ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ — ФИЛИАЛ ВНЦ РАН
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ЦЕНТР МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
РЕГИОНАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР ЮФУ

ПОРЯДКОВЫЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ. ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ:

Тезисы докладов
XVI Международной научной конференции
(РСО-Алания, г. Владикавказ, 20–24 сентября 2021 г.)

Владикавказ
2021

ББК 22.12+22.16+22.18
УДК 510.12

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVI Международной научной конференции (РСО-Алания, г. Владикавказ, 20–24 сентября 2021 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2021.—222 с.

Сборник содержит тезисы докладов XVI Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения» (РСО-Алания, г. Владикавказ, 20–24 сентября 2021 г.).

ISBN 978-5-904695-45-3
© ЮМИ ВНЦ РАН, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

Ватульян А. О., Юров В. О. Асимптотическое и численное исследование волн в неоднородных волноводах 11

Гутман А. Е. Булевозначный анализ: увидеть простое в сложном 12

Kulaev R. Ch. Separation and comparison theorems for a fourth-order differential equation on a graph 13

Morgulis A. B. Effect of the boundary conditions on the hydrodynamic stability 14

Музаев И. Д., Харебов К. С., Музаев Н. И. Постановка и решение начально-краевой задачи, моделирующей эффективный способ забора воды из холодного слоя стратифицированного водоема 15

Никоноров Ю. Г. О конечных однородных метрических пространствах .. 17

СЕКЦИЯ I
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

Балащенко В. В., Куница В. Н. Обобщенные эрмитовы структуры на трехмерных разрешимых группах Ли 20

Будыка В. С. Условия самосопряженности и дискретности спектра блочных якобиевых матриц 22

Bulnes F. Mukai–Fourier transforms as solutions to field equations in derived categories: spectrum as Higgs-oscillations in the space-time V 23

Волчков В. В., Волчков Вит. В. О функциях с нулевыми шаровыми средними с заданными значениями в фиксированных точках 25

Гаджимирзаев Р. М. Аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена частичных сумм специального ряда по полиномам Лагерра 27

Грановский Я. И. Оценка Баргмана для некомпактных конечных квантовых графов с суммируемыми потенциалами 29

Emelyanov E. Y. On the domination problem for Lebesgue, KB, and Levi operators 31

Иванов П. А. Об операторах обратного сдвига в полицилиндрических областях 33

Иванова О. А. О подпространствах пространства целых функций, инвариантных относительно оператора обобщенного обратного сдвига .. 35

Кораблина Ю. В. О критериях непрерывности классических операторов на весовых пространствах Бергмана, Блоха и Фока 37

Magomed-Kasumov M. G. Uniform convergence of Fourier series in a Sobolev orthogonal system of polynomials associated with Jacobi polynomials 39

Мелихов С. Н. Инвариантные подпространства оператора обобщенного обратного сдвига и рациональные функции 40

Окорочков И. В., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. О связи полиномов Бернштейна и Канторовича в примере $f(x) = |2x - 1|$ 42

Петросова М. А. О некоторых специальных оценках, связанных с коэффициентами полиномов Бернштейна на симметричном отрезке .. 44

Полякова Д. А. Об образе отображения Бореля на пространствах ультрадифференцируемых функций нормального типа 46

Романов А. С. Об экстремальности p-гармонических функций в R^2 48

Tashpulatov S. M., Parmanova R. T. Structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the impurity hubbard model. Triplet state 50

Shopulatov Sh. Sh. On an integral criterion for plurisubharmonic functions .. 53

Юсупов Г. А. О среднеквадратических приближениях 2π-периодических функций в пространстве L_2 55

СЕКЦИЯ II
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Артемов М. А., Барановский Е. С. Задача оптимального управления для эволюционных уравнений, описывающих ползущее течение вязкоупругой жидкости 59

Асхабов С. Н. Система неоднородных интегральных уравнений типа свертки со степенной нелинейностью 62

Ахматов А. А., Хусанов Д. Х., Буранов Ж. И. Об устойчивости нелинейной автоматической системы управления с запаздывающей обратной связью 64

Ахматов З. А., Тотиева Ж. Д. Квазидвумерная обратная задача для уравнения с памятью 66

Ашуров Р. Р., Файзиев Ю. Э. Обратная задача по определению порядка дробной производной в волновом уравнении 68

Барановский Е. С. О сильных решениях уравнений Навье — Стокса — Фойгта с неоднородным краевым условием Дирихле 70

Bekbolat B., Tokmagambetov N. An inverse problem for the heat equation associated with the Jacobi operator 72

Бештоков М. Х. Метод суммарной аппроксимации для решения задачи Дирихле для многомерного уравнения соболевского типа 73

Бештокова З. В. Локально-одномерная разностная схема для решения первой начально-краевой задачи для нагруженного многомерного уравнения параболического типа 76

Борисов Д. И. Спектры дифференциальных операторов на графах с малыми ребрами 78

Васильев В. Б., Ходырева А. А. О дискретных краевых задачах в четверти плоскости 79

Волчкова Н. П., Волчков Вит. В., Ищенко Н. А. О ядре локального преобразования Помпейю 81

Джамалов С. З., Ашуров Р. Р., Туракулов Х. Ш. Об одной нелокальной краевой задаче периодического типа для трехмерного уравнения Чаплыгина в неограниченной призматической области 83

Дударев В. В., Мнухин Р. М. О некоторых вычислительных аспектах решения обратных задач для неоднородных тел 85

Durdiev D. K., Rahmonov A. A. A multi-dimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation 86

Durdiev D. K., Rahmonov A. A., Bozorov Z. R. A 2D diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation 89

Дурдиев Д. К., Турдиев Х. Х. Задача определения памяти в системе интегро-дифференциальных уравнений Максвелла 91

Дурдиев У. Д. Обратная задача об определении неизвестного коэффициента в уравнении колебания балки 93

Juraev D. A., Agarwal P. Ill-posed problems of equations of mathematical physics 95

Зуннуннов Р. Т. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой — четверть плоскости ... 97

Калинина Т. И., Наседкин А. В. Плоские задачи об установившихся колебаниях упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений ... 99

Katz D. B. Riemann boundary value problem on spirals ... 100

Кораблина Э. В., Левенштам В. Б. Обратные задачи для волнового уравнения с младшим членом и быстро осциллирующими данными ... 102

Kovalevsky A. A. Summability of entropy and weak solutions of nonlinear elliptic equations with data in classes close to L^1 ... 103

Nazarov A. I., Nazarov S. A., Zavorokhin G. L. On symmetric wedge mode of an elastic solid ... 105

Nedin R. D., Vatulyan A. O. On some direct and inverse elasticity problems for 2-dimensional prestressed regions ... 107

Нестеров С. А. Исследование обратных задач термоупругости для неоднородных тел ... 109

Нурахметов Д. Б., Анияров А. А. Управление колебаниями балки с нелокальными краевыми условиями ... 111

Поляков Д. М. Об асимптотике спектра дифференциального оператора второго порядка с нелокальными краевыми условиями ... 113

Попов В. А. От локально заданного к глобальному риманову аналитическому пространству ... 115

Постнов С. С. Оптимальное управление для систем, моделируемых диффузионно-волновым уравнением ... 117

Ревина С. В. Область диффузионной неустойчивости для систем параболических уравнений ... 119

Сафаров Ж. Ш. Решение одной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения методом моментов ... 121

Semenov V. I. Special properties of plane solenoidal fields ... 123

Totieva Zh. D. A global solvability of a two-dimensional kernel determination problem for a viscoelasticity equation ... 124

Трынин А. Ю. Об аппроксимативных свойствах обобщений синк-аппроксимаций на классе Привалова — Чантурия ... 126

Умаров Х. Г. Разрушение и глобальная разрешимость задачи Коши для уравнения нелинейных длинных продольных волн в вязкоупругом стержне ... 129

Urtaeva A. A., Dzanagova I. T. Forth-order differential inequalities on a graph ... 130

Shamolin M. V. Tensor invariants of dissipative systems ... 131

СЕКЦИЯ III
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Атаян А. М. Математическое моделирование гидродинамических процессов в мелководном водоеме на многопроцессорной вычислительной системе 133

Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х. Моделирование террористической активности 135

Белова Ю. В. Моделирование смещения ареалов фитопланктонных популяций в условиях изменения гидрологического режима в Азовском море 137

Белова Ю. В., Рахимбаева Е. О. Алгоритмы и пользовательский интерфейс для задач динамики планктонных популяций 139

Богачев И. В. Моделирование предварительно напряженной круглой пластины Тимошенко 141

Богачев И. В. Реконструкция характеристик предварительно напряженной упругой полосы 143

Ватульян А. О., Явруян О. В. Об одном подходе к исследованию задачи о расслоении полосы от основания с использованием моделей градиентной теории упругости 144

Гальцев О. В. О моделировании процесса растворения упругого каркаса пористой среды 146

Dimitrieva N. F. Simulation of two-phase flows behind a streamlined body .. 148

Зеленчук П. А. Численное исследование системы «хищник-жертва» на основе уравнений типа диффузия–адвекция–реакция 150

Иоване Дж., Наседкин А. В., Наседкина А. А. Компьютерная гомогенизация пористых неоднородно поляризованных пьезоэлектрических композитов с использованием метода эффективных модулей и алгоритма 3–0 пакета ACELAN–COMPOS при различных видах граничных условий 152

Казарников А. В., Хаарио Х., Марчиниак-Зохра А., Шайхл Р. Идентификация моделей формирования биологических структур в случае малого количества данных 154

Костин А. В. Задача о тени для оришаров и псевдосферические поверхности вращения 156

Лекомцев Д. Г. Аналитическое моделирование работы совершенной скважины в анизотропном неоднородном грунте со степенным законом изменения проводимости при $s = -4$ 157

Леонтьев А. Л., Чумак М. И. Применение ПЛИС-технологий для моделирования гидрофизических процессов в водоемах со сложным рельефом дна 159

Литвинов В. Л., Литвинова К. В. Нелинейная математическая модель продольно-поперечных колебаний балки с движущейся границей 162

Литвинов В. Н., Грачева Н. Н., Руденко Н. Б. Организация параллельно-конвейерных вычислений для моделирования процесса распространения загрязняющих веществ в водоеме на основе графовой модели 164

Мартынова Ю. В., Михайлов С. П. Об одном методе моделирования терригенного коллектора 166

Мартынова Ю. В., Музипов В. З. Об одной обратной спектральной задаче для квантового графа типа «дерево» 168

Мнухин Р. М., Дударев В. В. О колебаниях неоднородных двумерных областей 170

Музаев И. Д., Харебов К. С., Музаев Н. И. Математическое моделирование сдвиговых сейсмических колебаний массива, состоящего из рекультивированного материала отложения горнорудной промышленности (хвосты) 171

Nedin R. D. Regarding modeling the lattice plate of the eye sclera with account for the residual stress fields 173

Нестеров С. А. Масштабно-зависимые модели деформирования слоистых тел 175

Никитина А. В., Филина А. А., Литвинов В. Н. Разработка средств математического моделирования процессов биодеструкции загрязнения нефтяного происхождения в прибрежных системах 177

Никонорова Ю. В. Построение нелинейных регрессий для исследования ряда экономических процессов 179

Новиков В. В. О состоятельности оценок непараметрической регрессии 181

Оськин А. Ф., Оськин Д. А. Алгоритм численной оптимизации, основанный на методе роя частиц 183

Панаэтова О. С., Тимченко Ю. В., Радионов А. А., Каменецкий Е. С. Математическое моделирование процессов рассеяния пыли для оценки экологической ситуации в горных ущельях РСО-Алания 185

Переварюха А. Ю. Моделирование переходных осцилляционных режимов популяций с агрегированным запаздыванием 187

Подорога А. В., Тихонов И. В. Об одном специальном методе моделирования решений квазилинейных дифференциальных уравнений 189

Субботин В. И. О существовании одного RR-многогранника второго типа 191

Тимченко Ю. В., Панаэтова О. С., Радионов А. А., Каменецкий Е. С. Обработка данных спутниковых наблюдений атмосферной оптической плотности над горными территориями РСО-Алания 193

Чистяков А. Е., Кузнецова И. Ю. Моделирование процесса смешения вод в устьевом районе 195

Шарифуллин А. С. Обобщенно-выпуклые множества 197

Shoyimardonov S. K. A discrete time SEIR model for COVID-19 spread .. 198

СЕКЦИЯ IV
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Газарян Р. М., Киштикова Е. В. Парабола — знакомая и незнакомая .. 201

Дятлова В. Н. Функциональная тематика в задачах с параметрами 203

Костина Н. Н., Костина Г. В. Об организации конкурсов для будущих учителей математики и физики 205

Кузнецова И. В. К вопросу содержания программы дпо «функциональная и цифровая грамотность школьника в творческом и уровневом освоении сложных математических объектов, процедур и явлений» 207

Малова И. Е. Методическая деятельность: от интуиции к обоснованиям .. 209

Рябых Г. Ю., Фролова Н. В., Писковацков В. Э., Ретивых А. Ю. Электронный учебник как инновационное средство повышения качества обучения 211

Ускова О. Ф., Болотова С. Ю., Усков Д. Г. Математические алгоритмы дисциплины «Информатика и программирование» 213

Чиспияков С. В. Применение координатного метода для решения задач на нахождение расстояния от точки до плоскости 215

Список сокращений 218

Пленарные доклады

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНОВОДАХ

А. О. Ватульян
(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владиквказ, ЮМИ ВНЦ РАН),
В. О. Юров
(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владиквказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Разработан комплекс численных и аналитических методов для исследования свободных и вынужденных колебаний неоднородных цилиндрических волноводов. Задачи об установившихся продольно-радиальных колебаниях сведены к изучению векторного дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами и двумя спектральными параметрами. Для численного решения краевой задачи использован метод пристрелки. При построении ветвей дисперсионного множества использован метод продолжения по параметру. Для произвольных законов неоднородности получено квадратичное приближение ветвей дисперсионного множества в окрестности точек радиальных резонансов, позволяющее различать случаи нормальной и аномальной дисперсии. Исследована структура дисперсионного множества для волновода с импедансными граничными условиями. Получены формулы, отражающие изменение компонент дисперсионного множества в зависимости от параметров в граничных условиях. Исследовано влияние структуры и интенсивности поля предварительных напряжений на дисперсионное множество и волновое поле на внешней границе волновода. Получены формулы для уточнения частот радиальных резонансов волновода с заданным полем предварительных напряжений. Рассмотрен ряд задач о волновых движениях с учетом неоднородных реологических свойств в рамках концепции комплексных модулей.

Решена задача о распространении волн в неоднородном волноводе с кольцевым отслоением. На основе анализа ряда вспомогательных задач Коши построена система гиперсингулярных интегральных уравнений для определения скачков радиальных и осевых перемещений на отслоении. Решение системы осуществлено асимптотически в случае малой ширины и при помощи метода граничных элементов, проведено сравнение двух подходов. Рассмотрена обратная задача о реконструкции осевого расположения отслоения и его ширины по данным о поле смещений в дальней зоне.

Решен ряд обратных задач по одновременному восстановлению нескольких функций неоднородности (переменные по радиальной координате, параметры Ламе и плотность). Рассмотрены постановки обратных задач, в которых дополнительная информация задается в рамках позиционного и частотного зондирования. Метод решения основан на линеаризации задачи в окрестности некоторого начального приближения и является итерационным. На каждой итерации находятся поправки на основе решения системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами при помощи метода регуляризации А. Н. Тихонова, предложена его модификация на основе анализа чувствительности и сравнительного анализа норм ядер интегральных операторов.

БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ АНАЛИЗ: УВИДЕТЬ ПРОСТОЕ В СЛОЖНОМ[1]

А. Е. Гутман

(Россия, Новосибирск; ИМ СО РАН, НГУ)

Вниманию слушателей предлагается рассказ о булевозначных моделях теории множеств [1–3]. Это очень необычные модели с очень необычной логикой. Утверждения в таких моделях не обязаны быть истинными или ложными, и их истинность может принимать промежуточные значения. Именно с помощью этой идеи в свое время была успешно решена самая знаменитая математическая задача XX века — проблема континуума.

Основные принципы булевозначного анализа и ключевые этапы решения проблемы континуума описываются без формальных деталей и строгих доказательств в соответствии со следующим планом:

- Постановка задачи.
- Основные события и участники: Г. Кантор, Д. Гильберт, К. Гёдель, П. Коэн.
- Упрощение математических объектов «силой взгляда».
- Стереограммы, 3-граммы, ω-граммы и континуум-граммы.
- Булевозначный взгляд на вещественные функции.
- Принцип переноса и связанные с ним кажущиеся парадоксы.
- Приложение к решению функциональных уравнений.
- Метод подъема и спуска.
- Каноническое погружение в булевозначный универсум.
- Расслоение универсума.
- Решение проблемы континуума.

Литература

1. *Jech T.* Set Theory. The Third Millennium Edition, revised and expanded.—Berlin: Springer, etc., 2003.
2. *Bell J. L.* Set Theory. Boolean-Valued Models and Independence Proofs.—N. Y.: Clarendon Press, 2005.
3. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект № 0314-2019-0005.

SEPARATION AND COMPARISON THEOREMS FOR A FOURTH-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION ON A GRAPH

R. Ch. Kulaev

(Russia, Vladikavkaz; SMI VSC RAS)

We study a fourth-order equation

$$Lu \equiv \frac{d^2}{d\Gamma^2}\left(p(x)\frac{d^2u}{d\Gamma^2}\right) - h(x)u = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

where Γ is a geommetric graph [1, 2]. By *a differential equation on a graph*, we understand the set of differential equations on the edges

$$\left(p_i(x)u_i''\right)'' - r_i(x)u = 0, \quad x \in \gamma_i \in E(\Gamma), \tag{2}$$

and the set of consistency conditions at the nodes

$$u \in C(\Gamma) \cap C^4[\Gamma], \quad \beta(a)u_i''(a) - \vartheta(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma), \quad i \in I(a), \tag{3}$$

$$\sum_{i \in I(a)} \left(p_i u_i''\right)_\nu'(a) - h(a)u(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma). \tag{4}$$

Equation (1) arises in the study of the spectral problem of natural vibrations of a system of Euler–Bernoulli beams connected by elastic hinges [1].

A subgraph $\Gamma_0 \subset \Gamma$ is called an *S^2-zone* of a function $u(x) \in C(\Gamma) \cap C^1[\Gamma]$ if the following conditions hold: 1) $u(x) \neq 0$ on Γ_0; 2) there exist a subgraph Γ_1 such that $\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma$ and $u(x) = 0$ on $\partial\Gamma_0 \cup \partial\Gamma_1$; 3) $u'(x) = 0$ on $\partial\Gamma_0 \cap \partial\Gamma_1$.

Theorem 1 (separation theorem)**.** *Let $u(x)$ and $v(x)$ be two solutions of* (1) *such that $u|_{\partial\Gamma} = v|_{\partial\Gamma} = 0$. If $u(x)$ has an S^2-zone $\Gamma_0 \subset \Gamma$, then $v(x)$ vanishes at least once in Γ_0 unless $v(x)$ is a constant multiple of $u(x)$ on Γ_0.*

Let $r(x)$, $R(x) \in C[\Gamma]$. Denote by L_r, L_R differential operators with $h(x) = r(x)$ and $h(x) = R(x)$, respectively.

Theorem 2 (comparison theorem)**.** *Suppose that $0 < r(x) \leqslant R(x)$ on Γ, and $v(x)$, $u(x)$ are nontrivial solutions of equations $L_r v(x) = 0$ and $L_R u(x) = 0$, respectively, such that $v|_{\partial\Gamma} = u|_{\partial\Gamma} = 0$. If $v(x)$ has an S^2-zone $\Gamma_0 \subset \Gamma$, then $u(x)$ vanishes at least once in Γ_0 unless $u(x)$ is a constant multiple of $v(x)$ on Γ_0.*

We note that our formulation clarifies the Theorem 5.2 [2] and is similar to Sturm's comparison theorems for a second-order equation (see [3]).

References

1. *Borovskikh A. V., Lazarev K. P.* Fourth-order differential equations on geometric graphs // J. Math. Sci.—2004.—Vol. 119, № 6.—P. 719–738.
2. *Leighton W., Nehari Z.* On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order // Trans. Amer. Math. Soc.—1958.—Vol. 89.—P. 325–377.
3. *Pokorny Yu. V., Penkin O. M.* Sturm theorems for equations on graphs // Dokl. Math.—1990.—Vol. 40, № 3.—P. 640–642.

EFFECT OF THE BOUNDARY CONDITIONS ON THE HYDRODYNAMIC STABILITY

A. B. Morgulis

(Russia, SFedU, Rostov-on-Don; Vladikavkaz, SMI VSC RAS)

The content of the present communication relies on the research done in collaboration with Dr. Konstantin Ilin, University of York, UK. We address the influence of boundary conditions on the stability of the so-called Taylor–Couette (TC) flows. These are the flows of a viscous incompressible fluid confined within a gap between two coaxial cylinders and possessing the rotational-translational invariance. In the classical setting, the cylinders are rigid, impermeable and rotating uniformly. The boundary condition excludes the fluid slippage alongside the boundary. Such interacting makes the fluid rotating. The classical case is now studied very thoroughly.

The TC flows are compatible with mass flux through the gap. This case is much less studied, though quite a few authors addressed it. They employed the no-slip conditions and prescribed constant normal velocities at the cylinders. There is a common seeing of this boundary condition as a rough model of rigid porous wall. It turned out that the mass flux is capable of influencing the stability of a TC flow to a great extent (see articles [1–3], and references therein). However, the diversity of physical situations and the needs of computer modelling suggest the diversity of the boundary conditions. So we'll be considering the other kinds of boundary conditions on the permeable boundaries, which also make sense in the context of porous walls. At that, the problem with the normal velocity specified everywhere will be the reference point.

Given the invariance of the TC flows, the stability analysis finally leads to several eigenvalue problems for ODE. Altering the boundary conditions causes a finite-dimensional perturbation of the operator associated with the reference eigenvalue problem. We'll see that such a perturbation can change the stability drastically, even if it is 1-dimensional and altering the boundary conditions does not change the basic flow.

References

1. *Ilin K., Morgulis A.* Instability of a two-dimensional viscous flow in an annulus with permeable walls to two-dimensional perturbations // Phys. Fluids.—2016.—Vol. 27.—P. 044107.
2. *Ilin K., Morgulis A.* Inviscid instability of an incompressible flow between rotating porous cylinders to three-dimensional perturbations // Eur. J. Mech. B/Fluids.—2017.—Vol. 61.—P. 46–60.
3. *Ilin K., Morgulis A.* On the stability of the Couette–Taylor flow between rotating porous cylinders with radial flow // Eur. J. Mech. B/Fluids.—2020.—Vol. 80.—P. 174–186.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ЭФФЕКТИВНЫЙ СПОСОБ ЗАБОРА ВОДЫ ИЗ ХОЛОДНОГО СЛОЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ВОДОЕМА

И. Д. Музаев
(Россия, Владикавказ; ГФИ ВНЦ РАН, Владикавказский филиал ФУ),
К. С. Харебов
(Россия, Владикавказ; ГФИ ВНЦ РАН),
Н. И. Музаев
(Россия, Владикавказ; ГФИ ВНЦ РАН)

Поставлена и решена контактная начально-краевая задача, моделирующая один эффективный способ забора воды из глубинного холодного слоя слоисто стратифицированного водоема с температурной (плотностной) стратификацией. Актуальность подобных задач обусловлена тем, что для охлаждения высокотемпературных тепловыделяющих элементов различных промышленных предприятий, в том числе тепловых и атомных электростанций, в ряде случаев для предотвращения аварийной ситуации является необходимым подавать охлаждающую воду к упомянутым элементам из глубинных холодных слоев водоема.

В прямоугольной системе координат $Oxyz$, часть пространства, ограниченная условиями $-L \leqslant x \leqslant L$, $-B \leqslant y \leqslant B$, $-H_2 \leqslant z \leqslant H_1$ занята двухслойным плотностно-стратифицированным водоемом, где приняты следующие обозначения: $2L$ — длина, $2B$ — ширина, H_1 — глубина верхнего слоя, H_2 — глубина нижнего слоя, ρ_1 – плотность верхнего слоя, ρ_2 — плотность нижнего слоя воды в водоеме. Вода из слоев забирается двумя трубами, как это показано на рис. 1.

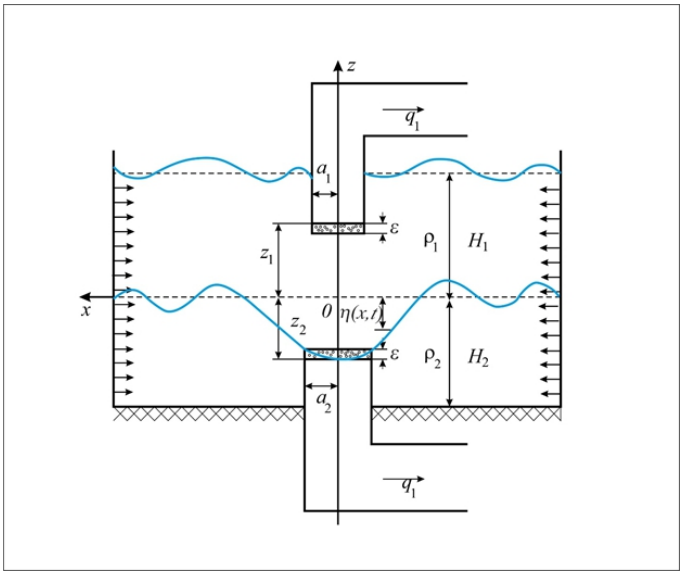


Рис. 1. Расчетная схема начально-краевой задачи.

Нижняя труба предназначена для забора воды из нижнего холодного слоя. Верхняя вспомогательная труба предназначена для управления водозаборным процессом через нижнюю основную трубу с тем расчетом, чтобы вода из верхнего теплого слоя не засасывалась в нижнюю трубу, и тем самым, для забора воды исключительно из нижнего слоя.

Математическая модель выше изложенного способа водозабора в двумерной постановке в вертикальной плоскости составлена на базе линейной теории поверхностных и внутренних гравитационных волн. Она имеет следующий вид:

$$\Delta\phi_1(x,z,t) = -\frac{q_1}{2a_1\epsilon}\, f_1(x,z), \quad 0 \leqslant z \leqslant H_1, \tag{1}$$

$$\Delta\phi_2(x,z,t) = -\frac{q_2}{2a_2\epsilon}\, f_2(x,z), \quad 0 \leqslant z \leqslant H_2, \tag{2}$$

$$\phi_1 = \phi_2 = \frac{\partial\phi_1}{\partial t} = \frac{\partial\phi_2}{\partial t}, \quad t = 0, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right|_{x=L} = -\frac{q_1}{2H_1}, \quad \left.\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right|_{x=L} = -\frac{q_2}{2H_2}, \tag{4}$$

$$\left.\left(\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\right)\right|_{z=H_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right|_{z=-H_2} = 0, \tag{5}$$

$$\eta(x,t) = \left.\frac{\rho_1}{(\rho_2-\rho_1)g}\,\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\right|_{z=0} - \left.\frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)g}\,\frac{\partial\phi_2}{\partial t}\right|_{z=0}, \tag{6}$$

где приняты следующие обозначения: ϕ_1 и ϕ_2 — потенциалы скоростей в верхнем и нижнем слоях соответственно; (x,z) — пространственные координаты; t — время; q_1 и q_2 — расходы забираемых вод через верхнюю и нижнюю трубы соответственно; $\eta(x,t)$ — уравнение волновой поверхности (линии) раздела слоев воды; $2a_1$ и $2a_2$ — ширины водозаборных отверстий труб; ϵ — вспомогательная малая величина. Очевидно, что процесс затекания воды в трубопроводные отверстия в поставленной задаче смоделирован в виде точечных стоков, непрерывно распределенных в прямоугольниках, примыкающих к отверстиям.

В результате решения поставленной контактной начально-краевой задачи получена совокупность расчетных формул для вычисления закона колебания поверхности раздела слоев воды. Путем вариации расхода q_1 через верхнее водозаборное отверстие можно подобрать такое его числовое значение, при котором поверхность раздела слоев практически остается в первоначальном горизонтальном положении. Тем самым достигается цель поставленной и решенной проблемы: обеспечение забора воды исключительно из нижнего слоя.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

О КОНЕЧНЫХ ОДНОРОДНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ю. Г. Никоноров
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Этот доклад основан на недавних работах [1–3], написанных в соавторстве с В. Н. Берестовским. В статье [1] были введены и изучены важные подклассы класса конечных однородных метрических пространств. Подобные классы изучались ранее для римановых многообразий, см. книгу [4] и список литературы в ней. Приведем некоторые определения.

Конечное метрическое пространство (M, d) называется *однородным*, если для любых точек $x, y \in M$ существует изометрия f пространства (M, d) на себя такая, что $f(x) = y$.

Конечное метрическое пространство (M, d) называется *обобщенным нормальным однородным*, если для любых точек $x, y \in M$ существует изометрия f (называемая δ-сдвигом в точке x) пространства (M, d) на себя такая, что $f(x) = y$ и $d(x, f(x)) \geqslant d(z, f(z))$ для любых $z \in M$.

Конечное метрическое пространство (M, d) называется *однородным по Клиффорду — Вольфу* (кратко *КВ-однородным*), если для любых точек $x, y \in M$ существует изометрия f пространства (M, d) на себя такая, что $f(x) = y$ и $d(x, f(x)) = d(z, f(z))$ для любых $z \in M$.

Пусть FCWHS, FGNHS, FNHS, FHS обозначают соответственно классы конечных КВ-однородных пространств, конечных обобщенных нормальных однородных пространств, конечных нормальных однородных пространств и конечных однородных пространств. В работе [1] доказано, что

$$\mathrm{FCWHS} \subset \mathrm{FGNHS} = \mathrm{FNHS} \subset \mathrm{FHS},$$

при этом указанные включения строгие. Подчеркнем, что свойства нормальной однородности и обобщенной нормальной однородности для конечных метрических пространств равносильны (хотя это не так, скажем, в случае римановых многообразий [4]), что позволяет не приводить здесь определение нормального однородного пространства (см. [1]). Отметим только, что проверка условия обобщенной нормальной однородности значительно проще, чем проверка условия нормальной однородности. В работе [1] построены различные примеры соответствующих пространств. Кроме того, в [1] дано описание изучаемых классов на языке теории графов, с помощью которого строятся примеры конечных метрических пространств с необычными свойствами.

Частными случаями конечных однородных метрических пространств являются вершинные множества компактных выпуклых (в том числе правильных и полуправильных) многогранников в евклидовых пространствах с транзитивной на множестве вершин группой изометрий.

Будем говорить, что n-мерный многогранник P в $\mathbb{R}^n$ *однороден* (или *вершинно-транзитивен*) если его группа изометрий действует транзитивно на множестве его вершин.

Одномерный многогранник — это замкнутый отрезок, ограниченный двумя конечными точками. Он является правильным по определению. Двумерными правильными многогранниками являются правильные многоугольники на евклидовой плоскости. Выпуклый n-мерный многогранник при $n \geqslant 3$ называется *правильным*, если он однороден и все его гиперграни являются правильными конгруэнтными друг другу многогранниками. Хорошо известно, что существует всего пять правильных трехмерных многогранников (*платоновых тел*): тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Напомним теперь определение более широкого класса полуправильных выпуклых многогранников. При $n = 1$ и $n = 2$ полуправильные многогранники определяются как правильные. Выпуклый n-мерный многогранник при $n \geqslant 3$ называется *полуправильным*, если он однороден и все его гиперграни являются правильными многогранниками. В трехмерном пространстве (помимо платоновых тел) существуют следующие полуправильные многогранники: 13 *архимедовых тел* и две бесконечные серии прямых призм и антипризм. По классификации полуправильных многогранников в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 4$, помимо правильных многогранников, существует три полуправильных многогранника в $\mathbb{R}^4$ и по одному полуправильному многограннику в $\mathbb{R}^n$ при $n = 5, 6, 7, 8$ (их называют многогранниками Госсета по имени их первооткрывателя [5]).

В работах [1–3] классифицированы все (обобщенные) нормальные однородные и однородные по Клиффорду — Вольфу метрические пространства, являющиеся множествами вершин правильных или полуправильных многогранников в евклидовых пространствах (с индуцированной метрикой). Изложению этой классификации посвящена основная часть доклада.

Литература

1. *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* Конечные однородные метрические пространства // Сиб. мат. журн.—2019.—Т. 60, № 5.—С. 973–995.
2. *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* Конечные однородные подпространства евклидовых пространств // Мат. тр.—2021.—Т. 24, № 1.—С. 3–34.
3. *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* Полуправильные многогранники Госсета.—(Статья направлена в журнал).
4. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* Riemannian Manifolds and Homogeneous Geodesics.—Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020.
5. *Gosset Th.* On the regular and semi-regular figures in space of n dimensions // Messenger Math.—1900.—Vol. 29.—P. 43–48.

Секция I

Функциональные пространства и теория операторов

ОБОБЩЕННЫЕ ЭРМИТОВЫ СТРУКТУРЫ НА ТРЕХМЕРНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ЛИ[1]

В. В. Балащенко (Беларусь, Минск; БГУ),
В. Н. Куница (Беларусь, Минск; БГУ)

f-структуры на гладких многообразиях, которые ввел Кентаро Яно, задаются соотношением $f^3 + f = 0$ и представляют собой обобщение почти комплексных и почти контактных структур. f-структура называется метрической относительно римановой метрики g, если $g(f(X), Y)+g(X, f(Y)) = 0$ для любых гладких векторных полей X, Y на гладком многообразии M. Данные структуры являются важнейшим объектом обобщенной эрмитовой геометрии [1].

Основные представленные в данной работе классы f-структур — это приближенно келерова, обобщенно приближенно келерова и эрмитова f-структуры. Приближенно келерова f-структура или NKf-структура задается соотношением $\nabla_{fX}(f)(fX) = 0$ (здесь и далее ∇ — связность Леви-Чивита метрики g). Обобщенно приближенно келерова f-структура или $GNKf$-структура определяется соотношением $f(\nabla_{fX}(f)(fX)) = 0$. Эрмитова f-структура или Hf-структура инициирована введенным В. Ф. Кириченко композиционным тензором T [1] и задается соотношением (см. [2, 3])

$$T(X, Y) = \frac{1}{4} f\big(\nabla_{fX}(f)(fY) - \nabla_{f^2X}(f)(f^2Y)\big) = 0.$$

В работе [4] рассмотрены структуры разных типов на разрешимых 3-х и 4-х мерных алгебрах Ли и соответствующие им левоинвариантные структуры на группах Ли. Цель данной работы — построение левоинвариантных метрических f-структур на серии 3-х мерных разрешимых групп Ли, реализующих упомянутые выше классы метрических f-структур. При этом на каждой из рассмотренных ниже алгебр Ли метрическая f-структура задавалась соотношениями $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = -e_3$, $f(e_3) = e_2$. Следует отметить, что размерность 3 является минимальной для содержательности данной задачи, а все построенные f-структуры являются почти контактными метрическими структурами.

Сначала было рассмотрено следующее однопараметрическое попарно неизоморфное семейство алгебр Ли $\tau'_{(\lambda,3)}$: $[e_1, e_2] = \lambda e_2 - e_3$; $[e_1, e_3] = e_2 + \lambda e_3$, где λ — параметр, при $\lambda = 0$ — это алгебра Ли группы Ли движений на двумерном евклидовом пространстве. Доказано, что на соответствующей группе Ли

[1]Работа выполнена при частичной поддержке государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 годы «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание «Структуры, связанные с алгебраическими, линейными и конечно порожденными группами, конечномерными алгебрами, топологическими пространствами и однородными многообразиями», НИР «Структуры на линейных алгебраических группах, обобщенных главных G-расслоениях, однородных многообразиях и группах Ли», № гос. регистрации 20211882.

построенная f-структура является приближенно келеровой f-структурой при параметре $\lambda = -1$ и эрмитовой f-структурой для любых параметров λ.

Далее было рассмотрено однопараметрическое попарно неизоморфное семейство алгебр Ли $\tau_{(\lambda,3)}$: $[e_1, e_2] = e_2$; $[e_1, e_3] = \lambda e_3$, где λ — параметр. При параметре $\lambda = -1$ это алгебра Ли группы Ли движений в двумерном пространстве Минковского; при параметре $\lambda = 1$ является алгеброй Ли разрешимой группы, которая действует просто и транзитивно на вещественном гиперболическом пространстве; при $\lambda = 0$ $\tau_{(0,3)} = \mathbb{R} \times aff(\mathbb{R})$, где $aff(\mathbb{R})$: $[e_1, e_2] = e_2$. Доказано, что на соответствующей группе Ли построенная f-структура является приближенно келеровой f-структурой при $\lambda = 1$ и эрмитовой f-структурой для любых параметров λ.

Следующей рассмотренной алгеброй Ли стала трехмерная алгебра Ли Гейзенберга: $[e_1, e_2] = e_3$. На соответствующей ей группе Ли f-структура является обобщенно приближенно келеровой и эрмитовой f-структурой.

Последняя рассмотренная алгебра Ли задается соотношениями: $[e_1, e_2] = e_2$; $[e_1, e_3] = e_2 + e_3$. На соответствующей ей группе Ли представленная f-структура ни к одному из отмеченных выше классов обобщенной эрмитовой геометрии не принадлежит.

Литература

1. *Кириченко В. Ф.* Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1983.—Т. 47, № 6.—С. 1208–1223.
2. *Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Однородные пространства: теория и приложения.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
3. *Balashchenko V. V.* Invariant nearly Kähler f-structures on homogeneous spaces // Global Differential Geometry: The Mathematical Legacy of Alfred Gray, Contemporary Mathematics.—2001.—P. 263–267.
4. *Andrada A., Barberis M. L., Dotti I. G., Ovando G. P.* Product structures on four dimensional solvable Lie algebras // Homology, Homotopy and Applications.—2005.—Vol. 7 (1).—P. 9–37.

УСЛОВИЯ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ И ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА БЛОЧНЫХ ЯКОБИЕВЫХ МАТРИЦ[1]

В. С. Будыка

(Россия, Москва, РУДН; Донецк, ГОУ ВПО «ДОНАУИГС»)

Основным объектом доклада является блочная якобиева матрица

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathscr{A}_0 & \mathscr{B}_0 & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathscr{B}_0^* & \mathscr{A}_1 & \mathscr{B}_1 & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathscr{B}_1^* & \mathscr{A}_2 & \mathscr{B}_2 & \mathbb{O}_m & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $\mathscr{A}_n = \mathscr{A}_n^*$, $\mathscr{B}_n \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\det \mathscr{B}_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{O}_m$ — нулевая матрица, и $\mathbb{C}^{m\times m}$ — множество всех $m \times m$-матриц с элементами из $\mathbb{C}$. С матрицей $\mathbf{J}$ ассоциируют минимальный якобиев оператор в $l^2(\mathbb{N};\mathbb{C}^m)$. Оператор $\mathbf{J}$ симметричен, но не обязательно самосопряжен.

Задача вычисления индексов дефекта якобиевых матриц является первой главной проблемой, естественным образом возникающей в спектральной теории таких матриц.

В данной работе получены новые условия самосопряженности и дискретности спектра блочных якобиевых матриц (с матричными элементами). Некоторые из них покрывают ряд предыдущих результатов в скалярном случае ($m = 1$).

Доклад базируется на работах [1–2].

Литература

1. *Будыка В. С., Маламуд М. М.* Самосопряженность и дискретность спектра блочных якобиевых матриц // Мат. заметки.—2020.—Т. 108, № 3.—С. 457–462.
2. *Budyka V. S., Malamud M. M.* Deficiency indices of Jacobi matrices and Dirac operators with point interactions on a discrete set.—2020.—ArXiv: 2012.1557.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках реализации государственного задания в соответствии с Соглашением № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

MUKAI–FOURIER TRANSFORMS AS SOLUTIONS TO FIELD EQUATIONS IN DERIVED CATEGORIES: SPECTRUM AS HIGGS-OSCILLATIONS IN THE SPACE-TIME V

F. Bulnes
(Mexico, Chalco; IINAMEI, TESCHA)

Let be $\mathbf{H}$ a Hopf algebra of $\mathbf{H}$-states. Let $\mathbb{M}$ a complex Riemannian manifold with spin structure to the corresponding $\mathbf{H}$-states. The deformations are consigned in a surface Σ,[1] in $\mathbb{M}$, through the extended Penrose transform (holomorphic version) whose kernel set has as elements, the fields $\mathbf{h}$, with $\operatorname{Isom} d\mathbf{h} = 0$.

We consider the established in the introduction relative to the decomposing in graded vector space $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[g]^G$. These are components of $H^*(SL(2))$, in a category $\mathrm{Vec}_{\mathbb{C}}$ [1]. Then we can to consider the complex group:

$$G(\mathbb{C}) = \operatorname{Hom}(\mathbf{H}, \mathbb{C}), \tag{1}$$

for the Hopf algebra $\mathbf{H}$, and all global functors on $T^{\vee}\mathrm{Bun}_G$, are lifted from the basis as:

$$H^0\big(T^{\vee}\mathrm{Bun}_G, \mathscr{O}\big) \cong \mathbb{C}[\mathbf{H}].^2 \tag{2}$$

Then solutions for $\Omega^1[\mathbf{H}]$, comes given by the co-cycles (deformation or spectrum) $\mathbf{H}^{\vee} = \operatorname{Spec}_H \mathrm{SymT}(\mathrm{OP}_{L_G}(D))$. Then the general solution to the field equation $\operatorname{Isom} d\mathbf{h} = 0$, comes given by the hypercohomology $H^q(\mathrm{Bun}_G, \mathscr{D}^S) = \mathbb{H}^q_{G[[z]]}(\boldsymbol{G}, (\wedge^{\bullet}[\Sigma^0] \otimes \mathbb{V}_{\text{critical}}; \partial)$, where $\boldsymbol{G} := G((z))/G[[\Sigma^0]]$, is a thick flag manifold [2].

Conjecture (F. Bulnes). *In the Hamilton densities space, taking a Hitchin base, the* $\mathbf{H}$*-states determine curvature by oscillations in the space-time to a microscopic deformation in* $\mathscr{H}$.

$\lhd$ Proof sketch [1, 3, 4]. $\rhd$

The general integral to the spectrum $\mathbf{H}^{\vee}$, is the extended Hitchin base [2, 3]

$$\mathscr{H} = H^0\big(\omega_C\big) \oplus H^0\big(\omega_C^{\otimes 2}\big) \oplus \ldots \oplus H^0\big(\omega_C^{\otimes n}\big), \tag{3}$$

In the case of a spinor representation the corresponding $\mathbf{H}$-states can be viewed as spinor waves which can be consigned in oscillations in the space-time to a microscopic deformation measured [3, 4] in $\mathscr{H}$.

Remark 1. The twisted category is the category of D-modules $\mathscr{M}$, on Bun_G, admitting finite global presentations as the particles oscillations (Higgs particles) [5], which we can define as sheaves of modules over the twisted version in the space-time

[1] The Riemann surfaces have a canonical sections 1 in spin vector bundle product of $K^{1/2} \otimes K^{-1/2}$.

[2] We have considered as integrals space the cohomology spaces $H^{\bullet}(\mathbf{H}, \Omega^{\bullet})$, inside the cuasi-coherent category given by $M_{\mathscr{K}_{\mathscr{J}}}(\mathbf{H}^{\vee}, Y)$, which carry us to the ramification problem.

(after to apply the Mukai–Fourier transform), that is to say, resulted of the transition from $K^{1/2}$, until $\mathscr{M}$, passing for $K^{-1/2}$, defined as the application:

$$\left(\mathscr{D} \otimes K^{1/2}\right)^{\oplus_p} \to \left(\mathscr{D} \otimes K^{-1/2}\right)^{\oplus_q} \to \mathscr{M}. \tag{4}$$

Here $K^{1/2}$ is the line bundle of the critical level (spin bundle) used to emphasize the fact that the $\hat{\mathfrak{g}}$-modules which are at critical level. Likewise, we can change to the category of projective D-modules with the same curvature of $K^{1/2}$, this projective D-modules category is called Spin D-modules category.

Corollary (F. Bulnes)**.** *The curvature given by the conjecture is a curvature energy.*

$\lhd$ [3, 5]. $\rhd$

References

1. *Bulnes F.* Motivic hypercohomology solutions in field theory and applications in **H**-states // J. Math. Research.—2021.—Vol. 13, №. 1.—P. 31–40.
2. *Bulnes F.* Extended $\bar{\partial}$-cohomology and integral transforms in derived geometry to QFT-equations solutions using Langlands correspondences // Theoretical Mathematics and Applications.—2017.—Vol. 7 (2).—P. 51–62.
3. *Bulnes F., Stropovsvky Y., Rabinovich, I.* Curvature energy and their spectrum in the spinor-twistor framework: torsion as indicium of gravitational waves // J. Modern Phys.—2017.—8.—P. 1723–1736. DOI: 10.4236/jmp.2017.810101.
4. *Bulnes F.* Detection and measurement of quantum gravity by a curvature energy sensor: **H**-states of curvature energy // Studies in Perturbation Theory / Ed. Dimo I. Uzunov.—IntechOpen, 2017.—URL: https://www.intechopen.com/chapters/54948. DOI: 10.5772/68026.
5. *Bulnes F.* Dual Representation of the Curvature in a Hilbert Space: Curvature and Integral Transforms // JP J. Geom. Topol.—2021.—Vol 26 (1).—P. 39–51. DOI: 10.17654/GTO26010039.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

О ФУНКЦИЯХ С НУЛЕВЫМИ ШАРОВЫМИ СРЕДНИМИ С ЗАДАННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ В ФИКСИРОВАННЫХ ТОЧКАХ

В. В. Волчков (Донецк; ДонНУ),
Вит. В. Волчков (Донецк; ДонНУ)

Пусть $V_r(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$, — множество функций $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ с нулевыми интегралами по всем шарам из $\mathbb{R}^n$ радиуса r. Этот класс функций, а также различные его аналоги активно изучались в течение последних пятидесяти лет в работах Ф. Йона, Д. Дельсарта, Д. Смита, Л. Зальцмана, К. А. Беренстейна и других авторов (см. [1–3]). В данной работе изучаются интерполяционные задачи для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ и некоторых его обобщений. В случае, когда множество узлов интерполяции является конечным, получена теорема о существовании решения интерполяционной задачи при общих предположениях. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $q \in \mathbb{N}$. Тогда для любого набора попарно различных точек $a_1, \ldots, a_q$ в $\mathbb{R}^n$ и любого набора констант $b_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, \ldots, q)$ существует вещественно аналитическая функция $G \in V_r(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условиям*

$$G(a_k) = b_k, \quad k = 1, \ldots, q. \tag{1}$$

Из доказательства теоремы 1 видно, что аналогичный результат имеет место не только для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$, а и для классов решений уравнений свертки $f * T = 0$, где T — радиальное распределение в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем и непустым множеством нулей его сферического преобразования. Данные уравнения свертки включают, например, классы решений эллиптических дифференциальных уравнений вида

$$P(\Delta) = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа, P — алгебраический многочлен, отличный от тождественной константы.

Из теоремы 1 получаем следующее следствие, которое, в частности, показывает, что решение интерполяционной задачи (1) для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ не единственно.

Следствие 1. *Пусть $q \in \mathbb{N}$. Тогда для любого набора попарно различных точек $a_1, \ldots, a_q$ в $\mathbb{R}^n$ существует ненулевая вещественно аналитическая функция $f \in V_r(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условиям*

$$f(a_k) = 0 \quad \textit{при всех} \quad k.$$

Отметим также, что в теореме 1 существенно, что в определении класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ рассматривается интегрирование по шарам, которое приводит к инвариантности рассматриваемого класса относительно группы вращений. Можно

показать, что аналог теоремы 1 для класса функций, определяемого наличием нулевых интегралов по всем сдвигам фиксированного параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$, является неверным. Действительно, всякая такая непрерывная функция удовлетворяет некоторому линейному разностному уравнению, связывающему значения функции в вершинах этого параллелепипеда (см. [1, часть 4, гл. 2]). Поэтому, если взять в качестве узлов интерполяции вершины данного параллелепипеда, то числа b_k в условии (1) не могут быть заданы произвольно.

Литература

1. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.—454 p.
2. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group.—London: Springer, 2009.—672 p.
3. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces.—Basel: Birkhäuser, 2013.—592 p.

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СРЕДНИХ ВАЛЛЕ ПУССЕНА ЧАСТИЧНЫХ СУММ СПЕЦИАЛЬНОГО РЯДА ПО ПОЛИНОМАМ ЛАГЕРРА

Р. М. Гаджимирзаев

(Россия, Махачкала; ДФИЦ РАН)

Пусть $\alpha > -1$, $r \in \mathbb{N}$, f — непрерывная функция, заданная на полуоси $[0, \infty)$ и такая, что в точке $x = 0$ существуют производные $f^{(\nu)}(0)$, $\nu = 0, \dots, r-1$. Тогда мы можем рассмотреть полином Тейлора

$$P_{r-1}(f) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\, x^i$$

и функцию

$$f_r(x) = \frac{f(x) - P_{r-1}(f)}{x^r}, \quad x > 0. \tag{1}$$

Предположим, что для функции f_r существуют коэффициенты Фурье — Лагерра

$$\hat{f}_k^{\alpha,r} = \frac{1}{h_k^\alpha} \int_0^\infty f_r(t) t^\alpha e^{-t} L_k^\alpha(t)\, dt,$$

где $h_k^\alpha = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!}$, $L_k^\alpha(t)$ — полином Лагерра степени k. Тогда мы можем сопоставить функции f_r ее ряд Фурье — Лагерра:

$$f_r(x) \sim \sum_{k=0}^\infty \hat{f}_k^{\alpha,r} L_k^\alpha(x). \tag{2}$$

Если ряд (2) сходится к f_r, то с учетом равенства (1) мы можем записать

$$f(x) = P_{r-1}(f) + x^r \sum_{k=0}^\infty \hat{f}_k^{\alpha,r} L_k^\alpha(x). \tag{3}$$

Следуя [1], мы будем называть ряд (3) *специальным рядом по полиномам Лагерра*. Через $S_{n+r}^\alpha(x)$ обозначим частичную сумму этого ряда:

$$S_{n+r}^\alpha(x) = S_{n+r}^\alpha(f, x) = P_{r-1}(f) + x^r \sum_{k=0}^n \hat{f}_k^{\alpha,r} L_k^\alpha(x).$$

Отметим, что если $f = q_{n+r}$ представляет собой алгебраический полином степени не более $n+r$, то $S_{n+r}^\alpha(q_{n+r}, x) \equiv q_{n+r}(x)$ при $\alpha > -1$. В работе [1], используя это свойство и неравенство Лебега

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left| f(x) - S_{n+r}^\alpha(x) \right| \leqslant E_{n+r}^r(f)(1 + \lambda_n^{\alpha,r}(x)),$$

были исследованы аппроксимативные свойства сумм S^{α}_{n+r}. Здесь величина $E^{r}_{n+r}(f)$ определяется равенством

$$E^{r}_{n+r}(f) = \inf_{p_{n+r}} \sup_{x>0} |p_{n+r}(x) - f(x)|\, e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}},$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам p_{n+r} степени $n+r$, для которых $f^{(\nu)}(0) = p^{(\nu)}_{n+r}(0)$, $\nu = 0, \dots, r-1$. Для функции Лебега $\lambda^{\alpha,r}_{n}(x)$ при $r - \frac{1}{2} < \alpha < r + \frac{1}{2}$ были получены оценки:

$$\lambda^{\alpha,r}_{n}(x) \leqslant c(\alpha, r) \begin{cases} \ln(n+1) + n^{\alpha-r}, & x \in \left[0, \frac{3}{\theta_n}\right]; \\ \ln(n+1) + \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}, & x \in \left[\frac{3}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}\right]; \\ \ln(n+1) + \left(\frac{x}{\theta_n^{1/3} + |x-\theta_n|}\right)^{1/4}, & x \in \left[\frac{\theta_n}{2}, \frac{3\theta_n}{2}\right]; \\ n^{-\frac{r}{2}+\frac{5}{4}} x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{x}{4}}, & x \in \left[\frac{3\theta_n}{2}, \infty\right), \end{cases}$$

где $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$.

В настоящей работе мы рассмотрим средние Валле Пуссена частичных сумм $S^{\alpha}_{k+r}(x)$, $n \leqslant k \leqslant n+m$:

$$\mathscr{V}_{n+m+r}(f, x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} S^{\alpha}_{k+r}(x)$$

и изучим их аппроксимативные свойства. С этой целью введем обозначение

$$\Lambda^{\alpha,r}_{n,m}(x) = x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \int_0^{\infty} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x+t}{2}} \frac{1}{m+1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} K^{\alpha}_{k}(x, t) \right| dt.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $r - \frac{1}{2} < \alpha \leqslant r$, $0 < a \leqslant b$, $an \leqslant m \leqslant bn$, $x \in [0, \infty)$. Тогда имеет место оценка*

$$\Lambda^{\alpha,r}_{n,m}(x) \leqslant c(a, b, \alpha, r).$$

Из этой теоремы и неравенства Лебега

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left| f(x) - \mathscr{V}_{n+m+r}(f, x) \right| \leqslant E^{r}_{n+r}(f) \left(1 + \Lambda^{\alpha,r}_{n,m}(x)\right)$$

вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть f — непрерывная функция, заданная на полуоси $[0, \infty)$ и такая, что в точке $x = 0$ существуют производные $f^{(\nu)}(0)$, $\nu = 0, \dots, r-1$, $r \in \mathbb{N}$, $r - \frac{1}{2} < \alpha \leqslant r$, $0 < a \leqslant b$, $an \leqslant m \leqslant bn$, $x \in [0, \infty)$. Тогда справедлива оценка*

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left| f(x) - \mathscr{V}_{n+m+r}(f, x) \right| \leqslant c(a, b, \alpha, r) E^{r}_{n+r}(f).$$

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Специальные ряды по полиномам Лагерра и их аппроксимативные свойства // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 52, № 2.—С. 440–467.

ОЦЕНКА БАРГМАНА ДЛЯ НЕКОМПАКТНЫХ КОНЕЧНЫХ КВАНТОВЫХ ГРАФОВ С СУММИРУЕМЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Я. И. Грановский

(Донецк; ГУ «ИПММ»)

Рассмотрим граф $\mathscr{G}$, состоящий из $p_1 > 0$ бесконечных ребер и $p_2 \geqslant 0$ конечных ребер, $p_1 + p_2 := p$. Каждое ребро будем ассоциировать с конечным или бесконечным интервалом $(0, a_j), j \in \{1, \dots, p\}$.

На каждом бесконечном ребре l_j, $j \in \{1, \dots, p_1\}$, определим минимальный оператор $A_j f_j = -f_j'' + Q_j f_j$, $Q_j = Q_j^* \in L^1(l_j; \mathbb{C}^{m\times m})$,

$$\operatorname{dom}(A_j) = \left\{ f_j \in L^2(l_j;\mathbb{C}^m) : \begin{array}{l} f_j, f_j' \in AC_{\mathrm{loc}}(l_j;\mathbb{C}^m), \\ A_j f_j \in L^2(l_j;\mathbb{C}^m), \\ f_j(0) = f_j'(0) = 0 \end{array} \right\}.$$

На каждом конечном ребре e_j, $j \in \{p_1 + 1, \dots, p\}$, определим минимальный оператор $A_j f_j = -f_j'' + Q_j f_j$, $Q_j = Q_j^* \in L^1(e_j; \mathbb{C}^{m\times m})$,

$$\operatorname{dom}(A_j) := \left\{ f_j \in L^2(e_j;\mathbb{C}^m) : \begin{array}{l} f_j, f_j' \in AC_{\mathrm{loc}}(e_j;\mathbb{C}^m), \\ A_j f_j \in L^2(e_j;\mathbb{C}^m), \\ f_j(0) = f_j(a_j) = f_j'(0) = f_j'(a_j) = 0 \end{array} \right\}.$$

Это позволяет ввести минимальный оператор $A_{\min}$ на графе $\mathscr{G}$:

$$A_{\min} := \bigoplus_{j=1}^{p} A_j, \quad \operatorname{dom}(A_{\min}) := \bigoplus_{j=1}^{p} \operatorname{dom}(A_j).$$

Рассмотрим расширение $\mathbf{H}_\alpha := \mathbf{H}_{\alpha,Q}$ минимального оператора $A_{\min}$, задаваемое граничными условиями типа дельта-взаимодействий во всех вершинах $v \in \mathscr{V}$:

$$\begin{cases} f \text{ непрерывна в } v, \\ \sum\limits_{e\in\mathscr{E}_v} f_e'(v) = \alpha(v) f(v), \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha : \mathscr{V} \to \mathbb{C}^{m\times m}$, $\alpha(\,\cdot\,) = \alpha(\,\cdot\,)^*$ — матричная функция. При $\alpha = 0$ условие (1) — хорошо известное условие Кирхгофа.

При дополнительном условии $x_e Q_e \in L^1(e; \mathbb{C}^{m\times m})$, $e \in \mathscr{E}$, получено следующее обобщение оценки Баргмана для числа отрицательных квадратов оператора $\mathbf{H}_\alpha = \mathbf{H}_\alpha^*$:

$$\kappa_-(\mathbf{H}_\alpha) \leqslant \sum_{e\in\mathscr{E}} \left[\int_e x_e \operatorname{tr}(Q_{e,-}(x))\, dx \right] + m\,|\mathscr{V}|,$$

где $Q_{e,-} := -Q_e E_{Q_e}(-\infty, 0) \geqslant 0$, а $[b]$ обозначает целую часть числа $b \in \mathbb{R}$.

Доклад базируется на работах [1–2].

Литература

1. *Грановский Я. И., Маламуд М. М., Найдхардт Х.* Квантовые графы с суммируемыми матричными потенциалами // Докл. АН.—2019.—Т. 488, № 1.—С. 5–10.
2. *Granovskyi Ya., Malamud M., Neidhardt H.* Non-compact quantum graphs with summable matrix potentials // J. Ann. Henri Poincaré. —2021.—Vol. 22.—P. 1–47.

ON THE DOMINATION PROBLEM FOR LEBESGUE, KB, AND LEVI OPERATORS

E. Y. Emelyanov

(Turkey, Ankara, METU; Russia, Novosibirsk, IM SB RAS)

The talk presents some results of joint work [1] with Safak Alpay (Middle East Technical University, Ankara, Turkey) and Svetlana Gorokhova (Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz, Russia). Below all vector lattices are supposed to be real and Archimedean, operators linear, and topologies Hausdorff. The following definition is an adopted version of Definition 1.1 of [1].

Definition 1. Let T be an operator from a vector lattice X to a vector lattice Y.

