Операторы свертки в пространствах Румье ультрадифференцируемых функций нормального типа

Полякова Дарья Александровна

Южный математический институт ВНЦ РАН

Южный федеральный университет

28 октября 2026 г.

[1] Roumieu C. *Sur quelques extensions de la notion de distribution*, Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. Sér. 3. **77**:1 (1960). P. 41–121.

[2] Komatsu H. *Ultradistributions. Pt. I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokio. Sec. IA, Math. **20**:1 (1973). P. 25–105.

[3] Björck G. *Linear partial differential operators and generalized distributions*, Ark. Mat. **6** (1965). P. 351–407.

[4] Braun R. W., Meise R., Taylor B. A. *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis*, Results Math. **17** (1990). P. 206–237.

[5] Абанин А. В. *Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения*, М.: Наука, 2007. 222 с.

[6] Jimenez-Garrido J., Nenning D. N, Schindl G. *On generalized definitions of ultradifferentiable classes*, J. Math. Anal. Appl. **526** (2023). P. 127–260.

[7] Malgrange B. *Existence et approximationdes solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution*, Ann. Inst. Fourier Grenoble. **6** (1955-56). P. 271–355.

[8] Ehrenpreis L. *Solutions of some problems of division. V. Hyperbolic operators*, Am. J. Math. **84** (1962). P. 324–348.

[9] Hörmander L. *On the range of differential and convolution operators*, Ann. of Math. **76** (1962). P. 148–170.

[10] Напалков В. В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах*, М.: Наука, 1982.

[11] Коробейник Ю. Ф. *Об эпиморфизме оператора свертки в некоторых пространствах аналитических функций*, Докл. РАН, **335**:6 (1994), С. 691–693.

[12] Braun R. W., Meise R., Vogt D. *Existence of fundamental solutions and surjectivity of convolution operators on classes of ultradifferentiable functions*, Proc. London Math. Soc. **61** (1990). P. 344–370.

[13] Meise R., Taylor B. A., Vogt D. *Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions*, Indiana Univ. Math. J. **36:4** (1987). P. 729–756.

[14] Meise R., Vogt D. *Characterization of convolution operators on spaces of C^∞-functions admitting a continuous linear right inverse*, Math. Ann. **279** (1987). P. 141–155.

Определение

Весовой функцией называется непрерывная неубывающая функция $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$, удовлетворяющая условиям:

(α) $\forall p > 1 \quad \exists C > 0 \; : \; \omega(x + y) \le p\big(\omega(x) + \omega(y)\big) + C, \quad x, y \ge 0;$

(β) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt < \infty;$

(γ) $\ln t = o\big(\omega(t)\big), \quad t \to \infty;$

(δ) $\varphi_\omega(x) := \omega(e^x)$ выпукла на $[0, \infty)$.

Примеры весов

$$\omega(t) = t^\alpha\,, \; \alpha \in (0, 1)\,;$$

$$\omega(t) = \ln^\beta(e + t)\,, \; \beta > 1\,;$$

$$\omega(t) = \frac{t}{\ln^\beta(e + t)}\,, \; \beta > 1\,.$$

$\omega(z) := \omega(|z|)\,, \; z \in \mathbb{C}$; $\varphi^*_\omega(y) = \sup\{xy - \varphi_\omega(x) : x \ge 0\}$, $y \ge 0$.

Пространства Берлинга типа $p \in (0, \infty]$

$$\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R}) := \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \ : \ \forall l \in (0,\infty), \ \ \forall q \in (0,p) \quad |f|_{\omega,q,l} := \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \sup_{|x| \le l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{\exp q\varphi^*_\omega(j/q)} < \infty \Big\}$$

$\omega(t) = \ln(1+t) \Rightarrow \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$;

Пространства Румье типа $p \in [0, \infty)$

$$\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) := \big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \ : \ \forall l \in (0,\infty) \quad \exists q \in (p,\infty) \ : \ \ |f|_{\omega,q,l} < \infty \big\}$$

Топологическая структура

Пусть $E_{\omega,q,l} := \big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : |f|_{\omega,q,l} < \infty \big\}$. Тогда

$$\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R}) = \operatorname*{proj}_{l \in (0,\infty)} \operatorname*{proj}_{q \in (0,p)} E_{\omega,q,l}\,, \quad \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) = \operatorname*{proj}_{l \in (0,\infty)} \operatorname*{ind}_{q \in (p,\infty)} E_{\omega,q,l}.$$

