О Валентине Васильевиче Напалкове и его работах

И.Х. Мусин (ИМВЦ УФИЦ РАН), В.Н. Филиппов (ННГУ)

Воркшоп по комплексному анализу и теории операторов, посвящённый памяти д.ф.-м.н., профессора Коробейника Ю.Ф. и д.ф.-м.н., профессора, чл-корр. РАН Напалкова В.В.

28-29 октября 2026 г.,
Южный математический институт ВНЦ РАН,
Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН,
ИМВЦ УФИЦ РАН,
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича

Краткая биография, семья

Валентин Васильевич Напалков родился 30 июля 1941 года в городе Горький (ныне Нижний Новгород).

Его родители:

Отец – Напалков Василий Степанович. Родился в 1905 году в деревне Осиновая слобода ныне Некрасовского района Ярославской области.

Служил до Великой Отечественной войны пять лет на Северном флоте (морпогранохрана) на Баренцевом море, корабль «Пурга». Военная должность – палубный комендор, отвечал за наведение орудий на цель.

После службы приехал в город Горький (Нижний Новгород), участвовал в строительстве Горьковского автозавода.

Мать – Напалкова (Пахтусова) Нина Александровна. Родилась в 1920 году в деревне Рязаново Варнавинского уезда Костромской губернии.

Впоследствии Варнавинский район был передан в Нижегородскую область. Жила в деревне Шилиха (до Нижнего Новгорода – 180 км.). Уехала в Горький примерно в 1938 году работать на автозаводе. Потом некоторое время работала воспитателем детского сада.



Рис.: Валентин Васильевич с мамой

Версия происхождения фамилии.

Фамилия Напалков имеет исконно русское происхождение и исторически тесно связана с регионами Поволжья и Центральной России. Словом **напалок** в русских говорах исстари называли большой палец на варежке или рукавице, а также специальный кожаный чехол, лоскут или напёрсток, который рабочие, косари или мастера, шившие рукавицы, надевали для защиты пальца от травм и мозолей.

Годы войны. Родители Валентина Васильевича в годы войны работали на автозаводе. Автозавод производил военную технику для фронта. Хлеб был по карточкам. Поэтому значительную часть детства Валентин Васильевич провёл в деревне Шилиха у бабушки Пахтусовой Марии Павловны. Деревня была в то время довольно большой (больше 300 человек). Ситуация с продуктами в деревне была намного лучше, чем в городе.

В школу Валентин Васильевич пошёл с 8 лет, в 1949 году. Учился в средней школе № 36 города Горького (Мужская средняя школа № 1 с 1944 по 1954 г., потом школа № 36, с 1964 года – с физико-математическим уклоном). Школа была открыта 2 февраля 1932 года на окраине бывшей деревни Монастырка как ФЗД № 1 (фабрично-заводская десятилетка) Автозаводского района.



Школа создавалась специально для детей строителей и первых рабочих Горьковского автомобильного завода.



Рис.: Третье здание школы, построено в 1937 г. (фото 1937г.)

В школьные годы он занимался во всевозможных кружках в Доме детского творчества, начал серьёзно заниматься спортом.

После школы.

В 1959 году Валентин Васильевич поступил на механико-математический факультет Горьковского государственного университета.

Вместе с ним на курсе училась и Людмила Николаевна Пантелеева, позже ставшая его женой. Она тоже родилась в 1941 году. После окончания университета в 1964 году работала на кафедре математического анализа и дифференциальных уравнений. Читала лекции по матанализу для студентов мехмата ГГУ. После переезда в Уфу преподавала математику в Уфимском филиале Горьковского института инженеров водного транспорта. С 1988 года работала в УГАТУ.

После завершения учёбы в университете.

С 1964 года по 1966 год преподавал на кафедре теории функций в ГГУ: ассистент, старший преподаватель.



