ПОЛНОТА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ НА КОМПАКТАХ

Булат Нурмиевич Хабибуллин

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук
Уфа, Башкортостан, Российская Федерация

15:45 – 16:25, 29 октября 2026 г. Уфа, дистанционный формат
Встреча-семинар по комплексному анализу и теории операторов, посвященная памяти д.ф.-м.н., проф. Коробейника Ю. Ф. и д.ф.-м.н., проф., чл.-корр. РАН Напалкова В. В.

Распределение точек, кратность точки, экспоненциальная система, распределение показателей

Функция $\Lambda\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Z}}^+ := \{0, 1, 2, \dots, +\infty\}$ — это распределение точек (=функция кратности=дивизор) на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с кратностями $\Lambda(z)$ в точках $z \in \mathbb{C}$, со считающей радиальной и считающей усреднённой радиальной функцией соответственно

$$\Lambda^{\mathbf{r}}(t) := \sum_{|z|\leqslant t} \Lambda(z) \quad \text{и} \quad \Lambda^{\mathbf{r}\,\circ}(r) := \int_0^r \frac{\Lambda^{\mathbf{r}}(t)}{t} dt.$$

Распределению точек Λ сопоставляется экспоненциальная система

$$\operatorname{Exp}^{\Lambda} := \left\{ z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} z^p \exp(\lambda z) \;\middle|\; \Lambda(\lambda) > p \in \mathbb{Z}^+ := \{0, 1, 2, \dots\} \right\} \qquad (1)$$

с распределением показателей Λ.

Пространства, которые мы выбираем, и полнота

Для ограниченного в $\mathbb{C}$ подмножества S через $\overline{\mathrm{Pol}}(S)$ обозначаем пополнение кольца многочленов в топологии равномерной сходимости на компактах $K \subset S$ с sup-нормой $\|f\| := \sup\limits_{z\in K} |f(z)|$.

Система векторов из топологического векторного пространства полна, если замыкание её линейной оболочки даёт пространство.

ЗАДАЧА. При каких Λ и S система Exp^{Λ} полна в $\overline{\mathrm{Pol}}(S)$?

Если S — компакт и $\mathbb{C} \setminus S$ связно, то $\overline{\mathrm{Pol}}(S)$ — банахова алгебра, состоящая из всех непрерывных на S функций, голоморфных во внутренности компакта S, если она непуста, с sup-нормой $\|f\|_S$.

Если S — односвязная область, то $\overline{\mathrm{Pol}}(S)$ — все голоморфные на S функций с топологией равномерной сходимости на компактах.

Из результатов о полноте в $\overline{\mathrm{Pol}}(S)$ можно извлечь условия полноты и для других пространств функций, например, с интегрируемым модулем в степени, пространствах Смирнова, или других систем в различных метриках или топологиях и т.д., когда топологии в них мажорируется топологией равномерной сходимости на компактах.

Функционально-аналитический подход

Определение

Для подмножества $S \subset \mathbb{C}$ её опорная функция

$$\mathfrak{s}_S : \theta \underset{\theta\in\mathbb{R}}{\longmapsto} \sup\left\{ \operatorname{Re} s e^{-i\theta} \;\middle|\; s \in S \right\} \tag{2}$$

2π-периодическая на действительной прямой $\mathbb{R}$ со значениями в расширенной действительной прямой $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ и равна опорной функции $\mathfrak{s}_{\mathsf{co}\, S}$ выпуклой оболочки $\mathsf{co}\, S$ множества S.

Опорная функция множества S конечна, т.е. $\mathfrak{s}_S(S) \subset \mathbb{R}$, тогда и только тогда, когда множество S ограничено в $\mathbb{C}$.
При этом опорная функция $\mathfrak{s}_S$ равна расстоянию от нуля до опорной прямой, ортогональной направлению радиус-вектора точки $e^{i\theta} \in \mathbb{C}$, которое выбирается со знаком $+$, если опорной прямая и точка $e^{i\theta}$ находятся по одну сторону от нуля, и со знаком $-$ в противном случае.

