Представление функционалов в гильбертовых пространствах с воспроизводящим ядром и связанные с этим специальные системы разложения

Напалков Валерий Валентинович

ИМВЦ УФИЦ РАН

Воркшоп по комплексному анализу и теории операторов
посвященный
памяти д.ф.-м.н., профессора Коробейника Ю.Ф.
и д.ф.-м.н., профессора, чл. -корр. РАН Напалкова В.В.
28–29 октября 2026 г.

Пусть H – гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций, заданных на некотором множестве точек M. Для любой точки $\xi \in M$ дельта функционал $\delta_\xi : f \mapsto f(\xi)$ является линейным и непрерывным функционалом над H. Предположим, что имеется полная в пространстве H система функций $\{e(\cdot, \xi)\}_{\xi \in \Omega}$. По теореме Рисса – Фишера всякий линейный непрерывный функционал S над H порождается некоторым элементом $f \in H$ по правилу:

$$S(h) = (h, f)_H, \quad \forall h \in H.$$

Для любого $f \in H$ рассмотрим следующее преобразование $f \to \widetilde{f}$:

$$\widetilde{f}(\xi) \stackrel{def}{=} (e(\cdot, \xi), f)_H, \quad \forall \xi \in \Omega.$$

Совокупность функций $\widetilde{f}(\xi)$, $\xi \in \Omega, \quad \forall f \in H$ образует гильбертово пространство $\widetilde{H}$ со скалярным произведением

$$(\widetilde{f}, \widetilde{g})_{\widetilde{H}} \stackrel{def}{=} (g, f)_H, \quad \forall \widetilde{f}, \widetilde{g} \in \widetilde{H}.$$

и нормой $\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{H}} = \|f\|_H, \quad \widetilde{f} \in \widetilde{H}$.

Таким образом, отображение $f \to \widetilde{f}$ является антиунитарным оператором, действующим из H на $\widetilde{H}$.

Задача

Получить больше информации о норме $\|\cdot\|_{\widetilde{H}}$. Например, построить меру ν на Ω, такую, что

$$\|\widetilde{f}\|^2_{\widetilde{H}} \stackrel{def}{=} \int_\Omega |\widetilde{f}(\xi)|^2 \, d\nu(\xi), \quad \forall f \in H. \tag{1}$$

Как оказалось, мера ν удовлетворяет условию (1) тогда и только тогда, когда любую функцию $f \in H$ можно представить в виде

$$f(z) = \int_\Omega (f, e(\cdot, \xi))_H e(z, \xi) \, d\nu(\xi), \quad \forall z \in \Omega. \tag{2}$$

Возможные применения

Пусть H – некоторое гильбертово пространство аналитических функций от одной или нескольких комплексных переменных. Допустим необходимо изучить некоторый сложный оператор, действующий на функции $f \in H$. Это может быть неограниченный оператор с плотной областью определения в H или даже нелинейный оператор. Обозначим этот оператор символом A или $A(f)$. Для данного оператора A можно попробовать подобрать систему функций $\{e(\cdot, \xi)\}_{\xi \in \Omega}$ так, чтобы в пространстве $\widetilde{H}$ оператор $A(f)$ означал простое действие. Таким образом, можно изучать свойства оператора $A(f)$. В частности, поэтому возникает необходимость в исследовании пространств $\widetilde{H}$ и их свойств.

Возможные применения

Могут быть и другие применения данных исследований, например, в математической статистике. Это связано с известной теоремой М. Лоева, о том, что воспроизводящее ядро гильбертова пространства и ковариационная функция некоторого случайного процесса – это один и тот же объект. Напомним определение ковариационной функции. Например, пусть $X_\xi, \quad \xi \in \Omega$ – семейство комплекснозначных случайных величин (случайный процесс, случайное поле). Тогда ковариационная функция определяется так:

$$K(z,\xi) \stackrel{def}{=} M((X_z - M(X_z))\overline{(X_\xi - M(X_\xi))}), \quad z,\xi \in \Omega,$$

где M обозначает математическое ожидание, черта означает комплексное сопряжение.

Отметим некоторые наши работы в которых изучалась вышеприведенная задача.