Рис.: Напалков в молодости



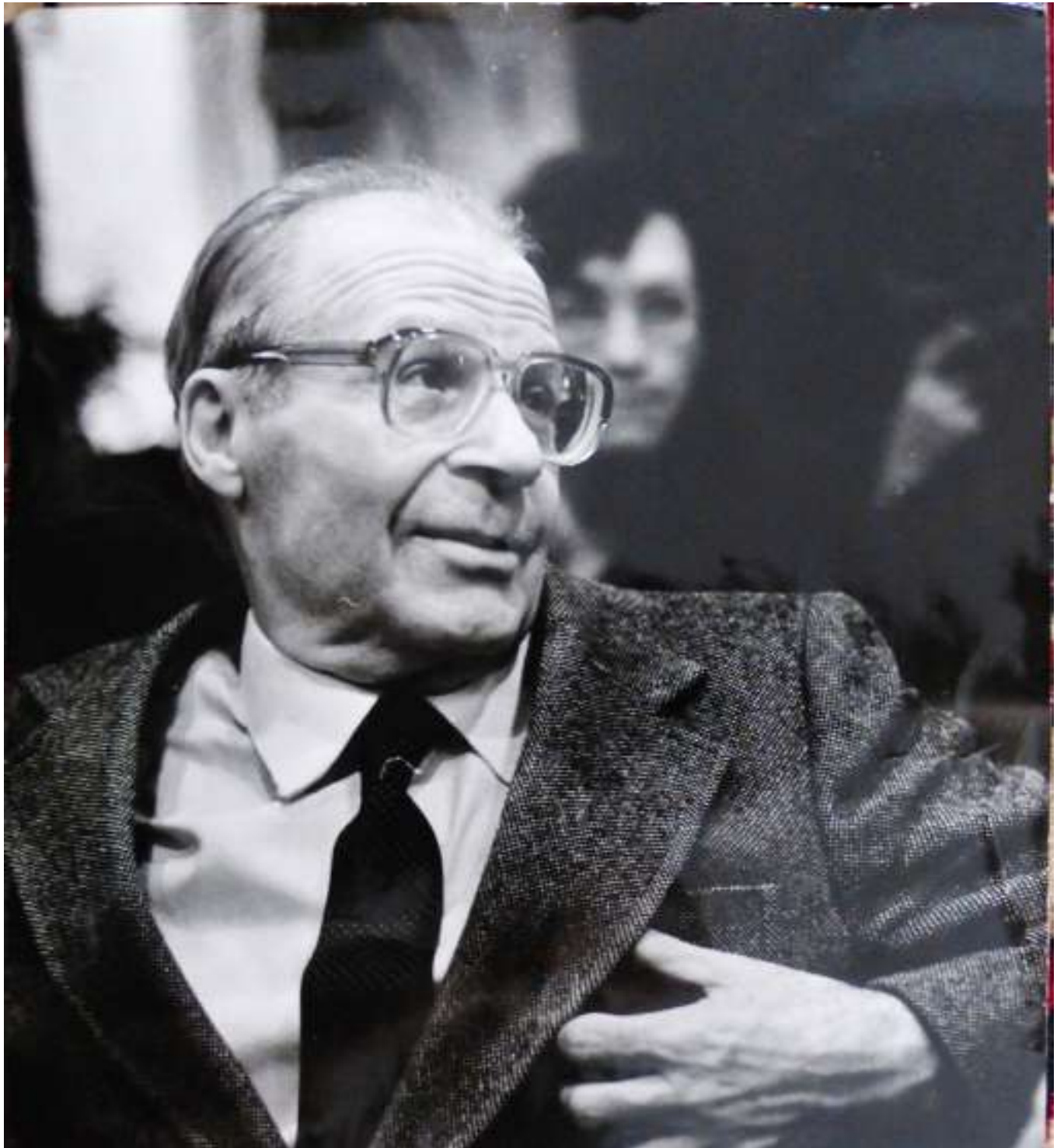
Рис.: Молодой Напалков

Дальнейшая учёба. Работа.

С 1966 года по 1969 год учился в аспирантуре при кафедре спецкурсов высшей математики Московского энергетического института под руководством выдающегося советского математика Алексея Фёдоровича Леонтьева.