Пространства минимального и максимального типа

$\mathcal{E}^{\infty}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ — пространство Берлинга максимального типа; $\left(n\omega\right)_{n=1}^{\infty}$;
$\mathcal{E}^{0}_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ — пространство Румье минимального типа; $\left(\frac{1}{n}\omega\right)_{n=1}^{\infty}$

Пространства нормального типа

$\mathcal{E}^{p}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}^{p}_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, $p \in (0,\infty)$, — пространства Берлинга и Румье нормального типа; $\left(p_n\omega\right)_{n=1}^{\infty}$, $p_n \uparrow\downarrow p \in (0,\infty)$

Шкала пространств

$$\mathcal{E}^{\infty}_{(\omega)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^{p}_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^{p}_{(\omega)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^{q}_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^{q}_{(\omega)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^{0}_{\{\omega\}}(\mathbb{R}), \quad q < p$$

Пробные УДФ

$$D^p_{(\omega)}(\mathbb{R}) = \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R}) \cap D(\mathbb{R}), \quad D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) = \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \cap D(\mathbb{R})$$

Ультрараспределения

$\left(D^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\right)'$ — пространство Берлинга УР, $p \in (0, \infty]$;

$\left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$ — пространство Румье УР, $p \in [0, \infty)$.

Пространства целых функций

Для $q, l \in (0, \infty)$ положим

$$H_{\omega,q,l} := \Big\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ \|f\|_{\omega,q,l} := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\big(q\omega(z) + l|\operatorname{Im} z|\big)} < \infty \Big\}.$$

Пусть

$$H^p_{(\omega)}(\mathbb{C}) := \bigcup_{l \in (0,\infty)} \bigcup_{q \in (0,p)} H_{\omega,q,l}\,, \quad H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C}) := \bigcup_{l \in (0,\infty)} \bigcap_{q \in (p,\infty)} H_{\omega,q,l}\,.$$

Изоморфизмы

Преобразование Фурье-Лапласа функционалов

$$F : \varphi \in \big(\mathcal{E}^p_\omega(\mathbb{R})\big)' \mapsto \widehat{\varphi}(z) := \varphi_x(e^{-ixz}), \ z \in \mathbb{C}\,.$$

устанавливает топологические изоморфизмы

$$\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big)'_\beta \simeq H^p_{(\omega)}(\mathbb{C}), \quad \big(\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\big)'_\beta \simeq H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})\,.$$

Мультипликаторы

Целая функция μ называется мультипликатором $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, если $\mu H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C}) \subset H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$.

1. $H^0_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ — алгебра $\Rightarrow\ M\left(H^0_{\{\omega\}}(\mathbb{C})\right) = H^0_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$
2. $p \in (0,\infty)\ \Rightarrow M\left(H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})\right) = H^0_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$

$\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$ — ЛНО в $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$

Оператор свертки с символом μ

Пусть $\mu \in M^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, $\check{\mu}(z) = \mu(-z)$, $\psi_\mu := F^{-1}(\check{\mu})$. Положим

$$T_\mu f := \psi_\mu * f\,,\ f \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\,;$$

$$(T_\mu f)(x) = \langle \psi_\mu, f(x-\cdot)\rangle\,,\ f \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Продолжающий с $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ на $\left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$ оператор свертки

$$S_\mu \nu := \psi_\mu * \nu\,,\ \nu \in \left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$$

$$T_\mu \text{ — ЛНО в } \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}),\ (T_\mu)' = \Lambda_{\check{\mu}}$$

Дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$(T_\mu f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}(x)\,, \quad a_k \in \mathbb{C}$$

Дифференциально-разностные операторы

$$(T_\mu f)(x) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{kj} f^{(k)}(x + x_j)\,,$$

где $m, n \in \mathbb{N}_0$; $a_{kj} \in \mathbb{C}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $0 \le k \le m$, $0 \le j \le n$.