(a) Assuming $Y=(Y,\tau)$ be a topological vector lattice, T is called *Lebesgue* (*σ-Lebesgue*) if $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ for every net (sequence) x_α such that $x_\alpha \downarrow 0$; T is *quasi Lebesgue* (*quasi σ-Lebesgue*) if Tx_α is τ-Cauchy for every net (sequence) x_α in X_+ satisfying $x_\alpha \uparrow\leqslant x\in X$. T is called *$o\tau$-bounded* (*$o\tau$-compact*) if $T[0,x]$ is a τ-bounded (τ-totally bounded) subset of Y for each $x\in X_+$.

(b) Assuming $X=(X,\varsigma)$ be a locally solid lattice, T is called *Levi* (*σ-Levi*) if, for every ς-bounded increasing net (sequence) x_α in X_+, there exists (not necessarily unique) $x\in X$ such that $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$. T is called *quasi Levi* (*quasi σ-Levi*) if T takes ς-bounded increasing nets/sequences in X_+ to o-Cauchy ones.

(c) Assuming $X=(X,\varsigma)$ and $Y=(Y,\tau)$ be both locally solid lattices, T is called KB (σ-KB) if, for every ς-bounded increasing net (sequence) x_α in X_+, there exists (not necessarily unique) $x\in X$ such that $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} Tx$. T is called *quasi KB* (*quasi σ-KB*) if T takes ς-bounded increasing nets/sequences in X_+ to τ-Cauchy ones.

It was shown in Proposition 1.2 of [1] that an operator T is quasi KB iff T is quasi σ-KB. The following is Theorem 2.1 of [1].

Theorem 1. *Let X be a vector lattice and (Y,τ) be a locally convex Lebesgue lattice which is either Dedekind complete or τ-complete. Then the space $L_{ro\tau c}(X,Y)$ of regular $o\tau$-compact operators is a band of the lattice $L_r(X,Y)$ of all regular operators from X to Y.*

It was shown in Propositions 2.1 and 2.2 of [1] that: each regular operator T from a vector lattice X to a locally solid lattice (Y,τ) is $o\tau$-bounded; and a weakly continuous regular operator T from a Lebesgue (σ-Lebesgue) lattice (X,ς) to a locally solid lattice (Y,τ) is Lebesgue (σ-Lebesgue). The following is Theorem 2.2 of [1].

Theorem 2. *Each regular Lebesgue operator from a vector lattice X to a locally solid lattice (Y,τ) is quasi Lebesgue.*

It was observed in Propositions 2.7, 2.5 and in Remarks 2.2, 2.3 of [1] that: (1) any continuous operator T from a locally solid lattice (X,ς) to a topological vector space (Y,τ) is $o\tau$-bounded; (2) any regular operator from a laterally σ-complete vector lattice X to a σ-Lebesgue lattice (Y,τ) is σ–Lebesgue; (3) any positive

operator from a locally solid lattice (X,ς) to a laterally σ-complete locally solid lattice (Y,τ) is quasi Lebesgue; (4) any continuous positive operator from a laterally σ-complete locally solid lattice (X,ς) to a locally solid lattice (Y,τ) is quasi Lebesgue; and (5) any continuous operator from a laterally σ-complete Fatou lattice (X,ς) to a locally solid lattice (Y,τ) is Lebesgue. It was proved in Lemma 2.1 of [1] that a regular operator T from a vector lattice X to a locally solid lattice (Y,τ) is Lebesgue (σ-Lebesgue) iff T is $o\tau$-continuous ($\sigma o\tau$-continuous).

Next we discuss the domination properties of positive operators. Let T and S be positive operators between vector lattices X and Y satisfying $0 \leqslant S \leqslant T$. When does the assumption that T is Lebesgue, $o\tau$-continuous, $o\tau$-bounded, $o\tau$-compact, KB, or Levi imply that S has the same property?

It has trivially positive answer for Lebesgue; σ-Lebesgue; and $o\tau$-bounded operators from a vector lattice to a locally solid lattice. Also, for $o\tau$-compact operators from a vector lattice X to a locally convex Lebesgue lattice (Y,τ) which is either Dedekind complete or τ-complete due to Theorem 5.10 of [2]. For KB (σ-KB) lattice homomorphisms between locally solid lattices by the following proposition which is Corollary 2.3 of [1].

Proposition 1. *Let T be a KB (σ-KB) lattice homomorphism between locally solid lattices (X,ς) and (Y,τ). Then each S satisfying $0 \leqslant S \leqslant T$ is also a KB (σ-KB) lattice homomorphism.*

For quasi KB operators between locally solid lattices by the theorem below which is Theorem 2.6 of [1].

Theorem 3. *Let T be a positive quasi KB operator between locally solid lattices (X,ς) and (Y,τ). Then each operator $S : X \to Y$ with $0 \leqslant S \leqslant T$ is also quasi KB.*

For quasi Levi operators from a locally solid lattice to a vector lattice by the theorem below which is Theorem 2.7 of [1].

Theorem 4. *Let T be a positive quasi Levi operator from a locally solid lattice (X,ς) to a vector lattice Y. Then each operator $S : X \to Y$ with $0 \leqslant S \leqslant T$ is also quasi Levi.*

It is well known that the modulus $|T|$ of an order bounded disjointness preserving operator T between vector lattices X and Y exists and satisfies $|T||x| = |T|x|| = |Tx|$ for all $x \in X$, and there exist lattice homomorphisms $R_1, R_2 : X \to Y$ with $T = R_1 - R_2$. It was proved in Theorem 2.5 of [1] that for any order bounded disjointness preserving KB (σ-KB) operator T between locally solid lattices (X,ς) and (Y,τ) every operator S satisfying $|S| \leqslant |T|$ is also KB (σ-KB). Since $0 \leqslant S \leqslant T$ with a lattice homomorphism T implies that S is also a lattice homomorphism it follows that for each KB (σ-KB) lattice homomorphism T between locally solid lattices (X,ς) and (Y,τ) every operator S satisfying $0 \leqslant S \leqslant T$ is also a KB (σ-KB) lattice homomorphism.

References

1. *Alpay S., Emelyanov E. Y., Gorokhova S. G.* The $o\tau$-continuous, Lebesgue, KB, and Levi Operators between Vector Lattices and Topological Vector Spaces.—URL: https://arxiv.org/abs/2105.01810v1.
2. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—Dordrecht: Springer, 2006.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ОБ ОПЕРАТОРАХ ОБРАТНОГО СДВИГА В ПОЛИЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

П. А. Иванов

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть Ω — полицилиндрическая область в $\mathbb{C}^N$: $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — области в $\mathbb{C}$. Символ $A(\Omega)$ обозначает пространство всех функций, аналитических в Ω, с топологией равномерной сходимости на компактах Ω. В докладе идет речь о многомерной версии оператора обратного сдвига в $A(\Omega)$. Пусть для $N \in \mathbb{N}$ символ P_N обозначает множество $\{1, 2, \cdots, N\}$. Для $t = (t_j)_{j=1}^N$, $z = (z_j)_{j=1}^N \in \mathbb{C}^N$, $j \in P_N$, через $t_{j,z}$ обозначим точку в $\mathbb{C}^N$, полученную из t заменой j-й координаты на z_j, т. е. $(t_{j,z})_k := z_j$, если $k = j$ и $(t_{j,z})_k = t_j$, если $k \neq j$. Частные операторы обратного сдвига определим так. Пусть функция f голоморфна в области Ω. Для $j \in P_N$, $z, t \in \Omega$ положим $D_{j,z}(f)(t) := \frac{f(t)-f(t_{j,z})}{t_j - z_j}$, если $t_j \neq z_j$.

Для локально выпуклого пространства H через $\mathscr{L}(H)$ обозначим пространство всех линейных непрерывных операторов в H. Ясно, что $D_{j,z} \in \mathscr{L}(A(\Omega))$, $j \in P_N$, $z \in \Omega$.

Операторы $D_{j,z}$, $j \in P_N$, попарно перестановочны и естественно для $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $z \in \Omega$ ввести операторы D_z^α, действующие в $A(\Omega)$, следующим образом: $D_z^\alpha := D_{1,z}^{\alpha_1} D_{2,z}^{\alpha_2} \cdots D_{N,z}^{\alpha_N}$. Следуя З. Биндерману [1], с операторами D_0^α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ ($\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$), как и в случае $N = 1$, можно связать их сдвиги T_z, $z \in \mathbb{C}^N$. Они определяются таким образом, чтобы для многочленов f выполнялось равенство $T_z(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} z^\alpha D_0^\alpha(f)$, если Ω содержит 0.

Для $z \in \Omega$, $j \in P_N$, $f \in A(\Omega)$ положим $T_{j,z}(f)(t) := \frac{t_j f(t) - z_j f(t_{j,z})}{t_j - z_j}$, если $t_j \neq z_j$, и $T_z = T_{1,z} T_{2,z} \cdots T_{N,z}$. Все операторы $T_{j,z}$ линейны и непрерывны в $A(\Omega)$. Приведем описание коммутанта $\mathscr{K}_\Omega(\mathscr{D}_0)$ системы $\{D_{j,0} : j \in P_N\}$ в алгебре $\mathscr{L}(A(\Omega))$, т. е множества всех операторов $B \in \mathscr{L}(A(\Omega))$ таких, что $BD_{j,0} = D_{j,0}B$ в $A(\Omega)$ для любого $j \in P_N$. Ясно, что $\mathscr{K}_\Omega(\mathscr{D}_0)$ совпадает с множеством всех $B \in \mathscr{L}(A(\Omega))$, перестановочных с каждым оператором D_0^α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Пусть $\mathscr{K}_\Omega(\mathscr{T})$ — множество всех операторов $B \in \mathscr{L}(A(\Omega))$ таких, что $BT_z = T_z B$ на $A(\Omega)$ для любого $z \in \Omega$.

Далее $A(\Omega)'$ обозначает топологическое сопряженное к $A(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие 0. Следующие условия равносильны:*

(i) $B \in \mathscr{K}_\Omega(\mathscr{D}_0)$.

(ii) $B \in \mathscr{K}_\Omega(\mathscr{T})$.

(iii) *Существует функционал $\varphi \in A(\Omega)'$ такой, что $B(f)(z) = \varphi(T_z(f))$, $z \in \Omega$, $f \in A(\Omega)$.*

Пусть $\mathbb{C}[z]$ — множество всех многочленов переменных $z_j \in \mathbb{C}$, $j \in P_N$. Для $P(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}[z]$ положим $P(D_0) := \sum_\alpha c_\alpha D_0^\alpha$. Пусть $\mathbb{C}[\mathscr{D}_0] :=$

$\{P(D_0) : P \in \mathbb{C}[z]\}$. Ясно, что $\mathbb{C}[\mathscr{D}_0] \subset \mathscr{K}_\Omega(\mathscr{D}_0)$. Ниже используется топология поточечной сходимости в $\mathscr{K}_\Omega(\mathscr{D}_0)$. Она задается множеством преднорм $p_{K,\Delta}(B) := \max_{f\in\Delta} \max_{z\in K} |B(f)(z)|$, где K пробегает семейство всех компактных подмножеств Ω, а Δ — семейство всех конечных подмножеств $A(\Omega)$.

Следствие 1. *Множество $\mathbb{C}[\mathscr{D}_0]$ плотно в $\mathscr{K}_\Omega(\mathscr{D}_0)$, наделенном топологией поточечной сходимости.*

Следствие 2. *Для любого ненулевого функционала $\varphi \in A(\Omega)'$ оператор $B_\varphi : A(\Omega) \to A(\Omega)$, $h \mapsto \varphi(T_z(h))$, $z \in \Omega$, сюръективен. При $N = 1$ он имеет линейный непрерывный правый обратный.*

Символом $\mathrm{Cycl}_\Omega(\mathscr{D}_0)$ обозначим множество всех циклических векторов системы $\mathscr{D}_0 = \{D_{j,z} : j \in P_N\}$, т. е. функций $f \in A(\Omega)$ таких, что система $\{D_0^\alpha(f) : \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полна в $A(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие 0. Следующие условия равносильны:*

(i) $f \in \mathrm{Cycl}_\Omega(\mathscr{D}_0)$.

(ii) *$f \in A(\Omega)$ и f отлична от рациональной функции.*

При доказательстве этого результата используются многомерные формулы Сохоцкого.

Следствие 3. *Для целой в $\mathbb{C}^N$ функции f следующие утверждения равносильны:*

(i) $f \in \mathrm{Cycl}_{\mathbb{C}^N}(\mathscr{D}_0)$.

(ii) *f отлична от многочлена.*

Отметим, что теоремы 1 и 2 ранее были доказаны для $N = 1$. Для $N \geqslant 1$ они опубликованы в [2] (см. здесь обзор результатов в этом направлении).

Литература

1. *Binderman Z.* Functional shifts induced by right invertible operators // Math. Nachr.—1992.—Vol. 157.—P. 211–224.
2. *Ivanov P. A., Melikhov S. N.* Pommiez operator in spaces of analytic functions of several complex variables // J. Math. Sci.—2021.—Vol. 252, № 3.—P. 345–359.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАТОРА ОБОБЩЕННОГО ОБРАТНОГО СДВИГА

О. А. Иванова

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть $H(\mathbb{C})$ — пространство всех целых в $\mathbb{C}$ функций с топологией компактной сходимости. Функция $g_0 \in H(\mathbb{C})$ такая, что $g_0(0) = 1$, задает оператор обобщенного обратного сдвига (одномерное возмущение оператора обратного сдвига) $D_{0,g_0}(f)(t) := \frac{f(t)-g_0(t)f(0)}{t}$, линейный и непрерывный в $H(\mathbb{C})$. В докладе идет речь о собственных замкнутых инвариантных подпространствах D_{0,g_0} в $H(\mathbb{C})$. Если множество $Z(g_0)$ нулей g_0 непусто, то n_λ обозначает кратность нуля $\lambda \in Z(g_0)$. Кратным многообразием в $\mathbb{C}$ называется конечная или бесконечная последовательность W пар (μ, m_μ), где $Z(W) := \{\mu\}$ — дискретное подмножество $\mathbb{C}$ и $m_\mu \in \mathbb{N}$. Для непустого кратного многообразия $W = \{(\mu, m_\mu)\}$ в $\mathbb{C}$ введем множество

$$S(W) := \big\{ f \in H(\mathbb{C}) \,\big|\, f^{(j)}(\mu) = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant m_\mu - 1 \ \text{для любого} \ \mu \big\}.$$

Для кратных многообразий $W = \{(\mu, m_\mu)\}$ и $V = \{(\lambda, n_\lambda)\}$ в $\mathbb{C}$ будем писать $W \prec V$, если $Z(W) \subset Z(V)$ и $m_\mu \leqslant n_\mu$ для любого $\mu \in Z(W)$. Ниже символ $\mathscr{D}(g_0)$ обозначает множество всех многочленов p таких, что $p(0) = 1$ и функция g_0/p голоморфна в $\mathbb{C}$. Пусть $\mathbb{C}[z]$ — кольцо всех многочленов над полем $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}[z]_n$ — множество всех многочленов степени не выше n ($n \geqslant 0$) над полем $\mathbb{C}$.

Теорема. (I) *Предположим, что g_0 не имеет нулей в $\mathbb{C}$.*
(i) *Для любого целого $n \geqslant 0$ множество $g_0\mathbb{C}[z]_n$ является собственным замкнутым D_{0,g_0}-инвариантным подпространством $H(\mathbb{C})$.*
(ii) *Для любого собственного замкнутого D_{0,g_0}-инвариантного подпространства S пространства $H(\mathbb{C})$ существует целое $n \geqslant 0$ такое, что $S = g_0\mathbb{C}[z]_{n(S)}$.*

(II) *Предположим, что g_0 имеет нули в $\mathbb{C}$.*
(iii) *Для любого непустого кратного многообразия $W \prec W(g_0)$ в $\mathbb{C}$ множество $S(W)$ является собственным замкнутым D_{0,g_0}-инвариантным подпространством $H(\mathbb{C})$.*
(iv) *Для любых многочлена $p \in \mathscr{D}(g_0)$, целого $n \geqslant 0$ такого, что $n \geqslant \deg(p) - 1$, множество $\frac{g_0}{p}\,\mathbb{C}[z]_n$ является собственным замкнутым D_{0,g_0}-инвариантным подпространством $H(\mathbb{C})$.*
(v) *Для любого собственного замкнутого D_{0,g_0}-инвариантного подпространства S пространства $H(\mathbb{C})$ либо существует непустое кратное многообразие $W \prec W(g_0)$, для которого $S = S(W)$, либо найдутся многочлен $p \in \mathscr{D}(g_0)$, целое $n \geqslant 0$ такое, что $n \geqslant \deg(p) - 1$, для которых $S = \frac{g_0}{p}\,\mathbb{C}[z]_n$.*

Следствие. *Оператор D_{0,g_0} является в $H(\mathbb{C})$ одноклеточным тогда и только тогда, когда функция g_0 не имеет нулей в $\mathbb{C}$.*

С помощью приведенной теоремы описываются собственные замкнутые идеалы в алгебре всех целых функций экспоненциального типа, умножением в которой является обобщенное произведение Дюамеля.

Приведенные результаты содержатся в [1, 2].

Литература

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н., Мелихов Ю. Н.* Инвариантные подпространства оператора обобщенного обратного сдвига и рациональные функции // Алгебра и анализ.—2021.—(Принято к печати).
2. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Алгебры аналитических функционалов и обобщенное произведение Дюамеля // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, № 3.—С. 72–84.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

О КРИТЕРИЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ КЛАССИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА, БЛОХА И ФОКА

Ю. В. Кораблина

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Рассматривается задача о непрерывности классических операторов, действующих в весовых квазибанаховых пространствах голоморфных функций. Отправные результаты для настоящего исследования содержатся в работе Н. Зорбоска [1], где для случая банаховых пространств был установлен абстрактный критерий и получена формула вычисления нормы произвольного линейного оператора, а также разработаны приложения к конкретным пространствам и операторам.

Основной целью работы, которой посвящен доклад, является формулировка критериев непрерывности произвольного линейного оператора в терминах дельта — функций и их конкретных реализаций в пространствах Бергмана, Блоха и Фока.

Пусть G — область комплексной плоскости $\mathbb{C}$; $H(G)$ — пространство всех функций, голоморфных в G, с топологией равномерной сходимости на компактах из G; v — вес на G, т. е. непрерывная положительная на G функция. Порожденное этим весом банахово пространство задается следующим образом:

$$H_v(G) = \left\{ f \in H(G),\ \|f\|_v = \sup_{z\in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\}.$$

Всюду далее X — квазибанахово пространство с квазинормой $\|\cdot\|$, непрерывно вложенное в $H(G)$. X^* — сопряженное с X пространство линейных непрерывных функционалов на X с сопряженной нормой $\|\cdot\|^*$, а δ_z — дельта-функция Дирака для фиксированной точки $z \in G$, т. е. $\delta_z : f \mapsto f(z)$, $f \in H(G)$.

В работе сформулирована теорема, которая является обобщением абстрактного критерия [1, теорема 2.1].

Теорема 1. *Пусть v — произвольный вес на G. Линейный оператор $T : X \mapsto H_v(G)$ корректно определен и ограничен тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

а) $\delta_z(T) \in X^*$, $\forall\, z \in G$;

б) $\sup\limits_{z\in G} \frac{\|\delta_z(T)\|^*}{v(z)} < \infty$.

На основании этого результата получен критерий непрерывности оператора Вольтерра на пространстве Бергмана.

Следствие 1. *Пусть v — радиальная весовая функция, удовлетворяющая условию*

$$0 < \liminf_{r\to 1^-} \frac{(1-r)\,v'(r)}{v(r)} \leqslant \limsup_{r\to 1^-} \frac{(1-r)\,v'(r)}{v(r)} < \infty, \tag{1}$$

g — фиксированная функция из $H(\mathbb{D})$. Оператор Вольтерра $T_g : A^p_\alpha \to H_v(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{1-\frac{\alpha+2}{p}}\,|g'(z)|}{v(z)} < \infty.$$

Далее установлен критерий непрерывности оператора Вольтерра на пространстве Блоха.

Следствие 2. *Пусть $v(r) = \left(\frac{1}{1-r}\right)^\beta \ln^p\left(\frac{1}{1-r}\right)$, $X \subset H(\mathbb{D})$ — банахово пространство, вложенное в $H(\mathbb{D})$, g — фиксированная функция из $H(\mathbb{D})$. Оператор Вольтерра $V_g : X \to B_v(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^\beta\,|g'(z)|\,\|\delta_z\|^*}{\ln^p \frac{1}{1-|z|}} < \infty.$$

Наконец, показано, что результаты, полученные в данном направлении, применимы к ранее не исследовавшимся пространствам Фока F^p_ψ, где $\psi(z) = \frac{ap}{q}\,|z|^q$ — радиальный вес. При этом $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — возрастающая функция класса C^2 на $[0,\infty)$ с положительным лапласианом $\Delta\psi$ в $\mathbb{C}$, для которой существует функция τ такая, что

а) $\lim\limits_{r\to\infty} \tau(r) = \lim\limits_{r\to\infty} \tau'(r) = 0$;

б) либо при некотором $C > 0$ функция $\tau(r)\,r^C$ возрастает, либо $\lim\limits_{r\to\infty} \tau'(r)\ln\frac{1}{\tau(r)} = 0$,

и выполняется условие $(\Delta\psi(z))^{-1/2} \simeq \tau(|z|)$, $|z| \geqslant 1$.

Следствие 3. *Оператор Вольтерра $T_g : X \to F^\psi_\infty$ ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g(z)|\,\|\delta_z\|^*}{(1+\psi'(|z|))\,e^{\psi(z)}} < \infty.$$

Литература

1. *Zorboska N.* Intrinsic operators from holomorphic function spaces to growth spaces // Integr. Equ. Oper. Theory.—2017.—Vol. 87, № 4.—P. 581–600.
2. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Differentiation and integration operators on weighted spaces of holomorphic functions // Math. Nachr.—2017.—Vol. 290, № 8–9.—P. 1144–1162.

UNIFORM CONVERGENCE OF FOURIER SERIES IN A SOBOLEV ORTHOGONAL SYSTEM OF POLYNOMIALS ASSOCIATED WITH JACOBI POLYNOMIALS

M. G. Magomed-Kasumov

(Russia, Vladikavkaz; SMI VSC RAS)

Let $W^r_{L^p_\rho} = W^r_{L^p_\rho}[-1,1]$ be a Sobolev space, consisting of $r-1$-times continuously differentiable on $[-1,1]$ functions f such that $f^{(r-1)}$ is absolutely continuous and $f^{(r)} \in L^p_\rho[-1,1]$, where $L^p_\rho = L^p_\rho[-1,1]$ — weighted Lebesgue space and $\rho(x) = \rho(\alpha,\beta;x)$ is Jacobi weight. For $p=2$ in the space $W^r_{L^p_\rho}$ one can introduce the Sobolev-type inner product:

$$\langle f,g\rangle = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1)g^{(k)}(-1) + \int\limits_{-1}^{1} f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x)\,dx. \tag{1}$$

Consider the system of functions $\mathscr{P}^{\alpha,\beta}_r = \left\{P^{\alpha,\beta}_{r,k}\right\}$:

$$P^{\alpha,\beta}_{r,k}(x) = \frac{(x+1)^k}{k!}, \quad k = 0,1,\ldots,r-1,$$

$$P^{\alpha,\beta}_{r,k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}\widehat{P}^{\alpha,\beta}_{k-r}(t)\,dt, \quad k = r,r+1,\ldots, \tag{2}$$

where $\left\{\widehat{P}^{\alpha,\beta}_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ — orthonormal system of Jacobi polynomials. It can be shown that the system (2) is orthonormal with respect to (1) [1]. System $\mathscr{P}^{\alpha,\beta}_r$ is called a system of polynomials, orthogonal in Sobolev sense and associated with Jacobi polynomials $P^{\alpha,\beta}_n$.

Theorem 1. *Let $\alpha,\beta > -1$, $A,B \in \mathbb{R}$, $p > 1$. For any $f \in W^r_{L^p_{\rho(A,B)}}[-1,1]$, $r \geqslant 1$, Fourier series in system $\mathscr{P}^{\alpha,\beta}_r$ converges to $f(x)$ in the norm of $W^r_{L^p_{\rho(A,B)}}[-1,1]$ if and only if*

$$\left|\frac{A+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2}\right| < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2}\right\}, \quad \left|\frac{B+1}{p} - \frac{\beta+1}{2}\right| < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2}\right\}.$$

Theorem 2. *If $f \in W^r_{L^1_{\rho(\alpha,\beta)}}$, $r \geqslant 1$, $-1 < \alpha,\beta \leqslant 0$, then Fourier series of f in system $\mathscr{P}^{\alpha,\beta}_r$ converges uniformly on $[-1,1]$ to f.*

References

1. *Sharapudinov I. I.* Sobolev-orthogonal systems of functions associated with an orthogonal system // Izv. Math.—2018.—Vol. 82, № 1. —P. 212–244.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ОПЕРАТОРА ОБОБЩЕННОГО ОБРАТНОГО СДВИГА И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

С. Н. Мелихов

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая точку 0; $H(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах Ω. Функция $g_0 \in H(\Omega)$ такая, что $g_0(0) = 1$, задает оператор обобщенного обратного сдвига $D_{0,g_0}(f)(t) := \frac{f(t)-g_0(t)f(0)}{t}$, линейный и непрерывный в $H(\Omega)$.

В докладе идет речь о собственных замкнутых D_{0,g_0}-инвариантных подпространствах $H(\Omega)$ в случае $\Omega \neq \mathbb{C}$. Пусть $\mathbb{C}[z]_n$, $n \geqslant 0$, — пространство всех многочленов над полем $\mathbb{C}$ степени не выше n; $\mathbb{C}[z]_{-\infty} := \{0\}$. Кратным многообразием в Ω называется конечная или бесконечная последовательность W пар (λ_k, m_k), где $\{\lambda_k\}$ — дискретное подмножество Ω и $m_k \in \mathbb{N}$ для любого k. Для непустого кратного многообразия $W = \{(\lambda_k, m_k)\}$ в Ω введем множество

$$S(W) := \big\{ f \in H(\Omega) \,\big|\, f^{(j)}(\lambda_k) = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant m_k - 1 \ \text{ для любого } \ k \big\};$$

$S(W)$ — собственное замкнутое подпространство $H(\Omega)$.

Введем дроби $q_{\lambda,k}(t) := \frac{1}{(t-\lambda)^k}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Если $\Omega \neq \mathbb{C}$ и Υ — конечное кратное многообразие в $\mathbb{C}\backslash\Omega$, т. е. $\Upsilon = \{(\lambda, n_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$, где $n_\lambda \in \mathbb{N}$, Λ — конечное подмножество $\mathbb{C}\backslash\Omega$, то положим

$$\mathbb{C}^-_\Upsilon(z) := \operatorname{span}\big\{ q_{\lambda,k} \,\big|\, \lambda \in \Lambda,\ 1 \leqslant k \leqslant n_\lambda \big\}.$$

При этом $\operatorname{span} U$ обозначает линейную оболочку подмножества U линейного пространства. Если Υ пусто, то полагаем $\mathbb{C}^-_\Upsilon(z) := \{0\}$.

Ниже символ $\mathscr{D}(g_0)$ обозначает множество всех многочленов p таких, что $p(0) = 1$, функция g_0/p голоморфна в Ω и p не имеет корней в $\mathbb{C}\backslash\Omega$. Если $g_0 \equiv 1$, то $\mathscr{D}(g_0) = \{g_0\}$.

Пусть $W(g_0)$ — нулевое многообразие g_0, т. е. множество всех пар $(\mu, n(\mu))$, $\mu \in Z(g_0)$, где $Z(g_0)$ — множество всех нулей g_0 в Ω, а $n(\mu)$ — кратность нуля $\mu \in Z(g_0)$. Для непустого кратного многообразия $W = \{(\lambda_k, m_k)\}$ в Ω будем писать $W \prec W(g_0)$, если $\{\lambda_k\} \subset Z(g_0)$ и $m_k \leqslant n(\lambda_k)$ для любого k.

Теорема 1 [1]. *Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая точку 0, $\Omega \neq \mathbb{C}$ и функция g_0 не имеет нулей в Ω.*

(i) *Для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty, 0\}$, конечного или пустого множества $\Lambda \subset \mathbb{C}\backslash\Omega$, кратного многообразия $\Upsilon = \{(\lambda, n_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ в $\mathbb{C}\backslash\Omega$ множество $g_0(\mathbb{C}[z]_n + \mathbb{C}^-_\Upsilon(z))$ является замкнутым D_{0,g_0}-инвариантным подпространством $H(\Omega)$. При этом оно является собственным тогда и только тогда, когда $n \neq -\infty$ или Λ непусто.*

(ii) *Для любого собственного замкнутого* D_{0,g_0}*-инвариантного подпространства* S *пространства* $H(\Omega)$ *существуют* $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty, 0\}$, *конечное или пустое кратное многообразие* Υ *в* $\mathbb{C}\backslash\Omega$ *такие, что* $n \neq -\infty$ *или* Υ *непусто и выполняется равенство*

$$S = g_0 \left(\mathbb{C}[z]_n + \mathbb{C}^-_\Upsilon(z)\right).$$

Теорема 2 [1]. *Пусть* Ω — *односвязная область в* $\mathbb{C}$, *содержащая точку* 0, $\Omega \neq \mathbb{C}$ *и функция* g_0 *имеет нули в* Ω.

(i) *Для любого непустого кратного многообразия* $W \prec W(g_0)$ *в* Ω *множество* $S(W)$ *является собственным замкнутым* D_{0,g_0}*-инвариантным подпространством* $H(\Omega)$.

(ii) *Для любого многочлена* $p \in \mathscr{D}(g_0)$, *любого* $n \in \mathbb{N}_0$ *такого, что* $n \geqslant \deg(p) - 1$, *или* $n = -\infty$, *конечного или пустого кратного многообразия* $\Upsilon = \{(\lambda, n_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ *в* $\mathbb{C}\backslash\Omega$ *множество* $\frac{g_0}{p}\,\mathbb{C}[z]_n + g_0\mathbb{C}^-_\Upsilon(z)$ *является замкнутым* D_{0,g_0}*-инвариантным подпространством* $H(\Omega)$. *При этом оно собственное тогда и только тогда, когда* $n \neq -\infty$ *или* Υ *непусто.*

(iii) *Для любого собственного замкнутого* D_{0,g_0}*-инвариантного подпространства* S *пространства* $H(\Omega)$ *имеет место одна из следующих ситуаций:*

(a) *существует непустое кратное многообразие* W *в* Ω *такое, что* $W \prec W(g_0)$ *и* $S = S(W)$;

(b) *найдутся многочлен* $p \in \mathscr{D}(g_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$, *для которых* $n \geqslant \deg(p) - 1$ *и* $S = \frac{g_0}{p}\,\mathbb{C}[z]_n$;

(c) *найдется конечное многообразие* Υ *в* $\mathbb{C}\backslash\Omega$, *для которого* $S = g_0\mathbb{C}^-_{\Upsilon(S)}(z)$;

(d) *существуют многочлен* $p \in \mathscr{D}(g_0)$, *целое неотрицательное* n, *для которых* $n \geqslant \deg(p) - 1$, *и конечное многообразие* Υ *в* $\mathbb{C}\backslash\Omega$ *такие, что* $S = \frac{g_0}{p}\mathbb{C}[z]_n + g_0\mathbb{C}^-_\Upsilon(z)$.

Литература

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н., Мелихов Ю. Н.* Инвариантные подпространства оператора обобщенного обратного сдвига и рациональные функции // Алгебра и анализ.— 2021.—(Принято к печати).

О СВЯЗИ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА И КАНТОРОВИЧА В ПРИМЕРЕ $f(x) = |2x - 1|$

И. В. Окорочков (Россия, Москва; МПГУ),
И. В. Тихонов (Россия, Москва; МГУ),
В. Б. Шерстюков (Россия, Москва; НИЯУ МИФИ)

Для функции $f \in C[0,1]$ *полиномы Бернштейна* вводят формулой

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где C_n^k — обычные биномиальные коэффициенты. Основные сведения о полиномах Бернштейна см. в [1–3].

Наряду с полиномами Бернштейна представляют интерес также *полиномы Канторовича*

$$K_n(f,x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(u)\,du \cdot C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

определяемые по схожей схеме не только для непрерывных, но и для интегрируемых функций. Первичная информация о полиномах Канторовича представлена в тех же руководствах [1–3]. Отметим, впрочем, что полиномы Канторовича рассматриваются значительно реже, а некоторые комбинаторные и алгебраические факты, к ним относящиеся, почти никогда не обсуждаются.

Поясним ситуацию на примере порождающей функции $f(x) = |2x - 1|$. Указанный *простой симметричный модуль*, взятый на стандартном отрезке $[0,1]$, играет особую роль в теории аппроксимации. Как известно (см. [4, 5]), полиномы Бернштейна в данном случае обладают следующим свойством попарного склеивания:

$$B_{2m+1}(f,x) = B_{2m}(f,x), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Это позволяет изучать полиномы $B_n(f,x)$ только с четными номерами $n = 2m$ или с нечетными номерами $n = 2m+1$. Связь таких полиномов с соответствующими полиномами Канторовича выражается следующим образом.

Теорема 1. *Для функции $f(x) = |2x-1|$, взятой на отрезке $[0,1]$, полиномы Бернштейна и Канторовича связаны соотношениями*

$$K_{2m}(f,x) = \frac{2m}{2m+1} B_{2m+1}(f,x) + \frac{1}{2(2m+1)} C_{2m}^m (x(1-x))^m,$$

$$K_{2m+1}(f,x) = \frac{2m+1}{2m+2} B_{2m+1}(f,x).$$

Представленные формулы действуют при всех $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. При $m \in \mathbb{N}$ полиномы $B_{2m+1}(f,x)$ в них можно заменить на $B_{2m}(f,x)$.

При $m = 0$ из теоремы 1 имеем $K_0(f,x) = K_1(f,x) \equiv \frac{1}{2}$, что соответствует и исходному определению. Укажем еще правило:

$$K_{2m}(f,x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2m-1}{2m+1}\, B_{2m-1}(f,x) + B_{2m+1}(f,x)\right),$$

пригодное при всех $m \in \mathbb{N}$.

Перечисленные формулы в примере $f(x) = |2x-1|$ позволяют переносить на полиномы Канторовича многие результаты, известные ранее для полиномов Бернштейна. Так, например, учитывая легко вычисляемые значения (см. [4, 5]),

$$B_{2m+1}(f, 1/2) = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

заключаем, что

$$K_{2m}(f, 1/2) = \frac{4m+1}{4m+2}\, 2^{-2m}\, C_{2m}^{m}, \quad K_{2m+1}(f, 1/2) = 2^{-2m-2}\, C_{2m+2}^{m+1}$$

при всех возможных $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Важность таких ответов объясняется тем, что величины $K_n(f, 1/2)$ соответствуют максимальным уклонениям на $[0,1]$ полиномов Канторовича $K_n(f,x)$ от порождающей их функции $f(x) = |2x-1|$.

На основе предложенного подхода возможны существенные продвижения в исследованиях распределения нулей и сходимости полиномов Канторовича на комплексной плоскости. Не исключено, что метод (хотя бы частично) удастся распространить на рациональные модули вида $f(x) = |qx - p|$. Это открывает широкие перспективы по применению прежних наработок [6].

Литература

1. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна: Учеб. пособие к спецкурсу.—Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990.—64 с.
2. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials.—Toronto: University of Toronto Press, 1953.—x+130 p.
3. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation.—Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag, 1993.—x+450 p.
4. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челябинского гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика.—2012.—Т. 15, № 26.—С. 6–40.
5. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Мат. форум. Исслед. по мат. анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—Т. 8, № 1.—С. 126–175.—(Итоги науки. Юг России).
6. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Обобщенные разложения Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры ВИНИТИ.—2019.—Т. 170.—С. 71–117.

О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ, СВЯЗАННЫХ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

М. А. Петросова

(Россия, Москва; МПГУ)

Классические полиномы Бернштейна играют заметную роль в теории аппроксимации и подробно изучены на стандартном отрезке $[0,1]$ (см. [1–3]). В недавних работах [4–6] рассматривались различные вопросы, связанные с полиномами Бернштейна на симметричном отрезке $[-1,1]$. Этот случай значим с практической точки зрения.

Напомним, что для функции $f \in C[-1,1]$ полиномы Бернштейна определяют формулой

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k \, (1+x)^k \, (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где C_n^k — обычные биномиальные коэффициенты. Поскольку полином $B_n(f,x)$ имеет степень не выше n, то

$$B_n(f,x) = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m}(f) \, x^m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В рамках специального направления [7–9] возникла задача о возможной скорости роста величины

$$S_n(f) \equiv \sum_{m=0}^{n} |a_{n,m}(f)|, \quad n \in \mathbb{N},$$

т. е. суммы модулей коэффициентов полиномов Бернштейна при явной алгебраической записи на симметричном отрезке $[-1,1]$.

Согласно общему результату Рулье [8] справедлива оценка

$$S_n(f) \leqslant 2^n \, \|f\|, \quad \|f\| \equiv \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Как показано в работе [4], для функции $f(x) = |x|$ на $[-1,1]$ величина $S_n(f)$ при $n \to \infty$ растет с существенно меньшей скоростью $\frac{(\sqrt{2})^n}{n^{3/2}}$. Оказывается, оценка Рулье сильно завышена, причем не только в данном примере, но и для произвольной функции $f \in C[-1,1]$. Точнее, справедлив следующий результат (см. [5]).

Теорема 1. *Для функции $f \in C[-1,1]$ и величины $S_n(f)$ верна оценка*

$$S_n(f) \leqslant 2 \left(\frac{3}{2}\right)^n \|f\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При доказательстве теоремы 1 существенно используются наработки [6].

Недавно В. Б. Шерстюков сообщил нам, что более тонкий анализ позволяет убрать множитель 2 в оценке из теоремы 1 и, кроме того, отдельно доказать усиленное неравенство

$$S_n(f) \leqslant K\, n^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{2}\right)^n \|f\|, \quad n \in \mathbb{N},$$

с некоторой абсолютной константой $K > 0$. Указанный выше пример простого симметричного модуля подтверждает точность основания $\sqrt{2}$ в экспоненциальной части мажоранты для величины $S_n(f)$. Тем самым, последняя оценка действительно близка к окончательной.

Автор выражает признательность В. Б. Шерстюкову за большую помощь при работе над темой.

Литература

1. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials.—Toronto: University of Toronto Press, 1953.—x+130 p.
2. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна: Учеб. пособие к спецкурсу.—Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990.—64 с.
3. *Bustamante J.* Bernstein Operators and their Properties.—Birkhäuser, 2017.—420 p.
4. *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* О росте коэффициентов в полиномах Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке // Уфим. мат. журн.—2018.—Т. 10, № 3.—С. 89–107.
5. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Новые исследования, связанные с алгебраической записью полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIX Междунар. науч. конф., посвященной 100-летию физ.-мат. факультета СмолГУ. Смоленск: Изд-во СмолГУ.—2018.—Вып. 19.—С. 336–347.
6. *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Алгебраическая запись полиномов Бернштейна на симметричном отрезке и связанные с ней комбинаторные соотношения // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, № 3.—С. 68–91.
7. *Stafney J. D.* A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to $C[0,1]$ // Duke Math. J.—1967.—Vol. 34, № 3.—P. 393–396.
8. *Roulier J. A.* Permissible bounds of the coefficients of approximating polynomials // J. Approx. Theory.—1970.—Vol. 3, № 2.—P. 117–122.
9. *Roulier J. A.* Restrictions on the coefficients of approximating polynomials // J. Approx. Theory.—1972.—Vol. 6, № 3.—P. 276–282.

ОБ ОБРАЗЕ ОТОБРАЖЕНИЯ БОРЕЛЯ НА ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НОРМАЛЬНОГО ТИПА

Д. А. Полякова

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Пусть ω — некоторая весовая функция; φ_ω^* — сопряженная по Юнгу к функции $\varphi_\omega(x) = \omega(e^x)$. Для бесконечно дифференцируемой в $\mathbb{R}$ функции f, последовательности $d = (d_j)_{j=0}^\infty$ комплексных чисел и положительных чисел s и l положим

$$|f|_{\omega,s,l} := \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{|x|\leqslant l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{\exp s\varphi_\omega^*(j/s)}; \quad \widetilde{|d|}_{\omega,s} := \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \frac{|d_j|}{\exp s\varphi_\omega^*(j/s)}.$$

Введем весовые пространства

$$\mathscr{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R}) := \big\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall\, l \in (0,\infty),\, \forall\, s \in (0,p)\ \ |f|_{\omega,s,l} < \infty\big\},$$

$$\mathscr{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) := \big\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall\, l \in (0,\infty)\ \exists\, s \in (p,\infty) : |f|_{\omega,s,l} < \infty\big\},$$

которые называются соответственно пространствами Берлинга и Румье ультрадифференцируемых функций (УДФ) нормального типа $p \in (0,\infty)$. На данных пространствах определено отображение Бореля $\rho : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto \big(f^{(j)}(0)\big)_{j=0}^\infty$, которое естественным образом действует из $\mathscr{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и $\mathscr{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ в весовые пространства последовательностей

$$\Lambda^p_{(\omega)} = \big\{d = (d_j)_{j=0}^\infty \subset \mathbb{C} : \forall\, s \in (0,p)\ \ \widetilde{|d|}_{\omega,s} < \infty\big\},$$

$$\Lambda^p_{\{\omega\}} = \big\{d = (d_j)_{j=0}^\infty \subset \mathbb{C}\,|\ \exists\, s \in (p,\infty) : \widetilde{|d|}_{\omega,s} < \infty\big\}.$$

В [1] было установлено, что необходимым и достаточным условием сюръективности отображения ρ является медленное изменение веса ω.

В настоящей работе мы рассматриваем случай, когда отображение ρ не сюръективно, и решаем задачу о том, при каких условиях образы $\rho\big(\mathscr{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big)$ и $\rho\big(\mathscr{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\big)$ содержат в себе пространства $\Lambda^q_{(\sigma)}$ или, соответственно, $\Lambda^q_{\{\sigma\}}$, где σ — некоторая другая весовая функция, $q \in (0,\infty)$. Данная задача представляет собой один из вариантов классической проблемы моментов [2].

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть ω, σ — весовые функции; $p, q \in (0,\infty)$; $p\omega \leqslant q\sigma$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\rho\big(\mathscr{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \Lambda^q_{(\sigma)}$;

(2) $\rho\big(\mathscr{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\big) \supset \Lambda^q_{\{\sigma\}}$;

(3) $\limsup\limits_{y\to\infty} \dfrac{2}{\pi\sigma(y)} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\omega(yt)}{t^2+1}\,dt \leqslant \dfrac{q}{p}$.

Заметим, что ранее аналогичные результаты были получены в [3] для пространств $\mathscr{E}^\infty_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и $\mathscr{E}^0_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ максимального и минимального типов.

Литература

1. *Abanina D. A.* On Borel's theorem for spaces of ultradifferentiable functions of mean type // Result. Math.—2003.—Vol. 44, № 3–4.—P. 195–213.
2. *Carleson L.* On universal moment problem // Math. Scand.—1961.—Vol. 9.—P. 197–206.
3. *Bonet J., Meise R., Taylor B.A.* On the range of the Borel map for classes of non-quasianalytic functions // Progress in Functional Analysis.—Elsevier Sci. Publ., 1992.—P. 97–111.

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ P-ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В R^2 [1]

А. С. Романов
(Россия, Новосибирск; ИМ СО РАН)

При $1 < p < \infty$ функция u называется p-гармонической в односвязной ограниченной области $G \subset R^2$, если $u \in W^1_{p,\,\mathrm{loc}}(G)$ и является слабым решением p-уравнения Лапласа, т. е.

$$\iint\limits_G |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\,\nabla\varphi\,dxdy = 0$$

для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$.

При $1 < p < \infty$ p-гармоническая функция $u \in C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(G)$, $\alpha > 1/3$ (см. [1]).

Множество критических точек отличной от постоянной p-гармонической функции

$$Z = \big\{(x,y) \in G \,|\, \nabla u(x,y) = 0\big\}$$

является дискретным, при этом $u \in C^\infty(G \setminus Z)$ [2].

Для p-гармонической функции u существует сопряженная ей p'-гармоническая функция v $(1/p + 1/p' = 1)$. Сопряженные функции связаны системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = |\nabla u|^{p-2}\,\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -|\nabla u|^{p-2}\,\dfrac{\partial u}{\partial y}, \end{cases}$$

которая при $p = 2$ превращается в систему Коши — Римана.

Рассмотрим два непересекающихся компакта $K_0, K_1 \subset \overline{G}$. Класс допустимых функций для пары непересекающихся компактов $K_0, K_1 \subset \overline{G}$ определим условием

$$D(K_0, K_1, G) = \big\{u \in L^1_p(G) \cap C(G \cup K_0 \cup K_1) \,\big|\, u|_{K_0} = 0,\, u|_{K_1} = 1\big\},$$

а при $1 < p < \infty$ соответствующую p-емкость определим равенством

$$\mathrm{cap}_p(K_0, K_1, G) = \inf_{u \in D(K_0,K_1,G)} \iint\limits_G |\nabla u|^p\,dxdy.$$

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект № 0314-2019-0007.

В силу выпуклости множества допустимых функций и равномерной выпуклости постранства Лебега L_p при $p > 1$ существует единственная экстремальная функция $u_0 \in \overline{D(K_0, K_1, G)}$ такая, что

$$\operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G) = \iint\limits_G |\nabla u_0|^p \, dxdy.$$

Как решение вариационной задачи для p-интеграла Дирихле экстремальная функция оказывается p-гармонической.

Функцию w будем называть $\mathscr{P}$-экстремальной в области $D \subset R^2$, если она представима в виде $w = au + b$, где $a, b \in R$, а функция u является экстремальной для p-емкости некоторой пары множеств $K_0, K_1 \subset \overline{D}$. Очевидно, что функция w является p-гармонической и минимизирует p-интеграл Дирихле на классе допустимых функций, равных b на множестве K_0 и равных $a + b$ на множестве K_1.

Нас интересует место $\mathscr{P}$-экстремальных функций в классе всех p-гармонических функций. Конечно, произвольная p-гармоническая функция может и не быть $\mathscr{P}$-экстремальной во всей области определения, но удается получить локальный результат.

Теорема. *Если функция u является p-гармонической в области G, а v — сопряженная p'-гармоническая функция, то для всякой точки $x \in G \setminus Z$ существует окрестность Ω, в которой функция $\tilde{u} = u|_\Omega$ является $\mathscr{P}$-экстремальной, а функция $\tilde{v} = v|_\Omega$ является $\mathscr{P}'$-экстремальной.*

Литература

1. *Iwaniec T., Manfredi J. J.* Regularity p-harmonic functions on the plane // Rev. Mat. Iberoamericana.—1989.—Vol. 5, № 1–2.—P. 1–19.
2. *Manfredi J. J.* p-harmonic functions in the plane // Proc. Amer. Math. Soc.—1988.—Vol. 103, № 2.—P. 473–479.

STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRA AND DISCRETE SPECTRUM OF FOUR-ELECTRON SYSTEMS IN THE IMPURITY HUBBARD MODEL. TRIPLET STATE

S. M. Tashpulatov (Uzbekistan, Tashkent; INP AS RUz),
R. T. Parmanova (Uzbekistan, Tashkent; INP AS RUz)

We consider four-electron systems in the impurity Hubbard model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system in the first triplet state of the system. The Hamiltonian of considering system has the form

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} +$$
$$+ (A_0-A)\sum_{\gamma} a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma} + (B_0-B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0-U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}.$$

Here A (A_0) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site; $B > 0$ ($B_0 > 0$) is the transfer integral between (between electron and impurities) neighboring sites, the summation over τ ranges the nearest neighbors, U (U_0) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons in the regular (impurity) sites, γ is the spin index, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$.

The four electron systems have a quintet state, three type triplet states, and two type singlet states [1, 2]. The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fock space $\mathscr{H}_{as}$. Let φ_0 be the vacuum vector in the space $\mathscr{H}_{as}$. The first triplet state corresponds to the free motion of four electrons over the lattice and its interactions with the basic functions $t^1_{n,k,p,q\in Z^\nu} = a^+_{n,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}\varphi_0$. The subspace $\mathscr{H}^t_1$, corresponding to the first triplet state is the set of all vectors of the form $\psi^t_1 = \sum_{n,k,p,q\in Z^\nu} f(n,k,p,q)t^1_{n,k,p,q\in Z^\nu}$, $f \in l^{as}_2$, where l^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^\nu)^4)$.

Theorem 1. *The subspace $\mathscr{H}^t_1$ is invariant under the operator H, and the restriction H^t_1 of operator H to the subspace $\mathscr{H}^t_1$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self-adjoint operator $\overline{H}^t_1$ acting in the space $l^{as}_2((Z^\nu)^4)$.*

Let $\mathscr{F} : l_2((Z^\nu)^4) \to L_2((T^\nu)^4) \equiv \widetilde{\mathscr{H}^t_1}$ be the Fourier transform, where T^ν is the ν-dimensional torus. We set $\widetilde{H}^t_1 = \mathscr{F}\overline{H}^t_1\mathscr{F}^{-1}$. In the quasimomentum representation, the operator $\overline{H}^t_1$ acts in the Hilbert space $L^{as}_2((T^\nu)^4)$, where $L^{as}_2((T^\nu)^4)$ is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^4)$.

Theorem 2. *The Fourier transform of operator $\overline{H}_1^{\,t}$ is an bounded self-adjoint operator $\widetilde{H}_1^t = \mathscr{F}\overline{H}_1^{\,t}\mathscr{F}^{-1}$ acting in the space $\widetilde{\mathscr{H}_1}^t$ according to the formula*

$$\widetilde{H}_1^t\psi_1^t = \left\{4A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i + \cos\mu_i + \cos\gamma_i + \cos\theta_i]\right\} f(\lambda,\mu,\gamma,\theta) +$$

$$+\varepsilon_1\left[\int\limits_{T^\nu} f(s,\mu,\gamma,\theta)ds + \int\limits_{T^\nu} f(\lambda,t,\gamma,\theta)dt + \int\limits_{T^\nu} f(\lambda,\mu,l,\theta)dl + \int\limits_{T^\nu} f(\lambda,\mu,\gamma,k)dk\right] +$$

$$+2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i + \cos s_i]f(s,\mu,\gamma,\theta)ds + 2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\mu_i + \cos t_i]f(\lambda,t,\gamma,\theta)dt + \tag{1}$$

$$+2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\gamma_i + \cos l_i]f(\lambda,\mu,l,\theta)dl + 2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\theta_i + \cos k_i]f(\lambda,\mu,\gamma,k)dk +$$

$$+U\int\limits_{T^\nu}\big[f(s,\mu,\gamma,\lambda+\theta-s) + f(\lambda,s,\gamma,\mu+\theta-s) + f(\lambda,\mu,s,\gamma+\theta-s)\big]\,ds +$$

$$+\varepsilon_3\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu}\big[f(s,\mu,\gamma,l)\,dsdl + f(\lambda,t,\gamma,l)\,dtdl + f(\lambda,\mu,r,l)\,drdl\big].$$

Theorem 3. *Let $\nu = 1$, and $\varepsilon_2 = -B$, and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$, and $\varepsilon_1 > 2B$). Then the essential spectrum of the operator H_1^t is consists of the union of N_1 segments, where $4 \leqslant N_1 \leqslant 8$:*

$$\sigma_{\text{ess}}\big(H_1^t\big) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[3A-6B+z, 3A-6B+z]\cup$$
$$\cup[2A-4B+2z, 2A+4B+2z]\cup[A-2B+3z, A+2B+3z]\cup$$
$$\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]\cup$$
$$\cup[A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3]\cup[A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4]$$

and discrete spectrum of the operator H_1^t is consists of a N_2 eigenvalues, where $1 \leqslant N_2 \leqslant 3$:

$$\sigma_{\text{disc}}\big(H_1^t\big) = \big\{4z, 2z+z_3, 2z+z_4\big\},$$

where $z = A + \varepsilon_1$, and z_3, and z_4 are the additional eigenvalues of operator H_1^t.

Theorem 4. *Let $\nu = 1$, and $\varepsilon_2 > 0$, and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$, then the essential spectrum of the operator H_1^t is consists of the union of the N_1 segment, where $10 \leqslant N_1 \leqslant 16$:*

$$\sigma_{ess}\big(H_1^t\big) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[3A-6B+z_1, 3A-6B+z_1]\cup$$
$$\cup[3A-6B+z_2, 3A-6B+z_2]\cup[2A-4B+2z_1, 2A+4B+2z_1]\cup$$
$$\cup[2A-4B+2z_2, 2A+4B+2z_2]\cup[2A-4B+z_1+z_2, 2A+4B+z_1+z_2]\cup$$
$$\cup[A-2B+3z_1, A+2B+3z_1]\cup[A-2B+3z_2, A+2B+3z_2]\cup$$
$$\cup[A-2B+2z_1+z_2, A+2B+2z_1+z_2]\cup[A-2B+z_1+2z_2, A+2B+z_1+2z_2]\cup$$
$$\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z_1+z_3, A+2B+z_1+z_3]\cup$$
$$\cup[A-2B+z_2+z_3, A+2B+z_2+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]\cup$$
$$\cup[A-2B+z_1+z_4, A+2B+z_1+z_4]\cup[A-2B+z_2+z_4, A+2B+z_2+z_4]$$

and discrete spectrum of the operator H_1^t *is consists of* N_2 *eigenvalues, where* $5 \leqslant N_2 \leqslant 11$:

$$\sigma_{\text{disc}}\big(H_2^q\big) = \big\{4z_1, 4z_2, 3z_1+z_2, z_1+3z_2, 2z_1+2z_2, 2z_1+z_3, z_1+z_2+z_3, \\ 2z_2+z_3, 2z_1+z_4, z_1+z_2+z_4, 2z_2+z_4\big\}.$$

Theorem 5. *If* $-2B < \varepsilon_2 < 0$, *then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_1^t$ *is consists of a* N_1 *segments, where* $1 \leqslant N_1 \leqslant 3$:

$$\sigma_{\text{ess}}\big(\widetilde{H}_1^t\big) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]$$

and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_1^t$ *is empty set.*

References

1. *Tashpulatov S. M.* The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the hubbard model in a singlet state // Lobachevskii J. Math.—2017.—Vol. 38, № 3.—P. 530–541.
2. *Tashpulatov S. M.* Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplet state in the Hubbard model // J. Phys. Conf. Ser.— 2016.—Vol. 697.—P. 012025. DOI: 10.1088/1742-6596/697/1/012025.

ON AN INTEGRAL CRITERION FOR PLURISUBHARMONIC FUNCTIONS

Sh. Sh. Shopulatov
(Uzbekistan, Tashkent; IM AS RUz)

Subharmonic functions play an important role in the classical potential theory. They defined by harmonic majorants (see [1, 2]), by the Laplace differential operators (see [1]), by mean value inequalities (see [3]) and by the generalised Laplace operators (see [2, 4–9]), so on. One of the most popular is averaging over the spheres or balls of a summable function. The pluripotential theory is based on plurisubharmonic functions. They defined by the subharmonicity on complex lines in $\mathbb{C}^n$.

The idea of defining subharmonic functions with the mean value inequalities over the spheres or balls led us to give an integral criterion for plurisubharmonic functions. We consider in $\mathbb{C}^n$ the following class of ellipsoids

$$E(r_1,\dots,r_n)=\left\{\frac{|z_1|^2}{r_1^2}+\dots+\frac{|z_n|^2}{r_n^2}\leqslant 1\right\},$$

where $r_j>0$ for any $1\leqslant j\leqslant n$. Taking $r_1=R$ and $r_j=r$ for all $2\leqslant j\leqslant n$ in $E(r_1,\dots,r_n)$ let us denote $E(R,r):=E(R,r,\dots,r)$, where R an r are positive numbers. For integrable function u on D we consider the following mean value over $E(r_1,\dots,r_n)$

$$M_u\big(z^0,T,E(r_1,\dots,r_n)\big)=\frac{1}{V(r_1,\dots,r_n)}\int\limits_{z^0+T\circ E(r_1,\dots,r_n)}u(\xi)\,dV(\xi),$$

where

$$V(r_1,\dots,r_n)=\int\limits_{E(r_1,\dots,r_n)}dV(\xi)=\frac{\pi^n r_1^2\cdots r_n^2}{n!}$$

is the volume of $E(r_1,\dots,r_n)$.

The first main result of the work states as follows

Theorem 1. *Let $D\subset\mathbb{C}^n$ be a domain and u be an upper semi-continuous function on D. Then the following properties are equivalent:*

a) *u is psh on D;*

b) *for any $z^0\in D$ and any unitary matrix T with $z^0+T\circ E(r_1,\dots,r_n)\subset D$ the following inequality holds*

$$u\big(z^0\big)\leqslant M_u\big(z^0,T,E(r_1,\dots,r_n)\big);$$

c) *for any $z^0\in D$ and any unitary matrix T there exists $r_0>0$ small enough such that for any tuple $(r_1,\dots,r_n)$ with $\max\{r_1,\dots,r_n\}\leqslant r_0$ the following inequality holds*

$$u\big(z^0\big)\leqslant M_u\big(z^0,T,E(r_1,\dots,r_n)\big);$$

d) *for any* $z^0 \in D$ *and any unitary matrix* T *there exists* $r_0 > 0$ *small enough such that for any* (R, r) *with* $\max\{R, r\} \leqslant r_0$ *the following inequality holds*

$$u\big(z^0\big) \leqslant M_u\big(z^0, T, E(R, r)\big);$$

e) *for any* $z^0 \in D$ *and any unitary matrix* T *with* $z^0 + T \circ E(R, r) \subset D$ *the following inequality holds*

$$u\big(z^0\big) \leqslant M_u\big(z^0, T, E(R, r)\big).$$

The next main result of the work is an analogue of Blaschke–Privalov theorem for *psh* functions. For this purpose we define the following

$$\overline{D}_T u\big(z^0\big) = \varlimsup_{R\to 0} \varlimsup_{r\to 0} \frac{M_u\big(z^0, T, E(R, r)\big) - u\big(z^0\big)}{R^2}$$

and let $\overline{D}u(z^0) = \inf_T \overline{D}_T u(z^0)$ where the infimum taken all over the unitary matrices.

Theorem 2. *Let* u *be an upper semi-continuous function in a domain* $D \subset \mathbb{C}^n$ *with* $u(z) \not\equiv -\infty$. *Then* u *is psh if and only if*

$$\overline{D}u(z) \geqslant 0 \ \text{ for all } \ z \in D \setminus u_{-\infty},$$

where $u_{-\infty} := \{z \in D : u(z) = -\infty\}$.

