

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ  
НАУЧНЫЙ ЦЕНТР  
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

МИНИСТЕРСТВО  
ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

ИТОГИ НАУКИ • ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ОКРУГ

---

С Е Р И Я

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

**Ю. Ф. Коробейник**

**ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ:  
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

Владикавказ  
2009

ББК 22.16  
УДК 681.3.06  
К 43

Ответственный редактор  
кандидат физико-математических наук, доцент *Ю. А. Кирютенко*

Рецензенты:  
доктор физико-математических наук, профессор *С. Н. Мелихов*,  
доктор физико-математических наук, профессор *В. Л. Сухоруков*

Редактор серии  
доктор физико-математических наук, профессор *А. Г. Кусраев*

**Коробейник Ю. Ф.**

Представляющие системы: теория и приложения / отв. ред. Ю. А. Кирютенко; Южный математический институт ВНЦ РАН.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2009.—336 с.—(Итоги науки. ЮФО. Математическая монография. Вып. 1).

В монографии излагаются как известные, так и новые результаты о представляющих системах, полученные автором и его учениками.

Для преподавателей вузов, аспирантов и студентов старших курсов университетов, а также всех специалистов, интересующихся комплексным и функциональным анализом и смежными разделами математики (дифференциальными уравнениями, теорией операторов и т.д.).

**Korobeinic Yu. F.**

Representing Systems: Theory and Applications / ed. Yu. A. Kirjutenko; South Mathematical Institute VSC RAS.—Vladikavkaz: VSC RAS, 2009.—336 p.

The book surveys the theory of representing systems and is comprised mostly of old and new results obtained by the author as well as by his pupils and followers.

This volume is intended for graduate students, post graduates, and researchers whose work involves complex analysis, functional analysis, and related fields of mathematics (such as differential equations, operator theory etc.).

**ISBN 978-5-93000-066-5**

© Южный математический институт  
ВНЦ РАН и PCO-A, 2009

© Южный федеральный университет,  
2009

© Ю. Ф. Коробейник, 2009

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                              |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Предисловие редактора серии .....                                                                                            | 5         |
| Предисловие автора .....                                                                                                     | 7         |
| <b>Глава 1. Ряды экспонент с комплексными показателями .....</b>                                                             | <b>19</b> |
| 1.1. Общие свойства рядов. Теоремы о выпуклости .....                                                                        | 19        |
| 1.2. Описание полной области абсолютной сходимости ряда (1.1) .....                                                          | 35        |
| 1.3. Другой класс многомерных рядов экспонент .....                                                                          | 44        |
| 1.4. Дополнение к одной теореме Полиа .....                                                                                  | 45        |
| <b>Глава 2. Ряды в локально выпуклых пространствах ....</b>                                                                  | <b>63</b> |
| 2.1. Общие результаты. Ряды в пространствах Фреше .....                                                                      | 63        |
| 2.2. Ряды в пространствах с индуктивной топологией .....                                                                     | 77        |
| 2.3. Ряды Дирихле с ограниченными показателями .....                                                                         | 84        |
| <b>Глава 3. Представляющие системы .....</b>                                                                                 | <b>89</b> |
| 3.1. $A$ -представляющие системы, их линейные преобразования .....                                                           | 89        |
| 3.2. Обобщенный ряд Фурье в пространстве $L_p(Q)$ .....                                                                      | 106       |
| 3.3. Обобщенный ряд Фурье в $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$ .....                                                                     | 112       |
| 3.4. $\theta$ -тригонометрические системы в пространствах гладких функций .....                                              | 120       |
| 3.5. Свободные $A$ -представляющие системы экспонент ....                                                                    | 124       |
| 3.6. Продолжаемые представляющие системы .....                                                                               | 137       |
| 3.7. АПС экспонент с мнимыми показателями в пространствах бесконечно дифференцируемых функций и продолжимость по Уитни ..... | 144       |
| 3.8. Ряды экспонент с мнимыми показателями в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций .....                 | 154       |
| 3.9. Теория двойственности для $A$ -ПС .....                                                                                 | 171       |

|                                                                                         |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Глава 4. Обобщения представляющих систем.....</b>                                    | <b>183</b> |
| 4.1. Абсолютно представляющие семейства элементов ....                                  | 183        |
| 4.2. АПСм в пространствах Фреше .....                                                   | 208        |
| 4.3. Построение одного класса АПС в пространстве $A(G)$ .....                           | 215        |
| 4.4. АПСм экспонент в пространствах аналитических функций .....                         | 222        |
| 4.5. Абсолютно представляющие семейства подпространств .....                            | 232        |
| 4.6. $A$ -представляющие последовательности подпространств .....                        | 235        |
| 4.7. О различных классах представляющих систем .....                                    | 251        |
| 4.8. $\tilde{A}$ -представляющие семейства элементов .....                              | 255        |
| 4.9. АПСм в пространствах глобально аналитических функций .....                         | 258        |
| <b>Глава 5. Применения рядов экспонент и представляющих систем экспонент.....</b>       | <b>263</b> |
| 5.1. Построение частных решений линейных уравнений ...                                  | 263        |
| 5.2. Приложение рядов экспонент с мнимыми показателями к интерполяционным задачам ..... | 268        |
| 5.3. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка .....   | 279        |
| 5.4. Интерполяционные задачи и нетривиальные разложения нуля .....                      | 288        |
| 5.5. О граничной гладкости решений линейных дифференциальных уравнений .....            | 309        |
| 5.6. Другие применения рядов экспонент. Проблемы и перспективы .....                    | 312        |
| <b>Литература .....</b>                                                                 | <b>321</b> |
| <b>Предметный указатель .....</b>                                                       | <b>331</b> |

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

Интеграционные процессы, инициированные созданием в рамках приоритетного национального проекта «Образование» федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет», породили идею объединения ведущих специалистов в области фундаментальной математики, работающих на Юге России, в рамках одного академического института и интегрировать деятельность последнего с деятельностью Южного федерального университета. Она была поддержана руководством Южного федерального университета, Дагестанского, Владикавказского и Южного научных центров Российской академии наук. Соответствующие решения были приняты Бюро Отделения математических наук РАН, а затем и Президиумом РАН. В результате этих решений Институт прикладной математики и информатики Владикавказского научного центра РАН был переименован в Южный математический институт ВНИЦ РАН, в ЮФУ созданы и успешно работают научные лаборатории Южного математического института, а в ЮМИ формируется базовая кафедра Южного федерального университета.

Другая интеграционная идея, способствующая расширению и углублению научных контактов математиков региона с российскими и зарубежными коллегами — издательский проект «Итоги науки. Южный федеральный округ» — была предложена заслуженным деятелем науки РФ профессором Ю. Ф. Коробейником. В 2008 г. Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук и факультет математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, в рамках начавшегося тесного научного сотрудничества, приступили к осуществлению математической части этого проекта. В ходе работы было признано целесообразным издание двух математических серий: «Математический форум» и «Математическая монография». Такой подход не только даст более полное представление о состоянии математических исследований в Южном федеральном округе,

но и приведет к оживлению научных связей, активизации математических исследований, в целом послужит укреплению позиций фундаментальной науки в регионе.

В серии «Математический форум» публикуются материалы различных региональных, российских и международных форумов (конференций, симпозиумов, семинаров и т. п.), освещающие новейшие достижения математической науки, к которым так или иначе причастны математики Южного федерального округа. К настоящему времени издано три тома этой серии.

В серии «Математическая монография» будут представлены монографии по различным разделам современной математики, отражающие важнейшие результаты деятельности научных школ, итоги значительных циклов исследований математиков Юга России и их коллег.

Настоящее издание, открывающее серию, посвящено теории представляющих систем, различным их обобщениям и приложениям в некоторых разделах анализа. Книга отражает деятельность научной школы профессора Ю. Ф. Коробейника, зародившейся в 1960-х гг. в стенах Ростовского государственного университета и по сей день пользующейся заслуженным признанием во всем мире. В ней собрано большое число результатов, полученных и публикуемых в течение последних тридцати пяти лет в десятках периодических изданий. Указаны направления дальнейших исследований, формулируются нерешенные задачи. Обилие представленного материала и широта используемого инструментария из комплексного анализа и функционального анализа обусловили жесткий стиль изложения, носящий местами характер развернутого обзора. В то же время, ее вводную часть (первые две главы) можно рассматривать как специальный курс по теории рядов Дирихле с комплексными показателями.

*А. Г. Кусраев*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В Ростовском государственном университете, начиная с момента его возникновения и до настоящего времени, объектом пристального внимания многих математиков была теория приближения функций комплексного переменного. Работа по этой тематике, начатая в РГУ, по-видимому, Д. Д. Мордухай-Болтовским, была продолжена его учениками (М. Г. Хаплановым, С. Я. Альпером, А. В. Батыревым и др.). Начиная со второй половины 50-х гг. XX века, в эту работу активно включился автор данной книги (в прошлом дипломник С. Я. Альпера и аспирант М. Г. Хапланова), а в последующем — его ученики и последователи. Представители созданного на кафедре математического анализа РГУ научного коллектива интересовались главным образом двумя достаточно обширными и сложными проблемами:

1) разрешимостью в комплексной области различных классов линейных операторных уравнений (уравнений свертки и типа свертки, интегральных и дифференциальных уравнений бесконечного порядка, уравнений в частных производных и т. д.); построением приближенных решений таких уравнений и исследованием общих свойств их (точных) решений;

2) представлением функций из различных (в основном, небаначовых) пространств аналитических (а позднее и бесконечно-дифференцируемых) функций в виде рядов по системам, обобщающим уже хорошо известные базисы.

В частности, в работах автора и его учеников по второй проблеме интенсивно разрабатывалась теория представляющих и абсолютно представляющих систем.

Исследования по обеим этим проблемам проводились методами, основанными на привлечении функционального анализа и теории функций комплексного переменного (теории двойственности линейных операторов в локально выпуклых пространствах; нормальной разрешимости линейных операторов в проективных и индуктивных пределах банаховых пространств; теории целых функций вполне регулярного роста и т. д.).

При этом основным «рабочим» инструментом при исследовании этих проблем был аппарат одномерных и многомерных рядов экспонент, которые теперь часто называют рядами Дирихле. Наш интерес к таким рядам сильно возрос после появления монографии выдающегося российского математика А. Ф. Леонтьева «Ряды экспонент», посвященной, в основном, изложению его фундаментальных результатов о представлении функций, аналитических в выпуклой области  $G$ , рядами экспонент, сходящимися абсолютно и равномерно внутри  $G$ . Именно эти исследования А. Ф. Леонтьева, публиковавшиеся первоначально в советских центральных журналах в 60–70-е гг. XX века, послужили толчком к введению автором понятия абсолютно представляющих систем (в первую очередь, систем экспонент), а в дальнейшем — различных их обобщений. Хотя в исследованиях ростовчан ряды экспонент использовались главным образом как рабочий инструмент, а системы экспонент — как модельные системы при изучении более общих объектов, тем не менее ими было опубликовано и несколько работ, посвященных различным аспектам собственно теории рядов Дирихле (в первую очередь, критериям сходимости таких рядов в различных функциональных пространствах, распределению значений их частных сумм, аналитическому продолжению суммы ряда и т. д.). Вообще изложение любой части исследований по вышеуказанным проблемам невозможно без привлечения достаточного большого набора сведений по теории рядов экспонент.

Именно поэтому в предлагаемой читателю книге первые две главы, имеющие до некоторой степени вспомогательный характер, посвящены рядам экспонент, а основное содержание книги (ее последние три главы) составляет теория представляющих систем, их различные обобщения, а также их приложения в некоторых разделах анализа. При этом, как правило, приводимые здесь результаты применяются к конкретным ситуациям, связанным с рядами экспонент и чаще всего к «модельному» пространству Фреше  $A(G)$  функций, аналитических в выпуклой области  $G$ .

Остановимся немного подробнее на содержании книги, состоящей из пяти глав, предметного указателя (указателя основных терминов и обозначений) и оглавления. Каждая глава делится на разделы, а те, в свою очередь, на пункты.

Книгу можно условно разделить на три части. Первую из них, включающую две первые главы, можно рассматривать как дополнение к главам II и III уже упоминавшейся монографии А. Ф. Леон-



тьева. В этой части книги изложены достаточно подробно сведения, необходимые для наших целей, из теории общих рядов Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad a_n \in \mathbb{C}, \lambda_n \in \mathbb{C}, n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

В разделах 1.1–1.3 рассматриваются многомерные ряды экспонент

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\langle \lambda_n, z \rangle_p, \quad a_n \in \mathbb{C}, n \geq 1, \quad (2)$$

где  $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ ,  $\lambda_n = (\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,p}) \in \mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ ;

$$\langle \lambda_n, z \rangle_p = \sum_{k=1}^p z_k \lambda_{n,k}, \quad n = 1, 2, \dots$$

В частности, в разделе 1.1 описываются некоторые характеристики ряда (2), связанные с его простой и абсолютной сходимостью, а также с ограниченностью его общего члена. Основные приводимые результаты (теоремы 1.2–1.12) являются, по-видимому, новыми и получены автором. Теорема 1.13 принадлежит его ученику Ле Хай Хою. Далее, в разделе 1.2 метод характеристики полной области ряда (1), развитый Г. Л. Лунцем в одномерной ситуации, распространяется на многомерный ряд (2).

В небольшом разделе 1.3 вводится несколько иной, чем (2), класс многомерных рядов Дирихле и кратко описываются некоторые его свойства.

Основным результатом раздела 1.4 является теорема автора 1.22, являющаяся обобщением одной теоремы Поля из его статьи [170]. Она дает критерий (в терминах разрешимости определенной интерполяционной задачи в некотором подклассе целых функций экспоненциального типа) аналитической продолжимости суммы ряда (1), заданной первоначально (в виде ряда (1)) в какой-либо выпуклой области  $G_0$ , во всю полную веерштрассову область существования этой функции. Здесь же аналогичные результаты приведены для многомерного ряда (2).

Следует отметить, что этот (довольно большой) раздел по своему содержанию стоит несколько особняком в первой главе (да и, пожалуй, во всей книге). Поэтому те читатели, которые интересуются, в основном, представляющими системами, могут при первом чтении книги его пропустить.

Во второй главе в локально выпуклом пространстве (ЛВП)  $H$  исследуется сходимость общего ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad u_k \in H. \quad (3)$$

В разделе 2.1 приводятся (отдельно) довольно простые необходимые условия сходимости ряда (3) в ЛВП  $H$  и достаточное условие его абсолютной сходимости в полном отделимом ЛВП (ПОЛВП)  $H$ . С их помощью выводятся критерии сходимости (простой и абсолютной) рядов (1) и (2) в различных конкретных пространствах Фреше аналитических и бесконечно дифференцируемых функций.

Раздел 2.2 посвящен условиям абсолютной сходимости ряда (3) в индуктивных пределах пространств Фреше с некоторыми дополнительными свойствами  $(Y)$  и  $(Y_0)$ .

В разделе 2.3 рассматривается ранее почти не изучавшийся класс рядов (2), у которых показатели  $\lambda_k$  принадлежат какому-либо ограниченному множеству  $F$  из  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ . Вводятся  $E_F$ -правильные ЛВП  $H$  и для них показывается, что ряд (2) с показателями  $\lambda_k$  из  $F$  абсолютно сходится в  $H$  тогда и только тогда, когда  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ .

Во второй, самой большей части книги, состоящей из двух глав (III, IV), изучаются представляющие системы и различные их обобщения. Напомним, что последовательность элементов  $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ЛВП  $H$  над полем скаляров  $\Phi = \mathbb{C}$  или  $\Phi = \mathbb{R}$  называется представляющей системой (ПС) в ЛВП  $H$ , если каждый элемент  $x$  этого пространства можно представить (не обязательно единственным образом) в виде суммы сходящегося в  $H$  ряда  $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$  с коэффициентами  $c_n$  из  $\Phi$ . Далее, последовательность  $X$  в ПОЛВП  $H$  называется абсолютно представляющей системой (АПС) в  $H$ , если любой элемент  $x$  из  $H$  можно представить в виде ряда  $x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x_n$ ,  $d_n \in \Phi$ , абсолютно сходящегося в  $H$ .

В разделе 3.1 рассматривается введенный автором в 1975 г. довольно общий класс последовательностей элементов, названный им  $A$ -представляющими системами ( $A$ -ПС) и содержащий в качестве частных подклассов представляющие и абсолютно представляющие системы (ПС и АПС). Приводятся различные примеры  $A$ -ПС и исследуется инвариантность  $A$ -ПС при ее общем линейном преобразовании. В разделах 3.2–3.4 и 3.6 общие результаты о линейных преобразованиях  $A$ -ПС, изложенные в разделе 3.1, применяются к такой, несколько более конкретной, задаче. Пусть  $Q_j$ ,  $j = 1, 2$ , — какое-либо множество из  $\mathbb{C}^p$  или из  $\mathbb{R}^p$  и  $E(Q_j)$  — ПОЛВП функций, определенных (в каком-то смысле) на  $Q_j$ . Пусть, далее,  $X = (x_k)_{k \in \Omega}$  —  $A$ -ПС

в  $H_1$ , а  $T$  — непрерывный (из  $H_1$  в  $H_2$ ) линейный оператор. Спрашивается, при каких условиях  $TX := \{Tx_k\}_{k \in \Omega}$  — А-ПС в  $H_2$ .

В разделах 3.2–3.4 эта задача решается в некоторых конкретных функциональных пространствах  $H_1$ . Так, в 3.2  $H_1 = L_p(Q)$ , где  $p > 1$ ,  $Q$  — компакт в  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ , и основной результат здесь — теорема 3.6; в разделе 3.3  $H_1 = W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$ , а итоговый результат — теорема 3.10. Таким образом, в обоих этих разделах  $H_1$  —  $B$ -пространство. Наконец, в разделе 3.4  $H_1 = C^\infty[a, b]$  — пространство Фреше всех бесконечно-дифференцируемых на сегменте  $[a, b]$  функций. В этих же разделах описываются аппроксимационные свойства (наличие или отсутствие полноты, базисности и т. д.) системы  $E_\theta^N := (\exp ik\theta x)_{|k| \geq N}$ , где  $N \geq 0$  и  $k = \pm N, \pm(N+1), \dots$ .

В разделе 3.5 вводится и изучается свободная А-ПС, т. е. А-ПС в  $H$ , остающаяся таковой после удаления из нее в ПОЛВП  $H$  любого конечного числа элементов. Указываются достаточные условия того, что любая А-ПС экспонент в ПОЛВП  $H$  определенной природы является свободной (основной результат раздела 3.5 — теорема 3.13), а также условия, при которых ПС или АПС экспонент в таких пространствах  $H$  остается ПС (соответственно, АПС) в  $H$  и после удаления из даже бесконечной (но достаточно редкой в определенном смысле) ее подпоследовательности (теоремы 3.14, 3.15 и их следствия). Полученные общие результаты применяются к ряду конкретных пространств аналитических и бесконечно-дифференцируемых функций.

В разделе 3.6  $T$  является многомерным оператором типа свертки, а  $H_1$  и  $H_2$  — пространствами Фреше всех функций, аналитических в выпуклых областях из  $\mathbb{C}^m$ ,  $m \geq 1$ . Здесь же вводятся понятия продолжаемых и универсально продолжаемых А-ПС и сравнивается характер продолжимости у полных систем, базисов и представляющих систем.

В разделе 3.7 описывается связь между наличием хотя бы одной АПС экспонент с чисто мнимыми показателями в пространстве  $C^\infty[F]$  всех функций, бесконечно дифференцируемых на толстом компакте  $F$  из  $\mathbb{R}^m$  (т. е. компакте, совпадающем с замыканием своей внутренности) и возможностью продолжения по Уитни каждой функции из  $C^\infty[F]$  в пространство  $C^\infty[\mathbb{R}^m]$  (основные результаты здесь — теоремы 3.20 и 3.21).

В разделе 3.8 рассматриваются весьма общие классы весовых пространств функций, бесконечно-дифференцируемых в области или на компакте из  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$  (эти классы были введены в рабо-

те [85]), и для таких пространств получаются результаты, аналогичные тем, что ранее, в разделе 3.7, были установлены для пространств функций  $C^\infty[F]$  и  $C^\infty(G)$  (последнее — это пространство функций, бесконечно-дифференцируемых в области  $G$ ). Однако теоремы 3.28 и 3.29 данного раздела показывают, что эта аналогия справедлива лишь до определенных пределов. Наконец, в теореме 3.16 дается (в одномерной ситуации) описание структуры произвольной ПС или АПС в  $H$ .

В последнем разделе главы 3 вначале излагаются некоторые определения общего характера, введенные в работе [130] (четыре ситуации двойственности и различные аспекты разрешимости общей проблемы моментов). На их основе формулируется теорема 3.30, в которой приводятся абстрактные критерии того, что данная последовательность элементов  $X$  из ПОЛВП  $H$  является  $A$ -ПС или  $A$ -базисом в замыкании своей линейной оболочки или во всем пространстве  $H$ .

Чтобы придать этим критериям форму, более удобную для применений к конкретным функциональным пространствам, привлекается общая теория двойственности в ЛВП. В свою очередь, для использования этой теории необходимо предварительно получить представление оператора, сопряженного к введенному ранее в п. 3.1.5 оператору представления  $L_A^X$ , а также пространства, сопряженного к «координатному» пространству  $(A, \tau)$ , определенному там же. После того, как соответствующие представления получены в п. 3.9.3, устанавливается непосредственно вытекающая из теоремы 3.30 теорема 3.31, также дающая (в более удобных для использования терминах) критерии, при выполнении которых  $X$  —  $A$ -ПС или  $A$ -базис в  $H$ . В заключение раздела 3.9 теорема 3.31 применяется к системам экспонент в некоторых конкретных пространствах аналитических функций, одно из которых является банаховым, другое — пространством Фреше и, наконец, третье — сильным сопряженным к рефлексивному пространству Фреше.

В главе 4 рассматриваются различные обобщения представляющих систем. Наибольшее внимание уделяется здесь абсолютно представляющим семействам — АПСм (не обязательно счетным), являющимся непосредственным обобщением понятия абсолютно представляющих систем. В разделах 4.1 и 4.2 выводятся три типа критериев того, что заданное семейство  $X_\Lambda = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  ненулевых элементов является АПСм в ПОЛВП  $H$ . Первый из них, весьма простой по формулировке (теоремы 4.1, 4.2), позволяет исследовать некоторые

свойства АПСм и строить различные конкретные примеры таких семейств. Однако его трудно использовать при решении вопроса о том, будет ли какое-либо заданное семейство  $X_\Lambda$  АПСм в  $H$ . В связи с этим описывается критерий иного рода (теорема 4.3), пригодный для пространств Фреше и основанный на взятом из статьи [54] понятии строгой  $X_\Lambda$ -топологии. Показывается в ряде конкретных аналитических ситуаций, что с помощью этого критерия можно получить условия, необходимые для того, чтобы некоторое семейство экспонент было АПСм в пространстве Фреше  $H$  (типичные результаты подобного рода — это теоремы 4.21 и 4.24 из раздела 4.4).

Наконец, наиболее подробно освещается в этих разделах третий класс критериев того, что данное семейство  $X_\Lambda$  является АПСм в пространстве Фреше  $H$ . Как и в главе 3, эти критерии получаются с помощью общей теории двойственности в ЛВП. Итоговый результат в этом направлении — теорема 4.7, причем в ее формулировке участвуют такие введенные ранее автором понятия, как  $X_\Lambda$ -реализация сопряженного пространства  $H'$  и  $\lambda$ -достаточность множества  $X_\Lambda$ . Отдельно рассматривается случай, когда семейство  $X_\Lambda$  сепарабельно, т. е. в нем имеется счетное плотное в  $X_\Lambda$  подмножество (в частности, теорема 4.8 связывает свойство  $X_\Lambda$  быть АПСм в  $H$  с наличием в  $X_\Lambda$ , в случае его сепарабельности, некоторой АПС). В конце раздела 4.1 (п. 4.1.12) описываются также (более кратко, чем в главе 3 для АПС) некоторые свойства свободных и продолжаемых АПСм (теоремы 4.14 и 4.15).

Теорема 4.7 и ее модификации, приведенные в разделах 4.1 и 4.2, используются в ситуации, когда  $E_\Lambda = (\exp\langle \lambda_\alpha, z \rangle_p)_{\alpha \in \Lambda}$  — последовательность экспонент в пространстве  $A(G)$  функций, аналитических в выпуклой области  $G$  из  $\mathbb{C}^p$ , а также в более общих пространствах аналитических функций (теорема 4.18).

