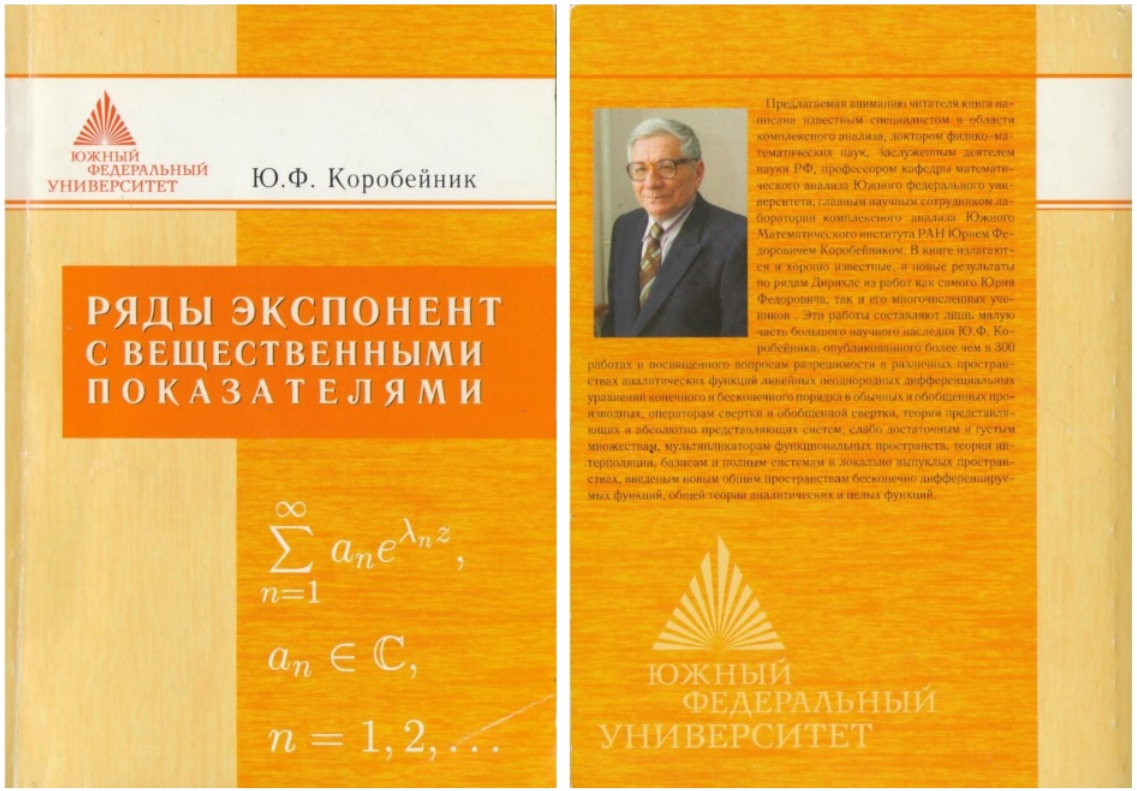
РАВЕНСТВА ТИПА ПОЛИА ДЛЯ ЦЕЛЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

А.М. Гайсин

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия)

Воркшоп по комплексному анализу, посвященный памяти
д.ф.-м.н., профессора Коробейника Ю.Ф. и
д.ф.-м.н., профессора, член-корр. РАН Напалкова В.В.

(28 – 29 октября 2026 г., дистанционный формат)





Разумеется, автор понимает, что тематику, затронутую в этой небольшой книге, желательно осветить более подробно. К написанию подобной монографии было бы целесообразно привлечь, кроме ростовских математиков, их украинских коллег (из Харькова, Киева и особенно Львова, из группы во главе с М. Н. Шереметой), а также учеников и последователей А. Ф. Леонтьева (в первую очередь, А. М. Гайсина и его учеников). Автор был бы рад, если эта небольшая книга послужила бы отправной точкой для создания подобной монографии.

РЯДЫ ЭКСПОНЕНТ И КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ: РАЗВИТИЕ ИДЕЙ А.Ф. ЛЕОНТЬЕВА

Речь идет о некоторых классических задачах комплексного анализа, которые были предложены мне А.Ф. Леонтьевым еще в 1978 – 1983 гг.