Напалков В.В., Напалков В.В. (мл.) *Об изоморфизме гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром*// Доклады Академии Наук, 2017. Т.474, №6. С. 665–667.;

Напалков В.В., Напалков В.В. (мл.) *К вопросу о совпадении гильбертовых пространств с воспроизводящими ядрами, связанных специальным преобразованием*//Тр. ИММ УрО РАН, 25, № 2, 2019, С. 149–159.;

Напалков В.В., Напалков В.В. (мл.) *Об эквивалентности гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром, связанных специальным преобразованием*// Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Т.26, № 2. С. 200–215.;

Напалков В.В. (мл.), Нуятов А.А. *Об одном условии совпадения пространств преобразований функционалов гильбертова пространства*// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3. С. 142-154;
Напалков В.В. (мл.), Нуятов А.А. *К вопросу о совпадении гильбертовых пространств интегрируемых с квадратом по мере функций*// Труды МФТИ. 2023. № 3. С. 39–49;
Напалков В.В. (мл.), Нуятов А.А. *К вопросу о вложении гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром*// Уфимск. матем. журн., 16:3 2024, С. 78-87;
Напалков В.В. (мл.), Нуятов А.А. *Жесткие интегральные фреймы и условия подобия гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром*// Тр. ИММ УрО РАН, 32, № 1, 2026, 146–163.

Во многих конкретных случаях пространств H подобрать меру ν, как в равенстве (1), не удается. Можно лишь найти такую меру ν на Ω, что выполнены неравенства

$$C_1\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{H}}^2 \le \int_\Omega |\widetilde{f}(\xi)|^2\, d\nu(\xi) \le C_2\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{H}}^2, \quad \forall \widetilde{f} \in H, \tag{3}$$

где $C_1, C_2 > 0$ – некоторые постоянные. И даже в этих случаях мера ν не всегда существует. Пример построен в работе
В. В. Напалков (мл.), Р. С. Юлмухаметов, *Весовые преобразования Фурье–Лапласа аналитических функционалов в круге*// Матем. сб., 183:11 (1992), 139–144.
Несколько проще найти меру ν такую, что выполнено неравенство

$$\int_\Omega |\widetilde{f}(\xi)|^2\, d\nu(\xi) \le C\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{H}}^2, \quad \forall \widetilde{f} \in H, \tag{4}$$

где $C > 0$ – константа.

Следует отметить, что для приложений желательно, чтобы мера ν удовлетворяла равенству (1). В этом случае мы сможем записать скалярное произведение $\widetilde{H}$ в явном виде и удобно использовать представление (2). Но, может оказаться, что такой меры ν (для которой выполняется равенство (1)) просто нет. В этом случае можно сделать следующее.
Пусть система $\{e(\cdot,\eta)\}_{\eta\in\Omega}$ полна в пространстве H и мера ν выбрана так, что выполнено неравенство (4). Тогда отображение $f \to \widehat{f}$

$$\widehat{f}(\xi) \stackrel{def}{=} \int_{\Omega} \overline{e(\xi,\eta)} \cdot (e(\cdot,\eta), f)_H \, d\nu(\eta), \quad \xi \in M, \quad \forall f \in H.$$

инъективно.

Введем гильбертово пространство с воспроизводящим ядром Q. Для этого рассмотрим пространство S являющееся пополнением системы функций $\{e(z,\cdot)\}_{z\in M}$ относительно нормы

$$\|h\|_\nu^2 \stackrel{def}{=} \int_\Omega |h(\xi)|^2\, d\nu(\xi).$$

Для любой $h \in S$ определим функцию

$$q_h(z) \stackrel{def}{=} (e(z,\cdot),h)_S, \quad \forall z \in M.$$

Совокупность функций q_h, где $h \in S$ образует гильбертово пространство Q со скалярным произведением

$$(q_h,q_r)_Q \stackrel{def}{=} (r,h)_S, \quad \forall r,h \in S.$$

Теорема 1

Пусть мера ν выбрана так, что выполнено неравенство

$$\int_\Omega |\widetilde{f}(\xi)|^2 \, d\nu(\xi) \le C\|f\|_H^2, \quad \forall f \in H,$$

где $C > 0$ – константа. Тогда любую функцию из пространства H можно представить в виде:

$$f(z) = \int_\Omega \overline{(\widehat{f}, \overline{e(\cdot,\xi)})}_Q e(z,\xi) \, d\nu(\xi), \quad \forall z \in M.$$

Отображение $f \to \widehat{f}$ является инъективным оператором, действующим из H в Q.