Условия полноты в терминах целых функций

Пусть $S \neq \emptyset$ ограничено в $\mathbb{C}$. Если любая целая функция $f \in \overline{\mathrm{Pol}}(\mathbb{C})$, обращающаяся в нуль на Λ, т.е. с кратностью корня функции f в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ не меньше кратности $\Lambda(z)$, при условии

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(\mathfrak{s}_S(-\arg z)|z|)} < +\infty, \tag{3}$$

нулевая, то система Exp^{Λ} полна в пространстве $\overline{\mathrm{Pol}}(S)$.
Обратно, если найдётся ненулевая целая функция $f \neq 0$, обращающаяся в нуль на Λ с ограничением (3) для выпуклого компакта $S \subset \mathbb{C}$, то для любого распределения точек $\Lambda_- \leqslant \Lambda$ и условием $\limsup\limits_{t\to+\infty}(\Lambda^{\mathfrak{r}}_-(t) - \Lambda^{\mathfrak{r}}(t)) \leqslant -2$ система Exp^{Λ_-} не полна в пространстве $\overline{\mathrm{Pol}}(S)$, но если S — выпуклый многоугольник, то последнее условие можно ослабить до $\limsup\limits_{t\to+\infty}(\Lambda^{\mathfrak{r}}_-(t) - \Lambda^{\mathfrak{r}}(t)) \leqslant -1$.

На этой основе далее по полноте использованы результаты статьи Хабибуллин Б.Н., “Распределение корней целых функций с субгармонической мажорантой”, Матем. сб., 216:7 (2025), 109–152

Радиальные условия полноты в терминах периметра

Теорема (Элементарное следствие одной теоремы Д. Пойа и формулы Пуассона – Йенсена – Привалова с уточнением ХБН для компакта S.)

$$\text{Если } \Lambda(0) = 0 \text{ и } \quad \sup_{r \geqslant 0} \left(\pi \Lambda^{\mathfrak{r}\,\circ}(r) - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathfrak{s}_S(\theta) \mathrm{d}\theta}_{\text{полупериметр } \operatorname{co} S} \cdot r \right) = +\infty, \qquad (4)$$

то система $\operatorname{Exp}^{\Lambda}$ полна в $\overline{\operatorname{Pol}}(S)$.

Далее $\mathbb{D} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$ и $\overline{\mathbb{D}} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1 \}$.

Теорема (Хабибуллин Б.Н., О типе целых и мероморфных функций // Матем. сб., 183:11 (1992), 35–44)

При $R < \limsup\limits_{r \to +\infty} \dfrac{\Lambda^{\mathfrak{r}\,\circ}(r)}{r}$ система $\operatorname{Exp}^{\Lambda}$ полна в $\overline{\operatorname{Pol}}(R\overline{\mathbb{D}})$, но не полна в нём при $R > \pi \limsup\limits_{r \to +\infty} \dfrac{\Lambda^{\mathfrak{r}\,\circ}(r)}{r}$. Результат точный.

Субфункции на промежутке (по паре функций)(G. Valiron [1932], E. Beckenbach [1937], M. M. Peixoto [1948], J. W. Green [1953], И. И. Ибрагимов [1971], А. И. Хейфиц [1981], Р.Р. Мурясов, ХБН [2022–25])

Определение

Пусть I — промежуток в $\mathbb{R}$, а $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ — пара функции. Функцию $F\colon I \to \mathbb{R}$ называем $\langle f, g\rangle$-выпуклой, если для каждой точки $x_0 \in I$ существует такой промежуток $I_{x_0} \ni x_0$, что из

$$\begin{cases} F(x_1) \leqslant c_1 f(x_1) + c_2 g(x_1) \\ F(x_2) \leqslant c_1 f(x_2) + c_2 g(x_2) \end{cases} \quad \text{для } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ и } x_1, x_2 \in I_{x_0},\ x_1 < x_2$$