References

1. *Sadullaev A.* Pluripotential Theory and its Applications.—Saarbrucken: Palmarium Acad. Publ., 2012.—307 p.
2. *Brelot M.* Elements de la Theorie Classique du Potentiel.—4th Ed.—Paris: Centre du Documentation Universitaire, 1969.—216 p.
3. *Demailly J-P.* Complex Analytic and Differential Geometry.—Grenoble: Universite de Grenoble I, 1997.—455 p.
4. *Blaschke W.* Ein Mittelwertsatz und eine knnzeichnende Eigenschaft des logarithmischen Potentials // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss.—1916.—Vol. 68.—P. 3–7.
5. *Privalov I. I.* Sur les fonctions harmoniques // Mat. Sb.—1925.—Vol. 32, № 3.—P. 464–469.
6. *Privalov I. I.* To the definition of a subharmonic function // News of the USSR Acad. Sci.—1941.—Vol. 5, № 4–5.—P. 281–284.
7. *Sadullaev A., Shopulatov Sh. Sh.* The generalised laplace operator and the topological characteristic of removable $\overline{S}$-singular sets of subharmonic functions // Complex Anal. Oper. Theory.—2021.—Vol. 15, № 50.—DOI: 10.1007/s11785-021-01102-w.
8. *Shopulatov Sh. Sh.* On a weak criterion for the subharmonicity of functions in $\mathbb{R}^n$ // Uzb. Math. J.—2018.—Vol. 2.—P. 136–141.
9. *Shopulatov Sh. Sh.* On the properties of singular removable sets of subharmonic functions // Rep. AS RUz.—2019.—Vol. 2.—P. 3–6.

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

Г. А. Юсупов

(Таджикистан, Хорог; ХоГУ)

Обозначим через $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ — множество всех положительных чисел вещественной оси; L_2 — пространство измеримых и суммируемых с квадратом по Лебегу вещественных 2π-периодических функций f, имеющих конечную норму

$$\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_{L_2} := \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $\mathscr{T}_{2n-1}$ — совокупность всевозможных тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n-1$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье, величина $E_{n-1}(f)_2$ ее наилучшего полиномиального приближения элементами $T_{n-1} \in \mathscr{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf_{T_{n-1}(x)\in\mathscr{T}_{2n-1}} \big\|f - T_{n-1}\big\| = \big\|f - S_{n-1}(f)\big\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $S_{n-1}(f,x)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f, $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \in \mathbb{N}$, $a_k(f)$ и $b_k(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции f. Символом $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$, $L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)} \in L_2$. Обозначим норму разности m-го порядка функции $f \in L_2$ с шагом h символом

$$\Delta_h^m(f) := \big\|\Delta_h^m f(\cdot)\big\| = \left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\binom{m}{k} f(x+kh)\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

и равенством

$$\omega_m(f;t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\big\{\Delta_h^m(f) :\ |h| \leqslant t\big\} \tag{1}$$

определим модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$.

В работе получены точные константы в неравенствах Джексона — Стечкина и для функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых последовательные производные $f^{(s)}$ $(s = 0, 1, \ldots, r)$ принадлежат пространству L_2, найдено значение величины наилучших совместных приближений $E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)$ на классе $L_2^{(r)}$.

Напомним, что под неравенствами типа Джексона — Стечкина в любом нормированном пространстве X понимают соотношения вида

$$E_{n-1}(f)_X \leqslant \chi\, n^{-r}\omega_m\Big(f^{(r)}, \frac{\tau}{n}\Big)_X, \quad r \in \mathbb{Z}_+,\ \tau > 0,$$

в которых погрешность приближения индивидуальной функции f оценивается через заданную характеристику гладкости ω_m самой приближаемой функции f или некоторой ее производной $f^{(r)} \in X$. Здесь возникает задача отыскания точных констант в неравенстве Джексона — Стечкина между величинами наилучших приближений и усредненным значением модуля непрерывности (1).

Введем следующую экстремальную характеристику (далее соотношение $0/0$ полагаем равным нулю):

$$\chi_{m,n,r,p,s}(\varphi, h) = \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)},\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{2^m n^{r-s} E_{n-1}\big(f^{(r-s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p\big(f^{(r)}, t\big)_2\, \varphi(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}}}, \tag{2}$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant s \leqslant r$, $0 < h \leqslant 3\pi/(4n)$, $\varphi(t) \geqslant 0$ — весовая функция. Величина (2) при $r = s$, в том числе дробных r, была исследована в работах М. Ш. Шабозова и Г. А. Юсупова [1], а при $r = s$, $p = 2$ еще раньше А. А. Лигуном [2] и при различных значениях параметров m, p и конкретных весовых функциях $\varphi(t)$ другими математиками (подробная литература с комментариями см. в [1–5]).

Поскольку для $f \in L_2^{(r)}$ ее последовательные производные $f^{(s)} \in L_2$ $(s = 0, 1, \ldots, r)$, то представляет интерес изучение поведения величины наилучших приближений $E_{n-1}(f^{(s)})$ $(s = 0, 1, \ldots, r)$ на указанном классе $L_2^{(r)}$. Приводим решение этой задачи, когда структурные характеристики функции $f \in L_2^{(r)}$ характеризуются усредненными с весом $\varphi(t)$ значениями модулей непрерывности $\omega_m(f^{(r)}, t)_2$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leqslant 2$, $0 < h \leqslant 3\pi/(4n)$, $r \in \mathbb{R}_+$, $s = 0, 1, \ldots, r$; $\varphi(t)$ — весовая функция на отрезке $[0, h]$, удовлетворяющая условию*

$$(sp - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geqslant 0.$$

Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^m n^s E_{n-1}\big(f^{(r-s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p\big(f^{(r)}, t\big)_2\, \varphi(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \varphi(t)\, dt\right)^{-\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Пусть $\Psi(t)$ $(t \geqslant 0)$ — произвольная неубывающая выпуклая вниз функция такая, что $\Psi(0) = 0$. Через $W_{p,h}^{(r)}(\omega_m, \varphi)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при всех $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_+$, $0 < p \leqslant 2$, $0 < h \leqslant \pi/n$ выполняется условие

$$\int\limits_0^h \omega_m^p\big(f^{(r)}, t\big)_2\, \varphi(t)\, dt \leqslant \Psi(h).$$

Теперь заметим, что из равенства (3) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$) при любом $s = 0, 1, \ldots, r$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2 \leqslant \frac{1}{2^m n^{r-s}} \frac{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p\big(f^{(r)}, t\big)_2\, \varphi(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int\limits_0^h \big(\sin\frac{nt}{2}\big)^{mp} \varphi(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Требуется найти точное значение величины

$$\sup\Big\{E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2 :\, f \in W_{p,h}^{(r)}(\omega_m, \varphi)\Big\}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_+$, $0 < p \leqslant 2$, $0 < h \leqslant \pi/n$ и $s = 0, 1, \ldots, r$ имеет место равенство*

$$\sup\Big\{E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2 :\, f \in W_{p,h}^{(r)}(\omega_m, \varphi)\Big\} = 2^{-m} n^{-r+s} \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \varphi(t)\, dt\right)^{-\frac{1}{p}} \Psi(h).$$

Литература

1. *Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки.—2011.—Т. 90, № 5.—С. 764–775.
2. *Лигун А. А.* Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Мат. заметки.—1988.—Т. 43, № 6.—С. 757–769.
3. *Shabozov M. Sh., Yusupov G. A.* Widths of certain classes of periodic functions in L_2 // J. Approx. Theory.—2012.—Vol. 164, № 1.—P. 869–878.
4. *Юсупов Г. А.* Точные значения поперечников некоторых классов функций из L_2 и минимизация констант в неравенствах типа Джексона — Стечкина // Модел. и анализ информ. систем.—2013.—Т. 20, № 5.—С. 106–116.
5. *Yusupov G. A.* Jackson's–Stechkin's inequality and the values of widths for some classes of functions from L_2 // Analysis Math.—2014.—Vol. 40, № 1.—P. 69–81.

Секция II

Дифференциальные и интегральные уравнения

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ПОЛЗУЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

М. А. Артемов (Россия, Воронеж; ВГУ),
Е. С. Барановский (Россия, Воронеж; ВГУ)

Рассматривается задача оптимального управления для линейной интегро-дифференциальной системы, описывающей ползущее течение несжимаемой вязкоупругой среды с «памятью» в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ с границей $\partial\Omega$ на промежутке времени $[0,T]$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mu\Delta\mathbf{v} - \int\limits_0^t h(s,t)\Delta\mathbf{v}(\,\cdot\,,s)\,ds + \nabla\pi = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \tag{1}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \ \partial\Omega \times (0,T), \tag{2}$$

$$\mathbf{v}(\,\cdot\,,0) = \mathbf{0} \ \text{ в } \ \Omega, \tag{3}$$

$$\mathbf{f} \in \mathbf{F}, \tag{4}$$

$$J_\xi(\mathbf{v},\mathbf{f}) = \xi\left\|\mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}}\right\|^2_{\mathbf{L}^2(Q_T)} + (1-\xi)\left\|\mathbf{f}\right\|^2_{\mathbf{L}^2(Q_T)} \to \min, \tag{5}$$

где $Q_T := \Omega \times (0,T)$, $\mathbf{v}\colon \overline{Q}_T \to \mathbf{R}^3$ — вектор-функция скорости, $\pi\colon \overline{Q}_T \to \mathbf{R}$ — функция давления, $\mu > 0$ — коэффициент вязкости, $h\colon [0,T]\times[0,T] \to [0,\infty)$ — ядро вязкоупругости, $\mathbf{f}\colon \overline{Q}_T \to \mathbf{R}^3$ — внешняя сила (управляющая функция), $\mathbf{F}$ — множество допустимых управлений, J_ξ — целевой функционал, ξ — числовой параметр, $\xi \in (0,1)$, $\widetilde{\mathbf{v}}\colon \overline{\Omega} \to \mathbf{R}^3$ — заданная вектор-функция (желаемое поле скоростей), операторы ∇, Δ и div обозначают соответственно градиент, лапласиан и дивергенцию по пространственным переменным x_1, x_2, x_3.

В вырожденном случае $h(s,t) \equiv 0$ приходим к линеаризованным эволюционным уравнениям Навье — Стокса. Если положить $h(s,t) \equiv b\exp(a(s-t))$, то система (1) сводится к линеаризованным уравнениям движения вязкоупругой жидкости типа Джеффриса — Олдройда [1, 2]. Аппроксимативная управляемость соответствующих уравнений установлена в [3].

В данной работе мы не будем ограничиваться конкретным выбором ядра вязкоупругости — рассмотрим общую ситуацию, предполагая лишь, что функция h непрерывна. Основная цель — установить однозначную разрешимость задачи оптимизации (1)–(5) в классе слабых решений.

Условимся использовать стандартные обозначения для пространства Лебега $\mathbf{L}^2(\Omega)$ и пространства Соболева $\mathbf{W}^1_2(\Omega)$ функций, заданных на области Ω и со значениями в $\mathbf{R}^3$. Введем также следующие пространства: $\mathbf{Y} := \{\mathbf{w} \in \mathbf{C}^\infty(\Omega) : \operatorname{supp}\mathbf{w} \subset \Omega \text{ и } \operatorname{div}\mathbf{w} \equiv 0\}$, $\mathbf{H}$ — замыкание $\mathbf{Y}$ в $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{V}$ — замыкание $\mathbf{Y}$ в $\mathbf{W}^1_2(\Omega)$.

Предположим, что выполнены четыре условия:
(i) граница области Ω является локально-липшицевой;
(ii) функция $h\colon [0,T]\times[0,T]\to[0,\infty)$ непрерывна;
(iii) выполнено включение $\widetilde{\mathbf{v}}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})$;
(iv) множество $\mathbf{F}$ выпукло и замкнуто в $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$.

Определение 1. *Допустимой парой* для системы (1)–(5) будем называть пару вектор-функций $(\mathbf{f},\mathbf{v})$ такую, что

$$\mathbf{f}\in\mathbf{F},\quad \mathbf{v}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})\cap\mathbf{C}([0,T];\mathbf{H}),\quad \mathbf{v}(\,\cdot\,,0)=\mathbf{0}$$

и для любой вектор-функции $\mathbf{w}\in\mathbf{V}$ выполнено следующее равенство:

$$\frac{d}{dt}\,(\mathbf{v},\mathbf{w})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\mu\big(\nabla\mathbf{v},\nabla\mathbf{w}\big)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\left(\int\limits_0^t h(s,t)\nabla\mathbf{v}(\,\cdot\,,s)\,ds,\nabla\mathbf{w}\right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}=(\mathbf{f},\mathbf{w})_{\mathbf{L}^2(\Omega)},$$

где оператор d/dt обозначает обобщенную производную по t.

Множество всех допустимых пар обозначим через $\mathbf{M}(\mathbf{F})$.

Для любого управления $\mathbf{f}\in\mathbf{F}$ существует единственная пара $(\mathbf{f},\mathbf{v})$, принадлежащая множеству $\mathbf{M}(\mathbf{F})$. Это позволяет корректно определить оператор управления $\mathbf{K}$.

Определение 2. *Оператором управления* будем называть отображение

$$\mathbf{K}\colon\ \mathbf{F}\subset\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))\to\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}),\quad \mathbf{K}(\mathbf{f}):=\mathbf{v},$$

где $\mathbf{f}\in\mathbf{F}$ и $\mathbf{v}$ — вторая компонента пары $(\mathbf{f},\mathbf{v})\in\mathbf{M}(\mathbf{F})$.

Определение 3. Будем говорить, что вектор-функция $\mathbf{f}_*\in\mathbf{F}$ является *оптимальным управлением* в системе (1)–(5), если

$$\xi\left\|\mathbf{K}(\mathbf{f}_*)-\widetilde{\mathbf{v}}\right\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})}+(1-\xi)\left\|\mathbf{f}_*\right\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}=$$
$$=\inf\left\{\xi\left\|\mathbf{K}(\mathbf{f})-\widetilde{\mathbf{v}}\right\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})}+(1-\xi)\left\|\mathbf{f}\right\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}:\ \mathbf{f}\in\mathbf{F}\right\}.$$

Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (i)–(iv). *Тогда в системе* (1)–(5) *существует единственное оптимальное управление. При этом вектор-функция* $\mathbf{f}_*\in\mathbf{F}$ *является оптимальным управлением тогда и только тогда, когда выполнено вариационное неравенство*

$$\xi\big(\mathbf{K}(\mathbf{f}_*)-\widetilde{\mathbf{v}},\mathbf{K}(\mathbf{f})-\mathbf{K}(\mathbf{f}_*)\big)_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})}\geqslant(1-\xi)(\mathbf{f}_*,\mathbf{f}_*-\mathbf{f})_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\quad\forall\,\mathbf{f}\in\mathbf{F}.$$

Доказательство этой теоремы основано на построении приближенных решений по методу Фаэдо — Галеркина, выводе энергетических оценок, изучении свойств оператора управления и применении леммы о существовании и единственности метрической проекции точки на выпуклое замкнутое множество в вещественном гильбертовом пространстве.

Литература

1. *Oskolkov A. P., Shadiev R.* Towards a theory of global solvability on $[0, \infty)$ of initial-boundary value problems for the equations of motion of Oldroyd and Kelvin–Voight fluids // J. Math. Sci.—1994.—Vol. 68.—P. 240–253.
2. *Oskolkov A. P.* Smooth global solutions of initial boundary-value problems for the equations of Oldroyd fluids and of their ϵ-approximations // J. Math. Sci.—1998.—Vol. 89.—P. 1750–1763.
3. *Doubova A., Fernandez-Cara E.* On the control of viscoelastic Jeffreys fluids // Syst. Control Lett.—2012.—Vol. 61.—P. 573–579.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

СИСТЕМА НЕОДНОРОДНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[1]

С. Н. Асхабов
(Россия, Грозный; ЧГПУ, ЧГУ)

Изучается система нелинейных интегральных уравнений типа свертки, возникающих при описании процессов инфильтрации жидкости, распространения ударных волн в трубах, остывания тел при лучеиспускании и других (подробнее, см. [1, 2]). Получены двусторонние априорные оценки решения, на основе которых построено полное метрическое пространство и методом весовых метрик доказана однозначная разрешимость данной системы в этом пространстве. Показано, что решение можно найти методом последовательных приближений и установлена оценка скорости их сходимости. Установлено, что решение является единственным и во всем классе непрерывных неотрицательных функций.

Итак, основным объектом исследования в данной работе является система

$$u_i^{\alpha}(x)=\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^x k_{ij}(x-t)u_j(t)\,dt+f_i(x),\quad \alpha>1,\ x>0,\ i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

в которой ядра и неоднородности удовлетворяют на $[0,\infty)$ условиям:

$$k_{ij}\in C[0,\infty),\ k_{ij}(x)\ \text{не убывают и}\ k_{ij}(0)=p_{ij}>0, \tag{2}$$

$$f_i\in C[0,\infty),\ f_i(x)\ \text{не убывают и}\ f_i(0)=0. \tag{3}$$

Решения системы (1) разыскиваются в конусе

$$Q_{0,n}=\big\{u: u=\{u_i\}_{i=1}^n,\ u_i\in C[0,\infty),\ u_i(0)=0\ \text{и}\ u_i(x)>0\ \text{при}\ x>0\big\}.$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (3). *Если* $u\in Q_{0,n}$ *является решением системы* (1), *то для любых* $x\in[0,\infty)$ *и* $i=\overline{1,n}$ *справедливы оценки:*

$$L_n(x)\equiv\left[\frac{(\alpha-1)np}{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}x^{\frac{1}{\alpha-1}}\leqslant u_i(x)\leqslant$$

$$\leqslant\left[n\int\limits_0^x\sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}(t)\,dt+\left(\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}\equiv R_n(x),\quad \text{где}\ p=\min_{1\leqslant i,j\leqslant n}p_{ij}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках реализации государственного задания в соответствии с Соглашением № 075–03–2021–071 от 29.12.2020.

Пример 1. Если $k_{ij}(x) = C > 0$ и $f_i(x) = 0$, то $u(x) = \{u_i(x)\}_{i=1}^n$, где

$$u_i(x) = F_n(x) \equiv \left[C\,\frac{\alpha-1}{\alpha}\,n\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} x^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

является решением системы (1), т. е. оценка снизу из леммы 1 неулучшаема.

Введем следующий класс функций:

$$P_{b,n} = \left\{u : u = \left\{u_i\right\}_{i=1}^n,\ u_i(x) \in C[0,b] \ \text{ и } \ L_n(x) \leqslant u_i(x) \leqslant R_n(x),\ \forall\, i = \overline{1,n}\,\right\},$$

где $b > 0$ — произвольное число, и предположим, что выполнены еще условия:

$$\exists\, \eta_{ij} \in (0,b):\ \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n k_{ij}(\eta_{ij}) < \alpha\, p\, n,\ \sup_{0<x\leqslant b} \frac{1}{x}\left(\sum_{i=1}^n f_i(x)\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} < \infty. \qquad (4)$$

Определим в классе $P_{b,n}$ расстояние ϱ_b, положив

$$\varrho_b(u,v) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sup_{0<x\leqslant b} \frac{|u_i(x) - v_i(x)|}{x^{\frac{1}{\alpha-1}}\, e^{\beta x}},$$

где $u = \{u_i\}_{i=1}^n$, $v = \{v_i\}_{i=1}^n$, а число β определено равенством

$$\beta = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \beta_{ij}, \quad \text{где } \ \beta_{ij} = \frac{1}{p} \sup_{\eta_{ij}\leqslant x\leqslant b} \frac{k_{ij}(x) - p}{x}.$$

Запишем систему (1) в операторном виде: $u = Tu$, где $T = \{T_i\}_{i=1}^n$,

$$(T_i u)(x) = \left(\sum_{j=1}^n \int_0^x k_{ij}(x-t) u_j(t)\, dt + f_i(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 1,\ x > 0,\ i = \overline{1,n}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2)–(4). *Тогда система* (1) *имеет в конусе* $Q_{0,n}$ (*и в* $P_{b,n}$ *при любом* $b > 0$) *единственное решение* u^*. *Это решение может быть найдено в* $P_{b,n}$ *методом последовательных приближений по формуле* $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, *причем справедлива оценка скорости их сходимости*

$$\rho_b(u_n, u^*) \leqslant \frac{\mu^n}{1-\mu}\,\rho_b(Tu_0, u_0), \quad \text{где } \ \mu = (\alpha\, p\, n)^{-1} \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\sum_{j=1}^n k_{ij}(\eta_{ij})\right] < 1,$$

а $u_0 \in P_{b,n}$ *есть произвольная функция* (*начальное приближение*).

В заключение отметим, что в [3] была рассмотрена система однородных уравнений вида (1), а в [4] были изучены системы интегральных уравнений типа свертки с монотонной (не обязательно степенной) нелинейностью.

Литература

1. *Okrasinski W.* Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math.—1989.—Vol. 4, № 2.—P. 51–74.
2. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свертки.—М.: Физматлит, 2009.—304 с.
3. *Асхабов С. Н., Карапетянц Н. К., Якубов А. Я.* Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью и их системы // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 311, № 5.—С. 1035–1039.
4. *Асхабов С. Н.* Применение метода монотонных операторов к некоторым нелинейным сингулярным интегральным уравнениям и их системам в $L_{p,n}(\rho)$.—28 с. Деп. в ВИНИТИ 12.02.1981, № 684-81.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ АВТОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

А. А. Ахматов (Узбекистан, Навои; НавГПИ),
Д. Х. Хусанов (Узбекистан, Навои; НавГПИ),
Ж. И. Буранов (Узбекистан, Ташкент; ТашГТУ)

Классический метод построения передаточной функции широко используется при решении задачи устойчивости линейных стационарных систем. Эффективные критерии устойчивости линейных стационарных систем с постоянным запаздыванием получены в [1]. Заметим, что применение линейных критериев очень сложно из-за трансцендентности характеристического уравнения. В статье [2] с помощью метода функционалов Ляпунова и теории предельных уравнений решена задача об асимптотической устойчивости решений неавтономных систем функционально-дифференциальных уравнений.

Метод функций Ляпунова используется в задачах об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений [3]. В работах [4, 5] получено развитие метода функций Ляпунова для неавтономных систем функционально-дифференциальных уравнений с использованием метода сравнения и теории предельных уравнений.

В настоящем тезисе на основе результатов [4, 5] решается задача об асимптотической устойчивости нелинейной системы автоматического управления с запаздыванием в структуре обратной связи.

Рассмотрим задачу об устойчивости нелинейной системы автоматического управления (см. рис. 1) с запаздыванием в структуре обратной связи. Динамика этой системы описывается следующими уравнениями:

$$\ddot{x}(t) + 2\mu\dot{x}(t) + mx(t) = A\zeta(t), \tag{1}$$

$$\ddot{y}(t) + 2\lambda\dot{y}(t) + ky(t) = \alpha x(t) + \beta u(t), \tag{2}$$

$$\zeta(t) = \sigma z(t), \tag{3}$$

$$z(t) = \gamma y(t) + \varepsilon\delta y^3(t), \tag{4}$$

$$u(t) = B\zeta(t - h(t)), \tag{5}$$

где поведение управляемого объекта описывается уравнением (1); уравнение чувствительного элемента имеет вид (2); динамика двигателя описывается уравнением (3); (4) — уравнение усилителя, а (5) — уравнение дополнительной обратной связи. Здесь величины λ и μ — коэффициенты пропорциональности диссипативных сил; k и m — коэффициенты пропорциональности потенциальных сил.

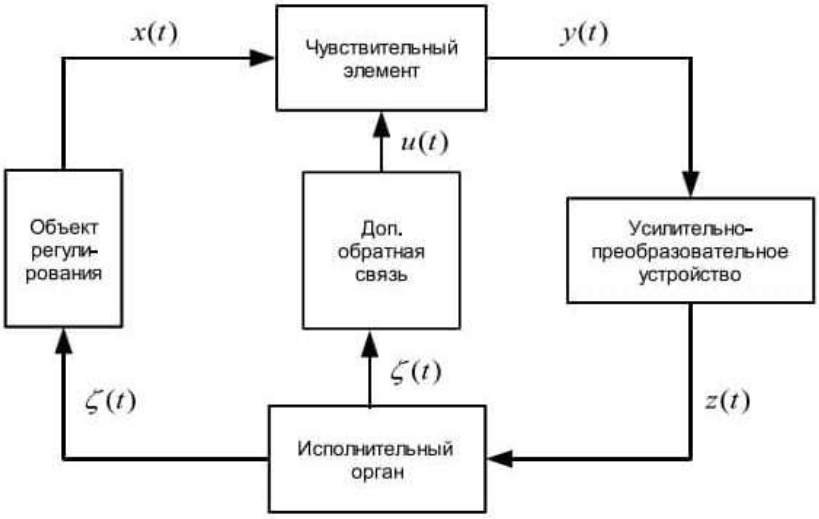


Рис. 1. Структурная схема системы автоматического управления.

Решая задачу, находим следующее условие максимального значения запаздывания в цепи обратной связи, при котором сохраняется свойство равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1)–(5):

$$h_0 \leqslant \frac{1}{2|B\beta\gamma\sigma|\lambda_1}\big(-|\varepsilon\delta B\beta\sigma|\delta_1^2 + \\ + \max\big(k_1 - |\alpha| - B\beta\gamma\sigma, |\alpha| + B\beta\gamma\sigma + 2\lambda_1^2 - k_2\big)\big). \tag{6}$$

Литература

1. *Zevin A. A.* The necessary and sufficient conditions for the stability of linear systems with an arbitrary delay // J. Appl. Math. Mech.—2010.—Vol. 74, № 4.—P. 384–388.
2. *Андреев А. С., Хусанов Д. Х.* К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости // Диф. уравнения.—1998.—Т. 34, № 7.—С. 876–885.
3. *Разумихин Б. С.* Устойчивость эредитарных систем.—М.: Наука, 1988.—106 с.
4. *Андреев А. С., Лысяков В. Н., Хусанов Д. Х.* К методу Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Учен. зап. Ульян. гос. ун-та. Сер. Фундам. проблемы мат. и мех.—Ульяновск, 1996.—Вып. 1(2).—С. 5–10.
5. *Перегудова О. А.* Развитие метода функций Ляпунова в задаче устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Диф. уравнения.—2008.—Т. 44, № 12.—С. 1638–1647.

КВАЗИДВУМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ПАМЯТЬЮ

З. А. Ахматов
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН, СКЦМИ ВНЦ РАН),
Ж. Д. Тотиева
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН, СКЦМИ ВНЦ РАН)

Как известно, учет памяти среды при распространении в ней упругих, акустических и электромагнитных волн дает более точное описание процессов, происходящих в этих средах. Данное исследование ставит целью решить две задачи. Первая задача связана с определением функции (ядра интегрального оператора), описывающей явление памяти среды. Вторая задача — с определением характеристики среды с учетом влияния функции памяти. Исследование базируется на работах [1, 2].

Для $(x, z, t) \in \mathbb{R}^3$, $z > 0$ рассмотрим *прямую задачу* определения функции $u(x, z, t)$ из интегро-дифференциального уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{zz} - q(x, z)u = \int\limits_0^t k(\tau)u(x, z, t - \tau)\, d\tau, \quad z > 0,\ (x, t) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$u\big|_{t<0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=+0} = \delta'(x)\delta'(t), \tag{2}$$

где $\delta'(\cdot)$ — производная дельта-функции Дирака; $q(x, z)$ — коэффициент, характеризующий свойства среды, в которой распространяется волновой процесс; $k(t)$ — ядро, описывающее память среды.

Введем формально параметр малости ε:

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, z, t) + \varepsilon u_1(x, z, t) + O(\varepsilon^2), \\ q(x, z) = q_0(z) + \varepsilon x q_1(z) + O(\varepsilon^2), \end{cases} \tag{3}$$

$q_0(z) \equiv q_0 \equiv \text{const}$ предполагается заданной величиной.

Второе равенство означает слабую зависимость от переменной x.

Подставляя (3) в (1) и (2), получим две задачи.

1. Задача определения $u_0(x, z, t)$ и $k(t)$.

$$(u_0)_{tt} - (u_0)_{xx} - (u_0)_{zz} - q_0 \cdot u_0 = \int\limits_0^t k(\tau)u_0(x, z, t - \tau)\, d\tau, \quad z > 0,\ (x, t) \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

$$u_0\big|_{t<0} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \delta'(x)\delta'(t). \tag{5}$$

Обратная задача 1. Найти $u_0(x,z,t)$ и $k(t)$, входящие в (4)–(5), если относительно преобразования Фурье $F_x[u_0](\nu,z,t)$ для некоторого значения параметра ν известно

$$F_x[u_0](\nu,z,t)\big|_{z=0} = -i\nu\delta(t) + f_0(\nu,t)\theta(t), \quad t\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть $T>0$ фиксировано и выполнены следующие условия: $f_0(\nu,0)=0$, $(f_0)'_z(\nu,0) = -\frac{q_0-\nu^2}{2}$, $f(\nu,t)\in C^2[0,T]$ для некоторого значения параметра ν. Тогда обратная задача (1)–(2), (6) в области $G_T=\{(z,t): 0\leqslant z\leqslant t\leqslant T-z\}$ имеет единственное решение $k(t)\in C[0,T]$.*

2. Задача определения $q_1(z)$, $u_1(z,t)$ при известных u_0 и $k(t)$.

$$(u_1)_{tt} = (u_1)_{zz} + xq_1(z)u_0(x,z,t) + q_0u_1(x,z,t) - \int\limits_0^t k(\tau)u_1(x,z,t-\tau)\,d\tau, \tag{7}$$

$$u_1\big|_{t<0} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0, \quad z>0,\ (x,t)\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

Обратная задача 2. Найти $u_1(x,z,t)$ и $q_1(z)$, входящие в (7)–(8), если относительно преобразования Фурье $F_x[u_1](\nu,z,t)$ для некоторого значения параметра ν известно

$$F_x[u_1](\nu,z,t)\big|_{z=0} = f_1(\nu,t), \quad t>0. \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть $u_0(x,z,t)$ и $k(t)$ являются решениями задачи (4)–(6). Тогда в области G_T существует единственное решение обратной задачи (7)–(9) $q_1(z)\in C[0,T/2]$.*

Задачи (4)–(6), (7)–(9) сводятся к эквивалентным замкнутым нелинейным системам интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Далее проводится дискретизация пространства G_T, и соответствующие интегралы заменяются квадратурными формулами. Расчет неизвестных функций проводится по рекуррентным формулам. Устойчивость проверялась зашумлением данных обратной задачи. Результаты решения этих обратных задачи позволяют учитывать последействие среды при анализе ее характеристик.

Литература

1. *Благовещенский А. С., Федоренко Д. А.* Уравнения акустики в слабо горизонтально-неоднородной среде // Зап. науч. сем. ПОМИ.—2008.—Т. 354.—С. 81–99.
2. *Дурдиев Д. К.* Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегро-дифференциальном волновом уравнении // Сиб. журн. индустр. матем.—2009.—Т. 12, № 3.—С. 28–40.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОРЯДКА ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ

Р. Р. Ашуров (Узбекистан, ИМ АН РУз),
Ю. Э. Файзиев (Узбекистан, Ташкент; НУУз)

В работе исследована обратная задача по определению порядка дробной производной в смысле Герасимова — Капуто в волновом уравнении с произвольным положительным самосопряженным оператором A.

Пусть A — произвольный положительный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Предположим, что A имеет полную в H систему ортонормированных собственных функций $\{v_k\}$ и счетное множество неотрицательных собственных значений λ_k.

Дробная производная в смысле Герасимова — Капуто порядка β, $k-1<\beta\leqslant k$, $k\in\mathbb{N}$, от функции h, заданной на $[0,\infty)$, определяется по формуле (см. например, [1, с. 14; 2])

$$D_t^\beta h(t)=\frac{1}{\Gamma(k-\beta)}\int\limits_0^t\frac{h^{(k)}(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\beta+1-k}},\quad t>0,$$

при условии, что правая часть равенства существует. Здесь $\Gamma(t)$ — гамма функция Эйлера.

Пусть $\beta\in(1,2)$ — заданное число и обозначим через $C((a,b);H)$ множество непрерывных функций $u(t)$ от $t\in(a,b)$ со значением в H. Рассмотрим задачу Коши:

$$D_t^\beta u(t)+Au(t)=f,\quad 0<t\leqslant T, \tag{1}$$

$$u(0)=\varphi,\quad u'(0)=\psi, \tag{2}$$

где f, φ и ψ — заданные вектора из H.

Определение 1. Функцию $u(t)$ со свойствами $u(t),u'(t)\in C([0,T];H)$, $D_t^\beta u(t),Au(t)\in C((0,T];H)$ и удовлетворяющую условиям (1)–(2) будем называть решением задачи Коши (1)–(2).

Обозначим через $E_{\rho,\mu}(t)$ функцию Миттаг-Леффлера, а через h_k — коэффициенты Фурье элемента $h\in H$ по системе собственных функций $\{v_k\}$: $h_k=(h,v_k)$.

Пусть τ — произвольное действительное число. Введем степень оператора A^τ, действующий в H по правилу $A^\tau g=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^\tau g_k v_k$. Очевидно, область определения данного оператора имеет вид

$$D(A^\tau)=\left\{g\in H:\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^{2\tau}\,|g_k|^2<\infty\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\psi, f \in H$ *и* $\varphi \in D\big(A^{\frac{1}{\beta}}\big)$. *Тогда решение задачи Коши единственно и имеет вид*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\varphi_k E_{\beta,1}\big(-\lambda_k t^{\beta}\big) + \psi_k t E_{\beta,2}\big(-\lambda_k t^{\beta}\big) + f_k t^{\beta} E_{\beta,\beta+1}\big(-\lambda_k t^{\beta}\big)\Big] v_k, \quad (3)$$

где ряд сходится в H *при* $t \geqslant 0$.

Пусть теперь $\beta \in (1,2)$ — неизвестный параметр. Основной целью данной работы является исследование обратной задачи по определению этого параметра. Естественно, для определения β необходимо задавать дополнительное условие. В настоящей работе в качестве дополнительного возьмем условие в виде

$$U(\beta; t_0) \equiv (u(t_0), v_{k_0}) = d_0, \quad t_0 \geqslant T_0, \quad (4)$$

где d_0 — заданное число, T_0 — положительное число, которое определено ниже, и $k_0 \geqslant 1$ — произвольное целое такое, что $f_{k_0}^2 + \varphi_{k_0}^2 + \psi_{k_0}^2 \neq 0$ (очевидно, такие числа существуют, так как f, φ и ψ не являются одновременно нулями).

При решение обратной задачи будем считать, что $1 < \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2 < 2$, где β_1 и β_2 — произвольные заданные числа из соответствующих интервалов.

Для того, чтобы уравнение (4) относительно β имело решение, очевидно, что число d_0 не может задаваться произвольным образом. Необходимым условием разрешимости уравнения (4) является выполнение следующего включения:

$$d_0 \in \Big[\min_{\beta\in[\beta_1,\beta_2]} U(\beta; t_0), \max_{\beta\in[\beta_1,\beta_2]} U(\beta; t_0)\Big]. \quad (5)$$

Задачу (1)–(2) вместе с дополнительным условием (4) будем называть *обратной задачей*.

Определение 2. Если $u(t)$ является решением задачи (1)–(2), удовлетворяющее условие (4), то пару $\{u(x,t), \beta\}$, $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$, будем называть решением обратной задачи.

Лемма 1. *Пусть*

$$\psi, f \in H; \quad \varphi \in D\big(A^{\frac{1}{\beta_1}}\big) \quad (6)$$

и

$$\|\psi\| + \big\|\varphi - A^{-1} f\big\| \neq 0. \quad (7)$$

Тогда найдется число $T_0 = T_0(k_0)$ *такое, что при* $t_0 \geqslant T_0$ *функция* $U(\beta; t_0)$ *является строго монотонной по* $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$.

Из этой леммы очевидным образом вытекает следующий основной результат данной работы.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (6) *и* (7). *Тогда при* $t_0 \geqslant T_0$ *решение обратной задачи существует и оно единственно.*

Литература

1. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка.—М.: Наука, 2005.
2. *Новоженова О.* Биография и научные труды Алексея Никифоровича Герасимова. О линейных операторов, упруго-вязкости, элефтерозе и дробных производных.—М.: Перо, 2018.

О СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА — ФОЙГТА С НЕОДНОРОДНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

Е. С. Барановский
(Россия, Воронеж; ВГУ)

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнений Навье — Стокса — Фойгта, моделирующих неустановившееся течение несжимаемой вязкоупругой жидкости:

$$\mathbb{P}\,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{3} u_i\,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right] - \nu\mathbb{P}\Delta\boldsymbol{u} - \alpha\,\mathbb{P}\,\frac{\partial(\Delta\boldsymbol{u})}{\partial t} = \mathbb{P}\boldsymbol{f} \ \text{ в } \ \Omega\times(0,T), \tag{1}$$

$$\nabla\boldsymbol{u} = 0 \ \text{ в } \ \Omega\times(0,T), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varphi} \ \text{ на } \ \partial\Omega\times(0,T), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}\big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0 \ \text{ в } \ \Omega, \tag{4}$$

где Ω — ограниченная трехмерная область с границей $\partial\Omega\in\mathscr{C}^2$; $(0,T)$ — заданный промежуток времени; $\boldsymbol{u}$ — скорость течения жидкости; $\boldsymbol{f}$ — поле внешних сил; $\mathbb{P}$ — проектор Лерэ; α и ν — материальные константы, $\alpha>0$ и $\nu>0$. Символы ∇ и Δ обозначают градиент и лапласиан по пространственным переменным x_1, x_2, x_3.

Предположим, что

$$\int\limits_{\partial\Omega}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{n}\,dS = 0, \quad \boldsymbol{u}_0\big|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi}(0), \tag{5}$$

где $\mathbf{n}=\mathbf{n}(\boldsymbol{x})$ — внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$ в точке $\boldsymbol{x}$.

Введем следующие пространства:

$$\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \big\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^2(\Omega)\colon\ \nabla\boldsymbol{v}=0 \text{ в } \Omega\big\},$$

$$\dot{\boldsymbol{H}}^{3/2}(\partial\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{H}^{3/2}(\partial\Omega) : \int\limits_{\partial\Omega}\boldsymbol{\omega}\mathbf{n}\,dS = 0\right\}.$$

Определение. *Сильным решением* задачи (1)–(4) будем называть вектор-функцию $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega))$ такую, что $\gamma_0\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0$ и

$$\mathbb{P}\boldsymbol{u}' + \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{3} u_i\,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right] - \nu\mathbb{P}\Delta\boldsymbol{u} - \alpha\,\mathbb{P}\Delta\boldsymbol{u}' = \mathbb{P}\boldsymbol{f}, \quad t\in(0,T),$$

где γ_0 — оператор следа на $\partial\Omega$ и $\boldsymbol{u}'$ — производная вектор-функции $\boldsymbol{u}$ по t.

Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема. *Пусть выполнены условия согласования* (5) *и имеют место следующие включения:*

$$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}\bigl([0,T];\boldsymbol{L}^2(\Omega)\bigr), \quad \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}^1\bigl([0,T];\dot{\boldsymbol{H}}^{3/2}(\partial\Omega)\bigr), \quad \boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega).$$

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что если*

$$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C}([0,T];\boldsymbol{L}^2(\Omega))} + \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^{3/2}(\partial\Omega))} + \|\boldsymbol{u}_0\|_{\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega)} \leqslant \varepsilon_0,$$

то начально-краевая задача (1)–(4) *имеет единственное сильное решение* $\boldsymbol{u}$ *в некоторой открытой окрестности* $\boldsymbol{U}$ *точки* $\mathbf{0}$ *в пространстве* $\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega))$.

Замечание. Данная работа является продолжением статьи [1], в которой установлена глобальная разрешимость (в классе сильных решений) уравнений Навье — Стокса — Фойгта в ограниченной области при краевом условии прилипания $\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$.

Литература

1. *Baranovskii E. S.* Strong solutions of the incompressible Navier–Stokes–Voigt model // Mathematics.—2020.—Vol. 8.—Article ID 181. DOI: 10.3390/math8020181.

AN INVERSE PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION ASSOCIATED WITH THE JACOBI OPERATOR[1]

B. Bekbolat
(Kazakhstan, Almaty, KazNU; Kaskelen, SDU; Belgium, Ghent, Ghent University)
N. Tokmagambetov
(Kazakhstan, Almaty, KazNU, IMMM; Belgium, Ghent, Ghent University)

In this work we consider an inverse problem for the Heat equation associated with the Jacobi operator

$$\Delta_{\alpha,\beta} = A^{-1}_{\alpha,\beta}(t)\,\frac{d}{dt}\left(A_{\alpha,\beta}(t)\,\frac{d}{dt}\right), \quad t \in (0,+\infty), \tag{1}$$

where $A_{\alpha,\beta}(t) = 2^{2\rho}(\sinh(t))^{2\alpha+1}(\cosh(t))^{2\beta+1}$, $\rho = \alpha+\beta+1$, with $\alpha \geqslant -1/2$ and $\beta \in \mathbb{R}$. We can rewrite the expression (1) in the form

$$\Delta_{\alpha,\beta} = \frac{d^2}{dt^2} + g(t)\,\frac{d}{dt},$$

where $g(t) = (2\alpha+1)\coth(t) + (2\beta+1)\tanh(t)$. The singular points for $\Delta_{\alpha,\beta}$ are 0 and $+\infty$. $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 2\alpha+2\beta+2 = 2\rho$. The spectral decomposition of the Jacobi operator was considered by M. Flensted-Jensen in 1972 [1].

References

1. *Flensted-Jensen M.* Paley-Wiener type theorems for a differential operator connected with symmetric spaces // Ark. Mat.—1972.—Vol. 10.—P. 143–162.

[1]This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, grant № AP08052028.

МЕТОД СУММАРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА[1]

М. Х. Бештоков

(Россия, Нальчик; ИПМА КБНЦ РАН)

1. Постановка задачи. В замкнутой области $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant 1]$, основанием которой является p-мерный квадрат $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : 0 \leqslant x_\alpha \leqslant 1, \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, рассмотрим задачу Дирихле для многомерного дифференциального уравнения Соболевского типа с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \mu \frac{\partial}{\partial t} Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u\big|_\Gamma = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x,t)u(x,t),$$

$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x,t), \quad q_\alpha(x,t) \leqslant c_1, \quad k_\alpha(x,t) \in C^{3,1}\left(\overline{Q}_T\right),$$

$$q_\alpha(x,t), f(x,t) \in C^{2,1}\left(\overline{Q}_T\right), \quad c_0, c_1, c_2, \mu = \text{const} > 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям, обеспечивающим нужную гладкость решения $u(x,t)$ в цилиндре $\overline{Q}_T$.

Преобразуем уравнение (1). Тогда, умножая обе части (1) на $\frac{1}{\mu} e^{\frac{1}{\mu}t}$ и интегрируя полученное выражение по τ от 0 до t, получим задачу

$$Lu + \frac{1}{\mu^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{\mu}(t-\tau)} u(x,t)\, d\tau - \frac{1}{\mu}\, u + \tilde{f}(x,t) = 0, \tag{4}$$

где

$$\widetilde{f}(x,t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t e^{-\frac{1}{\mu}(t-\tau)} f(x,\tau)\, d\tau - e^{-\frac{1}{\mu}t}\left(Lu_0(x) - \frac{1}{\mu}\, u_0(x)\right).$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Государственного фонда естественных наук Китая в рамках научного проекта № 20-51-53007.

В той же области вместо уравнения (4) рассмотрим следующее уравнение с малым параметром ε:

$$\varepsilon u_t^\varepsilon = Lu^\varepsilon + \frac{1}{\mu^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\mu}(t-\tau)}u^\varepsilon\,d\tau - \frac{1}{\mu}\,u^\varepsilon + \tilde{f}(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \tag{5}$$

где $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$.

Так как при $t=0$ начальные условия для уравнения (4) и (5) совпадают, то в окрестности $t=0$ у производной u_t^ε не возникает особенности типа пограничного слоя [1].

2. Локально-одномерная схема. На отрезке $[0,T]$ введем равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0,1,\dots,j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$. Каждый интервал (t_j, t_{j+1}) разобьем на p частей точками $t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \tau\frac{\alpha}{p}$, $\alpha = 1,2,\dots,p$, и обозначим через $\Delta_\alpha = \left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$.

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha = 1/N_\alpha$, $\alpha = 1,2,\dots,p$:

$$\omega_h = \prod_{\alpha=1}^{p}\omega_{h_\alpha}, \quad \omega_{h_\alpha} = \left\{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha :\, i_\alpha = 1,\dots,N_\alpha - 1,\, \alpha = 1,2,\dots,p\right\}.$$

На каждом полуинтервале Δ_α, $\alpha = 1,2,\dots,p$, будем последовательно решать цепочку p-одномерных двухслойных неявных разностных уравнений:

$$\begin{gathered}\varepsilon\,\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \\ + \frac{1}{p\mu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\mu}(t_j - t_{j'})}y\big(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\big)\,\tau - \frac{1}{p\mu}\,y\big(x, t^{j+\frac{\alpha}{p}}\big) + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}},\end{gathered} \tag{6}$$

$$y^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big|_{\gamma_{h,\alpha}} = 0, \quad y(x,0) = u_0(x), \tag{7}$$

где

$$\Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)_{x_\alpha} - d_\alpha y\big(x, t^{j+\frac{\alpha}{p}}\big), \quad a_\alpha = k_\alpha\big(x^{(-0.5\alpha)}, \bar{t}\,\big),$$

$$x^{(-0.5\alpha)} = (x_1,\dots,x_{\alpha-1}, x_\alpha - 0.5h_\alpha, x_{\alpha+1},\dots,x_p), \quad d_\alpha = q_\alpha(x,\bar{t}\,), \quad \bar{t} = t^{j+\frac{1}{2}},$$

$\gamma_{h,\alpha}$ — множество граничных по направлению x_α узлов.

Теорема. *Пусть задача (5), (2), (3) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x,t)$ при всех ε и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1,2,\dots,p,\ \alpha \neq \beta.$$

Тогда локально-одномерная схема (6), (7) сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(3) со скоростью $O\big(|h|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon} + \varepsilon\big)$, $\tau = o(\varepsilon)$, для всех $\mu \geqslant 1/2$, так что

$$\left\|y^{j+1} - u^{j+1}\right\|_1 \leqslant M\left(|h|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon} + \varepsilon\right),$$

где ε *— малый параметр,* $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2$,

$$\left\|z^{j+1}\right\|_1 = \left(\varepsilon\left\|z^{j+1}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left\|z_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} + \left\|z^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Литература

1. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы.—М.: Наука, 1977.—440 с.
2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656 с.
3. *Beshtokov M. Kh.* The first boundary value problem for a multidimensional pseudo-parabolic equation of the third order in a domain with an arbitrary boundary // Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences — Proceedings / Eds. Tarasyev A., Maksimov V., Filip-pova T.—Cham: Springer, 2020.—P. 169–187.

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА[1]

З. В. Бештокова

(Россия, Нальчик; ИПМА КБНЦ РАН)

1. Постановка задачи. В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0,T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1,2,\ldots,p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u\big|_\Gamma = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\left(x^0,t\right) - q_\alpha(x,t)u,$$

$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x,t) \leqslant c_1, \quad |k_{x_\alpha}(x,t)|,\ |r_\alpha(x,t)|,\ |r_{x_\alpha}(x,t)|,\ |q_\alpha(x,t)| \leqslant c_2,$$

$$k_\alpha(x,t) \in C^{3,1}(Q_T), \quad r_\alpha(x,t), q_\alpha(x,t) \in C^{2,1}(Q_T), \quad \alpha = 1,2,\ldots,p,$$

где $C^{m,n}$ — класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка m по x и n по t, $x^0 = (x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha-1}, x_\alpha^0, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p)$, x_α^0 — фиксированная точка интервала $(0, l_\alpha)$, $Q_T = G \times (0 < t \leqslant T]$, c_0, c_1, c_2 — положительные постоянные.

2. Локально-одномерная схема. Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$, $\alpha = 1,2,\ldots,p$:

$$\omega_h = \prod_{\alpha=1}^{p} \omega_{h_\alpha}, \quad \omega_{h_\alpha} = \left\{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha :\ i_\alpha = 1,\ldots,N_\alpha - 1,\ \alpha = 1,2,\ldots,p\right\}.$$

На отрезке $[0,T]$ введем равномерную сетку

$$\overline{\omega}_\tau = \left\{t_j = j\tau,\ j = 0,1,\ldots,j_0\right\}$$

с шагом $\tau = T/j_0$.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Государственного фонда естественных наук Китая в рамках научного проекта № 20-51-53007.

Каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на p частей, введя точки $t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \tau\frac{\alpha}{p}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p-1$, и обозначим через $\Delta_\alpha = \left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$ полуинтервал, где $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

Тогда на каждом полуинтервале Δ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, будем последовательно решать цепочку p одномерных разностных уравнений:

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{4}$$

$$\begin{cases} y^{j+\frac{\alpha}{p}} = 0, & x_\alpha = 0, \\ y^{j+\frac{\alpha}{p}} = 0, & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \tag{5}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \tag{6}$$

$$\Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)_{x_\alpha} + b_\alpha \left(y_{\mathring{x}_\alpha, i_\alpha^0}^{j+\frac{\alpha}{p}} \frac{x_\alpha^{i_\alpha^0+1} - x_\alpha^0}{h_\alpha} + y_{\mathring{x}_\alpha, i_\alpha^0+1}^{j+\frac{\alpha}{p}} \frac{x_\alpha^0 - x_\alpha^{i_\alpha^0}}{h_\alpha} \right) - d_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}.$$

Отметим, что используемое нами выражение

$$y_{\mathring{x}_\alpha, i_\alpha^0}^{j+\frac{\alpha}{p}} \frac{x_\alpha^{i_\alpha^0+1} - x_\alpha^0}{h_\alpha} + y_{\mathring{x}_\alpha, i_\alpha^0+1}^{j+\frac{\alpha}{p}} \frac{x_\alpha^0 - x_\alpha^{i_\alpha^0}}{h_\alpha}$$

для аппроксимации $u_x(x^0, t)$, было ранее введено в работах [1, 2] для аппроксимации нагруженной части в одномерной случае, а в [3] — в многомерном случае для аппроксимации $u(x^0, t)$.

Теорема. *Пусть задача* (1)–(3) *имеет единственное непрерывное в* $\overline{Q}_T$ *решение* $u(x, t)$ *и существуют непрерывные в* $\overline{Q}_T$ *производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \ \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \ \alpha \neq \beta.$$

Тогда локально-одномерная схема (4)–(6) *сходится к решению дифференциальной задачи* (1)–(3) *со скоростью* $O(|h|^2 + \tau)$ (*имеет второй порядок точности по* h *и первый порядок точности по* τ), *так что*

$$\left\|y^{j+1} - u^{j+1}\right\|_1 \leqslant M\left(|h|^2 + \tau\right),$$

где

$$\left\|z^{j+1}\right\|_1 = \left(\left\|z^{j+1}\right\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\| z_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2.$$

Литература

1. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Нелокальная краевая задача второго рода для оператора Штурма — Лиувилля // Диф. уравнения.—1987.—Т. 23, № 8.—С. 1422–1431.
2. *Алиханов А. А., Березгов А. М., Шхануков-Лафишев М. Х.* Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Журн. вычислит. матем. и мат. физ.—2008.—Т. 48, № 9.—С. 1619–1628.
3. *Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная схема для нагруженного уравнения теплопроводности с краевыми условиями III рода // Журн. вычислит. матем. и мат. физ.—2009.—Т. 49, № 7.—С. 1223–1231.
4. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656 с.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

СПЕКТРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРАФАХ С МАЛЫМИ РЕБРАМИ[1]

Д. И. Борисов
(Россия, Уфа; ИМВЦ УФИЦ РАН)

Рассматривается произвольный метрический граф, к которому приклеивается произвольный граф с малыми ребрами. Длины малых ребер пропорциональны малому положительному параметру ε. На таком графе рассматривается самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка. Соответствующее дифференциальное выражение имеет общий вид с произвольными переменными коэффициентами и общими матричными краевыми условиями в вершинах. Все коэффициенты также могут зависеть от параметра ε, причем коэффициенты в краевых условиях и коэффициенты дифференциального выражения на ребрах конечной длины — голоморфны по ε, а коэффициенты дифференциального выражения на малых ребрах — меромофрны по ε.

Мы определяем специальный оператор на определенном графе, полученном растяжением упомянутых выше малых ребер до конечного размера и предполагаем, что такой оператор не имеет вложенных собственных значений на краю существенного спектра. Известно, что при таком операторе резольвента исходного возмущенного оператора голоморфна по параметру ε в определенном смысле и сходится к резольвенте некоторого предельного оператора. Основной результат настоящей работы состоит в следующем. Показана сходимость спектра возмущенного оператора к спектру предельного, получены оценки скорости сходимости. Также показана сходимость соответствующих спектральных проекторов. Доказано, что собственные значения возмущенного оператора, сходящиеся к предельным дискретным собственным значениям, голоморфны по ε. Аналогичное свойство доказано и для соответствующих собственных функций. Предложен алгоритм, являющийся адаптацией метода согласования асимптотических разложений, который позволяет рекуррентно определять все коэффициенты в рядах Тейлора для данных голоморфных собственных значений и собственных функций.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект №20-11-19995.

О ДИСКРЕТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

В. Б. Васильев (Россия, Белгород; НИУ «БелГУ»),
А. А. Ходырева (Россия, Белгород; НИУ «БелГУ»)

В этой работе рассматривается дискретные псевдодифференциальные уравнения в дискретном угле на плоскости. Используя методы, развитые в [1], описывается картина разрешимости дискретного псевдодифференциального уравнения и дается сравнение между дискретными и непрерывными решениями в некоторых модельных ситуациях.

Пусть $\mathbb{Z}^2$ — целочисленная решетка на плоскости. Обозначим $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$ первый квадрант на плоскости, $K_d = h\mathbb{Z}^2 \cap K$, $h > 0$, $\hbar = h^{-1}$, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$. Вводим пространство функций $H^s(K_d)$ дискретного аргумента $u_d(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$, которое представляет собой дискретный аналог пространства $H^s(K)$ [1].

Если $A_d(\xi)$ — измеримая периодическая функция в $\mathbb{R}^2$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$, мы называем ее символом.

Определение 1. Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $A_d(\xi)$ в дискретном квадранте K_d называется оператор следующего вида:

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} \hbar^2 \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} A_d(\xi)\, e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\xi}\, \tilde{u}_d(\xi)\, d\xi, \quad \tilde{x} \in K_d.$$

Говорят, что оператор A_d — эллиптический, если

$$\operatorname{ess} \inf_{\xi \in \hbar\mathbb{T}^2} |A_d(\xi)| > 0.$$

Положим

$$\zeta = \hbar^2\big((e^{-ih\xi_1} - 1)^2 + (e^{-ih\xi_2} - 1)^2\big).$$

Мы работаем с классом символов, удовлетворяющих условию

$$c_1\big(1 + |\zeta^2|\big)^{\frac{\alpha}{2}} \leqslant |A_d(\xi)| \leqslant c_2\big(1 + |\zeta^2|\big)^{\frac{\alpha}{2}}$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h, и называем число $\alpha \in \mathbb{R}$ порядком псевдодифференциального оператора A_d. Исследуется разрешимость модельного дискретного псевдодифференциального уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in K_d. \tag{1}$$

Отметим, что в случае многомерного дискретного полупространства вопросы разрешимости уравнения (1) и сравнения дискретных и непрерывных решений рассмотрены в [2, 3].

Нам понадобится некоторые области комплексного пространства $\mathbb{C}^2$. Область вида $\mathscr{T}_h(K) = \hbar\mathbb{T}^2 + iK$ мы назовем трубчатой областью над квадрантом K, и будем рассматривать аналитические функции $f(x + i\tau)$ в $\mathscr{T}_h(K) = \hbar\mathbb{T}^2 + iK$, считая их вещественно-периодическими, определенными для почти всех значений x.

Определение 2. Периодической волновой факторизацией эллиптического символа $A_d(\xi)$ называется его представление в виде

$$A_d(\xi) = A_{d,\neq}(\xi)A_{d,=}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\neq}(\xi)$, $A_{d,=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в трубчатые области $\mathscr{T}_h(K)$, $\mathscr{T}_h(-K)$ соответственно и удовлетворяют оценкам

$$c_1\big(1 + \big|\hat{\zeta}^2\big|\big)^{\frac{æ}{2}} \leqslant \big|A_{d,\neq}(\xi + i\tau)\big| \leqslant c_1'\big(1 + \big|\hat{\zeta}^2\big|\big)^{\frac{æ}{2}},$$

$$c_2\big(1 + \big|\hat{\zeta}^2\big|\big)^{\frac{\alpha-æ}{2}} \leqslant \big|A_{d,=}(\xi - i\tau)\big| \leqslant c_2'\big(1 + \big|\hat{\zeta}^2\big|\big)^{\frac{\alpha-æ}{2}},$$

с постоянными c_1, c_1', c_2, c_2', не зависящими от h, где

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2\big((e^{-ih(\xi_1+i\tau_1)} - 1)^2 + (e^{-ih(\xi_2+i\tau_2)} - 1)^2\big),\ \ \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \hbar\mathbb{T}^2,\ \ \tau - (\tau_1, \tau_2) \in K.$$

Число $æ \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической волновой факторизации.

Утверждение. *При наличии периодической волновой факторизации символа с индексом* æ *таким, что* $|æ - s| < 1/2$, *уравнение* (1) *однозначно разрешимо в пространстве* $H^s(K_d)$ *при любой правой части* $v_d \in H^{s-\alpha}(K_d)$.

В случае $æ - s = n + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$, имеет место неединственность решения, однако можно выписать формулу для общего решения уравнения (1). Для выделения единственного решения приходится задавать дополнительные условия, которые приводят к соответствующей дискретной краевой задаче.

Литература

1. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи.—М.: УРСС, 2010.—135 с.
2. *Васильев В. Б.* Операторы и уравнения: дискретное и непрерывное // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.—2019.—Т. 160.—С. 18–27.
3. *Васильев В. Б., Тарасова О. А.* О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.—2020.—Т. 174.—С. 12–19.

О ЯДРЕ ЛОКАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОМПЕЙЮ

Н. П. Волчкова (Донецк; ДонНТУ),
Вит. В. Волчков (Донецк; ДонНУ),
Н. А. Ищенко (Донецк; ДонНУ)

Пусть K — компактное множество положительной лебеговой меры в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\mathrm{M}(n)$ — группа движений $\mathbb{R}^n$. Классическое преобразование Помпейю, связанное с компактом K, определяется равенством

$$\mathscr{P}_K(f)(g) = \int\limits_{gK} f(x)\,dx, \quad f \in C(\mathbb{R}^n),\ g \in \mathrm{M}(n).$$

Во многих работах изучались вопросы, связанные с инъективностью и обращением преобразования $\mathscr{P}_K$, а также различные его аналоги (см. [1–3]).