Первые результаты были получены только в начале 1987 г. – незадолго до кончины Алексея Федоровича. В конце 1990-х – начале 2000-х гг. были полностью решены две известные и наиболее трудные проблемы, поставленные Дж. Полиа в 1929 г. В 2011 был дан окончательный ответ и на гипотезу Полиа о минимуме модуля.



УДК 517.53 + 517.537.7
ББК 22.161
Г120

Гайсин А. М.

Г120 Регулярный рост целых функций, представленных рядами Дирихле. — М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2024. — 212 с.

ISBN 978-5-4344-1026-7

Исследуются классические задачи, связанные с асимптотическими свойствами лакунарных степенных рядов, сходящихся во всей плоскости и имеющих произвольный, сколь угодно быстрый рост. Рассматриваются эти задачи здесь с более общей точки зрения, а именно для рядов Дирихле. В работе представлены решения проблемы Полиа о росте целых функций с лакунами на кривых, уходящих в бесконечность и двойственной проблемы для целых трансцендентных функций с вещественными коэффициентами, редко меняющими знак. В более общей постановке дается полный ответ на гипотезу Полиа о минимуме модуля целой функции произвольного роста с лакунами. В качестве приложения приводится решение задачи И. Бейкера по комплексной динамике о компонентах множества Фату произвольной целой трансцендентной функции бесконечного нижнего порядка. Уделено внимание и на применение условия повторного логарифма в теории целых функций, рядов Дирихле.

Для специалистов по комплексному и гармоническому анализу, преподавателей и аспирантов математических факультетов университетов.

Библ. 99.

ББК 22.161
УДК 517.53 + 517.537.7

ISBN 978-5-4344-1026-7

© А. М. Гайсин, 2024
© АНО «Ижевский институт компьютерных исследований», 2024

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $D(\Lambda)$ – класс рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

абсолютно сходящихся в $\mathbb{C}$.

Речь пойдет о соотношениях типа

$$\ln M_F(\sigma) \sim \ln m_F(\sigma, h)$$

при $\sigma \to +\infty$, $\sigma \notin E \subset \mathbb{R}_+$, где

$$M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|, \quad m_F(\sigma, h) = \min_{|t|\le h} |F(\sigma + it)|,$$

и их применениях в некоторых задачах комплексной динамики.

Пусть f – целая трансцендентная функция вида

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \quad p_n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Говорят, что последовательность $P = \{p_n\}$ (или целая функция f) имеет:

лакуны Фабри, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{p_n} = 0; \tag{3}$$

лакуны Фейера, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty. \tag{4}$$

Путем замены $z = e^s$ приходим к рядам (1). Поэтому те же термины будем использовать и для последовательности Λ, и для функций $F \in D(\Lambda)$.

Первая теорема Пикара: *любая целая функция $f(z) \not\equiv const$ принимает каждое значение $a \in \mathbb{C}$ (по крайней мере один раз), за исключением, возможно, одного.*

Если $f(z) \neq a$, $a \in \mathbb{C}$, то a является асимптотическим значением: *существует кривая γ, уходящая в ∞, вдоль которой $f(z) \to a$ при $z \to \infty$.*

Но любая целая функция f вида (2) с лакунами Фейера принимает каждое значение $a \in \mathbb{C}$ бесконечно много раз. Это – результат **Л. Фейера** (см. ***[1. L. Fejer. Math. Ann. 1908. P. 413–423]***).

В 1952 г. возникла следующая гипотеза (см. ***[2. A.J. Macintyre. Asymptotic paths of integral functions with gap power series // Proc. London Math. Soc. 2:2 (1952), 286–296]***).

Гипотеза Макинтайра (1952). *Любая целая функция (2) с лакунами Фейера не имеет конечных асимптотических значений.*

Гипотеза верна:

1. для радиальных асимптотических значений (**Макинтайр, 1952**; см. ***[2]***);

2. для целых функций (2) конечного нижнего порядка (**L. Sons, 1970**; см. ***[3. L.R. Sons. On the Macintyre conjecture // Illinois J. Math. 1970. V. 14, 613–629]***).

Справедливость гипотезы ранее была доказана:

Фуксом (1963) – для случая конечного порядка; **Т. Ковари (1965)**, **Д. Гайером (1965)**, **Андерсеном** и **Бинмором (1968)** – при более сильных ограничениях на $P = \{p_n\}$.

