Оценки производных целых функций экспоненциального типа при ограничении на рост вдоль вещественной оси

Шерстюков Владимир Борисович

МГУ имени М. В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Воркшоп по комплексному анализу и теории операторов,
посвященный памяти
д.ф.-м.н., профессора Коробейника Ю. Ф.
и д.ф.-м.н., профессора, чл.-корр. РАН Напалкова В. В.

28–29 октября 2026 г.

Задача Коши

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \qquad u(x,0) = f(x).$$

Здесь $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty)$ или $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T],\ T > 0.$

Решение задачи Коши (при $t > 0$ и некоторых ограничениях) даёт **интегральная формула Пуассона**

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4t}\right) f(s)\, ds.$$

Тихонов А. Н., Самарский А. А.
Уравнения математической физики. Учеб. пособие. Изд-во МГУ. М. 1999.

Теория теплопроводности

Задача Коши

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \qquad u(x,0) = f(x).$$

Формула Ковалевской

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} f^{(2n)}(x).$$

Для использования формулы требуется бесконечная дифференцируемость функции $f(x)$, но этого ещё не достаточно. Классические примеры Ковалевской показывают, что даже при выборе некоторых аналитических функций $f(x)$ ряд будет расходиться всюду при $t \neq 0$.

Э. Гурса. Курс математического анализа. Том третий. Часть I. Бесконечно близкие интегралы. Уравнения с частными производными. ГТТИ. М.–Л. 1933.

С. В. Ковалевская. Научные работы (ред. и коммент. чл.-корр. АН СССР П. Я. Полубариновой-Кочиной). АН СССР. М. 1948.

Теория теплопроводности

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$, *определённая при* $x \in \mathbb{R}$, *допускает аналитическое продолжение до целой функции* $f(z)$ *с оценкой*

$$|f(z)| \leqslant C \exp(\sigma |z|), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \text{где} \quad C > 0, \ \sigma > 0.$$

Тогда ряд Ковалевской

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} f^{(2n)}(x)$$

сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в плоскости (x,t). *Определённая так функция* $u(x,t)$ *принадлежит классу* $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *и даёт решение задачи Коши при всех* $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Более того,* $u(x,t)$ *является аналитической по* $x \in \mathbb{R}$ *и по* $t \in \mathbb{R}$, *а также по совокупности этих переменных.*

И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков, Е. Д. Писаренкова.
Формула Ковалевской в задаче Коши для уравнения теплопроводности.
Системы компьютерной математики и их приложения: межвузовский сборник научных трудов. Вып. 26. Изд-во СмолГУ. Смоленск. 2025. С. 279–286.

Примеры

Пример 1. Пусть $f(x) = P(x)$ — алгебраический полином некоторой степени $d \in \mathbb{N}$. Тогда

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \frac{t^n}{n!}\, P^{(2n)}(x), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Здесь $\lfloor d/2 \rfloor$ — пол (целая часть) числа $d/2$.

Пример 2. Пусть $f(x) = \exp(\mu x)$ с показателем $\mu \in \mathbb{C}$. Тогда

$$u(x,t) = \exp(\mu x + \mu^2 t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Пример 3. Пусть $f(x) = P(x)\, \exp(\mu x)$ — квазиполином, где $d = \deg P(x)$, $\mu \in \mathbb{C}$. Тогда при всех $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ имеем

$$u(x,t) = \exp(\mu x + \mu^2 t) \sum_{k=0}^{d} P^{(k)}(x) \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(2\mu)^{k-2j}}{j!\,(k-2j)!}\, t^{k-j}.$$

Теория теплопроводности

Нелокальная задача ($\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ и $T > 0$ заданы)

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \qquad \frac{1}{T}\int\limits_0^T u(x,t)\,dt = \varphi(x).$$

Разрешающая формула

Формула Пуассона, в которой надо взять

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_T(x-s)\varphi(s)\,ds - T\varphi''(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

со специальной функцией Грина

$$g_T(x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{Ts^2}{\exp(Ts^2)-1}\exp(isx)\,ds, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Теория теплопроводности

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \qquad \frac{1}{T}\int\limits_0^T u(x,t)\,dt = \varphi(x).$$