В данной работе изучается локальное преобразование Помпейю, ассоциированное с единичным шаром на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ со сферической метрикой. Найдено точное условие, при котором функции из ядра указанного преобразования принадлежат ядру соответствующего глобального преобразования Помпейю на пространстве Мебиуса $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Мебиусово преобразование, действующее в $\overline{\mathbb{R}}^n$, есть суперпозиция конечного числа отражений (относительно сфер и плоскостей). Множество всех мебиусовых преобразований $\overline{\mathbb{R}}^n$ образует группу по умножению, которая называется общей мебиусовой группой и обозначается $\mathrm{GM}\big(\overline{\mathbb{R}}^n\big)$. Для любого $a \in \mathbb{R}^n$ определим мебиусово преобразование $\mathscr{T}_a \in \mathrm{GM}\big(\overline{\mathbb{R}}^n\big)$ по формуле

$$\mathscr{T}_a(x) = a - \big(1 + |a|^2\big)\big(x^* + a\big)^*, \quad x^* = \frac{x}{|x|^2}.$$

Пусть $\mathscr{P}$ — множество в $\mathrm{GM}\big(\overline{\mathbb{R}}^n\big)$, состоящее из всех отображений $\mathscr{T}_a$, инверсии $x \to x^*$ и ортогональных преобразований $\tau \in \mathrm{O}(n)$. Обозначим через G подгруппу в $\mathrm{GM}\big(\overline{\mathbb{R}}^n\big)$, порожденную множеством $\mathscr{P} \subset \mathrm{GM}\big(\overline{\mathbb{R}}^n\big)$.

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывна на $\mathbb{R}^n$,*

$$f(x) = o\left(\frac{1}{|x|^{n-1}}\right) \quad \textit{при} \quad x \to \infty \tag{1}$$

и

$$\int\limits_{g(B)} f(x)\,dx = 0 \quad \textit{для любого} \quad g \in G:\ g(B) \subset \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Тогда

$$\int\limits_{g(B)} f(x)\,dx = 0 \quad \textit{для всех} \quad g \in G. \tag{3}$$

Теорема 2. *Существует функция $f \in C(\mathbb{R}^n)$ со следующими свойствами:*
1) *функция f удовлетворяет условию* (2);
2) *при $x \to \infty$*

$$f(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-1}}\right);$$

3) *для некоторого $g \in G$ интеграл в* (3) *расходится.*

Отметим, что утверждение теоремы 2 показывает, что условие (1) в теореме 1 близко к окончательному.

Литература

1. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.—454 p.
2. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group.—London: Springer, 2009.—672 p.
3. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces.—Basel: Birkhäuser, 2013.—592 p.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

С. З. Джамалов (Узбекиан, Ташкент; ИМ АН РУз),
Р. Р. Ашуров (Узбекиан, Ташкент; ИМ АН РУз),
Х. Ш. Туракулов (Узбекистан, Ташкент; ИМ АН РУз)

Как известно, в работе А. В. Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна [1]. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работе Ф. И. Франкля при решении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения [2]. Близкие по постановке задачи для уравнения Чаплыгина были исследованы в ограниченных областях в работах [3–7]. В данной работе с использованием результатов работ [6, 7] изучается однозначная разрешимость обобщенного решения одной нелокальной краевой задачи периодического типа для трехмерного уравнения Чаплыгина в призматической неограниченной области.

В области

$$Q = (-\alpha,\beta)\times(0,T)\times\mathbb{R} = Q_1\times\mathbb{R} = \left\{(x,t,z); x\in(-\alpha,\beta), 0<t<T<+\infty, z\in\mathbb{R}\right\}$$

рассмотрим уравнение Чаплыгина

$$Lu = K(x)u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t,z), \tag{1}$$

где $xK(x) > 0$ при $x \neq 0$, $-\alpha < x < \beta$, $\Delta u = u_{xx}+u_{zz}$ — оператор Лапласа. Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области Q.

Нелокальная краевая задача периодического типа. Найти обобщенное решение $u(x,t,z)$ уравнения (1) из пространства $W_2^{2,3}(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\gamma D_t^p u\big|_{t=0} = D_t^p u\big|_{t=T}, \tag{2}$$

$$D_x^p u\big|_{x=-\alpha} = D_x^p u\big|_{x=\beta} \tag{3}$$

при $p = 0, 1$, где $D_y^p u = \frac{\partial^p u}{\partial y^p}$ $D_y^0 u = u$, γ —некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже.

Определение. Обобщенным решением задачи (1)–(3) будем называть функцию $u(x,t,z) \in W_2^{2,3}(Q)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (1) с условиями (2)–(3).

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения* (1) : $2a(x,t)+\mu K(x) > \delta_1 > 0$, $\mu c(x,t) - c_t(x,t) > \delta_2 > 0$ *для всех* $(x,t) \in \overline{Q_1}$, *где* $\mu = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ *при* $|\gamma| > 1$, $a(x,0) = a(x,T)$, $c(x,0) = c(x,T)$. *Тогда для любой функции* $f \in W_2^{1,3}(Q)$ *такой, что* $\gamma\, f(x,0,z) = f(x,T,z)$, *существует единственное обобщенное решение задачи* (1)–(3) *из пространства* $W_2^{2,3}(Q)$ *и для нее справедливы следующие оценки:*

1) $\|u\|^2_{W_2^{1,3}(Q)} \leqslant c_1 \|f\|^2_{W_2^{0,3}(Q)}$,

2) $\|u\|^2_{W_2^{2,3}(Q)} \leqslant c_2 \|f\|^2_{W_2^{1,3}(Q)}$,

где c_i *— положительные, вообще говоря, разные постоянные числа, отличные от нуля.*

Здесь через $W_2^{l,s}(Q)$ обозначено гильбертово пространство с нормой

$$\left\|u\right\|^2_{W_2^{l,s}(Q)} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(1+|\lambda|^2\right)^s \left\|\hat{u}(x,t,\lambda)\right\|^2_{W_2^l(Q_1)} d\lambda, \qquad (A)$$

где $W_2^l(Q_1)$ — пространство Соболева, s, l — любые конечные положительные целые числа, а норма в пространстве Соболева $W_2^l(Q_1)$ определяется следующим образом:

$$\left\|\vartheta\right\|^2_{W_2^l(Q_1)} = \sum_{|\alpha|\leqslant l} \int\limits_{Q_1} \left|D^\alpha \vartheta\right|^2 dxdt,$$

α — это мультииндекс, D^α есть обобщенная производная по переменным x и t, а через

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z) e^{-i\lambda z}\, dz$$

обозначено преобразование Фурье по переменным z функции $u(x,t,z)$.

Замечание. Результат справедлив для многомерного уравнения Чаплыгина.

Литература

1. *Бицадзе А. В.* Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР.—1953.—Т. 122, № 2.—С. 167–170.
2. *Франкль Ф. И.* Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // Прикл. матем. и мех.—1956.—Т. 20, № 2.—С. 196–202.
3. *Кальменов Т. Ш.* О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа // Диф. уравнения.—1978.—Т. 14, № 3.—С. 546–548.
4. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН.—2007.—Т. 413, № 1.—С. 23–26.
5. *Цыбиков Б. Н.* О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа // Неклассические уравнения математической физики.—Новосибирск, 1986.—С. 201–206.
6. *Джамалов С. З.* Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа первого рода // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки.—2017.—Т.21, № 4.—С. 1–14.
7. *Джамалов С. З., Ашуров Р. Р.* О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве // Казахский мат. журн.—2015.—Т. 18, № 2.—С. 59–70.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

О НЕКОТОРЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АСПЕКТАХ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ[1]

В. В. Дударев
(Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН; Ростов-на-Дону, ЮФУ),
Р. М. Мнухин
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Акустический метод позволяет проводить оценку переменных свойств объектов, изготовленных из функционально-градиентных материалов. Свойства таких материалов обычно изменяются по пространственным координатам. В работе на основе общей постановки для неоднородного изотропного тела рассмотрены задачи об установившихся продольно-радиальных и крутильных колебаниях полого цилиндра, а также о продольных и изгибных колебаниях стержня.

В задачах для цилиндра параметры Ламе и плотность являются переменными по радиальной координате. Решение прямой задачи о продольно-радиальных колебаниях реализовано с помощью метода разделения переменных, а также с использованием МКЭ. Изучена чувствительность амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) к изменению параметров Ламе и плотности. Рассмотрена обратная коэффициентная задача об определении законов изменения свойств цилиндра по данным об АЧХ, заданных на внешней границе в различных частотных диапазонах. Решение системы интегральных уравнений Фредгольма (ИУФ) 1-го рода с гладкими ядрами относительно неизвестных функций поправок реализовано методом регуляризации Тихонова с использованием трехэтапного итерационного процесса. Проведен анализ ядер ИУФ 1-го рода, представлены примеры реконструкции монотонных законов.

Аналогично исследованы задачи о продольных и изгибных колебаниях стержня. Его свойства характеризуются модулем Юнга и плотностью, изменяющимися вдоль продольной координаты. Постановки прямых задач представлены каноническими системами дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами, решение которых реализовано численно. Обратная коэффициентная задача о восстановлении законов изменения модуля Юнга и плотности сведена к решению системы двух ИУФ 1-го рода. Проведена серия вычислительных экспериментов по реконструкции функций различного вида. Для всех рассмотренных задач даны рекомендации по осуществлению наиболее точной процедуры реконструкции.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Российской Федерации, соглашение № 075-15-2019-1928.

A MULTI-DIMENSIONAL DIFFUSION COEFFICIENT DETERMINATION PROBLEM FOR THE TIME-FRACTIONAL EQUATION

D. K. Durdiev (Uzbekistan, Bukhara; Bukhara Branch IM AS RUz),
A. A. Rahmonov (Uzbekistan, Bukhara; BukhSU)

In this paper, we consider a multi-dimensional inverse problem for a fractional diffusion equation. The inverse problem is reduced to the equivalent integral equation. For solving this equation the Schauder principle is applied. The local existence and uniqueness results are obtained.

Consider the $n \geqslant 2$ — dimensional fractional diffusion equation defined by

$$\left({}^C\mathscr{D}_t^\alpha u\right)(x,t) - \Delta u + q(x)u = f(x,t) \ \text{ in } \ \mathbb{R}_T^n, \tag{1}$$

where $({}^C\mathscr{D}_t^\alpha u)(x,t)$, $0 < \alpha < 1$, is the Gerasimov–Caputo fractional derivative, defined by

$$\left({}^C\mathscr{D}_t^\alpha u\right)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\, d\tau,$$

Δ — Laplacian respect to the variable $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbb{R}_T^n = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leqslant T\}$ and $f(x,t)$ is given function.

It is natural from the physical point of view to consider a usual Cauchy problem, with the initial condition

$$u(x,0) = \Phi(x) \ \text{ on } \ \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

where $\Phi(x)$ is given.

Our main problem is formulated as follows:

Inverse problem. *Find the function $q(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, in (1), if the solution to Cauchy problem (1), (2) satisfies*

$$\int\limits_0^T u(x,t)\chi(t)\, dt = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

where $\chi(t)$, $g(x)$ are given.

In the present paper, we establish sufficient condition under which the solution of the inverse problem (1)–(3) exists and is unique. For the case $\alpha = 1$, closely related results were obtained in [1].

By $C^l(\mathbb{R}_T^n)$ be space of bounded continuous functions $f(x,t)$ on $\mathbb{R}_T^n$ which for all $t \in (0,T]$, satisfies Hölder continuity condition with respect to space variables $x \in \mathbb{R}^n$, and $C^{2,l}(\mathbb{R}_T^n) = \{f \in C(\mathbb{R}_T^n) \,|\, \Delta f,\ ({}^C\mathscr{D}_t^\alpha f)(x,t) \in C(\mathbb{R}_T^n)\}$.

Let us introduce the set

$$B_d(0) := \left\{q(x) \in C^l(\mathbb{R}^n) : |q(x)|^l \leqslant d\right\},$$

where $d = \text{const} > 0$. In all the subsequent arguments, we assume that the functions appearing in the input data of problem (1)–(3) satisfy the following conditions:

$$g(x) \in C^{l+2}(\mathbb{R}^n), \quad g(x) \geqslant g_0 > 0, \quad g_1 := |g|^{l+2}; \tag{A}$$

$$\Phi(x) \in C^{l+2}(\mathbb{R}^n), \quad |\Phi|^{l+2} \leqslant \varphi_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \chi(t) \in C[0,T], \quad \chi_0 := \max_{t\in[0,T]} |\chi(t)|; \tag{B}$$

$$F(x) = \int_0^T f(x,t)\chi(t)\,dt, \quad F_0 := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |F(x)|. \tag{C}$$

Let us consider the inverse problem (1)–(3) and obtain an operator equation for the coefficient $q(x)$. Thus, let $q(x)$ be an arbitrary function from $C^l(\mathbb{R}^n)$. Let us multiply Equation (1) by $\chi(t)$ and integrate over the closed interval $[0,T]$. Taking into account conditions (2), (3) and assumptions (A)–(C), we obtain the next relation

$$\begin{aligned} q(x) = q_0(x) + \frac{1}{g(x)} \int_0^T \chi(t)\,dt \int_{\mathbb{R}^n} Z(x-\xi,t)\Phi(\xi)q(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{g(x)} \int_0^T \chi(t)\,dt \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Y(x-\xi,t-\tau)q(\xi)\left({}^C\mathscr{D}_t^\alpha u\right)(\xi,\tau)\,d\xi, \end{aligned} \tag{4}$$

where

$$q_0(x) := \frac{1}{g(x)}\left[F(x) + \Delta g(x) - \int_0^T \chi(t)\bar{v}_0(x,t)\,dt\right],$$

$$\bar{v}_0(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} Z(x-\xi,t)\big[\Delta\Phi(\xi) + f(\xi,0)\big]\,d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Y(x-\xi,t-\tau)\left({}^C\mathscr{D}_t^\alpha f\right)(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Let us introduce the nonlinear operator $\mathscr{A} : C^l(\mathbb{R}^n) \to C^l(\mathbb{R}^n)$, $l \in (0,1)$ by the formula

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(q) = q_0(x) + \frac{1}{g(x)} \int_0^T \chi(t)\,dt \int_{\mathbb{R}^n} Z(x-\xi,t)\Phi(\xi)q(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{g(x)} \int_0^T \chi(t)\,dt \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Y(x-\xi,t-\tau)q(\xi)\left({}^C\mathscr{D}_t^\alpha u\right)(\xi,\tau)\,d\xi. \end{aligned} \tag{5}$$

In view of conditions (A)–(C), the operator $\mathscr{A}$ acts from $C^l(\mathbb{R}^n)$ to $C^l(\mathbb{R}^n)$, and relation (5) can be rewritten as

$$q = \mathscr{A}(q). \tag{6}$$

Lemma 1. *Assume that conditions* (A)–(C) *hold. Then, for all* $q(x) \in C^l(\mathbb{R}^n)$, *the following estimate holds:*

$$\mathscr{A}(q) \leqslant d_0, \tag{7}$$

where

$$d_0 := \frac{1}{g_0}\left[F_0 + g_1 + \chi_0 M_0 T + q_0 \chi_0 T\left(\varphi_0 + C(\alpha) M_0 T^{\alpha}\right)\right]. \tag{8}$$

Lemma 2. *Suppose that conditions* (A)–(C) *hold. Then the operator* $\mathscr{A}$ *is continuous on the set* B_d *for all* $d > 0$.

Lemma 3. *Let conditions* (A)–(C) *hold. Let* $d > 0$ *be arbitrary. Then the operator* $\mathscr{A}$ *is a completely continuous operator on the set* B_d.

Theorem 1. *Let conditions* (A)–(C) *and inequality* (7) *hold. Then there exists a solution* $q(x)$ *of the inverse problem* (1)–(3), *with* $q(x)$ *satisfying the estimate*

$$q(x) \leqslant d_0,$$

where d_0 *is from* (8).

Theorem 2. *Let conditions* (A)–(C) *hold. Let* M_0 *is given constant. Suppose that*

$$M^* < g_0,$$

where $M^* := T\chi_0\varphi_0 + C_1(\alpha) q_0 M_0 T^{\alpha+1} + C_0(\alpha) M_1 T^{\alpha}$. *Then the inverse problem* (1)–(3) *cannot have more than one solution.*

References

1. *Kamynin V. L.* The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation // Math. Notes.—2013.—Vol. 94, № 2.—P. 205–213.

A 2D DIFFUSION COEFFICIENT DETERMINATION PROBLEM FOR THE TIME-FRACTIONAL EQUATION

D. K. Durdiev (Uzbekistan, Bukhara; Bukhara Branch IM AS RUz),
A. A. Rahmonov (Uzbekistan, Bukhara; BukhSU),
Z. R. Bozorov (Uzbekistan, Bukhara; Bukhara Branch IM AS RUz)

In this paper, we consider two dimensional inverse problem for a fractional diffusion equation. The inverse problem is reduced to the equivalent integral equation. For solving this equation the contracted mapping principle is applied. The local existence and global uniqueness results are proven. Also the stability estimate is obtained.

Consider the following time-fractional diffusion equation:

$$\left({}^{C}\mathscr{D}_t^{\alpha}u\right)(\bar{x},t)-\Delta_{\bar{x}}u+q(x,t)u(\bar{x},t)=f(\bar{x},t),\quad \bar{x}=(x,y),\ (\bar{x},t)\in\mathbb{R}^2\times\{t>0\} \tag{1}$$

at condition

$$u\big|_{t=0}=\varphi(\bar{x}),\quad \bar{x}\in\mathbb{R}^2, \tag{2}$$

where ${}^{C}\mathscr{D}_t^{\alpha}$, $0<\alpha<1$, is a regularized fractional derivative (the Gerasimov–Caputo derivative), that is

$$\left({}^{C}\mathscr{D}_t^{\alpha}u\right)(\bar{x},t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\frac{u_\tau(\bar{x},\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}},$$

and $f(\bar{x},t)$, $\varphi(\bar{x})$ are given smooth functions.

Inverse problem. *Find the function $q(x,t)$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$ in* (1)*, if the solution to Cauchy problem* (1), (2) *satisfies*

$$u\big|_{y=0}=g(x,t),\quad x\in\mathbb{R},\ t>0, \tag{3}$$

where $g(x,t)$ is given.

We call a function $u(\bar{x},t)$ a classical solution to Cauchy problem (1) and (2), if [1]:

(i) $u(\bar{x},t)$ is twice continuously differentiable in $\bar{x}$ for each $t>0$;

(ii) for each $\bar{x}\in\mathbb{R}^2$ the Caputo derivative ${}^{C}\mathscr{D}_t^{\alpha}u(\bar{x},t)$ is continuous in t on $[0,T]$;

(iii) $u(\bar{x},t)$ satisfies (1) and (2).

By $\Pi_T:=\{(\bar{x},t):\ \bar{x}\in\mathbb{R}^2,\ 0<t\leqslant T\}$ we denote a strip with the thickness T, where $T>0$ is any fixed number.

Let $C^{\alpha,m}(\Pi_T)$ be the class of the m times continuously differentiable, bounded with all derivatives of order up to m with respect to $\bar{x}\in\mathbb{R}^2$ variable and its fractional derivative ${}^{C}\mathscr{D}_t^{\alpha}$ is continuous in t on $[0,T]$ functions.

Everywhere in this paper we will denote by $H^l(\mathbb{R}^n)$ locally Hölder continuous functions with exponent $l \in (0,1)$. The norms in $H^l(\mathbb{R}^n)$ are determined in [2, pp. 15–20].

By $C(H^l(\mathbb{R}^n),[0,T])$ we denote the class of continuous with respect to t variable on the segment $[0,T]$ with values in $H^l(\mathbb{R}^n)$ functions. For a fixed t, the norm of the function $\phi(x,t)$ in $H^l(\mathbb{R}^n)$ will be denoted by $|\phi|^l(t)$. The norm of a function $\phi(x,t)$ in $C(H^l(\mathbb{R}^n),[0,T])$ is defined by the equality

$$\|\phi\|^l := \max_{t\in[0,T]} \big||\phi|^l(t)\big|.$$

Theorem 1. *If $f(\bar{x},t) \in C(H^{\alpha+2}(\mathbb{R}^2),[0,T])$, $\varphi(\bar{x}) \in H^{\alpha+2}(\mathbb{R}^2)$, $g(x,t) \in C^1(H^\alpha(\mathbb{R}),[0,T])$, $\|g(x,t)\|^\alpha \geqslant g_0 > 0$, $g(0,0) = \varphi(0,0)$, then there exists a number $T^* \in (0,T)$, such that there exists a unique solution $q(x,t) \in C(H^\alpha(\mathbb{R}),[0,T^*])$ of the inverse problem* (1)–(3).

Let T be a positive fixed number. Consider the set $\Omega(\gamma_0)$ ($\gamma_0 > 0$ is some fixed number) of the given functions (f,φ,g) for which all conditions from Theorem 1 are fulfilled and so that $\max\{\|f\|^{\alpha+2}, \|\varphi\|^{\alpha+2}, \|g\|^\alpha\} \leqslant \gamma_0$. By $Q(\gamma_1)$ we denote the class of functions $q(x,t) \in C\big(H^\alpha(\mathbb{R}),[0,T]\big)$, satisfying the inequality $\|q\|^\alpha \leqslant \gamma_1$ with some fixed positive number γ_0.

Theorem 2. *Let $(f,\varphi,g) \in \Omega(\gamma_0)$, $(\tilde{f},\tilde{\varphi},\tilde{g}) \in \Omega(\gamma_0)$ and $(q,\tilde{q}) \in Q(\gamma_1)$. Then for the solution of the inverse problem* (1)–(3) *the following stability estimate is valid:*

$$\big\|q-\tilde{q}\big\|^\alpha \leqslant c\Big(\big\|f-\tilde{f}\big\|^{\alpha+2} + \big\|\varphi-\tilde{\varphi}\big\|^{\alpha+2} + \big\|g-\tilde{g}\big\|^\alpha\Big),$$

where the constant c depends only on T, α, γ_0, γ_1.

From Theorem 2 readily follows the following uniqueness theorem for any $T > 0$.

Theorem 3. *Let the functions q, f, φ, g and $\tilde{q}$, $\tilde{f}$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{g}$ have the same meaning as in Theorem 2. Moreover, if $f = \tilde{f}$, $\varphi = \tilde{\varphi}$, $g = \tilde{g}$ for $(x,t) \in \Pi_T$, then $q(x,t) = \tilde{q}(x,t)$, $(x,t) \in \Pi_T$.*

References

1. *Eidelman S. D., Kochubei A. N.* Cauchy problem for fractional diffusion equations // J. Differ. Equ.—2004.—Vol. 199.—P. 211–255.
2. *Ladyzhenskaya A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type.—M.: Nauka, 1967.—736 p.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАМЯТИ В СИСТЕМЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Д. К. Дурдиев (Узбекистан, Бухара, Бухарский филиал ИМ АН РУз),
Х. Х. Турдиев (Узбекистан, Бухара; БухГУ)

Распространение различных волн описывается гиперболическими системами уравнений первого порядка. Примером может служить явление распространения электромагнитных волн в средах с дисперсией. Оказывается, что в таких средах нарушается однозначная зависимость D и B (индукции электрического и магнитного полей, соответственно) от значений E и H (напряженности соответствующих полей) в тот же момент времени [1, 2]:

$$D(x,t) = \hat{\varepsilon}E + \int\limits_0^t \varphi(t-\tau)E(x,\tau)\,d\tau, \quad B(x,t) = \hat{\mu}H + \int\limits_0^t \psi(t-\tau)H(x,\tau)\,d\tau, \quad (1)$$

здесь $E = (E_1, E_2, E_3)$, $H = (H_1, H_2, H_3)$, $D = (D_1, D_2, D_3)$, $B = (B_1, B_2, B_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(t) = \operatorname{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, $\psi(t) = \operatorname{diag}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ — диагональные матрицы, представляющие память.

Запишем ее в виде симметрической гиперболической системы [2]:

$$\begin{gathered}\left(I_6\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda_0\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{2}\widetilde{C}_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \widetilde{C}\right)V = \\ = \int\limits_0^t \widehat{K}(z,t-\tau)V(x_1,x_2,z,\tau)\,d\tau + \widehat{F}(x_1,x_2,z,t).\end{gathered} \quad (2)$$

В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ при заданных матрицах $\widehat{K}$, $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}_2$, $\widehat{C}$ и вектор-функции $\widehat{F}$ требуется определить в области $D = \{(x_1, x_2, z, t) : 0 < z < L,\ t > 0,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ вектор функцию $V(z,t)$, удовлетворяющую уравнению (2) при следующих начальных и граничных условиях [3, 4]:

$$V_i(x_1,x_2,z,t)\big|_{t=0} = \phi_i(x_1,x_2,z), \quad i = \overline{1,6}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &V_i(x_1,x_2,z,t)\big|_{z=0} = g_i(x_1,x_2,t), \quad i = 1,2; \\ &V_i(x_1,x_2,z,t)\big|_{z=L} = g_i(x_1,x_2,t), \quad i = 3,4. \end{aligned} \quad (4)$$

ОБРАТНУЮ ЗАДАЧУ поставим следующем образом: найти функции $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $t > 0$, $i = 1,2,3$, входящие в матрицу $\widetilde{K}$, если относительно решения задачи (2)–(4) известны дополнительные условия $\overline{x} = (x_1, x_2)$,

$$\begin{aligned} &V_i(\overline{x},z,t)\big|_{z=L} = h_i(\overline{x},t), \quad i = 1,2; \\ &V_i(\overline{x},z,t)\big|_{z=0} = h_i(\overline{x},t), \quad i = \overline{3,6}. \end{aligned} \quad (5)$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию $w(z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{V}(z,t)$. При этом получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_i}{\partial t} + \gamma_i \frac{\partial w_i}{\partial z} = -\sum_{j=1}^{6} b_{ij}(z) w_j(z,t) + \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(z,t)\widetilde{\phi}_j(z) + \\ + \int_0^t \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(z,\tau) w_j(z,t-\tau)\, d\tau + \frac{\partial}{\partial t} F_i(z,t), \quad i = \overline{1,4},\end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{6}\left[b_{ij}(z) w_j(z,t) + a_{ij}(z,t)\widetilde{\phi}_j(z)\right] + \int_0^t \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(z,\tau) w_j(z,t-\tau) d\tau,\ i=5,6, \tag{7}$$

$$w_i(z,t)\big|_{t=0} = \Phi_i(z), \quad i = \overline{1,6}, \tag{8}$$

$$w_i(z,t)\big|_{z=0} = \frac{d}{dt}\widetilde{g}_i(t),\ i=1,2; \quad w_i(z,t)\big|_{z=L} = \frac{d}{dt}\widetilde{g}_i(t),\ i=3,4. \tag{9}$$

$$w_i(0,t) = \frac{d}{dt}\widetilde{h}_i(t),\ i=\overline{3,6}; \quad w_i(L,t) = \frac{d}{dt}\widetilde{h}_i(t),\ i=1,2. \tag{10}$$

Пусть выполнены условия [5]

$$\widetilde{\phi}_i(\nu) = \widetilde{g}_i(0), \quad F_i(\nu,0) - \gamma_i\left[\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{\phi}_i(z)\right]_{z=\nu} - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(\nu)\widetilde{\phi}_i(\nu) = \left[\frac{d}{dt}\widetilde{g}_i(t)\right]_{t=0}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\widetilde{g}_i(0) = F_i(\nu,0) - \gamma_i \frac{\partial}{\partial z}\widetilde{\phi}_i(z)\Big|_{z=\nu} - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(\nu)\widetilde{\phi}_i(\nu), \\ \frac{d}{dt}\widetilde{h}_l(t)\Big|_{t=0} = -\sum_{j=1}^{6} b_{lj}(0)\widetilde{\phi}_l(0).\end{aligned} \tag{12}$$

где $\nu := 0$, $i = 1,2$, $L, i = 3,4$, $l = 5,6$.

Теорема 1. *Пусть* $\widetilde{\phi}(z) \in C^2[0,L]$, $\widetilde{g}(t) \in C^2[0,\infty)$, $\widetilde{h}(t) \in C^2(0,\infty)$, $F(z,t) \in C^2(\Pi)$ *и выполнены условие* $\det Q\big(\nu_i;\widetilde{\phi}\big) \neq 0$, *условия согласования* (11), (12). *Тогда для любого* $L > 0$ *на отрезке* $[0,L]$ *существует единственное решение обратной задачи* (6)–(9), (10) *из класса* $\Psi(t) \in C^1[0,L]$, *и каждая компонента* $\varphi_i \in C^1[0,L]$ *определяется заданием* $h_i(t)$ *для* $t \in [0,L]$, $i = 1,2,3$, *а* $\psi_i \in C^1[0,L] - h_i(t)$ *для* $t \in [0,L]$, $i = 4,5,6$.

Литература

1. *Lorenzi A.* An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation // Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications.—1994.—Vol. 22, № 1.—P. 21–44.
2. *Романов В. Г., Кабанихин С. И., Пухначева Т. П.* Обратные задачи электродинамики.—Новосибирск: Выч. центр СО АН СССР, 1984.
3. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. матем.—2013.—Т. 16, № 2.—С. 72–82.
4. *Romanov V. G.* Problem of determining the permittivity in the stationary system of Maxwell equations // Dokl. Math.—2017.—Vol. 95, № 3.—P. 230–234.
5. *Durdiev D. K.* Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations // Журн. матем. физ., анал., геом.—2007.—Т. 3, № 4.—С. 411–423.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕИЗВЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА В УРАВНЕНИИ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ

У. Д. Дурдиев
(Узбекистан, Бухара; БухГУ)

Рассмотрим балку длиной l, опирающуюся на концы. Под действием внешней силы $G(x,t)$ вынужденные изгибные поперечные колебания балки описываются уравнением четвертого порядка [1]

$$\rho S u_{tt} + EJ u_{xxxx} + Q(t)u = G(x,t),$$

где ρ — плотность балки, S — площадь поперечного сечения балки, E — модуль упругости материала балки, J — момент инерции поперечного сечения относительно горизонтальной оси, и по всей длине поддерживается упругим основанием с коэффициентом жесткости $Q(t)$.

Разделив на ρS запишем это уравнение в следующим в виде:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + q(t)u = f(x,t), \tag{1}$$

где $a^2 = EJ/\rho S$, $q(t) = Q(t)/\rho S$ и $f(x,t) = G(x,t)/\rho S$. Уравнение (1) рассмотрим в прямоугольной области

$$D = \big\{(x,t) : 0 < x < l,\, 0 < t < T\big\},$$

где l — длина балки, T — временной интервал, с начальными

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l] \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3}$$

В прямой задаче требуется определить $u(x,t) \in C^{4,2}(D)$, удовлетворяющую равенствам (1)–(3), при заданных числах a, l, T и достаточно гладких функциях $q(t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Обратная задача. Найти коэффициент $q(t)$, если относительно решения прямой задачи (1)–(3) известна дополнительная информация

$$g(t) = \int_0^l u(x,t)h(x)\,dx,$$

где заданная функция $h(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$h(x) \in C^4(0,l), \quad h(0) = h(l) = h''(0) = h''(l) = 0.$$

Составим операторные уравнения

$$u = Au, \tag{4}$$

где

$$(Au)(x,t) = \Psi(x,t) - \int_0^t \int_0^l \int_0^l u(y,s) G_1(x,\xi,y,t,s)\, d\xi ds dy -$$

$$- \int_0^t \int_0^l u(y,s) G_2(x,y,t,s)\, dy ds - \int_0^t \int_0^l \int_0^l u(\xi,s) u(y,s) G_3(x,\xi,y,t,s)\, dy d\xi ds,$$

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\varphi_n \cos \omega_n t + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \Big) \sin \mu_n x +$$

$$+ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \int_0^l f(x,s) \sin \omega_n (t-s) \sin \mu_n x\, dx ds,$$

$$G_1(x,\xi,y,t,s) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n g(s)} f(\xi,s) h(s) h^{(4)}(y) \sin \omega_n (t-s) \sin \mu_n(y) \sin \mu_n x,$$

$$G_2(x,y,t,s) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g''(s)}{\omega_n g(s)} h^{(4)}(y) \sin \omega_n (t-s) \sin \mu_n(y) \sin \mu_n x,$$

$$G_3(x,\xi,y,t,s) = \frac{2a^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n g(s)} h^{(4)}(\xi) h^{(4)}(y) \sin \omega_n (t-s) \sin \mu_n(y) \sin \mu_n x,$$

d — некоторое положительное число и $S_d(0) = \{u : \|u\| \leqslant d\}$.

Для доказательство существования решения операторного уравнения (4), воспользуемся принципом Шаудера [2].

Теорема 1. *Для всех* $u \in S_d(0)$, $|g(t)| \geqslant g_0 > 0$ *при*

$$T < \frac{g_0}{2C_0 d(g_0 + Ha^2 l)}$$

операторное уравнение (4) *имеет единственное решение в* $C^{4,2}(D)$, *где* $C_0 = l^2/3a\pi$, $H = \max\limits_{0<x<l} \|h(x)\|$.

Литература

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1966.
2. *Треногин В. А.* Функционалный анализ: Учеб., 3-е изд., испр.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

ILL-POSED PROBLEMS OF EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

D. A. Juraev (Uzbekistan, Qarshi, HMAS RUz; India, Jaipur, Anand-ICE),
P. Agarwal (India, Jaipur, Anand-ICE)

In this paper, we are talking about the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in bounded and unbounded domains. In the future, we will construct a regularized solution to the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in multidimensional bounded and unbounded domains.

It is known that the Cauchy problem for elliptic equations is unstable for relatively small changes in the data, i. e., incorrect (example Hadamard, see, for instance [1, p. 39]). In unstable problems, the image of the operator is not closed; therefore the solvability condition can not be written in terms of continuous linear functionals. So, in the Cauchy problem for elliptic equations with data on part of the boundary of the domain; the solution is usually unique. The problem is solvable for every dense set of data, but this set is not closed. Consequently, the theory of solvability of such problems is much more difficult and deeper than theory of solvability of Fredholm equations. The first results in this direction appeared only in the mid-1980 in the works of L. A. Aizenberg, A. M. Kytmanov, and N. N. Tarkhanov [2].

Such problems naturally arise in mathematical physics and in various fields of natural science (for example, in electro-geological exploration, in cardiology, in electrodynamics, etc.). In general, the theory of ill-posed problems for elliptic systems of equations has been sufficiently formed thanks to the works of A. N. Tikhonov, V. K. Ivanov, M. M. Lavrent'ev, N. N. Tarkhanov of many other famous mathematicians. Among them, the most important for applications are the so-called conditionally well-posed problems, characterized by stability in the presence of additional information about the nature of the problem data. One of the most effective ways to study such problems is to construct regularizing operators. For example, this can be the Carleman-type formulas (as in complex analysis) or iterative processes (the Kozlov–Maz'ya–Fomin algorithm, etc.).

The construction of the Carleman matrix for elliptic systems was carried out by Sh. Yarmukhamedov, N. N. Tarkhanov, A. A. Shlapunov, I. E. Niyozov, D. A. Juraev and others. The system considered in this paper was introduced by N. N. Tarkhanov. For this system, he studied correct boundary value problems and found an analogue of the Cauchy integral formula in a bounded domain.

In many well-posed problems for systems of equations of elliptic type of the first order with constant coefficients that factorize the Helmholtz operator, it is not possible to calculate the values of the vector function on the entire boundary. Therefore, the problem of reconstructing the solution of systems of equations of first order elliptic type with constant coefficients, factorizing the Helmholtz operator (see, for instance [3–11]) is one of the topical problems in the theory of differential equations.

References

1. *Hadamard N. N.* The Cauchy Problem for Linear Partial Differential Equations of Hyperbolic Type.—M.: Nauka, 1978.
2. *Tarkhanov N. N.* The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations.—Berlin: Akad. Verl., 1995.—Vol. 7.
3. *Juraev D. A.* The Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in an unbounded domain // Sib. Electron. Math. Reports.—2017.—Vol. 14.—P. 752–764.
4. *Juraev D. A.* Cauchy Problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation // Ukrainian Math. J.—2017.—Vol. 69, № 10.—P. 1364–1371.
5. *Juraev D. A.* On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a bounded domain // Sib. Electron. Math. Reports.—2018.—Vol. 15.—P. 11–20.
6. *Juraev D. A.* The Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in $\mathbb{R}^3$ // Journal of Universal Mathematics.—2018.—Vol. 1, № 3.—P. 312–319.
7. *Juraev D. A.* On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in an unbounded domain in $\mathbb{R}^2$ // Sib. Electron. Math. Reports.—2018.—Vol. 15.—P. 1865–1877.
8. *Juraev D. A.* On a regularized solution of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation // Advanced Math. Models & Applications.—2019.—Vol. 4, № 1.—P. 86–96.
9. *Juraev D. A.* On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation // Journal of Universal Mathematics.—2019.—Vol. 2, № 2.—P. 113–126.
10. *Juraev D. A.* The Solution of the ill-posed Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation // Advanced Math. Models & Applications.—2020.—Vol. 5, № 2.—P. 205–221.
11. *Juraev D. A., Noeiaghdam S.* Regularization of the ill-posed Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation on the plane // Axioms.—2017.—Vol. 10, № 2.—P. 1–14.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В ОБЛАСТИ, ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ КОТОРОЙ — ЧЕТВЕРТЬ ПЛОСКОСТИ

Р. Т. Зуннунов

(Узбекистан, Ташкент; ИМ АН РУз)

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y\,|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 |y|^m u = 0 \tag{1}$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup l_1 \cup \Omega_2$, где

$$\Omega_1 = \big\{(x,y) : x > 0,\, y > 0\big\},$$

$$l_1 = \big\{(x,y) : x > 0,\, y = 0v\big\}, \quad l_2 = \big\{(x,y) : y > 0,\, x = 0\big\},$$

а Ω_2 — область нижней полуплоскости, ограниченная полупрямой $\overline{l_1}$ и Γ: $x - [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = 0$ — характеристикой уравнения (1), выходящей из точки $O(0,0)$. Здесь $m, \lambda \in R$, причем $m = \text{const} > 0$, а $\lambda = \lambda_1$ при $y > 0$, $\lambda = \lambda_2$ при $y < 0$.

Задача TD^∞. Найти функцию $u(x,\, y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,\, y) \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \overline{l_2} \cup \Gamma) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, причем $u_y(x,0)$ при $x \to 0$ может иметь особенность порядка меньше $1 - 2\beta$, а для достаточно больших x справедливо неравенство $|u_y(x,0)| \leqslant M_1 |x|^{2\beta - 1 - \varepsilon}$;

2) $u(x,\, y)$ удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1 и Ω_2;

3) при достаточно больших r_0 удовлетворяет условиям

$$|u(x,y)| < \frac{M_1}{r_0^\varepsilon}, \quad |y^m u_x(x,y)| < \frac{M_2}{r_0}, \quad |u_y(x,y)| < \frac{M_3}{r_0}$$

и следующим краевым условиям:

$$u(0,y) = \varphi(y), \quad \forall\, y \in \overline{l_2},$$

$$A_{0x}^{1,\lambda_2}\big\{D_{0x}^{\beta} x^{2\beta-1} u[\theta_0(x)]\big\} = a(x)u(x,0) + b(x), \quad \forall\, x \in l_1,$$

где $\varphi(y)$, $a(x)$, $b(x)$ — заданные функции, причем $\varphi(y) \in C[0, +\infty)$ и при достаточно больших y удовлетворяет неравенству $|\varphi(y)| \leqslant M_4 y^{-1-m/2-\varepsilon}$, $a(x), b(x) \in C^1(\overline{l_1}) \cap C^2(l_1)$ и $b(x)$ для достаточно больших x удовлетворяет неравенству $|b(x)| < M_5 x^{-1-\delta}$. Здесь $r_0^2 = x^2 + [2/m+2]^2 y^{m+2}$, $M_i = \text{const} > 0$ $(i = \overline{1,5})$, $\delta > 0$, а ε — достаточно малое положительное число, $\beta = m/(2m+4)$. Очевидно, что $\theta_0(x_0)$ является точкой пересечения характеристики Γ уравнения (1) с линией $x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = x_0$, где $x_0 \in (0, +\infty)$; $D_{sx}^a[f(x)]$ — оператор дробного в смысле Римана — Лиувилля интегро-дифференцирования [1], а $A_{sx}^{1,\lambda}[f(x)]$ — оператор из [2].

Единственность решения этой задачи доказывается с помощью метода интегралов энергии. Существование решения этой задачи доказано методом функций Грина и методом интегральных уравнений.

Литература

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
2. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* Краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром.—Ташкент: ФАН, 1997.—166 с.

ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ ПРИ НАЛИЧИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Т. И. Калинина (Россия, Новочеркасск; ЮРГПУ (НПИ)),
А. В. Наседкин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В настоящее время задачи наномеханики представляют большой интерес в связи с широким применением наноразмерных материалов и устройств в современных высокотехнологических приложениях. Как показали многочисленные теоретические и экспериментальные исследования, фактор размерности может изменять свойства материалов и оказывать существенное влияние на поведение тела в целом. В связи с этим актуальными являются динамические задачи для нанотонких полуограниченных тел, и в частности, для упругой полосы (слоя) наноразмерной толщины.

В работе в продолжении исследований [1], где рассматривались антиплоские задачи о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной нанотонкой полосы, изучаются аналогичные симметричные и антисимметричные плоские задачи. Учет наноразмерности толщины полосы осуществляется по теории поверхностных напряжений Гуртина — Мурдоха. Согласно этой теории, принимается, что на торцах слоя помимо внешних нагрузок действуют также поверхностные напряжения, которые описываются «поверхностным» законом Гука. В результате свойства материала упругой полосы с наноразмерной толщиной становятся отличными от свойств материала полосы обычной толщины. Для решения использовалась стандартная техника, включающая применение принципа предельного поглощения, преобразования Фурье по бесконечно протяженной координате и теории вычетов для нахождения обратного преобразования Фурье. При различных толщинах полосы были получены решения в виде рядов по собственным волнам и изучены дисперсионные соотношения. Проведенный анализ показал, что при фиксированных частотах значения неотрицательных вещественных волновых чисел больше при наличии поверхностных напряжений, чем значения волновых чисел для классического случая задач без поверхностных напряжений. Отмечено, что поверхностные эффекты оказывают существенное влияние только при уменьшении толщины полосы до наноразмеров.

Литература

1. *Калинина Т. И.* Антиплоские задачи об установившихся колебаниях при наличии поверхностных напряжений // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. XIX Междунар. конф. (15–18 октября 2018 г., Ростов-на-Дону, Россия).—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2018.—С. 123–127.

RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM ON SPIRALS

D. B. Katz

(Russia, Moscow; Moscow Polytech)

The Riemann boundary value problem is one of the most famous boundary value problems. Problems of complex analysis, the solution and applications of which is devoted to a large number of monographs and scientific articles (see, e. g., [1–3] and literature references in these monographs). Publications devoted to new applications appear systematically this problem (see [4], recent work [5] and others).

The classical statement of the Riemann problem on an open curve is as follows.

Let Γ be a simple piecewise smooth Jordan arc in the complex plane $\mathbf{C}$ starting at a_1 and ending at a_2. We denote by $H_\nu(\Gamma)$ the collection of all given on Γ functions $f(t)$ satisfying the Hölder condition

$$h_\nu(f;\Gamma) := \sup\left\{\frac{|f(t)-f(t')|}{|t-t'|^\nu} : \ t,t' \in \Gamma,\, t' \neq t\right\} < \infty, \quad 0 < \nu \leqslant 1.$$

Let functions $G(t)$ and $g(t)$ of this class be given on Γ, moreover, the first of them does not vanish. Riemann's problem is to find all holomorphic in $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Gamma$ of functions $\Phi(z)$, vanishing at an infinitely distant point and having at each the inner point Γ the limit values on the left and on the right $\Phi^{\pm}(t)$, respectively, connected by the boundary condition

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma' := \Gamma \setminus \{a_1, a_2\}.$$

Usually this condition is supplemented with some restrictions on the growth of the required function near the ends of the arc.

A special case of this problem

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma',$$

is called the jump problem.

For more information on this problem see classic works [1–3], work [6] as well as the works [7] and more recent [8, 9–11].

During the conference we will basically talk about this boundary value problem on non-rectifiable curves (which is a serious problem), and, more specifically, spirals (including ones of high torsion).

A number of latest results on this topic will be presented including the following:

Let Γ be a nonconcentric spiral with torsion exponent M, centered torsion exponent N and extremal exponent κ and let $g \in H_\nu^M(\Gamma)$ and the Taylor polynome P of this function in point 0 is bianalytic. Then if

$$\nu > 1 - \frac{\mathbf{m}}{2},$$

the problem

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in \Gamma',$$

has a solution Φ_0 *in a class of functions with*

$$\Phi(z) = (2\pi i)^{-1} g(1) \ln|z-1| + O(1),$$

assymptotics at 1, *and*

$$\Phi_0(z) = P_0(z)K(z) + P_1(z)L(z) + O(1),$$

at 0

$$L(z) = O(z^{-N}) + O(z^{-\kappa+1}).$$

References

1. *Gakhov F. D.* Boundary Value Problems.—M.: Nauka, 1977.
2. *Muskhelishvili N. I.* Integral Singular Equations.—M.: Nauka, 1962.
3. *Jian-Ke Lu.* Boundary Value Problems for Analytic Functions.—Singapore: World Scientific, 1993.
4. *Bezrodnykh S. I., Vlasov V. I.* Riemann–Hilbert boundary value problem on a complex domain for the magnetic reconnection model in plasma // Comput. Maths. Math. Phys.—2002.—Vol. 42, № 3.—P. 277–312.
5. *Bezrodnykh S. I., Vlasov V. I.* Asymptotics of the Riemann–Hilbert boundary value problem for a magnetic reconnection model in plasma // Comput. Maths. Math. Phys.—2020.—Vol. 60, № 11.—P. 1898–1914.
6. *Seleznev V. A.* Riemann boundary value problem on a class of Jordan boundaries // Metric Issues of Function Theory and Mappings.—Kiev: Naukova Dumka, 1980.—P. 125–132.
7. *Kats B. A.* The Riemann boundary value problem for a non-rectifiable Jordan curve // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1982.—Vol. 267, № 4.—P. 789–792.
8. *Kats B. A., Katz D. B.* Marcinkiewicz exponents andintegrals over non-rectifiable paths // Math. Methods Appl. Sci.—2016.—Vol. 39, № 12.—P. 3402–3410.
9. *Kats B. A., Katz D. B.* Integration over non-rectifiable arcs with applications // Siberian Math. J.—2019.—Vol. 60, № 1.—P. 95–108.
10. *Kats B. A., Katz D. B.* Cauchy–Hadamard integral with applications // Monatschefte fur Matematik.—2019.—Vol. 189, № 4.—P. 683–689.
11. *Kats B. A.* Zigzags and spirals in boundary value problems // Russian Mathematics.—2019.—Vol. 63, № 7.—P. 33–40.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С МЛАДШИМ ЧЛЕНОМ И БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ДАННЫМИ[1]

Э. В. Кораблина
(Россия, Ростов-на-Дону, ИММиКН ЮФУ; Москва, МИАН),
В. Б. Левенштам
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

В докладе рассматривается зависящая от большого параметра ω задача Коши для волнового уравнения с младшим членом вида:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + \dfrac{1}{\omega}\, a(x,t,\omega t)u(x,t) = f(x,t)r(t,\omega t), \\ u(x,t)\big|_{t=0} = 0, \\ u_t(x,t)\big|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

где младший коэффициент и правая часть уравнения быстро осциллируют по времени. При заданных функциях a, f и r построена асимптотика решения этой задачи — соответвующий результат сформулирован в виде теоремы 1. Затем предполагается, что функции a и r заданы, а f не известна. В этом случае поставлена и решена обратная задача о восстановлении функции f по значениям коэффициентов трехчленной асимптотике решения, вычисленным в некотрой точке пространства. Соответствующий результат об однозначной разрешимости поставленной обратной задачи яляется основным в докладе и сформулирован в виде теоремы 2.

Подчеркнем, что в работе используется неклассический подход [1–2] к постановке и решению обратных коэффициентных высокочастотных задач, лежащий на стыке двух дисциплин — асимптотические методы и обратные задачи. В результате исследование обратной задачи разбивается на две части: построение частичной асимптотики решения прямой задачи и постановка и решение обратной задачи.

В заключении отметим, что классчиеская теория обратных коэффициентных задач изложена в большом числе монографий и статей (см., например, [3–4] и библиографию в них).

Литература

1. *Бабич П. В., Левенштам В. Б., Прика С. П.* Восстановление быстро осциллирующего источника в уравнении теплопроводности по асимптотике решения // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2017.—Т. 57, № 12.—С. 1955–1965.
2. *Левенштам В. Б.* Параболические уравнения с большим параметром. Обратные задачи // Мат. заметки.—2020.—Т. 107, № 3.—С. 412–425.
3. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики.—М.: Наука, 1984.—458 с.
4. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач.—М.: Изд-во МГУ, 1994.—206 с.

[1]Основной результат доклада был получен при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-11-20141.

SUMMABILITY OF ENTROPY AND WEAK SOLUTIONS OF NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS WITH DATA IN CLASSES CLOSE TO L^1

A. A. Kovalevsky
(Russia, Yekaterinburg; IMM UrB RAS, UrFU)

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$), and let $f \in L^1(\Omega)$. We consider the Dirichlet problem

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i\, a_i(x, u, \nabla u) = f \ \text{ in } \ \Omega, \quad u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega, \tag{1}$$

assuming that the coefficients a_i satisfy the standard growth, coercivity, and strong monotonicity conditions. In particular, we assume that, for almost every $x \in \Omega$, every $s \in \mathbb{R}$, and every $\xi \in \mathbb{R}^n$, the inequality

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, s, \xi)\, \xi_i \geqslant c|\xi|^p$$

holds with $p \in (1, n)$ and $c > 0$.

We present our recent results on the summability of entropy and weak solutions of the problem under consideration. We note that a weak solution of problem (1) is a distributional solution in $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ and an entropy solution of the same problem is defined by a family of integral inequalities and belongs to a function set larger than the space $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$. As for the precise definitions of solutions and the description of some related results, see, for instance, [1]. We only mention that the existence of an entropy solution of problem (1) follows from a theorem in [2] and if $p > 2 - 1/n$, then, by a result in [3], a weak solution of this problem exists. In the talk, we deal with the case where the right-hand side of the equation in problem (1) belongs to classes close to L^1, namely, to classes K such that $L^{1+\varepsilon}(\Omega) \subset K \subset L^1(\Omega)$ for every $\varepsilon > 0$.

To state some of our results, we introduce auxiliary numbers and functions. We set

$$q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \quad r = \frac{n(p-1)}{n-1}$$

and define a sequence of numbers s_j as follows: $s_1 = e$, $s_j = e^{s_{j-1}}$, $j = 2, 3, \ldots$ For every $j \in \mathbb{N}$, let $l_j \colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ be the function such that

$$l_j(s) = \begin{cases} 1, & \text{if } \ 0 \leqslant s \leqslant s_j, \\ \underbrace{\ln \ldots \ln \ln}_{j}\, s, & \text{if } \ s > s_j. \end{cases}$$

In turn, for every $m \in \mathbb{N}$ and every $\gamma > 0$, let $\psi_{m,\gamma}\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ be the function such that

$$\forall\, s \in [0,+\infty), \quad \psi_{m,\gamma}(s) = \left[\prod_{j=1}^{m} l_j(s)\right]^{-1} \big[l_{m+1}(s)\big]^{-\gamma}.$$

Finally, let $l_\infty : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ be the function such that

$$l_\infty(s) = \begin{cases} s, & \text{if } \ 0 \leqslant s < s_1, \\ (s_1 - 1)j + l_j(s), & \text{if } \ j \in \mathbb{N} \ \text{ and } \ s_j \leqslant s < s_{j+1}. \end{cases}$$

The function l_∞ is nonnegative, increasing, and continuous. Moreover, $l_\infty(s) \to +\infty$ as $s \to +\infty$ and, for every $k \in \mathbb{N}$ and every $\lambda > 0$, we have $l_\infty(s)[l_k(s)]^{-\lambda} \to 0$ as $s \to +\infty$.

Theorem 1. *Let $f l_\infty(|f|) \in L^1(\Omega)$, and let u be an entropy solution of problem* (1)*. Then, for every $m \in \mathbb{N}$ and every $\gamma > 1$,*

$$|u|^q \big[l_\infty(|u|)\big]^{\frac{n}{n-p}}\, \psi_{m,\gamma}(|u|) \in L^1(\Omega),$$

$$|\delta u|^r \big[l_\infty(|\delta u|)\big]^{\frac{n}{n-1}}\, \psi_{m,\gamma}(|\delta u|) \in L^1(\Omega).$$

In the latter inclusion, δu is the gradient of the entropy solution u.

Theorem 2. *Assume that $p > 2 - 1/n$, and let $f l_\infty(|f|) \in L^1(\Omega)$. Then there exists a weak solution u of problem* (1) *such that, for every $m \in \mathbb{N}$ and every $\gamma > 1$,*

$$|u|^q \big[l_\infty(|u|)\big]^{\frac{n}{n-p}}\, \psi_{m,\gamma}(|u|) \in L^1(\Omega),$$

$$|\nabla u|^r \big[l_\infty(|\nabla u|)\big]^{\frac{n}{n-1}}\, \psi_{m,\gamma}(|\nabla u|) \in L^1(\Omega).$$

We note that Theorems 1 and 2 are consequences of the general results given in [4]. We also note that results similar to the above theorems hold if, instead of the function l_∞, we take, for instance, the function $l_\infty \circ l_\infty$ or the the functions l_∞^λ with $\lambda > 0$.

References

1. *Kovalevsky A. A.* Summability of solutions of the Dirichlet problem for nonlinear elliptic equations with right-hand side in logarithmic classes close to L^1 // Nonlinear Anal.—2020.—Vol. 192.—P. 111692. DOI: 10.1016/j.na.2019.111692.
2. *Alvino A., Boccardo L., Ferone V., Orsina L., Trombetti G.* Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity // Ann. Mat. Pura Appl. (4).—2003.—Vol. 182, № 1.—P. 53–79.
3. *Boccardo L., Gallouët T.* Nonlinear elliptic equations with right hand side measures // Comm. Part. Differ. Equat.—1992.—Vol. 17, № 3–4.—P. 641–655.
4. *Kovalevsky A. A.* Summability of solutions of the Dirichlet problem for nonlinear elliptic equations with right-hand side in classes close to L^1 // Math. Notes.—2020.—Vol. 107, № 5–6.—P. 1023–1028.

ON SYMMETRIC WEDGE MODE OF AN ELASTIC SOLID[1]

A. I. Nazarov (Russia, Saint Petersburg; SPbU, PDMI RAS),
S. A. Nazarov (Russia, Saint Petersburg; SPbU),
G. L. Zavorokhin (Russia, Saint Petersburg; PDMI RAS)

Along with bulk and surface waves (a fair example of the latter is the Rayleigh wave in half-space), wedge waves comprise a fundamental type of oscillations of solids and are intensively studied in geophysics, machine building, civil engineering etc.

First theoretical results on waves propagating along the edge of a wedge were obtained by numerical simulations. Then these waves were studied analytically at the physical level of rigor by many authors, mostly for small interior angles (slender wedge) and interior angles slightly less then π.

The first rigorous proof of existence of the wedge wave was obtained in the pioneering paper [1] by variational method for interior angles less then $\frac{\pi}{2}$. Then the idea of [1] was developed in [2] where the range of aperture angles was enlarged.

We prove the existence of a symmetric wedge mode in an elastic deformable wedge for all admissible values of the Poisson ratio $\sigma \in (-1, \frac{1}{2})$ and interior angles close to π (see Fig. 1) where $\varepsilon = \tan(\alpha)$.

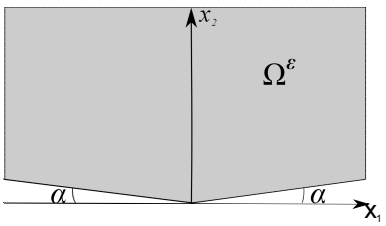


Fig. 1. The cross section of isotropic homogeneous elastic wedge.

Theorem 1. *For any $\sigma \in (-1, \frac{1}{2})$, one finds ε^0 such that for any $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$ there exists a symmetric wedge wave decaying exponentially w.r.t. the distance from the edge. This wave propagates along the edge with the velocity $\mathbf{c}_w$ which has the following asymptotics as $\varepsilon \to 0$:*

$$\mathbf{c}_w^2 = \mathbf{c}_R^2 \left(1 - \varepsilon^2 \vartheta + O\left(\varepsilon^{\frac{5}{2}}\right)\right), \tag{1}$$

where $\mathbf{c}_R$ is the velocity of the Rayleigh wave whereas $\vartheta > 0$ is an explicit coefficient depending on σ only.

The talk is based on the paper [3].

[1]The study of the second author was supported by the Russian Science Foundation, grant № 17-11-01003.

References

1. *Kamotskiĭ I. V.* Surface wave running along the edge of an elastic wedge // St. Petersburg Math. J.—2009.—Vol. 20, № 1.—P. 59–63.
2. *Zavorokhin G. L., Nazarov A. I.* On elastic waves in a wedge // J. Math. Sci.—2011.—Vol. 175, № 6.—P. 646–650.
3. *Nazarov A. I., Nazarov S. A., Zavorokhin G. L.* On symmetric wedge mode of an elastic solid // European J. Appl. Math.—2021.—P. 1–23.

ON SOME DIRECT AND INVERSE ELASTICITY PROBLEMS FOR 2-DIMENSIONAL PRESTRESSED REGIONS[1]

R. D. Nedin (Russia, Rostov-on-Don, SFedU; Vladikavkaz, SMI VSC RAS),
A. O. Vatulyan (Russia, Rostov-on-Don, SFedU; Vladikavkaz, SMI VSC RAS)

Modern materials with a complex heterogeneous structure are now widely used in military and civil engineering. Moreover, due to the peculiarities of the technological process of manufacturing such materials, many of them are subjected to a non-uniform preliminary stress-strain state. In this regard, a fairly large number of Russian and foreign works are devoted to the modeling and study of inhomogeneous materials, as well as the effect of prestresses on the strength characteristics of materials. It should be noted that often during manufacture, to improve the mechanical characteristics and properties of structures, prestress fields are formed in them intentionally.

