Операторы Эйлера в пространствах голоморфных функций

С.Н. Мелихов

Южный федеральный университет,
Южный математический институт ВНЦ РАН

Воркшоп по комплексному анализу и теории операторов,
посвященный памяти д.ф.–м.н., профессора Коробейника Ю.Ф.
и д.ф.–м.н., профессора, чл.–корр. РАН Напалкова В.В.
28 октября 2026 г.

В докладе идет речь об операторах Эйлера бесконечного порядка, действующих в пространстве $H(\Omega)$ всех функций, голоморфных на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}^N$. Оно наделяется топологией равномерной сходимости на компактах Ω.
Этим операторам посвящено несколько статей Ю.Ф. Коробейника. Они тесно связаны с операторами свертки, в частности, дифференциальными операторами бесконечного порядка с постоянными коэффициентами в $H(\Omega)$, в исследование которых большой вклад внесли Ю.Ф. Коробейник и В.В. Напалков.

Рассматриваются операторы Эйлера двух видов:

$$\mathcal{E}_a(f)(t) := \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} a_\beta t^\beta f^{(\beta)}(t) \tag{1}$$

и

$$\mathcal{E}_{\theta,a}(f) := \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} a_\beta \theta^\beta(f), \tag{2}$$

где

$$\theta^\beta := \theta_1^{\beta_1} \cdots \theta_N^{\beta_N}, \quad \theta_j(f)(t) := t_j \frac{\partial f}{\partial t_j}(t),$$

$$a_\beta \in \mathbb{C},\ \beta \in \mathbb{N}_0^N,\ \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Большей частью для этих операторов решалась задача об их корректной определенности и сюръективности.

В статьях[1], [2], [3], [4] (при $N = 1$) и в [5], [6] (при $N \geq 1$) изучались операторы вида (1).
В [7], [8] исследованы операторы Эйлера с представлением (2).

---

[1] H.T. Davis. The Euler Differential Equation of Infinite Order // Amer. Math. Monthly. 1925. V. 32. № 5. 223–233.

[2] Ю.Ф. Коробейник, Ю.М. Донсков. Аналитические решения уравнения Эйлера бесконечного порядка // Изв. вузов. Матем. 1969. № 11. 44—52.

[3] Ю.Ф. Коробейник. О применимости дифференциальных операторов бесконечного порядка // Сиб. матем. журнал. 1969. Т. 10. № 3. 549–564.

[4] С.С. Линчук. Диагональные операторы в пространствах аналитических функций и их приложения // Актуальные вопросы теории функций. Изд-во РГУ, Ростов-на-Дону. 1987. 118—121.

[5] R. Ishimura. Existence locale de solutions holomorphes pour les équations différentielles d'ordre infini // Annales de l'Institut Fourier. 1985. V.35. № 3.49–57.

[6] R. Ishimura. Sur les équations différentielles d'ordre infini d'Euler // Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University. Ser. A. 1990. V. 44. № 1. 1–10.

[7] С.В. Знаменский. О разрешимости дифференциальных уравнений бесконечного порядка в пространствах голоморфных функций, теореме Леонтьева и формуле Вострецова // Сиб. матем. журн. 1977. 18. № 6. 1307—1320.

[8] M. Trybula. Hadamard Multipliers on Spaces of Holomorphic Functions // Integral Equations and Operator Theory. 2017. V. 88. № 2. 249–268.

Операторы Эйлера бесконечного порядка в пространствах вещественно аналитических функций одной и многих переменных, имеющие представление (2), изучены в статьях [9], [10], [11], [12], [13].

[9] P. Domański, M. Langenbruch. Representation of multipliers on spaces of real analytic functions // Analysis. 2012. V. 32. № 2. 137–162.

[10] P. Domański, M. Langenbruch. Hadamard multipliers on spaces of real analytic functions // Advances in Math. 2013. V. 240. 575–612.

[11] P. Domański, M. Langenbruch, D. Vogt. Hadamard type operators on spaces of real analytic functions in several variables // J. Funct. Analysis. 2015. V. 269. 3868–3913.

[12] P. Domański, M. Langenbruch. Interpolation of holomorphic functions and surjectivity of Taylor coefficient multipliers // Advances in Math. 2016. V. 293. 782–855.