следует

$$F(x) \leqslant c_1 f(x) + c_2 g(x) \quad \text{для каждой точки } x \in (x_1, x_2).$$

Примеры

1. Если $I = \mathbb{R}$, $f \equiv 1$ и $g(x) \equiv x$, то $\langle 1, x\rangle$-выпуклость — это обычная выпуклость.
2. Если $I = \mathbb{R}^+ \setminus 0$, $f \equiv 1$ и $g(x) \equiv \ln x$, то $\langle 1, \ln\rangle$-выпуклость — это выпуклость относительно логарифма $\ln$, кратко $\ln$-выпуклость.
3. Если $I = \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \equiv \cos px$ и $g(x) \equiv \sin px$, то $\langle \cos px, \sin px\rangle$-выпуклость — это p-тригонометрическая выпуклость. Опорная функция $\mathfrak{s}_S$ — всегда 1-тригонометрически выпуклая.
4. Если $I = \mathbb{R}^+ \setminus 0$, $p \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \equiv e^{px}$ и $g(x) \equiv e^{-px}$, то $\langle e^{px}, e^{-px}\rangle$-выпуклость — это p-гиперболическая выпуклость.
5. Если $I = \mathbb{R}^+ \setminus 0$, $p \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \equiv x^p$ и $g(x) \equiv x^{-p}$, то $\langle x^p, x^{-p}\rangle$-выпуклость — это p-степенная выпуклость в нашей терминологии. По определению 0-степенная выпуклость — это $\ln$-выпуклость.

При $1 \neq p \in \mathbb{R}^+$ элементарные p-выпуклые множества в направлении 0 с вершиной $a \in \mathbb{R}^+$ определяются как

$$K_p(a) \underset{a\in\mathbb{R}^+}{:=} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \text{если } |\operatorname{Arg} z| < \pi \min\left\{1, \frac{1}{2p}\right\}, \text{ то } \operatorname{Re} z^p \leqslant a \right\}. \quad (5)$$

К примеру, $K_0(a)$ — замкнутый круг $a\overline{\mathbb{D}}$. При $p = 1$ элементарные 1-выпуклые множества $K_1(a)$ — всевозможные полуплоскости $= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leqslant a\}$, где $a \in \mathbb{R}$ в отличие от элементарных p-выпуклых множеств $K_p(a)$ для случаев $1 \neq p \in \mathbb{R}^+$, когда рассматриваются лишь положительные $a \in \mathbb{R}^+$.

(i) замкнуты и зеркально симметричны относительно $\mathbb{R}$;

(ii) при $a > 0$ содержат во внутренности точку $0 \in \mathbb{C}$, а при дополнительном условии $p \geqslant \frac{1}{2}$ и угол $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\operatorname{Arg} z| \geqslant \frac{\pi}{2p}\right\}$;

(iii) ограничены тогда и только тогда, когда $p < \frac{1}{2}$;

(iv) при $0 \leqslant p \leqslant 1$ каждое множество $K_p(a)$ выпукло;

(v) при $p \geqslant 1$ выпукло дополнение $\mathbb{C} \setminus K_p(a)$ множества $K_p(a)$.

p-выпуклая оболочка множества

Для произвольного подмножества $T \subset \mathbb{C}$, для которого при $p \neq 1$ требуем $0 \in \overline{T}$, определяется его замкнутая p-выпуклая оболочка

$$p\text{-}\mathsf{co}\, T := \bigcap \left\{ e^{i\theta} K_p(a) \;\middle|\; T \subset e^{i\theta} K_p(a),\ \theta \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+ \right\}, \tag{6}$$

а также, развивая (2), 2π-периодическая p-опорная функция

$$p\text{-}\mathfrak{s}_T \colon \theta \underset{\theta \in \mathbb{R}}{\longmapsto} \mathsf{inf} \left\{ a \in \mathbb{R}^+ \;\middle|\; e^{-i\theta} T \subset K_p(a) \right\} = \sup_{z \in T} \mathsf{Re}(z e^{-i\theta})^p, \tag{7}$$

— p-тригонометрически выпуклая и положительная при $p \neq 1$.
При $p = 1$ это просто выпуклая оболочка $1\text{-}\mathsf{co}\, T := \mathsf{co}\, T$.