In the present research, a general linearized formulation of the problem of vibrations of a prestressed elastic body is described, weak and variational formulations of the problem are presented [1]. On the basis of this model, a number of problems on the steady-state vibrations of prestressed bodies in the plane state are considered. The formulation of the problem of steady-state mixed planar-flexural vibrations of an inhomogeneous thin plate under conditions of an initial stress state is obtained. On the basis of this formulation, and a number of particular problems for plates of various structures are investigated, including functionally-graded, layered, perforated plates with holes, as well as plates with rigid inclusions. Algorithms for the numerical solution of direct problems using the finite element method are constructed, the influence of various types of homogeneous and inhomogeneous preliminary stressed state of plates on their amplitude-frequency characteristics and resonance frequencies is investigated. The proposed model makes it possible to specify an arbitrary type of preliminary state in the plate: both in the form of analytical dependences and numerically.

A number of inverse problems on the recovery of initial stresses in plates, which differ in the type of known additional information about the measured displacement field in the acoustic sounding mode, are considered. Mainly, we consider inverse problems of two different types, in the presence of additional data on the measured displacement field: 1) in a set of points of the region at a fixed vibration frequency, and 2) on a boundary part in some frequency range [2]. We investigate the questions of prestress solution uniqueness for the 1st type inverse problem. Some new methods and algorithms based on the projection, finite-element and iterative-regularizing schemes for studying two-dimensional inverse problems are proposed and discussed,

[1]This work was financially supported by a grant from the Government of the Russian Federation, agreement № 075-15-2019-1928.

and the results of some computational experiments are presented. The possibilities of identifying the parameters of the plane prestressed state on the basis of the measurement data of the frequency characteristics of the plate are analyzed. Examples of numerical experiments on the reconstruction of prestresses of various types are presented, and the recommendations are proposed for the selection of the most effective loading modes and the choice of frequency ranges for acoustic sounding.

References

1. *Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Nedin R. D.* Prestress: Modeling and Identification.—Rostov-on-Don: SFedU Publishing House, 2015.—206 p.
2. *Vatulyan A. O.* Coefficient Inverse Problems of Mechanics.—M.: Fizmatlit, 2019.—272 p.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

С. А. Нестеров
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

В настоящее время в различных областях техники с высокотемпературным окружением широко применяются функционально-градиентные материалы (FGM). Однако технология изготовления FGM является многоступенчатой и требует диагностики реальных свойств получаемого изделия. При этом термомеханические характеристики из-за неоднородности материалов могут быть определены только неразрушающими методами контроля, опирающимися на аппарат коэффициентных обратных задач (КОЗ).

К настоящему времени имеется достаточное количество работ по различным аспектам КОЗ теплопроводности и теории упругости. При этом наиболее распространенным методом решения КОЗ является построение функционала невязки и его минимизация каким-либо из градиентных методов или генетическим алгоритмом. Для некоторых материалов необходимо учитывать связанность полей и решать КОЗ термоупругости. Однако обратные задачи термоупругости для неоднородных тел слабо изучены. Это объясняется сложностью построения операторных уравнений в силу связанности полей и нелинейностью задачи.

В работе представлены две постановки КОЗ термоупругости при задании дополнительной информации о граничных полях: 1) в трансформантах Лапласа, что соответствует ситуации, когда дополнительная информация задана на полубесконечном интервале; 2) на конечном временном интервале.

Предложен итерационный подход к решению нелинейной КОЗ термоупругости произвольного конечного тела. Для этого на основе слабой постановки прямой задачи, соотношения взаимности и метода линеаризации получены линеаризованные операторные уравнения в трансформантах Лапласа.

Вначале рассматривалось решение КОЗ термоупругости в трансформантах Лапласа для стержня и бесконечного цилиндра. При этом в ходе вычислительных экспериментов восстанавливалась только одна из термомеханических характеристик, остальные полагались известными. В качестве методов решения прямой задачи использовался метод сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода для стержня и метод пристрелки для цилиндра.

Затем рассматривалось решение КОЗ термоупругости на конечном интервале. Путем обращения операторных уравнений в трансформантах получены уравнения в оригиналах. Представлены особенности реализации решений КОЗ термоупругости для стержня, слоя, конечного цилиндра. В случае конечного цилиндра применен поэтапный итерационный процесс реконструкции двух термомеханических характеристик.

Даны практические рекомендации по выбору наиболее информативных временных интервалов для съема дополнительной информации. Обсуждено влияние на точность реконструкции монотонности функций, зашумления входной информации.

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ БАЛКИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

Д. Б. Нурахметов (Казахстан, Алматы; ИММ),
А. А. Аниярова(Казахстан, Алматы; ИММ)

В данном докладе рассмотрена задача управления первым собственным значением колебании балки Эйлера — Бернулли с шарнирным закреплением на обоих концах. Пусть $k(x)$, $x \in (0; l)$, — действительнозначная суммируемая симметричная функция относительно точки $x = \frac{l}{2}$. Обозначим спектральный параметр $\lambda = \frac{\omega^2 \rho A}{EJ}$, где ρ — плотность материала, A — площадь поперечного сечения, EJ — изгибная жесткость балки, ω — частотный параметр. Спектральная задача об изгибных колебаниях балки с шарнирным закреплением на обоих концах имеет следующий вид:

$$y^{IV}(x) + \frac{k(x)}{EJ}\, y(x) = \lambda\, y(x), \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

$$y(x)\big|_{x=0} = 0, \quad y''(x)\big|_{x=0} = 0, \quad y(x)\big|_{x=l} = 0, \quad y''(x)\big|_{x=l} = 0. \tag{2}$$

Пусть $(B - \mu\, I)$ — оператор в $L_2(0,\, l)$, соответствующий задаче:

$$u^{IV}(x) + \frac{k(x)}{EJ}\, u(x) = \mu\, u(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} u(x)\big|_{x=0} = \alpha \int\limits_0^l u(x)\, y_1(x)\, dx, \quad u''(x)\big|_{x=0} = 0, \\ u(x)\big|_{x=l} = 0, \quad u''(x)\big|_{x=l} = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где α — отличное от нуля вещественное число. Выбрать граничный параметр α так, чтобы собственные значения оператора B находилось вне интервала $(-\lambda_2, \lambda_2)$.

Основным результатом является

Теорема 1. *Если граничный параметр α выбрать так, чтобы выполнялось неравенство*

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \leqslant \alpha\, y_1'''(0), \tag{5}$$

то собственные значения $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора B определяются по формуле $\mu_n = \lambda_n$ при $n \geqslant 2$ и μ_1 является единственным вещественным корнем вне интервала $(-\lambda_2, \lambda_2)$ уравнения

$$1 = \frac{\alpha\, y_1'''(0)}{\mu - \lambda_1}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан, проект № AP08052239.

Метод работы идейно близок к методам работ [1, 2]. Сформулированная задача относится к классу задач управления спектром линейного оператора и исследовании колебательных систем [3]. Подобные вопросы возникают в задачах аэроупругости [4, с. 291] и резанаторов МЭМС [5, гл. 1].

Литература

1. *Кангужин Б. Е., Дауитбек Д.* Максимум первого собственного значения полуограниченного дифференциального оператора с параметром // Изв. вузов. Математика.—2017.—№ 2.—С. 14–21.
2. *Fazullin Z. Yu., Madibaiuly Zh., Yermekkyzy L.* Control of vibrations of elastically fixed objects using analysis of eigenfrequencies // Int. J. Math. Phys.—2020.—Vol. 11, № 2.—P. 27–31.
3. *Исламов Г. Г.* Экстремальные возмущения замкнутых операторов // Изв. вузов. Математика.—1989.—№ 1.—С. 35–41.
4. *Donovan A. F. and et. al.* High Speed Problems of Aircraft and Experimental Methods.—Princeton: Princeton Univ. Press, 1961.—1024 p.
5. *Brand O. and et. al.* Resonant MEMS.—Weinheim: Wiley-VCH. Verlag & Co. KGaA, 2015.—512 p.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Д. М. Поляков

(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Доклад посвящен исследованию спектральных свойств дифференциального оператора $L : D(L) \subset L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ вида

$$(Lu)(x) = -u''(x) + q(x)u(x), \quad x \in (0,1),$$

с областью определения $D(L) = \{u \in W_2^2(0,1)\}$. Кроме того, она задается следующими нелокальными краевыми условиями:

$$u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1) + \int_0^1 \overline{p(x)}\, u(x)\, dx.$$

Будем предполагать, что функция p и потенциал q являются произвольными комплекснозначными функциями из класса $L_2(0,1)$.

В [1] для оператора L при $q = 0$ была предпринята попытка установить базисность Рисса системы собственных и присоединенных функций. Было доказано, что свойство базисности корневых функций может меняться при каком угодно малом изменении ядра интегрального возмущения, а также выписана асимптотика собственных значений. Данная тематика продолжила свое развитие в серии работ [2–4]. Авторы получили близкие по духу результаты, но уже в случае ненулевого потенциала q. Отметим, что исследование рассматриваемого класса операторов тесно связано с исследованием нагруженных операторов, а также операторов с замороженным аргументом (см. [5, 6]).

Перейдем к формулировке основных результатов. Стандартным образом через p_n и q_n обозначим коэффициенты Фурье функций p и q, соответственно:

$$p_n = \int_0^1 p(x)e^{-i2\pi nx}\, dx, \quad q_n = \int_0^1 q(x)e^{-i2\pi nx}\, dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для доказательства мы будем использовать некоторые идеи и результаты статьи [7]. Первая теорема посвящена асимптотике собственных значений оператора L.

Теорема 1. *При достаточно большом числе n для собственных значений $\widetilde{\lambda}_n^{\pm}$ оператора L имеет место следующая асимптотическая оценка:*

$$\left|\widetilde{\lambda}_n^{\pm} - 4\pi^2 n^2 - q_0 - \frac{\overline{p}_n + \overline{p}_{-n}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4(q_{2n} + \overline{p}_{-n})(q_{-2n} + \overline{p}_n) + (\overline{p}_{-n} - \overline{p}_n)^2}\right| \leqslant M\gamma_n n^{-1},$$

где $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — некоторая суммируемая с квадратом последовательность.

В статье [1] был рассмотрен случай оператора L с $q = 0$. Приведем соответствующий результат в этой ситуации.

Следствие 1. *Если в операторе L положить $q = 0$, то собственные значения для достаточно большого n имеют вид*

$$\widetilde{\lambda}_n^{(1)} = 4\pi^2 n^2 + \mathscr{O}\big(n^{-2}\big), \quad \widetilde{\lambda}_n^{(2)} = 4\pi^2 n^2 + \overline{p}_n + \overline{p}_{-n} + \mathscr{O}\big(n^{-2}\big).$$

Результаты следствия 1 уточняют полученную ранее асимптотику собственных значений из работ [1–3].

В статье [5] рассматривался нагруженный дифференциальный оператор L с $p(x) = \cos \pi x$. Приведем еще одно следствие теоремы 1, которое описывает асимптотические оценки собственных значений оператора L в этом частном случае.

Следствие 2. *Пусть $q(x) = 0$, $p(x) = \cos \pi x$. Тогда для достаточно большого n собственные значения $\widetilde{\lambda}_n^{(1)}$ и $\widetilde{\lambda}_n^{(2)}$ имеют вид*

$$\widetilde{\lambda}_n^{(1)} = 4\pi^2 n^2 + \mathscr{O}\big(n^{-2}\big), \quad \widetilde{\lambda}_n^{(2)} = 4\pi^2 n^2 - \frac{i2n}{\pi(1-4n^2)} + \mathscr{O}\big(n^{-2}\big).$$

Сформулируем еще один результат. Он посвящен вопросам базисности Бари собственных и присоединенных функций. Напомним, что базисы, которые порождаются системами проекторов, квадратично близкими к полным и минимальным системам ортогональных проекторов называются базисами Бари. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Система собственных и присоединенных функций оператора L образует базис Бари со скобками в пространстве $L_2(0,1)$.*

Литература

1. *Макин А. С.* О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Диф. уравнения.—2006.—Т. 42, № 4.—С. 560–562.
2. *Садыбеков М. А., Иманбаев Н. С.* О базисности корневых функций периодической задачи с интегральным возмущением краевого условия // Диф. уравнения.—2012.—Т. 48, № 6.—С. 889–893.
3. *Imanbaev N. S., Sadybekov M. A.* On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Eurasian Math. J.—2013.—Vol. 4, № 3.—P. 53–62.
4. *Садыбеков М. А., Иманбаев Н. С.* Регулярный дифференциальный оператор с возмущенным краевым условием // Мат. заметки.—2017.—Т. 101, № 5.—С. 768–778.
5. *Ломов И. С., Чернов В. В.* Исследование спектральных свойств одного нагруженного дифференциального оператора второго порядка // Диф. уравнения.—2015.—Т. 51, № 7.—С. 861–865.
6. *Buterin S. A., Hu Yi. T.* Inverse spectral problems for Hill-type operators with frozen argument // Anal. Math. Phys.—2021.—Vol. 11.—Article number: 75.
7. *Баскаков А. Г., Поляков Д. М.* Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом // Мат. сб.—2017.—Т. 208, № 1.—С. 3–47.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ОТ ЛОКАЛЬНО ЗАДАННОГО К ГЛОБАЛЬНОМУ РИМАНОВУ АНАЛИТИЧЕСКОМУ ПРОСТРАНСТВУ

В. А. Попов
(Россия, Москва; Финансовый университет)

В качестве «наиболее полного» аналитического продолжения произвольной римановой метрики приведем следующие определения.

Определение 1. Риманово аналитическое односвязное многообразие M, называется *псевдополным*, если оно обладает следующими свойствами:

1) M непродолжаемо;

2) не существует локально изометрического накрывающего отображения $f : M \to N$, где N — односвязное риманово аналитическое многобразие, а $f(M)$ — открытое подмножество в N не равное N.

Определение 2. Риманово аналитическое ориентированное многообразие M, алгебра Ли векторных полей Киллинга которого не имеет центра, называется *квазиполным*, если оно обладает следующими свойствами.

1) M непродолжаемо;

2) M не допускает сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга локальных изометрий.

Квазиполное многообразие обладает максимальной симметрией и однозначно определено для римановых многообразий, алгебра Ли которых не имеет центра.

Теорема 1. *Пусть ϕ локальная изометрия из квазиполного многообразия M в квазиполное многообразие N. Тогда ϕ продолжается до изометрии $\phi : M \approx N$.*

Теорема 2. *Квазиполное многообразие является универсально притягивающим объектом в следующей категории. Объекты — локально изометричные римановы односвязные аналитические многообразия. Морфизмы — локально изометрические отображения $f : M \setminus S \to N$, определнные на всем многообразии M, за исключением множества S неподвижных точек всех, сохраняющих векторные поля Киллинга и ориентацию, локальных изомтрий M в себя.*

Понятие псевдополного многобразия допускает обобщение в случае локально однородных пространств не только для римановых, но и для псевдоримановых многообразий.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли всех инфинитеземальных изометрий на локально однородном псевдоримановом аналитическом многообразии M, $\mathfrak{h}$ — ее стационарная подалгебра, $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $\mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ — коммутант алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть G — односвязная подгруппа, порожденная алгеброй $\mathfrak{g}$ и H — ее подгруппа, порожденная подалгеброй $\mathfrak{h}$. Если $\mathfrak{h} \cap (\mathfrak{z} + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, то H замкнута в G. Если для любой полупростой подалгебы $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ такой, что $\mathfrak{p} + \mathfrak{r} = \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{r}$ — радикал $\mathfrak{g}$, имеет место $(\mathfrak{p} + \mathfrak{z}) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$, то H замкнута в G.*

Указанные результаты в случае римановых пространств опубликованы в работах [1, 2, 3].

Литература

1. *Popov V. A.* On the extendebility of locally defined isometries of a pseudo-Riemannian manifolds// J. Math. Sci.—2016.—Vol. 217, № 5.—P. 621–627.
2. *Popov V. A.* On closeness of stationary subgroup of affine transformation group// Lobachevskii J. Math.—2017.—T. 16 (38), № 1.—C. 168–190.
3. *Popov V. A.* Analytic extension of Riemannian analytic manifolds and local isometries // Mathematics.—2020.—Vol. 8, № 11.—P. 724–729.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМ, МОДЕЛИРУЕМЫХ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

С. С. Постнов
(Россия, Москва; ИПУ РАН)

В настоящей работе рассматриваются системы с распределенными параметрами, поведение которых в общем случае описывается неоднородным диффузионно-волновым уравнением следующего вида:

$$r(x)\,{}_0^C D_t^\alpha Q(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[w(x)\,\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right] - q(x)Q(x,t) + f(x,t) + u(x,t), \qquad (1)$$

где $Q(x,t)$ — состояние системы, ${}_0^C D_t^\alpha$ — левосторонний оператор дробного дифференцирования Капуто [1, § 2.4], $\alpha \in (1,2)$, $t \geqslant 0$, $x \in [0,L]$, $(x,t) \in \Omega = [0,L] \times [0,\infty)$. Функция $Q(x,t)$ считается дифференцируемой на положительной полуоси по временно́й переменной и дважды дифференцируемой на отрезке $[0,L]$ по пространственной переменной. Функции $r(x) > 0$, $w(x) > 0$ и $q(x)$ будем считать непрерывными на отрезке $[0,L]$. Возмущение $f(x,t)$ будем считать суммируемым по обеим переменным на области Ω. Положим, что распределенное управление $u(x,t)$ является элементом пространства $L_{p_1,p_2}(\Omega)$, $1 < p_{1,2} < \infty$, функций, интегрируемых со степенью p_1 по временно́й переменной и со степенью p_2 по пространственной, или пространства $L_\infty(\Omega)$ существенно ограниченных (по обеим переменным) функций.

Для уравнения (1) ставятся следующие начальные и граничные условия:

$$\frac{\partial^k Q(x,0+)}{\partial t^k} = \varphi^k(x), \quad x \in [0,L],\ k = 0,1, \qquad (2)$$

$$\left[b_i\,\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + a_i Q(x,t)\right]_{x=x^i} = h_i(t) + u^i(t), \quad t \geqslant 0,\ i = 1,2, \qquad (3)$$

где a_i и b_i — коэффициенты, $b_1 \leqslant 0$, $b_2 \geqslant 0$; $h_i(t)$ — некоторые известные вполне регулярные функции, $x^1 = 0$, $x^2 = L$. Граничные управления $u^{1,2}(t)$ считаются элементами пространства $L_p[0,T]$, $1 < p \leqslant \infty$, и могут быть объединены в вектор-функцию $U(t) = (u^1(t), u^2(t))$.

Будем считать, что целью управления является перевод системы (1) в некоторое желаемое состояние $Q^*(x)$ за время T:

$$Q(x,T) = Q^*(x), \quad T > 0,\ x \in [0,L]. \qquad (4)$$

Для системы, заданной уравнением (1), можно поставить задачу оптимального управления как задачу поиска управления с минимальной нормой, переводящего рассматриваемую систему из начального состояния (2) в желаемое

состояние (4) за заданное время, или как задачу поиска управления, переводящего систему из начального состояния в желаемое за минимальное время при заданном ограничении на норму управления. Такие задачи на основе точного решения уравнения (1) с начальными и граничными условиями (2)–(3) могут быть сведены к обобщенной бесконечномерной l-проблеме моментов по аналогии с исследованными ранее системами, которые описываются уравнением диффузии дробного порядка [2, 3]:

$$\int_0^T g_n(\tau)W(\tau)\,d\tau = c_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad \|W(t)\| \leqslant l, \tag{5}$$

где функции $g_n(t)$ и числа c_n определяются общим решением уравнения (1) и условиями (2)–(4), число $l > 0$ считается заданным. Искомая функция $W(t)$ (относительно которой ищется решение l-проблемы моментов) является линейной комбинацией граничных управлений и интегрального функционала от распределенного управления.

Как известно [4, 5], в общем случае нельзя доказать разрешимость и, тем более, получить аналитическое решение бесконечномерной проблемы моментов. В то же время, для конечномерной проблемы моментов, которая может быть получена на основе приближенного решения уравнения (1), существуют четкие критерии корректности и разрешимости, а также общее решение.

Теорема 1. *Пусть задана конечномерная l-проблема моментов* (5) *и при этом $g_n(t) \in L_{p'}(0,T]$, $W(t) \in L_p(0,T]$, $1/p + 1/p' = 1$, а также хотя бы одно из чисел c_n отлично от нуля, $n = 1, \ldots, N$. Тогда при любом фиксированном N эта проблема моментов является корректной и разрешимой, а при $p > 1$ имеет единственное решение.*

В работе также рассмотрены примеры систем, описываемых уравнением (1), для которых построено и проанализировано решение конечномерной l-проблемы моментов.

Литература

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations.—Amsterdam: Elsevier, 2006.
2. *Kubyshkin V. A., Postnov S. S.* The optimal control problem for linear systems of noninteger order with lumped and distributed parameters // Discontinuity, Nonlinearity and Complexity.—2015.—Vol. 4, № 4.—P. 429–443.
3. *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Оптимальное по быстродействию граничное управление для систем, описываемых уравнением диффузии дробного порядка // Автоматика и телемеханика.—2018.—№ 5.—С. 137–152.
4. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами.—М.: Наука, 1978.
5. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами.—М.: Наука, 1965.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ОБЛАСТЬ ДИФФУЗИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. В. Ревина

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Рассматривается система двух параболических уравнений

$$u_t = \Delta u + f(u,v), \quad v_t = d\Delta v + g(u,v)$$

в m-мерной ограниченной области $\Omega \subset R^m$ при $t > 0$. Здесь $d > 0$ — коэффициент диффузии; $f(u,v)$, $g(u,v)$ — слагаемые реакции.

На границе области Ω предполагаются выполненными однородные краевые условия Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0.$$

Здесь n — внешняя нормаль к границе.

Предполагается, что система имеет пространственно-однородное стационарное решение (u_0, v_0). Будем интересоваться условиями, при которых имеет место диффузионная неустойчивость (неустойчивость по Тьюрингу) этого равновесия.

Стационарное состояние системы называется неустойчивым по Тьюрингу, если оно устойчиво в бездиффузионном приближении, но теряет устойчивость при наличии диффузии в системе. Если имеет место диффузионная неустойчивость и выполняются некоторые условия невырожденности, то происходит бифуркация Тьюринга, в результате которой рождаются пространственно-неоднородные структуры. При этом роль бифуркационного параметра играет коэффициент диффузии d. Критическим называется такое значение коэффициента диффузии, при котором все собственные значения соответствующей линеаризованной системы лежат в открытой левой полуплоскости комплексной плоскости, за исключением одного собственного занчения, которое равно нулю.

Необходимые условия диффузионной неустойчивости для системы двух уравнений реакции-диффузии хорошо известны. Достаточные условия, как правило, находятся численно. Целью настоящей работы является аналитическое описание области необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга в конечномерном пространстве параметров системы.

В работе предложен подход, состоящий в переходе к новым переменным, который позволяет упростить описание области неустойчивости Тьюринга, а также указать диапазон волновых чисел, при котором имеет место неустойчивость Тьюринга.

Описание области неустойчивости Тьюринга дано в терминах собственных значений задачи Неймана для оператора Лапласа в рассматриваемой области.

В частности, рассматривается одномерный случай. В этом случае можно проследить зависимость границ области неустойчивости от длины отрезка, которому принадлежит пространственная переменная.

В качестве примера указанный подход применяется для классических систем реакции-диффузии — системы Шнакенберга [1], Гирера — Мейнхардта [2] и системы ФитцХью — Нагумо.

Литература

1. *Lysenko S. A., Revina S. V.* The region of Turing instability in Schnakenberg system Turing instability in Gierer–Meinhardt system // Numerical Algebra with Applications. Proc. Eighth China-Russia Conf.—Southern Federal University, 2019.—P. 130–134.
2. *Revina S. V., Ryabov A. S.* Turing instability in Gierer–Meinhardt system // Phisics and Mechanics of New Materials and Their Applications. Abstracts and Schedule.—Kitakiyushu, Japan, 2021.—P. 227.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Ж. Ш. Сафаров

(Узбекистан, Ташкент; ИМ АН РУз, ТУИТ)

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = u_{zz} + u_{xx} + \int\limits_0^t k(x,\theta)u(x,z,t-\theta)\,d\theta, \quad z \in (0,l),\ t>0,\ x \in R, \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$u_z|_{z=0} = \delta(x)\delta'(t), \quad u_z|_{z=l} = 0. \tag{3}$$

Здесь $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. В предположении $k(x,t) \in C(\Pi)$ изучим задачу об определении функции $k(x,t)$ из условия

$$u(x,0,t) = f(x,t), \tag{4}$$

где $\Pi = \{(x,t):\ x \in R,\ t>0\}$. Задача (1)–(4) относится к числу многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. С современным состоянием теории обратных задач для таких уравнений можно ознакомиться в известных работах [1–3]. Предполагается, что ядро $k(x,t)$ слабо зависит от горизонтальной переменной x:

$$k(x,t) = k_0(t) + \varepsilon x k_1(t) + \ldots, \tag{5}$$

где ε — малый параметр.

Решение прямой задачи (1)–(3) будем искать в виде ряда по степеням ε, т. е.

$$u(x,z,t) = u_0(x,z,t) + \varepsilon u_1(x,z,t) + \ldots \tag{6}$$

Подставляя (6) в уравнение (1) и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получим, в итоге, рекуррентную систему прямых задач, из которых находятся u_0, u_1 и т. д. Тогда, очевидно, согласно формуле (5) функция $f(x,t)$ будет иметь такую же структуру:

$$f(x,t) = f_0(x,t) + \varepsilon f_1(x,t) + \ldots \tag{7}$$

Используя разложения функции u по формуле (6), функции k по формуле (7) и поступая аналогичным образом, находим, что обратная задача (1)–(4) распадается на следующие задачи последовательного определения k_0, k_1, ...:

$$u_{ntt} = \Delta u_n + \int\limits_0^t \sum_{j=0}^{n} x^j k_j(t-\theta)u_{n-j}(\theta,x,z)\,d\theta, \tag{8}$$

$$u_n\big|_{t=0} = 0, \quad u_{nt}\big|_{t=0} = 0, \tag{9}$$

$$u_{nz}\big|_{z=0} = \delta_{n0}\delta(x)\delta'(t), \quad u_{nz}\big|_{z=l} = 0, \tag{10}$$

$$t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in (0,l).$$

$$u_n\big|_{z=0} = f_n(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \ n = 0,1,\ldots, \tag{11}$$

где δ_{n0} — символ Кронекера.

Умножая обе части уравнений (8)–(11) на x^m и интегрируя по x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$u_{nmtt} - u_{nmzz} = m(m-1)u_{n(m-2)} + \\ + \int\limits_0^t \sum_{j=0}^{n} k_j(\theta)\left[u_{(n-j)(m+j)}(z,t-\theta)\right]\,d\theta, \quad t \in \mathbb{R}, \ z \in (0,l). \tag{12}$$

В этом уравнении через u_{nm} обозначен m-й момент функции u_n:

$$u_{nm}(z,t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_n(x,z,t)x^m\,dx.$$

При получении уравнения (12) использован тот факт, что при любом конечном t, каждая функция u_n, $n = 0,1,2,\ldots$, представляет собой сумму некоторой сингулярной обобщенной функции конечного порядка и регулярной функции, причем носители функций u_n ограничены. Очевидно, что все $u_{n,m}$ удовлетворяют условиям

$$u_{nm}\big|_{t=0} = 0, \quad u_{nmt}\big|_{t=0} = \delta_{n0}\delta_{m0}\delta'(t), \quad u_{nmz}\big|_{z=0} = 0, \quad u_{nmz}\big|_{z=l} = 0,$$

$$u_{nn}\big|_{z=0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x,t)x^n\,dx = \widetilde{f}_n(t), \quad n = 0,1,$$

где $\widetilde{f}_n(t)$, $n = 0,1$, — заданные достаточно гладкие функции.

Основной результат данной работы состоит в том, что удалось построить метод нахождения $k_0(t)$ и $k_1(t)$ с точностью до величины порядка $O(\varepsilon^2)$.

Литература

1. *Благовещенский А. С.* О квазидвумерной обратной задаче для волнового уравнения // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова.—1971.—Т. 115.—С. 57–69.
2. *Благовещенский А. С., Федоренко Д. А.* Уравнения акустики в слабо горизонтально-неоднородной среде // Зап. науч. сем. ПОМИ.—2008.—Т. 354.—С. 81–99.
3. *Дурдиев Д. К., Бозоров З. Р.* Задача определения ядра интегро-дифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью // Дальневост. мат. журн.—2013.—Т. 13, № 2.—С. 209–221.

SPECIAL PROPERTIES OF PLANE SOLENOIDAL FIELDS

Vladimir I. Semenov
(Russia, Kaliningrad; IKBFU)

Algebraic and integral identities have been obtained for a pair and a triple of plane solenoidal fields. We obtain sufficient potentiality conditions for a plane vector field. The integral identities are also important for exact a priori estimates, conservation laws (see [1–2]).

All this is connected with the well-known classical Helmholtz result on the decomposition of the vector field by the sum of the solenoidal and potential components. More exactly, it is closer to Helmholtz–Weyl decomposition. By the way, this fact was noted by S. L. Sobolev and O. A. Ladyzhenskaya in the earliest of 50th of the last century.

For studying of integral identities a new impulse was given in the middle of 90th by S. Ju. Dobrokhotov and A. I. Shafarevich [3].

In finally, a new series of identities related to curl there was obtained in [2].

1. *Semenov V. I.* Special properties of plane solenoidal fields // Mathematics.—2021.—Vol. 9 (16), № 1863. DOI: 10.3390/math9161863.—P. 1–6.
2. *Semenov V. I.* Some new integral identities for solenoidal fields and applications // Mathematics.—2014.—Vol. 2 (1). DOI: 10.3390/math2010029.—P. 29–36.
3. *Dobrokhotov S. Ju., Shafarevich A. I.* On the behavior of an incompressible fluid velocity field at infinity // Fluid Dynamics.—1996.—Vol. 4.—P. 511–514.

A GLOBAL SOLVABILITY OF A TWO-DIMENSIONAL KERNEL DETERMINATION PROBLEM FOR A VISCOELASTICITY EQUATION

Zh. D. Totieva

(Russia, Vladikavkaz; SMI VSC RAS, NCMRC VSC RAS)

The global solvability of the two-dimensional inverse problem of determining the kernel in the viscoelasticity equation is studied. As we know, inverse problems are in general ill-posed problems and to obtain global in time existence and uniqueness of a solution can be considered a good result. Even for one-dimensional inverse problems, there are existence theorems only for sufficiently small domains of unknown coefficients; i. e., solvability is local for these problems.

For $(x,t) \in R^2$, $y > 0$, let us consider the direct problem of determining $u(x,y,t)$ from integro-differential equation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} L\left[k, \frac{\partial u}{\partial y}\right](x,y,t) + \frac{\partial}{\partial x} L\left[k, \frac{\partial u}{\partial x}\right](x,y,t) \tag{1}$$

with

$$L[k,u](x,y,t) = u(x,y,t) + \int_0^t k(x,t-\tau)u(x,y,\tau),$$

under the following initial and boundary conditions:

$$u\big|_{t<0} \equiv 0, \quad L\left[k, \frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0} = -\frac{\delta'(t)}{2}. \tag{2}$$

The equation (1) arises in the theory of viscoelastic media with constant density and Lame coefficients. The $u(x,y,t)$ is the displacement function and the function $k(x,t)$ describes the viscous property of the medium.

The inverse problem: *to determine the kernel $k(x,t)$, $t > 0$, included in the integral of equation* (1)*, if additional information about the solution of problem* (1)–(2) *is known*

$$u(x,y,t)\big|_{y=+0} = g(x,t), \quad t > 0. \tag{3}$$

Let us consider the Banach function space $A_s(r)$, $s > 0$, analytical in a neighborhood of the origin such that

$$\|\psi\|_s(r) := \sup_{|x|<r} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{s^\alpha}{\alpha!} \left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \psi(x) \right\| < \infty, \quad r > 0, \ s > 0.$$

In further study the r parameter will be considered fixed, while the s parameter is considered as a variable parameter. In this case, there is a scale of Banach spaces

$A_s(r)$, $s > 0$. The following property is obvious: if $\psi(x) \in A_s(r)$, then $\psi(x) \in A_{s'}(r)$ for all $s' \in (0, s)$, hence, $A_s(r) \subset A_{s'}(r)$, if $s' \in (0, s)$ and the following inequality holds

$$\left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \psi(x) \right\|_{s'} \leqslant \alpha^\alpha \frac{\|\psi\|_s(r)}{(s - s')^\alpha}$$

for all α.

Since parameter r is fixed, we will omit it in the future and use $\|\psi\|_s$, A_s instead of $\|\psi\|_s(r)$ and $A_s(r)$. For $T > 0$ denote the class of functions continuous in (y, t) on $G_T = \{(y, t) |\ 0 \leqslant y \leqslant t \leqslant T - y\}$ with values in A_{s_0} by $C(A_{s_0}; G_T)$.

For (y, t) fixed, we denote the norm of $w(x, y, t)$ in A_{s_0} by $\|w\|_{s_0}(y, t)$. The norm of w in $C(A_{s_0}; G_T)$ is defined as

$$\|w\|_{C(A_{s_0}; G_T)} = \sup_{(y,t) \in G_T} \|w\|_{s_0}(y, t).$$

We consider (1)–(2) in a domain $D_T^\varepsilon = G_T^\varepsilon \times \mathbb{R}^m$, $G_T^\varepsilon = \left\{(y, t) |\ 0 \leqslant y \leqslant t \leqslant \frac{T}{1+\varepsilon} - y\right\}$ for some fixed $\varepsilon > 0$.

Denote by $C_\sigma(A_{s_0}; G_T^\varepsilon)$ the space of functions continuous in (y, t) in G_T^ε with values in A_{s_0} which is generated by the family of weight norms

$$\|w\|_{C_\sigma(A_s; G_T^\varepsilon)} = \sup_{(y,t) \in G_T^\varepsilon} \|w\|_s(y, t)\, e^{-\frac{\sigma t}{T - t - y}}, \quad \sigma \geqslant 0,\ 0 < s < s_0.$$

The inverse problem (1)–(3) is reduced to equivalent Volterra system of nonlinear integral equations problem for some functions φ_j, $j = \overline{1, 7}$, related to $u(x, y, t)$, $k(x, t)$.

Theorem 1. *Let* $(g(x, 0), g_t(x, 0)) \in A_{s_0}$, $(g(x, t), g_t(x, t), g_{tt}(x, t)) \in C_t(A_{s_0}; [0, T])$, $\max\{\|g\|_{s_0}(t), \|g_t\|_{s_0}(t), \|g_{tt}\|_{s_0}\} \leqslant R$, $t \in [0, T]$, $y \in [0, T/2]$, *while* $R > 0$ *is a known real. Then for* b *and* s *such that* $b \in (0, T/s_0)$, *and* $s \in (0, s_0)$ *there is a unique solution to* (1)–(3) *in the domain* $\Gamma_{sT}^\varepsilon = D_T^\varepsilon \cap \{(x, y, t) |\ 0 \leqslant t < \frac{1}{1+\varepsilon} b(s_0 - s) - y\}$ *for which*

$$\varphi_{1,2}(x, y, t) \in C(A_s; P_{sT}^\varepsilon),$$

$$\varphi_j(x, t) \in C\Big(A_{s_0}; \Big[0, \frac{1}{1+\varepsilon} b(s_0 - s)\Big)\Big), \quad j = 3, 4, 5, 6, 7.$$

Moreover,

$$\|\varphi_j - \varphi_{0j}\|_{C(A_s; P_{sT}^\varepsilon)} \leqslant \widetilde{R}, \quad j = 1, 4, 6;$$

$$\|\varphi_j - \varphi_{0j}\|_{C(A_s; P_{sT}^\varepsilon)} \leqslant \frac{\widetilde{R}}{s_0 - s}, \quad j = 2, 5, 7;$$

$$\|\varphi_3 - \varphi_{03}\|_{C(A_s; P_{sT}^\varepsilon)} \leqslant \frac{\widetilde{R}}{(s_0 - s)^2},$$

$P_{sT}^\varepsilon = G_T^\varepsilon \cap \{(y, t) |\ 0 \leqslant y \leqslant t < \frac{1}{1+\varepsilon} b(s_0 - s) - y\}$, *where* $\widetilde{R} = Re^{\sigma/\varepsilon}$, $\sigma > 0$.

The study is based on the results previously obtained in [1, 2].

References

1. *Durdiev D. K., Totieva Zh. D.* The problem of determining the multidimensional kernel of the viscoelasticity equation // Vladikavkaz Math. J.—2015.—Vol. 17, № 4.—P. 18–43.
2. *Durdiev D. K., Totieva Zh. D.* About global solvability of a multidimensional inverse problem for an equation with memory // Sib. Math. J.—2021.—Vol. 62, № 2.—P. 215–229.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ОБ АППРОКСИМАТИВНЫХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕНИЙ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ НА КЛАССЕ ПРИВАЛОВА — ЧАНТУРИЯ

А. Ю. Трынин

(Россия, Саратов; СГУ)

Установлено, что функциональный класс, введенный в работах [1, 2], на котором интерполяционные многочлены Лагранжа по матрице узлов Чебышева и тригонометрические ряды Фурье равномерно сходятся, также допускает возможность равномерной аппроксимации с помощью обобщений операторов синк-аппроксимаций. В работе [1] рассматривается более широкий функциональный класс, в описании которого используется односторонний модуль непрерывности, чем в пионерском труде [2], в котором класс описан классическими модулями непрерывности и изменения.

Пусть $\rho_\lambda \geqslant 0$, $\rho_\lambda = o\big(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\big)$ при $\lambda \to +\infty$, $h(\lambda) \in \mathbb{R}$, и при каждом неотрицательном λ потенциал $q_\lambda(x)$ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле. Тогда для любого $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ рассмотрим задачи Коши вида

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0,\lambda) = 1, \quad y'(0,\lambda) = h(\lambda), \tag{1}$$

или, при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$, — задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0,\lambda) = 0, \quad y'(0,\lambda) = h(\lambda). \tag{2}$$

Для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$, при $\lambda \to +\infty$, нули решения задачи Коши (1) или, при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$, — задачи Коши (2), попадающие в $[0,\pi]$ и перенумерованные в порядке возрастания, обозначим

$$0 \leqslant x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \ldots < x_{n(\lambda),\lambda} \leqslant \pi \quad (x_{-1,\lambda} < 0,\ x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi).$$

Здесь $x_{-1,\lambda} < 0$, $x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi$ обозначают нули продолжения решения задачи Коши (1) или (2), после доопределения каким-либо образом функции q_λ вне отрезка $[0,\pi]$ с сохранением ограниченности вариации. В дальнейшем для краткости будем обозначать $n = n(\lambda)$.

Рассмотрим операторы интерполирования функций вида

$$S_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda},\lambda)(x - x_{k,\lambda})}\, f(x_{k,\lambda}) = \sum_{k=0}^{n} s_{k,\lambda}(x) f(x_{k,\lambda}) \tag{3}$$

и

$$T_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x - x_{k,\lambda})} \left[f(x_{k,\lambda}) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi}\, x_{k,\lambda} - f(0) \right] + \\ + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi}\, x + f(0). \tag{4}$$

Пусть $\mathbf{\Omega}$ — множество всех действительнозначных, неубывающих, вогнутых на $[0, b-a]$ $(0 \leqslant a < b \leqslant \pi)$, исчезающих в нуле функций ω. Обозначим через $C(\omega^l, [a,b])$ и $C(\omega^r, [a,b])$ множества элементов пространства $C[a,b]$ таких, что для произвольных x и $x+h$ $(a \leqslant x < x+h \leqslant b)$ имеют место неравенства

$$f(x+h) - f(x) \geqslant -K_f\omega(h) \text{ или } f(x+h) - f(x) \leqslant K_f\omega(h), \quad \omega \in \mathbf{\Omega},$$

соответственно. В этом случае функцию $\omega(h)$ называют, соответственно, лево- или правосторонним модулем непрерывности.

По аналогии с положительным (отрицательным) изменением функции будем называть положительным (отрицательным) модулем изменения функции f на отрезке $[a,b]$, соответственно, функции натурального аргумента

$$v^+(n,f) = \sup_{T_n} \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(t_{k+1}) - f(t_k)\big)_+ \quad \text{и} \quad v^-(n,f) = \inf_{T_n} \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(t_{k+1}) - f(t_k)\big)_-,$$

где $z_+ = \frac{z+|z|}{2}$ и $z_- = \frac{z-|z|}{2}$, $T_n = \{a \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n \leqslant b\}$, $n \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что f принадлежит классу $V^+(v)$ или $V^-(v)$, если существует константа M_f такая, что для любого натурального n справедливо неравенство

$$v^+(n,f) \leqslant M_f v(n) \text{ или } v^-(n,f) \geqslant -M_f v(n)$$

соответственно.

Теорема 1. *Пусть $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$. Если неубывающая вогнутая функция натурального аргумента $v(n)$ и функция $\omega \in \mathbf{\Omega}$ такие, что*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \min_{1\leqslant m\leqslant n} \left(\omega\Big(\frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda}}\Big) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} + \sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{v(k)}{k^2} \right) = 0, \tag{5}$$

то для любой функции $f \in C(\omega^l[a,b]) \cap V^-(v)$ $(f \in C(\omega^r[a,b]) \cap V^+(v))$ выполняется соотношение

$$\lim_{\lambda\to\infty} \big\| f - S_\lambda(f,\,\cdot\,) \big\|_{C[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} = 0,$$

где оператор $S_\lambda(f,\,\cdot\,)$ определен в (3).

Замечание. При этом на множестве $[0,\pi] \setminus [a,b]$ соотношение

$$\lim_{\lambda\to\infty} \big| f(x) - S_\lambda(f,x) \big| = 0$$

может вовсе не выполняться.

Договоримся обозначать $C_0[0,\pi] = \{f : f \in C[0,\pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$. Легко реализуемая модификация оператора (3) вида (4) позволяет избавиться от явления Гиббса вблизи концов отрезка при приближении функций $f \in C[0,\pi] \setminus C_0[0,\pi]$.

Теорема 2. *Пусть функция $f \in C[0,\pi]$, $a = 0$, $b = \pi$. Если неубывающая вогнутая функция натурального аргумента $v(n)$ и функция $\omega \in \mathbf{\Omega}$ такие, что выполняется соотношение* (5), *то для любой функции $f \in C(\omega^l[0,\pi]) \cap V^-(v)$*

($f \in C(\omega^r[0,\pi]) \cap V^+(v)$) *равномерно на всем отрезке* $[0,\pi]$, $h(\lambda) \in \mathbb{R}$ *и шарах* $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left|T_\lambda(f,x) - f(x)\right| = 0.$$

Здесь оператор $T_\lambda(f,\,\cdot\,)$ *определен в* (4).

Литература

1. *Привалов А. А.* О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Мат. заметки.—1986.—Т. 39, № 2.—С. 228–244.
2. *Чантурия З. А.* О равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб.—1976.—Т. 100 (142), № 4 (8).—С. 534–554.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

РАЗРУШЕНИЕ И ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЛИННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГОМ СТЕРЖНЕ

Х. Г. Умаров

(Россия, Грозный; АН ЧР, ЧГПУ)

Для нелинейного дифференциального уравнения соболевского типа, моделирующего продольные волны в бесконечном вязкоупругом стержне с учетом дисперсии и диссипации,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma(u)}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t},$$

где $u = \partial w/\partial x$ — продольная деформация (w — продольное перемещение точек стержня вдоль его оси, совпадающей с осью x; слагаемое с коэффициентом β^2 представляет главное проявление дисперсии, слагаемое с коэффициентом α описывает диссипацию), α, β — положительные параметры, а $\sigma(u)$ — суммарное по сечению напряжение стержня, исследована разрешимость задачи Коши в пространстве непрерывных функций на всей числовой оси.

Найден явный вид решения соответствующего линейного уравнения.

Установлен временной отрезок существования классического решения задачи Коши для нелинейного уравнения и получена оценка нормы этого локального решения.

Рассмотрены условия существования глобального решения и разрушения решения на конечном отрезке.

FORTH-ORDER DIFFERENTIAL INEQUALITIES ON A GRAPH

A. A. Urtaeva (Russia, Vladikavkaz; NOSU),
I. T. Dzanagova (Russia, Vladikavkaz; NOSU)

We consider the boundary value problem on a geometric graph. By *a differential equation on a graph* $Lu = f$, following [1, 2], we understand the set of differential equations on the edges and the set of consistency conditions at the vertices. The equations on the edges have the form

$$\left(p_i(x)u_i''\right)'' - r_i(x)u = f_i(x), \quad x \in \gamma_i \in E(\Gamma).$$

At each vertex $a \in J(\Gamma)$, we impose the consistency conditions of the following types, characteristic for connected beams:

$$u \in C(\Gamma) \cap C^4[\Gamma], \quad \beta(a)u_i''(a) - \vartheta(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma), \quad i \in I(a),$$

$$\sum_{i \in I(a)} \left(p_i u_i''\right)_\nu'(a) - r(a)u(a) = f(a), \quad a \in J(\Gamma).$$

Theorem 1. *Suppose equation* $Lu = 0$ *is disconjugate on each edge* $\gamma \subset \Gamma$. *Then any nontrivial solution of the differential inequality* $Lu(x) \geqslant 0$, $x \in \Gamma$, *which satisfiers boundary conditions* $u|_{\partial\Gamma} \geqslant 0$, $u'|_{\partial\Gamma} \geqslant 0$ *is positive on* Γ.

Theorem 2. *Assume that differential equation* $Lu = 0$ *is quasi disconjugate on* Γ. *Then the following boundary value problems are equivalent:*

$$Lu(x) \geqslant 0, \quad x \in \Gamma, \quad u(a) \geqslant 0, \quad u_\nu'(a) \geqslant 0, \quad a \in \partial\Gamma; \tag{1}$$

$$Lu(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad u(a) = u'(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma. \tag{2}$$

One should provide an example of a solution of the equation $u^{VI} \geqslant \lambda u$, $x \in [0, \xi]$, with the boundary conditions $u(0) \geqslant 0$, $u'(0) \geqslant 0$ and $u(\xi) \geqslant 0$, $u'(\xi) \geqslant 0$, where ξ is the first conjugate point for $x = 0$.

Theorem 3. *Let* $v(x)$ *be a nontrivial solution of boundary value problem* (1). *If* $v(x) \neq 0$ *on* $J(\Gamma)$, *then any solution* $u(x)$ *of the inequality* $v(x)Lu(x) \geqslant 0$, $x \in \Gamma$, *which satisfiers the boundary conditions* $u|_{\partial\Gamma} = 0$, $v''u_\nu'|_{\partial\Gamma} \geqslant 0$ *solves problem* (2).

References

1. *Borovskikh A. V., Lazarev K. P.* Fourth-order differential equations on geometric graphs // J. Math. Sci.—2004.—Vol. 119, № 6.—P. 719–738.
2. *Pokorny Yu. V., Penkin O. M.* Sturm theorems for equations on graphs // Dokl. Math.—1990.—Vol. 40, № 3.—P. 640–642.

TENSOR INVARIANTS OF DISSIPATIVE SYSTEMS

M. V. Shamolin
(Russia, Moscow; MSU)

We prove the integrability of certain classes of dynamical systems on the tangent bundles of finite-dimensional manifolds. The force field considered possessed so-called variable dissipation; they are generalizations of fields studied earlier. This paper continues earlier works of the author devoted to systems on the tangent bundles of two-and three-dimensional manifolds [1, 2].

Configuration spaces of of many dynamical systems are finite-dimensional smooth manifolds; naturally, their phase spaces are tangent bundles of these manifolds. For example, the motion of a five-dimensional generalized spherical pendulum in a nonconservative force field is described by a dynamical system on the tangent bundle of the four-dimensional sphere whose metric is induced by an additional symmetry group. In this case, dynamical systems that describe the motion of such a pendulum possess variable dissipation, and a complete list of first integrals consists of transcendental functions that can be expressed as finite combinations of elementary functions [3, 4].

In this activity, we prove the integrability (in tensor invariants) of certain classes of dynamical systems on tangent bundles of smooth finite-dimensional manifolds in the case of systems with variable dissipation, which are generalizations of systems studied earlier. Similar results for manifolds of dimensions 2 and 3 were obtained by the author earlier [5].

References

1. *Shamolin M. V.* A new case of integrability in the dynamics of a multidimensional solid in a nonconservative field under the assumption of linear damping // Dokl. Phys.—2014.—Vol. 59, № 8.—P. 375–378.
2. *Shamolin M. V.* New Cases of Homogeneous Integrable systems with dissipation on tangent bundles of three-dimensional manifolds // Dokl. Math.—2020.—Vol. 102, № 3.—P. 518–523.
3. *Shamolin M. V.* New cases of homogeneous integrable systems with dissipation on tangent bundles of two-dimensional manifolds // Dokl. Math.—2020.—Vol. 102, № 2.—P. 443–448.
4. *Shamolin M. V.* New cases of integrable odd-order systems with dissipation // Dokl. Math.—2020.—Vol. 101, № 2.—P. 158–164.
5. *Shamolin M. V.* New cases of homogeneous integrable systems with dissipation on tangent bundles of four-dimensional manifolds // Dokl. Math.—2021.—Vol. 103, № 2.—P. 85–91.

Секция III

Математическое моделирование

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МЕЛКОВОДНОМ ВОДОЕМЕ НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ[1]

А. М. Атаян

(Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Целью работы является прогнозирование процессов распространения загрязнений в мелководных водоемах с использованием данных натурных экспериментов на основе разработки комплекса взаимосвязанных прецизионных 3D-моделей гидрофизики.

Математическое моделирование процесса переноса вещества дает возможность изучения динамики и тренда явлений, возникающих в мелководных водоемах и речных системах (водных экосистемах). Становится возможным осуществление прогнозирования последствий антропогенного вмешательства в водную экосистему [1, 2].

Для высокопроизводительных вычислительных систем был разработан прецизионный программный комплекс, предназначенный для математического моделирования возможных сценариев развития распространения загрязняющих веществ в мелководном водоеме. Для численной реализации этих моделей на расчетных сетках, согласованных со сложной формой береговой линии, а также при использовании современных технологий дистанционного зондирования, возникает потребность применения сеток, имеющих характерные большие шаги по горизонтальному и вертикальному направлениям. В этих условиях прогнозирование требует использования сеток, содержащих огромное число ячеек. Все это требует создания высокоэффективных алгоритмов и программных средств, позволяющих с должной разрешающей способностью решать данный класс задач с одновременной обработкой и усвоением данных космического зондирования, ориентированных на супер-ЭВМ. Одним из способов распараллелить вычисления является применение технологии MPI, которая позволяет обмениваться сообщениями между процессами, выполняющими одну задачу. При параллельной реализации были разработаны методы декомпозиции сеточных областей для решения вычислительно-трудоемких задач диффузии-конвекции, учитывающие архитектуру и параметры многопроцессорной вычислительной системы [3, 4], а также осуществлен анализ эффективности разработанных параллельных алгоритмов и проведены исследования полученных решений вычислительно-трудоемких задач водной экологии. Ускорение расчетов было осуществлено путем разработки параллельных алгоритмов на основе комбинированного подхода MPI+OpenMP решения задач транспорта загрязняющих веществ на системах с распределенной памятью.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-31-51017.

В ходе данной работы реализован программный комплекс, позволяющий производить расчеты задачи переноса вещества в мелководном водоеме на различных расчетных сетках. Реализованный в программном комплексе параллельный алгоритм ориентирован на многопроцессорную вычислительную систему и позволяет значительно сократить время работы программного комплекса при большом объеме входных данных. Представленный комплекс может использоваться для изучения процессов переноса в природных и технологических системах.

Для решения реальных задач гидрофизики мелководных водоемов применены трехслойные разностные схемы, построенные на основе линейной комбинации разностных схем «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$ соответственно, полученные в результате минимизации порядка погрешности аппроксимации. Данные схемы при решении задачи диффузии-конвекции обладают меньшей сеточной вязкостью и, как следствие, точнее описывают поведение решения в случае больших сеточных чисел Пекле (до 20–50) [5]. Используемая трехслойная разностная схема обладает большей точностью, чем традиционная схема «кабаре», при решении задач, в которых конвекция преобладает над диффузией. Для аппроксимации уравнения диффузии–конвекции–реакции по времени использовалась схемы с весами. Аппроксимация задачи расчета поля скорости движения водной среды по пространственным переменным выполнялась на основе метода баланса с учетом коэффициентов заполненности контрольных областей, исследованы стационарные режимы задачи переноса тепла и солей. На основе ранее произведенного мониторинга водной акватории построены трехмерные математические модели движения водной среды, предназначенные для прогнозирования возможных сценариев развития экосистемы Азовского моря для изучения механизмов возникновения областей анаэробного заражения и принятия своевременных мер для их локализации.

Литература

1. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Литвинов В. Н., Никитина А. В., Белова Ю. В., Филина А. А.* Вычислительные аспекты математического моделирования гидробиологических процессов в мелководном водоеме // Выч. мет. программирование.—2020.—Т. 21, № 4.—С. 452–469.
2. *Тишкин В. Ф., Гасилов В. А., Змитренко Н. В., Кучугов П. А., Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А.* Современные методы математического моделирования развития гидродинамических неустойчивостей и турбулентного перемешивания // Мат. моделирование.—2020.—Т. 32, № 8.—С. 57–90.
3. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А., Сидорякина В. В., Проценко С. В.* Параллельные алгоритмы решения задачи динамики изменения рельефа дна в прибрежных системах // Выч. мет. программирование.—2020.—Т. 21, № 3.—С. 196–206.
4. *Четверушкин Б. Н., Якобовский М. В.* Вычислительные алгоритмы и архитектура систем высокой производительности // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша.—2018.—№ 52.—12 с.
5. *Сухинов А. И., Белова Ю. В., Чистяков А. Е.* Решение задачи переноса веществ при больших числах Пекле // Выч. мет. программирование.—2017.—Т. 18, № 4.—С. 371–380.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРРОРИСТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ

Е. К. Басаева (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН, СКЦМИ СОГУ),
Е. С. Каменецкий (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
З. Х. Хосаева (Россия, Владикавказ; ВНЦ РАН)

Для анализа динамики изменения численности террористов использовалась простая математическая модель [1, 2]

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \alpha n + \beta N n - \delta N = (\alpha + \beta N)n - \delta N, \tag{1}$$

где N — число членов террористических групп, ΔN — изменение этого числа за промежуток времени Δt, $n = MP$ — количество молодых (в возрасте с 15 до 30 лет) мужчин, недовольных состоянием общества, которое пропорционально общей численности мужчин указанного возраста M и напряженности общества P, αn — скорость вовлечения недовольных молодых людей в террористические группы за счет информационного воздействия, $\beta N n$ — скорость вовлечения людей в террористические группы за счет контактов с участниками этих групп, δN — скорость нейтрализации участников террористических групп правоохранительными органами.

В книге [3, с. 324, с. 333] приведены оценки числа террористов в Дагестане и КБР, которые показывают, что число террористов можно, в первом приближении, считать пропорциональным числу терактов с коэффициентом пропорциональности примерно равным 1.4. По Кабардино-Балкарской республике и Республике Дагестан достаточно подробная хроника террора приведена на сайте «Кавказский узел» [4, 5].

Оценить изменение числа мужчин соответствующего возраста можно по данным о рождаемости, подробнее см. [1, 2]. Численность молодых мужчин можно считать примерно равной половине численности молодежи.

Динамика уровня напряженности P в Дагестане и Кабардино-Балкарии оценивалась по нормированным индикаторам. В качестве индикаторов напряженности использовались статистические данные Росстата [6, 7]: число самоубийств на 100000 человек населения и число убийств и покушений на убийства на 100000 человек населения. Для республики Дагестан дополнительно использовалась разность коэффициентов разводимости и брачности, а для КБР — число непредумышленных отравлений алкоголем на 1000000 человек населения.

С помощью модели (1) оценивалось изменение коэффициента $k := \alpha + \beta N$, отражающего степень восприимчивости экстремистской идеологии молодежью, недовольной состоянием общества (рис. 1).

Отметим, что скачкообразный рост вовлечения молодежи в террористические группы в Дагестане в 2005 г. совпал с нападением большой группы боевиков на г. Нальчик (КБР). Принятие усиленных мер безопасности после этого

нападения объясняет отсутствие террористической активности в КБР с 2006 по 2009 гг., хотя в Дагестане в этот период наблюдался заметный рост террористической активности и вовлечения в нее молодежи. Это и однотипное изменение коэффициента вовлечения молодежи в террористические группы в КБР и Дагестане в 2010–2014 гг. (см. рис. 1) позволяет говорить о сходстве причин значительной террористической активности в этих республиках.

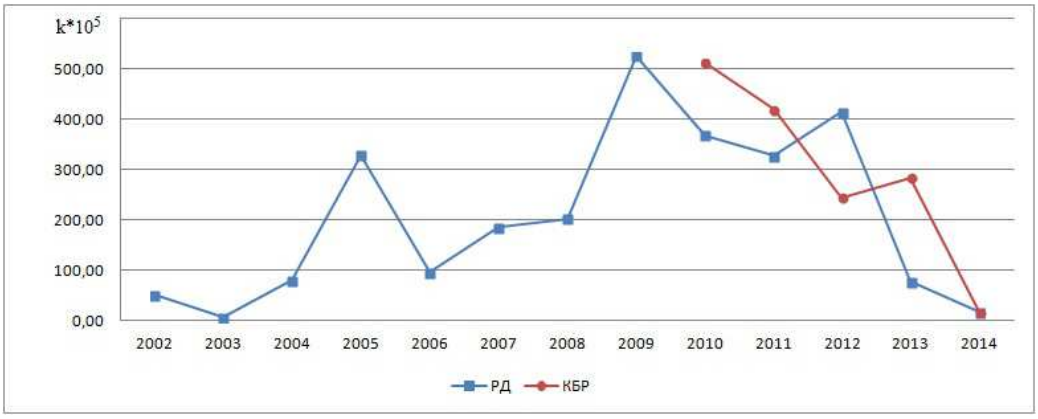


Рис. 1. Коэффициент восприимчивости экстремистской идеологии молодежью РД и КБР.

Таким образом, результаты моделирования объясняют причины роста в 2005–2011 гг. и падения — в 2011–2014 гг. привлекательности идей экстремизма и терроризма среди молодежи Дагестана и КБР.

К 2005 г. выросло целое поколение молодых людей, рожденных с 1988 по 1993, основой мировоззрения которого выступала религия. В условиях роста неравенства и завышенных ожиданий, радикальным религиозным структурам удавалось просто и доходчиво объяснять молодым людям, что во всех их бедах виновны отступники от истинной веры и коррумпированная власть. Следующее поколение было значительно менее религиозным и более прагматичным.