Интегро-дифференциальные операторы

$$(T_\mu f)(x) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{kj} \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x + y)\varphi_j(y)\, d\lambda,$$

где $m, n \in \mathbb{N}_0$; $a_{kj} \in \mathbb{C}$, φ_j — функции из $L_1(\mathbb{R})$, равные 0 почти всюду вне $[c_j, d_j]$ $0 \le k \le m$, $0 \le j \le n$.

1. Изоморфное описание $\ker T_\mu$ (общее решение однородного уравнения $T_\mu f = 0$)

Пусть $N(\check{\mu}) = (\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$, k_s — кратность нуля λ_s. Тогда

$$x^l e^{-i\lambda_s x} \in \ker T_\mu \ (l = 0, 1, \ldots, k_s - 1)\,. \tag{1}$$

Задача заключается в построении абсолютного базиса в $\ker T_\mu$, состоящего из линейных комбинаций решений (1).

2. Сюръективность оператора T_μ (разрешимость уравнения свертки $T_\mu f = g$ в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$)

Условия на символ μ, при которых оператор T_μ действует сюръективно в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, т. е. при которых уравнение $T_\mu f = g$ разрешимо в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ при любой правой части $g \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.

3. Наличие линейного непрерывного правого обратного оператора

Условия на символ μ, при которых сюръективный оператор T_μ имеет ЛНПО или, другими словами, при которых уравнение $T_\mu f = g$ имеет решение, линейно и непрерывно зависящее от правой части.

Пространства

Пусть

$$\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}; \quad \varphi_n(z) = u_n(|z|) + v(z),\ z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

Введем следующие пространства

$$L^{\infty}_{\varphi_n}(\mathbb{C}) = \left\{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ измерима } : \|f\|_{\varphi_n} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_n(z)}} < \infty \right\},$$

$$H_{\varphi_n}(\mathbb{C}) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{\varphi_n} < \infty \right\};$$

$$L^{\infty}_{\Phi}(\mathbb{C}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} L^{\infty}_{\varphi_n}(\mathbb{C}), \quad H_{\Phi}(\mathbb{C}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{\varphi_n}(\mathbb{C}).$$

Условия на последовательности

Пусть $U = (u_n)_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая по n последовательность непрерывных неубывающих функций $u_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, причем выполнены условия:

$(\mathcal{U}_1)$ $u_n(e^x)$ выпукла на $[0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$;

$(\mathcal{U}_2)$ семейство $U = (u_n)_{n=1}^{\infty}$ равномерно ρ-устойчиво на $[0, \infty)$, т. е. существует $C_0 > 0$ такое, что

$$|u_n(t) - u_n(s)| \leq C_0 \text{ для всех } t, s \in [0, \infty) \text{ с } |t - s| \leq \rho(t)\,,\ n \in \mathbb{N}\,;$$

$(\mathcal{U}_3)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеется $D_n > 0$, при котором

$$u_{n+1}(t) + \ln \frac{1 + t^2}{\rho(t)} \leq u_n(t) + D_n\,,\ t \geq 0\,.$$

Далее, пусть функция $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ обладает свойствами

$(\mathcal{V}_1)$ v субгармонична в $\mathbb{C}$;

$(\mathcal{V}_2)$ v ρ-устойчива в $\mathbb{C}$.

Здесь ρ — регулярная функция расстояния.

Теорема 1

Если Φ — проективная весовая последовательность указанного вида, удовлетворяющая условиям $(\mathcal{U}_1) - (\mathcal{U}_3)$ и $(\mathcal{V}_1) - (\mathcal{V}_2)$, то
1) неоднородное уравнение Коши-Римана $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g$ имеет решение в $L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$ при любой правой части $g \in L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$;
2) проективный предел $H_\Phi(\mathbb{C})$ является слабо приведенным, т. е. для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $H_\Phi(\mathbb{C})$ плотно в $H_{\varphi_m}(\mathbb{C})$ по норме $\|\cdot\|_{\varphi_n}$.

[15] Епифанов О. В. *О разрешимости неоднородного уравнения Коши-Римана в классах функций, ограниченных с весом и системой весов*, Матем. заметки. **51:1** (1992). С. 83–92.