[13] P. Domański, M. Langenbruch. Euler type partial differential operators on real analytic functions // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 443. 652–674.

В докладе основное внимание уделяется
связи двух представлений этих операторов. Соответствующие результаты опубликованы в статье [14].

[14] О.А. Иванова, С.Н. Мелихов. Операторы Эйлера бесконечного порядка в пространствах голоморфных функций и числа Стирлинга // Уфимский матем. журнал. 2026. № 2. 36–57.

Пусть

$$\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Итоговая теорема о действии операторов в рассматриваемых пространствах:

Теорема

(i) Если $\lim\limits_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{1/|\beta|} = 0$, то операторы $\mathcal{E}_a$, $\mathcal{E}_{\theta,a}$ линейны и непрерывны в $H(\Omega)$ для любого непустого открытого множества Ω в $\mathbb{C}^N$.

(ii) Если $\limsup\limits_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{1/|\beta|} < +\infty$, то операторы $\mathcal{E}_a$, $\mathcal{E}_{\theta,a}$ линейны и непрерывны в $H(\mathbb{C}^N)$, $\mathcal{E}_{\theta,a}$ — и в $H((\mathbb{C}^*)^N)$.

(iii) Если $\limsup\limits_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{1/|\beta|} < 1$, то оператор $\mathcal{E}_a$ линейно и непрерывно действует в $H((\mathbb{C}^*)^N)$.

Замечание. Операторы $\mathcal{E}_a$ и $\mathcal{E}_{\theta,a}$ (при соответствующих условиях на коэффициенты) являются операторами адамаровского типа в $H(\Omega)$, т.е. все мономы $f_\beta(t) = t^\beta$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, являются их собственными функциями:

$$\mathcal{E}_a(f_\beta) = \left(\beta! \sum_{0 \le \gamma \le \beta} \frac{a_\gamma}{(\beta - \gamma)!} \right) f_\beta, \quad \mathcal{E}_{\theta,a}(f_\beta) = a(\beta) f_\beta.$$

Условия на коэффициенты в терминах роста целых функций

Пусть $\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$ — пространство всех целых функций экспоненциального типа в $\mathbb{C}^N$, то есть всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций таких, что

$$\exists \sigma, C > 0 : \ |f(z)| \le Ce^{\sigma|z|}, \ z \in \mathbb{C}^N;$$

$\mathrm{Exp}(\{0\})$ — пространство всех целых функций экспоненциального типа 0, то есть таких целых в $\mathbb{C}^N$ функций, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists C > 0 : \ |f(z)| \le Ce^{\varepsilon|z|}, \ z \in \mathbb{C}^N.$$

Введем функцию $a(t) = \sum\limits_{\beta \ge 0} a_\beta t^\beta$.

Известно, что

условие $\limsup\limits_{|\beta| \to \infty} (\beta! |a_\beta|)^{1/|\beta|} < +\infty$ равносильно тому, что $a \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$;

условие $\lim\limits_{|\beta| \to \infty} (\beta! |a_\beta|)^{1/|\beta|} = 0$ равносильно тому, что $a \in \mathrm{Exp}(\{0\})$.

СВЯЗЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ (1) и (2)

Определим многомерные убывающие факториалы

$$(t)_\beta := (t_1)_{\beta_1} \cdots (t_N)_{\beta_N}, \quad t \in \mathbb{C}^N, \beta \in \mathbb{N}_0^N,$$

где

$$(z)_n := z(z-1)\cdots(z-n+1), n \in \mathbb{N}, \quad (z)_0 := 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Для $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^N$, $\gamma \le \beta$, положим

$$s(\beta,\gamma) := \prod_{j=1}^N s(\beta_j,\gamma_j), \quad S(\beta,\gamma) := \prod_{j=1}^N S(\beta_j,\gamma_j),$$

где $s(n,k)$, соотв., $S(n,k)$, для $k,n \in \mathbb{N}_0$, $k \le n$, — число Стирлинга первого, соотв., второго, рода. Запись $\gamma \le \beta$ означает, что $\gamma_j \le \beta_j$, $1 \le j \le N$.