В разделе 4.3 с помощью теоремы 4.7 строятся конкретные АПС экспонент в пространстве  $A(G)$  функций, аналитических в выпуклой области  $G$  (типичный результат такого рода — теорема 4.19). В этом же разделе общие результаты, полученные в 4.1 и 4.2, применяются еще к двум пространствам аналитических функций. Первое из них — пространство целых функций экспоненциального типа, определяемых своим индикатором, а второе является проективным пределом весовых пространств функций, аналитических в выпуклой области  $G$ , характер роста которых определяется соответствующим весом (полученные в этом направлении результаты содержатся в теоремах 4.19–4.24).

В разделе 4.5 вводится понятие абсолютно представляющего семейства подпространств, которое является непосредственным обобщением АПСм элементов, и (весьма кратко) описываются некоторые его свойства, аналогичные соответствующим свойствам АПСм и АПС элементов.

Раздел 4.6 посвящен другому обобщению  $A$ -ПС, а именно,  $A$ -представляющим последовательностям подпространств ( $A$ -ПСПП). Общие свойства таких последовательностей почти не описываются ввиду большой аналогии с изложенными выше результатами, а основное внимание уделено представляющим и абсолютно представляющим последовательностям подпространств (ПСПП и, соответственно, АПСПП) из экспонент и квазиэкспонент в пространстве функций, аналитических в выпуклой области  $G$  из  $\mathbb{C}$ . В этом же разделе, в п. 4.4.6 рассмотрены  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ -представительные подпространства ПОЛВП  $H$  (кратко,  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ -ППП) и абсолютно представительные подпространства —  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ -АППП). Например, подпространство  $H_0$  пространства  $H$  называется  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ -АППП (здесь  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$  — зафиксированная последовательность подпространств  $H$ ), если из того, что  $\{H_0 \cap H_n\}_{n=1}^\infty$  — АПСПП в  $H_0$ , следует, что  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$  — АПСПП в  $H$ . Эти два класса подпространств являются обобщением представительных подпространств для ПС и АПС, введенным в обзорной статье [47]. Из результатов этой части разделов заслуживает определенного внимания теорема 4.30, в которой указано довольно общее свойство подпространства  $H_0$  из  $H$  (а именно, его сверточная полнота), при наличии которого  $H_0$  является  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ -ППП и  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ -АПП пространства  $A(G)$  (здесь  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$  — произвольно зафиксированная последовательность замкнутых подпространств  $A(G)$ , инвариантных относительно дифференцирования).

Результаты, изложенные в пункте 4.6.8, стоят в разделе 4.6 несколько особняком, так как в них исследуется связь между ПС и АПС в «модельном» пространстве  $A(G)$  и ПСПП и АПСПП в пространстве Фреше  $Hr(G)$  ( $G \subset \mathbb{C}$ ) (вещественнозначных) гармонических в области  $G$  функций, которые до этого в книге не рассматривались. Приведенные в этом пункте теоремы 4.31 и 4.32, взятые из статьи [89], являются, по-видимому, первыми результатами в этом направлении. Здесь же отмечаются некоторые специфические свойства пространства  $Hr(G)$ , затрудняющие применение к нему общей теории двойственности в ЛВП, которая постоянно используется в данной книге.

В разделе 4.7 сопоставляются введенные ранее классы представляющих систем и их обобщений, а также кратко описываются другие типы ПС, которые не укладываются в общую схему  $A$ -ПС, изложенную в начале главы 3.

В последних разделах 4.8 и 4.9 главы 4 рассматриваются два класса представляющих семейств, которые на взгляд автора, имеют определенные «права на существование». В частности, в разделе 4.8 вводится класс семейств ( $\tilde{A}$ -представляющие семейства или, коротко,  $\tilde{A}$ -ПСм), который является естественным обобщением достаточно подробно описанного в разделе 4.1 класса абсолютно представляющих семейств (АПсм). Он определяется так же, как и последний, с той лишь разницей, что «образующее» координатное пространство  $\tilde{A}$  числовых семейств не обязательно совпадает с  $A_2(X_\Lambda, H)$ , но вложено непрерывно в  $A_2(X_\Lambda, H)$ ,  $\tau_2$ . В качестве примера  $\tilde{A}$ -представляющего семейства в этом разделе описан один частный подкласс  $\tilde{A}$ -ПСм, который был, по-видимому, введен Мазуром и Орlichem еще в начале 30-х гг. прошлого века.

Наконец, в сравнительно небольшой по объему третьей части книги, включающей одну 5-ую главу, излагаются некоторые приложения рядов экспонент и представляющих систем в комплексном анализе и дифференциальных уравнениях.

Выбор представленного здесь материала определяется научными интересами автора. Разумеется, приведенные в главе V результаты составляют лишь незначительную часть всех приложений рядов экспонент и АПС из экспонент к различным проблемам современного анализа.

В первом разделе этой главы рассмотрены некоторые линейные функциональные уравнения в конкретных функциональных пространствах, уже встречавшиеся в разделах 4.2–4.4. В этих разделах были получены результаты о представлении функций из рассмотренных в них пространств сходящимися (или абсолютно сходящимися) по топологии рядами экспонент, что позволило в разделе 5.1 построить конструктивно частные решения соответствующих уравнений. При этом линейные операторы, входящие в уравнения, не являются здесь, как правило, операторами, непрерывными на всем функциональном пространстве. Это обстоятельство исключает возможность в данной ситуации стандартного перехода к сопряженному оператору и привлечению общих результатов теории двойственности линейных операторов в ЛВП.

Общим для разделов 5.2 и 5.3 является то, что рассмотренные в них задачи (довольно общая интерполяционная проблема и задача Коши для линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка) решаются конструктивно, с помощью рядов экспонент (1) с надлежащим образом подобранными показателями  $\lambda_n$  и с коэффициентами  $a_n$ , которые определяются из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений с помощью одной теоремы Поля о разрешимости таких систем.

В довольно большом разделе 5.4 исследуется разрешимость в пространствах  $[1, h(\phi))$  и  $[1, h(\phi)]$  всех целых функций экспоненциального типа с индикатором  $< h(\phi)$  (соответственно,  $\leq h(\phi)$ ) интерполяционной задачи  $y(\lambda_n) = b_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Как неоднократно показывается в этой книге, критерий разрешимости подобной задачи для любого элемента  $b(b_n)_{n=1}^\infty$  из определенного пространства  $E$  числовых последовательностей является одновременно и критерием того, что соответствующая последовательность экспонент  $E_\Lambda := (\exp \lambda_k z)$  будет абсолютно представляющей системой в пространстве  $A(G)$  (соответственно,  $H(\bar{G})$ ) всех аналитических (или локально аналитических) в  $G$  (на  $\bar{G}$ ) функций. Здесь  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}$  с опорной функцией  $h(-\phi)$ . Своеобразие данной интерполяционной задачи заключается в том, что пространство  $E$  ее разрешимости состоит из всех тех последовательностей  $b\{b_k\}_{k=1}^\infty$ , которые, во-первых, удовлетворяют естественному требованию

$$l_b := \overline{\lim} \left[ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln |b_n| - h(\arg \lambda_n) \right] < 0$$

(соответственно,  $l_b \leq 0$ ), а во-вторых, «ортогональны» к последовательности  $\{d_k\}_{k=1}^\infty$  коэффициентов любого абсолютно сходящегося в  $A(G)$  (соответственно, в  $H(\bar{G})$ ) нетривиального разложения нуля по системе  $E_\Lambda$ :  $\sum_{k=1}^\infty b_k d_k = 0$ , если ряд  $\sum_{k=1}^\infty d_k e^{\lambda_k z}$  сходится абсолютно в  $A(G)$  (соответственно, в  $H(\bar{G})$ ) и сумма его равна нулю в  $G$  (на  $\bar{G}$ ). Задачи подобного рода, естественным образом связанные с абсолютно представляющими системами из обычных или обобщенных экспонент, до настоящего времени почти не исследовались; автор надеется, что этот пробел частично восполнен в данном разделе (а также в работах [45, 47, 150, 158]).

В разделе 5.5 с помощью рядов вида (1) выявляется принципиальное различие в характере зависимости граничной гладкости решения от гладкости правой части для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами конечного и бесконечного порядков.



В последнем разделе 5.6, почти все содержание которого взято из недавно опубликованного учебного пособия автора [109], в весьма сжатой форме описываются другие, не затронутые до этого в данной монографии, но, возможно, наиболее интересные (с точки зрения автора) применения представляющих систем экспонент — такие, как эффективное построение частного решения неоднородного уравнения свертки, характеристика множества всех аналитических решений однородного уравнения свертки и т. д.

Определенная конспективность изложения в этом разделе объясняется, с одной стороны, тем, что почти все приведенные в нем результаты содержатся в доступных читателю статьях автора и его учеников, опубликованных в центральных математических журналах. Кроме того, для полного изложения приведенных в 5.6 результатов пришлось бы увеличить объем книги чуть ли не вдвое, что в настоящее время автору, пожалуй, уже не под силу.

Возможно, что в недалеком будущем подобная монография будет создана (надеюсь, прежде всего усилиями моих учеников и предшественников уфимской математической школы). Следует также отметить, что приведенные в книге результаты сопровождаются ссылками на соответствующие первоисточники. Поэтому, если кто-либо из читателей заинтересуется каким-либо результатом, недостаточно подробно освещенным в данной книге, он может при желании обратиться к указанному первоисточнику. Вместе с тем значительная часть принадлежащих автору результатов опубликована в книге впервые. Это относится, в частности, к разделам 1.1, 2.1, 2.3, 3.1 (частично), 3.5 и некоторым другим.

Освоение материала, изложенного в настоящей монографии, предполагает знание у читателя общих университетских курсов математического и функционального анализа, теории функций комплексного переменного, а также некоторых сведений по теории рядов Дирихле и целых функций (например, изложенных в первых двух главах монографии [100]). Желательно также иметь хотя бы общее представление о некоторых более специальных разделах функционального анализа (в частности, общей теории двойственности в локально выпуклых пространствах, теории пространств Фреше) в объеме изданных у нас известных руководств [123, 125, 143].

Данная книга по своему характеру является как бы промежуточной между обычной монографией, в которой все излагаемые результаты снабжены подробными доказательствами, и достаточно развернутым обзором, многие результаты в котором не доказываются, а

лишь формулируются. Так как в ней нашла отражение значительная часть результатов по данной тематике, полученных автором и его учениками в течение последних тридцати лет, а также результаты других авторов, то она может послужить своего рода справочным пособием для всех преподавателей и научных работников, изучающих ряды экспонент и представления функций в виде различных рядов в общих локально выпуклых пространствах или конкретных функциональных пространствах. Она может быть полезной (хотя бы благодаря наличию в ней ряда поставленных и еще нерешенных задач) и тем преподавателям и научным сотрудникам (особенно молодым, в частности, магистрам и аспирантам, возможно, еще четко не определившим свои научные интересы), которые занимаются комплексным и функциональным анализом, а также смежными разделами математики.

Несколько слов об истории создания настоящей монографии. Первоначальный вариант под названием «Ряды экспонент и представляющие системы» состоял из четырех глав и был выполнен по внутреннему гранту ЮФУ к июлю 2008 г. (№ К-08-Т-15/16, 16-2). После этого автор продолжал работу по данной проблематике и в конце ноября 2008 г. представил монографию на внутриинститутский конкурс Южного математического института РАН, в котором он работает с 2004 г. В ней были существенно переработаны и дополнены все четыре главы первоначального варианта и, кроме того, добавлена новая глава, посвященная обобщениям представляющих систем. Став одним из победителей конкурса, автор продолжил работу по написанию монографии, выбросив полностью первую главу, имевшуюся в первом варианте книги, вновь переработал материал остальных четырех глав, значительно расширил их содержание и перераспределил материал по новым главам. Конечным итогом завершенной в апреле 2009 г. работы и стала настоящая книга.

Автор выражает свою благодарность О. А. Ивановой и Е. В. Ширяевой за компьютерный набор этой не слишком аккуратно написанной книги, своему ученику Юрию Александровичу Кирютенко за нелегкий труд по ее редактированию, а также Анатолию Георгиевичу Кусраеву за внимание и поддержку на протяжении всей работы над монографией. Он также выражает заранее благодарность тем будущим читателям этой книги, которые найдут огрехи в ее изложении или неточности и пробелы в цитировании и сообщат об этом автору по электронной почте (по адресу [kor@math.rsu.ru](mailto:kor@math.rsu.ru)).

*Ю. Ф. Коробейник, г. Ростов-на-Дону*

## ГЛАВА 1

### РЯДЫ ЭКСПОНЕНТ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

#### 1.1. Общие свойства рядов. Теоремы о выпуклости

В этом разделе рассматриваются многомерные ряды экспонент с комплексными показателями следующего вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\langle \lambda_k, z \rangle_p}, \quad z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p. \quad (1.1)$$

Здесь  $p \geq 1$ ,  $a_k \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_k \in \mathbb{C}^p$ ,  $\lambda_k = (\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{p,k})$ ,  $\lambda_{s,k} \in \mathbb{C}$ ,  $s = 1, \dots, p$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\langle \lambda_k, z \rangle_p := \sum_{s=1}^p \lambda_{s,k} z_s$ ,  $k = 1, 2, \dots$

**1.1.1.** Предварительно докажем некоторые вспомогательные утверждения, которые будут использованы в дальнейшем.

**Лемма 1.1.** Пусть  $n \geq 1$ ,  $A_k \geq 0$ ,  $0 \leq \gamma_k \leq 1$  при  $k = 1, \dots, n$  и пусть  $\sum_{k=1}^n \gamma_k = 1$ . Тогда

$$\prod_{k=1}^n (A_k)^{\gamma_k} \leq \sum_{k=1}^n A_k. \quad (1.2)$$

$\triangleleft$  При  $n = 1$   $\gamma_n = 1$  и неравенство (1.2) обращается в равенство. Пусть теперь  $n = 2$ . В этом случае неравенство (1.2) очевидным образом выполняется, если  $A_1 = A_2$  или если хотя бы одно из этих неотрицательных чисел равно нулю. Поэтому можно считать далее, что  $A_1 \neq A_2$  и  $A_k \neq 0$ ,  $k = 1, 2$ . Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(x) := (A_1)^x \cdot (A_2)^{1-x},$$

непрерывно дифференцируемую на отрезке  $[0, 1]$ . Имеем

$$\psi'(x) = (A_1)^x (A_2)^{1-x} \ln \frac{A_1}{A_2} \quad \forall x \in [0, 1].$$

Ясно, что  $\psi'(x) > 0$  на  $[0, 1]$ , если  $A_1 > A_2$ ;  $\psi'(x) < 0$ , если  $A_1 < A_2$ . В первом случае  $\psi(0) = A_2 \leq \psi(x) \leq \psi(1) = A_1$  на  $[0, 1]$ , а во втором  $A_2 = \psi(0) \geq \psi(x) \geq \psi(1) = A_1$  на  $[0, 1]$ . В обоих случаях  $\psi(x) \leq A_1 + A_2$  на  $[0, 1]$  и неравенство (1.2) доказано при  $n = 2$ .

В случае произвольного  $n \geq 1$  применяется метод полной математической индукции (по  $n$ ). Допустим, что неравенство (1.2) справедливо при  $1 \leq n \leq N$ , и покажем, что оно тогда верно и при  $n = N + 1$ . Заметим прежде всего, что если  $\gamma_{N+1} = 1$ , то  $\gamma_k = 0$ ,  $k = 1, \dots, N$ , и в этом случае соотношение (1.2) принимает такой вид:  $A_{N+1} \leq \sum_{k=1}^{N+1} A_k$ .

Следовательно, в этом случае неравенство (1.2) верно. Пусть теперь  $0 \leq \gamma_{N+1} < 1$ . Тогда  $\sum_{k=1}^N \gamma_k = 1 - \gamma_{N+1}$ ,  $\sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{(1-\gamma_{N+1})} = 1$  и по предположению индукции

$$\prod_{k=1}^N (A_k)^{\frac{\gamma_k}{(1-\gamma_{N+1})}} \leq \sum_{k=1}^N A_k, \quad \text{т. е.} \quad \left[ \prod_{k=1}^N (A_k)^{\gamma_k} \right]^{\frac{1}{(1-\gamma_{N+1})}} \leq \sum_{k=1}^N A_k,$$

или

$$\begin{aligned} \left[ \prod_{k=1}^N (A_k)^{\gamma_k} (A_{N+1})^{\gamma_{N+1}} \right]^{\frac{1}{(1-\gamma_{N+1})}} &\leq \left( \sum_{k=1}^N A_k \right) \cdot (A_{N+1})^{\frac{\gamma_{N+1}}{1-\gamma_{N+1}}} = \\ &= \left[ \left( \sum_{k=1}^N A_k \right)^{(1-\gamma_{N+1})} \cdot (A_{N+1})^{\gamma_{N+1}} \right]^{\frac{1}{1-\gamma_{N+1}}}. \end{aligned}$$

Но по доказанному (при  $n = 2$ )

$$\left( \sum_{k=1}^N A_k \right)^{(1-\gamma_{N+1})} \cdot (A_{N+1})^{\gamma_{N+1}} \leq \sum_{k=1}^{N+1} A_k.$$

Отсюда

$$\left[ \prod_{k=1}^{N+1} (A_k)^{\gamma_k} \right]^{\frac{1}{(1-\gamma_{N+1})}} \leq \left( \sum_{k=1}^{N+1} A_k \right)^{\frac{1}{(1-\gamma_{N+1})}},$$

и неравенство (1.2) при  $n = N + 1$  справедливо.  $\triangleright$

Перед формулировкой следующей леммы для любого множества  $T$  из метрического пространства  $E$  с метрикой  $\rho(x, y)$  и любого  $d \geq 0$  введем множество  $(T)_d := \{z \in T : \rho(z, \partial T) > d\}$ , где  $\partial T$  — граница  $T$  — совокупность всех граничных точек множества  $T$ . Как хорошо известно, множество  $\partial T$  замкнуто. Кроме того,  $(T)_0 = \text{int } T$  — совокупность всех внутренних точек  $T$ .

Заметим, что множество  $(T)_d$  открыто при любом  $d \geq 0$ . Действительно, пусть  $z_0 \in (T)_d$ ; тогда  $\rho(z_0, \partial T) = d + 2h$ , где  $h > 0$ . Положим  $\overline{K(z_0, \delta)} := \{z \in E : \rho(z_0, z) \leq \delta\}$ .

Если  $z_1 \in \overline{K(z_0, h)}$  и  $\eta \in \partial T$ , то  $\rho(z_0, \eta) \leq \rho(z_0, z_1) + \rho(z_1, \eta)$ . Отсюда

$$\rho(z_1, \eta) \geq \rho(z_0, \eta) - \rho(z_0, z_1) \geq \rho(z_0, \partial T) - h = d + h > d.$$

Так как  $\eta$  — произвольная точка  $\partial T$ , то

$$\rho(z_1, \partial T) = \min \{\rho(z, \eta) : \eta \in \partial T\} \geq d + h > d, \quad z_1 \in (T)_d.$$

Если, в частности,  $E = \mathbb{C}^p$ , то  $\mathbb{C}^p$  — метрическое пространство с метрикой  $\tilde{\rho}(z, w) := [\sum_{k=1}^p |z_k - w_k|^2]^{1/2}$ , эквивалентной метрике

$$\rho(z, w) := |z - w|_p = \sum_{k=1}^p |w_k - z_k|.$$

Отметим еще одно известное свойство множества  $T$ .

**Лемма 1.2.** Пусть  $T$  — выпуклое множество в линейном нормированном пространстве  $E$  с нормой  $\|\cdot\|_0$ . Тогда для всех  $d \geq 0$  множество  $(T)_d$  также выпукло.

◁ В начале доказательства напомним, что  $E$  можно рассматривать как линейное метрическое пространство с метрикой

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \rho(x - y, 0).$$

Пусть  $x_j \in (T)_d$ ,  $j = 1, 2$ . Тогда существует число  $h > 0$  такое, что  $\rho(x_j, \partial T) \geq d + 2h$ ,  $j = 1, 2$ . Возьмем любое число  $\alpha$  из  $(0, 1)$  и положим  $y_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ . Пусть  $w$  — произвольный элемент из замкнутого круга

$$\overline{K(y_\alpha, d + h)} := \{y \in E : \|y - y_\alpha\| \leq d + h\}.$$

Тогда  $w = y_\alpha + v_\alpha$ , где  $\|v_\alpha\| \leq d + h$ . Следовательно,

$$w = \alpha(x_1 + v_\alpha) + (1 - \alpha)(x_2 + v_\alpha) = \alpha w_1 + (1 - \alpha)w_2.$$

При этом  $\|w_j - x_j\| = \|v_\alpha\| \leq d + h$  и  $w_j \in \overline{K(x_j, d + h)} \subseteq T$ ,  $j = 1, 2$ . В силу выпуклости  $T$ ,  $w \in T$ . Таким образом,  $\overline{K(y_\alpha, d + h)} \subseteq T$ , откуда  $\rho(y_\alpha, \partial T) \geq d + h > d$  и  $y_\alpha \in (T)_d$ . ▷

**1.1.2.** Назовем последовательность  $\Lambda := (\lambda_k)_{k=1}^\infty$  в  $\mathbb{C}^p$  :

- почти невырожденной, если существует номер  $N$  такой, что при всех  $n \geq N$   $\lambda_n \neq 0$ ,
- невырожденной, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n|_p > 0$ .

Для любой последовательности  $\beta := (\beta_n)_{n=1}^\infty$ ,  $\beta_n \in \mathbb{C}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , любой почти невырожденной последовательности  $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$  и произвольного выпуклого компакта  $Q$  положим

$$\gamma_Q(\beta, \Lambda) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |\beta_n|}{|\lambda_n|_p} + H_Q(\psi(\lambda_n)) \right].$$

Здесь и далее  $\psi(\lambda_n) = \left\{ \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|_p} \right\}_{n=1}^\infty$  и для любого  $z$  из  $\mathbb{C}^p$

$$H_Q(z) = \max \left[ \operatorname{Re} \langle z, w \rangle_p : w \in Q \right] = |z|_p H_Q \left( \frac{z}{|z|_p} \right)$$

— опорная функция  $Q$ . Для любого выпуклого множество  $G$  в  $\mathbb{C}^p$  обозначим символом  $\operatorname{Concom}(G)$  множество всех выпуклых компактов из  $G$ .

**Лемма 1.3.** Если  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $L \in [0, +\infty)$  и  $\Lambda$  — почти невырожденная последовательность, то равносильны следующие условия:

- 1)  $\gamma_Q(\beta, \Lambda) < -L$  при любом  $Q \in \operatorname{Concom}(G)_L$ ;
- 2)  $\gamma_Q(\beta, \Lambda) \leq -L$  при любом  $Q \in \operatorname{Concom}(G)_L$ .

$\triangleleft$  Очевидно, что 1)  $\Rightarrow$  2). Пусть теперь справедливо утверждение 2) и пусть  $Q_0 \in \operatorname{Concom}(G)_L$ . Тогда  $\rho(Q_0, \partial G) = L + 2h$ , где  $h > 0$ . Если  $Q_1 := Q_0 + \overline{K_p(0, h)}$ , то  $Q_1 \in \operatorname{Concom}(G)_L$ , и потому

$$-L \geq \gamma_{Q_1}(\beta, \Lambda) = \gamma_{Q_0}(\beta, \Lambda) + h.$$

Отсюда  $\gamma_{Q_0}(\beta, \Lambda) \leq -L - h < -L$  и утверждение 1) верно.  $\triangleright$

Характеристика  $\gamma_{Q_0}(\beta, \Lambda)$  и понятие почти невырожденной последовательности используются в п. 1.1.5 (в теореме 1.6 и ее следствиях). Пока же будем считать, что  $\Lambda$  — произвольная последовательность точек из  $\mathbb{C}^p$ .

**Теорема 1.1.** Множество  $A$  всех точек абсолютной сходимости ряда (1.1) выпукло, а сам ряд сходится абсолютно в  $A(\operatorname{int} A)$ .

