осознавалась значимость и необходимость использования при обучении учащихся математике элементов ее истории;

2) несмотря на значимость историко-генетического метода, его использование в школьной практике являлось ограниченным;

3) в работах отечественных ученых выделен и раскрыт широкий спектр целей и направлений использования элементов историзма в обучении математике, к реализации которых должен быть готов учитель математики;

4) учеными выявлены приемы и формы обучения, обеспечивающие использование элементов истории математики в школьном математическом образовании;

5) признана необходимость подготовки будущего учителя математики к использованию элементов историзма в своей деятельности и создания необходимых методических пособий.

Литература

1. Гельман З. Е. История науки и культуры в общеобразовательной школе // Педагогика.—1993.—№ 5.—С. 25–28.
2. Гольтиков В. Ф. Развитие методики преподавания математики. Из истории русского учебника геометрии для средней школы.—Челябинск: ЮУКИ, 1966.—60 с.
3. Граве Д. Энциклопедия элементарной математики. Очерк ее современного положения.—Киев, 1912.—602 с.
4. Дробышев Ю. А. Историко-математический аспект в методической подготовке учителя.—Калуга: КГПУ им. К. Э. Циолковского, 2004.—156 с.
5. Дробышев Ю. А. О решении проблемы использования генетического метода в обучении учащихся математике в работах В. В. Бобынина // Вест. Поморского ун-та. Гуман. науки.—2010.—№ 4.—С. 129–135.
6. Ланков А. В. К истории развития передовых идей в русской методике математики.—М.: Учпедгиз, 1951.—151 с.
7. Лексин Н. Г. Методика алгебры.—М., 1916.—346 с.
8. Мордухай-Болтовской Д. Д. Второй Всероссийский съезд преподавателей математики. Философские, методологические и дидактические очерки по поводу докладов съезда // Варшавские унив-ние изд-я.—1915.—№ 1.—С. 1–95.
9. Мордухай-Болтовской Д. Д. Философия. Психология. Математика.—М.: Серебряные нити, 1998.—560 с.
10. Остроградский М. В. Размышления о преподавании // М. В. Остроградский Педагогическое наследие. Документы о жизни и деятельности.—М.: Физматгиз, 1961.—С. 32–52.
11. Полякова Т. С. История отечественного школьного математического образования. Два века. Книга 1: Век семнадцатый.—Ростов н/Д., 1997.—228 с.

12. Романов Ю. В. Теория и методика историзации геометрической подготовки учителя математики в педагогическом вузе: Дис. . . канд. пед. наук.—Ростов-н/Д., 2002.—240 с.
13. Хохлов А. Т. Отношение историко-математической мысли XIX и начала XX вв. к вопросу об использовании элементов историзма в преподавании математики в средней школе. В кн.: Ученые записки Щербаковского пединститута.—Щербаков, 1957.—Ч. 2.—С.203–286.
14. Шидловский В. О желательности сообщений сведений по истории математики в нашей средней школе // Пед. сб.—1912.—№ 5–7.—С. 605–607.
15. Шохор-Троцкий С. И. Цели и средства преподавания математики с точки зрения общего образования.—Спб., 1892.—116 с.

ДРОБЫШЕВ Юрий Александрович
Финансовый университет при Правительстве РФ
(Калужский филиал)
РОССИЯ, 248016, Калуга, ул. Чижевского, 17
E-mail: drobyshev.yury2011@yandex.ru

ABOUT THE ORIGIN
OF THE PRINCIPLE OF HISTORICISM
IN THE RUSSIAN MATHEMATICAL EDUCATION

Drobyshev Y. A.

The article discloses the experience of using the history of mathematics in training of pupils by russian mathematicians and methodists. The period from 18 to early 20-th century is examined. The basic steps for using the principle of historicism and their characteristics are presented.

Key words: the learning of mathematics, the principle of historicism, historical genetic method, elements of history of mathematics.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ СРЕДСТВАМИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В. Н. Дубровский

На основе программной среды «Математический конструктор» рассматриваются способы визуализации математических соотношений в динамических моделях.

Ключевые слова: информационно-компьютерные технологии, преподавание математики, динамическая геометрия.

1. Программы динамической геометрии, или интерактивные геометрические системы (ИГС), за более чем 20 лет, прошедших со времени их появления, заняли одно из ведущих мест среди информационно-компьютерных средств поддержки преподавания математики, используемых во всем мире. Все большее распространение они получают и в России. Наиболее популярны у нас программы «Живая Математика» — русифицированная версия программы The Geometer's Sketchpad (США), GeoGebra — свободно распространяемая программа с открытым кодом, разрабатываемая международным коллективом, и разработка известной российской фирмы «1С» — «Математический конструктор» (МК), версия 5 которого также находится в свободном доступе [1]. По своим основным функциональным возможностям эти программы не так уж существенно отличаются друг от друга; разница между ними проявляется в количестве инструментов, интерфейсных решениях, возможностях экспорта моделей, скорости работы и т. д. Например, в МК, в отличие от других программ, используются математическая терминология и система обозначений, принятые в России.

2. Центральная идея ИГС — возможность вариации конструкций «на лету», путем перетаскивания мышью их исходных объектов с сохранением алгоритма построения. Это свойство превращает ИГС в уникальную математическую лабораторию, поле для экспериментов, причем организуются эти эксперименты при помощи очень наглядного и простого инструментария, важнейшие элементы которого

доступны уже младшим школьникам. В ходе экспериментов пользователь может обнаружить и проверить те свойства конструкции, которые остаются неизменными при вариации, выявляя тем самым математические закономерности, вытекающие из задающих ее соотношений. Во многих случаях инвариантные свойства конструкции видны непосредственно: например, если построить треугольник и провести в нем высоты, то мы увидим, что при всех изменениях треугольника высоты имеют общую точку. Менее явные свойства нужно суметь сделать видимыми, т. е. визуализировать. Мы опишем некоторые средства визуализации, предоставляемые ИГС, а конкретно — «Математическим конструктором».

3. Простейшим средством визуализации являются *дополнительные построения*. Например, тот факт, что центры правильных треугольников, построенных на сторонах произвольного треугольника, сами образуют правильный треугольник (теорема Наполеона) гораздо проще заметить при вариации исходного треугольника, если соединить эти центры отрезками (рис. 1). Дополнительные построения могут использоваться и для проверки наблюдений. На динамическом чертеже мы сразу обнаружим, что какие-то прямые пересекаются в одной точке, но заметить, что некоторые точки чертежа лежат на одной прямой, сложнее, а надежно удостовериться в этом «на глаз» и вовсе проблематично. Однако коллинеарность точек легко проверить, проведя через две из «подозрительных» точек прямую. В п. 8 приводится еще один, довольно специальный, но эффектный пример использования дополнительного построения.

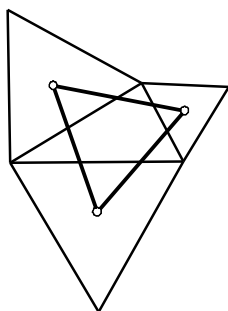


Рис. 1.

4. *Следы и геометрические места.* Точку на экране можно превратить в своего рода «карандаш», если включить для нее так на-

зываемый «режим рисования следа». Это позволяет увидеть траекторию, описываемую точкой при изменении порождающих ее объектов. Пусть, например, нужно построить отрезок с концами на двух данных окружностях, середина которого находится в данной точке M . Построим отрезок AB с серединой M , конец A которого лежит на одной из окружностей, s , и нарисуем след точки B при движении A по этой окружности (рис. 2). Мы увидим, что B тоже описывает окружность и искомая точка B лежит на ее пересечении со второй данной окружностью. Этот эксперимент визуализирует связь между точками A и B (эти точки симметричны относительно M) и подсказывает идею решения. Вместо следа точки можно построить ее «геометрическое место» — линию, с которой можно работать так же, как и со стандартными объектами, такими как отрезки, окружности и т. д., т. е. брать на этой линии точки, пересекать ее с другими линиями, применять к ней преобразования. Более того, мы можем проследить, как изменяется этот «живой» след (гмт) при изменении задающих его объектов, в нашем случае — точки M и окружности s . Следы и геометрические места можно строить не только для точек, но и для других объектов.

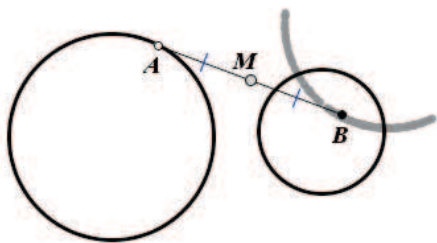


Рис. 2.

Далее мы остановимся на различных способах визуализации функций и отображений.

5. Графики. МК имеет набор инструментов для построения графиков функций действительной переменной и их исследования (например, построения касательной, точек экстремума и т. п.). В этом еще нет никакой «динамической» специфики. Отметим, впрочем, что наряду с использованием встроенного графопостроителя, график

функции $f(x)$ можно строить, так сказать, вручную, т. е. как геометрическое место точек $M(x; f(x))$ при условии, что точка $X(x; 0)$ пробегает ось абсцисс. (Инструментарий программы позволяет измерить координату x произвольной точки X оси абсцисс, найти численное значение функции в точке x и построить точку M по ее известным координатам.) Такой способ построения особенно полезен в самом начале изучения понятий функции и графика, так как непосредственно воспроизводит определение графика. Он аналогичен построению графика по точкам, но позволяет, построив одну точку и используя ее переменность, сразу получить весь график.

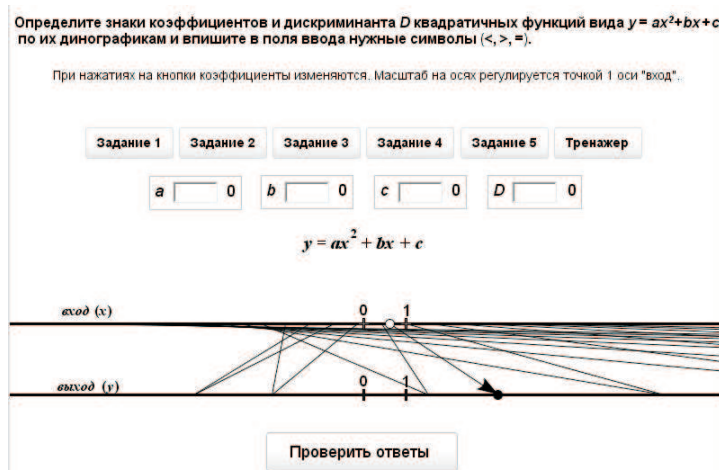


Рис. 3.

6. Функции, зависящие от параметра. В этом случае параметры можно привязать к «бегункам», позволяющим изменять их значения мышью и наблюдать за происходящей при этом эволюцией графиков. Такой способ исследования популярных «задач с параметрами» стал уже общим местом. Но МК допускает и другую, не столь стандартную интерпретацию. Пусть нужно исследовать квадратичную функцию $y = x^2 + px + q$. На рабочем листе можно создать два «фрейма» — прямоугольные области с собственными системами координат: один с координатами $(p; q)$, другой — с координатами $(x; y)$. На первом фрейме («фазовой плоскости») берется точка $M(p; q)$, а на втором строится график функции с параметрами, равными ее координатам. Перемещая точку M , мы можем следить за изменением

графика, ставить и решать задачи о зависимости его свойств от коэффициентов.

7. Динографики. В работе [2] был предложен оригинальный способ визуализации функций с помощью так называемых «динографиков» (dynagraphs), хорошо совмещающийся с возможностями ИГС (рис. 3): строятся две параллельные числовые оси, на одной берется точка x , изображающая аргумент, на другой точка с координатой $y = f(x)$. Для наглядности точки можно соединить стрелкой. Перемещая точку x , можно наблюдать за соответствующими перемещениями точки y и на основании этих наблюдений описывать свойства функции, определять ее вид.

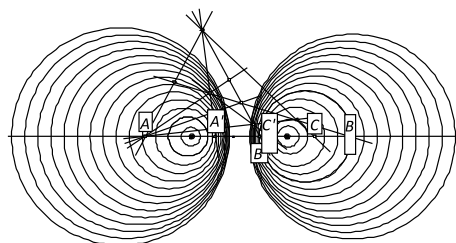


Рис. 4.

8. Функции, задаваемые геометрически. В геометрии часто рассматриваются преобразования прямой, которые определяются не формулой, а с помощью некоторого построения. Как «увидеть» такое преобразование? Интересный пример доставляет изучение структуры проективных инволюций прямой, т. е. проективных преобразований прямой, обратных самим себе. Такое преобразование однозначно задается двумя парами взаимно соответственных точек A, A' и B, B' , которые можно выбирать произвольно. По этим параметрам позволяющих с помощью одной линейки можно построить образ C' любой точки C (рис. 4; см., например, [3]). Перемещая точку C на полученном динамическом чертеже можно увидеть, как перемещается ее образ, а перемещения точек A, A' и B, B' изменяют само преобразование. Однако эти перемещения мало что говорят о том, как оно устроено. Интересный результат возникает, если построить окружность на отрезке CC' как на диаметре, а затем — семейство таких окружностей при всевозможных положениях точки C на прямой: образуется пучок окружностей — объект, хорошо известный в геометрии. В зависимости от того, чередуются пары (A, A') и (B, B')

или нет, этот пучок и отвечающая ему инволюция будут эллиптическими или гиперболическими. Отталкиваясь от того или иного описания пучка, можно с разных точек зрения описать и природу инволюции, в том числе дать и аналитическое описание. Другой, более универсальный способ «увидеть» данное отображение — построить его график, используя координаты точек C и C' на прямой (получается гипербола).

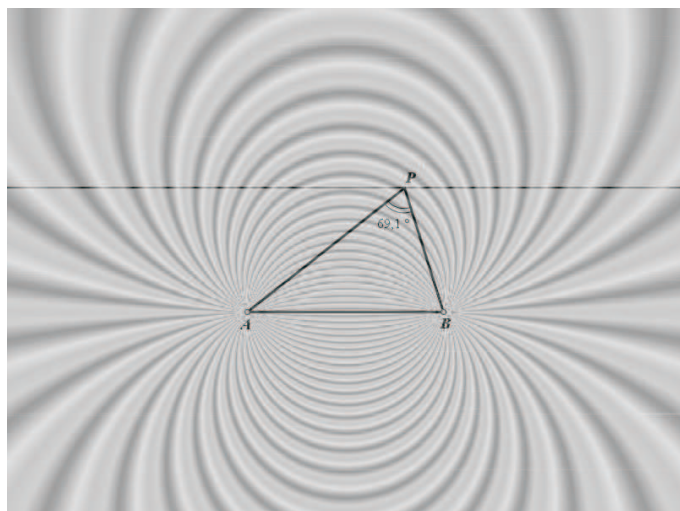


Рис. 5.

9. Карта линий уровня. Некоторые ИГС, в том числе «Математический конструктор», позволяют параметризовать цвет объекта, т. е. сделать его зависимым от числового параметра. Используя это свойство, можно получить эффектную визуализацию числовой функции $f(P)$, заданной на всей плоскости. Для этого все точки плоскости раскрашиваются в зависимости от значения этой функции в соответствующей точке: сначала с помощью инструмента «Гмт» строится прямая из таких цветных точек, для нее активизируется рисование следа и затем мы как бы проводим этой прямой как широкой кистью по плоскости, оставляя на ней цветной след. При этом все точки, для которых значение $f(P)$ одинаково, окрасятся одним цветом и при подходящей параметризации на плоскости ясно проступят линии уровня функции f . Рис. 5 показывает вид построенной опи-

санным способом карты линий уровня для функции $f(P) = \angle APB$, где A и B — данные точки.

10. Мы рассмотрели ряд приемов, позволяющих в ходе наблюдения за поведением динамических моделей математических объектов высказать гипотезы об их свойствах. Следующий шаг — численная проверка этих гипотез. Ее можно провести, пользуясь инструментами для измерения различных величин и обработки их результатов с помощью вычислений; на деталях мы здесь не останавливаемся. И, конечно, за экспериментами должно следовать теоретическое обоснование сделанных наблюдений. Представляется, что изложение многих разделов школьного, и не только школьного, курса математики можно сделать более привлекательным, понятным и поучительным с помощью включения в него элементов исследовательской работы.

Литература

1. Дубровский В. Н. Новости о «Математическом конструкторе» // Математика.—2013.—№ 4 (742).
2. Goldenberg P., Lewis Ph., O'Keefe J. Dynamic Representation and the Development of a Process Understanding of Function / Eds. E. Dubinsky and G. Harel // The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.—Washington, D.C.: Math. Association of America, 1992.—P. 235–260.—(Math. Association of America Notes, № 25).
3. Кокстер Х. С. М. Действительная проективная плоскость.—М.: Физматгиз, 1959.—82 с.

Дубровский Владимир Натанович
СУНЦ МГУ им. М. В. Ломоносова
РОССИЯ, 121357, Москва, ул. Кременчугская, 11
E-mail: vndubrovsky@gmail.com

VISUALIZATION OF MATHEMATICAL RELATIONSHIPS WITH DYNAMIC GEOMETRY PROGRAMS

Dubrovsky V. N.

Based on MathKit software environment, we describe various techniques for visualization of mathematical relationships in dynamic models of mathematical objects.

Key words: technology in education, teaching mathematics, dynamic geometry.

ТРЕХЧАСТНАЯ СТРУКТУРА УЧЕБНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. Н. Дятлов

Обсуждается трехчастная форма организации учебного материала, включающая теоретическую, технологическую и практическую части. Подчеркнута существенность технологической части как промежуточной между теорией и практикой. На материале из статей автора [1–15] показано, как может быть организована технологическая часть. Эффективность ее присутствия и использования подтверждается в указанных статьях на многочисленных примерах.

Ключевые слова: математика, учебные материалы, подготовка к ЕГЭ (часть С).

1. Трехчастность учебных материалов

Математическое образование в России в последние годы сталкивается с серьезными проблемами. С одной стороны, необходимо обеспечить массовую подготовку квалифицированных специалистов, способных выполнять работу, отвечающую высокотехнологичному укладу производства, а с другой, повышение качества математического образования, без которого указанную задачу решить невозможно, происходит медленно. На эту тему в последнее время разворачивается много дискуссий, затрагивающих содержание и формы образования и контроля, обеспечения продолжения математического и технического образования на следующих по сравнению со школой уровнях, качества учебных материалов и др.

Не касаясь аспектов, связанных с уровнем подготовки учителей, перегруженности школьников, различного рода заинтересованности всех участников образовательного процесса, остановимся на одном моменте — структуре учебных материалов по математике.

Всякий предлагаемый к изучению материал обычно состоит из двух частей: теоретической и практической. В теории излагаются основы понятийного поля, в рамках которого будет происходить формирование компетенций, даются разъяснения терминов, устанавливаются взаимосвязи между объектами, по мере необходимости

формулируются утверждения о рассматриваемых объектах. Нередко теоретическая часть материала вызывает определенные трудности для восприятия, так как излагается насыщенно и сжато.

Теоретический материал обычно осваивается в процессе решения задач, формулируемых в рамках предложенной теории. Для этих целей, как правило, предлагается некоторый набор примеров использования теории для решения задач, по возможности настолько представительный, чтобы после знакомства с ним учащийся мог, действуя по аналогии, по примерам, провести решение типовых задач из определенного набора. В результате этого процесса предполагается, что учащийся должен научиться решать задачи, формулируемые в терминах изложенного теоретического материала.

Однако, с одной стороны, при изложении теоретического материала не всегда затрагиваются алгоритмы его применения, а с другой, любой набор примеров конечен, и если поставленная задача не соотносится ни с одним из рассмотренных примеров, то встает проблема поиска методов ее решения. Становится ясно, что предпочтительнее другой путь перехода от теории к практике, при котором между теоретической и практической частями появляется еще одна — технологическая часть.

