Представление рядами экспонент в сопряженных пространствах

К. П. Исаев, Р. С. Юлмухаметов

Центральной теоремой в теории рядов экспонент является следующая теорема А. Ф. Леонтьева.

Теорема ([1], [теорема 5.3.2]) *Пусть D — ограниченная выпуклая область на плоскости. Тогда имеется последовательность $\{\lambda_n\}$, зависящая только от области D, такая, что любую функцию $F(z)$, аналитическую в области D, можно разложить в ряд*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z},\ z \in D,$$

который сходится равномерно на компактах из области D.

Начиная с 1970-х годов в теории рядов экспонент стали активно применяться методы функционального анализа и стало возможным изучение вопросов представления рядами экспонент функций из различных локально выпуклых подпространств $H(D)$, где $H(D)$ — пространство функций, аналитических в выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ (с топологией равномерной сходимости на компактах из D). Большей частью изучались проективные пределы весовых нормированных пространств вида

$$H(D,\psi) = \left\{ f(z) \in H(D) :\ \|f\| := \sup_{z\in D} |f(z)| e^{-\psi(z)} < \infty \right\},$$

где D — ограниченная выпуклая область комплексной плоскости и ψ — неотрицательная выпуклая функция в этой области.

Характерные результаты в этом направлении изложены в работе [2]. Далее будем пользоваться понятием представляющих систем из этой работы. Система элементов e_n, $n \in \mathbb{N}$, в локально выпуклом пространстве X называется представляющей, если любой элемент этого пространства представляется в виде ряда

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n,$$

сходящегося в топологии пространства X. Если для каждого элемента это представление единственное, то представляющая система становится базисом. Если представляющая система не является базисом, то некоторая часть элементов этой системы может быть удалена, а оставшаяся часть продолжает быть представляющей в пространстве X, то есть представляющие системы, не являющиеся базисом, обладают некоторой избыточностью. Таким образом, в задаче о построении представляющих систем возникает дополнительный вопрос об оценке степени избыточности системы.

Представление рядами экспонент в локально выпуклом ненормированном пространстве впервые рассмотрено, видимо, в работе [3] для пространства функций, аналитических в выпуклом многоугольнике и имеющих определенный рост вблизи границы. В работе [4] доказаны аналитические факты для обобщения результатов работы [3] на случай произвольной выпуклой области.

Вследствие систематического применения методов функционального анализа в проблеме представления функций рядами экспонент явным образом выяснилось, что эта задача распадается на две аналитические задачи:

1. конструкция целых функций с заданными асимптотическими свойствами;
2. описание сопряженных пространств в терминах преобразований Фурье-Лапласа.

В достаточно общем виде для весовых пространств с наиболее тонкой ненормированной топологией эта схема реализована в работе [5]. Здесь мы имеем в виду метод, основанный на понятии достаточного множества для локально выпуклого пространства целых функций, введенного в работе [6].

Первая из двух аналитических задач, упомянутых выше, в достаточно общем виде решена в работе [7]. В работе [8] приведено решение этой задачи, более адаптированное к применению метода достаточных множеств.

Систематическое изучение степени избыточности представляющих систем проведено в работах [9]-[?].

Заметим, что примеров нормированных пространств аналитических функций, допускающих базисы из экспонент, известно немного. В работе [12] исследованы экспоненциальные разложения функций пространства Смирнова в произвольном выпуклом многоугольнике, а в работе [13] доказано существование базисов Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках. Близкие вопросы о безусловных базисах воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций экспоненциального типа рассматриваются в [15].

В то же время, в пространстве Бергмана на выпуклой области, граница которой содержит точку, в которой кривизна конечна и отлична от нуля, безусловных базисов из экспонент не существует ([?]).

Коротко опишем содержание данной статьи.

Для непрерывной функции $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ через $\mathcal{P}(\varphi)$ обозначим пространство целых функций $F(\lambda)$, удовлетворяющих условию

$$|F(\lambda)| = o(e^{\varphi(\lambda)}),\ |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

В этом пространстве рассмотрим норму

$$\|F\| = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |F(\lambda)| e^{-\varphi(\lambda)}.$$

Предполагая, что

A) множество $D_\varphi = \{z \in \mathbb{C} :\ e^{\lambda z} \in \mathcal{P}(\varphi)\}$ имеет непустую внутренность $\mathring{D}_\varphi$;

B) семейство экспонент $\Sigma_\varphi = \{e^{\lambda z},\ z \in \mathring{D}_\varphi\}$ полно в пространстве $\mathcal{P}(\varphi)$;

через $E(\varphi)$ обозначим пространство преобразований Лапласа линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{P}(\varphi)$. В пространстве $E(\varphi)$ рассматривается наведенная из $\mathcal{P}^*(\varphi)$ норма.

Будем говорить, что некоторая функция v на плоскости для неотрицательных чисел $a, \alpha \geq 0$ удовлетворяет (a, α)-условию, если выполняется соотношение

$$(1) \qquad |v(z_1) - v(z_2)| \leq a(|z_1| + 1)^\alpha |z_1 - z_2|,\ z_1 \in \mathbb{C},\ z_2 \in B\left(z_1, (|z_1| + 1)^{-\alpha}\right).$$

В пространствах

$$E_{\mathrm{pr}}(\varphi) = \{f \in H(\mathring{D}_\varphi) :\ f^{(n)} \in E(\varphi),\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

$$E_{\mathrm{ind}}(\varphi) = \{f^{(n)} :\ f \in E(\varphi),\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

вводятся естественные топологии, соответственно, проективного и индуктивного предела.