Теорема. *Пусть* $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, *причём*

$$|\varphi(x)| \leqslant M_0 \exp(\sigma\,|x|), \qquad |\varphi''(x)| \leqslant M_2 \exp(\sigma\,|x|), \qquad x \in \mathbb{R},$$

где $M_0, M_2 > 0$ *и* $0 \leqslant \sigma < \sqrt{\pi/T}$. *Тогда нелокальная задача имеет решение* $u(x,t)$, *попадающее в экспоненциальный класс*

$$|u(x,t)| \leqslant M \exp(\sigma|x|), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T].$$

Это решение выражается разрешающей формулой (см. предыдущий слайд), и других решений в указанном классе нет.

А. Ю. Попов, И. В. Тихонов.
Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени. Матем. сб. Т. 196. № 9. С. 71–102 (2005).

Теория теплопроводности

Модельная нелокальная задача

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \qquad \int_0^1 u(x,t)\,dt = \varphi(x).$$

Теорема. *Пусть функция $\varphi(x)$, определённая при $x \in \mathbb{R}$, допускает аналитическое продолжение до целой функции $\varphi(z)$, с оценкой*

$$|\varphi(z)| \leqslant C\exp(\sigma\,|z|), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \text{где} \quad C > 0,\ 0 < \sigma < \sqrt{2\pi}.$$

Тогда ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!}\,\varphi^{(2n)}(x).$$

по полиномам Бернулли $B_n(t)$ сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в плоскости (x,t). Функция $u(x,t)$ принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ и даёт решение модельной нелокальной задачи при всех $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Более того, $u(x,t)$ является аналитической по $x \in \mathbb{R}$ и по $t \in \mathbb{R}$, а также по совокупности этих переменных.

Основной вопрос

Постановка задачи (И. В. Тихонов)

Пусть целая функция $f(z)$ удовлетворяет соотношениям

$$|f(z)| \leqslant C \exp\left(\sigma|z|\right), \qquad z \in \mathbb{C},$$

$$|f(x)| \leqslant C \exp\left(\alpha|x|\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

с константами $C > 0$ и $0 < \alpha \leqslant \sigma < +\infty$.

Что можно сказать об оценках последовательных производных $f^{(n)}(x)$, взятых на вещественной оси?

В «предельном» случае $\alpha = 0$, когда вторая оценка означает ограниченность целой функции $f(z)$ на множестве $\mathbb{R}$, ответ хорошо известен и даётся классическим **неравенством Бернштейна**

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant C\sigma^n, \qquad x \in \mathbb{R},$$

для производной любого порядка $n \in \mathbb{N}$.

Асимметричная задача

Постановка задачи

Пусть целая функция $f(z)$ удовлетворяет соотношениям

$$|f(z)| \leqslant C \exp(\sigma|z|), \qquad z \in \mathbb{C},$$

$$|f(x)| \leqslant C \exp(\alpha x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

с константами $C > 0$ и $0 < \alpha \leqslant \sigma < +\infty$.

Что можно сказать об оценках последовательных производных $f^{(n)}(x)$?

В этой «асимметричной» задаче **ответ давно известен** (Б. Я. Левин)

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant C\sigma^n \exp(\alpha x), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Точность оценки демонстрирует пример

$$f(z) = C \exp\big((\alpha + i\sqrt{\sigma^2 - \alpha^2}\,)\, z\big).$$

При $\alpha = \sigma > 0$, согласно одной теореме В. А. Марченко, в рассматриваемый класс попадают только функции вида $f(z) = c \exp(\sigma z)$, где $c \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant |c| \leqslant C$.

Основной вопрос

Упрощённый ответ на исходный вопрос

Теорема 1. *Пусть целая функция $f(z)$ удовлетворяет соотношениям*

$$|f(z)| \leqslant C \exp\left(\sigma|z|\right), \qquad z \in \mathbb{C},$$

$$|f(x)| \leqslant C \exp\left(\alpha|x|\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

с константами $C > 0$ и $0 < \alpha \leqslant \sigma < +\infty$. Тогда

$$\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leqslant C \left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \exp\left(\alpha|x|\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

для производной любого порядка $n \in \mathbb{N}$.