Теорема 2

Пусть мера ν выбрана так, что выполнено неравенство

$$C_1\|f\|_H^2 \le \int_\Omega |\widetilde{f}(\xi)|^2\, d\nu(\xi) \le C_2\|f\|_H^2, \quad \forall f \in H,$$

где $C_1, C_2 > 0$ – некоторые константы. Тогда любую функцию из пространства H можно представить в виде:

$$f(z) = \int_\Omega \overline{(\widehat{f}, \overline{e(\cdot,\xi)})}_Q e(z,\xi)\, d\nu(\xi), \quad \forall z \in M. \tag{5}$$

Отображение $f \to \widehat{f}$ является биективным оператором, действующим из H в Q.

Если пространство Q определить несколько другим способом, то можно улучшить утверждение последней теоремы 2.
Для любой функции $f \in H$ рассмотрим следующее преобразование.

$$\widehat{f}(\xi) \stackrel{def}{=} (e(\cdot, \xi), f)_H, \quad \forall \xi \in \Omega.$$

Пространство Q определим как совокупность $\widehat{f}$, $f \in H$.
Скалярное произведение в Q определено по формуле

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_Q \stackrel{def}{=} (g, f)_H, \quad \forall \widehat{f}, \widehat{g} \in Q.$$

С определенным таким образом скалярным произведением Q становится гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3

Пусть мера ν выбрана так, что выполнено неравенство

$$C_1\|f\|_H^2 \le \int_\Omega |\widetilde{f}(\xi)|^2\, d\nu(\xi) \le C_2\|f\|_H^2, \quad \forall f \in H,$$

где $C_1, C_2 > 0$ – некоторые константы. Тогда любую функцию из пространства H можно представить в виде:

$$f(z) = \int_\Omega \overline{(\widehat{f}, \overline{e(\cdot,\xi)})}_Q e(z,\xi)\, d\nu(\xi), \quad \forall z \in M. \tag{6}$$

Отображение $f \to \widehat{f}$ является биективным антиунитарным оператором, действующим из H в Q.

Пример

Пусть $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < R\}$ – круг радиуса R с центром в точке z_0. Случай $R = \infty$ не исключается. Известно, что любая функция f голоморфная в $D(z_0, R)$ может быть представлена в виде ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in D(z_0, R),$$

при этом функция f полностью определяется набором коэффициентов $\{a_k,\ k = 0, 1, \dots\}$.

Пусть P – некоторое гильбертово пространство состоящее из аналитических в круге $D(z_0, R)$ функций. Мы предполагаем, что P есть гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, Также требуется, чтобы система функций $\{(z - z_0)^k\}_{k=0}^{\infty}$ была полна в пространстве P, при этом найдется набор чисел $\mu_k > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ такой, что для любой последовательности вида $f_k \stackrel{def}{=} ((z - z_0)^k, f)_P$, $k = 0, 1.2, \ldots$, где f – некоторая функция из пространства P, выполнено условие $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 \mu_k < \infty$ и справедлива оценка $\|f\|_P^2 \leq C \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 \mu_k$, где C – некоторая постоянная, не зависящая от $f \in P$.

Заметим, что если в пространстве P система функций $\{(z-z_0)^k\}_{k=0}^{\infty}$ является ортогональным базисом, то любая функция f из P представляется в виде:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(f,(\cdot-z_0)^k)_P(z-z_0)^k\frac{1}{\|(\cdot-z_0)^k\|_P^2},\quad \forall z\in D(z_0,R).$$

Наша задача: Получить похожую формулу для гильбертовых пространств аналитических функций в круге, в которых система функций $\{(\cdot-z)^k\}_{k=0}^{\infty}$ не является ортогональным базисом.