Эти числа определяются различными эквивалентными способами. Одно из определений использует убывающие факториалы; числа Стирлинга задаются равенствами

$$(z)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) z^k, \quad z^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(z)_k, \ n \in \mathbb{N}_0, \ z \in \mathbb{C}.$$

Для всех $t \in \mathbb{C}^N$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$

$$(t)_\beta = \sum_{0 \le \gamma \le \beta} s(\beta,\gamma) t^\gamma, \quad t^\beta = \sum_{0 \le \gamma \le \beta} S(\beta,\gamma)(t)_\gamma.$$

Число Стирлинга второго рода $S(n,k)$ — это количество способов разбить множество из n элементов на k непустых подмножеств; $|s(n,k)|$ — это число перестановок из n элементов с k циклами.

Из известных равенств для одной переменной следует

Лемма

Для любого непустого открытого множества Ω *в* $\mathbb{C}^N$, *всех* $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, $f \in H(\Omega)$, $t \in \Omega$

$$\theta^\beta(f)(t) = \sum_{0 \le \gamma \le \beta} S(\beta,\gamma) t^\gamma f^{(\gamma)}(t), \quad t^\beta f^{(\beta)}(t) = \sum_{0 \le \gamma \le \beta} s(\beta,\gamma) \theta^\gamma(f)(t).$$

Используются, в частности, такие свойства чисел Стирлинга, при $N = 1$ известные [15], [16].

Лемма

(i) Для любых $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^N$, $\gamma \le \beta$,

$$\sum_{\gamma \le \nu \le \beta} s(\beta, \nu) S(\nu, \gamma) = \sum_{\gamma \le \nu \le \beta} S(\beta, \nu) s(\nu, \gamma) = \delta_{\gamma, \beta}$$

($\delta_{\gamma,\beta}$ — символ Кронекера).
(ii) $S(\beta, \gamma) \le C_\beta^\gamma \gamma^{\beta-\gamma}, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^N, \ \gamma \le \beta.$
(iii) $|s(\beta, \gamma)| \le C_\beta^\gamma \frac{\beta!}{\gamma!}, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^N, \quad \gamma \le \beta.$
(iv) Для любых $t \in \mathbb{C}^N$, $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$ *справедливо равенство*

$$\sum_{\beta \ge \gamma} S(\beta, \gamma) \frac{t^\beta}{\beta!} = \frac{(e^{t_1} - 1)^{\gamma_1} \cdots (e^{t_N} - 1)^{\gamma_N}}{\gamma!}.$$

[15] Дж. Риордан. Введение в комбинаторный анализ. М.: изд–во ИЛ. 1963.
[16] L. Comtet. Advances combinatories: the art of finite and infinite expansions. Dordrecht, Boston: D. Reider Pub. Co. 1974.

Пусть $a \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$, $a(t) = \sum\limits_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} a_\beta t^\beta$, $t \in \mathbb{C}^N$.

Для анализа связи операторов Эйлера бесконечного порядка понадобятся ассоциированные ряды

$$\widetilde{a}(t) := \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} a_\beta \cdot (t)_\beta,$$

$$\widehat{a}(t) := \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} \left(\sum_{\beta \geq \gamma} S(\beta, \gamma) a_\beta \right) t^\gamma, \quad t \in \mathbb{C}^N.$$

Первый ряд — это многомерный вариант ряда Ньютона. Для голоморфных функций одной переменной он изучался, например, в[17], [18], [19].

[17] И.И. Ибрагимов, М.В. Келдыш. Об интерполяции целых функций // Матем. сб. 1947. Т. 42. № 2. 283–291.

[18] А.О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. М.: ГИФМЛ. 1959.

[19] А.Ф. Леонтьев. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука. 1983.

Ключевыми являются такие соотношения.

Лемма

(i) Если $a \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$, *то* $\widehat{a} \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$.

(ii) Если $\limsup_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{1/|\beta|} < 1$, *то* $\widetilde{a} \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$ *и* $a = \widehat{\widetilde{a}}$.

(iii) Если $\limsup_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{1/|\beta|} < \log 2$, *то* $\limsup_{|\beta|\to\infty}(\beta!|\widehat{a}_\beta|)^{1/|\beta|} < 1$ *и* $a = \widehat{\widetilde{a}} = \widetilde{\widehat{a}}$.