Вспомогательные понятия

Зафиксируем числа $\sigma > 0$ и $0 < \alpha \leqslant \sigma$. Положим

$$\theta_0 \equiv \arccos \frac{\alpha}{\sigma}, \qquad 0 \leqslant \theta_0 < \frac{\pi}{2},$$

и введём функцию $h(\theta) = h(\theta; \sigma, \alpha)$ на отрезке $\theta \in [-\pi, \pi]$ формулой

$$h(\theta) = \begin{cases} \sigma \cos(\theta_0 - |\theta|), & |\theta| \leqslant \theta_0, \\ \sigma, & \theta_0 \leqslant |\theta| \leqslant \pi - \theta_0, \\ -\sigma \cos(\theta_0 + |\theta|), & \pi - \theta_0 \leqslant |\theta| \leqslant \pi, \end{cases}$$

с характерными значениями

$$h(0) = h(\pm\pi) = \alpha$$

При $\alpha = \sigma > 0$ очевидно имеем $h(\theta) \equiv \sigma$ для всех $\theta \in [-\pi, \pi]$.

График функции $h(\theta)$

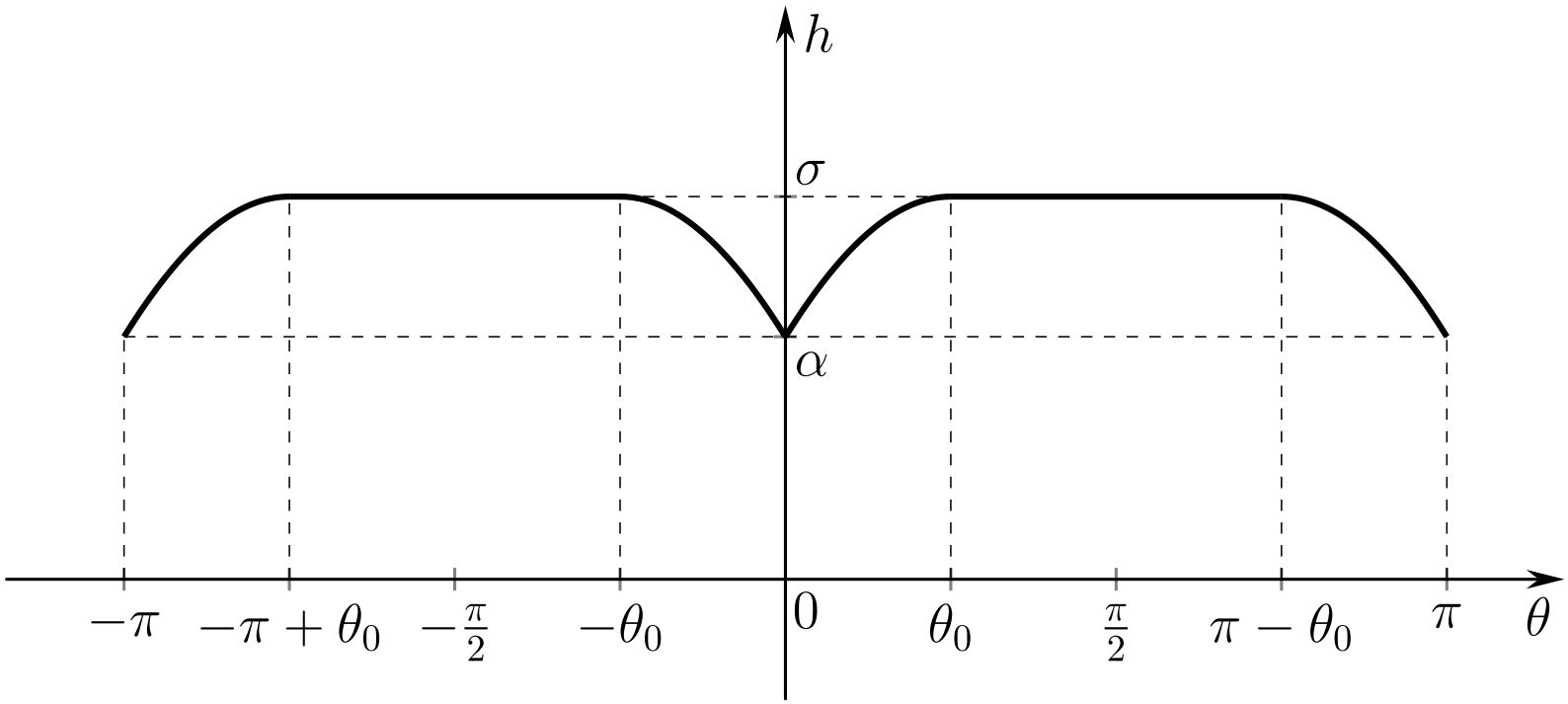


Рис.: График функции $h(\theta) = h(\theta; \sigma, \alpha)$ при $0 < \alpha < \sigma$.

Компакт $D = D(\sigma, \alpha)$

Функция $h(\theta)$ является **опорной функцией** компакта $D = D(\sigma, \alpha)$.
При $\alpha = \sigma > 0$ компакт D обращается в круг $|z| \leqslant \sigma$. По определению