В общем случае эта гипотеза до сих пор остается открытой проблемой.

В 1983 результат Фейера 1908 г. (см. ***[1]***) был существенно усилен **Takafumi Murai** (см. ***[4. T. Murai. The deficiency of entire functions with Fejer gaps // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 33:3 (1983), 39–58]***):

При условии (4) для любого $a \in \mathbb{C}$ *неванлинновский дефект*[*]

$$\delta(a, f) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)} = 0,$$

где

$$N(r, a, f) = \int\limits_0^r \frac{n(t, a, f)}{t} dt, \quad T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

$n(t, a, f)$ *– количество корней уравнения* $f(z) = a$ *в проколотом круге* $\{z\colon\ |z| < t\} \setminus \{0\}$.

[*]Так как $0 \le N(r, a, f) \le T(r, f) + O(1)$, $r \to \infty$, то всегда $0 \le \delta(a, f) \le 1$.

В 1975 – 1980 гг. возникла гипотеза (**М.Н. Шеремета**): *если для последовательности* $\{p_n\}$ *перемен знаков коэффициентов ряда*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad z = x + iy,$$

выполняется условие Фейера (4), то

$$d(f, \mathbb{R}_+) \stackrel{\text{def}}{=} \varliminf_{x \to +\infty} \frac{\ln |f(x)|}{\ln M_f(x)} = 1,$$

где $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ (см. ***[5. M.M. Sheremeta, O.B. Skaskiv, M.V. Zabolotskyi. Open problems in function theory // Математичні студії. 1994. Випуск 3, 117–119]***).

Эта проблема из ***[5]***, как и двойственная задача о равенстве $d(f, \gamma) = 1$ (γ – любая кривая, уходящая в ∞) для целых функций (2) с лакунами Фейера, оставались открытыми до конца 1990-х – начала 2000-х гг.

Как выяснилось, гипотеза М.Н. Шереметы ***не верна*** (см. ***[6. А.М. Гайсин. Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых // Матем. сб. 194:8 (2003), 55–82]***): выполнение только условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty$$

недостаточно для «регулярного роста» целой функции (2).

В ***[6]*** было показано, что существенное значение имеет поведение последовательности $\{c_k\}$,

$$c_k = \int_0^{p_k} \frac{\mu(t, p_k)}{t} dt,$$

где $\mu(t, p_k)$ – количество точек $p_n \neq p_k$ из отрезка $\{x\colon\ |x - p_k| \leq t\}$.

Дело в том, что эта последовательность может сильно осциллировать и при этом быстро возрастать.

Гипотеза Макинтайра ***верна***, если для любой кривой γ, уходящей в ∞, $\sup_\gamma |f(z)| = \infty$, тем более, если $f(z)$ имеет регулярный рост.

Регулярный рост функции f понимается в смыслах:

A. *Для любой кривой γ, уходящей в ∞, $\exists\, \{\xi_n\} \subset \gamma, \xi_n \to \infty$, такая, что*

$$\ln M_f(|\xi_n|) \sim \ln |f(\xi_n)|, \quad M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

B. *При $r \to \infty$ вне множества $E \subset \mathbb{R}_+$, например, конечной логарифмической меры*

$$\ln M_f(r) \sim \ln m_f(r), \quad m_f(r) = \min_{|z|=r} |f(z)|.$$

В работе ***[7. G. Polya. Math. J. 1929. V. 29. P. 549–640]*** доказано: *если целая функция f вида (2) имеет порядок $\rho < \infty$, а $\{p_n\}$ имеет лакуны Фабри, то* (см. ***[7, с. 631]***)

$$d(f,\gamma) = \varlimsup_{z\in\gamma, z\to\infty} \frac{\ln|f(z)|}{\ln M_f(|z|)} = 1. \tag{5}$$

В ***[7, с. 631]*** сформулирована

Гипотеза Полиа. *Если $\rho < \infty$, $n = o(p_n)$, $n \to \infty$, то*

$$d_0(f) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln m_f(r)}{\ln M_f(r)} = 1. \tag{6}$$

Справедливость гипотезы доказана Фуксом (см. ***[8. W.H.J. Fuchs. Illinois J. Math. 1963. V. 7. P. 661–667]***).