(iv) Если $a \in \mathrm{Exp}(\{0\})$, *то* $\widetilde{a}, \widehat{a} \in \mathrm{Exp}(\{0\})$ *и* $a = \widehat{\widetilde{a}} = \widetilde{\widehat{a}}$.

Пример. Пусть $a(t) = 2^{\langle \mathbf{1}, t\rangle} = 2^{t_1} \cdots 2^{t_N}$. Тогда для $t \in \mathbb{C}^N$

$$\widehat{a}(t) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} \left(\sum_{\beta\geq\gamma} S(\beta,\gamma) \frac{(\log 2)^{|\beta|}}{\beta!} \right) t^\gamma$$

$$= \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} \frac{\left(e^{\log 2} - 1\right)^{|\gamma|}}{\gamma!} t^\gamma = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} \frac{t^\gamma}{\gamma!} = e^{\langle \mathbf{1}, t\rangle}.$$

Интерпретация посредством ряда Ньютона

Утверждения (iii), (iv) в лемме можно интерпретировать в терминах представимости целой функции ее рядом Ньютона.
Для целой в $\mathbb{C}^N$ функции a введем числа

$$\Delta^\gamma(a) := \sum_{0\le\nu\le\gamma} (-1)^{\gamma-\nu} C_\gamma^{\gamma-\nu} a(\nu), \quad \gamma \in \mathbb{N}_0^N.$$

При $N = 1$ они совпадают с конечной разностью порядка γ функции a в точке 0.

Пусть $\limsup_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{1/|\beta|} < \log 2$. Тогда определена функция $\widetilde{\widehat{a}}$ и выполняются равенства

$$\frac{1}{\gamma!}\Delta^\gamma(a) = \widehat{a}_\gamma, \ \gamma \in \mathbb{N}_0^N,$$

где $\widehat{a}_\gamma$ — тейлоровские коэффициенты $\widehat{a}$.

Для доказательства этого используются «прямые» равенства для $S(\beta,\gamma)$, $0 \le \gamma \le \beta$:

$$S(\beta,\gamma) = \frac{1}{\gamma!} \sum_{0 \le \nu \le \gamma} (-1)^{\gamma-\nu} C_\gamma^{\gamma-\nu} \nu^\beta$$

(они вытекают из соответствующих соотношений при $N = 1$).
Таким образом, равенство $a = \widetilde{\widehat{a}}$ в лемме (iii), (iv) означает, что функция a разложима в свой ряд Ньютона.
При $N = 1$ это известно (см., например, теорема 5.11[20]).

Отсюда вытекает аналог теоремы Полиа:

Следствие

Если $\limsup\limits_{|\beta|\to\infty} (\beta!|a_\beta|)^{1/|\beta|} < \log 2$ *и* $a(\mathbb{N}_0^N) \subset \mathbb{Z}$, *то функция* a — *многочлен.*

[20] А.Ф. Леонтьев. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука. 1983.

Теорема

(i) Для любой функции $a \in \mathrm{Exp}(\{0\})$, всякого непустого открытого множества Ω в $\mathbb{C}^N$ в $H(\Omega)$ выполняются равенства $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_{\theta,\widetilde{a}}$ и $\mathcal{E}_{\theta,a} = \mathcal{E}_{\widehat{a}}$.
(ii) Для каждой функции $a \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$ в $H(\mathbb{C}^N)$ справедливо равенство $\mathcal{E}_{\theta,a} = \mathcal{E}_{\widehat{a}}$.
(iii) Для каждой функции $a \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$ существует $c \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$, для которого $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_{\theta,c}$ в $H(\mathbb{C}^N)$.
(iv) Если $\limsup\limits_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{1/|\beta|} < 1$, то $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_{\theta,\widetilde{a}}$ в $H(\mathbb{C}^N)$.
(v) Если $\limsup\limits_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{1/|\beta|} < 1$, то $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_{\theta,\widetilde{a}}$ в $H((\mathbb{C}^*)^N)$. Если $\limsup\limits_{|\beta|\to\infty}(\beta!|a_\beta|)^{1/|\beta|} < \log 2$, то $\mathcal{E}_{\theta,a} = \mathcal{E}_{\widehat{a}}$ в $H((\mathbb{C}^*)^N)$.