В традиционной структуре изучения материала нередко отсутствует важное звено, обеспечивающее переход от теории к практике и содержащее правила (инструкции, алгоритмы), руководствуясь которыми на основе теоретического материала можно решать соответствующие задачи. Наборы таких правил можно назвать технологической составляющей. Надо отметить, что в некоторых учебниках такие разделы присутствуют. Из известных автору такие правила есть, например, в учебниках Л. М. Петерсон, а также в учебниках Э. Г. Гельфман и О. В. Холодной. О необходимости решать задачи на основе правил, а не примеров, говорил в своем выступлении В. А. Рохлин [16].

Что желательно ожидать от таких алгоритмов?

Во-первых, необходимы инструкции, содержащие механизмы выбора шагов решения и пошаговое описание действий, предназначенных для решения определенного типа задач в рамках изложенного теоретического материала. Такое описание может быть представлено в текстовом виде как набор вопросов и выполняемых действий, в виде блок-схемы и т. п.

Во-вторых, нужны средства распознавания применимости алгоритма к решению поставленной задачи. Для этого надо иметь набор признаков, по которым можно распознать, целесообразно ли применение данного правила и какое правило эффективнее применять при решении данной задачи. Наличие средств распознавания позволяет сделать процесс решения целенаправленным, тогда как отсутствие таких средств нередко приводит к хаотичности шагов, предпринимаемых для решения. Можно кратко сказать: ни одного немотивированного действия!

Наконец, желательно иметь признак завершения решения задачи, т. е. описание свойств, наличие которых говорит о том, что задача решена. В большинстве случаев такой признак применяется по умолчанию, но он обычно есть.

Таким образом, предлагаемые к изучению материалы должны включать три части: теорию, технологии применения теории и практику, в процессе которой на основе теории с применением технологии формируются ожидаемые компетенции.

Поясним изложенное на примере изучения правила интегрирования по частям при нахождении первообразной [17]. Сначала формулируется утверждение.

Теорема (интегрирование по частям). Пусть на промежутке Δ заданы дифференцируемые функции f, g . Предположим, что на Δ существует первообразная функции $f'g$. Тогда на этом промежутке существует первообразная функции fg' и имеет место равенство

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

Отличительной особенностью целесообразности применения правила интегрирования по частям (признаками распознавания применимости метода) служат следующие обстоятельства:

- (а) рассматривается интеграл от произведения двух функций (одна из них, возможно, постоянная), т. е. интеграл вида $\int f(x)\varphi(x) dx$;
- (б) в рассматриваемом интеграле производная одной из функций, например функции $f(x)$, в каком-то смысле проще самой функции (например, это x^n , $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$ и т. п.).

При наличии указанных особенностей применение правила организуется следующим образом.

1. Ищем первообразную другой функции, а именно $\varphi(x)$, т. е. представляем ее в виде $\varphi(x) = g'(x)$.

2. Формируем запись вида $\varphi(x) dx = dg(x)$ (об этом шаге говорят «записываем φ под d »).

3. Выполняем собственно операцию интегрирования по частям:

$$\int f(x) dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x) df(x). \quad (1)$$

4. В последнем интеграле в равенстве (1) делаем подготовку для дальнейшего его нахождения:

$$\int g(x) df(x) = \int g(x)f'(x) dx. \quad (2)$$

5. Ищем последний интеграл в (2).

Последовательность действий 1–4 можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int f(x)\varphi(x) dx &= \int f(x)g'(x) dx = \int f(x) dg(x) = \\ &= f(x)g(x) - \int g(x) df(x) = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

После изучения теории и технологии ее применения можно привести пример и усвоить материал, решая упражнения, составляющие практическую часть учебного материала.

Изложенные выше пожелания по структурированию учебного материала нашли свое отражение в цикле статей [1–15], вышедших в журнале «Математика» (методический журнал для учителей) издательского дома «1 Сентября» в 2012–13 гг. в рубрике «Технологии решения задач». В них освещены основные темы школьного курса алгебры:

- (1) текстовые задачи;
- (2) основные понятия, связанные с уравнениями, неравенствами, системами;
- (3) соотношения с радикалами;
- (4) показательные, логарифмические, тригонометрические, смешанные соотношения;
- (5) задачи с параметрами.

Кратко изложим особенности содержания статей этого цикла и, по возможности, обратим внимание на трехчастность изложения материала.

2. Текстовые задачи как источник освоения принципов моделирования

Две статьи [1, 15] посвящены текстовым задачам. При обсуждении такого рода задач, связанных с математическим моделированием, по существу отсутствует теоретическая часть. Это объясняется тем, что исходная задача ставится на языке общения, без особого привлечения специальных терминов. Построение модели описываемой в задаче ситуации предлагается осуществлять на основе небольшого набора рекомендаций, который можно рассматривать как технологическую составляющую. Прочитав их наиболее существенные стороны. Подробнее принципы, положенные в основу анализа текстовых задач, рассмотрены в [18].

1. В основе любой текстовой задачи лежат взаимосвязи между рассматриваемыми в ней величинами и/или значениями некоторой величины (будем считать, что величина — это объект, процесс, характеристика и т. п., которые можно измерить, т. е. сравнить с эталоном и выразить числом). Такие связи при переводе на математический язык могут превратиться в соотношение — уравнение или неравенство, а могут приводить к каким-то математическим выражениям, характеризующим указанную в задаче изменяемость величин. В любом случае для перевода на математический язык потребуются краткие выражения для обозначения участвующих в задаче величин. Один из важных принципов при введении обозначений можно сформулировать так: *при переводе задачи на математический язык лучше вводить переменных столько и таких, чтобы было удобно составлять формальные математические соотношения.*

Обозначения для участвующих в задаче величин следует вводить только после выполнения рекомендаций следующих ниже пп. 2, 3.

2. Начинать решение текстовой задачи надо с выяснения, есть ли в тексте задачи фразы, в которых говорится о сравнении (равенстве или неравенстве) двух различных способов выражения одной и той же величины или о сравнении двух значений некоторой величины, относящихся к разным объектам (назовем ее для краткости *балансовой величиной*). Если такие фразы есть, то надо ими воспользоваться, т. е. выразить величину, о которой в какой-либо из фраз говорится, теми способами, о которых речь идет во фразах, и записать указанное сравнение между выражениями, т. е. соединить эти выражения знаком $=$ или $\leq$, $\geq$ и т. п.

3. Если фраз, о которых идет речь в п. 2, нет, то надо ввести обозначения для всех участвующих в тексте задачи величин, записать взаимосвязи между ними, записать в виде математического выражения искомую величину и стараться прийти к тому, что надо найти, используя взаимосвязи между введенными величинами и/или изменимость искомой величины.

4. Перевод условия задачи на математический язык всегда завершается четким указанием искомой величины. Нередко оказывается, что искомая величина не входит в набор введенных при составлении соотношений переменных, а выражается через них в виде какой-то их комбинации. Для поиска требуемой величины при решении соотношения бывает удобно использовать замену переменных.

Описанные в пп. 1–4 наблюдения можно оформить в виде лаконичных рекомендаций, которые нетрудно запомнить и на первых порах произносить при анализе текстовой задачи. Эти рекомендации специально сделаны, может быть, излишне краткими для лучшей их запоминаемости

1. Ищем фразы.
2. Определяем балансовую величину.
3. Вводим переменные.
4. Записываем баланс или сравнение.
5. Определяем вид искомой величины.
6. Находим искомую величину исходя из имеющихся соотношений.

Изложенные технологические шаги носят довольно универсальный характер и поддаются конкретизации с учетом специфики рассматриваемых задач. Приведем пример рекомендации более частного характера относительно задач на движение и работу [1].

Если в задаче говорится о сравнении времени, в течение которого происходили какие-то связанные с движением или работой события (например, сравнивается время на преодоление некоего пути какими-то двумя движущимися объектами, время выполнения работы совместно двумя работниками и время выполнения одним из работников и т. п.), то в качестве переменных лучше брать путь и скорости (объем работы и производительности), через эти величины выражать соответствующие промежутки времени и их сравнивать (чаще всего приравнивать). Правда, при этом нередко получается так, что найти требуется не те величины, в которых записываются соотношения, а комбинации этих величин, но тем самым трудности

переносятся из области составления соотношений в область анализа полученных соотношений, т. е. в область выражения каких-то комбинаций введенных величин на основе полученных соотношений.

Более подробную информацию об инструкциях применительно к частным ситуациям можно найти в [18].

3. Соотношения как способ задания множества

Второй блок в цикле, состоящий из статей [2–6, 13, 14], посвящен уравнениям и неравенствам. В первую очередь в [2] изложен теоретический материал, в рамках которого предложен некоторый единый подход к понятиям уравнения, неравенства, системы, при котором эти объекты обобщаются и становятся частными случаями одного объекта, названного соотношением.

Сначала отмечается, что уравнение или неравенство есть не что иное как способ задания множества, и вопрос о нахождении множества решений можно рассматривать как переход от одного способа задания множества к другому, а именно наиболее простому в рассматриваемой ситуации, обычно либо в виде перечисления всех его элементов, либо с участием промежутков. Затем на основе указанного наблюдения предлагается новое понятие соотношения, вбирающее в себя понятия уравнения и неравенства, а также позволяющее обращаться с конструкциями, получаемыми в результате совместного рассмотрения нескольких соотношений.

Опишем основные положения теоретической и технологической частей.

3.1. Понятие соотношения. Равносильность. К теоретической части относятся понятие соотношения, равносильность, ограничения, сопровождающие соотношение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Математические выражения, которые можно отнести к какому-либо из следующих ниже пунктов 1–3, будем называть *соотношениями*:

- 1) уравнения и неравенства являются соотношениями;
- 2) конечный набор соотношений, описывающий множество, для элементов которого верны все соотношения данного набора, является соотношением, называемым *системой данного набора соотношений*; множеством решений системы является пересечение множеств решений соотношений данного набора;

3) конечный набор соотношений, описывающий множество, для элементов которого верно хотя бы одно из соотношений данного набора, является соотношением, называемым *совокупностью данного набора соотношений*; множеством решений совокупности является объединение множеств решений соотношений данного набора.

Таким образом, каждое соотношение задает множество элементов, для которых это соотношение является верным (числовым) соотношением, и *решить соотношение* означает дать наиболее простое описание множества всех объектов, обладающих указанным в соотношении свойством, т. е. такое описание, которое не поддается упрощению. Кстати, договоренность о том, что значит решить соотношение, служит признаком завершения решения.

Поскольку соотношение связано с множеством его решений, важны понятия, отражающие взаимосвязь множеств решений двух соотношений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два соотношения называют *равносильными* (или *эквивалентными*), если множества их решений совпадают, т. е. либо оба соотношения не имеют решений, либо каждое решение одного из соотношений будет решением другого и каждое решение второго соотношения будет решением первого.

Если каждое решение первого соотношения будет решением второго, то говорят, что второе является *следствием* первого.

3.2. Шаги решения соотношения. Процесс решения соотношения состоит в серии переходов в результате некоторых преобразований от одного соотношения к другому, приводящих к соотношению, множество решений которого легко находится. Используя введенные понятия, можно сказать, что решение соотношения желательно организовать как цепочку переходов, в результате которых сохраняется множество решений. Переход, сохраняющий множество решений, будем называть *равносильным*. Тем самым если в решении использованы только равносильные переходы, можно гарантировать, что множество решений полученного в результате соотношения совпадает с множеством решений исходного.

Если на каком-то шаге происходит переход к следствию, то в множестве решений последнего соотношения могут оказаться значения неизвестной, не являющиеся решениями исходного, и тогда требуется проведение какой-то процедуры, например проверки (если это возможно), для исключения тех элементов, которые не являют-

ся решениями исходного соотношения. Если невозможно проверить, какие из решений итогового соотношения будут удовлетворять исходному (так бывает обычно при решении неравенства), то переход к следствию недопустим ни на каком из шагов и надо всегда обеспечивать равносильность преобразуемых соотношений. О технологии выполнения равносильных переходов речь пойдет ниже.

3.3. Ограничения, сопровождающие соотношение. Сформируем процедуру перехода от одного соотношения к другому, равносильному данному. Она будет основана на контроле ограничений (необходимых условий), сопровождающих данное соотношение.

Прежде чем дать понятие ограничения, приведем соображения, поясняющие его. Термин «ограничение» будет употребляться для выражения необходимых условий, вытекающих из того факта, что данное значение неизвестной является решением рассматриваемого соотношения (о значении необходимых условий см., например, [19, 20]).

Будем рассуждать так. Пусть дано соотношение относительно неизвестной x , и пусть какое-то значение x является его решением. Тогда при проверке того, что x — решение, мы должны совершить определенные действия. Сначала надо найти значения функций, участвующих в соотношении и обеспечивающих описание задаваемого соотношением множества, затем составить из этих значений предписанную соотношением структуру и констатировать, станет ли она верной числовой структурой для данного значения x . На каждом шаге этого процесса возникают свои требования к рассматриваемому значению неизвестной. Иначе говоря, появляются необходимые условия того, что x — решение соотношения (или, как иногда говорят, выводятся следствия из предположения о том, что x — решение). Такие требования (необходимые условия) могут быть связаны с разными обстоятельствами, но чаще всего они присутствуют. Эти требования надо учитывать в процессе решения, и желательно такой учет совершать на каждом шаге решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Требования к значениям неизвестной, вытекающие из предположения о том, что эти значения являются решениями соотношения, будем называть *ограничениями, сопровождающими данное соотношение*.

Будем различать ограничения по крайней мере трех типов: связанные с областью определения, с множеством значений и общие

ограничения, вызванные видом соотношения. Обсудим каждый из этих типов.

Прежде чем приступить к проверке того, входит ли данное значение неизвестной в множество, описываемое рассматриваемым соотношением, требуется найти значения каких-то участвующих в соотношении функций, и требования принадлежности значения неизвестной областям определения таких функций будем называть *ограничениями, вызванными областью определения*. Тем самым этот тип ограничений связан с учетом областей определения входящих в соотношение функций и широко распространен — он задает так называемую область допустимых значений (ОДЗ), имеется в виду неизвестной, хотя это уточнение для чего-то — для ясности или, скорее, краткости и неясности — опускают.

Кроме области определения у каждой функции есть множество значений, и его тоже нужно учитывать, но не на этапе возможности нахождения значений функций, а на этапе сравнения этих значений. Ограничения на неизвестные, состоящие из требований принадлежности соответствующих величин множеств значений участвующих в соотношении функций, будем называть *ограничениями, связанными с множеством значений*.

Например, в уравнении $f(x) = \sqrt{g(x)}$ есть ограничение $g(x) \geq 0$, вызванное областью определения функции «корень квадратный», и ограничение $f(x) \geq 0$, порожденное множеством значений этой функции (если x — решение, то величина $f(x)$ должна находиться в множестве значений функции «корень квадратный», так как в этом случае $f(x)$ сравнивается с неотрицательным корнем квадратным из некоторого числа).

Наконец, будем отмечать *ограничения общего типа*, вызванные видом рассматриваемого соотношения. Для разных соотношений ограничения этого типа проявляются по-разному. Например, если рассматривается уравнение, то обе его части либо одного знака, либо равны нулю одновременно. Аналогично для неравенства $f(x) \geq \sqrt{g(x)}$ можно выставить общее ограничение на $f(x)$ вида $f(x) \geq 0$, так как, судя по неравенству, если x — решение, то правая часть неотрицательна, а левая должна быть не меньше правой, так что с необходимостью тоже неотрицательна.

3.4. Технологические рекомендации по организации процесса решения соотношения. Главный принцип, которым будем руководствоваться при совершении преобразований для перехода к

равносильным соотношениям, таков: *сохраняй ограничения, имевшиеся в исходном соотношении*.

Перейдем к обсуждению того, как в рамках изложенной терминологии можно организовывать процесс решения соотношений.

При решении соотношений нередко приходится выполнять такие преобразования, которые нарушают ограничения в сторону их ослабления, т. е. преобразования, которые снимают имевшиеся ограничения. К таким преобразованиям относятся, например, возведение в квадрат или потенцирование (избавление от логарифма). Что делать, если мы применяем преобразования, снимающие какие-то ограничения? В таком случае *те ограничения, которые исчезли в результате преобразования, надо подсоединять в систему с преобразованным соотношением*. Иначе говоря, от данного соотношения будем переходить к системе, состоящей из преобразованного соотношения и исчезнувших ограничений.

Какое место может занять принцип сохранения ограничений в процессе решения соотношения? Он лежит в основе выяснения, какому соотношению, состоящему из более простых, равносильно данное соотношение. Применение принципа не гарантирует автоматически равносильности (это лишь необходимые условия), однако позволяет регулярным способом выяснить, чему данное соотношение может быть равносильным, после чего следует доказывать равносильность и решать. Кстати, не так уж много различных видов уравнений и неравенств доводится использовать в рамках школьного курса математики, а доказывать равносильность при преобразовании того или иного вида соотношений достаточно один раз, потом ее можно использовать.

Как отмечено выше, процесс решения соотношения состоит в серии последовательных переходов от одного соотношения к другому в результате некоторых преобразований, приводящей к соотношению, множество решений которого легко находится. Процесс решения желательно организовать как серию переходов, сохраняющих множество решений (равносильных переходов). Особенно важно соблюдать равносильность при решении неравенств.

Таким образом, решение соотношения — это процесс, *направленный в одну сторону*, от данного соотношения к другому, и продолжающийся до тех пор, пока не выявится множество решений. Переход от одного соотношения к другому состоит в том, что данное соотношение преобразуется с применением какого-то свойства, равенства,

формулы и т. п. Отметим основные типы преобразований и обсудим, что может произойти при их применении.

1. Преобразования, затрагивающие только внутреннюю конструкцию соотношения и не нарушающие имевшихся в соотношении ограничений. К таким преобразованиям можно отнести раскрытие скобок, вынесение общего множителя за скобки, перенос выражения из одной части в другую и т. п. (но не сокращение дроби на выражение с буквой). Эти преобразования «безопасны» и их можно проводить без дополнительного логического анализа получаемого результата.

2. Преобразования, связанные с внешними факторами, такими как применение к обеим частям равенства или неравенства какой-либо функции, например, возведение обеих частей уравнения в квадрат или извлечение корня из обеих частей, взятие логарифмов от обеих частей уравнения или избавление от логарифмов, и т. д. Такие преобразования требуют тщательного анализа при их применении, ибо они могут снять какие-то ограничения или, напротив, добавить ограничения, что может повлиять на множество решений преобразуемого соотношения. С преобразованиями этого типа встречаются при рассмотрении уравнений и неравенств с радикалами при возведении обеих частей уравнения или неравенства в квадрат.

3. Преобразования, состоящие в замене какого-то фрагмента данного соотношения другим фрагментом на основании формулы или свойства. В этом случае надо применять формулы или свойства, справедливые при имеющихся в данном соотношении ограничениях. После проведения такого рода преобразований могут нарушаться ограничения, и тогда приходится какими-то действиями обеспечивать их сохранение, например, добавлять в систему к получаемому соотношению соответствующие требования. Наиболее ярко такого рода преобразования проявляются в логарифмических соотношениях (см. ниже).

4. Выполнение замены переменной или подстановки, при которых либо какое-то выражение заменяется одной буквой, либо на место переменной подставляется выражение с новой переменной.

3.5. Организация процесса анализа соотношения. Опишем технологию применения теоретического материала к анализу соотношений. Процесс решения можно организовывать либо путем постановки вопросов, ответов на них и выполнения рекомендаций, либо в виде рассуждений и наблюдений. В любом случае полезны во-

просы, уместные в текущей ситуации. Есть вопросы, относящиеся к сравнительно широкому набору ситуаций, и их желательно относить к большинству соотношений. Применительно к уравнениям или неравенствам полезно задавать такой вопрос: **каков вид соотношения?** Вид уравнения (неравенства) определяется последним действием, которое совершается при проверке его справедливости на каком-то значении неизвестной. Таким действием может быть применение какой-то функции и сравнение соответствующего значения с каким-то выражением, например, при сравнении значения корня квадратного появляются соотношения вида $a = \sqrt{b}$, $a > \sqrt{b}$ и т. п., может быть так, что сравниваются значения двух функций, например $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, $\log_a b = \log_a c$ и т. п. Весьма привлекательны такие соотношения, в которых последним действием служит умножение и происходит сравнение с нулем. Так появляются соотношения вида $a \cdot b = 0$, $a \cdot b > 0$ и т. д.