Рис.: Алексей Фёдорович Леонтьев



В 1970 году В.В. Напалков защитил диссертацию “О расширении операторов обобщенного дифференцирования и некоторых их применениях” на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Основные её результаты были опубликованы в „Математическом сборнике“ и „Математических заметках“ в 1969 году. На этом этапе произошло соприкосновение исследований В.В. Напалкова и Ю.Ф. Коробейника.

Пусть $P_n(z)_{n=0}^{\infty}$ – система целых функций. Рассмотрим класс функций $F(z)$, которые представляются (каждая функция в своей области, пусть область содержит начало) в виде (равномерно сходящегося на компактах этой области) ряда

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n P_n(z)$$

А.Ф. Леонтьев ввёл оператор обобщённого дифференцирования

$$DF(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1} P_n(z).$$

Если $P_n(z) = \frac{z^n}{n!}$, то $DF(z) = F'(z)$. В случае, когда $P_n(z) = a_n z^n$ $(a_n \neq 0)$ и

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}, \ \sigma > 0, \rho > 0,$$

оператор D – оператор Гельфонда — Леонтьева (F – произвольная функция, аналитическая в окрестности начала). А. Ф. Леонтьев показал, что если

$$P_n(z) = \frac{z^n}{Q(1)\cdots Q(n)},$$

где Q – полином, $Q(k) \neq 0$ для $k = 0, 1, \ldots$, то DF аналитична там же, где и F.

А. Ф. Леонтьевым была поставлена задача об отыскании всех операторов обобщенного дифференцирования, обладающих этим свойством.

Эта задача была полностью решена Ю. Ф. Коробейником для случая, когда $P_n(z) = a_n z^n$ $(a_n \neq 0)$.



Рис.: А.Ф. Леонтьев, Ю.Ф. Коробейник

Им было доказано, что функция $DF(z)$ (F – аналитическая в окрестности начала) аналитически продолжается во всю область аналитичности функции $F \iff$

$$a_n = \frac{a_1}{\Psi(1)\cdots\Psi(n-1)},\ n = 2, \ldots,$$

где $\Psi \in [1, 0]$, $\Psi(n) \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$.

В.В. Напалков рассматривал эту же задачу в случае, когда система целых функций $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ – система целых функций является базисом в круге $|z| < R$, $F \in H(|z| \leq R$.

Использовалось: понятие продолжаемости из нуля оператора обобщенного дифференцирования, введённое Ю.Ф. Коробейником, понятие квазистепенного базиса (М. Г. Хапланов), теорема Вигерто-Ло.

В дальнейшем научные пути Ю.Ф. Коробейника и В.В. Напалкова часто пересекались: операторы, перестановочные с дифференцированием, уравнения и операторы свёртки, достаточные и слабодостаточные множества, сюръективность и описание ядер дифференциальных операторов.

В 1971 году для организации научных исследований в области математических наук в только что образованном Отделе физики и математики БФАН СССР из Москвы был направлен А.Ф. Леонтьев, который пригласил работать в Уфе ближайших своих учеников, в том числе и В.В. Напалкова.



Рис.: Леонтьев с ближайшими учениками в Уфе

С этого времени началось бурное развитие уфимской школы по теории функций и комплексному анализу, в становлении которой В.В. Напалкову принадлежит важная роль.

И с этого момента научные интересы В.В. Напалкова были сосредоточены главным образом на многомерном комплексном анализе и теории операторов свёртки. В Уфе он сразу же получил ряд серьёзных результатов. Только за первые три года работы в Уфе В.В.Напалков подготовил 10 статей для ведущих советских математических журналов.

Так, уже в январе 1972 года он направил работу “О подпространствах аналитических функций, инвариантных относительно сдвига” в журнал Известия АН СССР. Сер. матем., в которой он изучал подпространства аналитических функций в полупространстве
$\Pi_1 = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : Im\, z_1 > 0\}$ (в том же году была опубликована).