В ***[9. Skaskiv O.B. Anal. Math. 1990. V. 16. № 2. P. 143–157]*** условие Фабри ослаблено: *если*

$$\left.\begin{array}{rr} \textit{нижний порядок} & \rho_* < \infty \\ \textit{порядок} & \rho < \infty \end{array}\right\}, \ \textit{то} \ \begin{cases} \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \\ \underline{\lim\limits_{r\to\infty}} \end{cases} \frac{1}{\ln r} \sum_{p_n \le r} \frac{1}{p_n} = 0.$$

В статье ***[10. Гайсин А.М. Об одной гипотезе Полиа. Изв. РАН. Т. 58. №2. С. 73–92]*** результат из [9] перенесен на класс $D(\Lambda)$. В [10] получены более общие результаты, причем другим методом. В [9, 10] получены критерии. В [10] впервые введено понятие логарифмического индекса конденсации

$$\delta_{\ln}(\Lambda) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{\ln r} \int_1^r \frac{q(t)}{t^2} dt, \quad q(t) = \max_{\lambda_n \le t} \left\{ -\ln |Q'(\lambda_n)| \right\},$$

$$Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right).$$

До конца 1990-х гг. оставались открытыми:

Проблема 1. *При каких p_n для функций f произвольного роста, имеющих вид (2), $d(f,\gamma)=1$?*

Проблема 2. *При каких p_n для функций f произвольного роста, имеющих вид (2), $d_0(f)=1$?*

Обзор литературы

Пусть L – класс непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций w, $0<w(x)\uparrow\infty$, $x\to\infty$,

$$W=\left\{w\colon\ w\in L,\quad w(x)(1+x^2)^{-1}\in L^1(\mathbb{R}_+)\right\},$$

$$\Omega=\left\{\omega\colon\ \omega\in W,\quad \frac{\omega(x)}{x}\downarrow,\quad x\to\infty\right\}.$$

Положим $d(f)=\inf_\gamma d(f,\gamma)$. Пусть $q(t)$ – наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $\{-\ln|Q'(\lambda_n)|\}$.

Предшествующие результаты:

1. **А.И. Павлов** в ***[11. СМЖ. 1972. Т. 13. № 5. С. 577–588]*** показал: *если*

$$a)\ \frac{n}{p_n}\downarrow; \quad b)\ \sum_n \frac{1}{p_n} < \infty, \tag{7}$$

то $d(f,\gamma) = 1$.

2. Ранее **Т. Ковари (1965)** этот же результат получил для p_n,

$$p_n > n(\ln n)^{2+\eta}, \quad \eta > 0, \quad n \geq n_0 \tag{8}$$

(см. ***[12. T. Kövari. J. Anal. Math. 1965. V. 15. P. 281–286]***).

3. В ***[13. T. Kövari. Michigan Math. J. 1965. V. 12. № 2. P. 133–140]*** при том же условии (8) доказана более сильная регулярность роста функции f: *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует множество* $E \subset \mathbb{R}_+$ *конечной логарифмической меры, вне которого*

$$\ln m_f(r) > (1-\varepsilon)\ln M_f(r).$$

В [13] сказано: «*самое большее, что можно было бы выжать из нашего метода – это замена условия (8) на*

$$p_n > n(\ln n)(\ln\ln n)^{2+\eta}, \quad n \geq n_1 \text{»}. \tag{9}$$

Доказательство этого утверждения в [13] не приводится. Отметим, что условие (9) можно записать в виде:

$$p_n > C_0 n(\ln p_n)(\ln\ln p_n)^{2+\eta}, \quad C_0 > 0.$$

4. **Дж. Коревар** и **М. Диксон** в ***[14. Indag. Math. 1978. V. 40. № 2. С. 243–258]*** показали, что последовательности Павлова (7) и Ковари (9) являются интерполяционными: $\forall\, b_n$, $|b_n| \leq 1$, $\exists$ *ц.ф.э.т.* φ, *такая, что*

$$\varphi(p_n) = b_n, \quad n \geq 1; \quad M_\varphi(r) \leq e^{\omega(r)}, \quad \omega \in \Omega.$$

Для интерполяционных в смысле Павлова – Коревара – Диксона последовательностей $\{p_n\}$ гипотеза Макинтайра верна (см. ***[14]***).