Можно по определенным признакам выделить несколько типов уравнений (неравенств), к которым можно отнести достаточно много рассматриваемых уравнений (неравенств), и для каждого из этих типов предложить пути их решения. Это не будут, разумеется, универсальные средства, позволяющие решить любое соотношение данного типа, но, руководствуясь определенными наблюдениями, можно прикладывать какие-то цепочки в процессе их решения.

В статьях [3–6, 13, 14] выделяются иррациональные, логарифмические, показательные, тригонометрические и смешанные соотношения. В соотношениях каждого из указанных типов есть особенности их анализа, которые оформляются либо в систему наблюдений и рассуждений, либо организуются в виде вопросов и рекомендаций. В любом случае такие системы позволяют предпринять по крайней мере первые шаги на пути решения.

Кратко опишем наборы рекомендаций для решения уравнений некоторых распространенных типов.

3.6. Иррациональные уравнения [2]. К иррациональным уравнениям или неравенствам можно отнести такие, в которых присутствует радикал. Посмотрим: как можно провести анализ несложных иррациональных уравнений или неравенств. Рассмотрим простейшее уравнение с участием одного корня (радикала), а именно уравнение вида

$$a = \sqrt{b} \quad (4)$$

(a, b могут содержать неизвестные). В этом уравнении есть ограничение $a \geq 0$, обусловленное множеством значений функции $v = \sqrt{u}$, и ограничение $b \geq 0$, вызванное ее областью определения. Для решения уравнения (4) возведем его в квадрат (под возведением уравнения или неравенства в квадрат понимаем переход от уравнения вида $c = d$ или неравенства вида $c < d$ и т. п. к уравнению $c^2 = d^2$, соответственно $c^2 < d^2$ и т. п.), при этом позаботимся о сохранении всех ограничений. После возведения в квадрат получаем уравнение

$$a^2 = b,$$

в котором есть одно ограничение $b \geq 0$, вызванное множеством значений функции $v = u^2$. Как видим, ограничение $b \geq 0$ сохранилось (правда, изменился его статус — в исходном оно было связано с областью определения, а в преобразованном — с множеством значений, но для нас это не играет никакой роли), а ограничение $a \geq 0$ исчезло. Значит, для сохранения равносильности надо вместе с преобразованным уравнением потребовать выполнения ограничения $a \geq 0$, так что исходное уравнение равносильно системе:

$$a = \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b, \\ a \geq 0. \end{cases}$$

3.7. Простейшие неравенства с корнем [4]. Рассмотрим неравенства вида

$$a < \sqrt{b} \tag{5}$$

и

$$a > \sqrt{b}, \tag{6}$$

где a и b — выражения, содержащие (возможно) неизвестную величину.

Анализ соотношений вообще и неравенств с корнями в частности бывает удобно проводить путем постановки вопросов и формирования ответов на них. Чем более уместны вопросы и точны ответы, тем эффективнее поиск решения. Вопросы делают процесс решения целенаправленным и организованным. Составим для анализа неравенств (5) и (6) список возможных вопросов и ответов на них. Он не претендует на полноту или завершенность, может быть взят читателем за основу и модифицирован с учетом опыта и потребностей.

Начнем с постановки цели: надо возводить неравенство в квадрат.

— Когда можно возводить неравенство в квадрат?

— Когда обе его части неотрицательны.

— А у нас?

— Правая неотрицательна, а левая неизвестного знака.

— Что делать в такой ситуации?

— Рассматривать два случая:

либо левая часть неотрицательна *и тогда* неравенство можно возвести в квадрат (т. е. возвести обе части неравенства в квадрат), позаботившись о сохранении ограничений,

либо левая часть отрицательна *и тогда* в квадрат возводить нельзя!

— Что делать во втором случае, когда в квадрат возводить нельзя?

— Делать выводы о множестве решений на основе сравнения знаков частей, помня о том, что любое отрицательное число меньше любого неотрицательного и нет отрицательных чисел, больших хотя какого-то неотрицательного.

Подобные диалоги из вопросов и ответов полезны и при анализе других ситуаций.

Обратим внимание на выделенные союзы «либо» (или), «и». Они служат для формирования структуры данного соотношения, т. е. такой конструкции, которая равносильна данной, сформирована с использованием совокупностей и/или систем и в которой отсутствуют имевшиеся в данном соотношении особенности (в примере — без радикала).

Посмотрим, какому соотношению окажется равносильным каждое из неравенств (5) и (6) в результате применения к ним перечня вопросов и ответов. Начнем с неравенства $a < \sqrt{b}$. Правая часть неотрицательна, и если левая тоже неотрицательна, то можно возвести неравенство в квадрат: $a^2 < b$, замечая при этом, что левая часть как квадрат какого-то выражения неотрицательна, правая согласно знаку неравенства больше левой, а значит, на множестве решений последнего неравенства она также неотрицательна, стало быть, на этом множестве имевшееся ограничение $b \geq 0$ выполнено автоматически. Если же левая часть отрицательна, то в квадрат возводить нельзя, и рассуждаем так: в неравенстве говорится о том, что отрицательное число в левой части меньше неотрицательного из правой, когда это будет? Всегда, лишь бы были выполнены ограничения, т. е.

$b \geq 0$. Подводя итог, можно констатировать, что

$$a < \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ a^2 < b, \\ a < 0, \\ b \geq 0. \end{cases}$$

Эту структуру можно сопроводить следующим словесным описанием: *либо* левая часть неотрицательна *и тогда* можно возвести неравенство в квадрат: $a^2 < b$, заметив, что присутствовавшее в (5) ограничение $b \geq 0$ вытекает из неравенства $a^2 < b$, *либо* левая часть отрицательна *и тогда* рассматриваемое неравенство выполнено при условии неотрицательности подкоренного выражения.

Перейдем к неравенству $a > \sqrt{b}$. Здесь словесное описание и структура таковы: *либо* левая часть неотрицательна *и тогда* можно возвести неравенство в квадрат: $a^2 > b$, позаботившись явно об ограничениях: $b \geq 0$; *либо* левая часть отрицательна *и тогда* неравенство (6) не выполнено никогда (срабатывают общие ограничения):

$$a > \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ a^2 > b, \\ b \geq 0. \end{cases}$$

3.8. Логарифмические соотношения [5]. К логарифмическим будем относить только такие соотношения, в которых переменная участвует только под знаком логарифма (возможно, и в основаниях логарифмов). Тем самым к логарифмическим мы относим соотношения, в которых неизвестная входит лишь посредством выражений вида $\log_{\varphi(x)} f(x)$. Такая договоренность вызвана тем, что логарифмические соотношения «в чистом виде» могут быть проанализированы регулярными способами.

При решении логарифмического соотношения надо стремиться перейти от него к соотношению без участия логарифма, после чего можно сконцентрировать внимание на решении соотношения иного типа.

При применении свойств логарифма проявляются особенности преобразований третьего типа, и это связано с различием ограничений для левой и правой частей равенств, выражающих некоторые из свойств логарифмов. Напомним такие свойства. Обратим особое внимание на то, что представленные свойства будут использованы

как равенства, справедливые при ограничениях, присущих их *левым* частям, и применяемые «слева направо», т. е. при их использовании надлежит левые части таких равенств заменять правыми с учетом налагаемых левыми частями ограничений. Каждое свойство сопровождается небольшим словосочетанием, полезным при его применении (выражения, стоящие под знаком логарифма, будем называть *подлогарифмическими выражениями*).

Сумма логарифмов равна логарифму произведения:

$$\log_a u + \log_a v = \log_a uv, \quad a > 0, a \neq 1, u > 0 \text{ или } v > 0.$$

Логарифм произведения равен сумме логарифмов модулей величин:

$$\log_a uv = \log_a |u| + \log_a |v|, \quad a > 0, a \neq 1, uv > 0.$$

Разность логарифмов равна логарифму отношения:

$$\log_a u - \log_a v = \log_a \frac{u}{v}, \quad a > 0, a \neq 1, u > 0 \text{ или } v > 0.$$

Логарифм отношения равен разности логарифмов модулей величин:

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a |u| - \log_a |v|, \quad a > 0, a \neq 1, uv > 0.$$

Множитель перед логарифмом можно поставить показателем степени подлогарифмического выражения:

$$p \log_a u = \log_a u^p, \quad a > 0, a \neq 1, u > 0, p \in \mathbb{R}.$$

Показатель четной степени в подлогарифмическом выражении можно поставить множителем перед логарифмом модуля подлогарифмического выражения:

$$\log_a u^{2k} = 2k \log_a |u|, \quad a > 0, a \neq 1, u \neq 0, k \in \mathbb{N},$$

в частности,

$$\log_a x^2 = 2 \log_a |x|, \quad a > 0, a \neq 1, x \neq 0.$$

Переходы, аналогичные рассмотренным здесь, встречаются и в других ситуациях. Например, выражение $\sqrt{ab}$ надлежит заменять произведением $\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$, а выражение $\sqrt{a}\sqrt{b}$ — корнем $\sqrt{ab}$. Контроль за сохранением ограничений здесь немного сложнее, чем для

логарифмов, ввиду возможности равенства нулю, и мы на этом останавливаться не будем.

В логарифмических соотношениях можно предложить эффективный алгоритм выбора пути решения и набор инструкций, исполняемых в зависимости от выбора пути.

Процесс решения логарифмического уравнения или неравенства можно осуществлять путем постановки вопросов из следующего ниже небольшого перечня, ответов на них и выполнения рекомендаций. Дав ответ на поставленный вопрос, следует перейти к соответствующему пункту и выполнить данные в нем рекомендации. Главную роль в выборе пути решения играет вопрос п. 3.

1. Одно ли основание во всех логарифмах? Да — перейти к п. 3, нет — к п. 2.

2. Привести все логарифмы к одному основанию. Лучше приводить к простому постоянному основанию. Перейти к п. 3.

3. Встречается ли в уравнении или неравенстве логарифм в степени, под корнем, в знаменателе дроби или произведение логарифмов? Да — перейти к п. 4, нет — к п. 5.

Задав вопрос п. 3, надо проанализировать, есть ли в уравнении или неравенстве хотя бы одно из указанных в вопросе обстоятельств, т. е. присутствует ли логарифм в степени (выражение вида $\log_a^n b$, $n \in \mathbb{N}$), или логарифм под корнем, или логарифм в знаменателе дроби, или произведение логарифмов, и если хотя бы одна из отмеченных ситуаций есть, то надо перейти к выполнению рекомендаций п. 4, если же нет ни одного из отмеченных обстоятельств, то перейти к п. 5. Этот вопрос играет роль переключателя при решении соотношения, позволяющего выбрать действия, наиболее адекватные для продолжения решения.

4. Пользуясь свойствами и переходя от логарифма произведения к сумме логарифмов, от логарифма дроби — к разности логарифмов, убирая показатели степени в подлогарифмических выражениях и ставя их коэффициентами перед логарифмами, стараемся раздробить входящие в уравнение или неравенство логарифмы на возможно мелкие составляющие с тем, чтобы увидеть (и сделать) **замену** и перейти к уравнению или неравенству без логарифма. Решив его относительно новой переменной, вернуться к прежней переменной.

Стремление к возможно более простым фрагментам в рекомендации п. 4 не является догмой, это, скорее, руководство к действию,

главная цель всех преобразований при использовании рекомендаций п. 4 — поиск замены.

5. Пользуясь свойствами и переходя от суммы логарифмов к логарифму произведения, от разности логарифмов — к логарифму дроби, убирая коэффициенты перед логарифмами в показатели степени подлогарифмических выражений, заменяя константы логарифмами, стараемся собрать всё в один логарифм и прийти к соотношению простейшего вида.

Зачастую в результате выполнения предписаний предложенного алгоритма приходим к соотношению без логарифма.

3.9. Показательные соотношения [6]. Договоримся к показательным относить только такие уравнения и неравенства, в которых неизвестная величина участвует в показателе степени и, возможно, в ее основании, т. е. только посредством выражений вида $\varphi(x)^{f(x)}$, где φ — положительная функция, чаще всего постоянная. Основная цель при анализе показательного соотношения состоит в том, чтобы освободиться от участия степени и сосредоточиться на решении соотношения другого типа.

Кратко напомним алгоритмику анализа показательных уравнений, о неравенствах можно сказать то же самое с заменой слова «уравнение» словом «неравенство».

Поскольку основной целью в решении показательного уравнения является избавление от участия степени, в первую очередь надо делать шаги, которые позволили бы оценить, можно ли в результате преобразований, основанных на свойствах степени, привести уравнение к простейшему виду, т. е. к сравнению степеней с одинаковыми постоянными основаниями (или с одинаковыми показателями). Если такое удастся, то происходит непосредственное избавление от степени.

Если же привести уравнение к простейшему в результате преобразований не удастся, то надо обратить внимание на поиск замены, т. е. посмотреть, входит ли переменная в уравнение посредством одного и того же выражения в виде степени. Чаще всего замена приводит к квадратным уравнениям, поэтому остановимся на отличительных особенностях таких уравнений.

В первую очередь следует изучить, можно ли все степени, участвующие в уравнении, привести к одному основанию, в случае положительного результата посмотреть, будут ли показатели степеней различаться в 2 раза, и если будут, то постараться привести уравне-

ние к виду

$$\alpha \cdot a^{2f(x)} + \beta \cdot a^{f(x)} + \gamma = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad (7)$$

которое после замены $a^{f(x)} = z$ превращается в квадратное уравнение вида $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$. После нахождения корней последнего уравнения вернуться к переменной x , решив уравнение простейшего вида.

Если же привести все участвующие в уравнении степени к одному основанию не удастся, то надо посмотреть, возможно ли привести их к двум основаниям и уравнение — к уравнению вида

$$\alpha \cdot a^{2f(x)} + \beta \cdot a^{f(x)} b^{f(x)} + \gamma \cdot b^{2f(x)} = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad a, b > 0.$$

Величина $b^{2f(x)}$ отлична от нуля (более того, положительна), следовательно, деление на нее последнего уравнения приводит к равносильному уравнению

$$\alpha \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + \beta \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + \gamma = 0,$$

имеющему вид (7) с основанием $\frac{a}{b}$.

Если показательное уравнение или неравенство не сводится к соотношению простейшего вида и нет поводов для указанных выше замен, то надо выяснять его вид и применять технику решения соответствующего соотношения.

3.10. Тригонометрические соотношения [13, 14]. К тригонометрическим отнесем соотношения, в которых переменная участвует только в аргументе тригонометрических функций. Даже при такой, довольно жесткой, точке зрения многообразие тригонометрических соотношений велико. В указанных выше статьях рассматриваются исключительно уравнения, так как решение неравенств не дает столь богатого разнообразия, как уравнения. Более того, цель статьи [13] в том, чтобы сформировать у учащегося навыки работы с несложными тригонометрическими уравнениями. Проблема здесь в том, что тригонометрические функции обладают большим набором свойств по сравнению с другими классами функций, для них есть масса формул, преобразовательная составляющая при решении тригонометрического уравнения довольно разнообразна и вопрос выбора пути решения не столь прозрачен, сколь, например,

для логарифмических соотношений. Поэтому предлагается довольно разветвленная конструкция для организации процесса решения тригонометрического уравнения, в котором никаких операций, кроме обычных алгебраических операций сложения и умножения, не используется, т. е. уравнения, в котором нет поводов для появления ограничений и необходимости отбора корней. Анализ состоит в том, что к данному уравнению будем относить содержание пунктов из следующего ниже перечня и либо выполнять рекомендации, либо переходить к другим пунктам, и так будем продолжать до тех пор, пока не достигнем хоть какой-то определенности. Разумеется, этот перечень субъективен и не претендует на универсальность, однако может помочь сделать первые шаги в решении несложных тригонометрических уравнений. Мы не касаемся уравнений, решение которых основано на каких-то специальных методах.

Формулировки вопросов и рекомендаций в пунктах весьма краткие, по ним можно только выбрать действие, а о его содержании добавлено в комментариях (см. [13]). Так сделано для того, чтобы не загромождать перечень деталями для его обозримости. Кстати, в [13] это перечень организован также в виде блок-схемы.

Перечень вопросов и рекомендаций

1. Однотипны ли функции, входящие в уравнение (т. е. входят ли только функции $\sin$, $\cos$ или только функции tg , ctg)? Да — к п. 3, нет — к п. 2.

2. Привести к однотипным функциям (обычно к $\sin$, $\cos$).

3. Входят ли в уравнение коэффициенты $\sqrt{2}$ или $\sqrt{3}$? Да — к п. 4, нет — к п. 5.

4. Посмотреть, если ли возможность ввести дополнительный угол, используя формулы синуса/косинуса суммы/разности с конкретными углами $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$. Если такая возможность есть, воспользоваться ею и перейти к п. 5.

5. Одинаковы ли аргументы? Да — к п. 6, нет — к п. 12.

6. Входят ли функции $\sin$, $\cos$ в уравнение так, что в нем участвуют какие-то из выражений вида $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, $\sin x \cos x$ и никак иначе тригонометрические функции в уравнение не входят, т. е. имеет ли уравнение вид

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x + d = 0, \quad (8)$$

где a, b, c, d — числа? Да — к п. 7, нет — к п. 8.

7. В уравнении вида (8), пользуясь формулой $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, представить свободный член d в виде $d = d \sin^2 x + d \cos^2 x$. Затем проанализировать, будет ли $\cos x = 0$ давать корни полученного уравнения, и если да, то перенести всё в левую часть, в правой оставив нуль, вынести $\cos x$ за скобки и разбираться с уравнением вида «произведение равно нулю». Если же $\cos x = 0$ не приводит к корням уравнения, то делим почленно на $\cos^2 x$ (в этом случае такая операция не может изменить множества корней — ведь $\cos x = 0$ не корень) и приходим к квадратному уравнению относительно $\tan x$.

8. Входят ли функции $\sin x$, $\cos x$ в уравнение в первой и во второй степенях и никак иначе не встречаются? Да — к п. 9, нет — к п. 10.

9. Попытаться перейти к той функции, которая входит в уравнение в первой степени, используя формулу $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Если при этом не удастся получить квадратное относительно этой функции уравнение, то обратиться к пожеланиям п. 17.

10. Входят ли функции $\sin x$, $\cos x$ в уравнение только в первой степени, т. е. имеет ли уравнение вид

$$a \cos x + b \sin x = c?$$

Да — к п. 11, нет — к п. 17.

11. Делаем замену $x = 2t$, в результате имеем

$$a \cos 2t + b \sin 2t = c \Leftrightarrow a \cos^2 t - a \sin^2 t + 2b \sin t \cos t = c,$$

решаем полученное уравнение согласно п. 7, находим t и возвращаемся к переменной x . Знатоки могут воспользоваться методом введения дополнительного угла.

12. В уравнении участвуют два аргумента? Да — к п. 13, нет — к п. 16.

13. Различаются ли аргументы в 2 раза? Да — к п. 14, нет — к п. 15.

14. Пользуясь формулами синуса и/или косинуса двойного аргумента, перейти к одному аргументу, лучше к меньшему, и перейти к п. 5.

15. Исследовать, есть ли возможность привести уравнение к виду

$$\sin \alpha = \pm \sin \beta, \quad \cos \alpha = \pm \cos \beta, \quad \sin \alpha = \pm \cos \beta$$

или, что то же,

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 0, \quad \cos \alpha \pm \cos \beta = 0, \quad \sin \alpha \pm \cos \beta = 0. \quad (9)$$

Если получили одно из первых двух уравнений в (9), то преобразовать его левую часть в произведение. Третье уравнение может быть приведено либо к первому, либо ко второму виду с помощью формул приведения.

16. Если в уравнении несколько аргументов, следует попробовать воспользоваться формулами разности или суммы синусов или косинусов с тем, чтобы уменьшить количество аргументов. При этом следует помнить, что в результате применения указанных формул из пары аргументов α, β получаем полусумму $\frac{\alpha + \beta}{2}$ и полуразность $\frac{\alpha - \beta}{2}$, тем самым предпочтительнее комбинировать так, чтобы в качестве полусуммы или полуразности получались аргументы, уже имевшиеся в исходном уравнении.