Литература

1. *Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х.* Террористическая активность в Кабардино-Балкарской республике в начале XI в. // Вестн. экспертного совета.—2017.—№ 2 (9).—С. 149–155.
2. *Basaeva E. K., Kamenetsky E. S., Khosaeva Z. Kh.* Terrorist Activity in Dagestan at the Beginning of the XXI Century // International Scientific Conference «Social and Cultural Trans-formations in the Context of Modern Globalism».—2019.—9 p.
3. *Сущий С. Я.* Северный Кавказ: Реалии, проблемы, перспективы первой трети XXI века.—М.: ЛЕНАНД, 2013.—432 с.
4. Кабардино-Балкария: хроника взрывов, обстрелов и терактов // Кавказский узел [сайт].—URL: https://www.kavkaz-uzel.eu/articles/172027/ (дата обращения 27.10.2016).
5. Дагестан: хроника террора (1996–2018 гг.) // Кавказский узел [сайт].—URL: https://www.kavkaz-uzel.eu/articles/73122/ (дата обращения 10.04.2018).
6. Регионы России. Социально-экономические показатели. (2007–2013) // Госкомстат РФ [сайт].—URL: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1138623506156 (дата обращения 10.12.2018).
7. Число умерших по основным классам и отдельным причинам смерти // Госкомстат РФ [сайт].—URL: www.gks.ru/dbscripts/cbsd/dbinet.cgi?pl=2415011 (дата обращения 18.04.1017).

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

МОДЕЛИРОВАНИЕ СМЕЩЕНИЯ АРЕАЛОВ ФИТОПЛАНКТОННЫХ ПОПУЛЯЦИЙ В УСЛОВИЯХ ИЗМЕНЕНИЯ ГИДРОЛОГИЧЕСКОГО РЕЖИМА В АЗОВСКОМ МОРЕ[1]

Ю. В. Белова

(Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Начиная с 2006 по 2020 год, показатель средней солености Азовского моря изменился с $9,4\%$ до 14%, причиной чему является уменьшение пресноводного стока рек, штормовые юго-восточные ветра и адвекция в Азовское море соленых черноморских вод [1]. Режим солености является важным звеном в продуктивности и процессах воспроизводства гидробионтов, в том числе ценных и промысловых рыб, поэтому его изучение на основе методов и средств математического моделирования является одной из актуальных задач, имеющих важное народно-хозяйственное значение.

Для изучения влияния солености на видовое разнообразие и географическую динамику фитопланктона прибрежных систем — Азовского моря и Таганрогского залива — разработана пространственно-трехмерная математическая модель биологической кинетики, основанная на системе нестационарных уравнений конвекции–диффузии–реакции параболического типа с нелинейными функциями источников и младшими производными [2]:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + u\frac{\partial q_i}{\partial x} + v\frac{\partial q_i}{\partial y} + w\frac{\partial q_i}{\partial z} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} q_i) + R_{q_i},$$

где $U = (u, v, w)$ — вектор скорости водного потока, [м/с]; k — коэффициент турбулентного обмена, [м^2/с]; R_{q_i} — химико-биологический источник (сток), [мг/(л $\cdot$ с)], $i = 1, \ldots, 10$: 1 — зеленая водоросль *Chlorella vulgaris*; 2 — синезеленая водоросль *Aphanizomenon flos-aquae*; 3 — диатомовая водоросль *Sceletonema costatum*; 4 — фосфаты; 5 — взвешенный органический фосфор; 6 — растворенный органический фосфор; 7 — нитраты; 8 — нитриты; 9 — аммоний; 10 — растворенный неорганический кремний (кремниевые кислоты).

Функциональная зависимость скорости роста гидробионтов от солености имеет вид:

$$f_S(S) = \begin{cases} r_s, & \text{если } S < S_{\text{opt}}, \\ \exp\left(-a_1\left\{(S - S_{\text{opt}})/S_{\text{opt}}\right\}^2\right), & \text{если } S > S_{\text{opt}}, \end{cases}$$

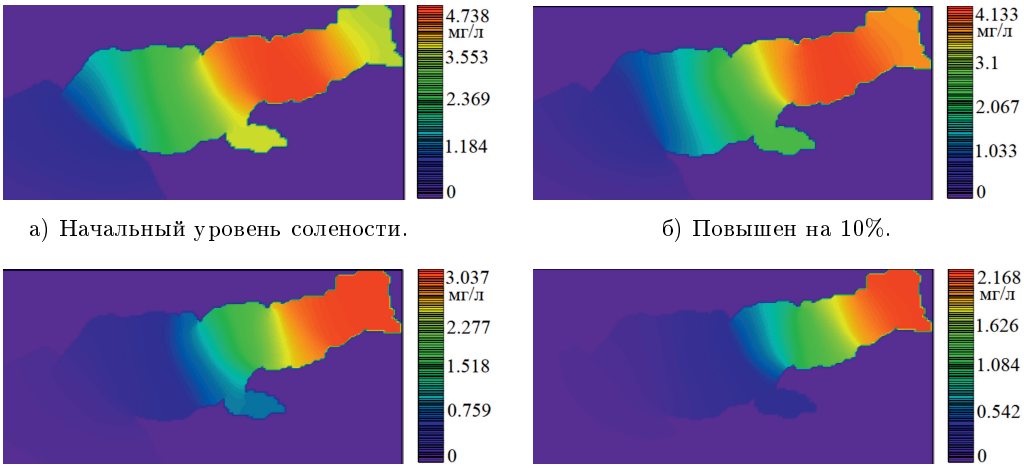
$$f_S(S) = \exp\left(-a_l\left\{(S - S_{\text{opt}})/S_{\text{opt}}\right\}^2\right), \quad l = 2, 3,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-01-00421.

где $r_s = 1$; S_{opt} — соленость, оптимальная для каждого вида фитопланктона; $a_l > 0$ — коэффициент ширины интервала толерантности каждого вида фитопланктона к солености.

Дискретизация непрерывной модели производится на основе линейной комбинации разностных схем «кабаре» и центральной разностной схемы, что позволяет повысить точность решения задачи биологической кинетики при больших значениях сеточного числа Пекле ($Pe > 2$). Для решения СЛАУ большой размерности использовался модифицированный попеременно-треугольный метод. На основе сценарного подхода проведен ряд численных экспериментов по моделированию динамики основных видов фитопланктонных популяций при различных уровнях солености вод в прибрежных системах.

Моделирование производилось в прямоугольной области, характерные размеры которой соответствуют физическим размерам Азовского моря, с использованием равномерной прямоугольной сетки, временной интервал — 30 суток. Проведена серия экспериментов для синезеленой водоросли (рис. 1), в которых соленость на выходе из залива меняется от 9% до 13,5%.



а) Начальный уровень солености. б) Повышен на 10%.

в) Повышен на 30%. г) Повышен на 50%.

Рис. 1. Распределение концентраций синезеленой водоросли (*Aphanizomenon flos-aquae*) при различных уровнях солености.

Численные эксперименты показали, что при росте солености в Азовском море синезеленые и зеленые водоросли смещаются к устью реки Дон и их концентрация уменьшается. Это влечет за собой изменение кормовой базы и ареала обитания пресноводных гидробионтов более высоких трофических уровней — зоопланктона, моллюсков и промысловых видов рыб.

Литература

1. *Матишов Г. Г., Ковалева Г. В., Ясакова О. Н.* Аномальное осолонение в Таганрогском эстуарии и дельте Дона // Наука Юга России (Вестник Южного научного центра РАН).—2016.—Т. 12, № 1.—С. 43–50.
2. *Nikitina A., Belova Y., Atayan A.* Mathematical modeling of the distribution of nutrients and the dynamics of phytoplankton populations in the Azov Sea, taking into account the influence of salinity and temperature // AIP Conference Proceedings.—2019.—Vol. 2188, № 050027.

АЛГОРИТМЫ И ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИЙ ИНТЕРФЕЙС ДЛЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ПЛАНКТОННЫХ ПОПУЛЯЦИЙ[1]

Ю. В. Белова (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ),
Е. О. Рахимбаева (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Спутниковые наблюдения позволяют получать большое количество информации о состоянии водной среды и береговой линии в режиме реального времени. С помощью обработки и анализа спутниковых изображений можно получить данные о состоянии водной среды и загрязнениях природного и антропогенного характера (судовых, биогенных, загрязнениях стоками), экстремальных метеорологических явлениях, вихревых структурах течений, сгонно-нагонных явлениях, направлениях течений, распространении ЗВ в прибрежных водах. Полученные данные после специальной обработки (фильтрации) могут быть использованы в качестве входных для задач гидродинамики и гидробиологии, а также для верификации математических моделей, описывающих изучаемые процессы. В настоящее время многие российские и зарубежные ученые занимаются разработкой математических моделей, позволяющих оценить первичную продуктивность водоемов на основе данных дистанционного зондирования земли: Матишов Г. Г., Бердников С. В., Демидов А. Б., Ли Ю. Дж. и др. Многие модели основаны на оценке концентрации хлорофилла в приповерхностном слое водоема [1]. Для обработки спутниковых снимков широко используются методы искусственного интеллекта. Методы распознавания изображений для Азовского моря позволяют получить информацию о границах водоема, которые динамически меняются, в том числе под воздействием метеорологических условий (например, экстремальный ветровой сгон воды в Таганрогском заливе в ноябре 2019 г.), величине, концентрации и характере их перемещения «пятен» фитопланктона, характере течений и других гидродинамических и гибробиологических процессах.

Для определения границы рассматриваемой расчетной области сложной формы разработан алгоритм обработки изображений, реализованный в виде программного модуля на языке программирования Python в среде разработки PyCharm, построенный на основе классификатора, представляющего собой статистическую математическую модель, автоматически параметризуемую на основе машинного обучения [2]. Программное средство позволяет выделить контур Азовского моря по спутниковым снимкам и покрыть расчетную область неравномерной сгущающейся сеткой.

Опишем работу программного модуля на языке Python с пользовательским интерфейсом для обработки данных дистанционного зондирования Земли. При

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации в рамках научного проекта № МД-3624.2021.1.1.

нажатии на кнопку «Добавить» необходимо выбрать и загрузить изображение из файла. При нажатии на кнопку «Выделить» происходит преобразование входного изображения в режим HSV. При помощи специальных ползунков необходимо настроить бинарную маску изображения таким образом, чтобы береговая линия выделялась наиболее точно. Далее происходит непосредственно выделение границы цветом, формирование и отрисовка полученного изображения. При нажатии на кнопку «Сетка» происходит загрузка исходного изображения из файла. С использованием выделенной береговой линии выполняется поиск центра объекта. Далее происходит построение сетки, формирование и отрисовка полученного изображения. При нажатии на кнопку «Удалить» происходит очистка полей вывода для обработки последующих изображений.

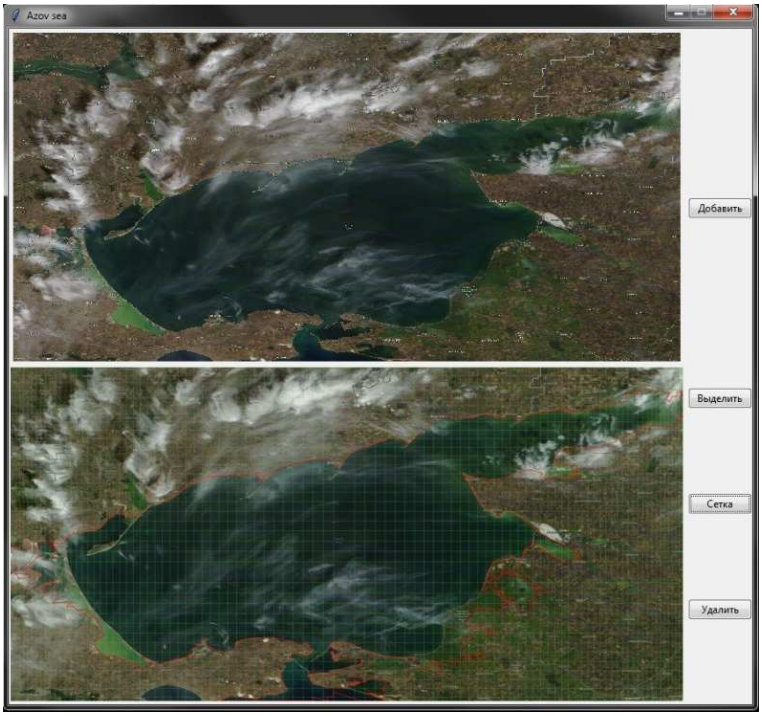


Рис. 1. Пользовательский интерфейс программы для определения границ Азовского моря.

С помощью алгоритмов обработки изображений получен контур природного объекта — Азовского моря. Предложенный алгоритм позволяет оперативно получать значение динамически изменяющихся границ моря, в том числе при возникновении чрезвычайных ситуаций — ветровых сгонах и штормовых нагонах.

Литература

1. *Campbell J. W., Antoine D.* Comparison of algorithms for estimating ocean primary production from surface chlorophyll, temperature,and irradiance // Global Biogeochem. Cycles.—2002.—Vol. 16, № 3.—P. 1035.
2. *Гонсалес Р. С., Вудсю Р. Е.* Цифровая обработка изображений.—М.: Техносфера, 2012.—1081 с.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО[1]

И. В. Богачев

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Предварительные (остаточные) напряжения (ПН) в телах и конструкциях образуются в результате применения технологических производственных операций (литья, штамповки, сварки, прокатки и др.). Они могут возникать в процессе неоднородных пластических деформаций, а также под воздействием полей высоких температур после остывания. Ввиду того, что ПН зачастую достигают достаточно больших значений, этот фактор может оказывать значительное влияние на деформационные характеристики и обязательно должен учитываться при моделировании.

В современной промышленности и строительстве неоднородные пластинчатые конструкции имеют широкое применение. При изготовлении многих из них используются композитные или функционально-градиентные материалы, отличающихся повышенной податливостью на сдвиг. Для корректного описания их поведения при динамическом воздействии необходимо учитывать деформации поперечного сдвига и использовать уточненные модели, например, модель Тимошенко. Также при использовании современных неоднородных материалов во многих случаях в телах возникают поля ПН, имеющие естественную или искусственную природу. Так, в строительстве, при производстве плитовых перекрытий из железобетона характерно искусственное введение ПН в арматуру для повышения функциональных характеристик плит, в частности, прочности на растяжение и изгиб. Также предварительно напряженные пластины используются как составные части хлопающих мембран, фланцев, режущих дисков, перегородок и других конструкций. Ввиду этого существенную важность имеет разработка неразрушающих методик диагностики уровня и распределения ПН внутри исследуемых тел и конструкций. Одним из наиболее удобных для практического использования, высокоточным и эффективным является метод акустического зондирования, который может быть использован для определения неоднородных ПН.

В данной работе представлена модель неоднородной по радиальной координате круглой пластины в рамках гипотез Тимошенко, находящейся под действием плоского поля неоднородных предварительных напряжений. Рассмотрен случай осесимметричных установившихся изгибных колебаний, вызванных нормальной нагрузкой, приложенной к поверхности. Постановка задачи записана на

[1]Работа выполнена при поддержке внутреннего гранта Южного федерального университета, № ВнГр-07/2020-04-ИМ (Министерства науки и высшего образования Российской Федерации).

основе общей линеаризованной модели предварительно напряженно-деформированного упругого тела. Для рассматриваемых гипотез Тимошенко в цилиндрической системе координат получены выражения для компонент несимметричного тензора напряжений Пиолы, а также для изгибающих моментов и перерезывающей силы, в состав которых входят функции предварительных напряжений. Построена схема решения прямых задач расчета колебаний пластины, основанная на методе Галёркина. С ее помощью был проведен анализ влияния компонент предварительных напряжений на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), определено, что наибольшим образом оно проявляется в окрестности резонансных частот. Результаты исследования являются основой разрабатываемой методики определения функций-компонент тензора предварительных напряжений с использованием дополнительной информации об акустическом отклике — значениях АЧХ, измеренных в заданном частотном диапазоне.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

РЕКОНСТРУКЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ[1]

И. В. Богачев

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В настоящее время одними из наиболее важных являются задачи моделирования объектов и конструкций, при производстве которых используются современные материалы сложной структуры, в частности, функционально-градиентные материалы. В связи с особенностями процесса производства таких объектов, в котором используется прокатка, сварка, ковка, термообработка, в них часто присутствует поле неоднородного предварительно напряженного состояния (ПНС). Также при производстве некоторых объектов управляемые ПНС искусственно закладываются в технологический процесс с целью снижения вероятности возникновения разрушений, а также для улучшения механических свойств конструкций. В связи с этим возникает необходимость в проведении экономичной неразрушающей диагностики как механических свойств изделий, так и ПНС, для которой могут использоваться, в частности, акустические методы. Подобная методика решения обратной задачи реконструкции механических характеристик (параметров Ламе) и одноосного ПНС неоднородной по толщине упругой полосы рассмотрена в данной работе. К верхней грани полосы приложена периодическая зондирующая нагрузка, нижняя грань жестко защемлена. Обратная задача заключалась в определении параметров Ламе (как функций поперечной координаты) и ПНС по данным о значениях амплитудно-частотных характеристик в некоторой точке верхней грани полосы. Постановка исходной задачи в плоском случае записана на основе общей линеаризованной постановки задачи об установившихся колебаниях тела с ПНС. С использованием преобразования Фурье по продольной координате исходная двумерная задача записана в трансформантах в каноническом виде. Затем использовано формальное разложение функций, входящих в постановку полученной задачи, по степеням параметра преобразования. В результате был выписан набор краевых задач, которые удалось разделить, отдельно рассмотрев точечное и распределенное нагружение. В итоге была построена двухэтапная схема решения обратной задачи, в рамках которой на первом этапе с помощью итерационного подхода определяются законы изменения параметров Ламе, а на втором с помощью проекционного подхода определяется ПНС. Результаты использования схемы проиллюстрированы набором вычислительных экспериментов, даны рекомендации по выбору зондирующих частот и частотных диапазонов, обеспечивающих оптимальную точность реконструкции.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект №18-71-10045.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧИ О РАССЛОЕНИИ ПОЛОСЫ ОТ ОСНОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. О. Ватульян
(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владиквказ, ЮМИ ВНЦ РАН),
О. В. Явруян
(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владиквказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Исследование прямых задач теории трещин в рамках линейной теории упругости, как правило, сводится к исследованию сингулярных или гиперсингулярных интегральных операторов, порождаемые при этом сингулярные решения не имеют физического обоснования, а служат лишь подтверждением несоответствия выбранной математической модели реальному поведению объекта исследования. Так, например, в случае тел, содержащих трещинообразные дефекты, сингулярные решения возникают при анализе напряженного состояния в окрестности вершин трещин, и именно напряжения в вершинах трещин определяют критерии прочности и соответствующие правила для нахождения коэффициентов интенсивности напряжений. Таким образом, математические модели линейной теории упругости не отвечают в полной мере на вопрос о реальном напряженно-деформированном состоянии объекта с трещиной в зонах концентрации напряжений и приходится обращаться к неклассическим теориям для более точного описания НДС в соответствующих зонах.

К одной из самых популярных неклассических теорий упругости относится градиентная теория упругости, основные модели которой были предложены в конце прошлого века Р. Д. Миндлином, Э. С. Айфантисом, М. В. Лурье [1–3]. В основе предлагаемых моделей лежит учет не только линейной зависимости между тензорами напряжениями и деформациями, но и учет градиента тензора деформации. При этом возникают не только классические напряжения Коши, но и моментные напряжения. Градиентные слагаемые в определяющих соотношениях входят с множителями — градиентными параметрами — основными параметрами градиентной теории упругости, а порядок соответствующих уравнений движения/равновесия повышается.

К настоящему моменту статические задачи о трещинах моды I, II, III в рамках градиентной теории упругости исследованы достаточно подробно и представлены в работах G. Exadaktylos, I. Vardoulakis и E. Aifantis [3, 4], F. Erdogan и G. D. Gupta [5], L. Zhang, Y. Huang и J. Y. Chen [6], G. H. Paulino [7]. Исследованы статические задачи о трещинах моды I, II, III в однородных или неоднородных, функционально-градиентных средах. Получены граничные интегральные уравнения относительно скачков полей смещений на берегах трещины, рассчитаны коэффициенты интенсивности напряжений у вершин трещины, осуществлено сравнение с упругим случаем. Динамические задачи исследованы значительно в меньшей степени.

В работе исследована динамическая задача о колебаниях изотропной полосы с расслоением в рамках градиентной теории упругости. Рассмотрена двухпараметрическая градиентная модель Айфантиса. Градиентные параметры имеют размерность длины (длины расслоения $2a$). Решение прямой задачи сведено к решению граничного интегро-дифференциального уравнения (ГИУ) относительно функции раскрытия трещины. Исследованы особенности ядра ГИУ, представленные интегралом по контуру в конечной плоскости, в соответствии с принципом предельного поглощения. В отличие от линейной теории упругости, когда оператор содержит сингулярный интегральный оператор, в случае градиентной теории упругости полученное ГИУ имеет кубическую сингулярность. Таким образом, в отличие от линейной теории упругости, когда градиент перемещения в вершинах трещины имеет особенность вида $(x^2 - a^2)^{-1/2}$, в градиентной теории упругости за счет кубической сингулярности особенность имеет вид $(x^2 - a^2)^{1/2}$ и соответствующие деформации в окрестностях не имеют особенности. Таким образом, сингулярное решения классической теории упругости переходит в регулярное решение. Анализ полученного ГИУ может быть осуществлено с использованием метода коллокаций, квадратурных формул для сингулярных интегралов, либо с использованием аппроксимирующих полиномов Чебышева первого и второго родов и соответствующих формул для вычисления интегралов от специальных функций.

Составлен вычислительный модуль для решения соответствующей прямой задачи. Построены функции раскрытия трещины в зависимости от различных значений градиентных параметров, от различных значений волнового числа. Приведено сравнение и верификация результатов с классическим упругим случаем. Проведен анализ НДС в окрестности вершин трещины. Таким образом, градиентная теория упругости при исследовании задач теории трещин позволяет перейти от сингулярных решений к регулярным решениям, определить новые критерии прочности, уточнить НДС в окрестности концентраторов напряжений.

Литература

1. *Mindlin R. D.* Micro-structure in linear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal.—1964.—Vol. 16.—P. 51–78.
2. *Лурье М. В.* Задачи Ламе в градиентной теории упругости // Докл. АН СССР.—1968.—Т. 181, № 5.—С. 1087–1089.
3. *Aifantis E. C.* Gradient effects at the macro, micro and nano scales // J. Mech. Behav. Mater.—1994.—Vol. 5, № 3.—P. 335–353.
4. *Exadaktylos G., Vardoulakis I., Aifantis E. C.* Cracks in gradient elastic bodies with surface energy // Int. J. Fract.—1996.—Vol. 79, № 2.—P. 107–119.
5. *Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S.* Numerical solution of singular integral equations // Mechanics of Fracture.—1973.—P. 368–425.
6. *Zhang L., Huang Y., Chen J. Y., Hwang K. C.* The mode III full-field solution in elastic materials with strain gradient effects // Int. J. Fract.—1998.—Vol. 92, № 4.—P. 325–348.
7. *Paulino G. H., Fannjiang A. C., Chan Y. S.* Gradient elasticity theory for mode III fracture in functionally graded materials—part i: crack perpendicular to the material gradation // J. Appl. Mech.—2003.—Vol. 70.—P. 531–542.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА РАСТВОРЕНИЯ УПРУГОГО КАРКАСА ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

О. В. Гальцев
(Россия, Белгород; НИУ «БелГУ»)

В настоящее время математическое моделирование подземной гидродинамики условно можно разделить на две группы: а) описание опирается на систему уравнений Дарси и допущение, где горные породы и грунт считаются абсолютно твердыми телами; б) описание строится с учетом упругих свойств горных пород. Математическое же описание растворения грунта под воздействием активных кислот предлагается множеством авторов. Первая часть таких работ рассматривает физический процесс на макроскопическом уровне. В макроскопических моделях характерными размерами рассматриваемой области являются метры или десятки метров. В силу этого указанные модели не различают структуру пор (микроструктуру), поскольку в них присутствует как матрица грунта, так и жидкость в порах этого грунта. Другая часть работ посвящена описанию процесса кислотной обработки различных типов пород в масштабе пор и трещин (на микроскопическом уровне). При этом сами авторы утверждают об отсутствии окончательного способа связать изменения среды с изменениями структуры и используют полуэмпирические соотношения [1, 2], которые служат для связи с локальной пористостью. Современная теоретическая подземная гидродинамика, начиная с работы Л. Тартара, показывает, что микроскопическое описание флюида в порах при усреднении переходит в макроскопическое описание системой уравнений Дарси. Успех этой работы стимулировал обоснование знаменитых моделей М. Био, описывающих протекающие совместно процессы деформации упругой среды (матрицы грунта) и течения флюида в ней, как усреднение классических уравнений механики сплошных сред. Точная же постановка задачи о выщелачивании редкоземельных металлов в среде с одной пористостью для абсолютно твердого тела на микроскопическом уровне приводится в работах А. М. Мейрманова [3], где математически строгие результаты о существовании какого-либо решения отсутствуют.

В настоящем исследовании главной идеей при описании процесса растворения грунта активными кислотами является двухуровневое моделирование. На первом (микроскопическом) уровне описания, где единицей измерения являются микрон или десятки микрон, очистка призабойной зоны нефтяных скважин в порах и капиллярах описывается точными уравнениями классической механики сплошных сред и теоретической химии. Второй (макроскопический) уровень описания, где единицами измерения являются метры или десятки метров, соответствует реальным масштабам нефтяных резервуаров. При этом учитываются реальные скорости жидкостей в капиллярах (несколько метров в год),

которые позволяют ограничиться линейными уравнениями Стокса (вместо уравнений Навье — Стокса), что значительно упрощает как теоретические, так и численные исследования.

Рассматривается задача кислотной обработки (выщелачивания) непериодического упругого каркаса грунта с двойной пористостью, где за малый безразмерный параметр принимается величина, равная отношению характерного размера пор и характерного размера рассматриваемой физической области, а жидкость считается слабовязкой. Перемещения упругого твердого каркаса грунта описываются уравнением Ламе, а распространение кислоты — конвективным уравнением диффузии. Задача дополнена обязательными условиями на сильном разрыве (искомой свободной границе), разделяющей поровое пространство и каркас грунта, вытекающими из законов сохранения классической механики в их интегральной форме и законов теоретической химии. Затем, используя современные методы усреднения, выводятся макроскопические аналоги этой модели.

Не менее важной по своей значимости задачей является разработка вычислительных алгоритмов и научно-исследовательской версии программного обеспечения, позволяющих проводить численные эксперименты по выявлению зависимостей между параметрами уже усредненной модели. Сам алгоритм имеет двухэтапную схему нахождения неизвестных. Эта вынужденная мера обусловлена невозможностью определить степень перемещения упругой составляющей пористой среды на начальном этапе моделирования. Также двухступенчатость алгоритма диктуется необходимостью решения вспомогательных задач по нахождению неизвестных матриц для выбранной структуры пористой среды на микроскопическом уровне.

Используя программную реализацию алгоритма, численно решается как одномерная, так и двухмерная макроскопическая задача. Для этого проводится временная и пространственная дискретизации.

В ходе компьютерного моделирования получены зависимости скорости распространения концентрации реагента от коэффициента упругости скелета пористой среды, значения пористости в различные моменты времени вычислений при фиксированных остальных коэффициентах, значения общей пористости от радиуса пор и трещин. При отсутствии каких-либо возмущений изменения профилей концентрации и пористости происходят равномерно. Для выбранной структуры пористой среды в качестве эксперимента задавались возмущения концентрации на входной границе. Исследования коэффициента упругости Ламе показали его влияние на процесс распространение концентрации реагента.

Литература

1. *Ratnakar R., Kalia N., Balakotaiah V.* Carbonate matrix acidizing with gelled acids: An experiment-based modeling study // SPE International Production and Operations Conference & Exhibition.—Doha, 2012.—P. 154–158.
2. *Maheshwari P., Balakotaiah V.* Comparison of carbonate HCl acidizing experiments with 3D simulations // SPE Production & Operations.—2013.—Vol. 28, № 4.—P. 402–413.
3. *Meirmanov A. M.* Mathematical Models for Poroelastic Flow.—Paris: Atlantis Press, 2014.—477 p.

SIMULATION OF TWO-PHASE FLOWS BEHIND A STREAMLINED BODY

N. F. Dimitrieva
(Ukraine, Kyiv; IHM NASU, NTUU KPI)

One of the methods to reduce drag is to create a system of cavities on the streamlined surface filled with vapor or air which is called as supercavitation [1]. Ventilated cavities behind a streamlined body at a relatively low flow velocity are examined.

At a low flow velocity, the effect of liquid phase evaporation can be neglected. Volume of Fluid method is used to solve. The two immiscible media are considered one effective fluid all over the domain. Mathematical modelling of the problem is based on the equation set of incompressible fluid mechanics which includes equations of continuity, Navier–Stokes, diffusion of phase volume fraction:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + f_{\sigma i},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha u_j) = 0, \quad \rho = \alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2, \quad f_{\sigma i} = \sigma\kappa \frac{\partial \alpha}{\partial x_i},$$

where u_i is component of the velocity field, ρ is density, ρ_1 is water density, ρ_2 is air density, p is the pressure, μ is the dynamic viscosity coefficient, t is time, $f_{\sigma i}$ is surface tension, σ is the surface tension constant, κ is the interfacial curvature. The phase fraction α is defined at all mesh points in following way.

Function $\alpha = 1$ if the point location is occupied by liquid and $\alpha = 0$ if there is an air. Cells with a value of $0 < \alpha < 1$ must have a free interfacial surface. Thus, the Volume of Fluid method provides a simple and economical free surface detection method in the mesh.

Numerical modeling is carried out within the framework of the open-source software OpenFOAM (`www.openfoam.com`) by the finite volume method. A standard numerical model interFoam is used to solve this problem corresponding to the above equation set.

The considered domain has dimensions of $30 \times 30 \times 110$ mm. At a distance of 15 mm from the initial section is a hemispherical body (cavitator) with a diameter of 5 mm. It is proposed to use the snappyHexMesh technique intended for automatic generation of three-dimensional unstructured meshes with a predominance of hexahedral elements. As a result, the mesh is constructed that takes into account small-scale flow elements in the interfacial zone and near the streamlined body [2].

Numerical experiments showed that a stable air cavity is formed in the wake of the body (Fig. 1).

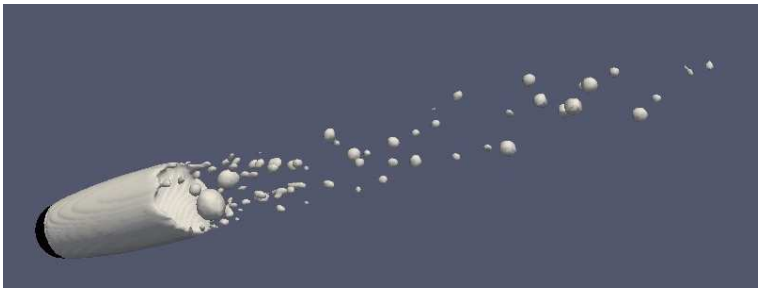


Fig. 1. Air cavity visualization.

The influence of geometric and dynamic parameters on the formation and development of an air cavity, its size, shape and stability has been investigated. The thickness of the air cavity depends on the diameter of the cavitator and does not depend on the diameter of the blowing hole [3]. Increasing the velocity or flow rate of gas has a positive effect on the length and stability of the formed cavity. Good qualitative agreement with experimental data was obtained [4].

References

1. *Savchenko Yu. N., Semenenko V. N., Savchenko G. Yu.* Features of manoeuvring at the supercavitation flowing around // Applied Hydromechanics.—2016.—Vol. 18 (90), № 1.—P. 79–82.
2. *Dimitrieva N. F., Voropaiev G. O., Fal V. O.* Technique for calculating the formation of a vapor cavity behind a streamlined body // Proc. VII Intern. Conf. "Computer Hydromechanics".—Kyiv: IHM NASU, 2020.—P. 27–28.
3. *Dimitrieva N. F.* Numerical simulation of the problem of blowing gas into a liquid flow // Proc. Topical Problems of Fluid Mechanics.—Prague: Institute of Thermomechanics, 2020.—P. 32–39.
4. *Voropaiev G. O., Korobov V. I., Dimitrieva N. F.* Modeling of a ventilated cavity behind a streamlined body // J. Comput. Appl. Math.—2021.—Vol. 135, № 1.—P. 73–79.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ «ХИЩНИК–ЖЕРТВА» НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ТИПА ДИФФУЗИЯ–АДВЕКЦИЯ–РЕАКЦИЯ[1]

П. А. Зеленчук

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Математическое моделирование систем «хищник–жертва» находится в центре внимания многих ученых на протяжении почти уже ста лет. Эти исследования выросли к настоящему времени в самостоятельную и довольно обширную научную область, находящуюся на стыке биологии, математики и экологии [1, 2].

Для описания популяционной динамики эффективно используются различные математические методы, например теория матриц и графов [3], статистический анализ [4] или системный анализ [5, 6]. Однако в силу того, что взаимодействие видов, как правило, нелинейно, классический подход, основанный на дифференциальных уравнениях, по-прежнему является наиболее распространенным.

Среди прочего наибольший интерес вызывают вопросы, касающиеся пространственных аспектов популяционной динамики и неоднородности среды обитания [7, 8]. Эти два фактора играют важнейшую роль в системах типа «хищник– жертва» или «хозяин–паразит» и делают их изучение особенно актуальным.

Математическая модель пространственно-временного взаимодействия жертвы с плотностью $u(x,t)$ и хищника с плотностью $v(x,t)$ может быть записана в виде системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-k_1\frac{\partial u}{\partial x} + u\left(\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x} - \beta_1\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + u\left[\alpha_1 f(u) - \frac{b_1 v}{1+cu}\right],$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-k_2\frac{\partial v}{\partial x} + v\left(\alpha_2\frac{\partial u}{\partial x} - \beta_2\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + v\left[-\alpha_2 + \frac{b_2 u}{1+cu}\right],$$

где в первых квадратных скобках стоят потоковые слагаемые, отвечающие за диффузию (с коэффициентами k_i) и направленную миграцию (с коэффициентами α_i, β_i), а во вторых квадратных скобках — члены реакции. При этом функция $f(u)$ определяет закон роста жертвы, а второе слагаемое характеризует функциональный отклик хищника.

В работе приводится аналитическое и численное исследование данной модели для одномерного кольцевого ареала с неравномерно распределенным ресурсом жертвы. Вычислительный эксперимент основан на методе прямых и схеме смещенных сеток. Рассмотрено формирование стационарных и колебательных решений системы, изучен вопрос устойчивости этих решений при малых возмущениях диффузионных и миграционных параметров.

[1]Работа поддержана грантом Правительства Российской Федерации, № 075-15-2019-1928.

Литература

1. *Murray J. D.* Mathematical Biology. II: Spatial Models and Biomedical Applications.—N. Y.: Springer-Verlag, 2003.
2. *Ризниченко Г. Ю., Рубин А. Б.* Математические методы в биологии и экологии. Биофизическая динамика продуктивных процессов в 2 ч. Ч. 2.—М.: Юрайт, 2019.—185 с.
3. *Logofet D. O.* Matrices and Graphs. Stability Problems in Mathematical Ecology.—Boca Raton, FL: CRC Press, 1993.—308 p.
4. *Matsuda H., Ogita N., Sasaki A., Sato K.* Statistical mechanics of population // Progr. Theor. Phys.—1992.—Vol. 88.—P. 1035–1049.
5. *Cannas S. A., Marco D. E., Paez S. A.* Modelling biological invasions: species traits, species interactions and habitat heterogeneity // Math. Biosci.—2003.—Vol. 183.—P. 93–110.
6. *Borrelli J. J., Allesina S., Amarasekare P., Arditi R., Chase I., Damuth J., Holt R. D., Logofet D. O. et al.* Selection on stability across ecological scales // Trends Ecol. Evolution.—2015.—Vol. 30, № 7.—P. 417–425.
7. *Hassell M. P.* The Spatial and Temporal Dynamics of Host-parasitoid Interactions.—Oxford: Oxford Univ. Press, 2000.—212 p.
8. *Cantrell R. S., Cosner C.* Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations.—Chichester, UK: John Wiley and Sons, 2003.—411 p.

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГОМОГЕНИЗАЦИЯ ПОРИСТЫХ НЕОДНОРОДНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ И АЛГОРИТМА 3–0 ПАКЕТА ACELAN-COMPOS ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ[1]

Дж. Иоване (Италия, Салерно; университет Салерно),
А. В. Наседкин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
А. А. Наседкина (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В настоящей работе представлены метод эффективных модулей и метод конечных элементов для гомогенизации пористых неоднородно поляризованных пьезоэлектрических композитов. Описаны теоретические аспекты метода эффективных модулей для неоднородных пьезоэлектрических сред. В задачах гомогенизации были рассмотрены четыре статические пьезоэлектрические задачи для представительного объема, позволяющие найти эффективные модули неоднородного тела. Эти задачи отличались граничными условиями, которые задавались на поверхности представительного объема [1]: линейные по пространственным переменным механические смещения и электрический потенциал, линейные механические смещения и постоянная нормальная составляющая вектора электрического смещения, постоянный вектор механического напряжения и линейный электрический потенциал, а также постоянные вектор механического напряжения и нормальная составляющая вектора электрического смещения. Для всех четырех типов краевых задач дано математическое обоснование метода эффективных модулей и на основе энергетических критериев получены соответствующие уравнения для расчета эффективных модулей пьезоэлектрических сред с произвольной анизотропией.

На основе этих уравнений был рассчитан полный набор эффективных модулей для пористого пьезокерамического композита с широким диапазоном пористости с помощью метода конечных элементов, реализованного в пакете ANSYS и в специализированном программном комплексе ACELAN-COMPOS, предназначенным для гомогенизации пьезокомпозитов с различной внутренней микроструктурой. Поры моделировались с использованием алгоритма «3–0 гранулы» в пакете ACELAN-COMPOS [2, 3] с опцией отсутствия пустот на границе представительного объема. Далее модели представительных объемов, сгенерированные в ACELAN-COMPOS, были перенесены в конечно-элементный пакет ANSYS, в котором были решены соответствующие краевые задачи электроупругости, найдены необходимые осредненные решения для компонент напряжений и вектора электрических смещений, что и позволило рассчитать эффективные модули композита.

[1]Работа второго и третьего авторов были поддержаны Правительством РФ в рамках контракта № 075-15-2019-1928.

Здесь было также смоделировано неоднородное поле поляризации вокруг пор. Чтобы учесть этот эффект, предварительно по методу конечных элементов в пакете ANSYS решалась задача электростатики для пористого диэлектрического материала с той же геометрической структурой представительного объема. Из решения этой задачи были получены поля электрического смещения и напряженности электрического поля, и по ним было найдено предполагаемое поле поляризации в пористом пьезоматериале. После этого материальные свойства конечных элементов изменялись с диэлектрических на пьезоэлектрические, причем для каждого пьезоэлектрического конечного элемента матрицы композита задавались элементные систем координат, соответствующие оси которых были повернуты вдоль векторов поляризации. В результате были получены представительные объемы с неоднородно поляризованной пьезокерамической матрицей.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что все рассмотренные четыре варианта граничных условий могут быть использованы в задачах гомогенизации, так как дают достаточно близкие результаты. Учет неоднородной поляризации важен для прецизионного моделирования пористых пьезокомпозитов, особенно со сложной структурой пор и с высокой пористостью.

Описанная техника может быть применена также для нанопористых пьезокомпозитов при учете размерных эффектов по моделям поверхностных напряжений и их обобщений на границах пор [4, 5].

Литература

1. *Iovane G., Nasedkin A. V.* Finite element modelling of ceramomatrix piezocomposites by using effective moduli method with different variants of boundary conditions // Mater. Phys. Mech.—2019.—Vol. 42, № 1.—P. 1–13. DOI: 10.18720/MPM.4212019_1.
2. *Kudimova A. B., Nadolin D. K., Nasedkin A. V., Oganesyan P. A., Soloviev A. N.* Finite element homogenization models of bulk mixed piezocomposites with granular elastic inclusions in ACELAN package // Mater. Phys. Mech.—2018.—Vol. 37, № 1.—P. 25–33. DOI: 10.18720/MPM.3712018_4.
3. *Kudimova A. B., Nadolin D. K., Nasedkin A. V., Nasedkina A. A., Oganesyan P. A., Soloviev A. N.* Finite element homogenization of piezocomposites with isolated inclusions using improved 3–0 algorithm for generating representative volumes in ACELAN-COMPOS package // Mater. Phys. Mech.—2020.—Vol. 44, № 3.—P. 392–403. DOI: 10.18720/MPM.4432020_10.
4. *Iovane G., Nasedkin A. V.* Finite element study of ceramic matrix piezocomposites with mechanical interface properties by the effective moduli method with different types of boundary conditions // Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials. Advanced Structured Materials. Vol. 109 / Ed. M. A. Sumbatyan.—Singapore: Springer, 2019.—Ch. 12.—P. 163–179. DOI: 10.1007/978-3-030-17470-5_12.
5. *Iovane G., Nasedkin A. V.* Numerical modelling of two-phase piezocomposites with interface mechanical anisotropic effects // Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures. Advanced Structured Materials. Vol. 103 / Eds. H. Altenbach, A. Belyaev, V. Eremeyev, A. Krivtsov, A. Porubov.—Singapore: Springer, 2019.—Ch. 16.—P. 293–304. DOI: 10.1007/978-3-030-11665-1_16.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ ФОРМИРОВАНИЯ БИОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР В СЛУЧАЕ МАЛОГО КОЛИЧЕСТВА ДАННЫХ

А. В. Казарников (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
Х. Хаарио (Финляндия, Лаппеенранта; ЛТУ-университет),
А. Марчиниак-Зохра (Германия, Гейдельберг; Гейдельбергский университет),
Р. Шайхл (Германия, Гейдельберг; Гейдельбергский университет)

Формирование структур в биологических тканях играет важную роль в процессах развития живых организмов [1, 2]. Начиная с классической работы Алана Тьюринга [3], многие биологические структуры описываются при помощи механизма реакции-диффузии. В данной модели постулируется, что на поверхности эмбриона находятся два диффундирующих вещества: активатор и ингибитор, в результате взаимодействия которых происходит формирование устойчивых концентрационных пред-структур, определяющих дальнейшее развитие морфологической структуры организма. Для протекания этого процесса необходимо, чтобы скорость распространения активатора была существенно выше скорости распространения ингибитора, но для многих биологических объектов до сих пор не обнаружены реальные вещества, удовлетворяющие условиям Тьюринга [4]. Поэтому для объяснения процесса морфогенеза предлагаются и другие механизмы. Например, в механико-химических моделях [5] функцию ингибитора выполняет искривляющаяся поверхность эмбриона, а в моделях, представляющих собой комбинацию уравнения реакции-диффузии и обыкновенного дифференциального уравнения, формирование структур происходит вследствие гистерезиса [6, 7].

Во многих экспериментальных ситуациях для непосредственного наблюдения доступны лишь конечные стационарные режимы, а начальные данные и переходные процессы неизвестны. В данном случае имеющаяся в наличии информация является неполной, поэтому фиксированным значениям параметров биологической модели соотвествует некоторое семейство структур, а не одно конкретное решение. Это существенно затрудняет вычисление невязки между прогнозом математической модели и экспериментальными данными.

В работе [8] был предложен статистический метод для идентификации параметров систем реакции-диффузии по информации о тьюринговых структурах. Основная идея метода заключается в сопоставлении вектору управляющих параметров модели $\boldsymbol{\theta}$ некоторой случайной величины $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\theta})$, подчиняющейся многомерному нормальному распределению $N(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}))$. Рассмотрим тренировочную выборку из N_{set} тьюринговых структур, полученных для некоторого неизвестного вектора параметров $\boldsymbol{\theta}_0$. По этим данным можно аппроксимировать параметры распределения $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\theta}_0) \sim N(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_0), \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}_0))$, причем точность аппроксимации зависит от объема выборки N_{set}. Тогда стохастическая функция невязки имеет вид:

$$f(\boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_0))\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_0))^t. \quad (1)$$

Точечная оценка для вектора $\boldsymbol{\theta}_0$ находится путем минимизации функции (1). Далее применяются байесовские методы для нахождения всех значений параметров, соотвествующих данным из тренировочной выборки.

В данной работе рассматривается случай, когда объем тренировочной выборки N_{set} недостаточен для корректной аппроксимации $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_0)$ и $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}_0)$. Предложены две модификации, позволяющие корректно определить случайную величину $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\theta})$ и повысить точность идентификации параметров без увеличения объема тренировочной выборки. Корректность работы метода проверяется на различных классах моделей формирования структур: системах реакции-диффузии, механико-химических моделях и моделях, представляющих собой комбинацию уравнения реакции-диффузии и обыкновенного дифференциального уравнения. Для всех рассматриваемых моделей реализованы параллельные алгоритмы численного интегрирования, позволяющие проводить вычисления на графических процессорах NVidia. Программы реализованы на языке C++, взаимодействие с видеокартой осуществляется при помощи технологии CUDA. Код для всех численных экспериментов, проведенных в работе, доступен в открытом доступе на платформе GitHub.

Литература

1. *Murray J. D.* Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications.—Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.—838 p.
2. *Perthame B.* Parabolic Equations in Biology: Growth, Reaction, Movement and Diffusion.—Heidelberg: Springer-Verlag, 2015.—201 p.
3. *Turing A. M.* The Chemical basis of morphogenesis // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. B. Biol. Sci.—1952.—Vol. 237, № 641.—P. 37–72.
4. *Mercker M., Hartmann D., Marciniak-Czochra A.* A mechanochemical model for embryonic pattern formation: Coupling tissue mechanics and morphogen expression // PLOS ONE.—2013.—Vol. 8, № 12.—P. 1–6.
5. *Brinkmann F., Mercker M., Richter T., Marciniak-Czochra A.* Post-Turing tissue pattern formation: Advent of mechanochemistry // PLOS Computational Biology.—2018.—Vol. 14, № 7.—P. 1–21.
6. *Takagi I., Kothe A., Marciniak-Czochra A.* Hysteresis-driven pattern formationin reaction-diffusion-ODE systems // Discrete Contin. Dyn. Syst.—2020.—Vol. 40, № 6.—P. 3595–3627.
7. *Harting S., Marciniak-Czochra A., Takagi I.* Stable patterns with jump discontinuity in systems with Turing instability and hysteresis // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser A.—2017.—Vol. 37, № 2.—P. 757–800.
8. *Kazarnikov A., Haario H.* Statistical approach for parameter identification by Turing patterns // J. Theor. Biol.—2020.—Vol. 501.—P. 110319.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ЗАДАЧА О ТЕНИ ДЛЯ ОРИШАРОВ И ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

А. В. Костин

(Россия, Елабуга; ЕИ КФУ)

Задача о тени предложена в 1982 году Гулмирзой Худайберганoвым в следующей постановке: какое минимальное число шаров с центрами на единичной сфере евклидова пространства и радиусами, меньшими единицы, достаточно, чтобы любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекалась хотя бы с одним из этих шаров?

Он же доказал, что в двумерном случае достаточно двух шаров (кругов). Полное решение задачи получено Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговской и М. В. Стефанчук в 2015 году. Ими доказано, что в n-мерном евклидовом пространстве при $n > 2$ требуется $n+1$ шар. Ю. Б. Зелинский предложил несколько обобщений задачи о тени. Все они относятся к вопросу о принадлежности точек обобщенно-выпуклой оболочке семейств множеств в евклидовом, комплексном и гиперкомплексном пространствах.

В настоящей работе рассматривается ряд аналогичных задач и их обобщений в пространстве Лобачевского. Одна из них, задача о тени для оришаров, оказывается некоторым образом связанной с изометрическим вложением псевдосферических поверхностей в трехмерное евклидово пространство. А именно, в работе доказывается, что каждая поверхность вращения постоянной отрицательной кривизны, найденная Ф. Миндингом, изометрична части касательного конуса к орисфере. В евклидово пространство вкладывается часть такого конуса, ограниченная линией касания этого конуса с орисферой. Продолжение конуса за линию касания с орисферой вкладывается изометрически в виде поверхности вращения в трехмерное псевдоевклидово пространство.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ СОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЫ В АНИЗОТРОПНОМ НЕОДНОРОДНОМ ГРУНТЕ СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ ИЗМЕНЕНИЯ ПРОВОДИМОСТИ ПРИ $S = -4$

Д. Г. Лекомцев

(Россия, Орел; ОГУ им. И. С. Тургенева)

Твердо установлено, что реальные нефтяные породы-коллекторы являются анизотропными [1] и неоднородными. Скважина дебита q — совершенная эксплуатационная, расположена в горизонтальном анизотропном и неоднородном пласте. Контур скважины — окружность σ_C радиуса R_C. Давления на контуре скважины σ_C и контуре питания постоянные, разность давлений равна единице, жидкость несжимаемая и ее течение стационарное. Двумерное течение в анизотропно-неоднородном пласте грунта проводимости $P = (P_{ij}) = H(K_{ij})$ (H — толщина слоя, (K_{ij}), $i, j = 1, 2$, — тензор его проницаемости) описываем обобщенным потенциалом φ и функцией тока ψ. φ и ψ — функции декартовых координат (x, y) плоскости z удовлетворяют всюду в области D, за исключением изолированных особых точек этих функций, системе уравнений [2]

$$P_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad P_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Для упрощения задачи осуществим переход с физической плоскости $z = x + iy$ на вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$ с использованием гомеоморфных (аффинных) преобразований (прямого и обратного) [2], из которого следует прямое преобразование декартовых координат плоскостей z и ζ. На плоскости ζ перейдем к системе координат $\zeta' = \xi' + i\eta'$, которая связана с плоскостью ζ преобразованием поворота [3]. На плоскости ζ' проводимость является функцией одного переменного η'. Характерной особенностью слоя проводимости $P'(\xi') = k'_0\eta'^s$ является наличие сингулярной линии σ_0: $\eta' = 0$, на которой $P' = \infty$, если $s < 0$ [4].

Находим формулу, определяющую дебит скважины [2]:

$$q = \frac{2\pi(C - C_0)}{k'_0 d'^4 Q_2(\omega)}.$$

Здесь $Q_2(\omega) = \frac{3\omega^2}{4}\ln\frac{\omega+1}{\omega-1} - \frac{3\omega}{2}$ — функция Лежандра второго рода второй степени аргумента $\omega = 1 + R'^2_C/2d'^2$, d' — расстояние от центра скважины σ_C до сингулярной линии σ_0 [5], $R'_C = R_C\sqrt{1-\mu^2}$, $\mu = \frac{P_{22}-P_{11}-i(P_{12}+P_{21})}{P_{22}+P_{11}+2\sqrt{D(P_s)}}$, $D(P_s)$ — определитель симметричной части $P_s = (P + P^T)/2$ тензора P, $P^T = (P_{ji})$ — транспонированный тензор, $C = 1$, $C_0 = 0$. Для исследования влияния анизотропии грунта на дебит скважины введем относительный дебит [3] $\varepsilon = q/q_0 - 1$, где q_0 — дебит скважины радиуса R_C, расположенной на расстоянии d от сингулярной линии

$y = 0$ в случае изотропного неоднородного грунта со степенным законом изменения проводимости, при $s = 2$. Графики зависимости относительного дебита скважины ε от коэффициентов $\alpha = k_{22}/k_{11}$ и $\beta = k_{12}/k_{11}$ при $s = -4$ представлены на рис. 1. Решение подобных задач [6] может оказаться актуальным при проверке численных математических моделей, описывающих более сложные задачи [7]. Анизотропия грунта может сильно сказываться на дебите q (может его увеличивать или уменьшать по отношению к дебиту в случае изотропной неоднородной среды q_0).

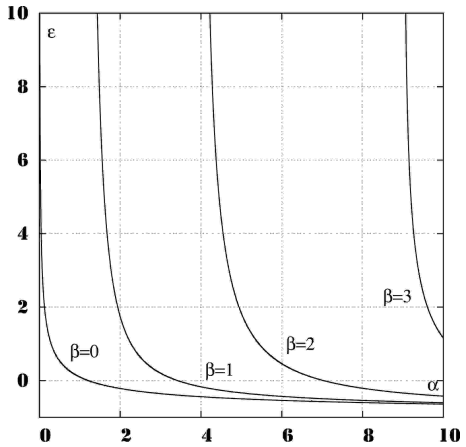


Рис. 1. Зависимости относительного дебита скважины ε от коэффициентов α и β при $s = -4$.

Литература

1. *Абросимов А. А.* Применение рентгенотомографии для изучения фильтрационно-емкостных систем коллекторов нефти и газа // Труды РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина.—2015.—Т. 281, № 4.—С. 5–15.
2. *Пивень В. Ф.* Математические модели фильтрации жидкости.—Орел: ОГУ им. И. С. Тургенева, 2015.—408 с.
3. *Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г.* Аналитическое и численное моделирование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Вычисл. мех. сплошных сред.—2016.—Т. 9, № 4.—С. 389–399.
4. *Пивень В. Ф.* Исследование двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном пористом слое // Фундам. и прикл. проблемы техники и технологии.—2017.—Т. 321, № 1.—С. 14–24.
5. *Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г.* Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта // Учен. зап. Орловского гос. ун-та.—2012.—Т. 47, № 3.—С. 69–74.
6. *Лекомцев Д. Г.* Работа скважины в анизотропной неоднородной среде со степенным законом проницаемости // Современные проблемы физико-математических наук.—Орел: ОГУ им. И. С. Тургенева, 2018.—С. 141–145.
7. *Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г.* Математическое моделирование работы скважина в случае двумерной фильтрации в анизотропном и неоднородном пласте // Вычисл. методы и программирование.—2020.—Т. 21, № 1.—С. 87–95.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ПРИМЕНЕНИЕ ПЛИС-ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ВОДОЕМАХ СО СЛОЖНЫМ РЕЛЬЕФОМ ДНА[1]

А. Л. Леонтьев (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
М. И. Чумак (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Необходимость прогнозирования процессов гидрофизики связана с разработкой полезных ископаемых в акваториях и угрозой безопасности экологии водоемов, что говорит об актуальности разработки методов и средств мониторинга гидроэкологического состояния водоемов с целью предотвращения катастроф.

При моделировании процессов гидрофизики в водоемах со сложным рельефом дна наиболее примелимым является моделирование гидродинамики водоема как единого водного тела. При таком подходе повышается вычислительная сложность алгоритмов и возрастают временные затраты.

Другой проблемой является отсутствие достаточного количества входных данных. Так для Каспийского моря была разработана трехмерная цифровая карта, включающая 2,5 млрд узловых точек, при этом существующие базы данных по гидрометеорологическим характеристикам имеют более грубые измерительные сетки и не позволяют проводить моделирование с требуемой точностью.

Для повышения скорости вычислений разрабатываются методы, связанные с распараллеливанием алгоритмов решения поставленных задач на программном и аппаратном уровнях. Среди высокоскоростного оборудования следует отдельно выделить суперкомпьютеры, построенные на основе ПЛИС, обладающие высокой степенью распараллеливания. Для устранения проблемы нехватки данных можно использовать методы, основанные на интерполяции или применении нейронных сетей для усвоения данных спутникового зондирования Земли (СЗЗ). Существующие в настоящее время базы данных пополняются не столь активно, а спутниковые данные не позволяют получить все необходимые для прогнозного моделирования входные данные.

В рамках данного исследования разработан алгоритм метода расширения баз входных данных для прогнозного моделирования гидрофизических процессов, основная идея которого заключается в нахождении неизвестных характеристик по ретроспективным данным, соотнесенным с данными СЗЗ.

1) Сбор информации из открытых баз данных (БД).

2) Получение и обработка нейронной сетью не менее чем двух последовательных пакетов данных СЗЗ.

3) Определение градиентов характеристик, полученных при обработки данных на предыдущем шаге, для каждой узловой точки.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекта № 19-31-51017.

4) Отыскание наиболее схожих с полученными ретроспективных данных.

5) Определение недостающих для проведения моделирования характеристик методом перебора.

6) Прогнозное моделирование гидродинамических процессов водоема.

7) Определение погрешности моделирования основных расчетных функций.

8) Если погрешность моделирования не удовлетворяет заданному диапазону 5–15%, то пересчитываем градиенты полученных характеристик с учетом данных, поступивших за время выполнения пунктов 4)–7) данного алгоритма, в противном случае обновляем БД.

Блок-схема разработанного алгоритма представлена на рис. 1.

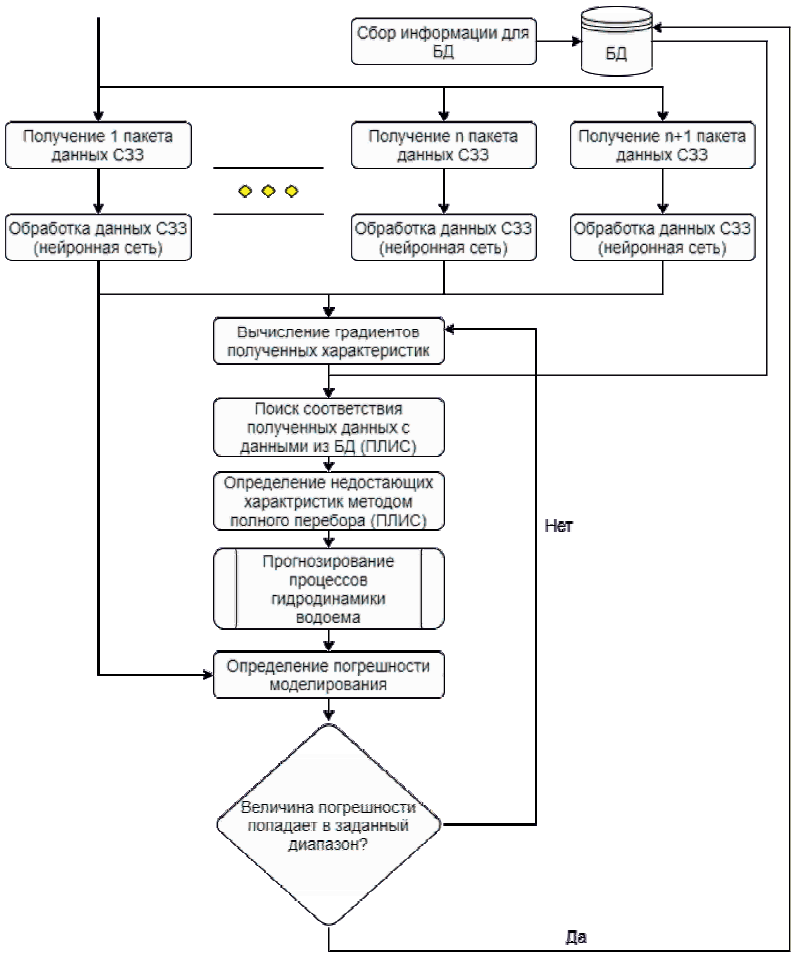


Рис. 1. Алгоритм дополнения входных данных.