В ***[15. B. Berntsson. A note on Pavlov-Korevaar-Dixon interpolation. Indag. Math. 1978. V. 81. P. 400–414]*** доказан критерий интерполяционности: $\exists\, \omega \in \Omega$, *такая, что*

$$1)\ n(t) \le \omega(t), \quad n(t) = \sum_{p_n \le t} 1;$$

$$2)\ -\ln \prod_{\frac{p_n}{2} < p_k < 2p_n} \left|1 - \frac{p_n}{p_k}\right| \le \omega(p_n), \quad n \ge 1. \qquad (10)$$

В [6] доказана

Теорема 1 (*А. Гайсин, 2003*). *Для того, чтобы для любой функции f вида (2) выполнялось равенство $d(f) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1), 2) из (10) с мажорантой $w \in W$.*

Теорема 1 дает ответ на Проблему 1 (см. ***[7. G. Polya, 1929]***).

Отметим, что условия теоремы 1 в точности есть критерий интерполяционности в классе мажорант из W для последовательности $\{\pm\lambda_n\}$ (см. ***[16. Р.А. Гайсин, Матем. сб. Т. 212. № 2. 2021. С. 58–79]***).

Из теоремы 1 также следует, что гипотеза М.Н. Шереметы **не верна** (см. ***[6]***). Эта гипотеза, как и гипотеза Макинтайра, верна в классе последовательностей $\{p_n\}$, удовлетворяющих условию 2) из (10).

«Гипотеза Т. Ковари» из [13] доказана в работе ***[17. Гайсин А.М. СМЖ. 1998. Т. 39. № 3. С. 501–516]***.

Условия теоремы 1 равносильны тому, что:

$$c)n(t)(1+t^2)^{-1}\in L^1(\mathbb{R}_+);\quad d)q(t)(1+t^2)^{-1}\in L^1(\mathbb{R}_+)^*.$$

*$q(t)$ – наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $\{-\ln|Q'(p_n)|\}$ (или для последовательности $\{c_k\}$, $c_k=\int_0^{p_k}\frac{\mu(t,p_k)}{t}dt$).

Пара условий c), d) означает, что

$$e) \sum_n \frac{1}{p_n} < \infty; \qquad f) \int_0^\infty \frac{q(t)}{1+t^2} dt < \infty.$$

Замечания.

1. *Если выполняется только e), то можно лишь утверждать, что*

$$0 \le d(f, \gamma) \le 1, \tag{11}$$

причем обе границы в (11) достигаются.

2. *Если условие f) не выполняется, то существуют* f_1, f_2 *– функции вида (4), для которых*

$$d(f_1) = 0, \quad d(f_2) = 1.$$

Применение результатов

Речь будет идти об итерациях

$$f^1(z) = f(z), \quad \dots, \quad f^{k+1}(z) = f(f^k(z)), \quad k = 1, 2, \dots$$

целых трансцендентных функций

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \quad p_n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Множеством Фату *ц.ф. f называется наибольшее открытое множество $F(f) \subset \mathbb{C}$, на котором семейство итераций $\{f^k(z)\}$ нормально.*

Исследование итераций целых функций начато в 1926 г. Фату. Сначала рассмотрим случай целых функций с лакунами.

Задача *(I. Baker, 1981)*. *При каких условиях на $\{p_n\}$ каждая компонента множества Фату функции f вида (12) ограничена?*

Особо актуален случай, когда функция f не имеет ограничений на рост сверху.

Теорема 2 (***Ю. Ванг, 2001***). *Пусть целая функция (12) обладает свойством: существует* $T_0 > 1$, такое, что

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r^{T_0})}{\ln M_f(r)} > T_0. \tag{13}$$

Если существует $\eta > 0$, *такое, что*

$$p_n > n(\ln n)(\ln\ln n)^{2+\eta}, \quad n \geq n_0,$$

то каждая компонента множества $F(f)$ *ограничена.*

Замечание 1. *По теореме Адамара о трех окружностях, левая часть (13) всегда* $\geq T_0$, *где* $T_0 > 1$ – *любое.*