По подмножеству $\mathrm{T} \subset \mathbb{C}$ со свойствами

$$\{0\} \neq \mathrm{T} \cup \{0\} \subseteq \overline{\mathrm{T}} \subset \mathbb{C} \tag{8}$$

считающую p-радиально-угловую функцию распределения точек Λ на $\mathbb{C}$ по множеству T определяем как функцию

$$\Lambda^{\mathfrak{ra}_{\mathrm{p}}(\mathrm{T})} \colon \mathrm{t} \underset{|\mathrm{z}|\leqslant \mathrm{t}}{\longmapsto} \sum_{|\mathrm{z}|\leqslant \mathrm{t}} \Lambda(\mathrm{z})\, \mathrm{p}\text{-}\mathfrak{s}_{\mathrm{T}}(\arg \mathrm{z}) \in \overline{\mathbb{R}}^{+}, \tag{9}$$

где при $\mathrm{z} = 0$ полагаем по определению $\arg 0 := \mathbb{R}$ и $\mathrm{p}\text{-}\mathfrak{s}_{\mathrm{T}}(\arg 0) := \sup_{\mathrm{z}\in\mathrm{T}} |\mathrm{z}| = \| \mathfrak{s}_{\mathrm{T}} \|_{\mathbb{R}}$ — наименьший радиус круга с центром в нуле, содержащего T со свойствами (8). Из свойств (i)–(v)

$$\Lambda^{\mathfrak{ra}_{\mathrm{p}}(\mathrm{T})} \geqslant \Lambda^{\mathfrak{ra}_{\mathrm{q}}(\mathrm{T})} \quad \text{при любых } \mathrm{p} \leqslant \mathrm{q} \in \mathbb{R}^{+}. \tag{10}$$

Смешение площадей

Сумма Минковского пары подмножеств $T \subseteq \mathbb{C}$ и $S \subseteq \mathbb{C}$ определяется как $T + S := \{t + s \mid t \in T, s \in S\}$.
Для $p \in \mathbb{R}^+$ и упорядоченной пары (T, S) подмножеств $T \subset \mathbb{C}$ со свойствами (8) и $S \subset \mathbb{C}$, ограниченного в $\mathbb{C}$, определяемую через евклидову площадь area положительную величину

$$p\text{-}\mathsf{area}(T, S) := \frac{1}{2}\Big(\mathsf{area}(p\text{-}\mathsf{co}\, T + \mathsf{co}\, S) - \mathsf{area}(p\text{-}\mathsf{co}\, T) - \mathsf{area}(\mathsf{co}\, S)\Big)$$

называем смешением площадей p-выпуклой оболочки $p\text{-}\mathsf{co}\, T$ ограниченного подмножества T и выпуклой оболочки $\mathsf{co}\, S$ ограниченного множества S.
Через $p\text{-}\mathsf{pwc}_1^{+\downarrow}(0, R)$ обозначаем класс всех положительных убывающих p-степенно выпуклых функций на $(0, R)$ и нормировкой

$$\limsup_{0<t\to 0} t^p F(t) \underset{p>0}{=} 1, \quad \limsup_{0<t\to 0} \frac{F(t)}{\ln(1/t)} \underset{p:=0}{=} 1. \tag{11}$$

Основная теорема

Пусть Λ — распределение точек на $\mathbb{C}$ с $\Lambda(0) = 0$, $S \subset \mathbb{C}$ — компакт, а $\mathfrak{s}_{\bar{S}}$ — опорная функция компакта $\bar{S}$, сопряжённого к S.