◁ Пусть  $\tilde{D}_\alpha := \alpha D_1 + (1 - \alpha)D_2$ , где  $D_j := (z_{1,j}, \dots, z_{p,j}) \in A$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Имеем при любом  $m \geq 1$

$$\begin{aligned} \tau_m &:= |a_m \exp \langle \lambda_m, \tilde{D}_\alpha \rangle_p| = \\ &= \left| a_m \exp \sum_{l=1}^p \lambda_{l,m} z_{l,1} \right|^\alpha \cdot \left| a_m \exp \sum_{l=1}^p \lambda_{l,m} z_{l,2} \right|^{1-\alpha} \leq \\ &\leq |a_m \exp \langle \lambda_m, D_1 \rangle_p| + |a_m \exp \langle \lambda_m, D_2 \rangle_p| \end{aligned}$$

(здесь использована лемма 1.1 при  $n = 2$ ). Так как  $D_j \in A$  при  $j = 1, 2$ , то  $\sum_{m=1}^\infty \tau_m < +\infty$  и  $\tilde{D}_\alpha \in A$ . Следовательно, множество  $A$  выпукло.

Чтобы доказать второе утверждение теоремы, зафиксируем вначале произвольную точку  $z_0$  из  $\text{int } A$  и найдем  $q$  точек ( $q \geq 2$ )  $z_k(z_{1,k}, \dots, z_{p,k})$  из  $\text{int } A$  таких, что  $z_0 \in \text{int } B_0$ ,  $B_0 \subset A$ , где  $B_0$  — выпуклый многогранник (симплекс) с граничной поверхностью

$$\begin{aligned} S_0 &:= \left\{ v(v_1, \dots, v_p) : v_j = \sum_{s=1}^q \mu_s z_{j,s}, j = 1, 2, \dots, p; \right. \\ &\quad \left. 0 \leq \mu_s \leq 1, 1 \leq s \leq q; \sum_{s=1}^q \mu_s = 1 \right\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Если  $m \geq 1$ , то, учитывая, что при любом  $v \in S_0$

$$\langle \lambda_m, v \rangle_p = \sum_{l=1}^p \lambda_{l,m} v_l = \sum_{l=1}^p \lambda_{l,m} \sum_{s=1}^q \mu_s z_{l,s} = \sum_{s=1}^q \mu_s \sum_{l=1}^p \lambda_{l,m} z_{l,s},$$

получаем равенство

$$\begin{aligned} \beta_m &:= |a_m| \cdot \max \{ |\exp \langle \lambda_m, v \rangle_p| : v \in S_0 \} = \\ &= |a_m| \cdot \max \left\{ \prod_{s=1}^q \left| \exp \sum_{l=1}^p \lambda_{l,m} z_{l,s} \right|^{\mu_s} : 0 \leq \mu_s \leq 1, \sum_{s=1}^q \mu_s = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Согласно неравенству (1.2)

$$\begin{aligned} \beta_m &\leq |a_m| \sum_{s=1}^q \left| \exp \sum_{l=1}^p \lambda_{l,m} z_{l,s} \right| = |a_m| \left| \sum_{s=1}^q \exp \langle \lambda_m, z_s \rangle_p \right| \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^q |a_m| |\exp \langle \lambda_m, z_s \rangle_p|. \end{aligned}$$

Так как  $z_s \in A$  при  $s = 1, 2, \dots, q$ , то  $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m < +\infty$ .

Всегда можно выбрать число  $\delta > 0$  настолько малым, чтобы

$$\overline{K_p(z_0, \delta)} \subset \text{int } B_0.$$

В силу принципа максимума модуля аналитической функции

$$|a_m| \max \left\{ |\exp \langle \lambda_m, z \rangle_p| : z \in \overline{K_p(z_0, \delta)} \right\} \leq \beta_m \quad \forall m \geq 1,$$

и ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| |\exp \langle \lambda_m, z \rangle_p|$  сходится равномерно на  $\overline{K_p(z_0, \delta)}$ . Остается только применить лемму Гейне — Бореля и установить, что последний ряд сходится равномерно на любом компакте из  $\text{int } A$ .  $\triangleright$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Теорема 1.1 в одномерном случае была доказана впервые Хилле [155].

**Следствие 1.** Если  $G$  — произвольная выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ , то равносильны такие утверждения:

- 1) ряд (1.1) сходится абсолютно в каждой точке  $G$ ;
- 2) ряд (1.1) сходится абсолютно в  $A(G)$ .

**Следствие 2.** Пусть ряд (1.1) сходится абсолютно в окрестности какой-либо точки  $z_0$  из  $\mathbb{C}^p$ . Тогда существует максимальная область абсолютной сходимости ряда (1.1), содержащая точку  $z_0$ . Эта область  $T$  выпукла (а именно,  $T = (A)_0$ ).

В дальнейшем максимальная область абсолютной сходимости ряда (1.1) обозначается символом  $\text{abc}(1.1)$ .

**1.1.3.** Введем еще три множества, определяемые рядом (1.1):

$$B^{(2)} := \{z \in \mathbb{C}^p : \sup_{n \geq 1} |a_n| |e^{\langle \lambda_n, z \rangle_p}| < +\infty\};$$

$$B^{(0)} := \{z \in \mathbb{C}^p : \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| |e^{\langle \lambda_n, z \rangle_p}| = 0\};$$

$$Cn := \{z \in \mathbb{C} : \text{ряд (1.1) сходится в точке } z\}.$$

Очевидно, что  $A \subseteq Cn \subseteq B^{(0)} \subseteq B^{(2)}$ .

**Теорема 1.2.** Множество  $B^{(2)}$  выпукло.

$\triangleleft$  Пусть  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $z_j \in B^{(2)}$ ,  $j = 1, 2$ . Тогда

$$\exists d < +\infty : \sup_{n \geq 1} |a_n| |e^{\langle \lambda_n, z_j \rangle_p}| \leq d, \quad j = 1, 2.$$



Если  $\tilde{z}_\alpha := \alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2$  и  $m \geq 1$ , то по лемме 1.1

$$\begin{aligned} & |a_m \exp \langle \tilde{z}_\alpha, \lambda_m \rangle_p| = \\ & = |a_m \exp \alpha \langle \lambda_m, z_1 \rangle_p| \cdot |\exp(1 - \alpha) \langle \lambda_m, z_2 \rangle_p| = \\ & = |a_m e^{\langle \lambda_m, z_1 \rangle_p}|^\alpha \cdot |a_m e^{\langle \lambda_m, z_2 \rangle_p}|^{1-\alpha} \leq \\ & \leq |a_m| |\exp \langle \lambda_m, z_1 \rangle_p| + |a_m \exp \langle \lambda_m, z_2 \rangle_p| \leq 2d. \end{aligned}$$

Отсюда  $\sup_{m \geq 1} |a_m e^{\langle \lambda_m, \tilde{z}_\alpha \rangle_p}| \leq 2d < +\infty$  и  $\tilde{z}_\alpha \in B^{(2)}$ .  $\triangleright$

Аналогично доказывается

**Теорема 1.3.** Множество  $B^{(0)}$  выпукло.

Таким образом, множество  $Cn$  всех точек сходимости ряда (1.1) содержит выпуклое множество  $A$  и, в свою очередь, содержится в выпуклом множестве  $B^{(0)}$ . На примерах можно, однако, показать, что даже в случае  $p = 1$  множества  $Cn$  и  $\text{int } Cn$  могут оказаться невыпуклыми.

Из теоремы, которая будет сейчас доказана, следует, что подобная ситуация невозможна, если числа  $|\lambda_m|_p$  при неограниченном возрастании  $m$  достаточно быстро стремятся к  $+\infty$ .

**Теорема 1.4.** Пусть показатели  $\{\lambda_n\}$  ряда (1.1) таковы, что

$$L := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|_p} < +\infty. \quad (1.4)$$

Тогда

$$(B^{(2)})_L \subseteq A. \quad (1.5)$$

$\triangleleft$  Пусть  $z_0 = (z_{1,0}, \dots, z_{p,0})$  — произвольная точка из выпуклой области  $(B^{(2)})_L$ . Тогда существует  $h > 0$  такое, что  $\rho(z_0, \partial B^{(2)}) = L + 2h$  и  $\overline{K}(z_0, L + h) \subset \text{int}(B^{(2)})$ .

Найдем (замкнутый) симплекс  $B_0$  с границей  $S_0$  вида (1.3) такой, что  $\overline{K}(z_0, L + h) \subset \text{int } B_0$ ;  $B_0 \subset \text{int } B^{(2)}$ . Заметим, что по леммам 1.2 и 1.3  $(B^{(2)})_L$  и  $\text{int } B_0$  — выпуклые области в  $\mathbb{C}^p$ . Используя, как при доказательстве теоремы 1.1, принцип максимума модуля аналитической функции, получаем при всех  $z \in \overline{K}(z_0, L + h)$  и

$m \geq 1$ :

$$\begin{aligned} & |a_m \exp\langle \lambda_m, z \rangle_p| \leq \max \{ |a_m \exp\langle \lambda_m, v \rangle_p| : v \in S_0 \} = \\ & = \max \left\{ \left| a_m \exp \left\langle \lambda_m, \sum_{s=1}^q \mu_s z_s \right\rangle_p \right| : 0 \leq \mu_s \leq 1, \sum_{s=1}^q \mu_s = 1 \right\} = \\ & = \max \left\{ \prod_{s=1}^q |a_m \exp\langle \lambda_m, z_s \rangle_p|^{\mu_s} : \mu_s \geq 0; \sum_{s=1}^q \mu_s = 1, 1 \leq s \leq q \right\}. \end{aligned}$$

По лемме 1.1 при всех  $m > 1$  и  $z \in \overline{K(z_0, L+h)}$

$$|a_m \exp\langle \lambda_m, z \rangle_p| \leq \sum_{s=1}^q |a_m| |\exp\langle \lambda_m, z_s \rangle_p| \leq T_q < +\infty.$$

Возьмем теперь для любого  $m \geq 1$  точку  $\tilde{z}_m = (\tilde{z}_{1,m}, \dots, \tilde{z}_{p,m})$  такую, что

$$(\tilde{z}_m)_j = \tilde{z}_{j,m} = z_{j,0} + (L+h) e^{-i \arg \lambda_{j,m}} \quad \forall j \leq m.$$

Тогда  $\tilde{z}_m \in \overline{K(z_0, L+h)}$  и при любом  $m \geq 1$

$$\begin{aligned} T_q & \geq |a_m \exp\langle \lambda_m, \tilde{z}_m \rangle_p| = \\ & = |a_m \exp\langle \lambda_m, z_0 \rangle_p| |\exp\langle \lambda_m, \tilde{z}_m - z_0 \rangle_p| = \\ & = e^{(L+h)|\lambda_m|_p} \cdot |a_m \exp\langle \lambda_m, z_0 \rangle_p|. \end{aligned}$$

Отсюда  $|a_m \exp\langle \lambda_m, z_0 \rangle_p| \leq T_q e^{-(L+h)|\lambda_m|_p}$ ,  $m \geq 1$ .

В силу условия (1.4) существует  $N_1 < +\infty$  такое, что для любого  $m \geq N_1$   $|\lambda_m|_p > (L + \frac{h}{2})^{-1} \ln m$ . Но тогда для тех же  $m$

$$|a_m| |\exp\langle \lambda_m, z_0 \rangle_p| \leq T_q(m)^{-\frac{(L+h)}{(L+h/2)}} =: \beta_m, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m < +\infty. \triangleright$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Так как  $A$  — выпуклое множество, а  $(B^{(2)})_L$  — область, то соотношение (1.5) равносильно тому, что  $(B^{(2)})_L \subseteq \text{int } A$ .

**Следствие 1.** При условии (1.4)  $(Cn)_L \subseteq (B^{(0)})_L \subseteq (B^{(2)})_L \subseteq A$ .

**Следствие 2.** Пусть выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|_p} = 0. \quad (1.6)$$

Тогда

$$\operatorname{int} Cn = \operatorname{int} B^{(0)} = \operatorname{int} B^{(2)} = \operatorname{int} A. \quad (1.7)$$

◁ Действительно, при условии (1.6)

$$(Cn)_0 \subseteq (B^{(0)})_0 \subseteq (B^{(2)})_0 \subseteq \operatorname{int} A.$$

С другой стороны, всегда

$$\operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int} Cn = (Cn)_0 \subseteq (B^{(0)})_0 \subseteq (B^{(2)})_0,$$

откуда и следуют равенства (1.7). ▷

**Следствие 3.** Пусть показатели ряда (1.1) удовлетворяют условию (1.6) и пусть  $G$  — произвольная выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ . Тогда любое из двух равносильных утверждений 1), 2) следствия 1 теоремы 1.1 эквивалентно каждому из таких утверждений:

3) ряд (1.1) сходится в любой точке  $G$ ;

4) ряд (1.1) сходится в  $A(G)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Утверждения следствия 2, вообще говоря, могут оказаться несправедливыми, если условие (1.6) заменить чуть менее жестким:  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|_p} \leq \eta$ , каким бы малым ни было число  $\eta$  из  $(0, +\infty)$ . Убедимся в этом на примере, ограничившись ради простоты изложения одномерной ситуацией. Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n)^{z/\eta}}$ . Здесь для всех  $n \geq 1$

$$\lambda_n = \frac{1}{\eta} \ln n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = \eta \quad (p = 1).$$

Как известно (см., например, [131, с. 328]), для этого ряда  $c = 0$ ,  $a = \eta$ ;  $\operatorname{int} Cn = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ ;  $\operatorname{int} A = \{z : \operatorname{Re} z > \eta\}$  и  $\operatorname{int} Cn \neq \operatorname{int} A$  (точнее,  $\operatorname{int} A$  — собственное подмножество  $\operatorname{int} Cn$ ). В этом же примере перестает быть верным и следствие 3.

**1.1.4.** Отметим еще некоторые свойства множеств  $B^{(0)}$  и  $B^{(2)}$ , которые представляются небезынтересными.

**Теорема 1.5.** Последовательность  $\{a_m e^{\langle \lambda_m, z \rangle_p}\}_{m=1}^{\infty}$  равномерно ограничена в  $\operatorname{int} B^{(2)}$  и стремится к нулю при  $m \rightarrow +\infty$  в пространстве  $A(\operatorname{int} B^{(0)})$ .

◁ 1. Пусть  $Q$  — произвольный компакт выпуклой области  $(B^{(2)})_0$ . «Погрузим» его, как при доказательстве теоремы 1.4, в симплекс  $B_0$

так, что  $Q \subseteq B_0 \subseteq (B^{(2)})_0$ . Пусть  $S_0$  — граница (1.3) симплекса  $B_0$ . По принципу максимума модуля при любых  $m \geq 1$  и  $z \in Q$

$$\begin{aligned} |a_m| |e^{\langle \lambda_m, z \rangle}| &\leq \max_{z \in S_0} |a_m| |e^{\langle \lambda_m, z \rangle}| = \\ &= \max \left\{ \prod_{s=1}^q |a_m \exp \langle \lambda_m, z_s \rangle|^{|\mu_s|} : 0 \leq \mu_s \leq 1, \sum_{s=1}^q \mu_s = 1 \right\} \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^q |a_m| |\exp \langle \lambda_m, z_s \rangle| \leq T(Q) < +\infty. \end{aligned}$$

При этом число  $T(Q)$  не зависит от номера  $m \geq 1$  и от точки  $z$  из  $Q$ . Таким образом,  $\sup \{ |a_m| |e^{\langle \lambda_m, z \rangle}| : m \geq 1, z \in Q \} \leq T(Q) < +\infty$  и последовательность  $\{a_m \exp \langle \lambda_m, z \rangle\}_{m=1}^\infty$  равномерно ограничена в  $\text{int } B^{(2)}$ , т. е. ограничена в пространстве Фреше  $A(\text{int } B^{(2)})$ .

2. Пусть теперь  $Q$  — произвольный выпуклый компакт в  $(B^{(0)})_0$ . Как и прежде, погрузим его в симплекс  $B_0$  с границей  $S_0$  вида (1.3) так, чтобы  $Q \subseteq B_0 \subseteq \text{int } B^{(0)}$ . Тогда для всех  $m \geq 1$  и  $z \in Q$

$$|a_m| |e^{\langle \lambda_m, z \rangle}| \leq \sum_{s=1}^q |a_m| |e^{\langle \lambda_m, z_s \rangle}|.$$

Зададим произвольно малое  $\varepsilon > 0$  и для каждого  $s = 1, 2, \dots, q$  найдем номер  $N_s$  такой, что

$$|a_m| |e^{\langle \lambda_m, z_s \rangle}| < \frac{\varepsilon}{(q+1)} \quad \forall m > N_s.$$

Пусть  $N_0 := \max\{N_s : 1 \leq s \leq q\}$ . Тогда

$$|a_m| |e^{\langle \lambda_m, z \rangle}| < \varepsilon \quad \forall m > N_0, \forall z \in Q,$$

и последовательность  $\{a_m e^{\langle \lambda_m, z \rangle}\}_{m=1}^\infty$  стремится к нулю по топологии  $A(\text{int } B^{(0)})$ .  $\triangleright$

**Следствие.** Пусть  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ . Тогда:

- 1) если  $\sup_{m \geq 1} |a_m e^{\langle \lambda_m, z \rangle}| < +\infty$  для любого  $z \in G$ , то  $\{a_m e^{\langle \lambda_m, z \rangle}\}_{m=1}^\infty$  — ограниченная последовательность в  $A(G)$ ;
- 2) если последовательность  $\{a_m e^{\langle \lambda_m, z \rangle}\}_{m=1}^\infty$  стремится к нулю поточечно во всей области  $G$ , то она стремится к нулю в  $A(G)$ .

**1.1.5.** Перейдем теперь к описанию свойств множеств  $B^{(0)}$  и  $B^{(2)}$ , связанных с коэффициентами ряда (1.1). Напомним вначале, что символ  $\text{Concom } T$  обозначает совокупность всех выпуклых компактов выпуклого же множества  $T$ . В теореме 1.6 и ее следствиях  $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$  — почти невырожденная последовательность.

**Теорема 1.6.** Если  $Q \in \text{Concom}(B^{(0)})_0$ , то

$$\gamma_Q := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + H_Q(\psi(\lambda_n)) \right] < 0, \quad (1.8)$$

$$\text{где } \psi(\lambda_n) := \left\{ \frac{\lambda_{j,n}}{|\lambda_n|_p} \right\}_{j=1}^p.$$

◁ Вначале докажем более слабое неравенство

$$\gamma_Q \leq 0 \quad \forall Q \in \text{Concom}(B^{(0)})_0. \quad (1.9)$$

Рассуждая от противного, допустим, что существует такое  $Q_0 \in \text{Concom}(B^{(0)})_0$ , что  $\gamma_{Q_0} > 0$ .

Тогда найдется бесконечная последовательность номеров  $n_k \uparrow +\infty$  такая, что при  $k = 1, 2, \dots$

$$\frac{\ln |a_{n_k}|}{|\lambda_{n_k}|_p} + H_{Q_0}(\psi(\lambda_{n_k})) > \frac{\gamma_{Q_0}}{2}. \quad (1.10)$$

С другой стороны, по теореме 1.5 последовательность  $\{a_n e^{\langle \lambda_n, z \rangle_p}\}_{n=1}^\infty$  стремится к нулю равномерно на  $Q_0$  и потому для любого  $\varepsilon \in (0, 1)$  существует номер  $N_1 = N_1(\varepsilon)$  такой, что

$$\frac{\ln |a_m|}{|\lambda_m|_p} + H_{Q_0}(\psi(\lambda_m)) < \frac{\ln \varepsilon}{|\lambda_m|_p} < 0 < \frac{\gamma_{Q_0}}{2} \quad \forall m \geq N_1. \quad (1.11)$$

Ясно, что неравенства (1.10) и (1.11) несовместимы при всех достаточно больших номерах  $m$  и  $k$ . Полученное противоречие доказывает справедливость соотношения (1.9). Для завершения доказательства достаточно учесть, что  $(B^{(0)})_0$  — выпуклая область, и сослаться на лемму 1.3. ▷

**Следствие 1.** Пусть  $L \in [0, +\infty)$ . Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + H_Q(\psi(\lambda_n)) \right] < -L \quad \forall Q \in \text{Concom}(B^{(0)})_L. \quad (1.12)$$

$\triangleleft$  Действительно, если  $Q_3 \in \text{Concom}(B^{(0)})_L$  и  $d_1 = \rho(Q_3, \partial B^{(0)})$ , то  $d_1 = L + 2h_1$ , где  $h_1 > 0$ . Следовательно,

$$Q_4 := Q_3 + \overline{K_p(0, L + h)} \in \text{Concom}(B^{(0)})_0.$$

По теореме 1.6  $0 > \gamma_{Q_4} = \gamma_{Q_3} + L + h$ , откуда  $\gamma_{Q_3} < -L - h < -L$ .  $\triangleright$

**Следствие 2.** Если  $\{a_n e^{\langle \lambda_n, z \rangle_p}\}_{n=1}^\infty$  — последовательность, поточечно стремящаяся к нулю в выпуклой области  $G$ , то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + H_Q(\psi(\lambda_n)) \right] < -L$$

при всех  $L \in [0, +\infty)$  и  $Q \in \text{Concom}((G)_L)$ .

**Теорема 1.7.** Пусть показатели  $\{\lambda_n\}$  ряда (1.1) таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n|_p = \infty. \quad (1.13)$$

Тогда

$$\gamma_Q := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + H_Q(\psi(\lambda_n)) \right] < 0 \quad \forall Q \in \text{Concom}(B^{(2)})_0. \quad (1.14)$$

Эта теорема доказывается точно так же, как и теорема 1.5. Именно, вначале показываем, что  $\gamma_Q \leq 0$  для всех  $Q \in \text{Concom}(B^{(2)})_0$ , а затем ссылаемся на лемму 1.3 (при  $L = 0$ ).

**Следствие 1.** Если выполнено условие (1.13) и  $L \in [0, +\infty)$ , то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + H_Q(\psi(\lambda_n)) \right] < -L \quad \forall Q \in \text{Concom}((B^{(2)})_L). \quad (1.15)$$

**Следствие 2.** Пусть показатели  $\{\lambda_n\}$  ряда (1.1) удовлетворяют условию (1.13) и пусть последовательность  $\{a_n \exp \langle \lambda_n, z \rangle_p\}_{n=1}^\infty$  поточечно ограничена в некоторой выпуклой области  $G$ . Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + H_Q(\psi(\lambda_n)) \right] < -L \quad \forall Q \in \text{Concom}((G)_L).$$

В частности, при всех  $Q \in \text{Concom } G$   $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + H_Q(\psi(\lambda_n)) \right] < 0$  (здесь учтено, что  $(G)_0 = G$ ).

**1.1.6.** Приведем результат, вытекающий непосредственно из теоремы 1.6 и относящийся к области сходимости ряда (1.1).

**Теорема 1.8.** Пусть показатели  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  ряда (1.1) удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n|_p > 0. \quad (1.16)$$

Пусть, далее, ряд (1.1) сходится поточечно в некоторой выпуклой области  $G$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + H_Q(\psi(\lambda_n)) \right] < 0 \quad \forall Q \in \text{Concom } G. \quad (1.17)$$

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что при ее предположениях  $G \subseteq B^{(0)}$ , и применить теорему 1.6.

**1.1.7.** Докажем утверждение, являющееся обращением (при одном дополнительном предположении) следствия 1 теоремы 1.7.

**Теорема 1.9.** Пусть показатели  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  ряда (1.1) таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|_p} =: L < +\infty. \quad (1.18)$$

Пусть, далее, выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + H_Q(\psi(\lambda_n)) \right] \leq -L \quad \forall Q \in \text{Concom}(B^{(2)})_L. \quad (1.19)$$

Тогда  $(B^{(2)})_L \subseteq A_0 := \text{int } A$ .