В конце 1972 – начале 1973 года он рассматривал неоднородное уравнение свёртки на плоскости. А именно, пусть D — произвольная выпуклая область комплексной плоскости, $H(D)$ – пространство голоморфных функций в D. Пусть L – целая функция экспоненциального типа и B – её сопряженная диаграмма. Пусть g – функция, ассоциированная по Борелю с L, тогда

$$L(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C g(\lambda) e^{\lambda z} \, d\lambda, \ z \in \mathbb{C},$$

где C – произвольный замкнутый спрямляемый контур, содержащий внутри себя множество B. Пусть $G = B + D$. Тогда G – выпуклая область. В пространстве $H(G)$ рассматривается оператор M:

$$M[y](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C y(z + \lambda) g(\lambda) \, d\lambda, \ z \in D.$$

Ю. Ф. Коробейник (О решениях некоторых функциональных уравнений в классах функций, аналитических в выпуклых областях. Матем. сб. 75(117):2 (1968), 225—234) показал, что

если функция L имеет вполне регулярный рост, то уравнение

$$M[y](z) = f(z),\ z \in D, \tag{1}$$

разрешимо в пространстве $H(G)$ для всякой функции $f \in H(D)$.

В.В. Напалков в статье в УМН (“Об одном классе неоднородных уравнений типа свертки”, УМН, 29:3(177) (1974), 217–218) показал, что вполне регулярный рост функции L является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (1) в пространстве $H(G)$ для всякой $f \in H(D)$, где D – произвольная выпуклая область.

В дальнейшем О.В. Епифанов нашёл критерий разрешимости в ситуации, когда область D – фиксированная (Епифанов О. В. Об эпиморфизме свертки в выпуклых областях. Докл. АН СССР, 1974, 217, № 1, с. 18—19).

В 1974 году В.В. Напалков в статье (“Об одной теореме единственности в теории функций многих комплексных переменных и однородных уравнениях типа свертки в трубчатых областях $\mathbb{C}^n$, ”Изв. АН СССР. Сер. матем., 40:1 (1976), 115–132) получил серьёзный результат – теорему единственности, которая, в частности, позволила доказать, что всякое решение однородного уравнения типа свертки в трубчатых областях $\mathbb{C}^n$ аппроксимируется линейными комбинациями экспоненциальных полиномов, удовлетворяющих этому же уравнению.

Этот результат в его работах стал основным методом изучения аппроксимационной задачи для однородных уравнений свертки.

Начав в 1971 г. с должности младшего научного сотрудника, он последовательно становится старшим научным сотрудником (1972), заведующим сектором комплексного анализа (1978).