17. Если не удалось решить уравнение, пользуясь советами предыдущих пунктов, то рекомендуется сделать следующее. Обращаясь к уравнению, надо поставить вопрос: есть ли возможность воспользоваться какой-либо тригонометрической формулой? Если можно, то воспользоваться, сделать упрощения, а затем снова поставить тот же вопрос, и так до тех пор, пока остается возможность пользоваться формулами. Как только она иссякнет, надо внимательно посмотреть, какие преобразования можно сделать, например, привести к общему знаменателю, вынести общий множитель за скобки, как-то сгруппировать и т. п. Когда закончатся естественные преобразования, снова надо обратиться к вопросу о возможности использования какой-либо формулы, и так повторять до тех пор, пока уравнение не станет достаточно простым. Эти шаги можно выполнять, произнося для себя вопрос: «формула или преобразование?». В зависимости от ответа либо воспользоваться формулами, либо делать преобразования. Кстати, если в уравнении можно как воспользоваться формулой, так и выполнить преобразование, чаще всего приоритет отдается использованию формулы.

3.11. Смешанные соотношения [6]. Можно договориться о том, что если уравнение (неравенство) не относится к какому-то из отмеченных выше типов, то оно смешанного типа. Для таких соотношений инструкции для организации их решения наименее конкретны ввиду их весьма большого разнообразия. Но и здесь можно отметить достаточно эффективные пожелания.

1. При анализе соотношения смешанного типа в первую очередь полезно задать вопрос о его виде. Если удастся привести его к уравнению или неравенству, в котором в одной из частей находится произведение или частное, а в другой нуль, то мы можем применить соображения, пригодные для такого типа соотношений. Для неравенств нередко эффективен метод интервалов (см. [3]).

2. Полезно проанализировать все участвующие в соотношении элементы на предмет вносимых ими ограничений, и если ограничения приводят к обозримому множеству чисел, то можно провести проверку того, какие из них будут корнями.

3. Можно изучить левую и правую части уравнения или неравенства на предмет множеств значений. Если эти множества представляют собой промежутки, зацепляющиеся по одной точке, то это путь к нахождению решений.

4. Исследовать уравнение с точки зрения свойств функций из левой и правой частей. Бывает, что у них разного характера монотонность, абсцисса точки пересечения графиков угадывается, а монотонность гарантирует отсутствие других корней.

4. Задачи с параметрами

Наиболее полно механизмы выбора пути решения проявляются в задачах с параметрами. В статьях [7–12] даются понятийные основы, обсуждаются различные постановки задач, методы их анализа и процедуры выбора пути решения.

4.1. Теория. Как отмечено выше, каждое соотношение задает множество и *решить соотношение* означает дать наиболее простое описание множества всех значений переменной, обладающих указанным в соотношении свойством.

При рассмотрении соотношения, в котором участвуют по крайней мере две буквы, обычно должно быть ясно, какие из них служат для описания требуемого множества. Возможно, для такого описания используется несколько букв. Однако может не оказаться явного указания, какими буквами обозначены переменные. Например, поставим задачу: решить уравнение $x + y = 1$, не указав, что понимается под неизвестной (неизвестными). Можно считать, что обе буквы x и y описывают переменные, и тогда мы имеем одно уравнение с двумя неизвестными. Но в таком случае возникает вопрос: что значит его решить? Какое описание множества корней имеется в

виду? Может быть так, что уравнение окажется самым простым описанием заданного множества, и тогда вопрос о решении тривиален — множество корней дается самим уравнением. Можно спросить о том, как будет выглядеть множество корней на координатной плоскости, но это уже другая задача, не о другом способе описания множества, а о его наглядной интерпретации.

На то же самое уравнение можно взглянуть иначе, а именно можно считать, что одна из букв выражает неизвестную, например, пусть неизвестной будет x . Как в таком случае относиться к другой букве? Она должна рассматриваться как постоянная величина, но выраженная буквой, и тогда задаваемое соотношением множество может меняться в зависимости от этой буквенной постоянной. Тем самым соотношение, в котором есть буквенная постоянная, описывает не одно множество, а целый набор множеств.

Как в конкретном случае разобраться, что является переменной, а что — буквенной постоянной? Статус букв можно указывать при постановке задачи, а можно договориться о некотором правиле, применяемом по умолчанию. Обычно поступают так: для обозначения переменных используют последние буквы латинского алфавита, например x, y, z, u, v , а для буквенных постоянных — первые, например a, b, c . В принципе, в каком-то контексте и буквенные постоянные можно считать изменяющимися, однако всегда надо иметь в виду какую-то определенность.

Если поставленную выше задачу записать так: решить уравнение $x + a = 1$, то это по умолчанию уравнение с одной неизвестной x , в котором a — буквенная постоянная, и тогда его корни записываются в виде зависимости $x = 1 - a, a \in \mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Набор множеств, зависящих от какой-то буквы, например a , называют *семейством множеств*, букву a называют при этом *индексом* и об области A ее возможного изменения говорят как о *множестве индексов*. В обозначениях индекс пишут обычно справа внизу около обозначения множества и дополнительно указывают область его изменения, например $X_a, a \in A$.

Аналогично можно дать определение *семейства функций*.

Таким образом, если в соотношении кроме неизвестной участвует буквенная постоянная, то при постановке задачи о его решении имеется в виду поиск более простого описания семейства множеств, каждое из которых является множеством решений при соответствующем значении буквенной постоянной.

Поскольку наличие буквенной постоянной в соотношении приводит к семейству множеств решений, для такого соотношения можно ставить разные задачи, например, связанные с описанием количественной характеристики множеств решений в зависимости от буквенной постоянной, их расположением на числовой прямой, изучением взаимосвязей множеств решений двух соотношений и т. п.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Букву в соотношении, имеющую статус буквенной постоянной, будем называть *параметром*.

Кратко можно сказать, что параметр — это буквенная постоянная.

Как отмечено выше, обычно из контекста ясно, какие из участвующих в соотношении букв используются для обозначения переменных (неизвестных), а какие — для постоянных. Далее в общих рассуждениях, не уменьшая общности, будем считать, что неизвестная одна и параметр один. При рассмотрении примеров статус каждой из букв будет ясен из контекста.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Решением* соотношения с параметром, соответствующим некоторому значению параметра, будем называть значение неизвестной, которое при подстановке в соотношение при рассматриваемом значении параметра превращает соотношение в верное числовое соотношение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Решить соотношение с параметром* — это значит для каждого значения параметра указать соответствующее ему множество решений.

Тем самым решением соотношения с параметром служит семейство множеств, у которого параметр выступает в качестве индекса. Поэтому в качестве результата при решении соотношения с параметром должно быть указание для каждого значения параметра множества решений соотношения при данном значении параметра (возможно, пустого, если решений нет).

Отметим в качестве примеров детали технологической части в задачах с параметрами.

4.2. Технологии. Универсальных способов давать более простое описание семейства множеств решений для соотношений с параметром, по-видимому, нет, однако для наиболее часто встречающихся ситуаций можно высказать наблюдения, руководствуясь которыми можно продвигаться в решении соотношения. Приведем примеры

инструкций, относящиеся к довольно часто встречающимся ситуациям.

НАБЛЮДЕНИЕ 1. Если соотношение с параметром не содержит ограничений на неизвестную или параметр, то надо выражать неизвестную через параметр, обращаясь к рассмотрению нескольких случаев в ситуациях, когда проводимые преобразования требуют наложения ограничений. Если в соотношении есть ограничения на неизвестную или параметр, то надо перейти к его структуре, т. е. к такому соотношению, в котором ограничений нет, и заняться анализом этой структуры.

Чаше всего уравнение с параметром, в котором есть ограничения, равносильно системе из уравнения и неравенства (неравенств) без ограничений, связанного (связанных) с исчезнувшими в результате преобразования ограничениями. К совокупности систем приводит процедура избавления от модуля. Таким образом, поскольку нередко приходится анализировать системы из уравнения и неравенств(а) с параметром, естественно появляется

НАБЛЮДЕНИЕ 2. Чтобы решить систему из уравнения и неравенств с параметром, надо решить уравнение, т. е. найти зависимости неизвестной от параметра, подставить каждую из найденных зависимостей в неравенства, решить каждое из полученных неравенств относительно параметра и тем самым установить, при каких значениях параметра каждая из зависимостей будет давать решения всей системы (а не только уравнения). Эти решения при каждом значении параметра составят множество решений.

Например, чтобы решить систему
$$\begin{cases} f(a, x) = 0, \\ g(a, x) > 0 \end{cases} \quad \text{из уравнения и}$$

неравенства с параметром, можно из уравнения найти такие зависимости $x(a)$, что $f(a, x(a)) = 0$, подставить каждую из них в неравенство, решить неравенство $g(a, x(a)) > 0$ относительно a и получить, что для каждого a из множества решений последнего неравенства зависимость $x(a)$ дает решение всей системы.

4.3. О постановках задач с параметрами. Поскольку соотношение с параметром описывает семейство множеств, естественно расширяются возможности по постановкам связанных с таким семейством задач. Можно изучать количественные характеристики множеств семейства (количество решений), качественные (расположение, вид и т. п.), взаимодействие семейства множеств решений од-

ного соотношения (нахождение пересечения или объединения в разного вида формулировках), двух соотношений (включение множеств решений одного из соотношений в множества другого) и т. д. Более того, можно рассматривать не только соотношения с параметром, связанные с семейством множеств, но и семейства функций и ставить вопросы о свойствах функций данного семейства. Можно ориентироваться на семейства множеств на плоскости и изучать их свойства. Даже на этом небольшом перечне возможностей видно, сколь много различных постановок появляется в связи с параметром. В статьях указанного цикла на многие постановки предлагаются инструкции по их анализу, т. е. дана технологическая часть в изучении задач с параметрами. Отошлем читателя к текстам статей для знакомства с упомянутыми постановками и технологиями.

5. Заключение

Содержание статей [1–15] и приведенный здесь аналитический обзор показывают необходимость трехчастной структуры большинства учебных материалов по математике, включающей теорию, технологию и практику. Предлагается в технологическую часть включить:

- (а) описание признаков распознавания ситуации,
- (б) описание общих инструкций по работе с заданием в выбранной ситуации,
- (в) систему возможных ситуаций.

Для наиболее важных разделов школьного курса математики показаны конкретные возможности изложения технологической составляющей. Последовательное использование материалов с трехчастной структурой служит эффективным средством формирования алгоритмических навыков у учащихся, положительно влияет на развитие их познавательной самостоятельности и разных компетенций — от специальных до общекультурных.

Особо можно отметить, что высокая степень ясности и технологичности при изучении задач с параметрами позволяет утверждать, что этот материал может быть включен в школьный курс математики в качестве отдельного раздела и может сыграть большую положительную роль в формировании математических компетенций у учащихся.

Трехчастность учебных материалов желательна и возможна также при изложении геометрии и позволяет значительно повысить эф-

фективность ее изучения. Отдельные стороны технологической составляющей при обучении решению стереометрических задач можно найти, например, в [21].

Литература

1. Дятлов В. Н. Технологии решения задач: Лекция 1. Текстовые задачи на движение и работу // Математика.—2012.—№ 5.—С. 9–16.
2. Дятлов В. Н. Технологии решения задач: Лекция 2. Общие методы анализа уравнений и неравенств. Уравнения с радикалами // Математика.—2012.—№ 6.—С. 46–52.
3. Дятлов В. Н. Технологии решения задач: Лекция 3. Метод интервалов решения неравенств. Соотношения с модулями // Математика: Методический журнал для учителей математики.—2012.—№ 7.—С. 43–49.
4. Дятлов В. Н. Технологии решения задач: Лекция 4. Неравенства с радикалами // Математика.—2012.—№ 8.—С. 53–59.
5. Дятлов В. Н. Технологии решения задач: Лекция 5. Логарифмические соотношения // Математика.—2012.—№ 9.—С. 52–59.
6. Дятлов В. Н. Технологии решения задач: Лекция 6. Показательные и смешанные соотношения // Математика.—2012.—№ 10.—С. 49–55.
7. Дятлов В. Н. Технологии решения задач: Лекция 7. Задачи с параметрами. Основные понятия. Уравнения с параметрами // Математика.—2012.—№ 11.—С. 53–61.
8. Дятлов В. Н. Технологии решения задач: Лекция 8. Неравенства с параметрами // Математика.—2013.—№ 1.—С. 51–57.
9. Дятлов В. Н. Технологии решения задач: Лекция 9. Задачи с параметрами. Количественные характеристики множеств решений // Математика.—2013.—№ 2.—С. 53–59.
10. Дятлов В. Н. Технологии решения задач: Лекция 10. Задачи с параметрами. Качественные свойства множеств решений // Математика.—2013.—№ 3.—С. 53–59.
11. Дятлов В. Н. Технологии решения задач: Лекция 11. Задачи с параметрами. Взаимодействие множеств решений // Математика.—2013.—№ 4.—С. 53–59.
12. Дятлов В. Н. Технологии решения задач: Лекция 12. Задачи с параметрами. Анализ семейств функций или множеств. Поиск пути решения // Математика.—2013.—№ 5.—С. 52–58.
13. Дятлов В. Н. Технологии решения задач: Лекция 13. Решение тригонометрических уравнений без анализа множества корней // Математика.—2013.—№ 6.—С. 45–53.
14. Дятлов В. Н. Технологии решения задач: Лекция 14. Анализ множества корней в тригонометрическом уравнении // Математика.—2013.—№ 8.—С. 52–59.
15. Дятлов В. Н. Технологии решения задач: Лекция 15. Текстовые задачи с участием процентов или долевого содержания // Математика.—2013.—№ 11.—С. 44–49.
16. Рохлин В. А. Лекция о преподавании математики нематематикам // Мат. просвещение.—2004.—Сер. 8.—Вып. 4.—С. 21–36.
17. Пособие по решению задач к курсу «Математический анализ». Выпуск 3. Интегральное исчисление функций одной переменной / В. Н. Дятлов

- (составитель).—Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2003.—44 с.
18. Дятлов В. Н. Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 8. Текстовые задачи.—Новосибирск: Изд-во Ин-та мат-ки, 2011.
19. Дятлов В. Н., Дятлов Г. В. Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 4. О рассуждениях и утверждениях.—Новосибирск: Изд-во Ин-та мат-ки, 2008.—32 с.
20. Дятлов В. Н., Дятлов Г. В. Между школой и вузом.—Новосибирск: Изд-во Ин-та мат-ки, 2012.—112 с.
21. Дятлов В. Н., Дятлов Г. В. Пособие для подготовки к письменному вступительному экзамену по математике в НГУ. Вып. 6. Стереометрические задачи.—Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1991.—56 с.

Дятлов Владимир Николаевич
Новосибирский гос. университет
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: vndyatlov@gmail.com

ON THE THREE-PART FORM OF STUDY MATERIALS

Dyatlov V. N.

We discuss the three-part form of study materials comprising theory, technology, and practice. The importance of the technology as an intermediate part between theory and practice is emphasized. Basing on his works [1–15], the author demonstrates how this technology part can be organized. Its efficiency is justified by numerous examples from the mentioned works.

Key words: mathematics, study materials.

«ПЛОХО ПОСТАВЛЕННАЯ» ЗАДАЧА КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

М. Д. Макаренко

В статье введено понятие плохо поставленной задачи. Приведен разбор такого типа задачи на конкретном примере. Проанализировано влияние плохо поставленных задач на развитие практического мышления. Обоснованно их применение в курсах обучения как школьников, так и студентов.

Ключевые слова: практическое мышление, постановка задачи, механизмы мышления, этапы решения, анализ, синтез.

«... для практического мышления характерны «изоэренная наблюдательность», умение быстро переходить от размышления к действию и обратно, «умение видеть проблему», поскольку сама постановка проблемы является актом мышления, который требует часто большой и сложной работы»

Рубинштейн С. Л.

Хорошо известен научный подход к решению проблем: постановка задачи; построение модели; сбор и обработка исходной информации; анализ и корректировка модели; получение решения. Школа, как и ВУЗ, практически всегда предлагают хорошо поставленные, четко сформулированные задачи, лишая учащихся одного из важнейших этапов реализации практического стиля мышления — постановки задачи. Именно «постановщики» задач ценятся в научном и деловом мире. «Практическое мышление начинается не со знакомства с условиями задачи, кем-то сформулированной, а с жизненной ситуации, из которой необходимо вычленить проблему» [6].

В большинстве учебников содержатся только хорошо поставленные задачи, где в условии уже имеются все необходимые данные для нахождения решения, а сама задача приурочена к изучаемой

теме, т. е. методы ее решения точно известны учащемуся. Условие, скажем, «решить уравнение» способствует проверке усвоения конкретных математических навыков, но мало способствует развитию практического стиля мышления. Иногда ученики просто перебирают методы, применение которых они видели при решении других задач, и мы получаем «слепые навыки» типа «вижу скобки — открою скобки». С другой стороны, «хорошо поставленные» задачи необходимы, поскольку они не только экономят время педагога при обучении, но и дают яркие примеры того, как должна выглядеть задача, чтобы ее можно было начать решать. Но классно-урочная система настолько внушила детям разделение на предметы, что многие из них даже представить не могут, что задачи не бывают по математике или физике, и что на уроке математики можно применить физическую формулу, или решить задачу с помощью компьютера. Однако жизнь не ставит «хороших» задач и поэтому использование в обучении только таких задач сильно обедняет поле ментальной деятельности обучаемых. Операции мышления развиваются постепенно в ходе самого мышления, которому при традиционных методах обучения уделяется недостаточно много внимания. Ведь количество готовых однотипных решенных примеров не говорит о качестве мышления, а является только показателем уровня автоматизма применения некоего известного математического аппарата. Для развития практического мышления необходимо включить в курсы обучения специальные задачи, которые автор определил как «плохо поставленные».

Если обратить внимание на постановку олимпиадных задач, то они в своем большинстве являются «плохо» поставленными. Они обычно содержат некую преамбулу, информационный шум, из которого «олимпиаднику» необходимо самостоятельно вычленить задачу. И хотя эти задачи являются непротиворечивыми, содержат все данные, необходимые для решения, и опираются на методы, известные школьникам, все равно вызывают серьезные затруднения у учащихся именно на этапе поставки задачи, поскольку у них отсутствуют навыки отбора необходимой информации, выделения главного, моделирования, отбрасывания несущественных для данного этапа решения задачи данных. Особенно заметна неподготовленность школьника к вычленению информации и формализации задачи при выборе темы исследовательской работы. Учащиеся, изучая литературу, обращаются к глобальным проблемам науки, которые поставлены учеными, и не понимают, что задачу можно найти прямо «под

собственными ногами», и она будет ничуть не проще. Т. е. школьники, да и студенты, встречаются с такого типа задачами только на олимпиадах и в жизни. Следовательно, для развития практического мышления необходимо использовать «плохо поставленные» задачи и в учебном процессе, наряду с задачами, содержащими избыточные или противоречивые данные.

Согласно М. И. Еникееву [5] «основным механизмом мышления, его общей закономерностью является анализ через синтез». Первичный синтез состоит в необходимости понять задачу в целом, откинув частности и подробности. Представить конечную цель. Следующий этап анализа — поиск существенных признаков процесса, самых ценных, больше всего влияющих на решение. Остальные признаки пока не существенны. После этого наступает вторичный синтез — построение простого грубого очень приблизительного решения на основе выявленного свойства. При удачном синтезе, снова переходим к анализу ситуации и добавляем еще один-два дополнительных свойства, не существенно влияющих на решение, которое снова пытаемся строить. Таким образом, этапы синтеза и анализа сменяют друг друга до тех пор, пока все описанные в задаче свойства либо будут учтены при построении решения, либо будут отброшены, как не влияющие на решение. «Анализ, вычленив существенные свойства явлений из несущественных, необходимые из случайных, общие из частных, переходит в абстракцию. Синтез выступает в переходе от абстракции к мысленному восстановлению конкретного как проанализированного целого в соотношении его многообразных определений» [7].