◁ Пусть  $Q_0 \in \text{Concom}(B^{(2)})_L$ . По теореме 1.5 последовательность  $\{a_n e^{\langle \lambda_n, z \rangle_p}\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно ограничена на компакте

$$Q_1 := Q_0 + \overline{K_p(0, L + \delta)}$$

из выпуклой области  $(B^{(2)})_{\delta/2}$ , где  $\rho(Q_0, \partial B^{(2)}) = L + 2\delta$ ,  $\delta > 0$ . Поэтому

$$\exists M \in (1, +\infty) : |a_m \exp \langle \lambda_m, z \rangle_p| \leq M \quad \forall m \geq 1, \forall z \in Q_1.$$

Отсюда (для тех же  $m$  и  $z$ )  $\ln |a_m| + |\lambda_m|_p H_{Q_1}(\psi(\lambda_m)) \leq \ln M$  или, что то же самое,  $\ln |a_m| + |\lambda_m|_p (L + \delta) + |\lambda_m|_p H_{Q_0}(\psi(\lambda_m)) \leq \ln M$ . Но тогда для всех  $m \geq 1$  и  $z \in Q_0$

$$|a_m e^{\langle \lambda_m, z \rangle_p}| \leq |a_m| \exp [|\lambda_m|_p H_{Q_0}(\psi(\lambda_m))] \leq M e^{-(L+\delta)|\lambda_m|_p}.$$

В силу условий (1.18), (1.19) существует номер  $N_1 < +\infty$  такой, что при любых  $m \geq N_1$  и  $z \in Q_0$

$$|a_m e^{\langle \lambda_m, z \rangle_p}| \leq M e^{-(L+\delta)|\lambda_m|_p} < \frac{M}{(m)^{\frac{L+\delta}{L+\delta/2}}} =: \gamma_m, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < +\infty.$$

Следовательно,  $Q_0 \subset A$  и  $(B^{(2)})_L \subset A$ . Так как  $A$  и  $(B^{(2)})_L$  — выпуклые множества, причем  $(B^{(2)})_L$  — область, то из последнего включения получаем:

$$(B^{(2)})_L \subseteq \text{int } A = A_0. \triangleright$$

**Теорема 1.10.** Пусть показатели  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  удовлетворяют условию (1.18) и пусть последовательность  $\{a_n e^{\langle \lambda_n, z \rangle_p}\}_{n=1}^{\infty}$  поточечно ограничена в некоторой выпуклой области  $G$ . Пусть, наконец, справедливо соотношение

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_n|_p} \ln |a_n| + H_Q(\psi(\lambda_n)) \right] \leq -L \quad \forall Q \in \text{Concom}(G)_L.$$

Тогда  $(G)_L \subseteq A$ .

◁ Для доказательства данной теоремы достаточно заметить, что  $G \subseteq B^{(2)}$ , и повторить буквально доказательство теоремы 1.8 с той разницей, что вместо теоремы 1.5 приходится ссылаться на следствие этой теоремы. ▷

**Следствие.** Пусть выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|_p} = 0 \tag{1.20}$$

и последовательность  $\{a_n e^{\langle \lambda_n, z \rangle_p}\}_{n=1}^{\infty}$  поточечно ограничена в некоторой выпуклой области  $G$ . Пусть, наконец, справедливо соотношение

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_n|_p} \ln |a_n| + H_Q(\psi(\lambda_n)) \right] \leq 0 \quad \forall Q \in \text{Concom } G. \tag{1.21}$$

Тогда  $G \subseteq \text{int } A = A_0$ .

Сформулируем еще один результат, вытекающий из теорем 1.5–1.10.



**Теорема 1.11.** Пусть  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ . Тогда:

а) если ряд (1.1) сходится поточечно в  $G$  и выполняется условие (1.16) то справедливо соотношение (1.21);

б) обратно, если показатели  $\{\lambda_n\}$  удовлетворяют условию (1.20), а коэффициенты  $\{a_n\}$  ряда (1.1) таковы, что выполняется соотношение (1.21), то  $G \subseteq (A)_0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В утверждении а) теоремы 1.11 условие (1.16) можно заменить более слабым предположением о почти невырожденности последовательности  $\{\lambda_n\}$  в  $\mathbb{C}^p$ .

**Следствие.** Пусть  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$  и пусть выполнено условие (1.20). Тогда равносильны такие утверждения:

- 1) ряд (1.1) сходится поточечно в  $G$ ;
- 2) ряд (1.1) сходится в  $A(G)$ ;
- 3) ряд (1.1) сходится абсолютно в  $A(G)$ ;
- 4) выполнено условие (1.21).

**1.1.8.** Остановимся на случае, когда выпуклая область  $G$  ограничена. Можно всегда считать, что  $O \in G$ . Общий случай сводится к рассматриваемому заменой переменной  $w = z + (-z_0)$ , т. е. сдвигом на  $-z_0$ , где  $z_0$  — произвольно зафиксированная точка  $G$ , и переходом к ограниченной выпуклой области  $G_1 = G + (-z_0)$ , содержащей начало координат.

Если  $O \in G$ , то система компактов из  $\text{Concom } G$  вида  $\{\overline{\alpha G} : \alpha \in [0, 1)\}$  будет определяющей в том смысле, что

$$\forall Q \in \text{Concom } G \quad \exists \alpha_0 \in [0, 1) : Q \subset \overline{\alpha_0 G}.$$

Допустим, что выполнено условие (1.21). Тогда, в частности,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + \alpha H_G(\psi(\lambda_n)) \right] \leq 0 \quad \forall \alpha \in [0, 1)$$

(мы предполагаем, что условие (1.16) также выполняется). Тогда

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + H_G(\psi(\lambda_n)) \right] &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + \alpha H_G(\psi(\lambda_n)) \right] + \\ &+ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha) H_G(\psi(\lambda_n)) \leq (1 - \alpha) D_0, \end{aligned}$$

где  $D_0 := \sup\{H_G(z) : |z|_p \leq 1\}$ ,  $D_0 < +\infty$ . Переходя к пределу при  $\alpha \uparrow 1$ , получаем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + H_G(\psi(\lambda_n)) \right] \leq 0. \quad (1.22)$$

Пусть, обратно, выполнено условие (1.22). Тогда для любого  $\alpha \in [0, 1)$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + \alpha H_G(\psi(\lambda_n)) \right] &\leq \\ &\leq (-1 + \alpha) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} H_G(\psi(\lambda_n)) \leq d_0(-1 + \alpha) < 0, \end{aligned}$$

где  $d_0 := \inf\{H_G(z) : |z|_p \leq 1\} > 0$ , так как  $O \in G$ . Отсюда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + \alpha H_G(\psi(\lambda_n)) \right] < 0 \quad \forall \alpha \in [0, 1).$$

Но тогда  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + H_Q(\psi(\lambda_n)) \right] \leq 0$  при любом  $Q \in \text{Concom } G$  и выполнено условие (1.21). Таким образом, при выполнении условия (1.16) соотношения (1.21) и (1.22) равносильны. Поэтому теореме 1.11 можно дополнить, с учетом следствия теоремы 1.10, таким результатом.

**Теорема 1.12.** Пусть  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$  и  $O \in G$ . Тогда, если выполнено условие (1.16) и ряд (1.1) сходится поточечно в  $G$  или по топологии  $A(G)$ , то справедливо соотношение (1.22). Обратно, если выполнены условия (1.20) и (1.22), то ряд (1.1) сходится абсолютно в  $A(G)$ .

И здесь предположение о выполнении условия (1.16) можно заменить более слабым требованием, чтобы последовательность  $\{\lambda_n\}$  была почти невырожденной в  $\mathbb{C}^p$ . Кроме того, от предположения  $0 \in G$  можно избавиться с помощью линейной замены  $z = w + z_0$ , где  $z_0$  — произвольно взятая точка  $G$ , а  $w$  — новая независимая переменная. Очевидно, что при такой замене общий вид ряда (1.1) и его показатели  $\lambda_k$  не меняются.

Последний результат имеется фактически в работе [160, предложения 15, 16 и их следствия], которой предшествовал ряд статей (см., например, [41, 68]), содержащих частные случаи этой теоремы (как правило, при более жестких исходных предположениях). Так, в работе [41] доказано в случае  $p = 1$ , что если  $|\lambda_n|_1 := |\lambda_n| \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , то справедливо соотношение (1.22). Там же (и снова в случае  $p = 1$ ) установлено, что если выполняются условия (1.20) и (1.22), то ряд (1.1) сходится абсолютно в  $A(G)$ . При этом (в обоих результатах) предполагается, что  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$ , содержащая начало координат.

Многомерный случай был рассмотрен позднее в статье [164] Ле Хай Хоя, получившего, в частности, следующий результат.

**Теорема 1.13.** Пусть  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ . Тогда, если  $|\lambda_n|_p \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$  и ряд (1.1) сходится в  $A(G)$ , то справедливо соотношение (1.22). Обратно, если выполнены условия (1.20) и (1.22), то ряд (1.1) сходится абсолютно в  $A(G)$ .

Сравнивая эту теорему с теоремой 1.12, видим, что обратные утверждения в них совпадают, а прямое утверждение в теореме 1.12 получено при менее жестком дополнительном условии.

Теоремы 1.2–1.11 являются, по-видимому, новыми.

## 1.2. Описание полной области абсолютной сходимости ряда (1.1)

**1.2.1.** Результаты из раздела 1.1 позволяют охарактеризовать полную область абсолютной сходимости  $A_0 = \text{abc}(1.1)$  ряда (1.1).

Если  $z_0 \in A_0$ , то  $z_0 \in \text{Concom } A_0$ , и при выполнении условия (1.16) по теореме 1.8  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + H_{\{z_0\}}(\psi(\lambda_n)) \right] < 0$ . При этом

$$H_{\{z_0\}}(\psi(\lambda_n)) = \Re \sum_{k=1}^p z_{k,0} \frac{\lambda_{k,n}}{|\lambda_n|_p} = \frac{1}{|\lambda_n|_p} \Re \langle z_0, \lambda_n \rangle_p \quad \forall n \geq N.$$

Обозначим символом  $B_\Lambda$  множество всех точек  $z$  из  $\mathbb{C}^p$  таких, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n|_p} [\ln |a_n| + \Re \langle z, \lambda_n \rangle_p] < 0. \quad (1.23)$$

Как нетрудно проверить, множество  $B_\Lambda$  выпукло и открыто. Как было только что отмечено,  $A_0 \subseteq B_\Lambda$ .

Пусть, обратно,  $z_1$  — произвольная точка  $B_\Lambda$ . Тогда существует  $h > 0$  такое, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + \frac{\Re \langle z_1, \lambda_n \rangle_p}{|\lambda_n|_p} \right] \leq -2h.$$

Пусть  $\overline{K_p(0, h)} + z_1 =: V_1$ . Имеем для любого  $\alpha \in S^1 := \{w \in \mathbb{C}^p : |w|_p = 1\}$ :

$$H_{V_1}(\alpha) = \Re \langle z_1, \alpha \rangle + h,$$

откуда при всех  $n \geq N_1$

$$\frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + H_{V_1}(\psi(\lambda_n)) \leq \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} + h + \frac{\Re \langle z_1, \lambda_n \rangle_p}{|\lambda_n|_p} \leq -\frac{3}{2}h + h = -\frac{h}{2} < 0.$$

Если показатели  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  удовлетворяют условию (1.20), то по пункту *b*) теоремы 1.11, примененному к  $G = (V_1)_0$ , ряд (1.1) сходится абсолютно в  $A((V_1)_0)$  и подавно сходится абсолютно в точке  $z$ . Отсюда  $B_\Lambda \subseteq A_0$ . Таким образом, справедлива

**Теорема 1.14.** *Если выполняется условие (1.20), то множество  $A_0$  совпадает с совокупностью  $B_\Lambda$  тех и только тех точек, которые удовлетворяют неравенству (1.23).*

Полученное описание множества  $A_0 = \text{abc}(1.1)$  не слишком эффективно. Чтобы определить область  $A_0$ , желательно найти ее опорную функцию  $H_{A_0}(z)$ . Это и будет сделано в данном разделе с помощью метода, разработанного Г. Л. Лунцем в одномерной ситуации ( $p = 1$ ) в статьях [105, 106].

Перед тем, как сформулировать и доказать соответствующие результаты, приведем некоторые необходимые для дальнейшего определения и обозначения. Для любых  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in S^1$  и  $\delta > 0$  положим

$$l_\Lambda(\alpha; \delta) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln |a_n|}{|\lambda_n|_p} : \left| \frac{\lambda_{k,n}}{|\lambda_n|_p} - \alpha_k \right| \leq \delta, k = 1, \dots, p \right\};$$

$$l_\Lambda(\alpha) := \lim_{\delta \downarrow 0} l_\Lambda(\alpha; \delta).$$

Если для некоторых  $\alpha_0 = (\alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{p,0})$  и  $\delta_0 > 0$  имеется разве лишь конечное число показателей  $\lambda_n$  таких, что  $\left| \frac{\lambda_{k,n}}{|\lambda_n|_p} - \alpha_{k,0} \right| \leq \delta_0$ ,  $k = 1, \dots, p$ , то полагаем  $l_\Lambda(\alpha_0) = -\infty$ . Ясно, что  $l_\Lambda(\alpha, \delta) \geq l_\Lambda(\alpha)$  при любых  $\delta > 0$  и  $\alpha \in S^1$ . Кроме того, если  $l_\Lambda(\alpha_1) > -\infty$ , то  $\alpha_1 \in \Lambda'$ , где  $\Lambda'$  — совокупность всех предельных точек множества  $\Lambda = \left\{ \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|_p} : n = 1, 2, \dots \right\}$  из  $S^1$ .

**Теорема 1.15.** *Пусть точка  $z_0 \in \mathbb{C}^p$  такова, что*

$$\exists \alpha_0 \in S^1 : \Re \langle \alpha_0, z_0 \rangle_p > -l_\Lambda(\alpha_0). \quad (1.24)$$

*Тогда ряд (1.1) расходится в этой точке.*

< Предположим сначала, что  $\alpha_0 \notin \Lambda'$ . Тогда в некоторой окрестности  $K_p(\alpha_0, \gamma)$  найдется не более конечного числа чисел  $\frac{\lambda_n}{|\lambda_n|_p}$  и

в этом случае  $l_\Lambda(\alpha_0) = -\infty$ , что противоречит неравенству (1.24). Итак, в предположениях теоремы можно считать, что  $\alpha_0 \in \Lambda'$ . Но тогда найдутся положительные числа  $\mu$  и  $\tau$  такие, что если  $|\alpha - \alpha_0|_p < \tau$ , то

$$\Re \langle \alpha, z_0 \rangle_p > -l_\Lambda(\alpha_0, \tau) + \mu.$$

Допустим вначале, что  $l_\Lambda(\alpha_0, \tau) = +\infty$ . В этом случае найдется монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$  такая, что при  $k = 1, 2, \dots, p$

$$\left| \frac{\lambda_{k, m_n}}{|\lambda_{m_n}|_p} - \alpha_{k, 0} \right| \leq \tau \quad \text{и} \quad \frac{\ln |a_{m_n}|}{|\lambda_{m_n}|_p} > n, \quad n = 1, \dots$$

Отсюда  $|a_{m_n} \exp \langle \lambda_{m_n}, z_0 \rangle_p| > \exp |\lambda_{m_n}|_p (n - |z_0|_p) > 1$  при  $n > N(z_0)$  и ряд (1.1) расходится в точке  $z_0$ .

Пусть теперь  $-\infty < l_\Lambda(\alpha_0, \tau) < +\infty$ . Тогда для произвольно малого  $\varepsilon > 0$  найдется бесконечная последовательность целых чисел  $(n_l)_{l=1}^\infty$  такая, что

$$n_l \uparrow +\infty, \quad |a_{n_l}| > \exp[l_\Lambda(\alpha_0, \tau) - \varepsilon] \cdot |\lambda_{n_l}|_p, \\ \left| \frac{\lambda_{k, n_l}}{|\lambda_{n_l}|_p} - \alpha_{k, 0} \right| \leq \tau, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Отсюда

$$|a_{n_l}| \cdot |\exp \langle \lambda_{n_l}, z_0 \rangle_p| = |a_{n_l}| \cdot \exp |\lambda_{n_l}|_p \left\langle \frac{\lambda_{n_l}}{|\lambda_{n_l}|_p}, z_0 \right\rangle_p > \\ > \exp |\lambda_{n_l}|_p [l_\Lambda(\alpha_0, \tau) - \varepsilon - l_\Lambda(\alpha_0, \tau) + \mu] = \exp |\lambda_{n_l}|_p (\mu - \varepsilon).$$

Если в качестве  $\varepsilon$  взять любое число из полуинтервала  $(0, \mu]$ , то

$$|a_{n_l}| |\exp \langle \lambda_{n_l}, z_0 \rangle_p| > 1 \quad \forall l \geq 1,$$

и ряд  $\sum_{n=1}^\infty a_n \exp \langle \lambda_n, z_0 \rangle_p$  расходится, чем и завершается доказательство теоремы.  $\triangleright$

Положим еще  $T_\Lambda := \{z \in \mathbb{C}^p : \Re \langle \alpha, z \rangle_p < -l_\Lambda(\alpha) \quad \forall \alpha \in \Lambda'\}$ . Ясно, что  $T_\Lambda \supseteq M_\Lambda := \{z \in \mathbb{C}^p : \Re \langle \alpha, z \rangle_p < -l_\Lambda(\alpha) \quad \forall \alpha \in S^1\}$ .

С другой стороны, если  $\alpha_0 \in S^1 \setminus \Lambda'$ , то  $l_\Lambda(\alpha_0) = -\infty$ , и неравенство  $\Re \langle \alpha_0, z \rangle_p < -l_\Lambda(\alpha_0) = +\infty$  выполняется для всех  $z$  из  $\mathbb{C}^p$ . Поэтому  $T_\Lambda = M_\Lambda$ .

**Теорема 1.16.** Если выполнено условие (1.20), то ряд (1.1) сходится абсолютно в любой точке из  $T_\Lambda$ .

◁ Пусть  $z$  — произвольно зафиксированная точка из  $T_\Lambda$ . Зафиксируем какую-либо точку  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  из  $\Lambda'$ . Тогда

$$\exists h > 0 : \Re \langle \alpha, z \rangle_p < -l_\Lambda(\alpha) - h.$$

Так как  $l_\Lambda(\alpha) = \lim_{\delta \downarrow 0} l_\Lambda(\alpha, \delta)$ , то найдется число  $\delta_0 > 0$  такое, что

$$-l_\Lambda(\alpha) < -l_\Lambda(\alpha, \delta) + \frac{h}{3} \quad \forall \delta \in (0, \delta_0).$$

Зафиксируем число  $\delta$  из  $(0, \delta_0)$ . Так как функция  $\psi(\beta) := \Re \langle \beta, z \rangle_p$  непрерывна на  $S^1$  по  $\beta$  (при, напомним, зафиксированном  $z$  из  $T_\Lambda$ ), то можно найти число  $\eta > 0$  такое, что

$$\Re \langle \beta, z \rangle_p < -l_\Lambda(\alpha, \delta) - \frac{h}{3},$$

если  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p) \in S^1$  и  $|\beta_k - \alpha_k| < \eta$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ . При этом число  $\eta$  можно всегда выбрать так, что  $0 < \eta < \delta$ .

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{n \in N_1} |a_n| |\exp \langle \lambda_n, z \rangle_p|, \quad (1.25)$$

где  $N_1 = N_1(\eta)$  — множество всех натуральных чисел  $n \geq 1$  таких, что  $\left| \frac{\lambda_{k,n}}{|\lambda_n|_p} - \alpha_k \right| < \eta$  при  $k = 1, \dots, p$ . Если  $n \in N_1$  и  $n > N_0(\eta, h)$ , то

$$\ln |a_n| < |\lambda_n|_p \left[ l_\Lambda(\alpha, \eta) + \frac{h}{6} \right] \leq |\lambda_n|_p \left[ l_\Lambda(\alpha, \delta) + \frac{h}{6} \right]$$

(здесь учтено, что  $\eta \in (0, \delta)$ ). Поэтому для тех же  $n$

$$|a_n| \exp \langle \lambda_n, z \rangle_p < \exp |\lambda_n|_p \left[ -\frac{h}{3} + \frac{h}{6} \right] = \exp \left( -\frac{h}{6} |\lambda_n|_p \right) = \gamma_n.$$

В силу условия (1.20) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ , а потому и ряд (1.25), сходится.

Таким образом, для любого элемента  $\alpha \in S^1 \setminus \Lambda'$  существует окрестность  $v(\alpha)$ :  $|\beta_k - \alpha_k| < \eta = \eta(\alpha)$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ , такая, что соответствующий ряд (1.25) сходится. Если же  $\alpha \in S^1$ , но  $\alpha \notin \Lambda'$ ,

то для некоторого  $\eta_0 > 0$  найдется лишь конечное число элементов  $\lambda_n$  таких, что  $\left| \frac{\lambda_{k,n}}{|\lambda_n|_p} - \alpha_k \right| < \eta_0$ . В этом случае ряд (1.25) при любом  $\eta \in (0, \eta_0)$  вырождается в конечную сумму.

Итак, для любой точки  $\alpha$  из  $S^1$  имеется ее (открытая) сферическая окрестность  $v(\alpha) = \{\beta \in \mathbb{C}^p : |\beta_k - \alpha_k| < \eta = \eta(\alpha)\}$  такая, что соответствующий ей ряд (1.25) сходится. Привлечение леммы Гейне — Бореля позволяет немедленно установить абсолютную сходимость всего ряда (1.1) в точке  $z$ .  $\triangleright$

**1.2.2.** Следующий результат дополняет теорему 1.15.

**Теорема 1.17.** Если для некоторых  $z_0 \in \mathbb{C}^p$  и  $\alpha_0 \in S^1$

$$\Re \langle \alpha_0, z_0 \rangle_p \geq -l_\Lambda(\alpha_0),$$

то ряд (1.1) не может сходиться в любой окрестности точки  $z_0$ .

$\triangleleft$  Пусть  $d > 0$ . Рассмотрим шар  $\overline{K_p(z_0, d)}$ . Точка  $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_p)$ , у которой  $\tilde{z}_k = z_{k,0} + d \exp(-i \arg \alpha_{k,0})$  при  $k = 1, 2, \dots, p$ , принадлежит  $\overline{K_p(z_0, d)}$ , причем

$$\Re \langle \alpha_0, \tilde{z} \rangle_p = \Re \langle \alpha_0, z_0 \rangle_p + d \sum_{k=1}^p |\alpha_{k,0}| > -l_\Lambda(\alpha_0).$$

По теореме 1.15 ряд (1.1) расходится в точке  $\tilde{z}$ .  $\triangleright$

Рассмотрим выпуклое множество

$$M_\Lambda = \bigcap_{|\alpha|_p=1} \{z \in \mathbb{C}^p : \Re \langle \alpha, z \rangle_p \leq -l_\Lambda(\alpha)\}.$$

Как легко проверить, множество  $\partial M_\Lambda$  всех граничных точек  $M_\Lambda$  совпадает с совокупностью тех точек  $z_1$  из  $M_\Lambda$ , для каждой из которых

$$\exists \alpha_1 \in S^1, \alpha_1 = \alpha_1(z_1) : \Re \langle \alpha_1, z_1 \rangle_p = -l_\Lambda(\alpha_1).$$

Далее,  $\text{int } M_\Lambda = \bigcap_{|\alpha|_p=1} \{z \in \mathbb{C}^p : \Re \langle \alpha, z \rangle_p < -l_\Lambda(\alpha)\} \subseteq T_\Lambda$ .

По теореме 1.16 ряд (1.1) сходится абсолютно в  $T_\Lambda$ , если выполнено условие (1.20). Тогда  $\text{int } M_\Lambda \subseteq \text{abc}(1.1)$ . Кроме того по теореме 1.17 ни одна граничная точка множества  $M_\Lambda$  не может принадлежать  $\text{abc}(1.1)$ , так как в любой ее окрестности найдется точка  $z_2$  и  $\alpha_1 \in S^1$  такие, что  $\Re \langle \alpha_1, z_2 \rangle_p > -l_\Lambda(\alpha_1)$ . Следовательно,  $\text{int } M_\Lambda = \text{abc}(1.1)$  и верна

**Теорема 1.18.** Если выполнено условие (1.20), то максимальная область  $\text{abc}(1.1)$  абсолютной сходимости ряда (1.1) совпадает с выпуклой областью

$$\begin{aligned} \text{int } M_\Lambda &= \text{int} \left\{ \bigcap_{\alpha \in S^1} [z \in \mathbb{C}^p : \Re \langle \alpha, z \rangle_p \leq -l_\Lambda(\alpha)] \right\} = \\ &= \bigcap_{\alpha \in S^1} [z \in \mathbb{C}^p : \Re \langle \alpha, z \rangle_p < -l_\Lambda(\alpha)] \end{aligned}$$

( $= B_\Lambda$  (по теореме 1.14)  $= T_\Lambda$ ).

Таким образом, согласно теореме 1.18,  $\text{abc}(1.1)$  совпадает с выпуклой областью  $\text{int } M_\Lambda = T_\Lambda$ , опорная функция  $H_{\text{int } M_\Lambda}(\alpha)$  которой удовлетворяет соотношению  $H_{M_\Lambda} \leq -l_\Lambda(\alpha)$  при любом  $\alpha \in S^1$ .