$$h(\theta) \equiv \max_{\zeta \in D} \operatorname{Re}\left(\zeta e^{-i\theta}\right) = \max_{\zeta \in D} \left(r \cos(\varphi - \theta)\right),$$

где $r = |\zeta|$, $\varphi = \arg \zeta$, *с переменной* $\theta \in [-\pi, \pi]$.

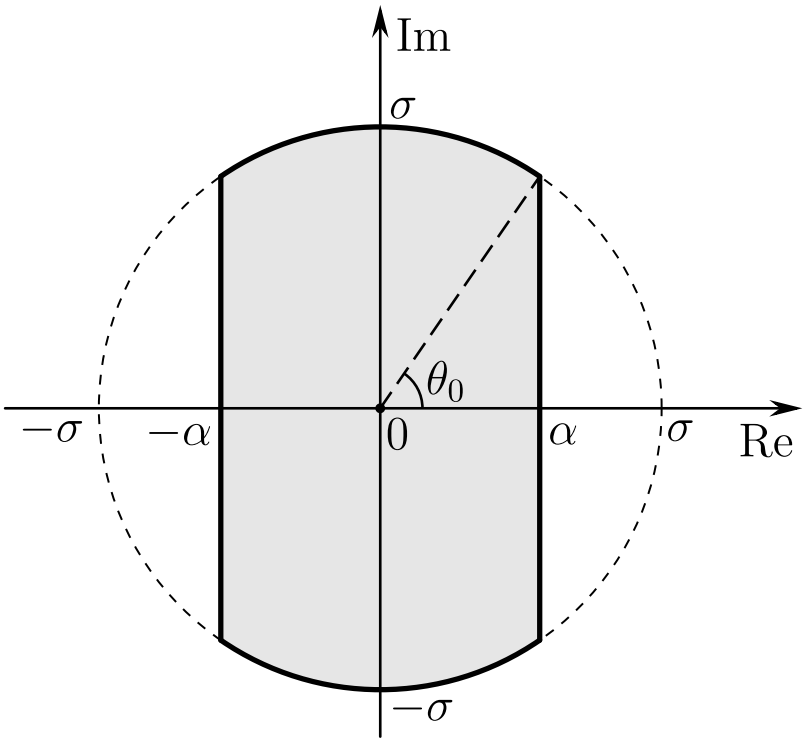


Рис.: Компакт $D = D(\sigma, \alpha)$ при $0 < \alpha < \sigma$.

Комплексная опорная функция

Для того же компакта $D = D(\sigma, \alpha)$ введём **комплексную опорную функцию** (функцию Минковского) $H(z) = H(z; \sigma, \alpha)$, полагая

$$H(z) = h(\theta)\,|z|, \quad \textit{где} \quad \theta = \arg z \in [-\pi, \pi].$$

Простейшие свойства

$$H(z) = H(-z) = H(\bar{z}) = H(-\bar{z}), \quad z \in \mathbb{C},$$

$$H(0) = 0, \qquad H(z) > 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

$$H(x) = \alpha\,|x|, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$H(z) = \max_{\zeta \in D} \operatorname{Re}(\zeta\,\bar{z}), \qquad z \in \mathbb{C},$$

$$H(z_1 + z_2) \leqslant H(z_1) + H(z_2), \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Основной результат