В случае отсутствия культуры мышления, анализ и синтез происходят спонтанно, хаотически сменяют друг друга, или же учащийся действует методом проб и ошибок. Наличие у учащегося навыков мышления предполагает применение им определенной стратегии поиска решения: охватить ситуацию общими подходами — эвристическими методами поиска. К ним относятся:

- временное упрощение ситуации — наиболее часто используемый метод, позволяющий сводить решение к известным задачам;
- использование аналогий — чем шире интеллектуальная база, тем проще найти похожую ситуацию даже в смежной науке;
- решение вспомогательных задач — декомпозиция решения и выявление отдельных маленьких подзадач;
- рассмотрение «крайних случаев» — этот метод нельзя использовать на первых этапах анализа задачи, но он очень важен в дальней-

шем, поскольку именно крайние случаи иногда приводят абсолютно к новым решениям, нежели предложенным на первых шагах;

- переформулировка требований задачи — изучение свойств задачи может привести к постановке абсолютно новой задачи, решение которой позволит вернуться к исходной;

- совершение «скачков» через информационные разрывы — иногда решение задачи очень сложно построить последовательно, на некоторых этапах полезно выдвинуть недоказанную гипотезу и попробовать построить решение на ее основе и др.

Многочисленные пробные решения на различном уровне абстракции и составляют процесс мышления. Этот итерационный процесс требует также наличия критического мышления, которое помогает оценить, на каком этапе пробное решение достаточно соответствует поставленной задаче, и, значит, процесс можно завершить [9]. Кроме того, на всех этапах мыслительного процесса учащемуся необходимо помнить, что нужно найти решение не «в принципе», а решение осуществимое, реальное. Особенно ярко это как раз проявляется в текстовых математических и физических задачах, когда полученное, например, числовое значение должно быть проанализировано на соответствие условию задачи (чтобы не получалось в ответе 1,5 землекопа...).

Внедрение задач, имеющих «плохую постановку», несколько решений или не имеющие решения совсем, по мнению автора, увеличат глубину изучения курсов математики, информатики и физики. Знакомство учащихся с таким типом задач организовано нами в ходе проведения Открытой командной олимпиады по математике и информатике факультета математики и информационных технологий Северо-Осетинского государственного университета. В числе особенностей олимпиады — подбор одинаково интересных и доступных задач, как для школьников, так и для студентов, отсутствие привязанности задачи к учебному предмету. Задачи обычно имеют несколько способов решений, и от участников требуется оценить оптимальность выбранного ими способа решения. Кроме этого, практически все задачи являются моделью какой-то ситуации реальной или выдуманной. На основе текста задачи необходимо сформулировать постановку задачи. Многие задачи по уровню сложности абсолютно не подходят под категорию олимпиадных, их основное назначение раскрыть потенциал практического мышления учащихся. В качестве примера приводим условие одной из задач X Открытой командной олимпиады по математике и информатике СОГУ (май, 2013 г.).

Задача. Прямоугольник судьбы

В древних традициях существовала классификация сигнатур человеческих судеб. Сигнатура — буквально означает «подпись», «знак». Астрологи, например, считают их следствием влияния правящих планет. Одно из учений описывает создание кармического знака, снимающего сглаз, следующим образом:

а) небесные координаты двух правящих планет, образуют прямоугольник твоей судьбы;

б) две другие небесные планеты образуют прямоугольник сглаза. Причем прямоугольник хорошо наложенного сглаза всегда вмещается в прямоугольник судьбы;

с) для снятия сглаза, необходимо провести линию жизни так чтобы, равновесие твоего мира сохранилось, т. е. площадь прямоугольника судьбы, не тронутого сглазом была разделена на равные части.

Астрологи умоляют вас помочь им в решении судеб мира и просят написать компьютерную программу, которая по введенным координатам прямоугольников (стороны которых параллельны осям координат) находила бы координаты двух точек, через которые проходит линия жизни.

Если оценивать сложность задачи по числу решивших ее команд, то задачу можно отнести к наиболее сложным, поскольку не нашлось хотя бы одного, пускай и ошибочного, решения. Однако проведенный разбор решения задачи с учащимися показал, что сложным оказался не аппарат решения, который соответствует уровню знаний 5–6 классов, а выявление из представленного текста математической задачи, ее формальной постановки.

Рассмотрим подробнее процесс поиска способа решения задачи.

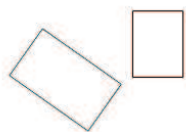


Рис. 1. Результат первого этапа синтеза.

Проведем первый этап синтеза: о чем идет речь в задаче, можно ли это выразить математическими понятиями? Выводы, которые должны сформулировать школьники, применяя метод упрощения, должны быть примерно следующие — в задаче идет речь о двух прямоугольниках, которые нужно как-то делить (см. рис. 1). Отметим,

что первый абзац в тексте задачи не имеет никакого значения для самой задачи и является некоторым антуражем. Если обратиться к словам Рубинштейна, вынесенным в эпиграф к статье, то именно быстрый переход от чтения к формированию примитивной модели задачи характеризует практическое мышление, т. е. умение анализировать небольшими порциями, постепенно наращивая сложность модели.

Первый этап анализа: выделим основные параметры задачи — это взаимное расположение прямоугольников. По условию прямоугольники вложены один в другой, причем при делении их на части, необходимо обращать внимание на их площади (см. рис. 2).

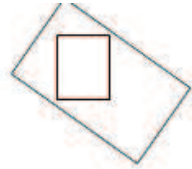


Рис. 2. Результат первого этапа синтеза.

Второй этап синтеза: площадь прямоугольника выражается через длины сторон, а в условии даны координаты вершин прямоугольника. Могу ли я вычислить длину стороны? Здесь выделена подзадача, важность которой пока не определена. Для продолжения поиска решения необходимо сделать «мысленный прыжок» через «информационный разрыв», если учащийся не знаком или забыл способ вычисления расстояния между точками.

Второй этап анализа: стороны прямоугольников параллельны осям координат (см. рис. 3).

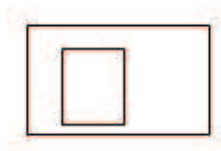


Рис. 3. Результат второго этапа синтеза.

Третий этап синтеза: для сторон, параллельных осям, нет необходимости применять формулу вычисления расстояния между точками. «Скачок» через «разрыв» позволил нам не отвлекаться на поиск

решения подзадачи, решение которой мы не знаем. Выделенная подзадача не является частью решения.

Третий этап анализа: делить прямоугольники надо прямой (см. рис. 4).

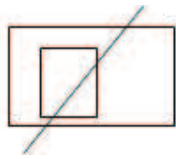


Рис. 4. Результат третьего этапа синтеза.

Четвертый этап синтеза: при рассечении прямоугольников прямой получатся не обязательно прямоугольники. Могут получиться трапеции и треугольники, площадь которых найти сложнее, но известно как.

Четвертый этап анализа: сравниваются площади не прямоугольников, а фигур, получившихся после вырезания внутреннего прямоугольника из внешнего (см. рис. 5).

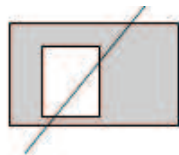


Рис. 5. Результат пятого этапа синтеза.

Пятый этап синтеза: фигуры получаются очень сложные и вычисление их площадей непростая задача.

Пятый этап анализа: последовательный анализ задачи приводит нас то к сложностям, то, вдруг, обнаруживаются упрощающие ситуацию моменты. Однако конечный вывод не приблизил к нахождению ответа, а только продемонстрировал сложность задачи. Но все ли моменты мы учли? При анализе задачи до сих пор не учитывалось, каким должен быть ответ задачи. Ответом являются не площади многоугольников после деления, в ответе необходимо указать только две точки, через которые проходит прямая, пересекающая фигуру. Таким образом, необходимо анализировать не площади фигуры, а точки, через которые проходит прямая.

Шестой этап анализа: переформулируем задачу — будем искать частные решения деления на равные части указанной фигуры и смотреть, через какие точки пройдет проведенная прямая.

В работах П. Я. Гальперина указывается, что всякий процесс усвоения начинается с конкретного действия с предметами [3]. Попробуем нарисовать самый простой случай, в котором нам понятно решение задачи. Скорее всего, это квадрат с вырезанным квадратом, расположенным точно в центре. В таком случае вариантов проведения линии очень много, точнее бесконечное множество. Проведем серию экспериментов по изменению местоположения внутреннего прямоугольника (см. рис. 6). Заметим, что количество прямых резко уменьшается, можно провести только единственную прямую (здесь следует вспомнить аксиому о том, что через две точки можно провести только одну прямую).

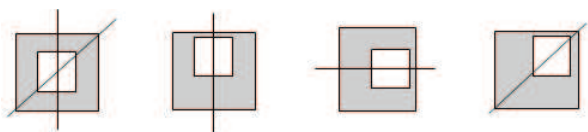


Рис. 6. Примеры экспериментов по положению внутреннего прямоугольника.

Попытаемся найти те точки, через которые проходит прямая, и понять, почему в первом примере линий можно провести множество. Практически все школьники после нескольких экспериментов определяют, что прямая проходит через центры симметрии прямоугольников (см. рис. 7).

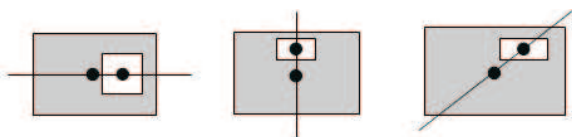


Рис. 7. Примеры расположения точек, через которые проходит прямая, делящая фигуры на части равные по площади.

Вывод, сделанный на основе частных случаев, обязательно должен быть проверен для произвольных фигур и их расположения. После получения вывода, можно провести обоснование эмпирически полученного знания: прямая, проходящая через центр симметрии делит фигуру на две равные по площади части, таким образом, большая и малая фигура делятся на две равные части.

Найден алгоритм решения задачи, реализация которого в виде программы на компьютере, представляет уже очень простой процесс, поскольку является воспроизведением навыков полученных ранее, на решении хорошо поставленных задач.

При разборе задачи школьник практически всегда должен находиться в «поле знания», т. е. хотя бы приблизительно представлять себе частичное решение. Это знание позволяет двигаться к преобразованию незнания в знание. Практическое мышление формируется по мере того, как в процессе мышления складываются определенные операции — анализ, синтез, обобщение. В ходе мыслительного процесса образуются определенные «маршруты», определенные способы осуществления анализа, синтеза и т. д. (они могут осуществляться как в виде бессознательно складывающихся и автоматически функционирующих операций анализа и синтеза, так и в виде сознательно выполняемых действий анализирования и синтеза в соответствии с имеющимися условиями, полученными выводами и осознанными требованиями задачи).

Рассмотренный пример позволяет работу с «плохо поставленной» задачей связать с выявленными в нашем исследовании признаками практического мышления: 1) умение вычленив из общего информационного потока практического характера проблему; 2) увидеть в ней знакомые элементы и найти недостающую информацию; 3) получить необходимый практический результат.

Продемонстрированный анализ задачи показывает, что именно выявление проблемы нахождения двух точек, через которые проходит искомая прямая, а не вычисления площади (умение вычленив практическую проблему), позволяет учащимся привлечь знания о расположении центра масс (поиск недостающей информации), а затем получить простой алгоритм решения.

Практическое мышление состоит в постоянном анализе, как ситуации (задачи), так и действий, выполняемых при ее решении, в быстром переходе от формулирования подзадачи к ее решению, пусть в простейшем виде; в первоначальном отбрасывании всех тонкостей, а затем в постепенном наращивании сложности. Поскольку мышление как способность закрепляется тогда, когда распространяется на любые сферы деятельности учащегося, в учебном процессе необходимо использовать простые «плохо поставленные» задачи на различных уроках, как дополнение к привычным задачам, и развивать методику работы с ними. «Плохо поставленные задачи» можно рассматривать как средство формирования практического мышления.

Литература

1. Гальперин П. Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий // Исследования мышления в советской психологии.—М., 1966.—С. 236–277.
2. Гальперин П. Я., Кабыльницкая С. Л. Экспериментальное формирование внимания.—М.: Изд-во МГУ, 1979.
3. Гальперин П. Я. Методы обучения и умственное развитие ребенка.—М., 1985.—8 с.
4. Дьюи Дж. Психология и педагогика мышления.—Берлин, 1922.—196 с.
5. Еникеев М. И. Общая и социальная психология.—М.: Норма, Инфра-М, 1999.—624 с.
6. Карпов А. В. Общая психология.—Гардарики, 2005.—232 с.
7. Леонтьев А. Н. Мышление. Философская энциклопедия. Т. 3.—М., 1964.—С. 514–519.
8. Рубинштейн С. Л. О мышлении и путях его развития.—М., 1958.—26 с.
9. Ружицкй В. Р. Мышление. Пятнадцать уроков для начинающих авторов.—Флинта: Наука, 2006.—437 с.

МАКАРЕНКО МАРИЯ ДМИТРИЕВНА
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: mahadrum@yandex.ru

“POORLY DEFINED TASKS”
AS MEANS OF FORMATION OF PRACTICAL MIND
OF PUPILS AND STUDENTS

Makarenko M. D.

The article introduces the concept of “poorly defined tasks”. Several practical examples of such tasks are provided. We also analyze the influence of “poorly defined tasks” on the development of practical thinking, and prove their usefulness in the courses aimed both at high school and university students.

Key words: practical thinking, problem definition, mechanisms of thought, stages of solving, decomposition, synthesis.

УЧИМСЯ И УЧИМ ФОРМУЛИРОВАТЬ ВОПРОСЫ

И. Е. Малова

Представлены три ситуации, в которых происходит обучение или самообучение формулированию вопросов: постановка учебных целей, анализ математического содержания, анализ процесса достижения целей. Методика направлена на совершенствование личного опыта: учебного, познавательного, математического, методического.

Ключевые слова: методика обучения математике, учебный диалог, личностно ориентированное обучение.

Исходя из формулировки статьи, предстоит ответить на три вопроса: 1) кто учится и учит формулировать вопросы; 2) зачем стоит учиться и учить формулировать вопросы; 3) как учиться и учить формулировать вопросы?

Ответим на вопрос «Кто?». В статье говорится как об учащихся, так и студентах, об учителях и преподавателях вуза. Причем, слово «учимся», обозначенное в заголовке статьи, относится не только к обучающимся, но и к обучающим, а слово «учим» — не только к обучающим, но и к обучающимся.

Ответим на вопрос «Зачем?».

Комиссией ЮНЕСКО (1997 г.) были обозначены основные принципы образования XXI в., которые образно сформулированы так: «научиться познавать, делать, жить, жить вместе». В основе каждого из четырех принципов лежит умение вести диалог с самим собой, а также результативно участвовать или соучаствовать в диалоге с другими. Чаще всего, начало и развитие диалога зависят от умения его участников задавать вопросы.

Актуальность умения формулировать вопросы усиливается введением новых образовательных стандартов в школах и вузах.

Умение формулировать вопросы мы также связываем с совершенствованием личного опыта: учебного, познавательного, математического, методического.

Дальнейший текст статьи связан с вопросом: «Как учиться и учить формулировать вопросы?».

Прежде всего, ответ на этот вопрос зависит от ситуаций, в которых оказываются обучающиеся.

Представим три ситуации, в которых происходит обучение или самообучение формулированию вопросов: постановка учебных целей; анализ математического содержания; анализ процесса достижения целей.

Ситуация 1. Постановка учебных целей.

Включить обучающихся в постановку целей учебного занятия можно с помощью различных прием-заданий. Приведем некоторые примеры.

Прием-задание: «Прочитайте тему занятия и сформулируйте вопросы, на которые, на ваш взгляд, будут найдены ответы на занятии».

Когда в Брянске работала Школа учителя математики, мы проводили такой эксперимент. Предстояло вести урок по теме «Тригонометрические неравенства» и учителя составили список вопросов, которые предположительно зададут школьники по формулировке темы. А потом сравнивали свой список с теми вопросами, которые задали учащиеся. У школьников список вопросов был значительно более длинным, например, в их списке были вопросы и о видах тригонометрических неравенств, и о формулах по их решению, хотя эти вопросы выходят за рамки школьной программы.

Постановка вопросов по формулировке темы полезна и при написании статей, при их анализе. Эти вопросы помогают понять или представить логику статьи.

Прием-задание: «Познакомьтесь со списком тех видов задач, решение которых предстоит освоить, и составьте список вопросов, на которые, на ваш взгляд, желательно ответить на занятии».

Этот прием-задание удобно использовать при работе со студентами в ситуации резкого сокращения количества аудиторных занятий при сохранении объема содержания.

В обучении постановке вопросов помогают компьютерные презентации, предусматривающие прием-задания или прием-вопросы для учащихся (студентов), паузы для ответов, анимационные эффекты для сравнения полученных ответов учащихся (студентов) с ответами учителя (преподавателя).

Приведем пример реализации прием-задания по определению целей занятия по аналитической геометрии (рис. 1).

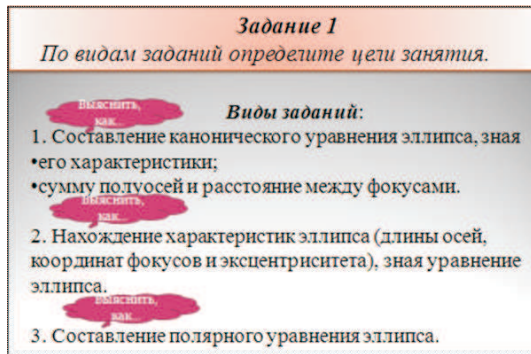


Рис. 1. Слайд компьютерной презентации по обучению постановке целей учебного занятия.

Если говорить об обучении школьников, то этот прием может быть реализован иначе. Учащимся предлагается разделить список конкретных примеров (а не обобщенных видов задач, как это было для студентов) на группы в последовательности их предстоящего изучения. Так, учитель Школы учителя математики представил на доске список тригонометрических уравнений, и предложил учащимся разделить их на группы. Первым вопросом учителя был такой: «С какого уравнения вы бы начали изучение темы и почему? Какие еще уравнения попадают в эту группу?» и т. д. В результате учащимися были составлены цели освоения каждой группы уравнений.

Прием-задание: «Познакомьтесь со списком целей, которые предстоит достичь, и сформулируйте вопросы, на которые надо будет знать ответы».

Приведем пример реализации приема при изучении дисциплины 1 курса «Вводный курс математики». На рис. 2 представлены: 1) цели лекции по теме «Тожественные преобразования в школьном курсе математики (ШКМ)» (цели разработаны преподавателем и включены в текст лекции, розданной студентами; текст лекции имеет пропуски для обеспечения диалога со студентами на лекции); 2) задание по формулировке вопросов, на которые предстоит ответить; 3) прием формулирования вопросов с использованием конструкции «Каковы ... и в чем их суть?». Составленные студентами вопросы могут им помочь при самоконтроле освоения содержания лекции.

Если говорить о школьном курсе математики, то прием-задание по постановке вопросов-целей может быть другим: «Сегодня предстоит изучить новое понятие... Что мы должны узнать о...?».

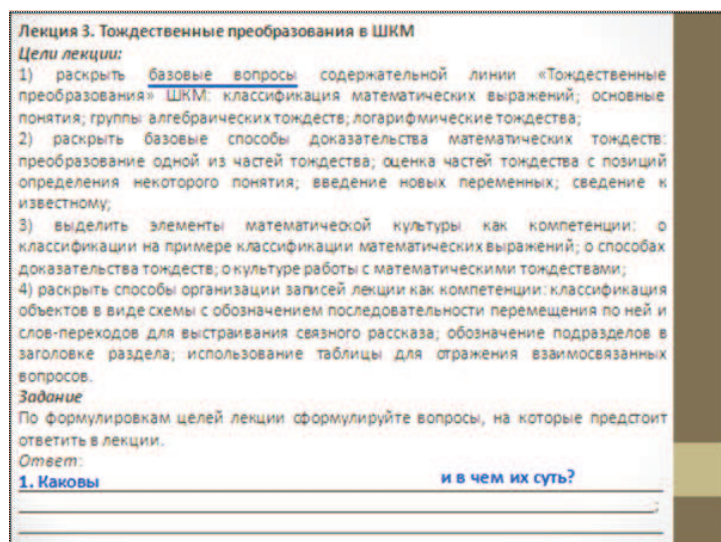


Рис. 2. Слайд компьютерной презентации по обучению постановке целей изучения содержания лекции.