В работе [17] на с. 69 приведены (без доказательства) утверждения о том, что при выполнении условия (1.20)  $\text{abc}(1.1) = B_\Lambda = \text{int } M_\Lambda$  и что ряд (1.1) расходится в любой точке, внешней к  $M_\Lambda$ . Автор статьи [17] отмечает, что эти результаты можно получить методом, развитым в [106] в одномерной ситуации. В настоящем разделе, также основанном на работе [106], дано подробное доказательство этих результатов с некоторыми уточнениями и дополнениями (например, при доказательстве теоремы 1.16 использовано множество  $\Lambda'$ , вообще отсутствующее в [17]).

Заметим, что при  $p = 1$  в работах [105, 106] описаны два выпуклых множества  $F_1$  и  $F_2$  таких, что  $(F_1)_0 \subseteq \text{abc}(1.1) \subseteq (F_2)_0$ . Этот результат получен в предположении  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|_p} = H < +\infty$ , очевидно, менее жестком, чем условие (1.20). При этом, если  $H \neq 0$ , то, вообще говоря,  $F_1 \neq F_2$ . Результаты аналогичного характера можно получить и в многомерной ситуации, но мы уже не будем останавливаться здесь на этом. Желаящие ознакомиться с этими одномерными результатами Г. Л. Лунца из статьи [106], могут сделать это по их изложению в монографии А. Ф. Леонтьева [100, гл. III, § 1, п. 2].

**1.2.3.** Пусть выполнено условие (1.20) и пусть ряд (1.1) сходится в некоторой выпуклой области  $G \subset \mathbb{C}^p$  с опорной функцией  $H_G(\alpha)$ . Тогда  $G \subseteq \text{abc}(1.1) = \text{int } M_\Lambda$  и, следовательно, для любого  $\alpha \in S^1$   $H_G(\alpha) \leq -l_\Lambda(\alpha)$ . Последнее неравенство эквивалентно такому:

$$H_G(\alpha) \leq -l_\Lambda(\alpha) \quad \forall \alpha \in \Lambda',$$

так как  $l_\Lambda(\alpha) = -\infty$ , если  $\alpha \in S^1 \setminus \Lambda'$ .



Положим для всех  $\alpha$  из  $S^1$

$$G(\alpha) := \{z \in \mathbb{C}^p : \Re \langle \alpha, z \rangle_p < H_G(\alpha)\}.$$

Так как  $\Re \langle \alpha, z \rangle_p < H_G(\alpha)$  при любых  $\alpha \in G$  и  $\alpha \in S^1$  и

$$\begin{aligned} T_\Lambda &= \{z \in \mathbb{C}^p : \Re \langle \alpha, z \rangle_p < -l_\Lambda(\alpha) \ \forall \alpha \in S^1\} = \\ &= \{z \in \mathbb{C}^p : \Re \langle \alpha, z \rangle_p < -l_\Lambda(\alpha) \ \forall \alpha \in \Lambda'\}, \end{aligned}$$

то  $G \subseteq G[\Lambda'] := \bigcap_{\alpha \in \Lambda'} G(\alpha) \subseteq T_\Lambda = \text{abc}(1.1)$ .

Следуя [144], назовем  $G[\Lambda']$  полярной оболочкой области  $G$  относительно  $\Lambda'$ . Из результатов этого раздела прямо следует аналог некоторых теорем об аналитическом продолжении решений одно-родного уравнения свертки, полученных японскими математиками (см. [144, следствие 3.2; 172, теорема 3.3]).

**Теорема 1.19.** Пусть выполнено условие (1.20) и ряд (1.1) сходится в некоторой области  $G$  из  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ . Тогда этот ряд абсолютно сходится в любой точке полярной оболочки  $G[\Lambda']$  области  $G$  относительно  $\Lambda'$ .

Отметим, что принадлежащие автору теоремы 1.12–1.18 имеются в его статье [160]. Кроме того, одномерный вариант теоремы 1.12 был ранее получен в работе [41].

**1.2.4.** Приведем некоторые следствия из результатов этого раздела, которые пригодятся в дальнейшем. Предварительно условимся для последовательности  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  точек  $\lambda_k$  из  $\mathbb{C}^p$  обозначать символом  $E_\Lambda$  последовательность  $\{\exp \langle \lambda_k, z \rangle_p\}_{k=1}^\infty$ , а символом  $A_1(E_\Lambda, A(G))$  (соответственно, символом  $A_2(E_\Lambda, A(G))$ ) — векторное пространство всех последовательностей комплексных чисел  $\{d_k\}_{k=1}^\infty$  таких, что ряд вида (1.1) сходится (соответственно, абсолютно сходится) в  $A(G)$ . При  $j = 1, 2$  через  $M_\Lambda^j(A(G))$  обозначим множество всех мультипликаторов пространства  $A_j(E_\Lambda, A(G))$ , т. е. всех числовых последовательностей  $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ , для которых  $\{b_k d_k\}_{k=1}^\infty \in A_j(E_\Lambda, A(G))$ , если  $\{d_k\}_{k=1}^\infty \in A_j(E_\Lambda, A(G))$ .

**Теорема 1.20.** Пусть ограниченная выпуклая область  $G$  из  $\mathbb{C}^p$  содержит начало координат, а последовательность  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  точек  $\lambda_k$  из  $\mathbb{C}^p$  удовлетворяет условию (1.20). Тогда при  $j = 1, 2$  пространство  $A_j(E_\Lambda, A(G))$  совпадает с множеством  $T_{G, \Lambda}$  всех последовательностей  $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ , удовлетворяющих условию (1.22), а пространство  $M_\Lambda^j(A(G))$  — с множеством всех числовых последовательностей

$\{b_k\}_{k=1}^\infty$ , для которых

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |b_k| \leq 0. \quad (1.26)$$

◁ Первое утверждение теоремы 1.20, относящееся к описанию пространств  $A_j(E_\Lambda, A(G))$ ,  $j = 1, 2$ , является прямым следствием теоремы 1.12. Очевидно, что если последовательность  $\{b_k\}_{k=1}^\infty$  удовлетворяет условию (1.26), а  $\{a_k\}_{k=1}^\infty$  — любая последовательность из множества  $A := A_1(E_\Lambda, A(G)) = A_2(E_\Lambda, A(G))$ , то последовательность  $\{b_k a_k\}_{k=1}^\infty$  удовлетворяет условию (1.22) и потому принадлежит пространству  $A$ .

Пусть теперь  $\{b_k\}_{k=1}^\infty \in M_\Lambda^1(A(G))$ . Зафиксируем какую-либо последовательность  $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$  такую, что  $\varepsilon_k \downarrow 0$ , и положим для всех  $k \geq 1$

$$\tilde{a}_k = \exp \left[ -H_G(\psi(\lambda_k)) \cdot |\lambda_k|_p + \varepsilon_k |\lambda_k|_p \right].$$

Очевидно, что  $\{\tilde{a}_k\}_{k=1}^\infty \in A$ . При этом

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |b_k \tilde{a}_k| &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |b_k|}{|\lambda_k|_p} - H_G(\psi(\lambda_k) + \varepsilon_k) \right] = \\ &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |b_k| - H_G(\psi(\lambda_k)) \right]. \end{aligned}$$

Так как по предположению  $\{b_k\}_{k=1}^\infty \in M_\Lambda^1(G)$ , то  $\{b_k \tilde{a}_k\}_{k=1}^\infty \in A$  и потому

$$\begin{aligned} 0 &\geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |b_k \tilde{a}_k| + H_G(\psi(\lambda_k)) \right] = \\ &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |b_k| + \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |\tilde{a}_k| + H_G(\psi(\lambda_k)) \right] = \\ &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |b_k|. \end{aligned}$$

Аналогично, если  $\{b_k\}_{k=1}^\infty \in M_\Lambda^2(G)$ , то выполняется условие (1.26). ▷

**1.2.5.** Рассмотрим теперь случай, когда содержащая начало координат выпуклая область  $G$  в  $\mathbb{C}^p$  с опорной функцией  $H_G(\psi(\lambda))$  не обязательно ограничена в  $\mathbb{C}^p$ . Пусть  $\{G_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность ограниченных выпуклых областей в  $\mathbb{C}^p$  таких, что при всех  $n \geq 1$

$$0 \in G_n \subseteq \bar{G}_n \subseteq G_{n+1} \subset G = \bigcup_{m=1}^\infty G_m.$$

Предположим, что последовательность  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  точек  $\lambda_k$  из  $\mathbb{C}^p$  удовлетворяет условию (1.20). Так как ряд (1.1) сходится или абсолютно сходится в  $A(G)$  тогда и только тогда, когда он при всех  $n \geq 1$  сходится (соответственно, абсолютно сходится) в  $A(G_n)$ , то из теоремы 1.12 получаем:

$$A_G^1(E_{\Lambda}, A(G)) = A_G^2(E_{\Lambda}, A(G)) = A_G := \left\{ a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^N : \forall m \geq 1 \quad \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_s|}{|\lambda_s|_p} + H_{G_m}(\psi(\lambda_s)) \right] \leq 0 \right\}.$$

Отсюда нетрудно вывести, что совокупность  $M_{\Lambda}(A(G))$  всех мультипликаторов пространства  $A_G$  совпадает с множеством

$$D := \left\{ \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^N : \forall m_2 \geq 1 \exists m_1 \geq 1 \left| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |b_n|}{|\lambda_n|_p} + H_{G_{m_2}}(\psi(\lambda_n)) - H_{G_{m_1}}(\psi(\lambda_n)) \right] \leq 0 \right\}.$$

Равенство  $D = M_{\Lambda}(A(G))$  нетрудно вывести (считая выполненным условие (1.20)) из более общих результатов работы [6, с. 8–9]. Оно следует также из результатов, которые излагаются ниже, в разделе 1.3. При этом включение  $D \subseteq M_{\Lambda}(A(G))$  устанавливается элементарно.

Заметим еще, что если  $G$  — любая содержащая начало координат выпуклая (не обязательно ограниченная) область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ , с опорной функцией  $H_G(z)$ , то, используя результаты из пп. 1.1.1–1.1.3, можно установить, что

$$A_G^1(E_{\Lambda}, A(G)) = A_G^2(E_{\Lambda}, A(G)) = B_G^{\Lambda},$$

где

$$B_G^{\Lambda} = \left\{ a = (a_k)_{k=1}^{\infty} : \forall \alpha \in S^1 \quad \ell_{\Lambda}(\alpha) \leq e^{-H_G(\alpha)} \right\},$$

а  $\mu = \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \in M_{\Lambda}(A(G))$  тогда и только тогда, когда  $\ell_{\mu}(\alpha) \leq 1$  для любого  $\alpha \in S^1$ , если  $H_G(\alpha) < +\infty$ , и  $\ell_{\mu}(\alpha) < +\infty$ , если  $H_G(\alpha) = +\infty$ . Не останавливаясь здесь на доказательстве этих утверждений, отметим только, что в одномерной ситуации только что приведенные представления  $A_G^j(E_{\Lambda}, A(G))$ ,  $j = 1, 2$ , и  $M_{\Lambda}(A(G))$  были ранее получены другим методом в [6, с. 16].

### 1.3. Другой класс многомерных рядов экспонент

**1.3.1.** До сих пор в главе 1 рассматривались лишь ряды (1.1). Однако, в некоторых работах встречаются ряды экспонент вида

$$\sum_{k_1, k_2, \dots, k_p=1}^{\infty} d_{k_1, \dots, k_p} \exp \sum_{j=1}^p \mu_{k_j}^{(j)} z_j; \quad \mu_{k_j}^{(j)} \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (1.27)$$

Насколько нам известно, такие ряды изучались в работе [104]. Приведем без доказательства один результат из этой статьи.

**Предложение 1.1** [104, лемма 1]. *Если ряд (1.27) сходится в полицилиндрической области  $D = D_1 \times \dots \times D_p$ , где  $D_j$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}$  с опорной функцией  $h_j(-\psi)$ , содержащая начало координат, и если  $|\mu_k|_p \rightarrow \infty$  при  $|k|_p := \sum_{j=1}^p k_j \rightarrow \infty$ , то*

$$\overline{\lim} \frac{\ln |d_{k_1, \dots, k_p}| + h(\mu_k)}{|\mu_k|_p} \leq 0, \quad (1.28)$$

где  $\mu_k = (\mu_k^{(1)}, \dots, \mu_k^{(p)})$ ,  $h(\zeta) := \sup_{z \in D} \langle z, \zeta \rangle_p = \sum_{j=1}^p |\zeta_j| h_s(\arg \zeta_j)$ .

Обратно, если коэффициенты ряда (1.27) удовлетворяют условию (1.28) и если

$$\lim_{|k|_p \rightarrow \infty} \frac{\ln |k|_p}{|\mu_k|_p} = 0, \quad (1.29)$$

то ряд (1.27) сходится абсолютно в  $A(D)$ .

**Следствие.** Если выполнено условие (1.29), то равносильны такие утверждения:

- 1) ряд (1.27) сходится поточечно в  $D$ ;
- 2) ряд (1.27) сходится в  $A(D)$ ;
- 3) ряд (1.27) сходится абсолютно в  $A(D)$ .

Подробное доказательство предложения 1.1 см. в [104, с. 460–461].

**1.3.2.** Позднее критерии абсолютной сходимости ряда (1.27) в различных пространствах аналитических (в основном целых) функций были анонсированы в статье [20]. Мы не приводим здесь этих результатов в основном (кроме ограничения на общий объем книги) потому, что ряд (1.27) сходится абсолютно в произвольном пространстве  $T(G)$  функций, определенных в области  $G$ ,  $G \subseteq \mathbb{C}^p$ , с топологией, мажорирующей топологию поточечной сходимости в  $G$ , тогда

и только тогда, когда в  $T(G)$  абсолютно сходится ряд вида (1.1), к которому ряд (1.27) сводится после надлежащей перенумерации его членов. Эту перенумерацию можно осуществить хотя бы способом, указанным при  $p = 2$  в [70] и при  $p \geq 2$  в [9]<sup>1</sup>. Именно, каждому текущему индексу суммирования  $(k_1, \dots, k_p)$ , где  $1 \leq k_j < \infty$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , можно поставить в соответствие определенный номер из последовательности  $\{m\}_{m=1}^{\infty}$  таким путем. Вначале располагаем последовательно большие группы индексов  $(k_1, \dots, k_p)$  по порядку возрастания числа  $|k|_p = \sum_{s=1}^p k_s$ . Далее, внутри каждой такой большой группы (с одинаковым  $|k|_p$ ) располагаем текущие индексы суммирования  $(k_1, \dots, k_p)$  последовательно в виде подгрупп, в порядке возрастания номера  $k_p$ . Каждую такую подгруппу (с одинаковыми  $|k|_p$  и  $k_p$ ) нумеруем по порядку возрастания номера  $k_{p-1}$  и так далее (до  $k_1$ ). Перенумерованный таким способом ряд (1.27) имеет вид (1.1) и к нему применимы все полученные выше результаты об абсолютной сходимости.

**1.3.3.** В следующей главе выводятся критерии абсолютной сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$  в общих локально выпуклых пространствах  $H$  над полем скаляров  $\Phi$  (здесь  $c_k \in \Phi$ ,  $x_k \in H$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ).

Применяя общие критерии к ряду (1.1) при  $p = 1$  в различных функциональных пространствах, можно, в частности, получить изложенные в [20, 104] результаты об абсолютной сходимости ряда (1.27). Следует, однако, признать, что описанная выше перенумерация ряда (1.27) и его сведение к ряду (1.1) могут оказаться технически довольно громоздкими. Поэтому можно изучать абсолютную сходимость ряда (1.27) и как самостоятельного объекта, не сводя его к ряду (1.1).

#### 1.4. Дополнение к одной теореме Поля

**1.4.1.** Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{C}$  и  $\Lambda := (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$  — последовательность попарно различных комплексных чисел. Положим  $E_{\Lambda} := (\exp \lambda_k z)_{k=1}^{\infty}$ . Обозначим далее символом  $\text{span } E_{\Lambda}$  линейную оболочку  $E_{\Lambda}$ , т. е. совокупность всех конечных линейных комбинаций (с коэффициентами из  $\mathbb{C}$ ) всех функций из  $E_{\Lambda}$ . Если еще  $H$  — ПОЛВП, содержащее все функции из  $E_{\Lambda}$ , то символ  $(E_{\Lambda}; H)$  будет обозначать замыкание  $\text{span } E_{\Lambda}$  по топологии, индуцированной в векторном про-

<sup>1</sup>Этот способ перенумерации использовался в [9, 70] при исследовании других вопросов.

пространстве  $\text{span } E_\Lambda$  из пространства  $H$ . Очевидно, что  $(E_\Lambda; A(G))$  — замкнутое подпространство  $A(G)$ , инвариантное относительно дифференцирования. Аналогично, если  $z_0 \in G$  и  $H\{z_0\}$  — пространство всех аналитических ростков в точке  $z_0$  с топологией индуктивного предела

$$H\{z_0\} = \varinjlim_{0 < r < \infty} (A(K_r(z_0))), \quad K_r(z_0) := \{z : |z - z_0| < r\},$$

то  $(E_\Lambda; H\{z_0\})$  — замкнутое подпространство  $H\{z_0\}$ , инвариантное относительно дифференцирования.

Следующий результат принадлежит Полю [170].

**Теорема 1.21.** Пусть числа  $\lambda_k$  таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0. \quad (1.30)$$

Пусть при некоторых  $z_0$  из  $\mathbb{C}$  и  $r > 0$   $f(z) \in (E_\Lambda; A(K_r(z_0)))$ . Тогда:

- 1) полная (вейерштрассова) область существования  $W_f$  функции  $f$  выпукла;
- 2)  $f \in (E_\Lambda; A(W_f))$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Как легко проверить, из утверждения 2) теоремы 1.21 следует, что функция  $f$  аналитична и однозначна (регулярна) в  $W_f$ .

**Следствие 1.** Пусть выполнено условие (1.30) и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.31)$$

сходится в некотором круге  $K_r(z_0)$ , где  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r \in (0, +\infty)$ . Тогда, если  $V(z)$  — сумма этого ряда (определенная первоначально в  $K_r(z_0)$ ), то  $V(z)$  регулярна в своей полной области существования  $W_V$  и эта область выпукла. При этом  $V \in (E_\Lambda; A(W_V))$ .

**Следствие 2.** Так как согласно условию (1.30)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$ , то по теореме Хилле 1.1  $\sigma(1.31) = \text{abc}(1.31) =: G_V$ , причем область  $G_V$  выпукла. Ясно, что всегда  $G_V \subseteq W_V$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Теорема Поля и ее следствие перестают быть справедливыми, если условие (1.30) заменить чуть менее жестким:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} \leq \varepsilon, \quad (1.32)$$

каким бы малым ни было число  $\varepsilon > 0$ .

◁ Чтобы убедиться в этом, рассмотрим один пример. Пусть  $\varepsilon \in (0, 1)$  и  $\lambda_n = -\frac{n}{\varepsilon}$  для всех  $n \geq 1$ . Соответствующий ряд (1.31) принимает такой вид:  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nz/\varepsilon}$ . Для него  $a = c = 0$ . Полная область сходимости этого ряда, совпадающая с полной областью его абсолютной сходимости, является полуплоскостью  $\Gamma(0) = \{z : \Re z > 0\}$ , а сумма ряда  $V_0(z)$  равна в  $\Gamma(0)$   $\frac{1}{e^{z/\varepsilon} - 1}$ . Если  $B_0 := \{z = i2\pi k\varepsilon, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , то функция  $V_0(z)$  аналитична и однозначна в области  $W_{V_0} = \mathbb{C} \setminus B_0$ . При этом каждая точка  $z_k = i2\pi k\varepsilon$  является простым полюсом  $V_0$  и полная область  $W_{V_0}$  существования  $V_0(z)$  невыпукла (даже бесконечносвязна).

Нетрудно также показать, что  $V_0 \notin (E_\Lambda; A(W_{V_0}))$ . Таким образом, следствие теоремы 1.21 (и подавно сама теорема) перестает быть справедливым при замене условия (1.30) на (1.32). ▷

Теорема Поля показывает, что при условии (1.30) любая функция  $f$  из  $(E_\Lambda; K_r(z_0))$  принадлежит пространству  $(E_\Lambda; A(W_f))$ , т. е. является пределом некоторой последовательности линейных агрегатов элементов из  $E_\Lambda$ , равномерно сходящейся к  $f$  внутри области  $W_f$ . Однако, доказательство этой теоремы в [170] не содержит конструктивного построения такой последовательности. Эффективный способ аналитического продолжения функции  $f$  из  $K_r(z_0)$  в  $W_f$  был указан А. Ф. Лентьевым [100], который в качестве следствия из более общего результата установил, что в предположениях теоремы Поля последовательность

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n-1} a_{k,n} \zeta_n(\lambda_k) \exp \lambda_k z \right\}_{n=2}^{\infty}$$

сходится к  $f$  в  $A(W_f)$ . Здесь

$$\zeta(\lambda) := \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda_k)^2} \right), \quad \zeta_n(\lambda) = \prod_{k=n}^{\infty} \left( 1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda_k)^2} \right),$$

и в силу известных в теории целых функций теорем Бореля и Линделефа (см., например, [100, гл. I] или [98, гл. I]) функции  $\zeta(\lambda)$  и  $\zeta_n(\lambda)$  принадлежат пространству  $[1, 0]$  всех целых функций минимального (т. е. нулевого) типа при порядке 1.

**1.4.2.** В связи с этими результатами Г. Поля и А. Ф. Леонтьева возникает следующий вопрос: при каких дополнительных (кроме (1.30)) условиях каждая функция из  $(E_\Lambda; H\{z_0\})$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ , пред-

ставляется в виде ряда вида (1.31), сходящегося в  $A(W_f)$ . Приведем вначале один известный результат, проясняющий смысл условия (1.30).

**Лемма 1.4.** *Следующие утверждения равносильны:*

- a) выполняется условие (1.30);
- b) в классе  $[1, 0]$  есть хотя бы одна отличная от тождественного нуля функция  $y_0(z)$ , для которой  $y_0(\lambda_k) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;
- c) система  $E_\Lambda$  неполна в  $A(G)$ , какова бы ни была выпуклая область  $G$  в  $\mathbb{C}$ ;
- d) система  $E_\Lambda$  неполна в  $H\{0\}$ .

◁ Для удобства читателя приведем схему доказательства этой леммы. Предварительно напомним, что последовательность  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  называется полной в линейном топологическом пространстве  $E$ , если замыкание (по топологии  $E$ ) ее линейной оболочки совпадает с  $E$ . Импликация  $b) \Rightarrow a)$  прямо следует из [100, теорема 1.1.2] при  $\rho = 1$ ,  $\sigma = 0$ . Обратно, если выполнено условие (1.30) и  $\zeta(\lambda) := \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right)$ , то, как легко проверить с помощью недавно упоминавшихся теорем Бореля и Линделефа, функция  $\zeta(\lambda)$  принадлежит классу  $[1, 0]$ , причем для всех  $k \geq 1$   $y(\lambda_k) = 0$ . Следовательно,  $a) \Rightarrow b)$  и, таким образом,  $a) \Leftrightarrow b)$ .

Соотношение  $b) \Leftrightarrow d)$  вытекает из известного критерия Банаха полноты и из представления любого линейного непрерывного функционала  $\psi(y)$  на  $H\{0\}$  в виде  $\psi(y) = \psi_g(y) = \sum_{k=0}^\infty g^{(k)}(0) \frac{y^{(k)}(0)}{k!}$ , где  $g$  — произвольная функция из  $[1, 0]$ .

С помощью линейной замены  $z = w + z_0$  убеждаемся в том, что утверждение c) равносильно следующему, формально более слабому, условию:

$c_1)$  система  $E_\Lambda$  неполна в  $A(G)$ , где  $G$  — любая выпуклая область, содержащая начало координат.