Теорема 1. *Пусть φ — субгармоническая функция конечного типа при порядке ρ, удовлетворяющая условиям A), B) и (a,α)-условию при некоторых $a,\alpha \geq 0$. Тогда существует система точек $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ так, что система экспонент $\{e^{\lambda_k z},\ k \in \mathbb{N}\}$ является представляющей в пространстве $E_{\mathrm{ind}}(\varphi)$, то есть любая функция $f \in E_{\mathrm{ind}}(\varphi)$ представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z},\ z \in \mathring{D}_{\varphi},$$

сходящегося в топологии этого пространства. При этом, если из множества показателей удалить любое конечное подмножество, то оставшаяся система экспонент также будет представляющей. После удаления любого бесконечного подмножества показателей оставшаяся система уже не является представляющей.

Неограниченную непрерывную неубывающую неотрицательную функцию $m(t)$, $t \geq 0$, $m(0) = 0$, удовлетворяющую условию

$$\sup_{t>0}(m(2t) - m(t)) \leq 1$$

будем называть медленно растущей. С каждой медленно растущей функцией свяжем ассоциированную функцию скачков: определим последовательности R_n, r_n по формулам

$$m(R_0) = 1,\ m(R_{n+1}) - m(R_n) = 1,\ n = 0,1,2,\ldots,$$

$$\int_{R_n}^{R_{n+1}} \ln t dm(t) = \ln r_n,\ n = 0,1,2,\ldots.$$

Ассоциированной с $m(t)$ функцией скачков назовем функцию $m_0(t)$, $t \geq 0$, $(m_0(0) = 0)$ с единичными скачками в точках r_n, $n = 0,1,2,\ldots$ Из определения следует соотношение

$$|m(t) - m_0(t)| \leq 1,\ t \geq 0.$$

Теорема 2. *Пусть φ — субгармоническая функция на плоскости конечного типа при порядке ρ, удовлетворяющая условиям A), B) и (a,α)-условию при некоторых $a,\alpha \geq 0$.*

Пусть, далее, положительная функция $m(t)$, $t > 0$, является медленно растущей, $m_0(t)$ — ассоциированная с ней функция скачков. Тогда существует система показателей $\Lambda = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ такая, что система экспонент $\{e^{z\lambda_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ является представляющей в пространстве $E_{\mathrm{pr}}(\varphi)$, то есть любая функция $f \in E_{\mathrm{pr}}(\varphi)$ может быть представлена в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{z\lambda_k},$$

сходящегося в топологии проективного предела пространств $E(\varphi_{-n})$, $n \in \mathbb{N}$. Если из системы показателей Λ удалить подмножество $\Lambda_1 = \{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, считающая функция $\eta(t)$ которого удовлетворяет условию

$$m_0(t) - \eta(t) \longrightarrow +\infty,$$

то система экспонент $\{e^{z\lambda_k},\ \lambda_k \in \Lambda \setminus \Lambda_1\}$ остается представляющей. Если же $|m_0(t) - \eta(t)| \leq C < \infty,\ t \geq 0$, то оставшаяся система экспонент уже не будет представляющей.

Список литературы

[1] А. Ф. Леонтьев. Ряды экспонент. М. Изд.-во "Наука". Гл. редакция физ.-мат. лит. 1976

[2] Коробейник Ю. Ф., "Представляющие системы", УМН, **36** (1981), №1(217), 73–126.

[3] А. Ф. Леонтьев. "Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы“ Изв. АН СССР. Сер. матем. **44** (1980), № 6б 1308–1328.

[4] Р. С. Юлмухаметов, "Пространство аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы“ Математические заметки. **32** (1982), №1, 41–57.

[5] В. В. Напалков,АН СССР. Сер. матем. **51**(1987), №2, 287–305.

[6] L. Ehrenpreis, Fourier analysis several complex variables. New York. Wiley–Interscience publishers. 1970

[7] Юлмухаметов Р. С., "Аппроксимация субгармонических функций", Analysis Mathematica, **11** (1985), №3, 257–282

[8] К. П. Исаев, "Представляющие системы экспонент в пространствах аналитических функций“ Комплексный анализ. Целые функции и их применения, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **161** (2019), 3–64.

[9] Абанин А. В., Налбандян Ю. С., "Абсолютно представляющие системы экспонент минимального типа в пространствах функций с заданным ростом вблизи границы", Изв. вузов. Матем., (1993), №10, 73–76.

[10] Абанин А. В., Варзиев В. А., "Достаточные множества в весовых пространствах Фреше целых функций", Сиб. матем. журн., **54** (2013), №4, 725–741.

[11] А. А. Абанин, "Характеризация минимальных систем показателей представляющих систем обобщенных экспонент" Изв. вузов. Матем., **2** (1991), 3–12/

[12] Б. Я. Левин, Ю. И. Любарский, "Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент целых функций“ Изв. АН СССР. Сер. матем. , **39**(1975), №3, 657–702

[13] К. П. Исаев, "Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках" Уфимский математический журнал, **2**, №1, 71–86

[14] K. P. Isaev, A. V. Postovalova, R. S. Yulmukhametov "On Hilbert Spaces of Entire Functions of Exponential Type Admitting Unconditional Bases of Reproducing Kernels" Lobachevskii Journal of Mathematics, **46**(2025), № 7бю 130–3140

[15] Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С., "Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками", Изв. РАН. Сер. матем., **71** (2007), №6, 69–90.

Уфимский университет науки и технологий
Email address: orbit81@list.ru

Уфимский университет науки и технологий, Институт Математики с ВЦ УФИЦ РАН
Email address: yulmukhametov@mail.ru