$$\sup_{0<r<R<+\infty} \frac{1}{1+r} \sup\left\{ r^p \int_r^R \left(\Lambda^{\mathfrak{ra}_p(T)}(t) - \frac{p\text{-area}(T,\bar{S})}{\pi} t \right) \frac{-F'_{\text{пр}}(t)}{\check{p} \cdot 0\text{-}\mathfrak{s}_T} \, dt \right| \{0\} \neq T \cup \{0\} \subset \overline{T} \overset{(8)}{\subset} \mathbb{C},\ p \in [0,1],\ F \in p\text{-pwc}_1^{+\downarrow}(0,R) \right\} = +\infty, \quad (12)$$

где $p\text{-area}(T,\bar{S})$ — смешанная площадь Г. Минковского выпуклых компактов $p\text{-co}\,T$ и $\text{co}\,\bar{S}$, а число $\check{p} := \begin{cases} 2p & \text{при } p > 0 \\ 1 & \text{при } p = 0 \end{cases}$.

Тогда система Exp^Λ полна в пространстве $\overline{\text{Pol}}(S)$.

Периметр (Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Геометрические неравенства, 1980, «Наука» Ленинград. отд., Ленинград)

Для area-измеримого подмножества $S \subset \mathbb{C}$ его внешний периметр $\mathsf{prm}(S)$ определяем как величину

$$\mathsf{prm}(S) := \liminf_{0<r\to 0} \frac{\mathsf{area}\left(S + r\overline{\mathbb{D}}\right) - \mathsf{area}(S)}{r}, \tag{13}$$

которую иначе можно назвать и внешней длиной по Минковскому границы ∂S множества S. Периметр $\mathsf{prm}(S)$ области со спрямляемой границей и выпуклого компакта с непустой внутренностью — это длина их границы, а периметр отрезка или спрямляемой дуги на плоскости — их удвоенная длина. В геометрии чаще встречается иное определение периметра по Каччиополи и Де Джоджи как некоего внутреннего периметра такого множества S. Этот внутренний периметр не превышает $\mathsf{prm}(S)$, для отрезка или спрямляемой дуги всегда равен нулю, а для непустой области S с жордановой спрямляемой границей или замыкания такой области совпадает с внешним периметром $\mathsf{prm}(S)$.

Теорема о полноте в терминах периметра

Теорема

Пусть Λ — распределение точек на $\mathbb{C}$ с $\Lambda(0) = 0$ и для некоторого числа $P \in \mathbb{R}^+$ имеет место равенство

$$\sup_{0<r<R<+\infty} \frac{1}{1+r} \sup\left\{ r^p \int_r^R \left(\Lambda^{\mathbf{ra}(z+\mathbb{D})}(t) - \frac{P}{2\pi} t \right) \frac{-F'_{\text{пр}}(t)}{\check{p}} dt \right| \\ z \in \overline{\mathbb{D}},\ 1 \geqslant p \geqslant \sqrt{\frac{|z|}{1+|z|}},\ F \in p\text{-}\mathsf{pwc}_1^{+\downarrow}(0,R) \Bigg\} = +\infty. \quad (14)$$

Тогда для любого компакта $S \subset \mathbb{C}$ с периметром выпуклой оболочки $\mathsf{prm}(\mathsf{co}\, S) \leqslant P$ система Exp^Λ полна в $\overline{\mathrm{Pol}}(S)$.

Замечание

Ограничение $\mathsf{prm}(\mathsf{co}\, S) \leqslant P$ в теореме тем более можно заменить на $\mathsf{prm}(S) \leqslant P$, поскольку всегда $\mathsf{prm}(\mathsf{co}\, S) \leqslant \mathsf{prm}(S)$.

Теорема о полноте в терминах площади

Теорема

Пусть Λ — распределение точек на $\mathbb{C}$ с $\Lambda(0) = 0$, $0 \in S = \overline{S} \subset \mathbb{C}$ и

$$\sup_{0<r<R<+\infty} \frac{1}{1+r} \sup\left\{ r^p \int_r^R \left(Z^{\mathfrak{ra}(p\text{-co}\,\bar{S})}(t) - \frac{\mathsf{area}(p\text{-co}\,S)}{\pi} t \right) \frac{-F'_{\text{пр}}(t)}{\check{p}} dt \right| p \in [0,1], \quad F \in p\text{-}\mathsf{pwc}_1^{+\downarrow}(0,R) \Bigg\} = +\infty. \quad (15)$$

Тогда система Exp^{Λ} полна в пространстве $\overline{\mathrm{Pol}}(S)$.