Теорема 2. *Пусть целая функция* $f(z)$ *удовлетворяет соотношениям*

$$|f(z)| \leqslant C \exp\left(\sigma|z|\right), \qquad z \in \mathbb{C},$$

$$|f(x)| \leqslant C \exp\left(\alpha|x|\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

с константами $C > 0$ *и* $0 < \alpha \leqslant \sigma < +\infty$. *Тогда*

$$\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leqslant C \left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \mu_n(\sigma, \alpha) \exp H(z), \qquad z \in \mathbb{C},$$

при любом $n \in \mathbb{N}$. *Здесь*

$$\mu_n(\sigma, \alpha) = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\arccos(\alpha/\sigma)} e^{-n(1-\cos\theta)}\, d\theta + \arcsin(\alpha/\sigma) \right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

причём $0 < \mu_n(\sigma, \alpha) \leqslant 1$ *для всех* $0 < \alpha \leqslant \sigma$ *и* $n \in \mathbb{N}$.

Важный частный случай

В частном случае $\alpha = \sigma > 0$ справедлив следующий вполне законченный результат, дополняющий теоремы 1, 2.

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ — целая функция, для которой выполнено соотношение*

$$|f(z)| \leqslant C \exp\left(\sigma|z|\right), \qquad z \in \mathbb{C},$$

с константами $C > 0$ и $\sigma > 0$. Тогда

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \leqslant C \left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \exp\left(\sigma|z|\right), \qquad z \in \mathbb{C},$$

и, как следствие,

$$\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leqslant C \left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \exp\left(\sigma|x|\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

для производной любого порядка $n \in \mathbb{N}$. Приведённые оценки являются неулучшаемыми.

Пример А. Ю. Попова

При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию

$$f_n(z) = C \left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n z^n.$$

Оценка

$$|f_n(z)| \leqslant C \exp\left(\sigma|z|\right), \qquad z \in \mathbb{C},$$

здесь выполнена: ясно, что $|f_n(0)| = 0 < C$, а при $z \neq 0$ имеем

$$|z|^{-n}\,|f_n(z)| = C \left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n = C \min_{r>0} \left(r^{-n} \exp(\sigma r)\right) \leqslant C\,|z|^{-n} \exp\left(\sigma|z|\right),$$

откуда и следует нужное. Одновременно

$$\frac{f_n^{(n)}(z)}{n!} \equiv C\,(\sigma e/n)^n,$$

т. е. при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ на данном примере соотношения из теоремы 3 обращаются в равенства в начале координат. Другими словами, коэффициент $(\sigma e/n)^n$ в оценках производных нельзя заменить меньшим значением.

Ключевая лемма

Лемма. *Пусть целая функция* $f(z)$ *удовлетворяет соотношениям*

$$|f(z)| \leqslant C \exp\left(\sigma|z|\right), \qquad z \in \mathbb{C},$$

$$|f(x)| \leqslant C \exp\left(\alpha|x|\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

с константами $C > 0$ *и* $0 < \alpha \leqslant \sigma < +\infty$. *Тогда*

$$|f(z)| \leqslant C \exp H(z), \qquad z \in \mathbb{C},$$

где $H(z) = H(z; \sigma, \alpha)$ *— комплексная опорная функция выпуклого компакта* $D = D(\sigma, \alpha)$.

Доказательство основано на принципе Фрагмена–Линделёфа.

Доказательство основного результата

Схема доказательства теоремы 2:

интегральная формула Коши $+$

ключевая лемма $+$

суббаддитивность функции Минковского $H(z;\sigma,\alpha)$ $+$

преобразование интеграла, выражающего множитель $\mu_n(\sigma,\alpha)$

Теорема 2 уточняет один из результатов работы
Б. Я. Левина и Ю. И. Любарского (1975)

Б. Я. Левин, Ю. И. Любарский.
Интерполяция целыми функциями специальных классов
и связанные с нею разложения в ряды экспонент.
Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 30. № 3. С. 657–702 (1975).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!