Покажем теперь, что  $d) \Rightarrow c_1)$ . Рассуждая от противного, допустим, что найдется выпуклая область  $G_1$  такая, что  $O \in G_1$  и  $E_\Lambda$  полна в  $A(G_1)$ . Если  $r := \rho(O, \partial G_1)$ , то  $r > 0$  и  $E_\Lambda$  полна в  $A(K_r)$ , где

$$K_r := K_r(0) = \{z : |z| < r\}.$$

В частности,  $z^n \in (E_\Lambda; A(K_r))$  и подавно  $z^n \in (E_\Lambda; H\{0\})$  для всех  $n \geq 0$ . Так как система степеней  $\{z^n\}_{n=0}^\infty$  составляет базис в пространстве  $H\{0\}$  и подавно полна в этом пространстве, то



$(E_\Lambda; H\{0\}) \supseteq \overline{\text{span}\{z^n\}} = H\{0\}$  (замыкание берется по топологии  $H\{0\}$ ). Отсюда  $(E_\Lambda; H\{0\}) = H\{0\}$ , что противоречит утверждению  $d$ ).

Пусть, наконец, справедливо утверждение  $c_1$ ). Тогда  $E_\Lambda$  — неполная система в  $A(K_r)$  для любого  $r \in (0, +\infty)$ . Из критерия Банаха полноты и представления любого линейного непрерывного функционала  $\psi(y)$  на  $A(K_r)$  в виде  $\psi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{(k)}(0) \frac{y^{(k)}(0)}{k!}$ , где  $h$  — любая целая функция экспоненциального типа, меньшего  $r$ , следует, что для любого  $\sigma > 0$  существует  $f_\sigma \in [1, r)$ :  $f_\sigma(\lambda_n) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , причем функция  $f_\sigma$  отлична от тождественного нуля. По теореме 1.1.2 из [100]  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} \leq e\sigma$ . Устремляя  $\sigma > 0$  к нулю, приходим к (1.30). Итак,  $a) \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow d) \Rightarrow c_1) \Rightarrow a)$ .  $\triangleright$

Отметим еще, что если выполнено условие (1.30) и какая-либо функция  $V(z)$  представляется в некоторой области  $G$  из  $\mathbb{C}$  рядом вида (1.31)  $V(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\lambda_k z}$ , сходящимся в  $A(G)$ , то это представление (в предположении, что все числа  $\lambda_k$  попарно различны) единственно. Действительно, допустим, что  $0 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\lambda_k z}$  для любого  $z \in G$ , причем ряд сходится в  $A(G)$ . Если  $\lambda_1 \neq 0$ , положим  $L_0(\lambda) := \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right)$ , где произведение берется по всем тем номерам  $k \geq 1$ , для которых числа  $\lambda_k^2$  попарно различны. Если же  $\lambda_1 = 0$ , то полагаем  $L_0(\lambda) := \lambda \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right)$ . В обоих случаях  $L_0 \in [1, 0]$ . Зафиксируем  $k_0 \geq 1$  и положим  $L_{(k_0)}(\lambda) := \frac{L_0(\lambda)}{\lambda - \lambda_{k_0}}$ . По теореме о категориях (см., например, [98])  $L_{(k_0)}(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \lambda^m \in [1, 0]$ .

Пусть  $L_{(k_0)}(D)y := \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m y^{(m)}(z)$ . Тогда, согласно [170],  $L_{(k_0)}(D)$  — линейный непрерывный оператор в  $A(G)$  и для любого  $z$  из  $G$

$$0 = L_{(k_0)}(D) \left( \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\lambda_k z} \right) = d_{k_0} L_{(k_0)}(\lambda_{k_0}) e^{\lambda_{k_0} z}.$$

При этом  $L_{(k_0)}(\lambda_{k_0}) = L'(\lambda_{k_0}) \neq 0$ , откуда  $d_{k_0} = 0$  для любого  $k_0 \geq 1$ .

**1.4.3.** Прежде чем сформулировать и доказать основной результат раздела 1.4, опишем некоторые свойства пространства  $H\{z_0\}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Очевидно, что линейный оператор  $(TV)(z) := V(z - z_0)$  устанавливает изоморфизм (и алгебраический, и топологический) между

$LN^*$ -пространствами<sup>1</sup>  $H\{0\}$  и  $H\{z_0\}$  (см., например, обзор [137] или книгу [122]). При этом  $W_V = W_{T_V} - z_0$  для любого  $V \in H\{0\}$  и области  $W_V$  и  $W_{T_V}$  одновременно выпуклы или нет. Кроме того,

$$T(\text{span } E_\Lambda) = \text{span } E_\Lambda.$$

Учитывая еще, что линейная замена  $z = t + z_0$  не меняет вида ряда (1.31), получаем, что следующие три утверждения равносильны:

1) любую функцию  $f$  из  $H\{0\}$  можно представить (единственным образом) в виде ряда (1.31), сходящегося в  $A(W_f)$ ;

2) при всех  $z_0 \in \mathbb{C}$  любую функцию  $f$  из  $H\{z_0\}$  можно представить (единственным образом) в виде ряда (1.31), сходящегося в  $A(W_f)$ ;

3) существует такое  $z_0 \in \mathbb{C}$ , что любая функция  $f$  из  $H\{z_0\}$  представляется (единственным образом) в виде ряда (1.31), сходящегося в  $A(W_f)$ .

Приведем некоторые определения и результаты из работ [38, 95], используемые в доказательстве ближайшей теоремы. Пусть  $E$  — линейное топологическое пространство аналитических функций от одного комплексного переменного. Элементы вида  $z^k e^{\lambda z}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $k \geq 0$ , принадлежащие  $E$ , называются одночленами Дирихле из пространства  $E$ . Подпространство  $H$  пространства  $E$  называют инвариантным (согласно [95]), если оно инвариантно относительно дифференцирования: для всех  $g \in H$   $g'(z) \in H$ . Спектром инвариантного подпространства  $H$  из  $E$  называется совокупность всех пар  $(\lambda_\alpha, n_\alpha)$  таких, что  $z^m e^{\lambda_\alpha z} \in H$ , когда  $0 \leq m \leq n_\alpha - 1$ , но  $z^{n_\alpha} e^{\lambda_\alpha z} \notin H$ . Спектр вида  $(\lambda_\alpha, 1)$ ,  $\alpha \in \Omega$ , называют простым.

Далее, говорят [95], что  $H$  допускает спектральный синтез в  $E$ , если  $H$  совпадает с замыканием (в топологии  $E$ ) линейной оболочки всех одночленов Дирихле из  $H$ . Наконец, подпространство  $H$  называется нетривиальным подпространством  $E$ , если оно непусто и не совпадает с  $E$ .

Установим еще пару простых вспомогательных результатов.

**Лемма 1.5.** Если система  $E_\Lambda$ , в которой все показатели  $\lambda_k$  попарно различны, неполна в  $H\{0\}$ , то в  $(E_\Lambda; H\{0\})$  нет ни одного одночлена Дирихле, отличного от  $e^{\lambda_m z}$ ,  $m = 1, 2, \dots$

<sup>1</sup>В терминологии Себаштьяна-и-Силвы [129]  $LN^*$ -пространством называется внутренний индуктивный предел последовательности  $B$ -пространств, каждое из которых вложено вполне непрерывно в последующее.

◁ Пусть существует  $k_1 \geq 1$  такое, что  $ze^{\lambda_{k_1}z} \in (E_\Lambda; H\{0\})$ . Тогда найдется последовательность вида  $\{\sum_{k=1}^{m_n} a_{k,n} e^{\lambda_k z}\}_{n=1}^\infty$ , сходящаяся к  $ze^{\lambda_{k_1}z}$  в  $H\{0\}$ :

$$ze^{\lambda_{k_1}z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{m_n} a_{k,n} e^{\lambda_k z} \right). \quad (1.33)$$

Положив  $\zeta(\lambda) = L_0(\lambda) = \sum_{m=0}^\infty \beta_m \lambda^m$ , где  $L_0(\lambda)$  — функция, определенная в конце пункта 1.4.2, и, учитывая, что  $\zeta(\lambda) \in [1, 0]$ , получаем из (1.33):  $\zeta(D)(ze^{\lambda_{k_1}z}) = 0$ . Но

$$\begin{aligned} \zeta(D)(ze^{\lambda_{k_1}z}) &= \sum_{m=0}^\infty \beta_m (\lambda_{k_1})^m e^{\lambda_{k_1}z} z + \sum_{m=0}^\infty \beta_m m (\lambda_{k_1})^{m-1} e^{\lambda_{k_1}z} = \\ &= ze^{\lambda_{k_1}z} \zeta(\lambda_{k_1}) + e^{\lambda_{k_1}z} \zeta'(\lambda_{k_1}) = \zeta'(\lambda_{k_1}) e^{\lambda_{k_1}z} \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Получили противоречие. Так же, используя ту же функцию  $\zeta(\lambda)$ , устанавливаем, что если  $\mu \neq \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то  $e^{\mu z} \notin (E_\Lambda; H\{0\})$ . Наконец, с помощью тех же рассуждений показываем, что если  $m \geq 1$  и  $\alpha \in \mathbb{C}$ , то  $z^m e^{\alpha z} \notin (E_\Lambda; H\{0\})$ . ▷

**Лемма 1.6.** Если интерполяционная задача

$$\begin{aligned} y(\lambda_k) &= d_k, \quad k = 1, 2, \dots; \quad 0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_k| \leq \dots; \\ \lambda_k &\neq \lambda_m \quad \text{при} \quad k \neq m, \end{aligned} \quad (1.34)$$

разрешима в классе  $[1, 0]$  для любой последовательности  $\{d_k\}_{k=1}^\infty$  такой, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |d_k| \leq 0, \quad (1.35)$$

то выполняется условие (1.30).

◁ Пусть функция  $y_1(z)$  из  $[1, 0]$  — решение интерполяционной задачи

$$y_1(\lambda_m) = 0, \quad m = 2, 3, \dots; \quad y_1(\lambda_1) = 1.$$

Пусть еще  $y_2(\lambda) := (\lambda - \lambda_1)y_1(\lambda)$ . Тогда  $y_2 \in [1, 0]$  и  $y(\lambda_s) = 0$ ,  $s \geq 1$ . Остается применить все ту же теорему 1.1.2 из [100]. ▷

**1.4.4.** Перейдем теперь к основному результату раздела 1.4.

**Теорема 1.22.** Пусть  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  — последовательность попарно различных комплексных чисел и  $E_\Lambda := \{\exp \lambda_k z\}_{k=1}^\infty$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

а) выполняется условие (1.30) и любую функцию  $f$  из  $(E_\Lambda; H\{0\})$  можно представить (единственным образом) в виде ряда (1.31), сходящегося в  $A(W_f)$ ;

б) интерполяционная задача (1.34) разрешима в  $[1, 0]$  для любой последовательности  $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ , удовлетворяющей условию (1.35).

◁ Приступая к доказательству этой теоремы, заметим прежде всего, что согласно лемме 1.6 б)  $\Rightarrow$  (1.30). Поэтому при доказательстве соотношения а)  $\Leftrightarrow$  б) можно считать, что условие (1.30) выполнено. Приведем теперь один результат из работы [38], который является частным случаем теоремы 27 из [38], когда фигурирующее в этой теореме замкнутое выпуклое множество  $D$  совпадает с началом координат.

**Теорема 1.23** [38]. Пусть  $H$  — нетривиальное инвариантное подпространство  $H\{0\}$  с простым спектром  $\{(\lambda_n, 1)\}_{n=1}^\infty$ , где  $\lambda_n \neq \lambda_m$  при  $n \neq m$ . Для того чтобы каждую функцию  $f$  из  $H$  можно было представить (единственным образом) в виде ряда (1.31), сходящегося (к сумме  $f$ ) в  $A(W_f)$ , необходимо и достаточно, чтобы интерполяционная задача (1.34) была разрешима в  $[1, 0]$  для любой последовательности  $\{d_k\}_{k=1}^\infty$  со свойством (1.35).

Положив в теореме 1.23  $H = (E_\Lambda; H\{0\})$  и используя еще лемму 1.6, находим, что а)  $\Leftrightarrow$  б). ▷

**1.4.5.** Обращаясь к интерполяционной задаче (1.34), отметим, что согласно [12] она имеет решение в классе  $[1, 0]$  для любой последовательности  $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ , удовлетворяющей условию (1.35), тогда и только тогда, когда справедливо равенство (1.30) и, кроме того, когда

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln \Psi_k^\delta \leq 0 \quad \forall \delta \in (0, 1), \quad (1.36)$$

где  $\Psi_k^\delta := \prod_j \left| 1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_k} \right|$  и произведение берется по тем  $j \neq k$ , для которых  $|\lambda_j - \lambda_k| \leq \delta |\lambda_k|$ . Как следует из работ [13, 19], условие (1.36) эквивалентно равенству

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k|} \int_0^{\delta |\lambda_k|} \frac{[n(\lambda_k, t) - 1]}{t} dt = 0, \quad (1.37)$$

в котором  $n(\mu, t)$  — число точек из последовательности  $\Lambda$ , лежащих в круге  $|z - \mu| \leq t$ . Это позволяет вывести из теоремы 1.22 такой результат.

**Следствие.** Пусть  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность попарно различных комплексных чисел и пусть  $E_{\Lambda} := \{\exp \lambda_k z\}_{k=1}^{\infty}$ . Тогда утверждение а) теоремы 1.22 имеет место тогда и только тогда, когда справедливы соотношения (1.37) и (1.30).

Можно указать одно сравнительно простое условие, обеспечивающее выполнение условия (1.37). Пусть  $\phi(t)$  — определенная на  $[0, +\infty)$  функция такая, что  $\phi(t) = 0$  для всех  $t \in [0, 1)$ ;  $\phi(1) = \gamma > 0$ ;  $\phi(t) \uparrow +\infty$  на  $[1, +\infty)$ ,  $\phi(t)$  непрерывна на  $[1, +\infty)$  и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\phi(t)} < \infty$ . Пусть, далее,  $\psi(t)$  — обратная к  $\phi(t)$  функция (если функцию  $\phi(t)$  рассматривать на  $[1, +\infty)$ ), определенная, монотонная и непрерывная на  $[\gamma, +\infty)$ . Тогда существует  $B < +\infty$  такое, что

$$\psi(t) \leq Bt \quad \forall t \geq 1.$$

Предположим теперь, что

$$d := \inf \left\{ \frac{|\lambda_n - \lambda_m|}{\phi(n - m)} : n, m \geq 1, n \neq m \right\} > 0. \quad (1.38)$$

Если  $s \neq m$  и  $|\lambda_m - \lambda_s| \leq t$ , то  $\phi(s - m) \leq t/d$ . Отсюда для всех  $t \geq d_{\gamma}$   $n(\lambda_m, t) \leq 2\psi(t/d)$ .

Если  $m \geq N_0$ , то

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta|\lambda_m|} \frac{[n(\lambda_m, t) - 1]}{t} dt &= \int_{d_{\gamma}}^{\delta|\lambda_m|} \frac{[n(\lambda_m, t) - 1]}{t} dt < \int_{d_{\gamma}}^{\delta|\lambda_m|} \frac{n(\lambda_m, t)}{t} dt \leq \\ &\leq 2 \int_{d_{\gamma}}^{\delta|\lambda_m|} \frac{\psi(\frac{t}{d})}{t} dt \leq \frac{2B\delta|\lambda_m|}{d}, \end{aligned}$$

и условие (1.37) выполнено.

В качестве такой функции  $\phi(t)$  можно, например, взять функцию

$$\begin{aligned} \phi(t) &= 0, \quad 0 \leq t < 1; \quad \phi(t) = ct \quad \text{или} \\ \phi(t) &= ct \ln(t + \beta), \quad \beta > 0, \quad 1 \leq t < +\infty. \end{aligned}$$

**1.4.6.** Возвращаясь к теореме 1.22, заметим, что из справедливости утверждения *a)* следует выполнение условия (1.30):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$ . Из теоремы Хилле следует, что в этом случае  $c(1.31) = \text{abc}(1.31)$  для любого ряда (1.31). Далее, так как утверждения *b)* и *a)* равносильны, то для любой функции  $V$  из  $(E_\Lambda; H\{0\})$  найдется ряд вида (1.31) такой, что

$$V(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z} \quad \forall z \in W_V, \quad (1.39)$$

и ряд сходится в  $A(W_V)$ . Но тогда для этого ряда

$$\text{abc}(1.39) \subseteq c(1.39) \subseteq W_v \subseteq c(1.39),$$

откуда  $W_v = c(1.39) = \text{abc}(1.39)$ . Таким образом, можно усилить теорему 1.22 следующим образом.

**Теорема 1.24.** Если  $\Lambda := (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$  — последовательность попарно различных комплексных чисел, то следующие условия равносильны:

- A) выполняются условия (1.30) и (1.37);
- B) выполняется условие (1.30); для любой функции  $f$  из множества  $(E_\Lambda; H\{0\})$  ее полная вейерштрассова область существования  $W_f$  выпукла и имеется (единственный) ряд вида (1.1), который сходится в  $A(W_f)$ , причем его сходимость — абсолютная, а сумма ряда равна  $f(z)$ .

Заметим, что теоремы 1.22 и 1.24 доказаны без использования теоремы Поля 1.21. Поэтому теорема 1.24 является независимым результатом, дополняющим теорему 1.21.

**Следствие 1.** Пусть попарно различные показатели  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  удовлетворяют условию (1.38), в котором  $\psi$  — функция, введенная выше, и пусть выполняется условие (1.30). Тогда полная область существования  $W_V$  любой функции  $V$  из  $(E_\Lambda; H\{0\})$  выпукла и имеется ряд вида (1.31), который сходится в  $A(W_V)$  и сумма которого в  $W_V$  равна  $V$ .

**Следствие 2.** Пусть попарно различные комплексные числа  $\{\lambda_k\}$ ,  $k \geq 1$ , удовлетворяют условиям (1.30) и (1.37). Пусть, далее, ряд (1.31) сходится в некотором круге  $K_r(z_0)$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ . Тогда полная область  $W$  существования этого ряда выпукла, а сам ряд сходится в  $A(W)$ .

**Следствие 3.** Пусть попарно различные комплексные числа  $\{\lambda_k\}$ ,  $k \geq 1$ , удовлетворяют условиям (1.30) и (1.37). Пусть, далее,

полная область сходимости ряда (1.31) непуста. Тогда, если  $V(z)$  — сумма ряда (1.31) в области  $c(1.31) = \text{abc}(1.31)$ , то ряд (1.31) сходится равномерно внутри  $W_V$ , так что  $W_V = c(1.31) = \text{abc}(1.31)$ , и каждая точка на границе полной области сходимости ряда (1.31) является особой для его суммы.

**1.4.7.** Теоремы 1.22 и 1.24 по своему характеру находятся в русле тематики, в свое время интенсивно разрабатывавшейся А. Ф. Леонтьевым, его учениками и последователями: описание свойств предельной функции последовательности, составленной из линейных агрегатов системы экспонент  $\{\exp \lambda_k z\}_{k=1}^{\infty}$  в  $A(G)$ , в случае, когда эта система неполна в  $A(G)$  (см., например, [100, 102], где для других аналитических ситуаций и другим методом, чем изложенный в данном разделе, получены важные результаты для последовательностей экспонент и полиномов из экспонент).

Что же касается следствия 2 теоремы 1.24, то в ней указываются достаточные условия (а именно, условия (1.30) и (1.37)), при которых из сходимости ряда вида (1.31) в каком-либо круге  $K_r(z_0)$  следует его равномерная сходимость внутри полной области существования его суммы. Здесь остается нерешенным такой, на наш взгляд, интересный вопрос: какое условие (при выполнении (1.30)) будет необходимым и достаточным для того, чтобы любой ряд (1.31), сходящийся в каком-либо круге  $K_r(z_0)$ , сходиллся в  $A(W_f)$ , где  $W_f$  — вейерштрассова область существования его суммы  $f$  (очевидно, что это условие должно быть не сильнее, чем (1.37)).

Следует заметить, что предложение 2 работы [63] утверждает, что таким необходимым и достаточным условием (дополнительным к (1.30)) является условие (1.37). Однако доказательство этого предложения содержит «прокол». Именно, когда в [63] вводится пространство  $T_R$  всех рядов вида (1.31), сходящихся в  $A(K_R)$ , то отмечается (совершенно правильно), что для любого  $r$  из  $(0, R)$   $T_R$  — инвариантное относительно дифференцирования подпространство  $(E_{\Lambda}; A(K_R(r)))$  с простым спектром  $\{(\lambda_n, 1)\}_{n=1}^{\infty}$ . Кроме того, молчаливо предполагается, но не доказывается (хотя и используется при доказательстве), что  $T_R$  допускает спектральный синтез в  $A(K_R(r))$ , т. е. замкнуто в  $A(K_R(r))$ . Между тем, замкнутость  $T_R$  не только нуждается в доказательстве, но и вызывает определенные сомнения.

По-видимому, наиболее общие известные на сегодняшний день условия, при выполнении которых каждая точка на границе (непу-

стой) полной области сходимости ряда (1.31) является особой для его суммы, указаны в следствии 3 теоремы 1.24.

**1.4.8.** Приведем пример, иллюстрирующий это следствие. Пусть числа  $\mu_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , положительны и попарно различны,  $\lambda_n = i\mu_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\mu_n} = 0$ . Согласно теореме Валирона (см., например, [100, с. 115]) ряд (1.31) абсолютно сходится в полуплоскости  $\Pi(D) := \{z : \Im z > D\}$  и расходится в каждой точке полуплоскости  $\Pi^-(D) := \{z : \Im z < D\}$ :

$$c(1.31) = \text{abc}(1.31) = \Pi(D), \quad D := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} \ln |a_n|.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию  $L_0(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\mu_n}\right)^2\right]$  и положим  $\delta_1 = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_m} \ln \frac{1}{|L'_0(\mu_m)|}$ . Ясно, что  $L_0(\lambda) \in [1, 0]$ . Как отмечалось рядом авторов, условие (1.37) в данном случае выполнено, если  $\delta_1 = 0$ .

Из следствия 3 теоремы 1.24 получаем [100, 145]:

**Теорема 1.25 (В. Бернштейна).** Пусть для ряда (1.31)

$$\lambda_n = i\mu_n, \quad \mu_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \delta_1 = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\mu_n} = 0.$$

Тогда каждая точка  $z$ , для которой  $\Im z = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} \ln |a_n|$ , является особой для суммы ряда (1.31).

Таким образом, следствие 3 теоремы 1.24 можно рассматривать как обобщение (на комплексные показатели  $\lambda_n$ ) только что приведенной теоремы В. Бернштейна.

**1.4.9.** Приведем еще один результат, вытекающий из теоремы 1.22. Пусть  $a(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k \in [1, 0]$  и  $Ly = a(D)y := \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$  — линейный дифференциальный оператор с символом (характеристической функцией)  $a(\lambda)$ . Как установлено Поля и Валироном [170, 178], оператор  $L$  непрерывен в пространстве  $A(G)$ , где  $G$  — любая область в  $\mathbb{C}$ . Далее, если  $z_0 \in \mathbb{C}$  и  $V(z)$  — решение уравнения  $(Ly)(z) = 0$  из  $H(\{0\})$ , удовлетворяющее ему в некотором круге  $K_s(0)$ , то функция  $V$  всюду однозначна и ее полная (вейерштрассова) область существования  $W_V$  выпукла. Предположим, что все нули  $\lambda_k$  функции  $a(\lambda)$  — простые. Тогда, как известно из теории



целых функций (см., например, [98] или [100]),  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$ . Кроме того, в тех же работах [170, 178] показано, что

$$V \in (E_\Lambda; A(W_V)) \subseteq (E_\Lambda; H(\{0\})), \quad E_\Lambda = \{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^\infty.$$

С другой стороны очевидно, что если  $y \in (E_\Lambda; H(\{0\}))$ , то в силу непрерывности оператора  $L$  имеем:  $(Ly)(z) = 0$ ,  $|z| < \eta(y)$ . Таким образом,

$$(E_\Lambda; H(\{0\})) = L_0^{-1}(0) := \{y \in H\{0\}, \quad (Ly)(z) = 0, \quad |z| \leq \eta(y)\}.$$

Непосредственно из теоремы 1.22 получаем такой результат.

**Теорема 1.26.** Пусть  $a(\lambda)$  — функция из класса  $[1, 0]$  с простыми нулями  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ . Тогда равносильны утверждения:

- 1) любая функция  $y$  из  $L_0^{-1}(0)$  всюду однозначна, ее полная область существования  $W_y$  выпукла и существует (единственный) абсолютно сходящийся в  $A(W_y)$  ряд вида (1.1) с суммой, равной  $y$ ;
- 2) выполняется условие (1.37).