Очень частный случай теоремы о полноте в терминах периметра был установлен в нашей совместной работе
Б.Н. Хабибуллин, Е. Г. Кудашева, Р. Р. Мурясов, “Полнота экспоненциальных систем в пространствах функций в терминах периметра”, Материалы Воронежской международной зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы», Воронеж, 27 января — 1 февраля 2023 г. Часть 1, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 227, ВИНИТИ РАН, М., 2023, 79–91
Очень частный случай теоремы о полноте в терминах площади был установлен в нашей совместной работе
Б. Н. Хабибуллин, Е. Г. Кудашева, “Полнота экспоненциальных систем в пространствах функций в терминах площади”, Материалы Воронежской международной весенней математической школы «Современные методы краевых задач. Понтрягинские чтения—XXXIV», Воронеж, 3-9 мая 2023 г. Часть 4, Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 233, ВИНИТИ РАН, М., 2024, 107–117

К ширине множества в направлении, толщине (широте), диаметру

Для подмножества $S \subset \mathbb{C}$ и направлений $\theta \in \mathbb{R}$ ширина $\mathrm{brd}_S(\theta)$ подмножества S в направлениях $\theta \in \mathbb{R}$ может быть определена как расстояние между двумя опорными прямыми к S в противоположных направлениях θ и $\theta + \pi$, или как диаметр ортогональной проекции S на прямую $e^{i\theta}\mathbb{R}$. Толщиной, или широтой, $\mathrm{wid}(S)$ множества S называется наименьшее значение его ширины по всем направлениям, а диаметр $\mathrm{diam}(S)$ — наибольшее значение его ширины по всем направлениям. Для всех этих геометрических характеристик нами установлены в 2023–25 гг. результаты о полноте экспоненциальных систем $\mathrm{Exp}^{\wedge}$ на уровне критериев. При этом существенно используются как основная теорема, приведённая выше, так и результаты из ХБН, “Распределения корней и масс целых и субгармонических функций с ограничениями на их рост вдоль полосы”, Изв. РАН. Сер. матем., 88:1 (2024), 141–202

Логарифмическая субмера промежутков с весом

Для распределения точек Λ на $\mathbb{C}$ со считающими 1-радиально-угловыми функциями по отрезкам $[0,1]$ и $[-1,0]$

$$\Lambda^{\mathbf{ra}([0,1])}(t) = \Lambda(0) + \sum_{0<|z|\leqslant t} \operatorname{Re}^+ \frac{\Lambda(z)}{z}, \quad \operatorname{Re}^+ := \sup\{0, \operatorname{Re}\}$$

$$\Lambda^{\mathbf{ra}([-1,0])}(t) = \Lambda(0) + \sum_{0<|z|\leqslant t} \operatorname{Re}^- \frac{\Lambda(z)}{z}, \quad \operatorname{Re}^- := (-\operatorname{Re})^+$$

по функции $g\colon [r_0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ рассматриваем логарифмическую субмеру промежутков $(r, R] \subset [r_0, +\infty)$ с весом g

$$\ell^g_\Lambda(r, R) := \max\left\{ \int_r^R \frac{\Lambda^{\mathbf{ra}([0,1])}(t)}{t} \frac{g(t^2)}{t}\, dt, \int_r^R \frac{\Lambda^{\mathbf{ra}([-1,0])}(t)}{t} \frac{g(t^2)}{t}\, dt \right\}.$$

При $g = 1$ верхний индекс 1 в определении $\ell^1_\Lambda =: \ell_\Lambda$ не пишем.