Многомерный вариант теоремы Вигерта–Ло

Приведем один результат, который можно считать многомерной версией теоремы Вигерта–Ло (теорема 1.3.2[21]) и доказательство которого использует приведенные результаты.

Теорема

(теорема Вигерта–Ло) Функция $h(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n t^n$, голоморфная в окрестности нуля, является целой функцией от $\frac{1}{t-1}$ тогда и только тогда, когда существует функция $a \in \mathrm{Exp}(\{0\})$ такая, что $h_n = a(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$.

[21] Л. Бибербах. *Аналитическое продолжение.* М.: Наука. 1967.

Отметим факт для функций одной переменной t, по сути, содержащийся в п. 2 статьи [22]:

Функция $f(t)$ голоморфна в окрестности точки 0 и голоморфно продолжается в $\overline{\mathbb{C}}\backslash\{1\}$ тогда и только тогда, когда функция $\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right)$ голоморфна в окрестности бесконечности и голоморфно продолжается в $\overline{\mathbb{C}}\backslash\{1\}$. Значит, если $g(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n$ является ненулевой целой функцией экспоненциального типа в $\mathbb{C}$, то функция $g_0(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}g^{(n)}(0)t^n$ целая от $\frac{1}{t-1}$ в том и только в том случае, когда сопряженная диаграмма g совпадает с $\{1\}$.

[22] Ю.Ф. Коробейник, Ю.М. Донсков. *Аналитические решения уравнения Эйлера бесконечного порядка* // Изв. высш. учебн. завед., Мат. **1969**:11, 44–52 (1969)

Поэтому теорему Вигерта–Ло можно переформулировать так: сопряженная диаграмма ненулевой целой функции g экспоненциального типа совпадает с $\{1\}$ тогда и только тогда, когда существует целая функция a экспоненциального типа 0, для которой $a(n) = g^{(n)}(0)$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$. Вследствие этого теорему ниже можно считать многомерным аналогом теоремы Вигерта–Ло. Ниже $H(\mathbb{C}^N)'$ — топологическое сопряженное к $H(\mathbb{C}^N)$ пространство; $\mathcal{F} : H(\mathbb{C}^N)' \to \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^N)$ — преобразование Лапласа:

$$\mathcal{F}(\varphi)(t) := \varphi_z(e^{\langle z,t\rangle}), \quad \varphi \in H(\mathbb{C}^N)',\ t \in \mathbb{C}^N.$$

Используется определение:
Компакт K в $\mathbb{C}^N$ является определяющим компактом функционала $\psi \in H(\mathbb{C}^N)'$, если для любой окрестности U компакта K существует постоянная $C > 0$, для которой

$$|\psi(f)| \leq C \sup_{z \in U} |f(z)|, \quad f \in H(\mathbb{C}^N).$$

Теорема

Для всякого ненулевого функционала $\varphi \in H(\mathbb{C}^N)'$ следующие условия равносильны:
(i) $\{1\}$ является определяющим компактным множеством φ.
(ii) Существует функция $a \in \mathrm{Exp}(\{0\})$ такая, что $a(\beta) = (\mathcal{F}(\varphi))^{(\beta)}(0)$ для любого $\beta \in \mathbb{N}_0^N$.

Инъективность, сюръективность $\mathcal{E}_{\theta,a}$: частный случай

При $N = 3$, $m \geq 3$ рассмотрим оператор конечного порядка $\mathcal{E}_{\theta,a}$ для

$$a(t) = (t_1 + 1)^m + (t_2 + 1)^m - (t_3 + 1)^m.$$

Поскольку $\mathcal{E}_{\theta,a}(f_\beta) = a(\beta) f_\beta$, $\beta \in \mathbb{N}_0^3$, то инъективность $\mathcal{E}_{\theta,a}$ в $H(\Omega)$, если Ω — область в $\mathbb{C}^N$, содержащая 0, равносильна справедливости великой теоремы Ферма (для показателя m), т.е. этот оператор инъективен (это наблюдение П. Доманского, М. Лангенбруха и Д. Фогта).

Отсюда сразу следует, что для любой ограниченной полной области Рейнхарта Ω с центром в точке 0 оператор $\mathcal{E}_{\theta,a}$ — изоморфизм $H(\Omega)$.

Спасибо за внимание !