Медленное убывание символа μ относительно ω в нормальном смысле (для пространств нормального типа)

Будем говорить, что символ μ медленно убывает относительно ω в нормальном смысле, если

$$(SC) \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists r_0 > 0 \,|\, \forall x \in \mathbb{R} \text{ с } |x| \geq r_0 \ \ \exists t \in \mathbb{R} \text{ с } |t| > |x| : \\ |t - x| \leq \delta\omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(t)| \geq \exp\{-\varepsilon\omega(t)\}\,.$$

Медленное убывание у Эренпрайса (для пространства $C^\infty(\mathbb{R})$

$$\exists A > 0 \,|\, \forall x \in \mathbb{R} \ \ \exists y \in \mathbb{R} : \ |y - x| \leq A\ln(1 + |x|) \text{ и } |\mu(y)| \geq e^{-A\ln(A+|y|)}\,.$$

Медленное убывание у Майзе-Тейлора-Фогта (для пространств Берлинга максимального типа)

$$\exists A > 0 \,|\, \forall x \in \mathbb{R} \ \ \exists t \in \mathbb{R} : |t - x| \leq A\omega(x) \text{ и } |\mu(t)| \geq e^{-A\omega(t)}\,.$$

Описание $\ker T_\mu$

Пусть символ μ удовлетворяет условию (SC); (λ_s) — нули μ; k_s — кратность нуля λ_s. На основании условия (SC) строится специальное открытое покрытие $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ нулевого множества символа μ: на ∂U_j для $|\mu|$ должны выполняться подходящие оценки снизу.

Пусть последовательности $(\alpha_s)_{s=1}^{\infty}$ и $(\beta_s)_{s=1}^{\infty}$ получены из $\left(\omega(\operatorname{Re}\lambda_j)\right)_{j=1}^{\infty}$ и $\left(|\operatorname{Im}\lambda_j|\right)_{j=1}^{\infty}$ повторением k_j раз элемента $\omega(\operatorname{Re}\lambda_j)$ и, соответственно, $|\operatorname{Im}\lambda_j|$.

Теорема 2

1) В $\ker T_\mu$ имеется абсолютный базис, состоящий из линейных комбинаций элеентарных решений $(-ix)^l e^{-i\lambda_s x}$, $l = 0, \dots, k_j - 1$, соответствующих нулям λ_j, попавшим в одно и то же множество U_j.
2) Имеется топологический изоморфизм

$$\ker T_\mu \simeq \Lambda(\alpha,\beta) := \Big\{x = (x_s)_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \,\Big|\, \forall l \in (0,\infty)\ \ \exists q \in (p,\infty)\ : \\ |x|^0_{\omega,q,l} := \sum_{s=1}^{\infty} |x_s| \exp\left\{q\alpha_s + l\beta_s\right\} < \infty\Big\}.$$

[16] Полякова Д. А. *Описание ядра оператора свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Румье* Владикавк. матем. журн. **26**:3 (2024), С. 72-–85.

Теорема 3

Пусть ω — весовая функция, $p \in (0, \infty)$, $\mu \in H^0_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. Для того чтобы оператор T_μ был сюръективен на $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:
(a) символ μ медленно убывает относительно ω в нормальном смысле;
(b) нулевое множество символа допускает представление $N(\mu) = N_1 \bigcup N_2$:

$$(NS) \lim_{j\to\infty, \lambda_j \in N_1} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_j|}{\omega(\operatorname{Re} \lambda_j)} = 0; \quad \liminf_{j\to\infty, \lambda_j \in N_2} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_j|}{\omega(\operatorname{Re} \lambda_j)} > 0\,.$$

[17] Полякова Д. А. *Сюръективность операторов свертки в пространствах Румье ультрадифференцируемых функций и ультрараспределений нормального типа*, Алгебра и анализ. **37**:6 (2025). 158–183.

Схема доказательства

1. Локальная сюръективность T_μ $\Leftrightarrow$ Сюръективность S_μ $\Leftrightarrow$ (a)

2. Теория проективных спектров Паламодова-Фогта:

$$T_\mu \text{ сюръективен} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Proj}^1 \mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Proj}^1 \Lambda(\alpha, \beta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (b)$$

Сравнение со случаем пространств Берлинга

Для того чтобы оператор свертки T_μ был сюръективен на пространстве Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ нормального типа $p \in (0, \infty)$, необходимо и достаточно,чтобы выполнялось условие (a) медленного убывания символа в нормальном смысле.

Оператор S_μ исследуется отдельно.

Описание $\ker T_\mu$ не нужно для решения задачи о сюръективности.