Здесь важно услышать от учащихся список ключевых вопросов, который определяется как тем, к какой содержательной линии относится понятие, так и списком ключевых вопросов изучения любого понятия: определение, свойства, признаки, применение.

В статье [4] продемонстрирован пример постановки учащимися 7 класса геометрических вопросов-целей.

Методическими проблемами реализации представленных приемов являются: 1) как обозначить виды задач, чтобы они имели обобщенный характер и охватывали большой блок задач; 2) как сформулировать цели, чтобы они соответствовали требованию результативности; 3) как формулировать ответ на вопрос «Что должны узнать о...?», чтобы ответ отражал полноту содержания и учитывал общие вопросы изучения математических объектов.

Ситуация 2. Анализ математического содержания.

Рассмотрим три примера: анализ математических объектов; анализ объяснительного текста учебника; анализ доказательств.

В методике обучения математике выделен ряд закономерностей по работе с математическими определениями, правилами, теоремами, задачами, которые отражены в базовых методиках обучения ма-

тематике (методика формирования понятий, методика формирования умений, методика изучения теорем, методика обучения решению задач). Описание базовых методик в [3] и демонстрация примеров их реализации включают вопросы, которые участникам процесса обучения необходимо научиться задавать, чтобы понять математическую информацию и успешно ее использовать в определенных ситуациях. Приведем примеры, не представленные в пособии [3].

Выделить признаки понятия, отраженные в его определении, помогает прием промежуточных вопросов (рис. 3).

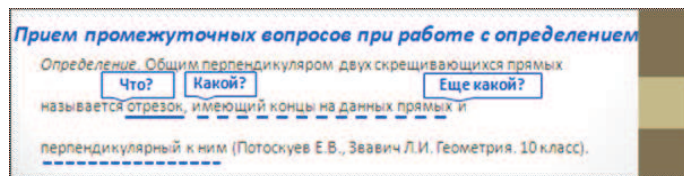


Рис. 3. Слайд компьютерной презентации по обучению анализу математических определений.

Пониманию текста с математической информацией (например, объяснительного текста учебника) помогает прием-задание: «Составьте вопросы: а) на которые есть в данном тексте ответы; б) которые возникают в связи с прочитанным». А если текст включает диалоги, то добавляется пункт «в) составьте вопросы, на которые требуется ответить».

Приведем пример из учебника алгебры МПИ-проекта [1] (рис. 4).

По первой части текста (рис. 4) можно поставить вопросы, на которые есть ответы: 1) какое алгебраическое выражение получается при сложении одночленов; 2) на какие вопросы предстоит ответить в главе «Многочлены»; 3) на какие вопросы предстоит ответить в данном параграфе; 4) что поможет найти ответы на вопросы о сложении и вычитании многочленов?

Вопросами, на которые требуется найти ответ, являются: 1) какими свойствами сложения чисел вы воспользовались при выполнении 1-го задания; 2) в чем проявляется аналогия при сложении чисел и сложении многочленов; 3) как можно складывать многочлены; 4) как можно вычитать многочлены?

Обогатить методический опыт учителя может анализ учебных текстов учебников математики для 5–6 классов, учебников алгебры для 7–9 классов проекта «Математика. Психология. Интеллект».

Методическому обогащению учителя помогает вопрос «Почему авторы ...?». Например, почему авторы именно так начали параграф, предложили именно такие задания, поставили именно такие вопросы (вопросы «Почему авторы ...?» помогают выделить приемы, направленные на учет и обогащение интеллектуального опыта учащихся, а ответы на них углубляют понимание психологических и методических особенностей обучения математике).

Прием-задания: Сформулируйте вопросы, на которые есть ответы в тексте; требуется ответить.
которые возникают в связи с прочитанным;
Складываем и вычитаем многочлены

Складывая одночлены, мы получили алгебраические выражения нового вида — многочлены. Начнем с ответа на вопрос: какие действия выполняются с многочленами и как они выполняются? В частности, как можно складывать и вычитать многочлены? Предлагаем выполнить несколько заданий.

Задание 1. Проведите вычисления:
 а) $(128 - 119) + (172 - 81)$;
 б) $(a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$ при $a = 1,5$ и $b = -2,5$.

Какими свойствами операции сложения чисел вы пользовались при выполнении задания?

Задание 2. Сравните записи сложения чисел и многочленов:

$(128 - 119) + (172 - 81) =$ $= 128 - 119 + 172 - 81 =$ $= (128 + 172) + (-119 - 81) =$ $= 300 + (-200) = 100;$	$(4x^3 - 5x^2y + 7xy^2 + 8y^2) +$ $+ (-3x^3 + 5x^2y - 2xy^2 - 5y^2) =$ $= 4x^3 - 5x^2y + 7xy^2 + 8y^2 -$ $- 3x^3 + 5x^2y - 2xy^2 - 5y^2 =$ $= (4x^3 - 3x^3) + (5x^2y - 5x^2y) +$ $+ (7xy^2 - 2xy^2) + (8y^2 - 5y^2) =$ $= x^3 + 3xy^2 + 3y^2.$
--	--

В чем проявляется аналогия при сложении чисел и сложении многочленов?

Рис. 4. Слайд компьютерной презентации по обучению анализу объяснительного текста учебника.

Важным при работе с математическим текстом является выделение приемов доказательства или решения задач, которые могут помочь при работе с другими математическими объектами. Выделенные приемы желательно обобщить в виде некоторых правил, чтобы удобнее было их использовать в различных ситуациях. Многократно повторяющиеся приемы относятся к элементам математической культуры.

Продemonстрируем сказанное на примере доказательства формул приведения. Доказать многие тригонометрические равенства помогает ориентировочная основа: 1) построить заданные углы и точки единичной окружности, им соответствующие; 2) сформулировать задачу на языке координат; 3) сделать вывод о знаках и модулях

взаимное расположение с другими фигурами: прямой AB , точкой C и плоскостью α .

Этот прием легко трансформируется в прием-вопрос: «Каково взаимное расположение плоскости β с другими фигурами?».

В методе от противного затруднение у учащихся вызывает переход к противоречию. В данном случае требуется ответить на вопрос: «Как помочь учащимся догадаться, что противоречие связано с прямой CD ?».

Преодолению затруднения в поиске противоречия часто помогает вопрос: «Как сделанный вывод меняет расположение других фигур?». В данном случае: «Как вывод о совпадении плоскостей α и β меняет расположение прямой CD ?». Обучение использованию перечисленных приемов при работе с доказательством теоремы представлено на рис. 6.

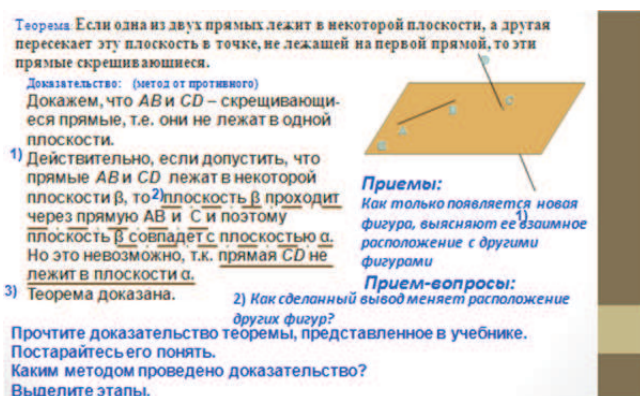


Рис. 6. Слайд компьютерной презентации по обучению анализу текста доказательства теоремы.

Ситуация 3. Анализ процесса достижения целей.

Рассмотрим три ситуации: подведение итогов занятия, проблемы в домашней работе, анализ занятия.

Важным этапом учебного занятия считается этап подведения его итогов. Задача этого этапа состоит в обобщении изученного, возвращении к возникшим на занятии проблемам и конструировании выводов по разрешению этих проблем. Потому ключевыми вопросами данного этапа являются:

– Какова была тема занятия? (Выделяется «центр, вокруг которого происходит подведение итогов.»)

– Что узнали о ...? (Обобщается теоретическая информация занятия.)

– Какие виды задач учились решать? Как они решаются? (Обобщается практическая информация занятия.)

– С какими трудностями столкнулись? Какие приемы помогли их преодолеть? (Обобщается индивидуальный опыт обучающихся.)

Распространенной в практике обучения бывает ситуация, когда при самостоятельной работе над задачей (дома или в аудитории) большинство обучающихся не справились с решением. Традиционным выходом из такой ситуации является демонстрация правильного решения. Более эффективным является прием, когда при самостоятельной работе над трудной задачей на черновиках записываются все вопросы диалога с самим собой и ответы на них, а потом анализируются вопросы, которые помогли или могли бы помочь найти решение.

Методическому анализу учебного занятия помогают вопросы:

1. «Почему учитель (преподаватель) ...?» (Вопросы помогают выделить методические приемы обучающего, а ответы учат обоснованию его методических действий.)

2. «Почему учащиеся (студенты) ...?» (Вопросы помогают выявить ситуации успешности (неуспешности) обучающихся, а ответы — их причины.)

Литература

1. Гельфман Э. Г. и др. Алгебра: учебник для 7 класса.—М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.—261 с.
2. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия: учебник для 10–11 кл. сред. шк.—М.: Просвещение, 1992.—207 с.
3. Малова И. Е., Горохова С. К., Малинникова Н. А., Яцковская Г. А. Теория и методика обучения математике в средней школе.—М.: Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2009.—445 с.
4. Малова И. Е., Руденкова Н. М. Как «увидеть» на уроке лично-ориентированное обучение? // Математика в школе.—2007.—№ 4.—С. 6–11.

Малова Ирина Евгеньевна

Брянский государственный университет им. И. Г. Петровского
РОССИЯ, 241037, Брянск, ул. Бежицкая, д.14;

Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: mira44@yandex.ru

WE LEARN AND TEACH
TO FORMULATE QUESTIONS

Malova I. E.

Three situations in which there is a training or self-training to a formulation of questions are presented: statement of the educational purposes, analysis of the mathematical contents, analysis of process for achievement of the objectives. The technique is directed on improvement of personal experience: educational, informative, mathematical, methodical.

Key words: technique of training mathematics, dialogue in teaching, personally oriented education.

О РАБОТЕ Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦА
В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ
ИМ. А. И. ГЕРЦЕНА
(К 125-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

В. П. Одинец

Рассматриваются некоторые факты о работе Г. М. Фихтенгольца в ЛГПИ им. А. И. Герцена с 1918 по 1949 гг.

Ключевые слова: Г. М. Фихтенголец, абсолютно непрерывная функция, иррациональные числа.

Широко известна роль Григория Михайловича Фихтенгольца (05.06.1888 по новому стилю — 26.06.1959) в создании школы математического анализа в Ленинграде. Всемирно известен его знаменитый трехтомник «Курс дифференциального и интегрального исчисления», переведенный на ряд иностранных языков. Значительно менее известна его роль в развитии математического образования в советской школе, связанной с его работой в Педагогическом институте им. А. И. Герцена.

Осенью 1918 г. по инициативе Адама (Альберта) Петровича Пинкевича (1883–1937)¹ и Златы Ионовны Лилиной (1882–1929)² решением Петросовета (протокол № 1 от 17 октября 1918 г.) был организован III Педагогический институт «как первый педагогический вуз Советской России нового типа» [1].

¹А. П. Пинкевич — выпускник Казанского университета (1909), активный участник революционных событий 1905–1907 гг., преподаватель естествознания в Вольской (в Саратовской губернии) учительской семинарии (1909–1917), автор учебников для учительских институтов и семинарий. В 1917 г. член ЦК «объединенной» РСДРП. В 1918 г. А. П. Пинкевич избирается Председателем экспертного совета при Комиссариате просвещения Союза коммун Северной области. Членом этого совета был и Г. М. Фихтенголец. В 1920 г. А. П. Пинкевич стал организатором и первым ректором Уральского государственного университета в Екатеринбурге. Позже работает в Москве на различных руководящих должностях Наркомпроса (Народного комиссариата просвещения) РСФСР. Репрессирован в 1937 г. [3].

²З. И. Лилина (партийный псевдоним Зина Левина), урожденная Бернштейн. Училась в гимназии в Митаве (ныне Jelgava, Латвия) и в университете в Берне. Член РСДРП с 1902 г., большевичка. В 1908–1917 гг. находилась в эмиграции в Швейцарии. В 1914–1915 гг. секретарь Бернской группы РСДРП. З. И. Лили-

Первым деканом физико-математического факультета этого вуза был назначен Григорий Михайлович Фихтенголец. Математическая кафедра на этом факультете была тогда одна — кафедра математики. Позже III Педагогический институт получил имя А. И. Герцена (в январе 1920 г.) и вобрал в себя не только первый и второй педвузы, но и Педагогический институт дошкольного образования [1, 2].³

С 1919 по 1930 гг. Г. М. Фихтенголец был профессором кафедры математики в ЛГПИ по совместительству (основным местом его работы в это время был университет), при этом звание профессора он получил в 1926 г. [5, с. 345–346].

Второй приход Г. М. Фихтенгольца в ЛГПИ датируется 1937 г. [5]. Этому приходу предшествовали события, на которых остановимся чуть подробнее.

20 и 21 декабря 1936 г. состоялась специальная сессия Группы математики Академии Наук СССР, посвященная состоянию математического образования в стране. Этой сессии предшествовала годичная работа специально созданных при Группе комиссий. Комиссии пришли к выводу, что состояние математического образования в средней школе, в педвузах и во втузах в настоящее время неудовлетворительное. Основной доклад по математической подготовке в средней школе на сессии сделал Г. М. Фихтенголец [6].⁴ И это не случайно, поскольку, начиная с 1935 г., Г. М. Фихтенголец работал на общественных началах в качестве председателя комиссии Наркомпроса по составлению школьных программ по математике. Его критика была конструктивной. Среди его предложений особо заслуживает внимания мысль, что главным в школе должен быть квалифицированный учитель. Поэтому он предложил вернуть в школу старых

на — вторая жена Г. Е. Зиновьева (Радомысльского Евсея Гирша: 1883–1936). С августа 1918 г. и.о. комиссара внутренних дел Северной области. Позже — заведующая отделом народного образования Петроградского исполкома. После переезда в Москву в 1928 г. работала в Наркомпросе и заведовала (до кончины от рака легких) отделом детской книги в Госиздате РСФСР [4].

³С 1924 г. Педагогический институт им. А. И. Герцена именуется Ленинградский педагогический институт им. А. И. Герцена (сокращенно: ЛГПИ).

⁴Остальные четыре доклада сделали: «О стабильных учебниках математики в средней школе» — чл.-корр. АН СССР Л. Г. Шнирельман, «О программах математики во втузах» — академик С. Н. Бернштейн, «Об учебниках математики во втузах» — проф. Л. А. Тумаркин, «О подготовке преподавателей математики в педвузах» — проф. Л. А. Люстерник [7].

учителей по разным причинам покинувшим ее.⁵ Предлагалось также переиздать некоторые старые (дореволюционные) учебники, уделяя особое внимание текстовым задачам, задачам на построение, задачам по стереометрии, понятию равносильности уравнений. В педвузах в качестве обязательного курса предлагалось ввести курс истории математики.

В резолюции по итогам сессии предлагалось укрепить педвузы и втузы высококвалифицированными специалистами [7].

Для самого Г. М. Фихтенгольца результатом сессии было назначение в 1937 г. (по совместительству) заведующим кафедрой математики ЛГПИ им. А. И. Герцена [5].

Став заведующим Г. М. Фихтенголец вместе с деканом физ.-мат. факультета Захаром Захаровичем Вулихом (1869–1941/42) осуществляет проект реорганизации кафедры математики в три специализированные кафедры: кафедру алгебры, кафедру геометрии и кафедру анализа, возглавив последнюю (по совместительству) до 1941 г.

На кафедру анализа в 1937/38 учебном году приглашается совместителем ученик Фихтенгольца профессор Л. В. Канторович (1912–1986) и на постоянной основе их общие ученики: Б. З. Вулих (1913–1978) и М. К. Гавурин (1911–1992) [2].

По материалам доклада на осенней научной сессии ЛГПИ 1938 г. Г. М. Фихтенголец публикует в 1939 г. статью в Ученых записках Педагогического института (Т. 28, С. 225–244) «Об интеграле Данжуа» [8, с. 710].⁶

В 1944–1946 гг. Г. М. Фихтенголец вновь заведует кафедрой анализа ЛГПИ (по совместительству). Осенью 1944 г. Г. М. Фихтенголец выступает перед учителями математики Ленинграда с лекцией «Иррациональные числа в средней школе», целью которой было «точнее

⁵ Не следует забывать, что это время было временем раскручивания репрессий. Из школ зачастую изгонялись учителя с дореволюционным стажем, как «классово чуждые».

⁶ Интерес к интегралу Данжуа возник у Г. М. Фихтенгольца еще с тех пор, как он заинтересовался абсолютно непрерывными функциями. Так, еще в 1924 г., он строит пример суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций не являющейся абсолютно непрерывной функцией (Г. М. Фихтенголец. Об абсолютно непрерывных функциях. Математический сборник. 1924. Том 31. С. 286–296.) Интересно, что именно на осенней научной сессии 1938 г. Л. В. Канторович делает доклад, в котором и предлагается оптимизационный метод, названный позже симплекс-методом [2].

очертить материал, который подлежит прохождению в средней школе, а в ряде случаев — и указать, как подать этот материал, чтобы он был доступен школьникам» [9].

В 1946–1949 гг. Г. М. Фихтенголец работал на кафедре анализа ЛГПИ в должности профессора (по совместительству). Именно к этому периоду относится издание Методического сборника «Математика в школе» (Вып. 2 (1947)) со статьями Г. М. Фихтенгольца об иррациональных числах [9].⁷

Важным представляется умение Г. М. Фихтенгольца передать будущим учителям математики стремление улучшать процесс обучения школьников не только на уроках, но и во внеучебное время. Сам Г. М. Фихтенголец не только умел, но и любил общаться со школьниками (и не только во время проведения математических олимпиад в Ленинграде, одним из инициаторов которых он был, наряду с Б. Н. Делоне (1890–1980))⁸ [11, с. 6].

Интересно, что по инициативе ЛГПИ им. А. И. Герцена в 1948 г. Г. М. Фихтенголец был награжден значком «Отличник народного просвещения» [5]. Впрочем, еще в 1940 г. руководство ЛГПИ поддерживало ходатайство Ленинградского государственного университета о присвоении Г. М. Фихтенгольцу звания «Заслуженного деятеля науки РСФСР».

Литература

1. Гончаров С. А. и др. Педагогический Университет им. А. И. Герцена. От Императорского Воспитательного Дома до Российского государственного педагогического университета.—СПб.: Лики России, 1997.—207 с.
2. Одинец В. П. К 75-летию кафедры математического анализа РГПУ им. А. И. Герцена. Зарисовки истории. Век XX // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения — 2012.—СПб.: БАН, 2012.—Т. 65.—С. 3–18.
3. Главацкий М. Е. Пинкевич Альберт Петрович // Свободная энциклопедия Урала.—(URL: <http://enc.ural.ru/index.ph>).

⁷К сожалению, борьба с так называемым «космополитизмом» в начале 50-х гг. привела к тому, что сборник, авторами которого были еще профессора И. С. Сомицкий, И. П. Натансон и Б. З. Вулих, был изъят из большинства библиотек, так, что даже в некрологе [10], название статьи Г. М. Фихтенгольца и издательство приведены не верно.

⁸Автору довелось видеть выступление Григория Михайловича на слете пионеров-отличников зимой 1957/58 гг. Он говорил негромко, но очень образно: о мироздании, о Джордано Бруно. (Напомню, что это было время после запуска в СССР первого искусственного спутника Земли 4 октября 1957 г.).