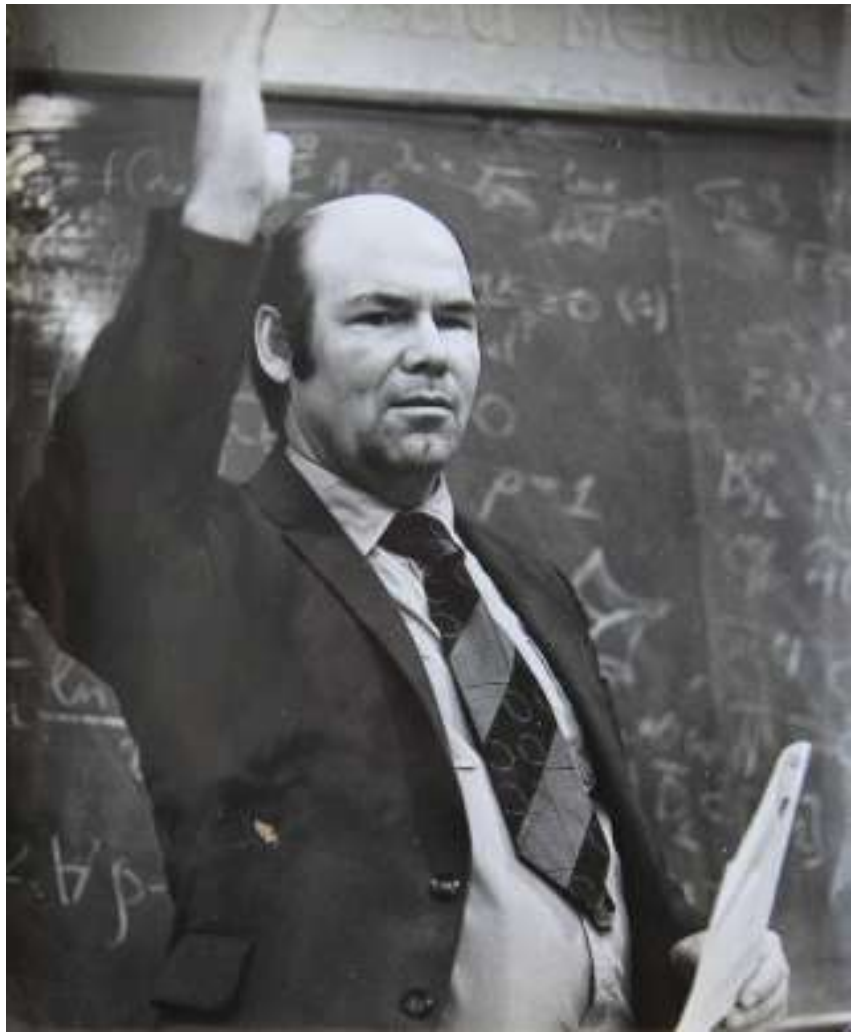


Рис.: Напалков Валентин Васильевич

Научная работа В.В. Напалкова была неразрывно связана с преподавательской деятельностью и с работой по подготовке высококвалифицированных научных кадров (этому способствовало и открытие в ОФМ в 1972 г. аспирантуры по специальности «Математический анализ»).

С 1971 г. он преподавал на математическом факультете БГУ, работая на кафедре теории функций и функционального анализа.

Лекции по теории функций многих комплексных переменных, теории операторов свёртки, $\bar{\partial}$-задаче.

Семинары для студентов по теории целых функций и теории внешних форм,

Научное руководство курсовыми и дипломными работами.

В ОФМ руководил еженедельным семинаром по комплексному анализу.

Помогал А.Ф. Леонтьеву в организации и проведении в Уфе всесоюзных симпозиумов по теории аппроксимации функций в комплексной области в 1976 году

Симпозиум-76



Открытие симпозиума.

и в 1980 году.



Рис.: Симпозиум в Уфе в 1980 г.



Рис.: Симпозиум в Уфе в 1980 г.

С конца 70-х годов Валентин Васильевич, фактически возглавив вместе с А.Ф. Леонтьевым уфимскую школу по теории функций и комплексному анализу, начал реализацию широкой программы исследований, привлекая к ней своих учеников и последователей.

Среди первых учеников В.В. Напалкова – И.С. Елисеев, В.Н. Филиппов, Н.И. Рахимкулов, С.Г. Мерзляков, А.Б. Секерин, Р.С. Юлмухаметов. Они к 1983 году защитили кандидатские диссертации.

Отличительная особенность Валентина Васильевича в работе с талантливой молодёжью – смелость в постановке актуальных математических проблем, их многообразие, щедрость в раздаче идей ученикам, создание условий, при которых талант творчески одарённой молодёжи мог бы быстро развернуться в полную меру.

Им подготовлено 25 кандидатов и 5 докторов физико-математических наук.

В 1977 г. он успешно защитил докторскую диссертацию “Уравнения свёртки в многомерных пространствах” в Математическом Институте имени В.А. Стеклова 10 ноября 1977 г. Официальные оппоненты: чл.-корр. АН СССР Анатолий Георгиевич Витушкин, чл.-корр. АН СССР Валентин Константинович Иванов; д.ф.-м.н. Юрий Фёдорович Коробейник.

На её основе в 1982 г. в издательстве «Наука» вышла книга «Уравнения свертки в многомерных пространствах».



Рис.: Монография В.В. Напалкова

К середине восьмидесятых годов в ОФМ сформировался научный коллектив, способный решать крупные задачи. Уфа постепенно стала одним из математических центров.



Рис.: Леонтьев-70

В 1986 году работу математических подразделений ОФМ оценивала комиссия Отделения математики АН СССР, в составе которой были выдающиеся ученые Никольский С.М. (председатель), Витушкин А.Г., Гончар А.А. В своем заключении комиссия отметила высокий уровень проводимых в ОФМ научных исследований, успешную работу по подготовке научных кадров и сделала вывод о необходимости образования на базе математических подразделений ОФМ самостоятельного академического учреждения. К тому времени математиками ОФМ было подготовлено более 30 кандидатов наук. В ОФМ было 6 докторов наук, 18 кандидатов наук.