**1.4.10.** Переходя к многомерным аналогам результатов, полученных в этом разделе, ограничимся здесь переносом на  $p$  переменных следствия 3 теоремы 1.24. При этом мы будем использовать понятие аналитического продолжения функции  $f$  от  $p$  комплексных переменных в том виде, как оно изложено в [136, гл. 1, § 6, пп. 1–3]. Если  $D$  — область в  $\mathbb{C}^p$ , то под аналитической в области  $D$  функцией  $f$  ( $f \in A(D)$ ) понимается однозначная аналитическая в этой области функция. Далее, если при  $k = 1, 2$   $D_k$  — область в  $\mathbb{C}^p$  такая, что  $D_1 \subset D_2$ ,  $f_k \in A(D_k)$  и  $f_2(z) = f_1(z)$  для всех  $z \in D_1$ , то говорят, что  $f_2$  является аналитическим продолжением  $f_1$  из области  $D_1$  в (на) область  $D_2$ . Пусть теперь области  $D_1$  и  $D_2$  пересекаются по непустой области  $G_2$  и, если  $D := D_1 \cup D_2$ , то

$$\exists f \in A(D), \exists f_k \in A(D_k), \quad k = 1, 2: \quad f|_{D_1} = f_1, \quad f|_{D_2} = f_2.$$

Тогда функция  $f_2$  называется непосредственным продолжением функции  $f_1$  на область  $D_2$  (в силу теоремы единственности непосредственное продолжение однозначно в  $D$  и определяется единственным образом).

Рассмотрим теперь «цепь»  $\Gamma(D_k, f_k)_{k=1}^m$ , где  $f_k \in A(D_k)$  для всех  $k \leq m$ , каждая область  $D_k$  пересекается с  $D_{k+1}$  по непустой области  $G_k$  и функция  $f_{k+1}$  является непосредственным аналитическим

продолжением  $f_k$  на область  $D_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). В этом случае функция  $f_{m+1}$  называется аналитическим продолжением начального функционального элемента  $f_1$  на область  $D_{m+1}$  (в результате такого продолжения определяется функция  $f_0$  из  $A(\bigcup_{k=1}^{m+1} D_k)$ ). Исходя из начального элемента  $(D_1, f_1)$  и осуществляя все возможные аналитические продолжения по «цепям» (в частности, используя аналитические продолжения вдоль кусочно гладких кривых с начальной точкой  $z_1 \in D_1$  (см. об этом [136, гл. 1, § 6, п. 2]), получим некоторую область  $B$  и определенную в ней функцию  $f$  (уже не обязательно однозначную, но не более чем счетнозначную [136]), которую называют аналитической функцией переменных  $z_1, \dots, z_p$  в области  $B$ .

Точка  $M \in \mathbb{C}^p$  называется достижимой, если имеется путь  $L$  (например, кусочно гладкая кривая) с началом в  $z_1$ , вдоль которого начальную функцию  $f_1(z)$  из  $A(D_1)$  можно аналитически продолжить из  $D_1$  в некоторую область, содержащую  $M$ .

При этом пути  $L_1$  и  $L_2$  (с одним и тем же началом в  $z_1$  и концом в  $M_1$ ) называются эквивалентными, если функции  $f_{m_1}(z)$  и  $f_{m_2}(z)$ , получающиеся на конце пути, совпадают (в общей области определения).

Если область  $B$  — совокупность всех достижимых точек, и берутся все голоморфные элементы, возникающие при продолжении (из  $z_1$ ) по всем неэквивалентным путям, то так полученная функция (в общем случае многозначная) называется полной аналитической функцией  $f$ , а область  $B$  — полной (вейерштрассовой) областью  $W_f$  существования функции  $f$ .

Введем еще определения, относящиеся к одномерной ситуации. Назовем последовательность попарно различных комплексных чисел  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ :

а) эффективной по Поля (или  $P$ -эффективной), если из сходимости какого-либо ряда (1.31) в круге  $K_r(z_0)$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $0 < r \leq \infty$ , следует, что полная область  $W_f$  существования его суммы  $f$  выпукла и ряд (1.31) сходится в  $A(W_f)$ ;

б) сильно эффективной по Поля (сильно  $P$ -эффективной), если для любой точки  $z_0 \in \mathbb{C}$  (или, что все равно, как показано в начале 1.4.3, для некоторой точки  $z_0$  из  $\mathbb{C}$ ) каждая функция  $f$  из  $(E_{\Lambda}; H(\{z_0\}))$  всюду однозначна, ее полная область существования  $W_f$  выпукла и существует единственный ряд вида (1.31), сходящийся к  $f$  в  $A(W_f)$ .

Ясно, что сильно  $P$ -эффективная последовательность  $P$ -эффективна. Кроме того, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$ , то последовательность  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  сильно  $P$ -эффективна тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.37).

**1.4.11.** Докажем используемый в дальнейшем вспомогательный результат, представляющий и некоторый самостоятельный интерес.

**Лемма 1.7.** Пусть  $p \geq 1$ ;  $D_j$  и  $G_j$  — непустые области в  $\mathbb{C}$  такие, что  $D_j \subseteq G_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Пусть, далее, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(\lambda_n, z)_p}, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad \lambda_n = (\lambda_{k,n})_{k=1}^p \in \mathbb{C}^p, \quad (1.40)$$

сходится в области  $D := \bigotimes_{j=1}^p D_j$  и его сумма  $f(z_1, \dots, z_p)$  допускает аналитическое продолжение  $F(z_1, \dots, z_p)$  на область  $G = \bigotimes_{j=1}^p G_j$ . Пусть, наконец, каждая последовательность  $(\lambda_{k,n})_{n=1}^{\infty}$ ,  $k = 1, \dots, p$ ,  $P$ -эффективна и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_{m,n}} = 0, \quad m = 1, \dots, p. \quad (1.41)$$

Тогда функция  $F$  однозначна в выпуклой области  $\text{conv } G$ , а ряд (1.40) сходится абсолютно в  $A(\text{conv } G)$ .

◁ Доказательство проводится методом полной математической индукции. Прежде всего отметим, что в силу условий (1.41)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|_p} = 0$  и ряд (1.40) сходится абсолютно в  $A(\text{conv } G)$ . Далее, лемма 1.7 верна при  $p = 1$  (это прямо следует из определения  $P$ -эффективной последовательности).

Допустим, что она верна при  $p \leq p_0$ , и докажем ее справедливость при  $p = p_0 + 1$ . Положим в (1.40)  $p = p_0 + 1$  и зафиксируем точку  $z_{p_0+1}$  из  $D_{p_0+1}$ . Если  $d_n := a_n \exp(\lambda_{p_0+1,n} z_{p_0+1})$  для всех  $n \geq 1$ , то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp \left( \sum_{j=1}^{p_0} \lambda_{j,n} z_j \right) \quad (1.42)$$

по предположению леммы сходится (абсолютно) в  $A(\bigotimes_{k=1}^{p_0} D_k)$  и его сумма  $h(z_1, \dots, z_{p_0}) := f(z_1, \dots, z_{p_0}, z_{p_0+1})$  допускает аналитическое продолжение в  $p_0$ -мерную область  $\bigotimes_{l=1}^{p_0} G_l$ . Из предположения индукции следует, что ряд (1.42) сходится абсолютно в  $A(M)$ , где

$M = \text{conv}(\bigotimes_{l=1}^{p_0} G_l)$ . Значит, ряд (1.40) (с  $p = p_0 + 1$ ) сходится абсолютно в  $M \times D_{p_0+1}$ .

Зафиксируем теперь какие-либо точки  $z_1, \dots, z_{p_0}$  из области  $\bigotimes_{j=1}^{p_0} G_j$  и положим  $b_n = a_n \exp \sum_{k=1}^{p_0} \lambda_{k,n} z_k$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp \lambda_{p_0+1,n} z_{p_0+1} \quad (1.43)$$

сходится абсолютно в  $D_{p_0+1}$ , а его сумма  $g(z_{p_0+1}) := f(z_0, \dots, z_{p_0}, z_{p_0+1})$  продолжается аналитически (однозначным образом) в область  $G_{p_0+1}$ . Но тогда ряд (1.43) сходится абсолютно в  $A(G_{p_0+1})$  и (в силу условия (1.41)) при  $p = p_0 + 1$  в  $A(\text{conv} G_{p_0+1})$ . Значит, ряд (1.40) сходится абсолютно в области  $(\bigotimes_{j=1}^{p_0} G_j) \times \text{conv} G_{p_0+1} = T$ . Если  $B(z_1, \dots, z_{p_0}, z_{p_0+1})$  — его сумма, то  $B \in A(T)$ . При этом

$$B(z) = f(z) \quad \forall z = (z_1, \dots, z_{p_0}, z_{p_0+1}) \in \bigotimes_{k=1}^{p_0+1} D_k,$$

и, таким образом, функция  $f$  допускает однозначное аналитическое продолжение (посредством функции  $B$ ) из области  $\bigotimes_{k=1}^{p_0+1} D_k$  в область  $T$ .

Наконец, зафиксируем  $\tilde{z}_{p_0+1}$  из  $\text{conv} G_{p_0+1}$  и положим

$$\gamma(z_1, \dots, z_{p_0}) := f(z_1, \dots, z_{p_0}, \tilde{z}_{p_0+1}).$$

Ряд (1.42) с  $d_n = a_n \exp(\lambda_{p_0+1,n} \tilde{z}_{p_0+1})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , сходится абсолютно в области  $\bigotimes_{s=1}^{p_0} G_s$  и  $\gamma \in A(\bigotimes_{s=1}^{p_0} G_s)$ . Поэтому этот ряд сходится абсолютно в области  $\text{conv}(\bigotimes_{s=1}^{p_0} G_s)$  и его сумма  $\gamma(z_1, \dots, z_{p_0})$  однозначна и аналитична в этой области. Следовательно, исходный ряд (1.40) сходится абсолютно в объединении областей  $M \times G_{p_0+1}$  и  $(\bigotimes_{s=1}^{p_0} G_s) \times \text{conv} G_{p_0+1}$ . Но тогда он сходится абсолютно в области  $\text{conv}[(M \times G_{p_0+1}) \cup T]$ , содержащей  $\bigotimes_{s=1}^{p_0} G_s$ , и его сумма аналитична в этой области. Тем самым доказательство леммы завершено.  $\triangleright$

**1.4.12.** Установим основной результат для многомерной ситуации.

**Теорема 1.27.** Пусть  $p \geq 1$ ;  $\lambda_n = (\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{p,n}) \in \mathbb{C}^p$  при всех  $n \geq 1$  и каждая из  $p$  последовательностей  $\{\lambda_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $k = 1, \dots, p$ , эффе́ктивна по По́лиа. Пусть еще выполняются условия (1.41) и ряд (1.40) сходится в некотором полидиске

$$H_{\delta}^p(z_0) = \{z \in \mathbb{C}^p : |z_s - z_{0,s}| < \delta, s = 1, \dots, p\}.$$

Тогда сумма  $V(z)$  ряда (1.40), определенная первоначально в  $K_\delta^p(z_0)$ , однозначна в ее полной области голоморфности  $W_V$ ; область  $W_V$  выпукла и ряд (1.40) сходится абсолютно в  $A(W_V)$ .

◁ Аналитическое продолжение функции  $V$  из  $K_\delta^p(z_0)$  в окрестность любой точки области  $W_V$  можно осуществить посредством ее аналитического продолжения по некоторой цепи полидисков, каждый из которых содержится в  $W_V$  и имеет непустое пересечение с предыдущим полидиском данной цепи (с начальным полидиском  $K_\delta^p(z_0)$ ). Пусть  $K_1$  — полидиск такой цепи, имеющий непустое пересечение с  $K_\delta^p(z_0)$ .

Зафиксируем какой-либо полидиск  $B$ , для которого  $B \subset K_\delta^p(z_0) \cap K_1$ . Если в лемме 1.7 положить  $\bigotimes_{j=1}^p D_j = B$ ;  $\bigotimes_{j=1}^p G_j = K_1$ , то по этой лемме и теореме 1.1 ряд (1.30) сходится абсолютно в  $A(\text{conv}[K_\delta^p(z_0) \cup K_1])$ . Если  $K_2$  — следующий за  $K_1$  полидиск рассматриваемой цепи, то аналогичными рассуждениями показываем, что ряд (1.40) сходится абсолютно в  $A(\text{conv}(K_1 \cup K_2))$ , а, следовательно, в  $A(\text{conv}(K_\delta^p(z_0) \cup K_1 \cup K_2))$ . Продолжая этот процесс, получим в итоге, что ряд (1.40) абсолютно сходится в  $A(M_\alpha)$ , где  $M_\alpha$  — выпуклая оболочка объединения всех полидисков данной цепи. Но тогда он сходится абсолютно в  $A(\text{conv} \bigcup_{\alpha \in \Omega} M_\alpha)$ , где  $\bigcup_{\alpha \in \Omega} M_\alpha$  — объединение всех полидисков по всем цепям, по которым возможно аналитическое продолжение (посредством ряда (1.40)) первоначального элемента  $(K_\delta^p(z_0), V(z))$  в полную область существования (голоморфности)  $W_V$ . Ясно, что полная аналитическая функция, полученная при таком продолжении, всюду однозначна в области  $W_V = \bigcup_{\alpha \in \Omega} M_\alpha$ . Более того, так как ряд (1.40) абсолютно сходится в  $A(\text{conv} \bigcup_{\alpha \in \Omega} M_\alpha)$ , то его сумма  $V(z)$  — однозначная аналитическая функция в выпуклой области  $\text{conv} \bigcup_{\alpha \in \Omega} M_\alpha$ , откуда  $\text{conv} \bigcup_{\alpha \in \Omega} M_\alpha \subseteq W_V$ . Но всегда  $W_V \subseteq \text{conv} W_V$  и, следовательно,  $W_V = \text{conv} W_V$ . ▷

**Следствие.** Пусть  $p \geq 1$ ; для любого  $n \geq 1$   $\lambda_n = (\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{p,n}) \in \mathbb{C}^p$  и при  $k \leq p$   $\{\lambda_{k,n}\}_{n=1}^\infty$  — последовательность попарно различных чисел. Пусть, далее, ряд (1.40) сходится в некоторой непустой области  $G \subset \mathbb{C}^p$ , а его показатели  $\lambda_n$  удовлетворяют условиям:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_{j,n}} = 0, \quad j = 1, \dots, p; \quad (1.44)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_{j,k}|} \int_0^{\delta |\lambda_{j,k}|} \frac{n_j(\lambda_{j,k}, t) - 1}{t} dt = 0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (1.45)$$

При этом в (1.45)  $n_j(\lambda_{j,k}, t)$  — число точек из последовательности  $\{\lambda_{j,n}\}_{n=1}^{\infty}$ , принадлежащих кругу  $|z_j - \lambda_{j,k}| \leq t$ .

Тогда сумма  $V(z)$  ряда (1.40) однозначна в ее полной области голоморфности  $W_V$ , причем область  $W_V$  выпукла. Кроме того, максимальная область сходимости (или, что в данном случае все равно, абсолютной сходимости) ряда (1.40) совпадает с полной областью голоморфности  $W_V$  его суммы  $V(z)$ .

**1.4.13.** Как показано выше, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|_p} = 0$ , то последовательность  $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  попарно различных точек из  $\mathbb{C}^p$  сильно  $P$ -эффективна тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.37). Очевидно, что если выполнены условия (1.30) и (1.37), то такая последовательность  $\Lambda$  подавно  $P$ -эффективна. Однако, критерий  $P$ -эффективности последовательности  $\Lambda$  (в отличие от критерия ее сильной  $P$ -эффективности) пока неизвестен, и его установление представляет, на наш взгляд, определенный интерес, также как и перенос на многомерную ситуацию теоремы 1.22.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В теореме 1.27 можно отказаться от одного из исходных предположений, а именно, от выполнения условий (1.41), если в ее формулировке использовать несколько измененное понятие  $P$ -эффективной последовательности. Пусть  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность попарно различных точек из  $\mathbb{C}^p$ . Назовем ее абсолютно  $P$ -эффективной, если она обладает следующим свойством: пусть ряд (1.40) сходится абсолютно в некотором полидиске  $K_{\delta_1}^p(z_1)$  и его сумма аналитически продолжается в полидиск  $K_{\delta_2}^p(z_2)$ , содержащий  $K_{\delta_1}^p(z_1)$ ; тогда этот ряд сходится абсолютно в  $A(K_{\delta_2}^p(z_2))$ . Повторяя почти буквально доказательство теоремы 1.27, приходим к такому результату.

**Теорема 1.28.** Пусть  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  — абсолютно  $P$ -эффективная последовательность точек из  $\mathbb{C}^p$ ; пусть ряд (1.40) сходится абсолютно в некотором полидиске  $K_{\delta}^p(z_0)$  и  $V(z)$  — его сумма в этом полидиске. Тогда полная аналитическая функция, определяемая первоначальными значениями  $V(z)$  в  $K_{\delta}^p(z_0)$ , однозначна в своей полной области голоморфности  $W_V$ , эта область выпукла и ряд (1.40) сходится абсолютно в  $A(W_V)$ .

Основное содержание этого раздела (а именно, теоремы 1.22, 1.24 и 1.27) первоначально было изложено в статье автора [160].

## ГЛАВА 2

### РЯДЫ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

#### 2.1. Общие результаты. Ряды в пространствах Фреше

2.1.1. В этом разделе рассматривается ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k, \quad c_k \in \Phi, \quad u_k \in H, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

в котором  $u_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , — элементы полного отделимого локально выпуклого пространства (ПОЛВП)  $H$  (без ограничения общности можно считать, что каждый элемент  $u_k$  отличен от нулевого) над полем скаляров  $\Phi$  (как раньше,  $\Phi = \mathbb{C}$  или  $\Phi = \mathbb{R}$ ). Нас будут интересовать условия сходимости и, главным образом, абсолютной сходимости ряда (2.1) в  $H$ . Начнем изложение с некоторых простых соображений.

Если  $H$  — банахово ( $B$ )-пространство с нормой  $\|\cdot\|$ , то ряд (2.1) абсолютно сходится в  $H$  тогда и только тогда, когда при всех  $k \geq 1$   $c_k = \frac{\theta_k}{\|u_k\|}$ , где  $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_1$ . Далее, если ряд (2.1) сходится в ПОЛВП  $H$  с набором преднорм  $P = \{p\}$ , определяющим топологию в  $H$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| p(u_n) = 0 \quad \forall p \in P, \quad (2.2)$$

и по-прежнему

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n| p(u_n) < +\infty \quad \forall p \in P. \quad (2.3)$$

При одном дополнительном предположении (заведомо не имеющим места для любого  $B$ -пространства) условие (2.3) может оказаться и достаточным для абсолютной сходимости ряда (2.1) в  $H$ . Будем говорить, что последовательность элементов  $U\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$   $l_1$ -ядерна в  $H$ , если

$$\forall p_1 \in P \quad \exists p_2 \in P : \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_1(u_k)}{p_2(u_k)} < +\infty. \quad (2.4)$$

В случае, когда последовательность  $U$   $l_1$ -ядерна в ПОЛВП и выполнено условие (2.3), имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| p_1(u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| p_2(u_k) \frac{p_1(u_k)}{p_2(u_k)} < +\infty \quad \forall p_1 \in P.$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 2.1.** (1) Если ряд (2.1) сходится в ПОЛВП  $H$ , то выполнено условие (2.3).

(2) Обратно, если последовательность  $U$   $l_1$ -ядерна в  $H$  и имеет место соотношение (2.3), то ряд (2.1) абсолютно сходится в  $H$ .

Для того чтобы прояснить смысл условия (2.4), введем пространство коэффициентов всех абсолютно сходящихся рядов вида (2.1) в ОЛВП  $H$  с набором преднорм  $P = \{p\}$ :

$$A_2(U; H) := \left\{ d = (d_k)_{k=1}^{\infty}; \quad q_p(d) = \sum_{k=1}^{\infty} |d_k| p(u_k) < \infty \quad \forall p \in P \right\}$$

(здесь  $U := \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ ). Как известно [37, 123],  $A_2(U; H)$  — ОЛВП с топологией, определяемой набором преднорм  $Q_P := \{q_p : p \in P\}$ , полное, если полно ОЛВП  $H$ .

Из [123, теорема 6.1.2] следует, что условие (2.4) необходимо и достаточно для того, чтобы пространство  $A_2(U; H)$  было ядерным.

Если, в частности,  $U$  — абсолютный или, что все равно, равностепенно непрерывный [123] базис в ядерном ПОЛВП  $H$  и если пространство  $H$  изоморфно пространству  $A_2(U; H)$  (так, например, всегда будет, если  $H$  — пространство Фреше), то  $A_2(U; H)$  — ядерное ПОЛВП последовательностей, и условие (2.4) обязательно выполняется. В частности, оно всегда выполняется, если  $(u_k)_{k=1}^{\infty}$  — базис в ядерном пространстве Фреше. Следует, однако, отметить (в соответствии с основным объектом исследования в данной работе), что, как нетрудно проверить, любая последовательность экспонент  $(\exp\langle \lambda_k, z \rangle_p)_{k=1}^{\infty}$  не может быть базисом в каждом ядерном функциональном пространстве  $H$ , инвариантном относительно дифференцирования (по любой частной производной) и содержащем хотя бы одну экспоненту вида  $e^{\langle \alpha, z \rangle_p}$ , где  $\alpha \neq \lambda_l$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

Теорема 2.1 позволяет, в частности, указать достаточно простые условия (в ряде случаев критериального характера) абсолютной сходимости ряда экспонент (1.1) в часто встречающихся в теории



функций пространствах аналитических (в основном) и бесконечно-дифференцируемых функций одной и многих переменных. Остановимся вначале на тех пространствах, которые являются (ненормируемыми) пространствами Фреше, так как в последних преднормы, определяющие топологию в них, как правило, допускают простое описание.

**2.1.2.** Первый пример относится к рассмотренной ранее ситуации, когда  $H = A(G)$ ,  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ , с опорной функцией  $H_G(\lambda)$ , содержащая начало координат (последнее предположение введено для удобства изложения; его выполнения в общей ситуации всегда можно добиться с помощью преобразования сдвига).

Как хорошо известно,  $A(G)$  — это пространство Фреше со счетным набором преднорм (в данном случае норм)

$$p_n(y) := \max \{ |y(z)| : z \in \overline{q_n G} \}, \quad 0 < q_n \uparrow 1.$$

Положим для всех  $k \geq 1$   $u_k = \exp \langle \lambda_k, z \rangle_p$ , где  $\lambda_k = (\lambda_{s,k})_{s=1}^p \in \mathbb{C}^p$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Имеем при любом  $m > n \geq 1$ :

$$p_m(u_k) = \exp q_m |\lambda_k|_p H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_n(u_k)}{p_m(u_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[ -(q_m - q_n) |\lambda_k|_p H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right].$$

Так как  $O \in G$ , то существует  $d > 0$  такое, что  $H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \geq d$  при всех  $k \geq 1$ , откуда

$$A_{n,m} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_n(u_k)}{p_m(u_k)} < \sum_{k=1}^{\infty} \exp [-(q_m - q_n) |\lambda_k|_p d] \quad \forall m > n \geq 1.$$

Предположим, что числа  $|\lambda_k|_p$  стремятся к  $+\infty$  так, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{|\lambda_k|_p} = 0. \quad (2.5)$$

Тогда абсцисса (и простой, и абсолютной) сходимости одномерного ряда Дирихле  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-x|\lambda_k|_p}$  равна нулю (см., например, [100,

с. 115]) и потому при любом  $m > n \geq 1$   $A_{n,m} < +\infty$ . Таким образом, последовательность  $\{\exp\langle \lambda_k, z \rangle_p\}_{k=1}^\infty$   $l_1$ -ядерна в  $A(G)$ . Из теоремы 2.1 получаем.