Примерами гильбертовых пространств в которых система функций $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ является ортогональным базисом являются пространства $B_2(D,\mu)$:

$$B_2(D,\mu) = \{f \in Hol(D):$$
$$\|f\|_2^2 \stackrel{def}{=} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 \, d\mu(r) d\varphi\},$$

где $d\mu$ – неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{R}$, $supp\,\mu = [0,1]$.

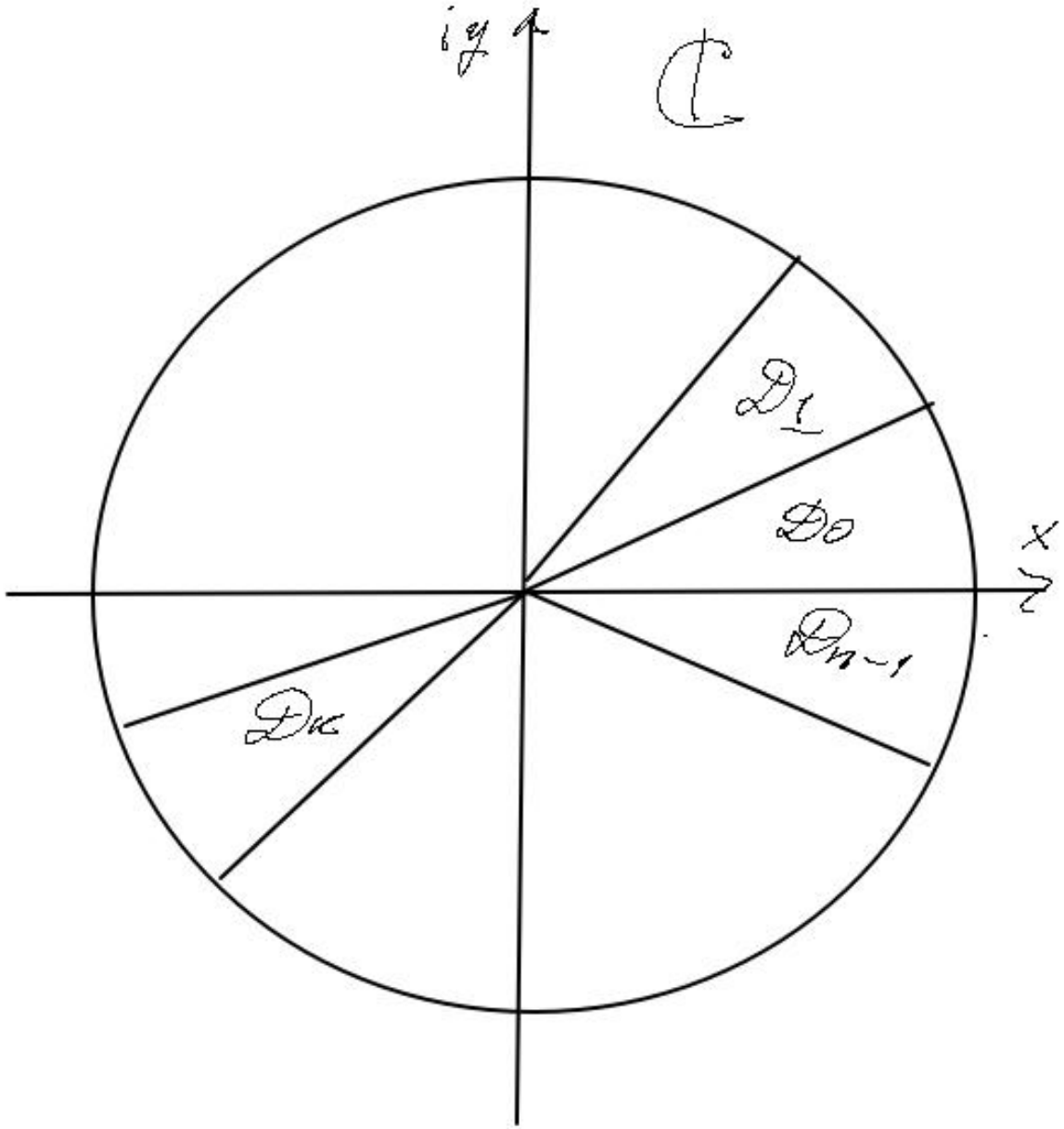
Система функций $\{(z-z_0)^k\}_{k=0}^{\infty}$ может не быть ортогональным базисом в P. Например, можно рассмотреть гильбертово пространство аналитических в единичном круге D функций суммируемых с квадратом модуля по мере μ:

$$B_2(D,\mu) = \{f \in Hol(D)\colon \|f\|_{D_2(D,\mu)} = \int_D |f(z)|^2\, d\mu(z)\}$$