4. Лилина Злата Ионовна (1882–1929).—(URL: <http://funeral-spb.ru/necropols/kommunistlavra/lilina/>).
5. Профессора Российского Государственного Педагогического Университета им. А. И. Герцена в XX веке. Справочник / Под ред. Г. А. Бордовского, В. А. Козырева.—СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2000.—391 с.
6. Фихтенгольц Г. М. Математическая подготовка в средней школе // Успехи мат. наук.—1938.—№ 4.—С. 300–308.
7. Декабрьская сессия Группы математики Академии Наук СССР // Успехи мат. наук.—1938.—№ 4.—С. 309–318.
8. Математика в СССР за сорок лет. 1917–1957. Том второй / Под ред. А. Г. Куроша.—М.: Госиздат Физматлит, 1959.—819 с.
9. Фихтенгольц Г. М. Иррациональные числа в средней школе // Математика в школе. Методический сборник. Вып. II.—Л.: Ленинградский обл. ин-т усовершенствования учителей, 1947.—С. 24–44.
10. Канторович Л. В., Натансон И. П. Григорий Михайлович Фихтенгольц. Некролог // Успехи мат. наук.—1959.—Т. 14, № 5—С. 123–128.
11. Фомин Д. В. Санкт-Петербургские математические олимпиады.—СПб.: Политехника, 1994.—309 с.

Одинец Владимир Петрович
Коми государственный педагогический институт
РОССИЯ, 167982, Сыктывкар, ул. Коммунистическая, 25
E-mail: w.p.odyniec@mail.ru

ON G. M. FICHTENHOLZ WORK
AT HERZEN INSTITUTE
(On the 125th anniversary of his birth).

Odyniec W. P.

Some facts on G. M. Fichtenholz work at Herzen institute since 1918 to 1949 are considered.

Key words: G. M. Fichtenholz, absolutely continuous function, irrational number.

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ ВОСПИТАНИЕ УЧАЩИХСЯ:
ОБОГАЩАЮЩАЯ МОДЕЛЬ ОБУЧЕНИЯ
В ПРОЕКТЕ «МАТЕМАТИКА. ПСИХОЛОГИЯ.
ИНТЕЛЛЕКТ» (МПИ)

М. А. Холодная

Ключевой фактор, влияющий на развитие интеллекта учащихся, — это содержание школьного образования. Один из путей интеллектуального развития учащихся — это разработка учебников и учебных материалов нового типа, содержание которых отвечает требованиям психодидактического подхода. В рамках образовательного проекта МПИ разработаны учебники и учебные материалы по математике для учащихся основной школы (5-9-е классы) в рамках «обогащающей» модели обучения. Ее основное назначение — интеллектуальное развитие учащихся средствами содержания математического образования за счет специально сконструированных развивающих учебных текстов. Специфика данных учебных текстов заключается в том, что они, будучи проекцией структуры научного математического знания, в то же время, во-первых, обеспечивают формирование основных компонентов ментального опыта ученика (в том числе когнитивного, понятийного, метакогнитивного и интенционального опыта) и, во-вторых, создают условия для реализации индивидуальных познавательных стилей учащихся.

Ключевые слова: математическое образование, психодидактика, интеллектуальное развитие учащихся, учебные тексты.

**1. О роли интеллектуальных ресурсов
в современном обществе**

Современные социальные вызовы приводят к тому, что интеллектуальные способности людей начинают рассматриваться в качестве ключевого фактора прогрессивного развития общества. Конкурентная борьба за преимущественное обладание интеллектуально развитыми людьми реализуется в виде масштабных национальных образовательных проектов, ориентированных на повышение качества знаний, умений и способностей всех слоев населения (высшее образование для всех; система непрерывного образования для взрослых, включая людей пенсионного возраста); государственных программ по организации «откачки мозгов» из других стран; системных средств снижения интеллектуального потенциала населения стран-конкурентов и т. д.

Как влиять на формирование интеллектуальных способностей людей? Существует мнение, что интеллект — это генетическая характеристика человека. На самом деле чем выше социально-экономические параметры семьи (общества), тем выше интеллект ребенка и тем выше будут впоследствии, когда он вырастет, социально-экономические параметры его жизни. Таким образом, для развития интеллекта особую роль играют благоприятные социальные условия и, в первую очередь, качество школьного образования.

Не нужно объявлять войну государству, которое нужно взять под свой контроль, — достаточно провести в данном государстве реформу системы образования с тем, чтобы необратимо понизить интеллектуальные ресурсы общества. Например, объявить конечной целью образовательного процесса «функциональную грамотность» учащихся (умение выполнять простейшие действия в типичных практических ситуациях) (см.: «Концепция модернизации российского образования на период до 2010 г.»); примитивизировать стандарты старшей школы, «выбив» из образовательного процесса естественно-научную составляющую и заменив предметные учебные курсы на «интегративные курсы»; превратить углубленные дополнительные занятия в «платные образовательные услуги» и т. п.

Необходимо четкое осознание того обстоятельства, что общеобразовательная школа является важнейшим социальным институтом, в рамках которого воспроизводятся, восстанавливаются и качественно улучшаются интеллектуальные ресурсы общества. Поэтому задача формирования интеллектуальных ресурсов подрастающего поколения в рамках школы относится к числу национальных приоритетов.

Сравнительный анализ результатов TIMSS (Third International Mathematics and Science Study), охватывающего учащихся 50-ти стран, показал, что у российских школьников затруднения вызывают те задания, которые требуют умения интегрировать имеющиеся знания и применять их для получения новых знаний, а также объяснять явления, происходящие в окружающем мире (Полат, 2001). Е. С. Полат и ее коллеги выделили три основные области математической и естественно-научной подготовки учеников, которые подлежали проверке в TIMSS:

1) *содержательная* — какой понятийный аппарат освоил выпускник за годы обучения в школе, при этом проверяется не воспроизведение знаний, а освоение фундаментальных теоретических понятий, принципов и законов;

2) *контекстуальная* — может ли выпускник школы использовать знания, полученные в школе, при решении повседневных задач в контексте реальных жизненных ситуаций;

3) *процессуальная* — сформированы ли интеллектуальные операции и умения, позволяющие осуществлять рассуждения и доказательства, а также устанавливать причинно-следственные связи при решении задач.

Таким образом, в современных условиях результатом образовательного процесса не могут выступать ЗУН (ЗУН быстро устаревают, они эффективны только в привычных ситуациях). И тем более результатом образовательного процесса не могут выступать «функциональная грамотность» и «ключевые компетенции», поскольку это те же ЗУН, но только применительно к решению типичных социальных задач, что означает фактическую переориентацию школы с задачи интеллектуального развития учащихся на задачу их социальной адаптации.

В целом можно сделать следующий вывод: необходима принципиальная перестройка образовательного процесса на основе психодидактического подхода с целью развития интеллектуальных и личностных ресурсов подрастающего поколения, в частности, разработка учебных материалов (учебно-методических комплектов — УМК) нового поколения.

2. Психодидактический подход как альтернатива предметно-центрическому подходу в школьном образовании

Психодидактика — это область педагогики, в рамках которой конструируются содержание, формы и методы обучения, основанные на интеграции психологических, дидактических, методических и предметных (соответственно определенному учебному предмету) знаний с приоритетом использования психических закономерностей развития личности в качестве основы организации учебного процесса и образовательной среды в целом. По определению В. И. Панова, психодидактический подход к обучению — это приоритетное использование психологии развития и методов развивающего образования в качестве исходного основания для построения той или иной образовательной технологии (Панов, 2004).

Результатом психодидактической работы является некоторый качественно новый педагогический продукт, сконструированный с уче-

том одновременно психологического, дидактического, методического и предметного знания, — в виде нового типа образовательной школьной среды, инновационной образовательной технологии, развивающего метода обучения, школьного учебника нового поколения и т. д. В основе психодидактического подхода, в его прямом смысле, лежит педагогическая инженерия, то есть процесс проектирования, конструирования и эксплуатации того или иного педагогического продукта, по своему исходному замыслу ориентированного на решение задачи развития психических ресурсов каждого школьника. Основное назначение психодидактики — создание условия для психологического (интеллектуального и личностного) роста учащихся на основе повышения эффективности обучения конкретному предмету, то есть средствами математики, истории, литературы и т. д.

Иными словами, в условиях современной школы предметно-центрический подход должен быть дополнен психодидактическим подходом. Т. е. содержание образования и методы обучения должны быть сконструированы с учетом психологических знаний о закономерностях психического развития личности (Проблемы школьного учебника, 2004).

Что изменится при изменении взгляда на учебник (шире — учебно-методические комплекты)? Изменится характер ответов, которые будут даваться на одни и те же поставленные вопросы (соответственно изменится и понимание основных аспектов школьного образования). Рассмотрим эти различия на примере учебника математики (см. таблицу ниже).

Таким образом, в современной школе должны использоваться учебники (шире — учебно-методические комплекты, или УМК) нового поколения, разработанные на основе психодидактического подхода. Только в этом случае можно говорить об УМК как средствах формирования универсальных учебных действий (УУД), которые, в отличие от традиционных знаний, умений и навыков (ЗУН), характеризуют состояние индивидуальных интеллектуальных ресурсов ученика.

Назначение проекта МПИ — разработка учебных материалов нового поколения в рамках психодидактического подхода. В частности, разработана «обогащающая модель» обучения математике для 5-9-х классов, обеспечивающая формирование УУД в контексте решения задачи интеллектуального развития и интеллектуального воспитания учащихся. Руководители проекта МПИ: доктор педагогических

наук, профессор Э. Г. Гельфман (Томский государственный педагогический университет, Томск) и доктор психологических наук, профессор М. А. Холодная (Институт психологии РАН, Москва).

<i>Предметно-центрический подход</i>	<i>Психодидактический подход</i>
В каком виде должно быть представлено содержание учебника?	
В виде справочника, задачника, хрестоматии по основам математики.	В виде учебной книги, включающей тексты разного типа (информативные, объяснительные, рассуждающие, проблемные, «невозможные»), разной меры сложности, разного жанра; разные формы предъявления учебной информации (словесно-символическую, визуальную, предметно-практическую, эмоционально-оценочную); средства организации разных видов учебной деятельности (исполнительской, исследовательской, проектной, творческой).
Какой стиль мышления учитывает учебник?	
Стиль мышления профессионального математика, который характеризуется следующими качествами: аналитичность, линейность, свернутость, лаконичность, знаково-символическая форма выражения, независимость от контекста, дедуктивный характер.	Стиль мышления ученика, который отличается такими качествами, как синтетичность, нелинейность, развернутость, образно-интуитивная форма выражения, зависимость от контекста, индуктивный характер.
Кто из учащихся может усвоить математику в объеме школьной программы?	
Только часть учеников со специальными математическими способностями. Предпочтение отдается внешней, или селективной дифференциации обучения (в рамках спецклассов)	Практически все ученики при условии учета их индивидуальных склонностей. Предпочтение отдается внутренней, или элективной дифференциации (в рамках одного класса).
С помощью каких средств следует обучать математике?	
С использованием средств самой математики, поскольку математическое знание само по себе обладает необходимым развивающим эффектом. Включение в учебник нематематического материала считается нецелесообразным.	С использованием не только средств математики, но и набора психодидактических средств (мотивации введения новых понятий, режима диалога, элементов учебной самодиагностики, средств индивидуализации обучения и т.д.).
Каковы функции учителя?	
Трансляция общественно-исторического опыта.	Проектирование индивидуальных образовательных траекторий.

Ниже перечислены и проанализированы отличительные черты «обогащающей модели» обучения, реализованной в проекте МПИ (см. подробнее: Гельфман, Холодная, 2006; Обогащающая модель обучения в проекте МПИ, 2002; Гельфман, Холодная, Кузнецова, 2012, 2013; Гельфман и др., 2012, 2013).

Назначение проекта «Математика. Психология. Интеллект» (МПИ) — разработка учебных материалов нового поколения в рамках психодидактического подхода. В частности, разработана «обогащающая модель» обучения математике для 5–9-х классов, обеспечивающая формирование УУД в контексте решения задачи интеллектуального развития и интеллектуального воспитания учащихся. Руководители проекта МПИ: доктор педагогических наук, профессор Э. Г. Гельфман (Томский государственный педагогический университет, Томск) и доктор психологических наук, профессор М. А. Холодная (Институт психологии РАН, Москва).

Ниже перечислены отличительные черты «обогащающей модели» обучения, реализованной в проекте МПИ (см. подробнее: Гельфман, Холодная, 2006; Обогащающая модель обучения в проекте МПИ, 2002; Гельфман, Холодная, Кузнецова, 2012, 2013; Гельфман и др., 2012, 2013).

3. Интеллектуальное воспитание учащихся на основе обогащения их ментального (умственного) опыта

Назначение обогащающей модели обучения — интеллектуальное развитие и интеллектуальное воспитание учащихся основной школы в процессе обучения математике на основе обогащения их ментального (умственного) опыта.

Интеллектуальное воспитание — это такая форма организации образовательного процесса, которая обеспечивает повышение продуктивности интеллектуальной деятельности и рост индивидуального своеобразия склада ума. Задачи интеллектуального воспитания учащихся:

- ориентация на качественное изменение знаний, умений, навыков учеников (формирование не просто предметных знаний, а компетентности в данной предметной области; не просто учебных умений, а универсальных учебных действий; не просто познавательных навыков, а готовности работать в режиме исследования, проектной деятельности, самообучения);

- оценка индивидуальных достижений не только с учетом нормативных требований по типу «сравнение меня с другими», но и с точки зрения своеобразия индивидуальных интеллектуальных ресурсов по типу «сравнение меня с самим собой»;
- организация образовательного пространства, которое предоставляет ученику возможность выбора индивидуальной траектории обучения с опорой на его личный опыт, включая житейские впечатления, интуитивные догадки, неявные знания;
- создание условий не только для усвоения готового знания, но и самостоятельного открытия новых знаний и т. д.

Что меняется в человеке, если он интеллектуально (умственно) воспитан? Меняется характер познавательного отношения к миру: то, как человек воспринимает, понимает и объясняет происходящее. Соответственно можно перечислить следующие отличительные черты интеллектуально воспитанного человека: 1) широта умственного кругозора (в противовес «закапсулированному» мировосприятию); 2) гибкость и вариантивность оценок происходящего (в противовес «черно-белому мышлению»); 3) готовность к принятию необычной, противоречивой информации (в противовес догматизму); 4) умение осмысливать происходящее одновременно в терминах прошлого (причин) и в терминах будущего (последствий) (в противовес склонности мыслить в терминах «здесь-и-теперь»); 5) ориентация на выявление существенных, объективно значимых аспектов происходящего (в противовес субъективированной, эгоцентрической познавательной позиции); 6) склонность мыслить в категориях вероятного в рамках ментальной модели «как если бы» (в противовес игнорированию возможности существования невозможных событий); 7) способность мысленно видеть отдельное явление в контексте его целостных связей с множеством других явлений (в противовес однолинейному взгляду на мир) и т. д.

Психологической основой интеллектуального воспитания является процесс обогащения ментального (умственного) опыта ученика в процессе обучения как условие становления и роста индивидуально-интеллекта.

Мы придерживаемся следующего определения интеллекта: интеллект — это форма организации индивидуального ментального (умственного) опыта (Холодная, 2002; 2004; 2012). Чтобы обогащать ментальный опыт ученика в процессе обучения, нужно знать его устройство. Согласно предложенной нами структурной модели ин-

теллекта, в составе ментального опыта можно выделить четыре его уровня (или слоя), каждый из которых имеет свое назначение (там же):

1) *когнитивный опыт* — это ментальные структуры («когнитивные схемы»), отвечающие за хранение, упорядочивание и преобразование наличной и поступающей информации. Их основное назначение — оперативная переработка текущей информации на разных уровнях познавательного отражения;

2) *понятийный опыт* — это ментальные структуры («концепты»), обеспечивающие обобщение и конструирование информации на основе процедур абстрагирования, идеализации, интерпретации. Их основное назначение — выявление существенных признаков и воспроизведение в психике познающего субъекта устойчивых, закономерных аспектов его окружения;

3) *метакогнитивный опыт* — это ментальные структуры («метакогниции»), позволяющие осуществлять непроизвольную и произвольную регуляцию процесса переработки информации, а также сознательно управлять работой собственного интеллекта. Их основное назначение — контроль за ходом интеллектуальной деятельности и состоянием индивидуальных интеллектуальных ресурсов;

4) *интенциональный (эмоционально-оценочный) опыт* — это ментальные структуры («интенции»), которые лежат в основе индивидуальных познавательных склонностей. Их основное назначение — определять субъективные критерии выбора определенной предметной области, направление поиска решения, предпочитаемые источники информации и т. д.

Состав и строение ментального опыта у каждого ученика различны, поэтому дети, безусловно, различаются по своим интеллектуальным возможностям. Однако все они объективно нуждается в создании условий, содействующих их интеллектуальному росту за счет максимально возможного обогащения индивидуального ментального опыта каждого ученика.

«Обогащение» означает, что, во-первых, формируются основные компоненты ментального опыта каждого ученика (когнитивного опыта; понятийного опыта; метакогнитивного опыта; интенционального опыта) как основы формирования интеллектуальных способностей, и, во-вторых, создаются условия для учета индивидуальных познавательных стилей учащихся.

В учебных текстах УМК МПИ представлены основные линии обогащения ментального опыта учащихся в процессе обучения математике (Гельфман, Холодная, 2006):

- линия обогащения когнитивного опыта (актуализация разных способов кодирования информации — словесно-символического, визуального, предметно-практического, сенсорно-эмоционального; формирование когнитивных схем математических понятий и способов математической деятельности; работа с семантикой математического языка);

- линия обогащения понятийного опыта (учет закономерностей образования математических понятий, в том числе работа с признаками понятий; усвоение связей между понятиями; учет основных фаз процесса образования понятий, таких как мотивация, категоризация, обогащение, перенос, свертывание; формирование мыслительных операций с такими свойствами, как системность, обратимость, осознанность; самостоятельное конструирование понятий);

- линия обогащения метакогнитивного опыта (развитие произвольного и произвольного контроля интеллектуальной деятельности — способности планировать, оценивать, прогнозировать, работать с ошибками и т. д.; повышение уровня метакогнитивной осведомленности — представлений о том, как устроены научные знания, каковы особенности разных способов познания; формирование открытой познавательной позиции — готовности воспринимать «невозможную» информацию, принимать альтернативную точку зрения и т. д.);

- линия обогащения интенционального (эмоционально-оценочного) опыта (возможность выбора способа изучения учебного материала; опора на личный опыт ученика; актуализация интуитивного опыта — поощрение к высказыванию сомнений, догадок, убеждений, «опережающих» идей, эмоциональных оценок; использование элементов игры; формирование ценностного отношения к учебному материалу).

4. Интеллектуальное воспитание учащихся средствами содержания образования на основе развивающих учебных текстов

В настоящее время просматривается весьма опасная тенденция — попытка нивелировать (обесценить) содержание школьного образования: либо в мягком варианте в виде замены предметных курсов

на «интегрированные» курсы, либо в жестком варианте в виде позиции, что учебный процесс может осуществляться на любом содержании. Достаточно часто при этом приводится следующий аргумент: главное — это самоопределение и самореализация ученика, поэтому содержание учебного курса должно «порождаться» самими учениками в диалоге с учителем. При этом игнорируется то принципиально важное обстоятельство, что, с психологической точки зрения, развитие интеллекта осуществляется только через процесс усвоения, переработки и порождения разнообразных предметных содержаний, начиная с простейших житейских впечатлений и заканчивая научными знаниями об устройстве Вселенной. При этом качество индивидуальных интеллектуальных способностей подрастающего человека будет напрямую зависеть от качества предъявляемого ему предметного содержания (развивающие эффекты будут разными, если ребенок будет учиться читать либо на комиксах, либо — на сказках Андерсена; если ученик будет осваивать математические знания через решение множества однотипных задач, либо — через выполнение самостоятельного исследования).

На наш взгляд, ключевой фактор, влияющий на формирование интеллекта учащихся, — это *содержание школьного образования*. При этом в содержании образования основной упор должен быть сделан на теоретических знаниях, то есть на усвоении понятийного аппарата соответствующей предметной области и системного понятийного мышления, то есть на формировании целостного научного мировоззрения (с этой точки зрения грубейшей ошибкой является отсутствие в программах для старшей школы двух ключевых предметов — психологии и астрономии).