Теорема 3 (см. ***[18]***)*. *Пусть выполнено (13). Если*

$$q(t)(1+t^2)^{-1}, \quad n(t)(1+t^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}_+),$$

то каждая компонента множества $F(f)$ *ограничена.*

*[26]. ***[18] А.М. Гайсин, Ж.Г. Рахматуллина. УМЖ. 2012. Т. 4. № 1. С. 38–46.***

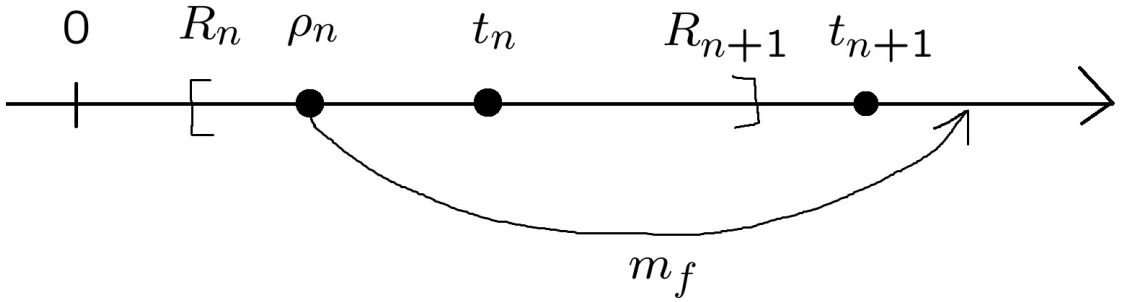
Общая ситуация: f – любая ц.т.ф.

Лемма (Бейкера–Сталлард, 1993)*. Если существуют $R_n \uparrow \infty$, $\rho_n \uparrow \infty$, $t_n \uparrow \infty$, такие, что:

1) $R_{n+1} = M_f(R_n)$, $R_1 > 0$;

2) $R_n \leq \rho_n \leq t_n$;

3) $m_f(\rho_n) \geq t_{n+1}$, то любая компонента $F(f)$ ограничена.

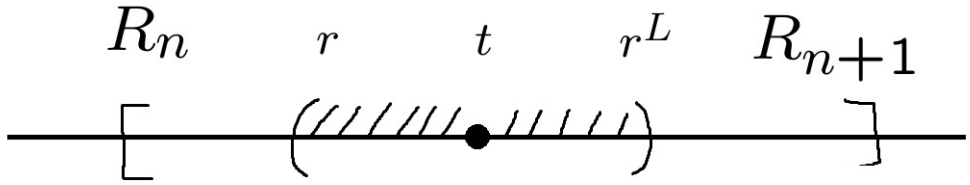


Вопрос 1. Когда реализуются условия 1) – 3) леммы?

*G. Stallard. The iteration of entire functions of small growth // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 114 (1993). 43 – 55.

Теорема 4 (Риппон, Сталлард, 2009)*. Пусть f – ц.т.ф., $R_1 > 0$, $R_{n+1} = M_f(R_n) \uparrow \infty$, $\exists\ L > 1$, $c_n > 0$, $\forall\ r \in [R_n, R_{n+1})\quad \exists\ t \in (r, r^L)$, такие, что

$$\frac{\ln m_f(t)}{\ln M_f(r)} \geq L(1 - c_n), \quad \sum_n c_n < \infty.$$



Тогда выполнены условия леммы Бейкера–Сталлард.

Вопрос 2: Когда реализуются условия теоремы 4?

*G. Stallard, P. Rippon. Functions of small growth with unbounded Fatou components // J. Anal. Math. 108 (2009). 61 – 86.

Основной результат

Пусть $\exists\, q > 1$, $\forall\, T > 1$

$$\ln M_f(r^T) \le qT \ln M_f(r).$$

Если при некотором $\nu > 0$

$$\left| 1 - \frac{\ln m_f(r)}{\ln M_f(r)} \right| \le \text{Const}\, \frac{1}{x^\nu} \tag{14}$$

вне множества $E \subset \mathbb{R}_+$ логарифмической плотности $d < 1$, то все условия теоремы Риппона–Сталларда будут выполнены.

Для ц.т.ф. (12) получены точные условия на показатели, при которых оценка (14) имеет место.

Спасибо за внимание!