Мера μ определяется следующим образом: $\mu \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} \mu_k$; меры μ_k определены с носителями в секторах единичного круга $D_k \stackrel{def}{=} \{z \in D\colon \frac{2\pi}{n}k \le \arg z < \frac{2\pi}{n}(k+1),\ k = \overline{0, n-1}\}$:

$$d\mu_k(re^{i\varphi}) = d\mu_k^1(r)\, d\varphi, \quad re^{i\varphi} \in D_k,$$

где $d\mu_k^1$ – некоторые неотрицательные борелевские меры на $\mathbb{R}$, $supp\, \mu_k^1 = [0,1]$, $k = \overline{0, n-1}$.


iy
C
D_1
D_0
x
D_{n-1}
D_k

Рассмотрим следующее преобразование $f \to \widehat{f}$ для функций f из пространства P:

$$\widehat{f}(\xi) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \cdot (\overline{\xi - z_0})^k \cdot ((\cdot - z_0)^k, f)_P, \quad \xi \in D(z_0, R).$$

Так как система функций $\{(z - z_0)^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в пространстве P, то можно показать, что отображение $\mathcal{T}\colon f \to \widehat{f}, \quad f \in P$ инъективно.

Пространство функций

$$Q \stackrel{def}{=} \{\widehat{f}\colon f \in P, \quad (\widehat{f},\widehat{g})_Q \stackrel{def}{=} (g,f)_P \quad \forall \widehat{f},\widehat{g} \in Q\}$$

является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Скалярное произведение в Q индуцируется скалярным произведением пространства сопряженного к пространству P.

Теорема 4

Пусть P – гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций голоморфных в круге $D(z_0, R)$. Предположим, что система функций $\{(z - z_0)^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в пространстве P, при этом найдется набор чисел $\mu_k > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ такой, что для любой последовательности вида $f_k \stackrel{def}{=} ((z - z_0)^k, f)_P$, $k = 0, 1.2, \ldots$, где f – некоторая функция из пространства P, выполнено условие $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 \mu_k < \infty$, и справедлива оценка $\|f\|_P^2 \leq C \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 \mu_k$, где C – некоторая постоянная, не зависящая от $f \in P$.

Тогда любая функция $f \in P$ может быть представлена в виде:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{(\widehat{f}, (\overline{\cdot - z_0})^k)}_Q (z - z_0)^k \cdot \mu_k \quad \forall z \in D(z_0, R). \qquad (7)$$

Замечание 1. *Оператор $\mathfrak{T}$, который действует из пространства P в пространство Q по правилу $\mathfrak{T}\colon f \mapsto \widehat{f}$, является биективным, непрерывным, антиунитарным оператором.*
Равенство (7) можно рассматривать как частный случай разложения (6) в теореме 3. В качестве Ω, в этом случае, берется множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. В качестве меры ν – следующая мера: пусть B – некоторое подмножество $\mathbb{N}$, тогда

$$\nu(B) \stackrel{def}{=} \sum_{k \in B} \mu_k.$$

Вопрос: Пусть P – пространство $B_2(D, \mu)$, где μ – радиальная в секторах D_n мера (см. выше). Каким в этом случае будет пространство Q?

Замечание 2. В силу единственности коэффициентов разложения в ряд Тейлора, из формулы (7) следуют равенства:

$$\overline{(\widehat{f}, (\overline{\cdot - z_0})^k)}_Q \cdot \mu_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Замечание 3. Набор чисел μ_k, $k = 0, 1, \ldots$ можно выбрать не единственным образом. Меняя этот набор чисел, мы изменяем пространство Q. Пусть $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ – любая последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 \mu_k < \infty$, тогда может не найтись функции $f \in P$ такой, что выполнены равенства $b_k \stackrel{def}{=} ((z - z_0)^k, f)_P$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Спасибо за внимание!