В работе [1] доказано, что пункты 4) и 5) решаются наиболее эффективно с использованием ПЛИС-технологий. Решение задачи из пункта 6) настоящего алгоритма за заданное время прогнозирования описывается в работе [2].

Применение данного алгоритма позволит проводить моделирование процессов гидродинамики и биологической кинетики в условиях недостатка входных данных с минимальными временными затратами и значениями погрешности.

Литература

1. *Alekseev K. N. Levin I. I., Sorokin D. A.* Implementation of surface-related multiple prediction problem on reconfigurable computer systems // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование.—2020.—Т. 13, № 1.—С. 81–94.
2. *Леонтьев А. Л., Чумак М. И.* Разработка модели гидродинамики водоемов переменной батиметрии в зимний период // ПЕРСПЕКТИВА-2021. Материалы Междунар. науч. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых.—Эльбрус: ООО «ИКЦ Эксперт», 2021.—С. 162–165.

НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

В. Л. Литвинов (Россия, Самара; СамГТУ),
К. В. Литвинова (Россия, Москва; МГУ)

До настоящего времени задачи о продольно-поперечных колебаниях объектов с движущимися границами решались в основном при линейной постановке, не учитывался энергетический обмен через движущуюся границу и взаимодействие между продольными и поперечными колебаниями [1–7]. В редких случаях учитывалось действие сил сопротивления внешней среды [8]. Реальные же технические объекты намного сложнее, например, при увеличении интенсивности колебаний большое влияние на колебательный процесс оказывают геометрические нелинейности объекта.

В связи с интенсивным развитием численных методов появилась возможность более точного описания сложных математических моделей продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами, учитывающих большое число факторов, влияющих на колебательный процесс.

В работе поставлена новая нелинейная математическая модель продольно-поперечных колебаний балки с движущейся границей, в которой учтена геометрическая нелинейность, вязкоупругость, энергетический обмен через границу. Получены граничные условия в случае наличия взаимодействия между частями объекта слева и справа от движущейся границы.

Произведена линеаризация полученной модели. При этом соблюдается принцип однородности: в частном случае малых колебаний полученные линейные модели совпали с классическими, что свидетельствует о корректности полученных результатов. Полученная математическая модель позволяет описывать колебания большой интенсивности балки с движущейся границей.

Литература

1. *Савин Г. Н., Горошко О. А.* Динамика нити переменной длины.—Киев: Наукова думка, 1962.—332 с.
2. *Самарин Ю. П.* Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикл. мат. и мех.—1964.—Т. 26, № 3.—С. 77–80.
3. *Весницкий А. И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками.—М.: Физматлит, 2001.—320 с.
4. *Лежнева А. А.* Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.—1970.—№ 1.—С. 159–161.
5. *Литвинов В. Л.* Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближенного метода построения решений интегро-дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН.—2020.—Т. 26, № 2.—С. 188–199.

6. *Анисимов В. Н., Литвинов В. Л.* Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с изменяющейся границей.—Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020.—100 с.
7. *Литвинов В. Л., Анисимов В. Н.* Применение метода Канторовича — Галёркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Изв. РАН. Механика твердого тела.—2018.—№ 2.—С. 70–77.
8. *Анисимов В. Н., Литвинов В. Л.* Математические модели продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физю-мат. науки.—2015.—Т. 19, № 2.—С. 382–397.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ОРГАНИЗАЦИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНО-КОНВЕЙЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В ВОДОЕМЕ НА ОСНОВЕ ГРАФОВОЙ МОДЕЛИ

В. Н. Литвинов (Россия, Зерноград; АЧИИ ФГБОУ ВО Донской ГАУ),
Н. Н. Грачева (Россия, Зерноград; АЧИИ ФГБОУ ВО Донской ГАУ),
Н. Б. Руденко (Россия, Зерноград; АЧИИ ФГБОУ ВО Донской ГАУ)

Одной из самых актуальных проблем сегодня является аварийное загрязнение водоемов. Для математического моделирования гидрофизических процессов прибрежных систем нужно разработать более точные модели, принимающие во внимание особенности прибрежных систем. Целью данной работы является разработка алгоритма параллельно-конвейерных вычислений и его программная реализация на многоядерном процессоре для численного моделирования процесса распространения загрязняющих веществ в мелководных водоемах.

Основные причины загрязнения акватории Черноморского побережья — неконтролируемый ливневый сток с поверхности сельскохозяйственных земель, недостаточная очистка ливневых стоков, малые реки, несущие большую часть ливневого стока с прилегающих территорий.

Задача транспорта загрязняющих веществ в рассматриваемом водоеме решается на основе уравнения Навье — Стокса движения жидкости и уравнения диффузии–конвекции–реакции. Решение указанных дифференциальных уравнений в частных производных сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) высокой размерности [1].

Для решения СЛАУ модифицированным попеременно-треугольным итерационным методом (МПТМ) предложен способ декомпозиции двумерной расчетной области размерностью $N_x \times N_y$, в котором расчетная сетка разбивается на прямоугольные области, число которых по оси Ox принимается равным числу доступных ядер центрального процессора (Nbx) с разбиением на части по оси Oy (Nby) [2].

С целью упрощения программной реализации фрагменты расчетной сетки моделируются в виде структуры *GridFragment2D*, в полях которой сохраняются такие данные, как индексы фрагмента по осям Ox и Oy, индекс нулевого элемента фрагмента в глобальной сетке, указатели на соседние (предшествующий и последующий) фрагменты по осям Ox и Oy.

Описанный способ декомпозиции позволяет организовать параллельно-конвейрный процесс вычислений, когда на каждом этапе вычислений s каждым ядром процессора одновременно обрабатываются фрагменты расчетной области, смещенные друг относительно друга по оси Oy.

Данный процесс описан в виде графовой структуры, в которой узлам графа соответствуют фрагменты расчетной области, а ребрам — признак смежности фрагментов. Алгоритм формирования графовой модели параллельно-конвейерного вычисления представляет собой двухуровневый итерационный процесс заполнения двумерного массива *calculationGraph*. Первое измерение массива представляет собой номер этапа вычислений $s = Nbx+Nby-1$, второе — индекс ядра процессора. В каждом элементе массива сохраняется указатель на фрагмент расчетной области [3].

Для уменьшения времени решения СЛАУ высокой размерности методом МПТМ разработан параллельный алгоритм, включающий в себя предложенный способ декомпозиции двумерной расчетной области: расчетная сетка разбивается на прямоугольные области, число которых по оси принимается равным числу доступных ядер центрального процессора. Декомпозиция расчетной области выполнена для четырехъядерного процессора. Описанный способ декомпозиции позволяет организовать параллельно-конвейрный процесс вычислений таким образом, что на каждом этапе вычислений каждым ядром процессора одновременно обрабатываются фрагменты расчетной области, смещенные друг относительно друга по оси. Данный процесс представлен в виде графа, в котором каждому узлу расчетной сетки соответствуют фрагменты расчетной области, а ребрам — признак смежности фрагментов.

Литература

1. *Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Shishenya A. V., Timofeeva E. F.* Predictive modeling of coastal hydrophysical processes in multiple-processor systems based on explicit schemes // Mathematical Models and Computer Simulations.—2018.—Vol. 10, № 5.—P. 648–658.
2. *Литвинов В. Н., Руденко Н. Б., Романовец М. М.* Математическое моделирование гидродинамических процессов Азовского моря с использованием технологии NVIDIA CUDA // ПЕРСПЕКТИВА-2021. Материалы Междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых.—Эльбрус, 2021.—С. 304–307.
3. *Литвинов В. Н., Грачева Н. Н., Шабаев Е. А.* Применение попеременно-треугольного итерацион-ного метода для решения задач гидродинамики мелководного водоема на графическом ускорителе // Междунар. конф. «Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания», приуроченная к 200-летию со дня рождения великого русского математика, академика П. Л. Чебышева: Материалы конф.—Калуга: Калуж. печатный двор, 2021.—С. 332–333.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОЛЛЕКТОРА СЛОЖНОГО СОСТАВА

Ю. В. Мартынова (Россия, Уфа; ООО «РН-БашНИПИнефть»),
С. П. Михайлов (Россия, Санкт-Петербург; ООО «ГАЗПРОМНЕФТЬ НТЦ»)

Продуктивные пласты неокомских отложений Западной Сибири характеризуются ухудшенными фильтрационно-емкостными свойствами (ФЕС) пород, многокомпонентным составом и присутствием в поровом пространстве глинистого и карбонатного цементов, что обуславливает неоднозначную зависимость проницаемости образцов керна от их пористости.

Целью данной работы является разработка интерпретационной модели определения ФЕС пород сложного минерального состава по результатам комплексных геофизических исследований (ГИС). Пористость и проницаемость горных пород снижаются при увеличении содержания в поровом пространстве глинистого и карбонатного цементов. Остаточная водонасыщенность горных пород снижается при увеличении содержания в поровом пространстве карбонатного цемента и растет при увеличении в поровом пространстве глинистого цемента. Для корректного определения значений ФЕС коллектора необходимо применение трехмерных нелинейных зависимостей, учитывающих глинистую и карбонатную составляющие цемента.

В работе задача прогнозирования величины ФЕС горных пород решена путем использования методов ГИС, входящих в набор методов стандартного каротажа: метод гамма-каротажа GK характеризует разрез скважины по величине глинистости горных пород, а наиболее чувствительным к изменению карбонатности горных пород является метод нейтронного-каротажа NK.

Учитывая, что показания стандартных методов ГИС не стандартизированы и проводятся в разных скважинных условиях, то для построения трехмерных нелинейных зависимостей, связывающих пористость горных пород и их проницаемость с содержанием глинистого и карбонатного цементов, использовались нормированные значения данных GK и NK по двум опорным пластам — двойные разностные параметры α_{GK} и α_{NK}.

Из общего массива данных выбираются значения пористости и проницаемости горных пород, определенных по керну, и двойных разностных параметров α_{GK} и α_{NK}, определенных по ГИС, соответствующие интервалам отсутствия карбонатизации $\alpha_{NK} \approx 0$. Уравнения зависимостей пористости горных пород и их проницаемости от двойного разностного параметра α_{GK} подбираются из условия получения максимального коэффициента корреляции R^2 и минимизации невязки фактических и расчетных значений.

Для случая присутствия в поровом пространстве только карбонатного цемента уравнения связи пористости горных пород и их проницаемости от двойного разностного параметра α_{NK} должны иметь такие же функциональные зависимости, как и для случая присутствия в поровом пространстве горных пород

только глинистого цемента. Данное предположение приводит к тому, что в трехмерном пространстве зависимости для пористости ϕ и проницаемости K горных пород представляют собой поверхность эллипсоида и имеют вид:

$$\phi = \frac{1}{a_\phi + \exp\left(b_\phi \sqrt{\frac{\alpha_{GK}^2}{A^2} + \frac{\alpha_{NK}^2}{B^2}} + c_\phi\right)}, \tag{1}$$

$$k = \exp\left(a_k \left(\frac{\alpha_{GK}^2}{A^2} + \frac{\alpha_{NK}^2}{B^2}\right) + b_k \sqrt{\frac{\alpha_{GK}^2}{A^2} + \frac{\alpha_{NK}^2}{B^2}} + c_k\right), \tag{2}$$

где A — граничное значение коллектор-неколлектор по α_{GK}, B — граничное значение коллектор-неколлектор по α_{NK}, a_ϕ, b_ϕ, c_ϕ, a_k, b_k, c_k — коэффициенты, которые подбираются по зависимости «керн-ГИС».

Из уравнения Тимура — Коатса, устанавливающего взаимосвязь между пористостью ϕ, абсолютной проницаемостью k и остаточной водонасыщенностью s_w^*, следует:

$$s_w^* = \frac{1}{1 + \sqrt[l]{\frac{D\phi^n}{k}}}, \tag{3}$$

где D, n, l — коэффициенты, которые подбираются с учетом данных лабораторных исследований керна и эксплуатации скважин.

Из (3) следует, что при приближении проницаемости горных пород к нулю, остаточная водонасыщенность будет стремиться к 1, что соответствует допущению о 100% водонасыщенности в глинах.

В скважинах, в которых проводились отбор и исследование керна, были проведены расчеты пористости, проницаемости и остаточной водонасыщенности горных пород по формулам (1)–(3) с подобранными значениями коэффициентов a_ϕ, b_ϕ, c_ϕ, a_k, b_k, c_k, D, n, l.

Апробация предложенной интерпретационной модели проведена на одном из месторождений Западной Сибири. Получено удовлетворительное совпадение расчетных и фактических показателей разработки без их дополнительной настройки.

Таким образом, представленная интерпретационная модель позволяет системно увязать данные геофизических исследований и разработки, проводить адаптационную корректировку параметров среды и ограничить произвол в определении ФЕС с помощью определенных геофизических законов.

Литература

1. *Тиаб Дж., Доналдсон* Э. Петрофизика: теория и практика изучения коллекторских свойств горных пород и движения пластовых флюидов.—М.: ООО «Премиум инжиниринг», 2009.—838 с.
2. *Байков В. А., Жонин А. В., Коновалова С. И., Мартынова Ю. В., Михайлов С. П., Рыкус М. В.* Петрофизическое моделирование сложно-построенного терригенного коллектора // Территория «Нефтегаз».—2018.—№ 11.—С. 34–38.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КВАНТОВОГО ГРАФА ТИПА «ДЕРЕВО»

Ю. В. Мартынова (Россия, Уфа; ООО «РН-БашНИПИнефть»),
В. З. Музипов (Россия, Уфа; ООО «БЭСК Инжиниринг»)

Одним из основных примеров квантового графа типа «дерево» является электрическая сеть, состоящая из проводов (ребер), соединенных в трансформаторных подстанциях (вершинах). На ребре $k = \overline{1,P}$ графа задается уравнение электрических колебаний в проводнике длиной l_k с распределенными емкостью C_k и индуктивностью L_k:

$$(U_k)_{x_k x_k}(x_k;t) = C_k L_k (U_k)_{tt}, \quad x_k \in (0;l_k),\ k = \overline{1,P}. \tag{1}$$

Провод $k = \overline{1,N}$ заземлен через сосредоточенные индукцию $\widetilde{L}_k$ и емкость $\widetilde{C}_k$, соединенные последовательно:

$$(U_k)_{x_k}(l_k;t) + C_k\widetilde{L}_k(U_k)_{tt}(l_k;t) + \frac{C_k}{\widetilde{C}_k}(U_k)(l_k;t), \quad k = \overline{1,N}. \tag{2}$$

В каждой из $M = P + 1 - N$ внутренних вершин задаются два условия склейки. Условие непрерывности потенциала состоит в том, что если одна и та же вершина v инцидентна нескольким ребрам $e_j \in E_v$, то значения компонент функции U_j на этих ребрах в концах, соответствующих вершине v, совпадают. Условие Кирхгофа или баланса токов состоит в том, что сумма нормальных производных компонент функции U_k во внутренней вершине v равна нулю.

Получена соответствующая краевая задача на собственные значения:

$$a_k^2 y_k''(x_k) + \lambda y_k(x_k) = 0, \quad x_k \in (0;l_k),\ k = \overline{1,P}, \tag{3}$$

с граничными условиями

$$y_k'(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) y_k(l_k) = 0, \quad k = \overline{1,N}, \tag{4}$$

и условиями во внутренних вершинах

$$\begin{cases} y_j(v) = y_{j+1}(v), \quad e_j \in E_v,\ v = \overline{1,M}, \\ \sum\limits_{e_j \in E_v} y_j'(v) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Показано, что спектр краевой задачи (3)–(5) является дискретным множеством положительных вещественных чисел. Кроме того, собственные значения λ_k монотонно зависят от параметров граничных условий $p_{11},\dots,p_{N1},p_{12},\dots,p_{N2}$.

Обратная спектральная задача для краевой задачи (3)–(5) состоит в нахождении вектора $\vec{p} = (p_{11},\dots,p_{N1},p_{12},\dots,p_{N2})$ коэффициентов граничных условий (4), при которых наперед заданные числа λ_1, λ_2, …, λ_{2N} являются соб-

ственными значениями краевой задачи. Она сведена к многопараметрической обратной спектральной задаче для конечномерного оператора

$$B(\lambda,\vec{p}) = B_0(\lambda) + \sum_{k=1}^{N} \big(p_{k1}B_{k1}(\lambda) + p_{k2}B_{k2}(\lambda)\big), \tag{6}$$

заданного в конечномерном действительном евклидовом пространстве E^{2N}. Показано, что данная задача эквивалентна системе $2N$ алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров граничных условий:

$$\det\big[B(\lambda_j,\vec{p})\big] = 0, \quad j = \overline{1,2N}. \tag{7}$$

Решение системы (7) в случае большого количества ребер графа достаточно трудоемко, поэтому предложен алгоритм численного построения решений обратной спектральной задачи для краевой задачи (3)–(5) в конечномерном евклидовом пространстве E^{2N}, основанный на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий. Определим $2N$-мерный параллелепипед $\big[\vec{a},\vec{b}\big]_{\Pi}$, в котором будем искать решения многопараметрической обратной спектральной задачи. Обозначим через $\mu_1(\vec{p}),\dots,\mu_{2N}(\vec{p})$ собственные значения оператора $B(\lambda,\vec{p})$, определенного в (7), при некотором значении вектора $\vec{p}\in\big[\vec{a},\vec{b}\big]_{\Pi}$.

Сформируем 2^{2N} подобластей $\big[\vec{a},\vec{b}\big]_{\Pi}^{(i)}$ таких, что

$$\bigcup_{i=1}^{2^{2N}}\Big[\vec{a},\vec{b}\Big]_{\Pi}^{(i)} = \Big[\vec{a},\vec{b}\Big]_{\Pi}, \qquad \bigcap_{i=1}^{2^{2N}}\Big[\vec{a},\vec{b}\Big]_{\Pi}^{(i)} = \vec{c},$$

где $\vec{c}$ — центр параллелепипеда $\big[\vec{a},\vec{b}\big]_{\Pi}$. В параллелепипеде $\big[\vec{a},\vec{b}\big]_{\Pi}^{(i)}$, $i=\overline{1,2^{2N}}$, проверяем выполнение условия $\vec{\lambda}\in\big[\vec{\mu}(\vec{a}),\vec{\mu}\big(\vec{b}\big)\big]$. Если условие выполняется, то рассматриваемый параллелепипед не содержит решений, если же условие не выполняется, то по вышеописанной схеме выполняем его разбиение и переходим к следующему параллелепипеду. Продолжив данную процедуру конечное число раз, получим локализацию областей существования решения с любой необходимой точностью. Применяя итерационный метод для каждой локализованной области существования, можно уточнить решения поставленной задачи до требуемой точности.

Полученные результаты позволяют восстанавливать параметры граничных условий, например, распределенные индуктивность и емкость, соединенные последовательно, для электрических сетей на участках труднодоступных для визуального осмотра, а также подбирать параметры граничных условий для обеспечения нужного спектра частот колебаний переменного тока или напряжения в сети.

Литература

1. *Bondarenko N. P., Shieh C. T.* Partial inverse problems for Sturm–Liouville operators on trees // Proc. R. Soc. Edinburgh Sect. A Math.—2017.—Vol. 147, № 5.—P. 917–933.
2. *Мартынова Ю. В.* Модельная обратная спектральная задача для оператора Штурма — Лиувилля на геометрическом графе типа «дерево» // Системы управления и информационные технологии.—2013.—№ 3 (53).—С. 19–23.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

О КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНЫХ ДВУМЕРНЫХ ОБЛАСТЕЙ[1]

Р. М. Мнухин
(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
В. В. Дударев
(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Функционально-градиентные материалы в настоящее время все чаще используются во многих технологиях промышленности. Создание новых моделей, учитывающих зависимость свойств таких материалов от пространственных координат, позволяет описывать особенности их поведения и деформирования. Для надежной эксплуатации конструкций ответственного назначения необходима разработка новых и совершенствование уже существующих методик неразрушающей диагностики акустического зондирования, зарекомендовавшего себя как наиболее точный и эффективный метод при исследовании обратных задач.

На основе модели неоднородного упругого тела сформулированы постановки задач об установившихся планарных колебаниях упругой ФГ пластины и продольно-радиальных колебаниях ФГ полого цилиндра с параметрами Ламе и плотностью, зависящими от двух пространственных координат. Решение прямой задачи построено численно с помощью МКЭ в пакете FlexPDE. Проведен анализ влияния заданных двумерных законов изменения механических свойств на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и поля напряжений и деформаций. На первом этапе для каждой из рассмотренных задач исследована чувствительность АЧХ к изменению параметров Ламе и плотности. Выявлены режимы зондирования с наибольшим влиянием механических характеристик. Используя слабую постановку из работы [1], сформулированы новые коэффициентные обратные задачи об идентификации двумерных законов изменения механических свойств на основе анализа прямых задач для цилиндров и пластин. В качестве дополнительной информации для двумерных обратных задач будут использованы режимы зондирования, выявленные на первом этапе, что позволит построить комплексные подходы идентификации искомых величин.

Литература

1. *Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Mnukhin R. M.* Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder // Int. J. Mech. Mater. Des.—2021.—Vol. 17.—P. 321–332.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 18-71-10045, https://rscf.ru/project/18-71-10045/.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СДВИГОВЫХ СЕЙСМИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ МАССИВА, СОСТОЯЩЕГО ИЗ РЕКУЛЬТИВИРОВАННОГО МАТЕРИАЛА ОТЛОЖЕНИЯ ГОРНОРУДНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ (ХВОСТЫ)

И. Д. Музаев
(Россия, Владикавказ; ГФИ ВНЦ РАН, Владикавказский филиал ФУ),
К. С. Харебов
(Россия, Владикавказ; ГФИ ВНЦ РАН),
Н. И. Музаев
(Россия, Владикавказ; ГФИ ВНЦ РАН)

Поставлена и решена контактная краевая задача, моделирующая сейсмические колебания массива, состоящего из рекультивированного материала — отложения (хвосты) горнорудной промышленности. Рассмотрен случай, когда подобные массивы расположены в ущельях рек вблизи речного потока и создают экологическую угрозу речной системе региона. Решена проблема динамической устойчивости массива при условии, что на него падает гармоническая сейсмическая волна.

На рис. 1 представлен схематический чертеж подобного массива, расположенного в непосредственной близости от реки Ардон в республике Северная Осетия-Алания. В результате рекультивации массиву придана призматическая конфигурация с трапецеидальным поперечным сечением. Углы откосов массива не превышают угла естественного откоса материала отложения и тем самым обеспечена статическая устойчивость массива.

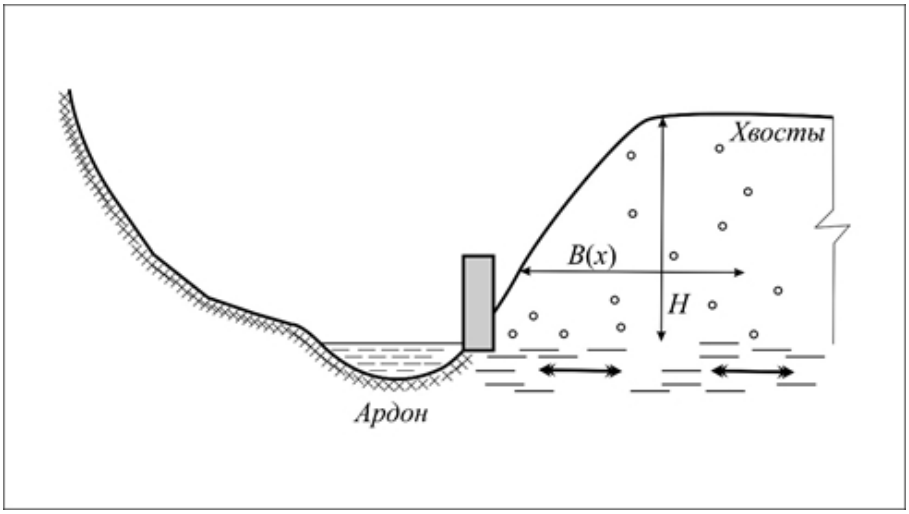


Рис. 1. Расчетная схема контактной краевой задачи.

Краевая задача имеет следующий вид:

$$\rho_1 B(x)\,\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - G_1(1+i\eta_1)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(B(x)\frac{\partial U_1}{\partial x}\right) = 0, \quad -H \leqslant x \leqslant 0, \tag{1}$$

$$\rho_2\,\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - G_2(1+i\eta_2)\,\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \infty, \tag{2}$$

$$U_1 = U_2, \quad G_1(1+i\eta_1)\,\frac{\partial U_1}{\partial x} = G_2(1+i\eta_2)\,\frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad x = 0, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial U_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=H} = 0, \quad U_2(x,t)\big|_{x\to\infty} = \text{limited}, \tag{4}$$

где приняты следующие обозначения: $B(x)$ — ширина массива, $U_1(x,t)$ — сдвиговые перемещения в теле верхнего массива, $U_2(x,t)$ — сдвиговые перемещения в нижнем подпочвенном массиве грунта, G_1, G_2, ρ_1, ρ_2 — модуль сдвигов и плотности в верхнем и нижнем массивах соответственно, i — мнимая единица, t — время. В результате решения поставленной контактной краевой задачи получена совокупность расчетных формул, которые позволяют вычислить напряжения в телах массивов. Тем самым становится возможным оценить сейсмодинамическую устойчивость рассматриваемого массива.

REGARDING MODELING THE LATTICE PLATE OF THE EYE SCLERA WITH ACCOUNT FOR THE RESIDUAL STRESS FIELDS[1]

R. D. Nedin

(Russia, Rostov-on-Don, SFedU; Vladikavkaz, SMI VSC RAS)

This work is devoted to the development of theoretical foundations for modeling and acoustic monitoring of the 'lamina cribrosa' (the lattice plate of the eyeball sclera), taking into account its prestressed state. The 'lamina cribrosa' is a substantially heterogeneous layered structure of variable thickness, weakened by a large number of holes through which nerve fibers pass; this structure experiences mechanical stress and deformation due to changes in intracranial and intraocular pressure and, perhaps, is in a pre-stress-strain state [1, 2]. Such factors can lead to atrophy of nerve fibers and the emergence of a common disease — glaucoma. The diagnosis of glaucoma as a consequence of excessive deformation of the ethmoid plate of the sclera is an urgent task of biomechanics, especially in the early stages of the disease onset, when the atrophy of nerve fibers is still reversible. For an objective assessment of the physiological state of tissues and organs, reliable methods of reconstructing their properties are required. At the same time, in view of the specificity of the study of living tissues, an important requirement is the non-invasiveness of the approaches used. This requirement is met by acoustic methods, which are quite accurate and simple in practical implementation and make it possible to determine the unknown characteristics of bodies from the measured physical fields in some parts of the objects. In turn, to create the foundations of acoustic monitoring of the state of the lattice plate of the sclera of the eye, it is necessary to develop and study models of oscillations of prestressed inhomogeneous thin plates in the presence of complex geometry and holes and a field of prestresses. Note that often the modeling of deformations of a lattice plate is based on a model of solid circular plates of variable stiffness using various boundary conditions, including elastic support [3].

In this research, we propose a model that explicitly takes into account the geometric features of the lattice plates of the eye, the inhomogeneity of material characteristics and the presence of residual stress fields; for this, a linearized model of a prestressed inhomogeneous elastic body with steady vibrations in the metric of the initial deformed configuration is considered.

To study a prestressed lattice plate, taking into account shear deformations and shear stresses, a model of an elastic inhomogeneous plate is proposed in the framework of the Timoshenko–Mindlin deformation hypotheses. For this, on the basis of a general linearized model, using a variational principle, a formulation of the problem of steady vibrations of a lattice plate is constructed, which takes into account

[1]This work was financially supported by a grant from the Government of the Russian Federation, Agreement № 075-15-2019-1928.

the field of residual stresses formed as a result of the action of the initial load caused by intraocular pressure. The proposed model makes it possible to take into account the inhomogeneity of the material properties of the plate and to set arbitrary laws of inhomogeneity for the components of the prestress tensor. To describe the prestress field, the statics problem of the deflection of a lattice plate clamped along the contour under the action of a distributed load is solved separately. On the basis of the found solution, the integral characteristics for the components of residual stresses, which are included in the equations of steady-state oscillations, are calculated. The problem is solved numerically using the finite element method. Various options for describing the geometry of a lattice plate with holes are considered; several techniques of hole formation are proposed, their comparative analysis is carried out from the point of view of the influence on the deformation characteristics and on the formation of stress concentrators. The analysis of the influence of the parameters of the pre-stressed state of the lattice plate on its deformation and dynamic characteristics (fields of planar and bending displacements, angles of rotation of the normal along the axes in the plane of the plate, resonance frequencies, amplitude-frequency characteristics) is carried out, the analysis of inflection points of the plate under various conditions is carried out.

References

1. *Sigal I. A., Flanagan J. G., Ethier C. R.* Factors influencing optic nerve head biomechanics // Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.—2005.—Vol. 46, № 11.—P. 4189–4199.
2. *Bauer S. M., Voronkova E. B.* On the deformation of the Lamina Cribrosa under intraocular pressure // Russian J. Biomech.—2001.—Vol. 5, № 1.—P. 73–82.
3. *Vatulyan A. O., Potetyunko O. A.* On the assessment of deformability of the eye's lattice plate // Russian J. Biomech.—2017.—Vol. 21, № 1.—P. 8–17.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

МАСШТАБНО-ЗАВИСИМЫЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ ТЕЛ

С. А. Нестеров
(Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

В связи с развитием микроэлектроники и микро-электромеханических систем, большое внимание ученых привлечено к исследованию напряженно-деформированного состояния (НДС) слоистых тел малых размеров. В таких структурах размеры исследуемых элементов могут становиться соизмеримыми с характерными размерами микроструктуры материала и поэтому могут возникать масштабные эффекты. Наиболее часто для учета масштабных эффектов применяется градиентная теория упругости (ГТУ), которая содержит градиентные параметры размерности длины и в которой плотность энергии деформации зависит не только от деформации, но и от ее градиента.

ГТУ была сформулирована в 60-х годах прошлого века в работах Тупина [1] и Миндлина [2] и содержала в определяющих уравнениях 5 градиентных параметров. Для преодоления этой проблемы в работах Айфантиса [3] была предложена однопараметрическая градиентная модель. За последние годы в рамках модели Айфантиса выполнены некоторые аналитические исследования по уточнению НДС слоистых тел [4–6]. В данной работе в рамках градиентной модели Айфантиса исследуется НДС слоистого прямоугольника, как при механическом, так и при тепловом нагружении.

Приведена постановка задачи о равновесии слоистого прямоугольника, нижняя сторона которого жестко защемлена, на верхней стороне действует распределенная нормальная нагрузка, а боковые стороны находятся в условиях скользящей заделки. Для учета масштабных эффектов применяется однопараметрическая градиентная теория упругости, задаются дополнительные граничные условия для моментных напряжений и градиентов перемещений. Выполнено обезразмеривание поставленной задачи. В случае теплового нагружеия решение задачи начинается с нахождения распределения температуры слоистого прямоугольника на основе решения задачи теплопроводности в классической постановке. Тепловые и механические граничные условия на боковых гранях допускают применение метода разделения переменных. Гармоники перемещений представлены в виде суммы решений на основе классической постановки задачи и дополнительных градиентных слагаемых. Получены как точные, так и упрощенные аналитические выражения для нахождения перемещений при малом значении градиентного параметра. На конкретных примерах проведены вычисления горизонтального и вертикального распределения перемещений, моментных и полных напряжений слоистого прямоугольника. Показано отличие распределений перемещений и напряжений, найденных на основе решений задачи в классической постановке и в градиентной постановке. Исследованы границы применимости

асимптотического решения задачи. Выяснено, что напряжения Коши испытывают скачок на границе слоев, что объясняется непрерывностью перемещений и их первых производных. Моментные напряжения при малых значениях градиентного параметра имеют значения, которые намного меньше значений полных напряжений. Компоненты тензора моментных напряжений либо принимают пиковые значения, либо испытывают скачок на границе сопряжения. При увеличении безразмерного масштабного параметра снижаются значения перемещений и полных напряжений, однако возрастают моментные напряжения.

Литература

1. *Toupin R. A.* Elastic materials with couple stresses // Arch. Ration. Mech. Anal.—1962.—Vol. 11.—P. 385–414.
2. *Mindlin R. D.* Micro-structure in linear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal.—1964.—Vol. 16.—P. 59–68.
3. *Ru C. Q., Aifantis E. C.* A simple approach to solve boundary value problems in gradient elasticity // Acta Mech.—1993.—Vol. 101.—P. 59–68.
4. *Лурье С. А., Соляев Ю. О., Рабинский Л. Н., Кондратова Ю. Н., Волов М. И.* Моделирование напряженно-деформированного состояния тонких композитных покрытий на основе решения плоской задачи градиентной теории упругости для слоя // Вестник ПНИПУ. Механика.—2013.—№ 1.—С. 161–181.
5. *Li A., Zhou S., Wang B.* A size-dependent bilayered microbeam model based on strain gradient elasticity theory // Compos. Struct.—1962.—Vol. 108.—P. 259–266.
6. *Vatulyan A. O., Nesterov S. A.* On the deformation of a composite rod in the framework of gradient thermoelasticity // Mater. Phys. Mech.—2020.—Vol. 46.—P. 27–41.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

РАЗРАБОТКА СРЕДСТВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ БИОДЕСТРУКЦИИ ЗАГРЯЗНЕНИЯ НЕФТЯНОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ В ПРИБРЕЖНЫХ СИСТЕМАХ[1]

А. В. Никитина (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ),
А. А. Филина (Россия, Таганрог; НИЦ СЭ и НК),
В. Н. Литвинов (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Нефть и нефтепродукты, являясь одним из источников энергии, в то же время относятся к одним из высокотоксичных соединений, входящих в перечень обязательных показателей, контролируемых при мониторинге загрязнения водных экосистем. Нефтяное загрязнение нарушает многие естественные процессы и взаимосвязи, существенно изменяет условия обитания всех видов живых организмов и накапливается в биомассе [1].

Разработка эффективных средств математического моделирования процессов биодеструкции загрязнения нефтяного происхождения в прибрежных системах позволит получать качественные прогнозы экологической обстановки водоема, особенно в случае катастрофических явлений. Поэтому, во избежание негативных последствий аварийных разливов нефти и продуктов ее переработки, необходимо качественное и точное прогнозирование поведения нефтяных пятен в акватории прибрежных систем. Разработанная математическая модель транспорта нефтепродуктов позволяет детально изучать динамику поведения нефтяного загрязнения в прибрежных системах, отличается от известных учетом определяющих факторов: нейтральной и неиспаряющейся псевдофракций нефтяного пятна; испарений легкой фракции; растворения и растекания нефтяного слика; осаждения; диффузии; адвекции и биоразложения, повысить точность математического моделирования распространения нефтепродуктов в прибрежных системах. Аппроксимация задачи диффузии-конвекции выполнялась на основе схем повышенного порядка точности с учетом частичной заполненности расчетных ячеек моделируемой области [2]. Для моделирования процессов биодеструкции нефтяного загрязнения были введены функциональные зависимости (модели наблюдений) скорости роста нефтеокисляющих микроорганизмов. Каждый из вовлеченных в данный процесс видов микроорганизмов вызывает разложение определенной группы нефтеуглеводородов, и для продолжения процесса биодеструкции необходимо одновременное или последовательное воздействие широкого комплекса микроорганизмов. Для описания динамики популяции нефтеокисляющих микроорганизмов с учетом их отмирания использовались зависимости [3, 4]. Рост микробных популяций в единицу времени рассчитывался пропорциональным значению концентрации нефтяного пятна и

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-31-51017.

зависит от количества лимитирующего субстрата, снижение значений численности популяций происходит ввиду естественной смертности микроорганизмов. Аппроксимация задачи по временной координате выполнялась на основе схем с весами [5]. Для решения возникающих при дискретизации сеточных уравнений использовался адаптивный модифицированный попеременно-треугольный метод (МПТМ) вариационного типа [6].

Для моделирования процессов биодеструкции нефтяных загрязнений в прибрежной системе на базе многопроцессорной вычислительной системы был построен комплекс прикладных программ, объединяющий разработанные математические модели и методы, их реализующие, а также базы экологических данных, позволяющий производить расчеты загрязняющих концентраций в областях сложной формы, с учетом определяющих факторов, влияющих на динамику распределения загрязнений в водоемах (метеоусловия, влияние береговой линии, рельефа дна, гидрохимических особенностей водоема); проводить исследование зависимости концентраций загрязнений, степени и размеров зоны поражения водного объекта от интенсивности движения водного потока, гидрофизических параметров, климатических и метеорологических факторов. Калибровка и верификация разработанной модели проводились на основе экологических данных, полученных в ходе научно-исследовательских экспедиций, проводимых учеными ЮФУ, ДГТУ, Южного научного центра РАН, АзНИИРХ, начиная с 2000 г., баз экологических данных, спутникового мониторинга.

Сравнение работы созданного программного комплекса с подобными работами в области математического моделирования гидробиологических процессов показало, что в результате удалось повысить точность прогнозов изменения концентраций нефтяных загрязнений и микроорганизмов на 10–20%.

Литература

1. *Rosenberg G. S., Zinchenko T. D.* Stability of hydroecosystems: a review of the problem // Arid ecosystems.—2014.—Vol. 20, № 4 (61).—P. 11–23.
2. *Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Nikitina A. V., Belova Y. V., Sumbaev V. V., Semenyakina A. A.* Supercomputer modeling of hydrochemical condition of shallow waters in summer taking into account the influence of the environment // Communications in Computer and Information Science.—2018.—P. 336–351.
3. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—301 с.
4. *Тишкин В. Ф., Гасилов В. А., Змитренко Н. В., Кучугов П. А., Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А.* Современные методы математического моделирования развития гидродинамических неустойчивостей и турбулентного перемешивания // Мат. моделирование.—2020.—Т. 32, № 8.—С. 57–90.
5. *Четверушкин Б. Н., Савельев А. В., Савельев В. И.* Компактная квазигазодинамическая система для высокопроизводительных вычислений // Вычислительная математика и мат. физика.—2019.—Т. 59, № 3.—С. 526–533.
6. *Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Isayev A., Nikitina A. V., Sumbaev V. V., Semenyakina A. A.* Complex of models, high-resolution schemes and programs for the predictive modeling of suffocation in shallow waters // Communications in Computer and Information Science.—2017.—Vol. 753.—P. 169–185.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ПОСТРОЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РЯДА ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Ю. В. Никонорова

(Россия, Волгодонск; ВИТИ НИЯУ МИФИ)

При рассмотрении динамики экономического процесса возникает интерес выявить функциональную зависимость в явном виде от влияющих на него факторов. При анализе ряда невзаимосвязанных между собой экономических процессов было замечено, что они описываются параболой второго порядка в зависимости от своих факторов. А именно, было сделано предположение, что валовый региональный продукт таким образом зависит от инвестиций. То же предположение было сделано при исследовании графиков поведения цены биткойна и акций финансовой пирамиды МММ в зависимости от времени. Применение метода наименьших квадратов для нелинейной регрессии и последующий анализ построенных параболических функций показали наличие таких зависимостей. Все расчеты проводились в программе Excel, а также пакете аналитических вычислений Maple.

Зависимость валового регионального продукта от инвестиций рассматривалась на примере Южного федерального округа. Информация для исследования была взята с официального сайта Федеральной службы государственной статистики [1]. Анализировались данные по республике Адыгея, республике Калмыкия, Краснодарскому краю, Астраханской области, Волгоградской области, Ростовской области за 2013–2017 гг., городу Севастополь и республике Крым за 2014–2017 гг. Число данных для построения зависимости — 30.

В результате применения метода наименьших квадратов была получена функция: $Y = 0{,}00000353\,X^2 + 5{,}240456671\,X - 60835{,}84474$. В ней X — значения инвестиций, Y — значение валового регионального продукта. Для выявления статистической значимости полученного уравнения были рассчитаны следующие коэффициенты: корреляции — 0,97736, детерминации — 0,95523, эластичности — 0,80409, средняя относительная ошибка аппроксимации — 97,77%, F-критерий Фишера — 288,0564 при табличном значении 3,34 и уровне значимости 0,05. Полученные результаты критериев говорят о том, что построенная функция является статистически значимой и может использоваться для составления прогнозов. Значение высокой средней ошибки аппроксимации говорит о том, что в данной модели присутствуют неучтенные факторы и требуется совершенствование модели.

Изучение данных по цене акций МММ показало, что данная финансовая пирамида не исчезла, а просто переместилась в другое правовое поле. Крупнейший международный информационный портал биржевого рынка `Investing.com` предоставляет информацию о ежедневной цене акций МММ вплоть до 2021 г. [2]. В начале 2014 г. была запущена социально-финансовая сеть МММ Global

Republic of Bitcoin с доходностью 100% в месяц. Оказание помощи производились исключительно через систему Биткойн. 8 апреля 2016 г. Мавроди объявил о закрытии данного проекта, но остались национальные проекты (например, MMM Южная Африка, MMM China, MMM JAPAN, MMM Global USA) с доходностью 30% в месяц. В декабре 2016 г. в Нигерии сайт MMM занял 5-е место по популярности. В декабре 2017 г. Сергей Мавроди объявил о запуске собственной криптовалюты Mavro [3]. При рассмотрении динамики цены акций пирамиды видно, что цена растет, причем нелинейно. Данные цены были взяты с сайта биржевого рынка `Investing.com` [2]. Временной ряд зависимости цены от времени был построен по 376 ежемесячным данным, начиная с января 1990 г. и заканчивая мартом 2021 г. При помощи метода наименьших квадратов были найдены коэффициенты этой параболы. А именно: $Y = 25{,}1699 + 0{,}0028\,X + 0{,}001243\,X^2$. В этой функции независимой переменной X выступает номер периода (месяца), а зависимой переменной Y — цена акции MMM.

После нахождения параметров регрессии проводился корреляционный анализ, который показал статистическую значимость построенного уравнения. А именно, коэффициент корреляции составил 0,9417, что свидетельствует о тесной зависимости между X и Y, коэффициент детерминации составил 0,8868. Также высокое качество уравнения регрессии показал коэффициент Фишера: 1461,163 против табличного значения 3,03 при уровне значимости 0,05.

В связи с предыдущим исследованием возник интерес исследовать поведение цены биткойна. При рассмотрении динамики цены криптовалюты можно увидеть, что цена растет, причем нелинейно. Данные цены были взяты с сайта биржевого рынка `Investing.com` [4]. Временной ряд был построен по 13 данным (по годам) начиная с 2009 г. и заканчивая 2020 г. на конец периода. Расчеты методом наименьших квадратов для параболы позволили найти в явном виде коэффициенты этой функции. А именно: $Y = 466{,}29 - 519{,}648\,X + 89{,}558\,X^2$. В ней в качестве независимой переменной выступает номер периода, а в качестве зависимой переменной Y — цена биткойна. Корреляционный анализ показал статистическую значимость построенной нелинейной регрессии, поскольку индекс корреляции равен 0,93, детерминации — 0,87, критерий Фишера — 33,5 при табличном значении 4,1 и уровне значимости 0,05.

Литература

1. *Федеральная служба государственной статистики.* Отношение объема инвестиций в основной капитал к валовому региональному продукту. Эффективность экономики России.—URL: https://showdata.gks.ru/report/279951 (дата обращения: 14.03.2021).
2. Акции MMM.—URL: https://ru.investing.com/equities/3m-co-historical-data (дата обращения: 10.05.2021).
3. MMM.—URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/MMM (дата обращения: 14.05.2021).
4. Криптовалюты. Биткойн.—URL: https://ru.investing.com/crypto/bitcoin (дата обращения: 14.05.2021).

О СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ ОЦЕНОК НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ

В. В. Новиков

(Россия, Саратов; СГУ)

Пусть $\left\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ — многочлены Якоби, ортонормированные на отрезке $[-1,1]$ с весом $w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\alpha,\beta>-1$, $p:=\min\{\alpha;\beta\}$, $q:=\max\{\alpha;\beta\}$, и $-1<x_{n,n}<\cdots<x_{1,n}<1$ — нули многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, пронумерованные в порядке убывания. Пусть, далее, $\left\{l_{j,n}^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}_{j=1}^{n}$ — фундаментальные многочлены интерполяции Лагранжа степени $n-1$ с узлами $\{x_{i,n}\}_{i=1}^{n}$ и

$$\lambda_j^{(n)}=\int\limits_{-1}^{1} w(x)l_{j,n}^{(\alpha,\beta)}(t)\,dt,\quad j=1,\ldots,n,$$

— коэффициенты Котеса — Кристоффеля. Рассмотрим непараметричесую регрессионную модель

$$Y_i=m(X_i)+\varepsilon_i,\quad i=1,\ldots,n,$$

где $m(x)=\mathsf{E}(Y\mid X=x)$ — неизвестная функция регрессии, подлежащая оцениванию на основе эмпирических данных $\{(X_i,Y_i)\}_{i=1}^{n}$, $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{n}$ — случайные ошибки. Будем считать, что величина X неслучайна, причем $X_i=x_{i,n}$, $i=1,\ldots,n$, и возьмем в качестве оценки $\widehat{m}_N(x)$ функции регрессии $m(x)$ выражение

$$\widehat{m}_N(x)=I_{n,N}^{(\alpha,\beta)}(f,x):=\sum_{k=0}^{N} c_k^{(n)}P_k^{(\alpha,\beta)}(x),\tag{1}$$

где $N=N(n)\leqslant n$, а коэффициенты определяются формулой

$$c_k^{(n)}=\sum_{j=1}^{n} Y_j\lambda_j^{(n)}P_k^{(\alpha,\beta)}(x_{j,n}).$$

Хорошо известно, что при $N=n$ выражение (1) представляет собой многочлен Лагранжа, интерполирующий данные $\{Y_i\}_{i=1}^{n}$ в узлах $\{x_{i,n}\}_{i=1}^{n}$. Поэтому числа $c_k^{(n)}$ являются соответствующими коэффициентами Фурье — Лагранжа с узлами в нулях ортогонального многочлена Якоби. С другой стороны, нетрудно заметить, что $c_k^{(n)}$ представляют собой приближенные коэффициенты Фурье — Якоби, вычисленные по квадратурной формуле Гаусса, в силу чего выражения (1) в некоторых работах называют дискретными суммами Фурье — Якоби. По своей конструкции выражения (1) относятся к оценкам ортогональных разложений, статистические свойства которых (для других ортогональных систем)

изучались во многих работах (см., например, [1, 2] и приведенную там литературу).

В настоящем сообщении анонсируется результат, который представляет собой ограничения на порядок роста чисел $N(n)$ и показатели α, β, гарантирующие состоятельность оценки $\widehat{m}_N(x)$.

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

i) $\mathsf{E}\varepsilon_i = 0$, $\mathsf{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$, *и* $\mathsf{E}\varepsilon_i^2 < C$, $i = 1, \ldots, n$, *где* C — *некоторая постоянная;*

ii) *функция* $m(x)$ *непрерывна на отрезке* $[-1, 1]$ *и имеет на нем ограниченную вариацию;*

(iii) $p \geqslant -1/2$;

(iv) $(N(n))^{2q+3} = o(n)$, $n \to \infty$.

Тогда при $N(n) \to \infty$ *для оценки* (1) *и для любого отрезка* $[a, b] \subset (-1, 1)$ *имеем*

$$\widehat{m}_N(x) \xrightarrow{p} m(x), \quad x \in [a, b].$$

Литература

1. *Хардле В.* Прикладная непараметрическая регрессия.—М.: Мир, 1993.—349 с.
2. *Greblicki W., Pawlak M.* Nonparametric System Identification.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008.—313 p.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ, ОСНОВАННЫЙ НА МЕТОДЕ РОЯ ЧАСТИЦ

А. Ф. Оськин (Беларусь, Полоцк; ПГУ),
Д. А. Оськин (Беларусь, Минск; БГЭУ)

Метод роя частиц — один из методов дискретной оптимизации, использующий технологии искусственного интеллекта. Метод был разработан в середине 90-х годов. Значительный вклад в его создании и развитие внесли Дж. Кеннеди, Р. Эберхард [1] и Ю. Ши [2]. Книга Дж. Кеннеди и Р. Эберхарда [1] описывает многие философские аспекты метода роя частиц, а также так называемого роевого интеллекта.

Первоначально метод предназначался для имитации социального поведения. Затем было замечено, что его можно эффективно использовать в качестве инструмента оптимизации. Одним из важных достоинств метода является то, что он не требует знания точного градиента оптимизируемой функции. Это обусловило его широкое применение для решения оптимизационных задач.

Сущность метода сводится к нахождению экстремума целевой функции с помощью роя частиц, для каждой из которых заданы координаты и скорость перемещения в пространстве решений. На каждой итерации рассчитывается скорость перемещения i-й частицы, которая зависит как от ее текущий скорости, так и от положения и скорости частицы, наиболее близкой к экстремуму, и от предыдущей скорости рассматриваемой частицы. Т. е. каждая частица «знает» о «лучшей» частице в рое и стремится к ней приблизиться. Это позволяет построить итерационный процесс, который сходится к глобальному экстремуму.

Известны многочисленные модификации метода роя частиц. Чаще всего улучшение характеристик алгоритма достигается путем оптимизации управляющих параметров. Мы предлагаем другой подход, основанный на идее, изложенной в статье [3]. Этот подход сводится к разбиению исходного роя на несколько подроев и нахождению решения для каждого из подроев. Далее мы отбираем из каждого подроя «лучшие» частицы и объединяем их в новые подрои. На следующей итерации процесс поиска решения для этих вновь образованных подроев повторяется. Работа алгоритма завершается после выполнения заданного числа итераций.

Таким образом, алгоритм модифицированного метода роя частиц будет состоять из следующих шагов.

Шаг 1 (Инициализация). Генерация роя из N частиц, случайным образом разбросанных в области поиска.

Шаг 2. Разбиение роя на M подроев.

Шаг 3. Для каждого подроя поиск решения с использованием классического алгоритма метода роя частиц.

Шаг 4. Если выполняется критерий останова, то переход к шагу 6, иначе — переход к шагу 4.

Шаг 4. Отбор из каждого подроя «лучших» частиц.

Шаг 5. Объединение отобранных частиц в новые подрои и переход к шагу 3.

Шаг 6. Вывод положения «лучшей» частицы в качестве результата решения оптимизационной задачи.

Шаг 7. Конец.

Для тестирования разработанного алгоритма использовались три трехмерные функции, обычно используемые в подобных случаях. Это функция сферы, функция Растригина и функция Швефеля. Результаты проведенных испытаний показали хорошую сходимость и приемлемую точность предложенного алгоритма.

Литература

1. *Eberhart R. C., Shi Y., Kennedy J.* Swarm Intelligence.—San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001.—512 p.
2. *Shi Y.* A modified particle swarm optimizer // Proceedings of IEEE International Conference on Evolutionary Computation.—1998, P. 69–73.
3. *McCaffrey J.* Искусственный интеллект. Метод роя частиц.—[Электронный ресурс].—URL: https://docs.microsoft.com/ru-ru/archive/msdn-magazine/2011/august/artificial-intelligence-particle-swarm-optimization (дата доступа: 05.07.2021).

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАССЕЯНИЯ ПЫЛИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ В ГОРНЫХ УЩЕЛЬЯХ РСО-АЛАНИЯ

О. С. Панаэтова (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
Ю. В. Тимченко (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
А. А. Радионов (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
Е. С. Каменецкий (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

В горных ущельях РСО-Алания ведется промышленная и хозяйственная деятельность, эксплуатируются транспортные артерии, располагаются санаторно-курортные учреждения. В ходе хозяйственного освоения горных ущелий появляются источники загрязняющих веществ (ЗВ) в виде отвалов породы, аэрозолей, пыли. Определение текущего и долговременного влияния ЗВ, состояния климатических зон и прогнозирование изменений является актуальной научной задачей.

В работе используются методы трехмерного математического моделирования атмосферных течений над районами Унальского и Фиагдонского хвостохранилищ с учетом топографии поверхности. Геоданные дистанционного зондирования Земли космической программы Space Shuttle находятся в открытом доступе. Геоданные получены с информационного сервиса в виде графического файла, который декодировался и преобразовывался в формат стереолитографии с использованием программного обеспечения heightmap2stl, Meshmixer. Построение сетки и присоединение к вычислительной модели выполнено с использованием инструментов blockMesh и snappyHexMesh из комплекса программных средств OpenFOAM. С помощью вычислительного пакета OpenFOAM проводились серии вычислительных экспериментов.

Для оценки вредного воздействия хвостохранилища на экологию, необходимо знать распределение пылевого аэрозоля на склонах горного ущелья по всей его протяженности. Создание подробной математической модели, точно учитывающей большое разнообразие атмосферных условий (направление и сила ветра, температура, влажность, облачный покров) в горной атмосфере — задача весьма трудоемкая и требующая множества входных данных.

Для летних условий, когда и происходит основной вынос пыли атмосферными потоками, можно использовать упрощенную модель. В упрощенную модель включались математические уравнения аэродинамики, RAS-моделирование турбулентности, уравнения переноса пыли, региональные топографические особенности и характерные розы ветров, полученные из данных спутниковых группировок NASA ИСЗ GOES, METEOSAT, EOS Terra/Aqua -AVHRR/MODIS. Температурные неоднородности, возникающие при неравномерном солнечном нагреве склонов ущелья, не учитывались.

Прогноз приблизительного значения концентрации ЗВ в каждой точке склонов ущелья формируется после серии расчетов, каждый из которых проведен

для одного из шестнадцати направлений внешнего (заданного на верхней границе расчетной области) ветра. В каждом из таких расчетов вычислялось два поля концентрации пылевого аэрозоля от двух источников, расположенных вблизи Унальского и Фиагдонского хвостохранилищ. Результаты расчетов ЗВ по всем 16-ти вычислительным экспериментам складывались по расчетным направлениям ветра с весами, полученными из имеющейся розы ветров. Полученное осредненное поле концентрации ЗВ далее нормируется на наблюдаемые в полевых условиях значения ЗВ.

Сравнение расчетных и наблюдающихся [1] в полевых измерениях значений ЗВ представлено в работе [2]. Имеется удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных значений распределения ЗВ по склонам горного ущелья. Это свидетельствует о применимости упрощенной аэродинамической модели для анализа распределения ЗВ, возникающего в горных ущельях вследствие длительного многолетнего влияния хвостохранилищ на экологию региона.

Литература

1. *Лолаев А. Б., Гурбанов А. Г., Дзебоев С. О., Илаев В. Э.* Загрязнение прилегающих территорий в районе деятельности Садонского свинцово-цинкового комбината (Республика Северная Осетия-Алания) // Вестн. ВНЦ РАН.—2017.—Т. 6, № 2.—С. 177–180.
2. *Каменецкий Е. С., Радионов А. А., Тимченко В. Ю., Панаэтова О. С., Свердлик Г. И.* Математическое моделирование распределения пыли по склонам горного ущелья от хвостохранилища, расположенного в Алагирском ущелье // Горный информационно-аналитический бюллетень.—2020.—№ 11-1.—С. 118–134. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-111-0-118-134.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ РЕЖИМОВ ПОПУЛЯЦИЙ С АГРЕГИРОВАННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. Ю. Переварюха

(Россия, Санкт-Петербург; СПб ФИЦ РАН)

Активный инвазионный процесс распространения чужеродных биологических видов в новой для них биотической среде сопровождают чрезвычайно стремительные изменения численности. Формы таких экстремальных переходных популяционных процессов разнообразны и сложны для описания обыкновенными дифференциальными уравнениями [1]. Виды при попадании в разные экосистемы демонстрируют несхожие режимы динамики [2]. Инвазионные явления нельзя описать обобщенной популяционной моделью. Классификация форм динамики популяций видов-вселенцев является отдельной проблемой. Можно выделить несколько типов популяционного процесса с переходом к фазе взрывообразного размножения. Вспышка может быть единичной пороговой Λ-образной, серией пилообразных несвязных пиков или негармонических флуктуаций, как у бабочки *Malacosoma disstria* в провинции Нью-Браунсвик, где возник режим экстремальных колебаний численности агрессивного вида. Репродуктивная активность вселенца перестает эффективно контролироваться средой. Противодействие становится минимальным, и если репродуктивный потенциал высок, запускается разрушительная вспышка. У всех сообществ есть некоторый предел выдерживаемого давления. Моделирование явлений предусматривает варианты завершения для экстремальных сценариев.

Цель нашей работы — моделирование колебаний вида-вселенца как экстремального переходного режима, что особенно часто наблюдается у бабочек-вредителей. Колебания численности многих видов не зависят от динамики их конкурентов [1]. Автоколебательные режимы наблюдались у лабораторных популяций и рыб, и насекомых, что отвечает свойствам циклического решения уравнения с сосредоточенным запаздыванием $t-\tau$ Хатчинсона:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right). \tag{1}$$

Введенное в (1) запаздывание τ служит мерой скорости саморегуляции — использования и восстановления ресурсов [2], но не связано с временем жизни поколений. При малых значениях запаздывания τ динамика модели опишет затухающие колебания $N(t) \to K$. Для (1) типична бифуркация Андронова — Хопфа с появлением устойчивого предельного цикла $N_*(t,r)$. Нарушение устойчивости состояния равновесия зависит от величины $r\tau$. Дальнейшее увеличение $r\tau > \pi/2$ вызывает переход в режим релаксационных колебаний. Возрастание амплитуды колебаний негармонической формы при увеличении промежутка между максимумами и стремящиеся к нулю минимумы приводят такой

цикл $N_*(t,r)$ за грань обоснования в реальных экологических ситуациях. Для моделирование колебательной активности популяции при приближении репродуктивного r-потенциала к критическим значениям и без K-предела насыщения как равновесного $N(t) \to K$ состояния предположим существование предкритического порогового уровня $H < K$. Достижение значения $N(t) \to K$ означает непоправимую деградацию для среды обитания. Переход через мягкий порог H имеет значение для механизмов контроля сложной внутрипопуляционной структуры, что показано для севрюги Каспийского моря в [3]. Тогда на динамику системы оказывает влияние отклонение $(H - N(t-\tau))$, притом величина отклонения может быть как положительной, так и отрицательной. Модифицируем (1) в форму с двумя запаздываниями и двумя пороговыми значениями:

$$\frac{dN}{dt} = r_1 N \left(1 - \frac{N(t-\tau_1)}{K}\right)(H - N(t-\tau_2)), \quad \tau_1 > \tau_2. \tag{2}$$

При малом значении запаздывания вычисления покажут затухающие осцилляции с $N \to H$. Очевидно при увеличении τ или r_1 в уравнении возникнет устойчивый цикл и станет релаксационным с возрастанием r_1. При дальнейшем увеличении значения $r_1\tau$ произойдет резкое изменение поведения траектории, которая перестанет притягиваться к замкнутому подмножеству фазового пространства. Осциллирующая траектория решения вместо установления цикла с увеличивающейся амплитудой будет резко выброшена за пределы допустимых для значений при $N(t-\tau) > K$. Решение (2) после переходного цикла становится неограниченным. В (2) получен сценарий, который в вычислительном эксперименте трактуется как вариант разрушение среды и последующая деградация изолированной экосистемы после серии циклических вспышек. Инвазия завершается недопустимым значением численности и деградацией и среды, и самой популяции — сценарий реализованный на острове Пасхи.