В частности, в учебниках и учебных книгах МПИ разработана новая линия формирования понятия числа и расширения числовых множеств: натуральное число (углубленное повторение понятия натурального числа осуществляется через освоение разных систем счисления); десятичная дробь; отрицательные и положительные числа; целые числа; обыкновенные дроби; рациональные числа; понятие «процент» (как форма завершения и систематизации знаний учащихся о рациональных числах; 5–6-е классы); действительные числа (8-й класс). На этом фоне обеспечивается единство декларативных знаний (о том, «что») и процедурных знаний (о том, «как»), в частности, математические действия с числами выступают в качестве специального объекта изучения.

В свою очередь, единицей содержания школьного предмета является *учебный текст*. Текст является ценнейшим элементом культуры и важнейшей составляющей образовательного процесса. Об особой роли текста в интеллектуальном развитии личности говорят многие специалисты, рассматривая текст как «мыслящую структуру» (Вяч. Вс. Иванов), «модель приключения мысли» (Л. Э. Генденштейн), «партнера-собеседника» (М. М. Бахтин). Текст — это та естественная среда, в которой осуществляется интеллектуальное развитие человека на протяжении всей его жизни (текст, в широком значении слова, — это сообщение, которое человек должен прочитать и проинтерпретировать, включая житейские ситуации, явления природы, других людей).

С вышеизложенной точки зрения, не вполне корректным является широко распространенное убеждение в том, что «обучать математике — значит учить школьников решать задачи». В рамках проекта МПИ центральной является следующая позиция: «Обучать математике — значит учить школьников работать со значениями и смыслами математических понятий и математических действий» (соответственно высокий уровень понимания математического материала является условием успешности в решении задач). Именно поэтому формирование такого УУД, как умение работать с учебными математическими текстами, является одной из важнейших задач обогащающей модели обучения.

Обогащающая модель обучения представлена в виде учебно-методических комплектов (УМК) в курсе математики для 5–9-х классов, которые позволяют развернуть в учебном процессе образовательное пространство, обеспечивающее формирование УУД.

В частности, в состав УМК МПИ 5–6 входят: два учебника, четыре учебные книги с сюжетной основой, четыре практикума, четыре рабочие тетради, компьютерный ресурс. Все элементы УМК МПИ позволяют создавать вариативное образовательное пространство. Фактически, УМК 5–6 — это гипертекст, в котором учитель может выбрать для разных детей разные траектории усвоения одного и того же учебного материала.

Учебные тексты в УМК МПИ отличаются рядом специфических особенностей, поскольку они сконструированы таким образом, чтобы отвечать основным критериям гипертекста, в том числе таким, как:

- нелинейность — структура учебного текста, наряду с его «ядром» (определенной предметной информацией) включает «смысло-

вые разрывы» в виде проблемно-рассуждающих фрагментов, сюжетных текстов, элементов игровых ситуаций, прикладных материалов, разных форм предъявления учебной информации (словесно-логической, визуальной, предметно-практической, эмоционально-метафорической);

- разнородность — наличие фрагментов разной степени сложности как по содержанию, так и по способам учебной деятельности (нормативных текстов с демонстрацией образцов действий и открытых текстов; обучение в режиме исполнительской, исследовательской, проектной или творческой деятельности и т. д.); использование текстов разных жанров и типов (констатирующих, объяснительных, рассуждающих, проблемных, «невозможных» и т. д.);

- неполнота, неоднозначность и противоречивость — в учебных текстах присутствуют элементы неопределенности, которые усиливаются обращенными к учащимся вопросами (принципиальным преимуществом неопределенности является ее потенциал в отношении опережающего познания будущих возможностей; кроме того, потребность «избавиться» от неопределенности считается одним из важнейших источником творчества);

- эффект личного участия — обеспечивается диалоговым характером учебных текстов (в том числе вопросами к ученику-читателю), сюжетной основой текста как важнейшим ресурсом для эмоциональной поддержки ученика, возможностью выбора способа изучения материала в зависимости от уровня его подготовки, предпочтений и собственного познавательного стиля;

- возможность навигации (передвижения) по тексту — УМК построен таким образом, чтобы ученик-читатель мог переходить от учебника к сюжетной учебной книге либо практикуму; в рамках практикума — к заданиям разных уровней сложности; параллельно работать с компьютерной программой в режиме тренировки и самодиагностики;

- самостоятельность — учебные тексты в учебнике и учебных книгах организованы так, что знание не дается в готовом виде: ученик постепенно и самостоятельно подходит к определениям и новым понятиям, при этом формируются навыки самоконтроля (готовность сказать себе «Стоп!», найти ошибку в рассуждениях) и т. д.; особую роль играют тексты, приглашающие учащихся к самостоятельному созданию авторского текста.

Таким образом, решение задачи интеллектуального воспитания учащихся средствами учебных текстов предполагает (см. подробнее о психодидактических требованиях к учебным текстам: Гельфман, Холодная, 2006):

1) создание условий для актуализации наличного ментального опыта конкретного ученика (учет предпочитаемых способов кодирования информации, наличных когнитивных схем, особенностей имеющейся базы знаний, уровня сформированности житейских и научных понятий, своеобразия интеллектуальной саморегуляции, индивидуальных познавательных предпочтений, индивидуального темпа обучения и т. д.);

2) создание условий для обогащения индивидуального ментального опыта этого ученика (выработка умения работать в режиме использования разных способов кодирования информации, расширение набора когнитивных схем, дифференциация и интеграция вербальных и невербальных семантических структур, формирование системы понятий, развитие способности осуществлять произвольный и произвольный контроль своей интеллектуальной деятельности, формирование открытой познавательной позиции и высокого уровня метакогнитивной осведомленности, создание условий для освоения широкого репертуара различных познавательных стилей и активизации широкого спектра эмоционально-оценочных впечатлений).

5. Учет специфики младшего (11–12 лет) и старшего (13–15 лет) подросткового возраста

Младший подростковый возраст (11–12 лет) играет решающую роль по отношению к интеллектуальному развитию личности: к этому возрасту складывается такой базовый познавательный процесс, как понятийное мышление (Ж. Пиаже, Л. С. Выготский). Понятийные способности выступают как системообразующий фактор в структуре интеллекта. Поэтому подростковый возраст можно рассматривать как сензитивный период для развития интеллекта (если в сензитивный период не обеспечиваются необходимые социально-культурные условия, то развитие соответствующего психического качества оказывается либо невозможным, либо его развитие серьезно затормаживается).

В 5-м классе ребенок переходит к новому этапу своей интеллектуальной жизни, а именно самостоятельной интеллектуальной дея-

тельности. Естественно, при этом возникают трудности адаптации учащихся к новым школьным требованиям. Поэтому само содержание школьного (в том числе математического) образования должно стать средством психолого-педагогической поддержки детей.

Общеизвестен тот факт, что в средней школе — по сравнению с начальной, — особенно в 5–6-х классах, резко снижается учебная успеваемость. Как следствие, снижается самооценка и чувство самоэффективности, что имеет отрицательное влияние на отношение к учебе и веру в свои возможности хорошо учиться. При этом наблюдаются еще две негативные тенденции: в средней школе снижается познавательная мотивация и ухудшается состояние здоровья детей.

Наконец, в 5 классе учитель сталкивается с проблемой обучения детей с существенно разным уровнем подготовки. Отсюда возникает необходимость адекватной формы повторения («вытаскивать» тех, кто отстал, и не давать скучать хорошо подготовленным детям). В учебниках и учебных книгах МПИ для 5 класса реализована идея обогащающего повторения (повторение через введение нового материала и обобщение прошлого опыта: в начале 5-го класса понятие натурального числа повторяется через изучение разных систем счисления; организуется одновременное изучение действий с натуральными числами и десятичными дробями и т. д.) (Лизура, Пустынникова, Сазанова, 2004).

При обучении математике в 5–6-х классах приходится решать три неотложные психологические проблемы: 1) обеспечить понимание математического материала и соответственно сделать каждого ученика успешным в процессе изучения математики («я все понимаю»); 2) выработать положительное эмоциональное отношение к математике («мне нравится, мне интересно») (заметим, что результаты зарубежных исследований свидетельствуют о том, что уроки математики порождают у детей чувство страха и негативное отношение к учителю математики); 3) обеспечить пропедевтику систематического курса алгебры с тем, чтобы подготовить учащихся к усвоению систематического курса алгебры.

В 7-м классе возникает новая острейшая проблема — радикальная смена познавательных интересов на интересы общения в связи с половым созреванием школьников (именно в этом возрасте отмечается снижение уровня всех основных интеллектуальных способностей). Нужно средствами содержания образования «поддержать» ученика в этот непростой период, помочь ему сохранить успешность

в математике с тем, чтобы в 8-м классе он снова смог активно включиться в обучение на достаточно высоком уровне сложности математического материала.

6. Критерии интеллектуальной воспитанности в обогащающей модели обучения

На наш взгляд, критерии интеллектуальной воспитанности ученика связаны с формированием базовых интеллектуальных качеств личности (КИТСУ).

К — Компетентность. Интеллектуальная компетентность — это такие особенности организации знаний, которые обеспечивают возможность принятия эффективных решений в конкретной ситуации. Знания компетентного человека отвечают следующим требованиям: разнообразие (множество разных знаний о разном); артикулированность (элементы знания четко выделены, при этом все они находятся в определенных взаимосвязях между собой); гибкость (как содержание отдельных элементов знания, так и связи между ними могут меняться под влиянием тех или иных факторов); оперативность (быстрота актуализации в данный момент в нужной ситуации); возможность применения в широком спектре ситуаций (в том числе способность к переносу знания в новую ситуацию); осознание ключевых элементов (в многообразии знания отдельные его фрагменты осознаются как самые важные, решающие для понимания сути происходящего); категориальный характер (определяющая роль знания в виде общих понятий, идей, принципов); владение не только декларативным знанием (о том, «что»), но и процедурным знанием (о том, «как»); наличие метакогнитивных знаний (знаний о собственном знании).

И — Инициатива. Интеллектуальная инициатива — это желание самостоятельно, по собственному побуждению отыскивать новую информацию, выдвигать идеи и осваивать разные области деятельности. Важнейшим проявлением интеллектуальной инициативы является способность осуществлять выбор.

Т — Творчество. Интеллектуальное творчество — это процесс создания субъективно либо объективно нового, основанный на способности порождать оригинальные идеи, использовать нестандартные способы деятельности и проявлять толерантность к необычным, «невозможным» ситуациям.

С — Саморегуляция. Интеллектуальная саморегуляция — это умение произвольно управлять собственной интеллектуальной деятельностью и целенаправленно строить процесс самообучения.

У — Уникальность склада ума. Уникальность склада ума — это индивидуально-своеобразные способы познавательного отношения к происходящему, в том числе выраженность индивидуальных познавательных стилей и сформированность индивидуальных познавательных предпочтений.

Обращаясь к современным требованиям к школьному образованию, можно сказать, что формирование универсальных учебных действий (УУД) — это основа для формирования КИТСУ в качестве критериев интеллектуальной воспитанности учащихся.

В заключение хотелось бы подчеркнуть, что использование в школьной практике учебников математики нового поколения, разработанных в рамках психодидактического подхода, имеет принципиально важное значение: на первый план выходит задача формирования индивидуальных интеллектуальных ресурсов выпускников школы, уровень развития которых выступает в качестве основы продуктивности их будущей жизнедеятельности (как в рамках своей профессиональной работы, так и в рамках своей личной жизни).

Литература

1. Гельфман Э. Г., Холодная М. А. Психодидактика школьного учебника: интеллектуальное воспитание учащихся.—СПб.: Питер, 2006.—384 с.
2. Гельфман Э. Г., Холодная М. А. и др. Математика: методическое пособие для 5 класса.—М.: изд-во «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2012.—231 с.
3. Гельфман Э. Г., Холодная М. А. и др. Математика: методическое пособие для 6 класса.—М.: изд-во «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2013.—248 с.
4. Гельфман Э. Г., Холодная М. А., Кузнецова М. В. Математика. Программа для основной школы. 5–6 классы.—М.: изд-во «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2012.—95 с.
5. Гельфман Э. Г., Холодная М. А., Кузнецова М. В. Алгебра. Программа для основной школы. 7–9 классы.—М.: изд-во «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2013.—88 с.
6. Гельфман Э. Г. и др. Обогащающая модель обучения в проекте МПИ: проблемы, раздумья, решения. Вып. 1.—Томск: Изд-во ТГУ, 2002.—186 с.
7. Лизура Н. Ю., Пустынникова А. М., Сазанова Т. А. Обогащающее повторение на уроках математики.—Томск: изд-во «Оптимум», 2004.—162 с.
8. Панов В. И. Психодидактика образовательных систем: Теория и практика.—СПб.: Питер, 2007.—352 с.
9. Полат Е. С. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования.—М.: Академия, 2001.—272 с.

10. Зуев Д. И. Проблемы школьного учебника: XX век: Итоги.—М.: Просвещение, 2004.—384 с.
11. Холодная М. А. Психология интеллекта: Парадоксы исследования. 2-ое изд.—СПб.: Питер, 2002.—272 с.
12. Холодная М. А. Когнитивные стили: о природе индивидуального ума. 2-ое изд.—СПб.: Питер, 2004.—384 с.
13. Холодная М. А. Психология понятийного мышления: от концептуальных структур к понятийным способностям.—М.: изд-во «ИП РАН», 2012.—288 с.

Холодная Марина Александровна
Институт психологии РАН
РОССИЯ, 129366, Москва, ул. Ярославская, 13
E-mail: kholod@psychol.ras.ru

INTELLECTUAL EDUCATION OF PUPILS:
ENRICHING MODEL OF LEARNING IN THE PROJECT
“MATHEMATICS. PSYCHOLOGY. INTELLIGENCE” (MPI)

Kholodnaya M. A.

One way of developing students' intelligence is through the design of new school textbooks and educational material of a type that meets the requirements of a psycho-didactic approach. As part of the “Mathematics, Psychology, Intelligence” education project (MPI), mathematics textbooks and educational materials (study books, practical work, workbooks for independent study, computer software) for middle school pupils (Years 5 to 9) were developed within the framework of an “enrichment” teaching model. The basic purpose of this model is the intellectual development of students through their mathematical education using specially constructed educational texts. The specific nature of these educational texts lies in the fact that, at the same time as conveying structures of formal mathematical knowledge, they also (1) support development of the basic components of students' mental experience (including cognitive, conceptual, metacognitive and intentional experience) and (2) create conditions for students to employ their own individual cognitive styles.

Key words: mathematics education, psycho-didactics, students' intellectual development, educational texts.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Анатолию Георгиевичу Кусраеву — 60 лет	11

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

Батищев В. А., Поддубный А. А., Устинов Ю. А. Математические модели движения крови в артериальных сосудах	15
Ватульян А. О., Недин Р. Д. Модели предварительного напряженного состояния и принципы его идентификации ..	32
Кутателадзе С. С. Новые тенденции в математике	53
Смирнов Е. И. Современные проблемы и «вызовы» в профессиональной подготовке и деятельности педагога в условиях модернизации	59
Шабат А. Б. Об одной интерполяционной задаче	66

СЕКЦИЯ I ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Асхабов С. Н. Дискретное уравнение типа свертки с нечетностепенной нелинейностью	77
Васильев В. Б. О разрешимости уравнений в свертках в многомерном конусе	87
Волосов К. А., Пугина Л. В., Волосова А. К. Нелинейные уравнения как система линейных функциональных уравнений	93

Ивлева Н. С., Левенштам В. Б. Обоснование метода усреднения для обобщенной задачи конвекции	105
Ильин К. И., Моргулис А. Б. О спектрах открытых течений идеальной жидкости в кольцевых областях	112
Плиева Л. Ю. Об интерполяционных квадратурных формулах для интегралов типа Коши с весами Якоби	124
Ревина С. В. Устойчивость пространственно-периодических и почти периодических течений вязкой жидкости	130
Сазонов Л. И. Стационарные решения системы Навье — Стокса в многомерном пространстве и их пространственная асимптотика	142
Филиппова О. В. Оценки А. Ф. Филиппова фазовых траекторий управляемых импульсных систем с запаздыванием и фазовыми ограничениями по управлению	153
Хубежты Ш. С. К расчету напряжений и смещений в некоторых задачах теории трещин	162

СЕКЦИЯ II МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Алехин С. Н., Петросов С. П., Фетисов И. В., Фетисов В. Г. Состояние и перспективы решения проблемы снижения вибрации стиральных машин барабанного типа	173
Горбанева О. И. Распределение ресурсов в иерархических системах как баланс между целевыми и нецелевыми интересами	182
Мицик М. Ф., Фетисов В. Г. Учет сил сопротивления бурному потоку при его свободном растекании за безнапорной водопропускной трубой в широкое отводящее русло	194
Музаев И. Д., Музаев Н. И. Математическое моделирование для системы автоматизации проектирования (САПР) селективных водозаборных устройств	202

Музаев И. Д. Математическое моделирование процесса усиления или ослабления эффекта сейсмического воздействия на высотное сооружение	212
Орлова Н. С. Исследование режимов виброкипения с использованием математического моделирования	219

СЕКЦИЯ III
СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Абатурова В. С. Математическое моделирование в обучении математике как средство формирования научного стиля мышления школьников	231
Дробышев Ю. А. О зарождении принципа историзма в российском математическом образовании	243
Дубровский В. Н. Визуализация математических зависимостей средствами динамической геометрии	261
Дятлов В. Н. Трехчастная структура учебных материалов .	268
Макаренко М. Д. «Плохо поставленная» задача как средство формирования практического мышления школьников и студентов	298
Малова И. Е. Учимся и учим формулировать вопросы	308
Одинец В. П. О работе Г. М. Фихтенгольца в Педагогическом институте им. А. И. Герцена (к 125-летию со дня рождения)	318
Холодная М. А. Интеллектуальное воспитание учащихся: обогащающая модель обучения в проекте «Математика. Психология. Интеллект» (МПИ)	323

Вниманию авторов

«Математический форум (Итоги науки. Юг России)» — научное периодическое издание, выходящее не менее одного раза в год. Сборник издается Южным математическим институтом Владикавказского научного центра РАН и РСО-А.

К публикации в сборник принимаются материалы региональных, российских и международных форумов (конференций, симпозиумов, семинаров и т. д.), освещающие новейшие достижения современной математической науки. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в другом издательстве, редколлегией не рассматриваются. При отборе материалов для сборника определяющим является высокий научный уровень. Поступившие в редакцию статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на английском и русском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи. В нем должны быть указаны: для статей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листов (≈ 12 с. формата А5). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей,

особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в сборник статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взимается.

Авторские права на сборник в целом принадлежат Южному математическому институту ВНЦ РАН и РСО-А и Редколлегии журнала, которые обладают исключительным правом получать и распределять любые платежи, связанные с переуступкой авторских прав на сборник.

АДРЕС РЕДАКЦИИ: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22

ТЕЛЕФОН: (8672) 53-84-62; ФАКС: (8672) 53-93-27

E-MAIL: rio@smath.ru

ЗАВ. РЕДАКЦИЕЙ: Кибизова В. В.

Научное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФОРУМ. Т. 8, ч. 2
Исследования по дифференциальным уравнениям,
математическому моделированию и проблемам
математического образования

Редакторы серии:
Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев

Редакторы тома:
А. О. Ватulyян, И. Е. Малова,
Ю. А. Устинов

Утверждено к печати
Ученым советом ЮМИ ВНЦ РАН и PCO-A

Компьютерная верстка:
М. С. Биченова, И. С. Гаприндашвили
Зав. редакцией: В. В. Кибизова

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-54423 от 10 июня 2013 г.

Подписано в печать 28.08.2014. Формат бумаги $60 \times 84^{1/16}$.
Усл. п. л. 20,11. Тираж 200 экз. Заказ № 85.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

ISBN 978-5-904695-23-1(ч.2)



9 785904 695231