Теорема

Пусть $b \in \mathbb{R}^+$ и Λ — распределение точек на $\mathbb{C}$ конечной внешней плотности Редхеффера в какой-нибудь паре вертикальных углов раствора > 0 с биссектрисой $e^{i\theta}\mathbb{R}$. Тогда равносильны следующие пять утверждения:

I. Для любого компакта S ширины $\operatorname{brd}_S(\theta) \leqslant b$ система $\operatorname{Exp}^\Lambda$ полна в $\overline{\operatorname{Pol}}(S)$.

II. $\sup\limits_{r_0 \leqslant r < R < +\infty} \left(\ell^g_{\Lambda^{\circlearrowleft}(\frac{\pi}{2}-\theta)}(r,R) - \dfrac{b}{2\pi} \displaystyle\int_r^R \dfrac{g(t^2)}{t}\,dt \right) = +\infty$, для некоторых числа $r_0 > 0$ и выпуклой положительной ограниченной функции g на $[r_0, +\infty)$.

III $\sup\limits_{r_0 \leqslant r < R < +\infty} \left(\ell_{\Lambda^{\circlearrowleft}(\frac{\pi}{2}-\theta)}(r,R) - \dfrac{b}{2\pi} \ln \dfrac{R}{r} \right) = +\infty$ для некоторого числа $r_0 > 0$.

IV $\limsup\limits_{N \to +\infty} \sup\limits_{n < N \in \mathbb{N}} \left(\ell_{\Lambda^{\circlearrowleft}(\frac{\pi}{2}-\theta)}(e^n, e^N) - \dfrac{b}{2\pi}(N-n) \right) = +\infty.$

V. Система $\operatorname{Exp}^\Lambda$ полна в пространстве $\overline{\operatorname{Pol}}(e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}\overline{\operatorname{strip}}_{\frac{b}{2}})$ в топологии равномерной сходимости на компактах, где $\overline{\operatorname{strip}}_{\frac{b}{2}} := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\operatorname{Im} z| \leqslant \frac{b}{2} \right\}$ — «горизонтальная» замкнутая полоса толщины b.

Комментарии к критерию и перспективы

- Значительная часть этого критерия имеется в совместной работе
  Б. Н. Хабибуллин, Е. Г. Кудашева, А. Е. Салимова, “Критерии полноты экспоненциальной системы в геометрических терминах ширины в направлении”, Дифференциальные уравнения и математическая физика, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 225, ВИНИТИ РАН, М., 2023, 150–159
  Возможно добавление ещё трёх эквивалентных пунктов в критерий.
- Аналогичные результаты имеются в терминах толщины $\operatorname{wid}(S)$ и диаметра $\operatorname{diam}(S)$, радиусов описанного и вписанного круга для S, других «усреднённых» геометрических характеристик S.
- Остались неотражёнными условия полноты в терминах целой функции f_Λ с распределением корней $= \Lambda$, что представляет особый интерес для спектральной теории операторов.
- В той или иной мере, но с некоторой потерей геометризации, результаты переносятся на полноту общих параметризованных систем целых или голоморфных функций, что ещё более актуально для спектральной теории операторов.
- В силу определённой равномерности используемых оценок результаты можно перенести на пространства функций нескольких комплексных переменных.

Где проделано что-то прямо или косвенно по последним трём пунктам в начальном варианте?

Можно упомянуть монографии
Ибрагимов И.И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения, М.: Наука, 1971
А. Ф. Леонтьев, Последовательности полиномов из экспонент, Наука, М., 1980
А. Ф. Леонтьев, Обобщения рядов экспонент, Наука, М., 1981
Хабибуллин Б.Н., Полнота систем экспонент
и множества единственности, 4-е изд., доп., РИЦ БашГУ, г. Уфа, 2012
https://matem.anrb.ru/sites/default/files/userfiles/u35721/expkhbn.pdf
и статью
Хабибуллин Б.Н., Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций // Матем. заметки, 66:4 (1999), 603–616

Большое спасибо за Ваше внимание!