Данная модель преодолевает недостатки циклов с $\min N_*(t;\tau r) \to 0$ двух популяционных уравнений — тета-логистической модели с запаздыванием:

$$\frac{dN}{dt} = r_2 N \left(1 - \frac{N(t-\tau_1)}{K}\right)^{\Theta}, \quad \Theta > 1$$

и уравнения Николсона, описывающего нерегулярные колебания насекомых:

$$\frac{dN}{dt} = r_3 N(t-\tau) e^{-bN(t-\tau)} - \delta N(t-\lambda), \quad \tau > \lambda.$$

Литература

1. *Переварюха А. Ю.* Сценарии критической вспышки численности инвазионного вида в модификации уравнения Гомпертца // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, № 1.—С. 51–61.
2. *Переварюха А. Ю.* Запаздывание в регуляции популяционной динамики — модель клеточного автомата // Динамические системы.—2017.—Т. 7, № 2.—С. 157–165.
3. *Соловьева Т. Н.* Модель сценария деградации каспийской севрюги с осциллирующей составляющей популяционной динамики // Информационно-управляющие системы.—2017.—№ 6.—С. 58–65.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ МЕТОДЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. В. Подорога (Россия, Москва; МГУ),
И. В. Тихонов (Россия, Москва; МГУ)

Поставим задачу Коши для квазилинейного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad u = u(x,t), \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{2}$$

Уравнение (1) называют также *квазилинейным законом сохранения*, а заданное выражение $f = f(u)$ — *функцией потока*. Несмотря на внешнюю простоту, работа с задачей Коши (1), (2) является весьма нетривиальной из-за возможной потери гладкости решения с последующим появлением у него сильных разрывов. Поэтому естественно изучать поставленную задачу Коши на классе обобщенных (разрывных) решений. Здесь надо учитывать известное условие Гюгонио, действующее на разрывах, и энтропийное условие Олейник, позволяющее отбирать единственное «правильное» решение [1–4].

Возможное отсутствие гладкости и наличие сильных разрывов приводят к серьезным трудностям при численном моделировании обобщенных решений задачи Коши (1), (2) (см. [5–7]).

Однако, если рассматривать специальный класс *кусочно линейных* функций потока $f(u)$, а начальное условие $\varphi(x)$ брать из класса *кусочно постоянных* функций, то, в соответствии с общей теорией, единственное «правильное» решение $u(x,t)$ при каждом фиксированном $t > 0$ будет оставаться кусочно постоянным. Такое решение удобно представлять в виде набора его точек разрыва, учитывая значения u^-, u^+ на левых и правых «берегах» разрывов соответственно. Последующая эволюция разрывов, проходящая с учетом условий Гюгонио и Олейник, полностью определяет поведение решения [7–9]. Изложенный *метод движения разрывов* допускает численную реализацию посредством компактной компьютерной программы и обеспечивает построение практически точного решения задачи Коши (1), (2) в классе кусочно постоянных функций.

Отметим, что представленный подход можно адаптировать на случай невыпуклых кусочно линейных функций потока $f(u)$ (см. [9]). Более того, используя соображения аппроксимации, удается находить приближенные решения задачи Коши (1), (2) для произвольных кусочно гладких функций потока $f(u)$ и кусочно непрерывных начальных условий $\varphi(x)$. Имеются многочисленные примеры, показывающие возможности метода в различных ситуациях.

Литература

1. *Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А.* Уравнения с частными производными первого порядка: Учеб. пособие.—М.: МГУ, 1999.—96 с.
2. *Эванс Л. К.* Уравнения в частных производных.—Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003.—562 с.
3. *Лакс П. Д.* Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных.—М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая механика», 2006.—296 с.
4. *Олейник О. А.* О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // Успехи мат. наук.—1959.—Т. 14, вып. 2 (86).—С. 165–170.
5. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы (введение в теорию).—М.: Наука, 1977.—440 с.
6. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы / 7-е изд.—М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.
7. *Подорога А. В., Тихонов И. В.* Сравнительный анализ различных численных методов для квазилинейного уравнения дорожного движения // Диф. уравнения и процессы управления.—2018.—№ 2.—С. 154–179.
8. *Подорога А. В.* Численное исследование квазилинейного закона сохранения с кусочно линейной функцией потока // Некоторые актуальные проблемы современной математики и мат. образования. Герценовские чтения — 2018. Материалы научн. конф., 9–12 апреля 2018 г.—СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2018.—С. 244–248.
9. *Подорога А. В.* Особенности моделирования решений квазилинейного закона сохранения с невыпуклой функцией потока // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIX Международной научн. конф., посвященной столетию физико-математического факультета СмолГУ.—Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2018.—Т. 19.—С. 85–92.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

О СУЩЕСТВОВАНИИИ ОДНОГО *RR*-МНОГОГРАННИКА ВТОРОГО ТИПА

В. И. Субботин

(Россия, Новочеркасск; ЮРГПУ (НПИ))

От условий симметрии, накладываемых на некоторые элементы многогранника, зависит его строение, (см., например, [1]).

В докладе продолжены исследования автора многогранников с условиями симметрии ([2, 3]). Конечно, группа симметрий, действующая на элементах многогранника, далеко не всегда определяет его строение. Оказывается, что в некоторых случаях возможно полное перечисление всех типов многогранников с заданными условиями симмметрии; в этих случаях удобно называть такие условия *жесткими*.

Например, жесткими являются условия правильногранности в [4] и условие наличия ромбических вершин и правильных граней одного типа в [2]. Напомним, что в *RR*-многограннике второго типа существуют ромбические вершины, а остальные грани — правильные не обязательно одного вида.

В настоящей работе доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Существует RR-многогранник с* 25*-ю гранями, одна из которых квадратная, а остальные грани — правильные треугольные. Острый угол ромба единственной ромбической вершины* $\approx 69{,}700^\circ$.

Доказательство теоремы основано, в частности, на выводе уравнения для плоского угла α, стороны которого являются сторонами двух смежных ромбов ромбической вершины:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta\cos\left(2\operatorname{sign}\left(\frac{3\pi}{5}-\alpha\right)\times\right.$$
$$\left.\times\arccos\frac{1+(1-\cos\theta)(2\sin\frac{\alpha}{2}-1)}{\sin\theta\sqrt{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}+\arccos\frac{1+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right), \tag{1}$$

где

$$\cos\theta = \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos\left(\arccos\frac{\sin\frac{\alpha}{2}-1}{\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}}+\arccos\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Из этого уравнения находим $\alpha \approx 107{,}827^\circ$. Для острого угла ромба ромбической вершины получаем значение $\approx 69{,}700^\circ$.

Литература

1. *Coxeter H. S.* Regular Polytopes.—London–N.Y., 1963.
2. *Субботин В. И.* О полноте списка выпуклых RR-многогранников // Чебышев. сб.—2020.—Т. 21, № 1.—С. 297–309.
3. *Субботин В. И.* Существование и полнота перечисления трехмерных RR-многогранников // Геометрические методы в теории управления и математической физике.—Рязань: Изд-во Рязан. гос. ун-та им. С. А. Есенина, 2021.—С. 15.
4. *Залгаллер В. А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. науч. сем. ЛОМИ.—1967.—Т. 2.—С. 1–220.

ОБРАБОТКА ДАННЫХ СПУТНИКОВЫХ НАБЛЮДЕНИЙ АТМОСФЕРНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ НАД ГОРНЫМИ ТЕРРИТОРИЯМИ РСО-АЛАНИЯ

Ю. В. Тимченко (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
О. С. Панаэтова (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
А. А. Радионов (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
Е. С. Каменецкий (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Атмосферный аэрозоль, наряду с облачностью, снежным и растительным покровом является одним из важных регуляторов радиационного баланса системы «атмосфера–подстилающая поверхность», и характеризуется аэрозольной оптической толщиной (AOT). Спутниковому мониторингу состояния атмосферы Земли посвящено множество работ, например [1]. Исследования в этом направлении ведутся при помощи множества искусственных спутников Земли, созданных для измерения множества характеристик атмосферы. После обработки результаты измерений доступны для анализа и дальнейшего использования.

В настоящей работе использовались спутниковые измерения пространственного и временного распределения оптических характеристик атмосферы MODIS космических аппаратов Terra/AQUA (NASA). Эти данные доступны для скачивания (`https://neo.sci.gsfc.nasa.gov`) в виде ежедневных изображений Level-2. Для получения значений AOT в выбранной точке местности использовался программный продукт ImageJ2/Fiji (`https://imagej.net/ImageJ2`). Для обработки загружался весь массив полученных суточных изображений распределения AOT по поверхности Земли за период с 01.01.2000 по 31.12.2019 гг., по географическим координатам точки определялся исследуемый район и строился временной ряд ежедневных значений AOT.

Ежедневные значения температуры на высоте 2 метра и ежедневные значения количества осадков в произвольной географической локации получены из результатов измерения метеоспутника НАСА (`https://power.larc.nasa.gov/data-access-viewer`) за период с 01.01.2000 по 31.12.2019 гг.

Рассматривалось несколько географических локаций, расположенных в равнинных (г. Моздок, Беслан), предгорных (г. Владикавказ) и горных (с. Цей, Фиагдон) районах территории РСО-Алания. Для каждой локации полученные наборы данных состояли из временных рядов ежедневных значений AOT, температуры на высоте 2 метра и количества осадков. Полученные временные ряды ежегодных значений каждой из характеристик статистически обрабатывались с использованием библиотек алгоритмов Numpy (`https://numpy.org`).

Целью работы является анализ и выяснение изменчивости AOT в горных, предгорных и равнинных районах главного Кавказского хребта Республики Северная Осетия–Алания на основе данных спутниковых измерений, а также выявление статистической взаимосвязи AOT с температурой воздуха на высоте 2 м и количеством осадков.

В работе показаны коэффициенты корреляции средних АОТ и температуры воздуха на высоте 2 м, средних АОТ и количества осадков, а также неосредненных этих данных для различных локаций [2]. Пространственно-временные вариации АОТ над исследованными регионами определяются не только атмосферными аэрозолями (пыль, дым, антропогенный аэрозоль, газо-пепловые выбросы вулканов), но также могут быть связаны с такими метеорологическими параметрами как температура и количество осадков в данной местности. В летнее время, с ростом температуры, АОТ в среднем повышается. Кроме того, имеет значение высота над уровнем моря исследуемого региона. С увеличением высоты можно ожидать уменьшения АОТ.

Литература

1. *Тимофеев Ю. М.* Исследование атмосферы Земли методом прозрачности.—СПб.: Наука, 2016.—367 с.
2. *Каменецкий Е. С., Радионов А. А., Тимченко В. Ю., Панаэтова О. С.* Об изменчивости аэрозольной оптической толщины в горных, предгорных и степных районах Северного Кавказа по данным спутниковых измерений MODIS // Материалы конференции «Современные проблемы геологии, геофизики и геоэкологии Северного Кавказа» (14–16 октября 2020 г.).—Грозный, 2020.—С. 424–431.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СМЕШЕНИЯ ВОД В УСТЬЕВОМ РАЙОНЕ[1]

А. Е. Чистяков (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ),
И. Ю. Кузнецова (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В России работы по созданию математических моделей сложных морских систем имеют более чем полувековую историю. Однако, несмотря на значительное число публикаций, многие эффекты, существенные для повышения точности и надежности прогнозов опасных явлений природного и техногенного характеров, связанные с пространственной неоднородностью среды, гравитационным оседанием, температурным и кислородным режимами, соленостью, не учитывались ранее при построении математических моделей гидробиологических процессов. Непрерывные и дискретные модели гидрофизики, используемые вплоть до настоящего времени, являются, как правило, сильно идеализированными и зачастую не учитывают пространственную неоднородность среды. При этом в работе [1] показано, что точечное описание является принципиально неверным в системах, для которых однородность пространства существенно нарушена. Анализ существующих математических моделей гидробиологических процессов [2, 3] показал, что многие из них ориентированы на использование моделей гидродинамики, не учитывающих сложную геометрию береговой линии и дна, сгонно-нагонные явления, трение о дно и ветровые напряжения, турбулентный обмен, стоки рек, испарение и др., проявляющих неустойчивость при значительных перепадах глубин, характерных для прибрежных частей водоемов, в том числе мелководных. В работе предлагается математическая модель гидрофизики устьевого района, учитывающая движение водной среды, переменную плотность, зависящую от солености, и сложную геометрию расчетной области при наличии существенного градиента плотности водной среды.

В математическую модель включены следующие уравнения:

– уравнение движения (Навье — Стокса) и уравнение неразрывности в случае переменной плотности [4] для моделирования движения водной среды;

– трехмерное уравнение диффузии-конвекции [4, 5] для описания процесса транспорта взвешенных частиц:

$$c'_t + (uc)'_x + (vc)'_y + ((w + w_s)\, c)'_z = \left(\mu c'_x\right)'_x + \left(\mu c'_y\right)'_y + \left(\nu c'_z\right)'_z + F, \qquad (1)$$

где c — концентрация взвеси [мг/л]; w_s — скорость осаждения взвеси [м/с]; F — функция интенсивности распределения источников взвеси [мг/л·с];

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-07-00623.

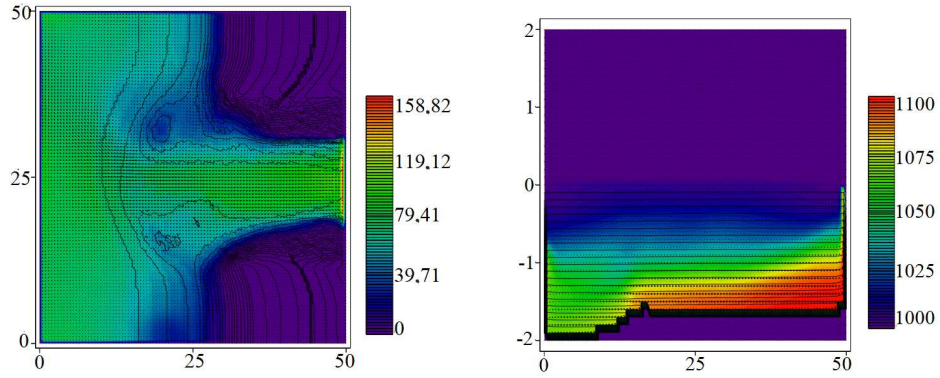
– уравнение для расчета плотности водной среды:

$$\rho = (1 - V)\,\rho_0 + V\rho_v, \quad c = V\rho_v, \tag{2}$$

где V — объемная доля взвеси; ρ_0 — плотность пресной воды при нормальных условиях; ρ_v — плотность взвеси.

Дискретизация модели транспорта взвеси получена на основе модифицированной схемы «кабаре» [4, 5] при учете функции частичной заполненности расчетных ячеек, что позволяет повысить точность расчетов.

Для численного решения поставленной задачи разработан программный комплекс, который был применен для решения модельной задачи движения вод в устьевом районе при наличии существенного градиента плотности водной среды за счет присутствия взвеси в воде. Входные данные: длина и ширина расчетной области — 50 м, глубина — 2 м, шаги по горизонтальной и вертикальной пространственным координатам составили 0.5 и 0.1 м соответственно, расчетный интервал — 5 минут, шаг по времени — 0.25 с, скорость течения — 0.2 м/с, $w_s = 2.042$ мм/с, $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, $\rho_v = 2700$ кг/м^3, $V = 1/17$.



(а) концентрация взвеси в воде (б) плотность водной среды

Рис. 1. Движение вод в устьевом районе при наличии существенного градиента плотности водной среды через 5 минут после начала расчетов.

Разработанный программный комплекс может применяться для расчета переноса как для тяжелых примесей, так для примесей, которые легче воды таких как микропластик.

Литература

1. *Logofet D. O., Lesnaya E. V.* The mathematics of Markov models: what Markov chains can really predict in forest successions // Ecological Modelling.—2000.—Vol. 126.—P. 285–298.
2. *Матишов Г. Г., Ильичев В. Г.* Об оптимальной эксплуатации водных ресурсов. Концепция внутренних цен // Докл. АН.—2006.—Т. 406, № 2.—С. 249–251.
3. *Lo E. Y. M., Shao S.* Simulation of near-shore solitary wave mechanics by an incompressible SPH method // Applied Ocean Research.—2002.—Vol. 24, № 5.—P. 275–286.
4. *Сухинов А. И., Кузнецова И. Ю.* Исследование точности и применимости разностной схемы для решения задачи диффузии-конвекции при больших сеточных числах Пекле // Вычислительная механика сплошных сред.—2020.—Т. 13, № 4.—С. 437–448.
5. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е.* Моделирование движения взвешенных частиц в русловых потоках // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики.—Воронеж: Науч.-иссл. публ., 2020.—С. 1106–1113.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ОБОБЩЕННО-ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

А. С. Шарифуллин
(Россия, Елабуга; ЕИ КФУ)

В работе будут использоваться определения в том или ином смысле обобщенно-выпуклых множеств на плоскости и в пространстве Лобачевского. Все они являются копиями соответствующих определений для евклидова пространства, данными Ю. Б. Зелинским и развиваемыми представителями его научной школы. В частности, будут рассматриваться 1-полувыпуклые множества и слабо 1-полувыпуклые множества.

Множество U в пространстве Лобачевского H^n будем называть 1-*полувыпуклым*, если для каждой не принадлежащей ему точки M найдется луч с началом в точке M, не пересекающийся с множеством U. Множество U в пространстве Лобачевского H^n будем называть *слабо* 1-*полувыпуклым*, если для каждой граничной точки этого множества найдется луч с началом в этой точке, не пересекающийся с множеством U.

На евклидовой плоскости слабо 1-полувыпуклое, но не 1-полувыпуклое, имеет не менее трех компонент связности. Т. М. Осипчук доказала, что если граница множества принадлежит классу C^1, то такое множество имеет не менее четырех компонент связности. Эти результаты переносятся и на плоскость Лобачевского. Из-за специфики гиперболической плоскости отдельного доказательства требует факт, что четырех открытых непересекающихся кругов достаточно, чтобы их объединение было слабо 1-полувыпуклым, но не 1-полувыпуклым. В работе находятся метрические соотношения в конфигурациях множеств на плоскости Лобачевского, обеспечивающие выполнение требуемых условий. Также рассматриваются аналогичные задачи в трехмерном пространстве Лобачевского.

A DISCRETE TIME SEIR MODEL FOR COVID-19 SPREAD

S. K. Shoyimardonov
(Uzbekistan, Tashkent; IM AS RUz)

To study epidemics at the population level, one of the most traditional mathematical model is the Susceptible, Exposed, Infectious, Recovered (SEIR) compartmental model. In a closed system which does not account for births or deaths, the sum of these compartments remains constant in time, i. e.,

$$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N.$$

In the work [1] given continuous time SEIR model and we consider discrete time version of this model [2]:

$$V: \begin{cases} x^{(1)} = x - \beta x(u + qy), \\ y^{(1)} = y - ay + \beta x(u + qy), \\ u^{(1)} = u - bu + ay, \\ v^{(1)} = v + bu, \end{cases} \tag{1}$$

where $a > 0, b > 0, \beta \geqslant 0, q \geqslant 0$ and we notice that $x+u+y+v = 1$. The parameter β is the average number of contacts per person per time, multiplied by the probability of disease transmission via a contact between a susceptible individual, and an individual carrying the virus, q is a scaling factor. The fraction a is a transfer rate from the exposed to the infectious stage, they fraction b is recovery rate. This model has already been used in its original form for an early assessment of the epidemic in Wuhan, China.

Let S^3 be three dimensional standard simplex.

Proposition 1. *For the operator* (1) *we have* $V(S^3) \subset S^3$ *if and only if*

$$a, b, \beta \in [0, 1] \quad \textit{and} \quad \beta q \leqslant 1. \tag{2}$$

Moreover, under this conditions the operator V*, defined in* (1)*, is a QSO.*

Proposition 2. *If parameters satisfy* (2) *then operator* (1) *is regular.*

One can see that the set of fixed points of the operator (1) is

$$\mathrm{Fix}(V) = \big\{\Lambda(x) = (x, 0, 0, 1 - x) : \forall\, x \in [0, 1]\big\}.$$

Proposition 3. *The fixed point* $\Lambda(x^*)$ *is a nonhyperbolic for any* $x^* \in [0, 1]$.

In the system (1) we take first three equations:

$$W: \begin{cases} 1x^{(1)} = x - \beta xu - \beta qxy, \\ y^{(1)} = y(1 - a) + \beta xu + \beta qxy, \\ u^{(1)} = u(1 - b) + ay, \end{cases} \tag{3}$$

where $x+y+u \leqslant 1$.

Let $J(\Lambda(\alpha))$, be the Jacobian matrix of the operator W, at fixed point $\Lambda(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$. Then it has the following eigenvalues:

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 1 - \frac{a+b-q\alpha\beta-\sqrt{D}}{2}, \quad \mu_3 = 1 - \frac{a+b-q\alpha\beta+\sqrt{D}}{2}, \qquad (4)$$

where $D = (b-a+q\alpha\beta)^2 + 4a\alpha\beta \geqslant 0$.

Lemma 1. *Let $\Lambda(\alpha)$ be the fixed point of the operator W and μ_2, μ_3 are eigenvalues defined in (4). Then*

$$|\mu_2| = \begin{cases} 1, & \text{if } \alpha = \dfrac{ab}{\beta(a+bq)}, \\ < 1, & \text{if } \alpha < \dfrac{ab}{\beta(a+bq)}, \\ > 1, & \text{if } \alpha > \dfrac{ab}{\beta(a+bq)}, \end{cases}$$

and

$$|\mu_3| < 1 \quad \text{for any} \quad \alpha \in [0,1].$$

Proposition 4. *If $\beta = 0$ then for any initial point $\lambda^0 = \left(x^0, u^0, y^0, v^0\right) \in S^3$ (except fixed point) the trajectory has the following limit*

$$\lim_{n\to\infty} V^{(n)}\left(\lambda^0\right) = \left(x^0;\, 0;\, 0;\, 1-x^0\right).$$

Lemma 2. *The sets*

$$X = \left\{(x,y,u) \in [0,1]^3 : \, x = 0,\, y+u \leqslant 1\right\},$$

$$Y = \left\{(x,y,u) \in [0,1]^3 : \, x \leqslant 1,\, y = u = 0\right\},$$

$$M = \left\{(x,y,u) \in [0,1]^3 : \, x+y+u \leqslant 1,\, ay - \beta x(u+qy) > 0,\, bu - ay > 0\right\}$$

are invariant sets with respect to operator (3).

Lemma 3. *For any initial point $\left(x^0, y^0, u^0\right) \notin M$, there exists $k \geqslant 2$ such that $\left(x^{(k)}, y^{(k)}, u^{(k)}\right) \in M$.*

Theorem 1. *Assume (2) is satisfied. Then for any initial point $\lambda^0 = \left(x^0, u^0, y^0, v^0\right) \in S^3$ (except fixed point) the trajectory has the following limit*

$$\lim_{n\to\infty} V^{(n)}\left(\lambda^0\right) = \left(\bar{x};\, 0;\, 0;\, 1-\bar{x}\right),$$

where $\bar{x}$ depends on parameters and initial point λ^0 and $\bar{x} < \frac{ab}{\beta(a+bq)}$.

References

1. *Radulescu A., Williams C., Cavanagh K.* Managment Strategies in a SEIR-Type Model of COVID 19 Community Spread // Scientific Reports.—2020.—Vol. 10.—21256. DOI: 10.1038/s41598-020-77628-4.
2. *Rozikov U. A., Shoyimardonov S. K.* An Application of Discrete-Time SEIR Model to the COVID-19 Spread.—2021.—arXiv: 2105.00238.

Секция IV

Фундаментальные проблемы развития математического образования

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ПАРАБОЛА — ЗНАКОМАЯ И НЕЗНАКОМАЯ

Р. М. Газарян
(Россия, Нальчик; ГБУ ДПО «ЦНППМПР» Минпросвещения КБР),
Е. В. Киштикова
(Россия, Нальчик; СКГИИ)

Квадратичная функция и ее график — парабола — достаточно основательно изучаются в курсе математики основной школы. Но в параболе есть еще много интересных познавательных и неожиданных фактов. Эти сведения разбросаны в разных источниках и не встречались авторам в сконцентрированном виде. Рассмотрим ряд из них.

1. Квадрат абсциссы вершины параболы, пересекающей ось абсцисс, больше либо равен ординате точки пересечения с осью ординат. Причем равенство будет в случае, когда парабола касается оси абсцисс.

2. Касательная, проведенная к любой точке параболы, пересекает ось ординат в точке, ордината которой равна ординате точки касания, и пересекает ось абсцисс в точке, равной половине абсциссы точки касания

3. Если квадратичная функция принимает хотя бы одно отрицательное значение, то ее дискриминант положительный и, следовательно, соответствующее уравнение имеет два корня.

4. Многочлен степени $k \leqslant n$, имеющий целые значения при $n+1$ последовательных целых значениях независимой переменной, принимает целые значения при всех целых значениях независимой переменной. Частный случай — квадратичная функция.

5. Ордината точки пересечения параболы с осью ординат равно произведению абсцисс точек пересечения параболы с осью абсцисс. Рассмотрим, например, множество функций.

6. Для парабол, пересекающих оси координат в трех различных точках, верно следующее утверждение: «Все окружности, описанные около треугольников с вершинами в этих точках проходят через точку $P(0,1)$».

В заключении рассматривается задача исследования траектории движения биллиардного шара в поле тяготения внутри параболы.

Заметим, что в работе парабола рассматривается как график квадратичной функции, как она изучается в программе средней школы. Т. е. не используется классическое определение параболы, понятие фокуса, директрисы и пр., а также парабола как коническое сечение.

Выше приведенные факты можно использовать для исследовательских работ с учащимися, для моделирования и конструирования олимпиадных задач разного уровня сложности.

Литература

1. *Петросян В. Г., Газарян Р. М., Любицкий А. А.* Бильярд в силовом поле (постановка эксперимента и исследование творческой задачи) // Информатика и образование.—2004.—№ 2.—С. 66–70.
2. Третья Соросовская олимпиада школьников 1996–1997.—М: МЦНМО, 1997.—512 с.
3. Российские математические олимпиады школьников: кн. для учащихся.—Ростов н/Д.: Изд-во «Феникс», 1996.—640 с.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ С ПАРАМЕТРАМИ

В. Н. Дятлова

(Россия, Новосибирск, НГУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

В математическом образовании большая роль и большое место отводятся изучению функций. Причина такого внимания очевидна: многие применения математики связаны с функциями. Поэтому существенно приемлемое освоение в рамках школы понятий области определения и множества значений, а также основных свойств функций: монотонности, ограниченности, экстремумов, четности, периодичности. Вместе в тем в школьном курсе недостаточно мотивированно относятся к изучению функций, во многом ограничиваясь примерами и задачами на тему самих свойств, не привлекая внешние причины необходимости привлечения функций и их свойств. Причина тому в какой-то мере понятна — для формирования серьезной необходимости обращения к функциям может потребоваться материал, выходящий далеко за пределы школьной математики. Однако если обратиться к математическому моделированию внутри математики, так сказать, внутриматематическому моделированию, то можно найти достаточно много ситуаций, обработка которых естественна, а иногда и исключительно возможна на функциональном языке. К источнику таких моделей, то есть к набору оригиналов для моделирования, можно отнести задачи с параметрами.

Конечно, задачи с параметрами не относятся к жизненно важным ситуациям и не выходят за пределы школьной математики, однако при их решении просматриваются все компоненты, присущие деятельности в широком плане — описание обстановки, фиксация цели, осмысление ситуации, формирование признаков достижения результата, анализ ситуации и на его основе выбор инструментария для достижения цели и разбиение с его использованием процесса решения на исполняемые шаги, выполнение намеченного плана и констатация соответствия полученного результата признакам его достижения.

Иногда задачи с параметрами ставятся непосредственно на языке функций и связаны с какими-то их свойствами. Однако такая непосредственность наблюдается далеко не всегда. Нередко в задачах речь идет о семействах множеств, заданных какими-то их свойствами, записанными в виде равенств (уравнениями), неравенств или теоретико-множественных комбинаций этих способов (как правило, систем). Для анализа таких задач можно провести перевод их условий с языка соотношений (уравнений, неравенств, систем и т. п.) на язык функций, то есть промоделировать заданный на языке соотношений оригинал посредством функциональных средств, проанализировать в функциональной модели перенесенную из оригинала информацию, попытаться сформировать путь решения и либо вернуться к языку оригинала, то есть языку соотношений, либо получить решение непосредственно в функциональной модели.

Привлечение функционального моделирования полезно прежде всего с той точки зрения, что при этом становятся востребованными свойства функций, их определение и применение, что побуждает ответственнее отнестись к изучению этих свойств. Много примеров применения функционального моделирования дают задачи, предлагавшиеся в рамках ЕГЭ. К таким задачам можно с известной долей условности отнести постановки, исследуемые с использованием изображений множеств на плоскости, обладающих определенными свойствами. Такие постановки, конечно, имеют отношение к функциям, однако не в полной мере способствуют изучению свойств функций. Существеннее формулировки, предполагающие перевод условия в термины таких свойств функций, как монотонность, ограниченность, четность, а также предусматривающие использование определения, например, множества значений. При переформулировках формируются навыки смыслового чтения, анализа всех фрагментов условия с точки зрения применения свойств, чем поддерживается целесообразность их изучения.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ОБ ОРГАНИЗАЦИИ КОНКУРСОВ ДЛЯ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

Н. Н. Костина (Россия, Елабуга; ЕИ КФУ),
Г. В. Костина (Россия, Елабуга; ЕККИ)

В настоящее время практическая подготовка к педагогической деятельности для студентов — будущих школьных учителей стала особенно актуальна. В качестве одного из важных элементов такой подготовки могут выступать конкурсы по специальности среди бакалавров, в частности, направления «математика и физика». В Елабужском институте Казанского федерального университета такие конкурсы по математике и по физике стали традиционными. Опишем подробнее организацию и проведение таких конкурсов. К задачам конкурсов относится развитие профессиональных компетенций будущих учителей математики и физики. На основной тур конкурса приглашаются команды по 5–8 человек, состоящие из студентов математических, физических или педагогических направлений подготовки. В качестве домашнего задания командам предлагается подготовить театральную миниатюру любого жанра на математические и физические темы. Это может быть сказка, короткая пьеса, мини-оперетта, песня и т. д. Нередко такие представления сопровождаются видеорядом, подготовленным конкурсантами. В отличие от учебного процесса, проверку домашнего задания мы оставляем на финал конкурса. К другим испытаниям конкурса относятся:

– проверка решений задач,
– исторический конкурс,
– решение задач по математике и физике,
– «лингвистический» конкурс,
– видеовопросы.

Опишем чуть подробнее каждый этап соревнований.

Проверка решений задач. Форма проведения этого испытания может варьироваться. Иногда мы проводим такое испытание на компьютерном тренажере виртуального класса, созданном преподавателями кафедры. В других случаях командам предлагается коллективно оценить решения заданий ОГЭ или ЕГЭ по указанным критериям за фиксированное время.

Исторический конкурс. Командам последовательно представляются слайды с портретами ученых (математиков или физиков) и информацией об их научных биографиях. На первом слайде дается только портрет ученого. За правильный ответ команда получает десять баллов. Ответы передаются жюри в письменном виде. При неверном ответе команда продолжает попытки со следующими слайдами. За правильный ответ при показе второго слайда команда получает восемь баллов и т. д. до двух баллов. На шестом слайде дается ответ.

Решение задач по математике и физике. На этом испытании команды получают набор из нескольких задач. Это могут быть качественные задачи, задачи на сообразительность без громоздких вычислений. Время решения ограничено.

«Лингвистический» конкурс. Одному участнику команды дается список из десяти математических или физических терминов, начинающихся на какую-то букву. Не называя однокоренных слов нужно описать эти термины так, чтобы остальные члены команды смогли их отгадать. Предельное время — две минуты. Жюри оценивает число правильных ответов и время, за которое команда смогла их отгадать.

Видеовопросы. На видео командам показывается оборудование, описываются условия эксперимента и предлагается предсказать результат и его обоснование. После сбора ответов демонстрируется сам эксперимент с его результатами.

Завершается соревнование театральным конкурсом. Жюри состоит из членов оргкомитета и преподавателей вузов, представляющих команды.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

К ВОПРОСУ СОДЕРЖАНИЯ ПРОГРАММЫ ДПО «ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ И ЦИФРОВАЯ ГРАМОТНОСТЬ ШКОЛЬНИКА В ТВОРЧЕСКОМ И УРОВНЕВОМ ОСВОЕНИИ СЛОЖНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, ПРОЦЕДУР И ЯВЛЕНИЙ»

И. В. Кузнецова

(Россия, Ярославль; ЯГПУ)

Одним из ключевых факторов, способствующих активному участию современного человека в экономической, социальной, политической и других видах деятельности, является функциональная грамотность, которая оценивается международной программой PISA. Стоит констатировать, что формированию практико-ориентированных знаний и умений в российской школе не уделяется должного внимания. Очевидно, что давно поставленная перед российской школой цель научить учащихся свободному использованию математики в повседневной жизни не достигается на уровне современных международных требований. Одна из основных причин — неподготовленность учителя к формированию функциональной и цифровой грамотности школьника, а также невозможность реализовать эту цель с помощью действующих учебников по математике основной и средней школы, в которых недостаточное количество практико-ориентированных задач, а также задач, содержащих текст словесной информации, представленной в различной форме (текстовой, количественных данных, рисунков и др.), описывающей ту или иную жизненную ситуацию и, для решения которой, необходимо извлечь информацию из разных частей текста.

Таким образом, становится актуальным вопрос о разработке содержания программы дополнительного профессионального образования «Функциональная и цифровая грамотность школьника в творческом и уровневом освоении сложных математических объектов, процедур и явлений».

Целью реализации данной программы является совершенствование у слушателей — педагогических работников профессиональных компетенций, ориентированных на решение проблемы формирования функциональной (математической) и цифровой грамотности школьников в творческом и уровневом освоении сложных математических объектов, процедур и явлений на основе использования современных цифровых образовательных платформ.

Содержание программы представлено следующими модулями: психолого-педагогический (инвариантный), предметный, методический и стажировочный.

Первая тема предметного модуля «Основные подходы к оценке математической грамотности, используемые в исследовании PISA. Содержательные области оценки математической грамотности» содержит следующие вопросы:

- знания и умения, которые на международном уровне считаются необходимыми для математически грамотного современного человека;
- описание видов деятельности, принятое разработчиками исследования PISA, овладение которыми важны для современного человека;

• содержательные области математического образования необходимые для овладения 15-летними школьниками, согласно исследованию PISA;

• содержательные линии школьного курса математики, отражающие диапазон математических знаний, необходимых 15-летним учащимся в качестве основы для жизни и для дальнейшего расширения их математического кругозора;

• категории контекстов, используемые при составлении заданий для оценки функциональной грамотности школьников в исследовании PISA.

Во второй теме предметного модуля будет уделено внимание вопросам формирования функциональной (математической) грамотности учащихся и развитие позитивных установок, мотивации обучения и стратегий поведения учащихся в различных ситуациях при обучении математике.

В теме «Финансовая грамотность как составляющая функциональной математической) грамотности» необходимо акцентировать внимание на компоненты финансовой грамотности, тематические области содержания практико-ориентированных заданий по финансовой грамотности; вопросы формирования финансовой грамотности в курсе математики 5–6, 7–8, 10–11 классов; формы обучения решения финансовых задач на уроках математики; контрольно-измерительные материалы по финансовой грамотности в курсе математики. Следующая тема программы посвящена симбиозу математической и цифровой грамотности школьника в творческом и уровневом освоении сложных математических объектов, процедур и явлений.

В методическом модуле для слушателей будут представлены педагогические технологии, используемые для формирования математической и цифровой грамотности учащихся; методические основы разработки учебно-методических материалов, направленных на формирование симбиоза математической и цифровой грамотности учащихся [1, 2]. В стажировочном модуле программы предлагается слушателям разработать сценарий одного базового занятия по освоению сложного знания с инструментами диагностики и контроля математической и цифровой грамотности школьников.

Литература

1. *Буракова Г. В.* Формирование функциональной грамотности школьников с помощью задач PISA / Г. В. Буракова, И. В. Кузнецова, Т. Л. Трошина // Вестн. Твер. гос. ун-та. Сер. Педагогика и психология.—2020.—№ 4 (53).—С. 127–131.
2. *Кузнецова И. В.* Цифровизация обучения: от микрокалькулятора к Web-технологиям (статья из Перечня ВАК) // Вестн. Твер. гос. ун-та. Сер. Педагогика и психология.—2020.—№ 2 (51).—С. 187–191.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

МЕТОДИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ: ОТ ИНТУИЦИИ К ОБОСНОВАНИЯМ

И. Е. Малова

(Россия, Брянск; БГУ им. И. Г. Петровского)

Как ответить на вопрос «Учителями рождаются или становятся?». Опыт организации подготовки студентов показал, что требуется ответ: и рождаются, и становятся. Именно с этими двумя составляющими связаны методическая интуиция и обоснование методических действий.

Методическую деятельность учителя математики мы определяем как деятельность по организации деятельности учащихся, направленную на полноценно результативное освоение ими математики.

Выделим три вида работы учителя: подготовка к занятиям; ведение занятия; наблюдение за работой другого учителя.

При подборе материала к уроку научные обоснования методической деятельности зависят от этапа урока. Если это этап изучения или усвоения нового материала, то содержание обосновывается требования базовых методик обучения математике: методики формирования понятий; методики формирования умений; методики изучения теорем. Если это этап закрепления изученного, то рекомендуется создавать комплексы заданий, руководствуясь целями заданий.

При выборе способов организации деятельности учащихся учитывают, что обеспечение успешности определяется ориентировочными основами деятельности, что обогащение метапредметного опыта достигается с использованием готовых или самостоятельно разработанных приемов организации деятельности, что экономия времени может осуществляться с помощью подобранных или разработанных средств (например, с использованием методически грамотных раздаточных материалов).

При конструировании монолога или диалога с учащимися на различных этапах урока используют правила ведения учебного диалога, направленные на обеспечение самостоятельной успешности учащихся и обогащение их опыта. Разработаны также диалоги для работы с математическими определениями, алгоритмами, теоремами, задачами.

К ситуациям проявления методической интуиции при проведении занятия можно отнести: учащиеся понимают (не понимают) материал; темп урока устраивает (не устраивает); дисциплина на уроке устраивает (не устраивает).

Обоснованными действиями учителя в представленных ситуациях являются: дублирование фрагмента урока с подключением других способов кодирования информации, возможно подключение учащихся, которые поняли; дифференциация содержания и/или способов организации деятельности учащихся по дополнительному уровню (базовый уровень должен быть освоен всеми); дублирование структуры урока; предъявление требований, обязательных для всех (но не более трех); обеспечение успешности учащихся в различных видах деятельности.

К ситуациям проявления методической интуиции при наблюдении за занятием другого педагога можно отнести: анализ содержания урока; анализ приемов учителя; анализ поведения учащихся.

Возможными аргументами выбора содержания урока являются: соответствие этапам базовых методик; нацеленность на мотивацию материала и/или деятельности; обеспечение успешности учащихся.

Анализу приемов учителя помогает вопрос «Почему учитель...?», анализу поведения учащихся помогают вопросы «Почему учащиеся...?». Ответы позволяют обосновать приемы учителя, выявить причины успешности (неуспешности) учащихся.

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК КАК ИННОВАЦИОННОЕ СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ОБУЧЕНИЯ

Г. Ю. Рябых (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ),
Н. В. Фролова (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ),
В. Э. Писковацков (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ),
А. Ю. Ретивых (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Дистанционное обучение приобретает все большую популярность в последнее время. Первоначально в Донском государственном техническом университете планировалось снабдить электронными ресурсами студентов с ограниченными возможностями здоровья. Именно для них были созданы первые учебники, облегчающие усвоение материала, дающие возможность частичного дистанционного образования.

Однако, в период пандемии учебным заведениям пришлось почти полностью перейти на удаленный режим обучения. Потребовалось резко увеличить количество имеющихся электронных обучающих пособий. Опираясь на рекомендации, разработанные в [1, 2], сотрудники и студенты кафедры прикладной математики ДГТУ подготовили несколько новых электронных учебников для студентов всех направлений и различных форм обучения. Электронные учебники разрабатывались на основе опорных конспектов, созданных совместно с преподавателями кафедры математики ДГТУ.

Среди популярных, апробированных в период дистанционного обучения, электронных пособий отметим учебники по разделам: Дифференциальное исчисление, Интегральное исчисление, Обыкновенные дифференциальные уравнения.

В каждом разделе учебника приводится необходимая теория, а также большое количество разобранных примеров.

Для проверки усвоенного материала предусмотрен переход к тренировочной базе тестов на портале Скиф. Итоговое тестирование осуществляется уже в режиме on-line.

Проверка результатов самостоятельной работы студентов с данными электронными пособиями показала, что обучение в такой форме весьма эффективно.

В настоящий момент авторы работают над созданием электронных учебников по теории вероятностей, по теории функций нескольких переменных, а также по элементарной математике. Последний учебник можно рассматривать как пособие по подготовке к ЕГЭ, либо как адаптивный курс для студентов–первокурсников.

Авторы считают, что следует использовать накопленный опыт дистанционного обучения. Прежде всего такое обучение рекомендуется для студентов с

ограниченными возможностями здоровья, для временно нетрудоспособных студентов, для студентов заочной формы обучения.

Не следует также забывать о студентах, которым бывает трудно добираться к месту учебы. Среди таких можно указать многих учащихся магистратуры. В нашем вузе зачастую студенты–магистранты участвуют в процессе обучения, находясь за границей.

Литература

1. *Полат Е. С., Бухаркина М. Ю.* Теория и практика дистанционного обучения.—М.: Академия, 2004.
2. *Вигерс К.* Разработка требований к программному обеспечению.—М.: Русская редакция, 2004.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ДИСЦИПЛИНЫ «ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ»

О. Ф. Ускова (Россия, Воронеж; ВГУ),
С. Ю. Болотова (Россия, Воронеж; ВГУ),
Д. Г. Усков (Россия, Воронеж; ВГУ)

«Ключ к тайнам компьютеров в гармоничном сочетании математики, инженерии и программирования». Автор этого высказывания (с которым мы полностью согласны) создатель языка программирования Паскаль, директор института информатики Швейцарской высшей школы в Цюрихе Никлаус Вирт [1].

Возрастающая роль информационных технологий во всех сферах профессиональной деятельности способствует повышению значимости курса «Информатика и программирование», изучение которого начинается на первом курсе факультета прикладной математики, информатики и механики (ПММ) Воронежского государственного университета со структурного программирования на языке С++.

Для проведения практических занятий и лабораторных работ разработан задачник-практикум по структурному программированию на языке С++ [2].

Учитывая особенности специальностей факультета ПММ достаточное количество заданий задачника–практикума содержат математические алгоритмы.

Приведем несколько примеров таких заданий для первокурсников [2–4].

1. Пусть даны координаты трех точек на плоскости. Если они могут быть вершинами тупоугольного треугольника, вычислите его площадь. Выведите длины сторон в порядке убывания их значений.

2. Вычислить приближенное значение $\int x^2 dx$ на отрезке $[a, b]$, используя формулу прямоугольников, если известно, что отрезок $[a, b]$ разбит на n равных частей.

3. Пусть даны координаты n точек плоскости x_1, y_1, x_2, y_2, …, x_n, y_n ($n = 40$). Найти номера двух точек, расстояние между которыми минимальное, считая, что такая пара точек единственная.

4. Найти угол φ между двумя n-мерными векторами.

5. Пусть даны две квадратные вещественные матрицы. Вычислить их произведения.

6. Составить программу для нахождения с заданной точностью методом половинного деления корня уравнения $f(x) = 0$ на заданном интервале $[a, b)$ при условии, если на этом интервале есть корень, то он единственный.

7. При некоторых заданных x, N и E, определяемых вводом, вычислите

а) сумму N слагаемых заданного вида;

б) сумму тех слагаемых, которые по абсолютной величине больше E.

Вычисление второй суммы выполните для двух значений E, отличающихся на порядок, при этом определите количество слагаемых, включенных в сумму, вычисляемую для каждого значения E. Сравните результаты со значением

функции, для которой данная сумма определяет приближенное значение при x, лежащем в интервале $(-R, R)$, вычисленным с помощью встроенных функций компилятора

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \quad R = \infty.$$

Для решения сформулированной задачи необходимы две функции.

Первая функция (вариант а), сигнатура которой имеет вид

float rsin (float x, int N),

вычисляет значение ряда $\sin(x)$ для заданного вещественного значения аргумента x с помощью N слагаемых ряда Тейлора. Эта функция имеет два параметра и возвращает вещественное значение вычисленной суммы.

Вторая (перегруженная) функция с тем же именем

float rsin (float x, float e, int & count)

вычисляет по тому же алгоритму Тейлора значение суммы с заданной точностью *eps*. Она (вариант б) возвращает в основную программу не только вычисленное значение суммы, но и количество слагаемых в этой сумме (*int & count*). Количество параметров для этого варианта функции *rsin* равно 3.

Создатель языка программирования C++ Бьярн Страуструп считает: «Написание хороших программ требует ума, вкуса и терпения» [5].

Литература

1. *Вирт Н.* Алгоритмы и структуры данных.—М.: Мир, 1989.—360 с.
2. *Ускова О. Ф., Каплиева Н. А., Горбенко О. Д.* Информатика и программирование: задачник-практикум по структурному программированию на языке C++.—Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2020.—279 с.
3. *Ускова О. Ф., Бакланов М. В., Воронина И. Е., Горбенко О. Д., Вощинская Г. Э., Огаркова Н. В., Мельников В. М.* Программирование на языке Паскаль: задачник.—СПб: Питер, 2002.—366 с.
4. *Ускова О. Ф., Каплиева Н. А.* Основы программирования: Учеб. пособие.—Воронеж: Изд-во ВГУ, 2010.—266 с.
5. *Страуструп Б.* Язык программирования C++.—М.: Бином, 1999.—990 с.

Тезисы докладов XVI Международной научной конференции: Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2021 г.)

ПРИМЕНЕНИЕ КООРДИНАТНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ РАССТОЯНИЯ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

С. В. Чиспияков

(Россия, Брянск; БГУ им. И. Г. Петровского, Гимназия № 7)

Решение задач по стереометрии требует от учащихся соответствующих знаний теории, умений их применения и навыков решения задач. К сожалению, такими способностями обладают далеко не все школьники. Применение координатного метода может помочь учащимся научиться решать геометрические задачи. Таким образом, актуальными являются вопросы методики преподавания математики и образовательные технологии в обучении математики. Такими вопросами занимаются И. Е. Малова, Ю. А. Еловикова, М. А. Корпачева, Н. А. Малинникова, С. В. Чиспияков [1–4].

Координатный метод позволяет классифицировать основные задачи стереометрии, создавать и применять технологии их решения.

Основой координатного метода являются свойства векторов, условия их взаимного расположения и связь с геометрическими объектами: плоскость, прямая, точка.

Рассмотрим технологию решения задач на нахождение расстояния от точки до плоскости.

Для этого необходимо умение составлять уравнение плоскости.

Рассмотрим следующие случаи:

1) Если плоскость содержит две координатные прямые, например Ox и Oz. Такая координатная плоскость обозначается Oxz, ее уравнение имеет вид $Ox + y + Oz = 0$. Аналогично, плоскость Oxy имеет уравнение $Ox + Oy + z = 0$.

2) Если известна точка плоскости $M(x_0, y_0, z_0)$ и прямая PQ, перпендикулярная плоскости. Тогда вектор $\overrightarrow{PQ} = (a, b, c)$ перпендикулярен плоскости (нормальный вектор плоскости) и уравнение плоскости имеет вид $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

3) Если известны три точки плоскости $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Тогда обозначим через $M(x, y, z)$ произвольную точку плоскости. Рассмотрим систему трех векторов: $\overrightarrow{MM_1} = (x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z)$, $\overrightarrow{M_2M_1} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$, $\overrightarrow{M_3M_1} = (x_1 - x_3, y_1 - y_3, z_1 - z_3)$ — эти векторы компланарны, следовательно, определитель, составленный из их координат, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение плоскости.

Для нахождения расстояния от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $\gamma : ax+by+cz+d=0$ достаточно применить формулу

$$\frac{\lceil ax_0 + by_0 + cz_0 + d \rceil}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Таким образом, можно определить следующую технологию:

1. Вычертить основание рассматриваемой фигуры, ввести прямоугольную систему координат Oxy и определить координаты основных точек.

2. Построить основную фигуру, ввести пространственную систему координат $Oxyz$ и определить координаты всех точек, из условия задачи. При необходимости использовать формулу координат точек, делящих отрезок в данном отношении.

3. Определить уравнение плоскости.

4. Использовать формулу нахождения расстояния.

Рассмотренную технологию можно применять для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми, следующим образом.

В одной из прямых выбираем точку и находим ее координаты. С помощью второй прямой составляем уравнение плоскости, содержащей вторую прямую, параллельно первой. Тогда искомое расстояние — это расстояние от выбранной точки до полученной плоскости.

Рассмотрим применение технологии для решения задачи из банка ЕГЭ (520822).

Задача. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен $60°$.

б) Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1.

Решение. б)

1) Основание $ABCD$ — квадрат. Введем систему координат с центром в точке A и осями $Ax\,AD$, $Ay\,AB$. Тогда координаты точек: $A(0,0)$, $B(0,6)$, $C(6,6)$, $D(6,0)$.

2) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ введем пространственную систему координат с центром в точке A и осями $Ax\,AD$, $Ay\,AB$, $Az\,AA_1$. Тогда координаты точек: $A(0,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(6,6,0)$, $D(6,0,0)$, $A_1(0,0,6)$, $B_1(0,6,6)$, $C_1(6,6,6)$, $D_1(6,0,6)$.

3) В прямой AC выберем точку $A(0,0,0)$.

4) Составим уравнение плоскости α, содержащей прямую BC_1, параллельно прямой AC. Пусть $M(x,y,z)$ — произвольная точка плоскости. Тогда векторы $\overrightarrow{BM} = (x, y-6, z)$, $\overrightarrow{BC_1} = (6,0,6)$, $\overrightarrow{AC} = (6,6,0)$ — компланарны, следовательно,

$$\begin{vmatrix} x & y-6 & z \\ 6 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$(0 + 36z + 36(y-6)) - (0 + 36x + 0)) = -36x + 36(y-6) + 36z.$$

Приравняв к нулю и разделив на -36, получим уравнение плоскости:

$$x - y + z - 6 = 0,$$

$$\frac{[0 - 0 + 0 - 6]}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Подводя итог, можно отметить основные умения, которые необходимы учащемуся, для применения метода:

– вводить систему координат на плоскости и находить координаты точек;

– вводить систему координат в пространстве и находить координаты основных точек;

– находить координаты вспомогательных точек (по формулам деления отрезка в данном отношении);

– определять координаты векторов (используя координаты точек или уравнений плоскости);

– использовать формулу расстояния от точки до плоскости.

Литература

1. *Малова И. Е., Еловикова Ю. А., Корпачева М. А., Малинникова Н. А., Чиспияков С. В.* Задачи с экономическим содержанием и работа с ними как с текстовыми. Часть 1 // Математика в школе.—2019.—№ 6.—С. 38–49
2. *Малова И. Е., Еловикова Ю. А., Корпачева М. А., Малинникова Н. А., Чиспияков С. В.* Задачи с экономическим содержанием и работа с ними как с текстовыми. Часть 2 // Математика в школе.—2019, № 7.—С. 14–25.
3. Правила построения сечений. Материалы XXXVII международного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов.—Набережные Челны: Изд-во ООО «ПринтЭкспертПлюс», 2018.—352 с.
4. Решение 17 задач на оптимизацию как текстовых. Материалы XXXIX Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов «Математика — основа компетенций цифровой эры».—М: ГАОУ ВО МГПУ, 2020.—С. 52–56.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

Anand-ICE — Department of Mathematics, Anand International College of Engineering
Bukhara Branch IM AS RUz — Bukhara Branch of the V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan
BukhSU — Bukhara State University
HMAS RUz — Department of Natural Science Disciplines, The Higher Military Aviation School of the Republic of Uzbekistan
IHM NASU — Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine
IINAMEI — International Advanced Research in Mathematics and Engineering
IKBFU — Immanuel Kant Baltic Federal University
IM AS RUz — V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan
IM SB RAS — Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
IMM UrB RAS — Institute of Mathematics and Mechanics, the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
IMMM — Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
INP AS RUz — Institute of Nuclear Physics of Academy of Sciences of Republic of Uzbekistan
KazNU — Al-Farabi Kazakh National University
METU — Middle East Technical University
Moscow Polytech — Moscow Polytechnic University
MSU — Lomonosov Moscow State University
NCMRC VSC RAS — North-Caucasian Mathematical Research Center
NOSU — North Ossetian State Univercity
NTUU KPI — National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"
PDMI RAS — Saint Petersburg Department of V. A. Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences
SDU — Suleyman Demirel University
SFedU — Southern Federal University
SMI VSC RAS — Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences
SPbU — Saint Petersburg State University
TESCHA — Technological Institute of High Studies of Chalco
UrFU — Ural Federal University (Institute of Mathematics and Computer Science)
АН ЧР — Академия наук Чеченской Республики
АЧИИ ФГБОУ ВО Донской ГАУ — Азово-Черноморский инженерный институт — филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Донской государственный аграрный университет» в г. Зернограде

БГУ — Белорусский государственный университет
БГУ им. И. Г. Петровского — Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
БГЭУ — Белорусский государственный экономический университет
Бухарский филиал ИМ АН РУз — Бухарский филиал Института математики имени В. И. Романовского академии наук Республики Узбекистан
БухГУ — Бухарский государственный университет
ВГУ — Воронежский государственный университет
ВИТИ НИЯУ МИФИ — Волгодонский инженерно-технический институт (филиал) Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» (Московский инженерно-физический институт)
Владикавказский филиал ФУ — Владикавказский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
ВНЦ РАН — Владикавказский научный центр Российской академии наук
ГБУ ДПО «ЦНППМПР» Минпросвещения КБР — Государственное бюджетное учреждение дополнительного профессионального образования «Центр непрерывного повышения профессионального мастерства педагогических работников» Министерства просвещения, науки и по делам молодежи Кабардино-Балкарской республики
Гейдельбергский университет — Гейдельбергский университет имени Рупрехта и Карла
Гимназия № 7 — Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Гимназия № 7 имени Героя России С. В. Василева» г. Брянска
ГУ «ИПММ» — Государственное учреждение «Институт прикладной математики и механики»
ГФИ ВНЦ РАН — Геофизический институт — филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального научного центра «Владикавказский научный центр Российской академии наук»
ДГТУ — Донской государственный технический университет
ДонНТУ — Донецкий национальный технический университет
ДонНУ — Донецкий национальный университет
ДФИЦ РАН — Дагестанский федеральный исследовательский центр Российской академии наук
ЕИ КФУ — Елабужский институт (филиал) Казанского федерального университета
ЕККИ — Елабужский колледж культуры и искусств
ИМ АН РУз — Институт математики имени В. И. Романовского академии наук Республики Узбекистан
ИМ СО РАН — Институт математики имени С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук
ИМВЦ УФИЦ РАН — Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН
ИММиКН ЮФУ — Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича Южного федерального университета

ИММ — Институт математики и математического моделирования
ИПМА КБНЦ РАН — Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
ИПУ РАН — Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова Российской академии наук
ЛТУ-университет — Лаппеенрантский технологический университет
МГУ — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
МИАН — Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
МПГУ — Московский педагогический государственный университет
НавГПИ — Навойский государственный педагогический институт
НГУ — Новосибирский государственный университет
НИУ «БелГУ» — Белгородский государственный национальный исследовательский университет
НИЦ СЭ и НК — Научно-исследовательский центр супер-ЭВМ и нейрокомпьютеров
НИЯУ МИФИ — Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Московский инженерно-физический институт)
НУУз — Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
ОГУ им. И. С. Тургенева — Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева
ООО «БЭСК Инжиниринг» — Общество с ограниченной ответственностью «БЭСК Инжиниринг»
ООО «ГАЗПРОМНЕФТЬ НТЦ» — Общество с ограниченной ответственностью «Газпромнефть Научно-Технический Центр»
ООО «РН-БашНИПИнефть» — Общество с ограниченной ответственностью «РН-Башкирский научно-исследовательский и проектный институт нефти»
ПГУ — Полоцкий государственный университет
РНОМЦ ЮФУ — Региональный научно-образовательный математический центр Южного федерального университета
СамГТУ — Самарский государственный технический университет
СГУ — Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
СКГИИ — Северо-Кавказский государственный институт искусств
СКЦМИ ВНЦ РАН — Северо-Кавказский центр математических исследований Владикавказского научного центра Российской академии наук
СКЦМИ СОГУ — Северо-Кавказский центр математических исследований Северо-Осетинского государственного университета имени К. Л. Хетагурова
СПб ФИЦ РАН — Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук
ТашГТУ — Ташкентский государственный технический университет
ТУИТ — Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразмий
Финансовый университет — Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

ХоГУ — Хорогский государственный университет имени М. Назаршоева
ЧГПУ — Чеченский государственный педагогический университет
ЧГУ — Чеченский государственный университет
ЮМИ ВНЦ РАН — Южный математический институт — филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального научного центра «Владикавказский научный центр Российской академии наук»
ЮРГПУ (НПИ) — Южно-Российский государственный политехнический университет имени М. И. Платова (Новочеркасский политехнический институт)
ЮФУ — Южный федеральный университет
ЯГПУ — Ярославский государственный педагогический университет имени К. Д. Ушинского

ПОРЯДКОВЫЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ. ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ:

Тезисы докладов
XVI Международной научной конференции
(РСО-Алания, г. Владикавказ, 20–24 сентября 2021 г.)

Компьютерная верстка:
М. У. Вазагаева, И. С. Гаприндашвили
Зав. редакцией: В. В. Бозрова

ЮМИ ВНЦ РАН
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

ISBN 978-5-904695-45-3