Рис.: На семинаре



Рис.: Уфа, 3 июня, 1987 г.

23 декабря 1986 году Отделение математики РАН приняло решение о целесообразности преобразования математических подразделений ОФМ в самостоятельный институт. Оно получило активную поддержку руководства Башкирии, которое с большим уважением относилось к работе А.Ф. Леонтьева в Башкирии и его инициативам.

На основании постановлений Правительства СССР и Президиума АН СССР в феврале 1988 года было принято постановление Президиума Уральского отделения (БФАН СССР был переименован в Башкирский научный центр и вошел в состав созданного УрО АН СССР) об образовании ИМВЦ.

Директором-организатором института был назначен Напалков В.В., который в дальнейшем был избран на эту должность и был директором до конца 2015 года.



Рис.: Напалков за работой в ИМВЦ

1988

Впервые

ОТКРЫТ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Сегодня в жизнь башкирской науки произошло важное событие. Комиссией Президиума Уральского отделения Академии наук СССР, возглавляемой вице-президентом Ленинской премии академиком Ю. С. Осиповым, официально открыт Институт математики с вычислительным центром.



Математики Башкирского научного центра проделали огромный труд. Разработан ряд направлений математической мысли, носящих приоритетный характер — то есть таких, по которым мы занимаем ведущее место в научном мире. Правда, всего, это уфимская школа теории функций комплексного переменного, которую организовал и развил выдающийся советский математик, член-корреспондент АН СССР Алексей Федорович Леонтьев. Она была делом его жизни и стала теперь гордостью нашего края.

Математика внесла огромный вклад в построение научных идеалов самой высокой квалификации. Имя подготовленных ими докторов и кандидатов наук, работающих сегодня во многих учебных заведениях города и в Башкирском научном центре. Нельзя не отметить и роль Башкирского государственного университета: подавляющее большинство молодых ученых — выпускники математического факультета. Свидетельством широкого признания уфимской школы явились три блестящих выступления по теории функций, состоявшиеся в Уфе. Поэтому при создании Института математики кадровые проблемы практически отсутствовали.

Долго решение о создании в Уфе Института математики было принято Президиумом Уфимского отделения АН СССР еще 1 февраля 1982 года. Трехлетний срок, прошедший до дня официального открытия, позволил уже подвести некоторые предварительные итоги. Эти месяцы принесли немало: жизнь бурлит организационными деталями. Произошло формальное разделение — институт математики физически остался в существовавшем ранее Отделе физики и математики. Состоялись выборы руководителя, которые были проведены демократично, с широким обсуждением, решением наболевших вопросов, свободным высказыванием мнений и замечаний. Директором института единогласно избран профессор Валентин Васильевич Напалков — ближайший ученик А. Ф. Леонтьева. Вместе с учеными он принимал много сил на создание математической базы, позволяющей открыть институт.

Выбран ученый совет, разработаны и утверждены планы, тематика, определены основные направления научной работы по отделам. Темы исследований очень. Они охватывают широкий круг научных исследований, от строго теоретических до прикладных, отвечающих нуждам сегодняшнего дня. Особо важное дело — создание современного вычислительного центра, способного решать на высоком уровне практические задачи в тесном контакте науки с действенным производством.

Образование института не является некоторой локальной точкой, изолированной единицей развития научной мысли. Напротив, события переворачивают страницу, дают башкирским математикам новые возможности и одновременно возлагают более высокую ответственность за эффективность фундаментальных и прикладных исследований.

В. УЗИН,
кандидат физико-математических наук

На СНИМКЕ: в вычислительном центре.

Фото Р. КУДОБРОВА.

В 1990-х и нулевых он продолжал активную научную и научно-организационную деятельность. Он принимал активное участие в работе Бюро ОМН РАН, в становлении и развитии республиканской Академии наук, был вице-президентом АН РБ.