Теорема 4

Пусть ω — весовая функция, $p \in (0, \infty)$, $\mu \in M^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ — символ сюръективного оператора свертки T_μ, $N(\mu) = (\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$ — его нулевое множество. Следующие утверждения эквивалентны:

(A) уравнение $T_\mu f = g$ всегда имеет решение, линейно и непрерывно зависящее от правой части;

(B) $\ker T_\mu$ дополнимо в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$;

(C) главный идеал $\mu H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ дополним в $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$;

(D) T_μ имеет фундаментальные решения $\nu_\pm$ в $\left(D^0_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$ такие, что $\operatorname{supp} \nu_+ \subset [a, +\infty)$ и $\operatorname{supp} \nu_- \subset (-\infty, b]$ при некоторых $a, b \in \mathbb{R}$;

(E) $\lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{|\operatorname{Im} \lambda_s|}{\omega(\lambda_s)} = 0.$

Необходимость

Если T_μ имеет ЛНПО, то в $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ имеется семейство функций $(g_s)_{s=1}^\infty$ такое, что $g_s(\lambda_s) = 1$, $s \in \mathbb{N}$, и что справедливо утверждение:

$$\forall l \in (0,\infty)\ \ \exists l_1 \in (0,\infty)\,|\,\forall q_1 \in (p,\infty)\ \ \exists q \in (p,\infty)\ \ \exists C > 0\ :$$
$$\ln|g_s(z)| + q\omega(\operatorname{Re}\lambda_s) + l|\operatorname{Im}\lambda_s| \le q_1\omega(\operatorname{Re} z) + l_1|\operatorname{Im} z| + C\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ s \in \mathbb{N}\,.$$

На основании данного условия устанавливается справедливость (E).

Достаточность

На основании условия (D) ЛНПО строится явно:

$$E(f) := \nu_+ * (\chi f) + \nu_- * \big((1-\chi)f\big)\,,\ f \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\,.$$

Здесь χ — специальная срезающая функция.

Пример 1

Пусть ω — произвольный неквазианалитический вес, $\mu(z) := \sin z$. Тогда

$$(T_\mu f)(x) = \frac{1}{2i}\big(f(x+1) - f(x-1)\big)\,.$$

Соответствующее разностное уравнение

$$\frac{1}{2i}\big(f(x+1) - f(x-1)\big) = g. \tag{2}$$

Нули символа все простые, действительные, расположены далеко друг от друга. Символ медленно убывает в нормальном смысле, группировать нули не нужно. Следовательно,
1) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-i\pi n x}$ — общее решение однородного уравнения $T_\mu f = 0$ (ряд сходится абсолютно в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$);
2) уравнение (2) разрешимо в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ при любой правой части $g \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ и всегда имеет решение, линейно и непрерывно зависящее от правой части.

Пример 2

Пусть $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, где $\rho(t) \to \rho \in (0,1)$ — некоторый уточненный порядок. Предположим, что последовательность $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$, $|\lambda_s| \uparrow \infty \subset \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям:

1. $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{s}{|\lambda_s|^{\rho(|\lambda_s|)}} = 0$;
2. точки λ_s лежат внутри углов с общей вершиной в начале; причем, если перенумеровать точки (λ_s) внутри каждого из углов по возрастанию модулей, то для точек внутри одного угла будет выполняться оценка $|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k| > d|\lambda_k|^{1-\rho(|\lambda_k|)}$ при некотором $d > 0$.

В качестве символа возьмем функцию

$$\mu(z) = \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_s}\right).$$

Пример 2

1) Функция μ будет символом оператора свертки T_μ (дифференциального оператора бесконечного порядка с постоянными коэффициентами), будет медленно убывать относительно ω в нормальном смысле. Соответственно, оператор T_μ будет сюръективен на всех пространствах Берлинга нормального типа.

2) Нули символа достаточно далеко друг от друга, так что группировать не нужно. Абсолютный базис в ядре будут образовывать сами элементарные решения.

3) В пространствах Румье в зависимости от расположения точек λ_s оператор T_μ может быть как сюръективным, так и не сюръективным.

4) В случае сюръективности может как иметь ЛНПО, так и не иметь (в частности, имеет при чисто действительных нулях и не имеет при чисто мнимых).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!