Укреплялось международное сотрудничество. Уфимская школа по комплексному анализу и теории функций получала всё большее признание. В Уфе побывали с визитами Christer Kiselman, Reinhold Meise, Joan Verdera. На конференции памяти А.Ф. Леонтьева участвовали многик крупные математики.






(1) П-ты полноты из теоремы
$0 < \lambda_n \uparrow +\infty$,
$\frac{n}{\lambda_n} \to \sigma > 0$
$P_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{nj} e^{-\lambda_j z} + b_{nj} e^{\lambda_j z} \right)$ (1)
$= \sum b_{nj} e^{\lambda_j z}$ (2)
$a < \mathrm{Re}\, z < b$
$Q_n(z)$ на рабе $\mathrm{Re}\, z > a$







Рис.: P. Gauthier

В.В. Напалков, помимо того, что после А.Ф. Леонтьева продолжал заведовать кафедрой теории функций и функционального анализа БГУ, организовал кафедру спецглав математики в УГАТУ (1996 г.) и аспирантуру в этом вузе.

При его активном участии укреплялись интеграционные связи с УГАТУ и АН РБ, выполнялись работы по Программам ОМН РАН, РФФИ, РФФИ-Поволжье, по программе ведущих научных школ, что позволило стабильно работать в эти годы. Постоянно проводились масштабные конференции.



Признание больших заслуг Валентина Васильевича как ученого, педагога и организатора науки.

Избрание Валентина Васильевича в 1990 году членом-корреспондентом АН СССР (член-корреспондент РАН с 1991 г.).

Академик Академии наук Республики Башкортостан с 1991 г.

В 1999 г. награжден медалью ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени.

И.Ф. Красичков-Терновский о В.В. Напалкове: „Прекрасный математик, крупный организатор науки, талантливый педагог, достойный продолжатель традиций, заложенных его учителем Алексеем Фёдоровичем Леонтьевым.“

История науки, наша повседневная жизнь показывает, что крупный учёный - не обязательно большой человек, но крупный учитель не может не быть большим человеком. Для нас В.В. Напалков – и крупный учёный, и педагог, и большой учитель.

Как и его учитель, Алексей Фёдорович Леонтьев, он обладал такими редкими душевными качествами: исключительная скромность, доброжелательность и деликатность, завидная порядочность, громадная работоспособность, уважение к чужому труду.

Очень важно, что он, как и Алексей Фёдорович Леонтьев, умел выстраивать доверительные, уважительные отношения с руководством республики.



Было прекрасное взаимодействие с ОМН РАН, с президентом РАН Ю.С.Осиповым, с вице-президентом РАН А.А. Гончаром, академиками В.С.Владимировым, Н.Н. Красовским, руководителями ведущих математических центров России.

При нём был создан ИМВЦ, которым он руководил ИМВЦ более 25 лет. Это был период расцвета и ИМВЦ, и уфимской школы по комплексному анализу и теории функций.

Сам он за это время многое прошёл, многое пережил. Решения принимал самостоятельно, но соблюдал принцип коллегиальности. Давал свободу творчества. Как говорил П. Капица: „Руководить - это значит не мешать хорошим людям работать“. За возможность спокойно заниматься любимым делом, всяческое поощрение свободы творчества, общение с ним мы все ему глубоко благодарны.





Рис.: Юбилей Напалкова. Ему - 75.

Хобби, увлечения: спорт (силовые тренировки), охота, рыбалка.



Рис.: Напалков у мамы в Шилихе



Рис.: В Шилихе







Рис.: На рыбалке, старица реки Ветлуги



Рис.: Рыбалка



Рис.: Улов



О двух красивых результатах В.В. Напалкова.

А.Ф. Леонтьев (“Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы”, Изв. АН СССР, 44:6 (1980)):
$D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная выпуклая область, $H(p)$ – класс функций $f \in H(D)$: $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, c_\varepsilon > 0$:

$$|f(z)| \leq c_\varepsilon e^{\left(\frac{1}{d(z)}\right)^{p+\varepsilon}}, \;\; z \in D,$$

с соответствующей счётно-нормированной топологией.
Исследовалась проблема представления функций f из $H(p)$ рядами экспонент

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \;\; z \in D,$$

сходящимися к f в топологии $H(p)$.

Р.С. Юлмухаметов: Описано сильное сопряжённое пространство $(H(p))^*$ в терминах преобразования Лапласа функционалов (Р.С. Ю., “Пространство аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы”, Матем. заметки, 32:1 (1982)). Результат применен в вопросах разложений функций в ряды Дирихле (Р.С. Ю., “Достаточные множества в одном пространстве целых функций”, Матем. сб., 116(158):3(11) (1981)).

Б.А. Державец, “Пространства функций, аналитических в выпуклых областях $\mathbb{C}^n$ и имеющих заданное поведение вблизи границы”, Докл. АН СССР, 276:6 (1984) (На основе работы: Дынькин Е. М. Псевдоаналитическое продолжение гладких функций. Равномерная шкала.— В сб.: Матем. программиров. и смежн. вопр. Теория функций и функц. анализ. М., 1976, с. 40—73).

В.В. Напалков (В.В. Н., “Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы”, Изв. АН СССР, 51:2 (1987), 287–305): По определенной последовательности $\varphi = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ $(\varphi_j(z) \geq \varphi_{j+1}(z))$ в D выпуклых функций φ_j, заданных в ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}^n$, строится пространство $H_\varphi(D)$ как проективный предел нормированных пространств

$$H_j(D) = \{f \in H(D) : \|f\|_j = \sup_{z \in D} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_j(z)}} < \infty\},\ j = 1, 2, \ldots.$$

Описано сильное сопряжённое пространство $(H_\varphi(D))^*$ в терминах преобразования Лапласа функционалов. При этом в описании особую роль играет доказанное в этой работе одно обобщение теоремы Пэли–Винера-Шварца на случай пространств бесконечно дифференцируемых функций с определенным ростом у границы. Полученный результат при $n = 1$ использован в вопросах разложений функций в ряды Дирихле.

Работа В. В. Напалков, “О сравнении топологий в некоторых пространствах целых функций”, Докл. АН СССР, 264:4 (1982), 827–830.

Пусть $(g_m)_{m=1}^{\infty}$ – последовательность непрерывных функций в $\mathbb{C}^n$ таких, что:

1) $0 < g_1(z) \leq g_2(z) \leq \dots$;

2) $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{g_m(z)}{g_{m+1}(z)} = 0, \ m \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{K}$ – множество всех непрерывных функций $k(z)$ в $\mathbb{C}^n$ таких, что для всех $m \in \mathbb{N}$ $k(z) \geq \epsilon g_m(z)$, где $\epsilon = \epsilon(m, k(z)) > 0$.

Пусть E – множество функций $\varphi \in H(\mathbb{C}^n)$, для которых при некоторых $c = c(\varphi) > 0, m = m(\varphi) > 0$

$$|\varphi(z)| \leq c g_m(z), \ z \in \mathbb{C}^n.$$

Для замкнутого в $\mathbb{C}^n$ множества S единственности для E рассматриваются две топологии τ_S и μ_S на множестве E.

Топология τ_S – топология индуктивного предела нормированных пространств

$$E_{S,m} = \{\varphi \in E : \|\varphi\|_{S,m} = \sup_{z \in S} \frac{|\varphi(z)|}{g_m(z)} < \infty\},\ m \in \mathbb{N}.$$

Топология μ_S на E определяется с помощью семейства полунорм вида

$$\|\varphi\|_{S,k} = \sup_{z \in S} \frac{|\varphi(z)|}{k(z)} < \infty\},\ k(z) \in \mathcal{K}.$$

Множество S называется достаточным (слабо достаточным) для E, если

$$\mu_S = \mu_{\mathbb{C}^n}\ (\tau_S = \tau_{\mathbb{C}^n})$$

Основной результат работы: Если множество S является слабо достаточным для E, то $\tau_S = \mu_S$.

Таким образом, В.В. Напалков показал, что понятия слабой достаточности и достаточности множества совпадают. При этом от функций g_m не требуется плюрисубгармоничность.

Отметим, что проверить условие слабой достаточности значительно проще, чем условие достаточности.