**Теорема 2.2.** Пусть  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$  с опорной функцией  $H_G(\lambda)$ , содержащая начало координат, и выполнено условие (2.5). Тогда равносильны такие утверждения:

- 1) ряд (1.1) сходится в  $A(G)$ ;
- 2) ряд (1.1) абсолютно сходится в  $A(G)$ ;
- 3) справедливы соотношения

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \ln |a_k| + |\lambda_k|_p q_n H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right] < +\infty, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Если только считать, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p = \infty$ , не предполагая равенство (2.5) выполненным, то можно найти другие условия, равносильные соотношениям (2.6). Прежде всего ясно, что последние влекут (в случае, когда  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p = \infty$ ) за собой неравенства

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_k|}{|\lambda_k|_p} + q_n H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right] \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Пусть, обратно, справедливо соотношение (2.7). Зафиксируем произвольный номер  $n \geq 1$  и какую-либо последовательность  $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$  такую, что  $\varepsilon_m \downarrow 0$ . Выберем номер  $k_1 = k_1(n)$  так, чтобы

$$\frac{\ln |a_k|}{|\lambda_k|_p} + q_{n+1} H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \leq \varepsilon_n \quad \forall k \geq k_1.$$

Отсюда, при  $k \geq k_1$

$$\frac{\ln |a_k|}{|\lambda_k|_p} + q_n H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \leq \varepsilon_n - (q_{n+1} - q_n) H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \leq -\delta_n < 0.$$

Но тогда, для тех же  $k$

$$\ln |a_k| + |\lambda_k|_p q_n H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \leq -\delta_n |\lambda_k|_p$$

и, следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \ln |a_k| + |\lambda_k|_p q_n H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right] = -\infty, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

В этом случае по-прежнему справедливы соотношения (2.7). Итак, если  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p = \infty$ , то (2.6)  $\iff$  (2.7)  $\iff$  (2.8).

Далее, если  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  — произвольная последовательность из  $\mathbb{R}^p$  и

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_k|}{|\lambda_k|_p} + H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right] \leq 0; \quad \lambda_k \neq 0, \quad \forall k \geq k_2. \quad (2.9)$$

то в силу того, что  $H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) > 0$  и  $0 < q_n < 1$  при всех  $n \geq 1$ , по-прежнему выполняются условия (2.7).

Если же справедливы неравенства (2.7), то, зафиксировав вновь  $n \geq 1$ , найдем, что для любого  $k \geq k_3 = k_3(n)$

$$\frac{\ln |a_k|}{|\lambda_k|_p} + q_{n+1} H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \leq \eta_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0.$$

Отсюда для тех же  $k \geq k_3$

$$\frac{\ln |a_k|}{|\lambda_k|_p} + H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \leq \eta_n + (1 - q_{n+1}) H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \leq \eta_n + T(1 - q_{n+1}),$$

где  $T = \max_{|\lambda|_p=1} H_G(\lambda)$ . Следовательно,

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln |a_k|}{|\lambda_k|_p} + H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right] \leq \eta_n + T(1 - q_{n+1}).$$

Так как левая часть последнего неравенства не зависит от  $n$ , а правая стремится к 0 при  $n \rightarrow \infty$ , то, устремляя  $n$  к  $\infty$ , приходим к (2.9). Таким образом, если  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p = \infty$ , то (2.7)  $\iff$  (2.9), и в этом случае соотношения (2.6)–(2.9) равносильны.

Обратимся к условиям теоремы 2.2. Неравенства (2.6) означают, что

$$\sup_{n \geq 1} p_n(\exp(\lambda_k, z)_p) < +\infty.$$

Поэтому из теоремы 2.1 следует, что 1)  $\implies$  3), какова бы ни была последовательность  $\{\lambda_k\}$  точек  $\lambda_k$  из  $\mathbb{R}^p$ . Если же еще и  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p = \infty$ , то соотношения (2.6)–(2.9), как было только что показано, равносильны друг другу, и каждое из них необходимо для сходимости ряда (1.1) в  $A(G)$ .

Наконец, если показатели  $\lambda_k$  удовлетворяют условию (2.5), то по теореме 2.2 любое из утверждений 1), 2) равносильно неравенствам (2.6), что, в свою очередь, эквивалентно каждому из соотношений (2.7)–(2.9). Поэтому теорему 2.2 можно дополнить и уточнить.

**Теорема 2.3.** Пусть  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$  с опорной функцией  $H_G(\lambda)$ , содержащая начало координат, и пусть  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  — произвольная почти невырожденная последовательность (см. п. 1.1.2) в  $\mathbb{R}^p$ . Тогда:

a)  $1) \implies 3)$ , т. е. условие (2.6) необходимо для сходимости ряда (1.1) в  $A(G)$ ;

b) если  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p = \infty$ , то соотношения (2.6)–(2.9) эквивалентны и каждое из них необходимо для сходимости ряда (1.1) в  $A(G)$ ;

c) если выполнено условие (2.5), то утверждения 1) и 2) теоремы 2.2 равносильны друг другу, а также любому из соотношений (2.6)–(2.9).

Легко убедиться, что теорема 2.3 содержит в себе теоремы 2.2 и 1.12 (последняя была доказана ранее несколько иным способом в п. 1.1.8), а также теорему 1.13.

Отметим, что условие (2.5) в данном случае необходимо и достаточно для  $l_1$ -ядерности последовательности  $E_\Lambda := \{\exp\langle \lambda_k, z \rangle_p\}_{k=1}^\infty$  в  $A(G)$ . Чтобы установить это, достаточно показать необходимость условия (2.5). Итак, допустим, что последовательность  $E_\Lambda$   $l_1$ -ядерна в  $A(G)$ . Тогда для любого  $n \geq 1$  существует  $m > n$ :

$$A_{n,m} = \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[ -(q_m - q_n) |\lambda_k|_p H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right] < \infty.$$

Так как область  $G$  ограничена, то существует  $D < +\infty$  такое, что  $H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \leq D$ ,  $k \geq 1$ . Отсюда  $\infty > A_{n,m} > \sum_{k=1}^{\infty} \exp [-(q_m - q_n) \times D |\lambda_k|_p]$ .

При этом  $0 < q_n < q_m < 1$ . Возьмем сколь угодно малое  $\delta > 0$  и выберем число  $q_n$  из  $(1 - \delta, 1)$ . Тогда  $q_m \in (q_n, 1)$  и  $0 < q_m - q_n < \delta$ . Таким образом, при любом  $\eta > 0$   $\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\eta |\lambda_k|_p) < \infty$  и абсцисса сходимости (или, что в данном случае все равно, абсцисса абсолютной сходимости) ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-|\lambda_k|_p z}$  такова, что  $a = c \leq 0$ .

Очевидно,  $\beta := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|_p} \geq 0$ . Если  $\beta > 0$ , то  $c = \beta > 0$  (см. [100, с. 116–118]), что невозможно. Поэтому  $\beta = 0$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|_p} = 0$ .

**2.1.3.** Пусть теперь  $p \geq 1$  и  $G$  — содержащая начало координат выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ , уже не обязательно ограниченная. Как известно, всегда найдется возрастающая последовательность содержащихся в  $G$  ограниченных выпуклых областей  $F_n$  таких, что

$$O \in F_n \subseteq \overline{F_n} \subset F_{n+1} \subset G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \forall n \geq 1.$$

Очевидно, что ряд (1.1) сходится (или абсолютно сходится) в  $A(G) = \varprojlim A(F_n)$  тогда и только тогда, когда он сходится (или абсолютно сходится) в каждом пространстве Фреше  $A(F_n)$ . Используя теорему 2.2, заключаем, что если выполнено условие (2.5), то ряд (1.1) сходится (или, что все равно, абсолютно сходится) в  $A(G)$  тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |a_k| + H_{F_n} \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right] \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Итак, получено другое доказательство следствия теоремы 1.11.

Для рядов экспонент (1.1) в некоторых неограниченных выпуклых областях  $G$  из  $\mathbb{C}^p$  условие (2.5) можно ослабить. В качестве примера положим  $G = \mathbb{C}^p$ ,  $F_n = K_p(0, n) := \{z \in \mathbb{C}^p : |z|_p < n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Пусть, по-прежнему,  $u_k = \exp\langle \lambda_k, z \rangle_p$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тогда

$$A_{n,m} = \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-(m-n)|\lambda_k|_p] \quad \forall m > n \geq 1.$$

Если вместо (2.5) выполняется более общее условие

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{|\lambda_k|_p} = D < +\infty, \quad (2.10)$$

то, как легко убедиться,  $A_{n,m} < \infty$  при любом  $n \geq 1$ , если  $m \geq n + 2 + D$ .

Следовательно, последовательность  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$   $l_1$ -ядерна в  $A(\mathbb{C}^p)$  при условии (2.10). По теореме 2.2 ряд (1.1) сходится (или абсолютно сходится) в  $A(K_p(0, n))$  тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |a_k| + n \right] \leq 0.$$

Ряд (1.1) сходится (или, что в данном случае все равно, абсолютно сходится) в  $A(\mathbb{C}^p)$  тогда и только тогда, когда он ведет себя таким

же образом в каждом пространстве  $A(K_p(0, n))$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Следовательно, теперь уже можно сформулировать итоговый результат для пространства  $A(\mathbb{C}^p)$ .

**Теорема 2.4.** Пусть показатели  $\lambda_k$  ряда (1.1) удовлетворяют условию (2.10). Тогда равносильны следующие утверждения:

- 1) ряд (1.1) сходится в  $A(\mathbb{C}^p)$ ;
- 2) ряд (1.1) сходится абсолютно в  $A(\mathbb{C}^p)$ ;
- 3) справедливо равенство  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |a_k| = -\infty$ .

Рассуждая, как в конце п. 2.1.2, без труда убеждаемся в том, что условие (2.10) не только достаточно, но и необходимо для ядерности последовательности  $(\exp \langle \lambda_k, z \rangle_p)_{k=1}^\infty$  в пространстве  $A(\mathbb{C}^p)$ .

И здесь, если показатели  $\lambda_k$  из  $\mathbb{C}^p$  совершенно произвольны, так что условие (2.10) может и не выполняться, легко получить, что ряд (1.1) сходится абсолютно в  $A(\mathbb{C}^p)$  тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \exp(|\lambda_n|_p R) < +\infty \quad \forall R < +\infty.$$

**2.1.4.** Перейдем к пространствам целых функций определенного роста. Пусть  $0 < \sigma < +\infty$ ,  $1 \leq \rho < +\infty$ . Условимся для любой целой функции  $y(z)$  из  $A(\mathbb{C}^p)$  обозначать символом  $|y|_\rho^\sigma$  следующую величину (возможно, для некоторых  $y(z)$  из  $A(\mathbb{C}^p)$  равную  $+\infty$ ):

$$|y|_\rho^\sigma = \sup_{r \geq 0} M_r(y) \cdot e^{-\sigma r^\rho},$$

$$M_r(y) = \max \{|y(z)| : |z_k| \leq r, k = 1, \dots, p\}.$$

Если  $e_\lambda(z) := \exp \langle \lambda, z \rangle_p$ , то  $|e_\lambda(z)|_\rho^\sigma = \sup_{r \geq 0} \exp[|\lambda|_p r - \sigma r^\rho]$ . Используя обычные методы теории экстремумов из математического анализа, получим значение  $|e_\lambda|_\rho^\sigma$ , которое приводится в ряде книг по комплексному анализу:

если  $\rho > 1$ , то  $|e_\lambda|_\rho^\sigma = \exp A_\rho^{(\sigma)} (|\lambda|_p)^{\tilde{\rho}}$ , где  $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho-1}$ ,  $A_\rho^{(\sigma)} = \frac{1}{\tilde{\rho}} (\rho\sigma)^{-\tilde{\rho}/\rho}$ ;

если  $\rho = 1$ , то  $|e_\lambda|_1^\sigma = +\infty$  при  $\sigma < |\lambda|_p$  и  $|e_\lambda|_1^\sigma = 1$  при  $\sigma \geq |\lambda|_p$ .

Рассмотрим вначале пространство Фреше  $[\rho, \infty]_p$  всех целых функций  $\mathbb{C}^p$  порядка не выше, чем  $\rho$  ( $\rho \geq 1$ ), с определяющим топологию набором преднорм (в данном случае — норм)

$$p_n(y) = |y|_{n,\rho} := |y|_{\rho_n^0}^1, \quad \rho_n^0 = \rho \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда  $|e_\lambda|_{n,\rho} = \exp A_{\rho_n^0}^{(1)}(|\lambda|_p)^{\rho_n}$ , причем  $\rho_n := \frac{\rho_n^0}{\rho_n^0 - 1}$  для любого  $n \geq 1$ . Как легко проверить,  $\rho_n \uparrow \frac{\rho}{\rho-1}$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\rho > 1$  и  $\rho_n \uparrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\rho = 1$ .

Предположим, что при  $|k|_p \rightarrow \infty$   $|\lambda_k|_p \rightarrow +\infty$ , причем это стремление к  $+\infty$  не слишком медленное, а именно, выполняется условие

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln k}{\ln |\lambda_k|_p} < \begin{cases} \frac{\rho}{\rho-1}, & 1 < \rho < +\infty; \\ +\infty, & \rho = 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что существует  $m_0 \geq 1$  :  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{(|\lambda_k|_p)^{m_0}} = 0$ . Тогда для ряда Дирихле  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-x\nu_k}$ , в котором  $\nu_k = (|\lambda_k|_p)^{\rho_{m_0}}$ ,  $a = c = 0$ . Учитывая это, нетрудно установить, что если  $m > \max\{n, m_0\}$ , то

$$A_{n,m} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|e_{\lambda_k}|_{n,\rho}}{|e_{\lambda_k}|_{m,\rho}} < +\infty.$$

Так мы приходим к следующему результату.

**Теорема 2.5.** Пусть  $1 \leq p < +\infty$  и показатели ряда (1.1) удовлетворяют условию (2.11). Тогда равносильны утверждения:

- 1) ряд (1.1) сходится в  $[\rho, \infty]_p$ ;
- 2) ряд (1.1) абсолютно сходится в  $[\rho, \infty]_p$ ;
- 3) для коэффициентов  $a_k$  ряда (1.1) выполняются неравенства

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} [\ln |a_k| + A_{\rho_n^0}^{(1)} |\lambda_k|_p^{\rho_n}] < +\infty, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Предоставляем читателю убедиться в том, что неравенства (2.12) равносильны следующим:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_k|}{(|\lambda_k|_p)^{\frac{\rho}{\rho-1}-\varepsilon}} = -\infty \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \rho \in (1, +\infty);$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_k|}{(|\lambda_k|_p)^N} = -\infty, \quad N \in (0, +\infty), \quad \rho = 1.$$

Рассмотрим еще пространство  $[\rho, \sigma]_p$  всех целых функций роста не выше порядка  $\rho$  и типа  $\sigma$  (по совокупности переменных), где  $1 < \rho < +\infty$ ,  $0 \leq \sigma < +\infty$ . Топология в пространстве Фреше  $[\rho, \sigma]_p$  определяется счетным набором норм  $p_n(y) = \|y\|_{n,p} := |y|_{\rho}^{\sigma+1/n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда

$$\|e_\lambda\|_{n,\rho} := \exp A_{\rho}^{(\sigma+1/n)}(|\lambda|_p)^{\bar{\rho}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^p, \quad \forall n \geq 1.$$

Как нетрудно убедиться, последовательность  $\{\exp\langle\lambda_k, z\rangle_p\}_{k=1}^\infty$ , где  $|\lambda_k|_p \rightarrow \infty$ , будет  $l_1$ -ядерной в  $[\rho, \sigma]_p$ , когда  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{(|\lambda_k|_p)^{\frac{\rho}{\rho-1}}} = 0$ , если  $\sigma \in (0, +\infty)$ , и  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{(|\lambda_k|_p)^{\frac{\rho}{\rho-1}}} < +\infty$  при  $\sigma = 0$ .

На основании теоремы 2.1 получаем.

**Теорема 2.6.** Пусть показатели  $\lambda_k$  ряда (1.1) таковы, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{(|\lambda_k|_p)^{\rho/(\rho-1)}} = 0, \quad \sigma \in (0, +\infty);$$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{(|\lambda_k|_p)^{\rho/(\rho-1)}} < +\infty, \quad \sigma = 0.$$

Тогда равносильны следующие утверждения:

- 1) ряд (1.1) сходится в  $[\rho, \sigma]_p$ ;
- 2) ряд (1.1) абсолютно сходится в  $[\rho, \sigma]_p$ ;
- 3)  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (|\lambda_k|_p)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \ln |a_k| \leq (1 - \rho)[\rho^\rho \sigma]^{\frac{1}{1-\rho}}$  при  $\sigma \in (0, +\infty)$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} (|\lambda_k|_p)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \ln |a_k| = -\infty$  при  $\sigma = 0$ .

Предоставляем читателю в виде несложного упражнения получить (не слишком удобные в применениях) критерии абсолютной сходимости ряда (1.1) с произвольными показателями  $\lambda_k$  из  $\mathbb{C}^p$  в пространствах  $[\rho, \infty]_p$  и  $[\rho, \sigma]_p$ ,  $0 \leq \sigma < +\infty$ .

**2.1.5.** До сих пор мы рассматривали различные пространства Фреше аналитических функций. Однако приведенные в п. 2.1.1 общие результаты можно применить и к другим функциональным пространствам, например, пространствам бесконечно дифференцируемых функций.

Пусть сначала  $F$  — выпуклый компакт в  $\mathbb{R}^p$  ( $\geq 1$ ) с непустой внутренностью  $(F)_0 := \text{int } F$  и опорной функцией  $h_F(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ . Пусть, далее,  $C^\infty[F]$  — пространство всех функций  $y(x)$ , где  $x = (x_1, \dots, x_p)$ , имеющих в  $(F)_0$  равномерно непрерывные (в  $(F)_0$ ) частные производные всех порядков. Топология в пространстве Фреше  $C^\infty[F]$  задается счетным набором норм

$$\|y\|_n = \sup \left\{ \left| \frac{\partial^{|\alpha|_p} y(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_p} x_p} \right| : |\alpha|_p \leq n, x \in (F)_0 \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

В частности,  $\|\exp\langle\lambda, x\rangle_p\|_n = e^{h_F(\lambda)} g_n(\lambda)$  при всех  $n \geq 1$  и  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ ,



где

$$g_n(\lambda) := \max \{ |\lambda_1|^{\alpha_1} \dots |\lambda_p|^{\alpha_p} : |\alpha|_p \leq 1 \}, \quad |\alpha|_p := \sum_{k=1}^p |\alpha_k|;$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in N_0^p, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Для функций  $g_n(\lambda)$  имеем оценку  $g_{n+1}(\lambda) \geq \frac{|\lambda|_p}{p} g_n(\lambda)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Отсюда для любого  $m > n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|\exp\langle \lambda_k, x \rangle_p\|_n}{\|\exp\langle \lambda_k, x \rangle_p\|_m} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_n(\lambda_k)}{g_m(\lambda_k)} \leq (p)^{m-n} \sum_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k|_p)^{n-m}.$$

Если показатели  $\lambda_k$  из  $\mathbb{R}^p$  удовлетворяют условию

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\ln |\lambda_k|_p} < +\infty, \quad (2.13)$$

то последовательность  $E_\Lambda := \{\exp\langle \lambda_k, x \rangle_p\}_{k=1}^\infty$   $l_1$ -ядерна в  $C^\infty[F]$ . Используя сказанное в п. 2.1.1, получаем такие результаты.

**Теорема 2.7.** *I) Если ряд (1.1) сходится в  $C^\infty[F]$  и  $\lambda_k \neq 0$  при всех  $k \geq 1$ , то*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \ln |a_k| + |\lambda_k|_p H_F \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right] = -\infty. \quad (2.14)$$

*II) Если выполнено условие (2.13), то равносильны утверждения:*

- a) ряд (1.1) сходится в  $C^\infty[F]$ ;*
- b) ряд (1.1) сходится абсолютно в  $C^\infty[F]$ ;*
- c) выполнено условие (2.14)*

**Следствие 1.** *Если выполнено условие (2.13) и*

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |a_k| + H_F \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right] < 0,$$

*то ряд (1.1) сходится абсолютно в  $C^\infty[F]$ .*

**Следствие 2.** *Если  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p = \infty$  и ряд (1.1) сходится в  $C^\infty[F]$ ,*

*то  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |a_k| + H_F \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right] \leq 0$ .*

Пусть теперь  $G$  — выпуклая (не обязательно ограниченная) область в  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 1$ , и  $\{F_m\}_{m=1}^\infty$  — аппроксимирующая изнутри область

$G$  неубывающая последовательность выпуклых компактов с непустыми внутренностями. Рассмотрим пространство Фреше  $C^\infty(G) := \varprojlim_{m \geq 1} C^\infty[F_m]$ . Ясно, что ряд (1.1) сходится (или абсолютно сходится) в  $C^\infty(G)$  тогда и только тогда, когда он сходится (соответственно, абсолютно сходится) в каждом пространстве Фреше  $C^\infty[F_m]$ . Тогда из теоремы 2.7 следует

**Теорема 2.8.** *I) Если ряд (1.1) сходится в  $C^\infty(G)$  и  $\lambda_k \neq 0$  при всех  $k \geq 1$ , то*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \ln |a_k| + |\lambda_k|_p H_{F_n} \left( \frac{|\lambda_k|}{|\lambda_k|_p} \right) \right] = -\infty \quad \forall n \geq 1. \quad (2.15)$$

*II) Если выполнено условие (2.13), то равносильны утверждения:*

- a) ряд (1.1) сходится в  $C^\infty(G)$ ;*
- b) ряд (1.1) абсолютно сходится в  $C^\infty(G)$ ;*
- c) справедливы соотношения (2.15).*

**2.1.6.** Таким же способом можно найти условия сходимости ряда (1.1) в других пространствах бесконечно дифференцируемых функций. Результаты подобного рода приводятся в п. 3.8.3.

Мы же не будем останавливаться здесь на этом, ограничившись одним замечанием справочного характера. По-видимому, наиболее общие пространства (с проективной или индуктивной топологией) бесконечно дифференцируемых функций типа Данжуа — Карлемана введены в довольно большой статье [85]. Эти пространства функций, бесконечно дифференцируемых в открытом множестве  $G$  из  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 1$ , определяются с помощью двух «весов» (весовых функций), характеризующих зависимость модулей  $\left| \frac{\partial^{|\alpha|_p} y}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}} \right|$  всех производных функций  $y$  из данных пространств, от точки  $x$  из  $G$  и от величины мультииндекса  $|\alpha|_p$  из  $\mathbb{N}_0^p := \underbrace{\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0}_p$ , где

$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ . Более подробно о таких пространствах сказано в разделе 3.8.

В работе [85] указаны условия, при которых в рассмотренных в ней подобных пространствах содержатся многочлены и экспоненты, а также найдены критерии абсолютной сходимости в них рядов (1.1) с чисто мнимыми показателями, т. е. рядов (1.1), у которых  $\lambda_k = i\mu_k$ ,  $\mu_k \in \mathbb{R}^p$  при всех  $k \geq 1$ .

Описано также определенное свойство «заразительности» поведения таких рядов, выражающееся в том, что из абсолютной сходи-

мости ряда в каком-либо пространстве бесконечно дифференцируемых в открытом множестве  $G$  из  $\mathbb{R}^p$  следует его абсолютная сходимость в пространстве такой же природы, но составленного из функций, бесконечно дифференцируемых во всем пространстве  $\mathbb{R}^p$ . Это же свойство «заразительности» у рядов (1.1) с чисто мнимыми показателями отмечено также в работах [80, 82] и др. Причина такого поведения рядов (1.1) с чисто мнимыми показателями кроется в соотношениях  $|(e_{i\mu}(x))^{(\alpha)}| = |\mu_1|^{\alpha_1} \dots |\mu_p|^{\alpha_p}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ ,  $x \in \mathbb{R}^p$ , в которых

$$e_{i\mu}(x) := \exp i\langle \mu, x \rangle_p, \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Не останавливаясь подробно на этом вопросе, ограничимся одной общей ситуацией, когда подобная «заразительность» имеет место. Обозначим вначале символом  $\text{Ехр}(i)$  множество всех функций  $e_{i\mu}(X)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^p$ . Допустим теперь, что на каждом множестве  $T$  из некоторой совокупности  $M$  подмножеств  $\mathbb{R}^p$  задано содержащее  $\text{Ехр}(i)$  ПОЛВП  $E(T) : T \rightarrow \mathbb{C}$  с топологией, определяемой набором преднорм  $P_{E,T} := \{p_{E,T}\}$ . Предположим еще, что эти преднормы обладают следующим свойством:

$$p_{E,T}(e_{i\mu}(X)) = \phi_\omega(\mu) \quad \forall T \in M, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^p,$$

где  $\phi_\omega(\mu) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ , функции  $\phi_\omega$  от  $T$  не зависят, а  $\omega$  — некоторое, зависящее, вообще говоря, от класса пространств  $E(T)$ , конечное или бесконечное множество индексов, одно и то же для всех  $T$  из данного класса  $M$ . Тогда, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_{i\mu_k}(x), \quad \mu_k \in \mathbb{R}^p, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.16)$$

абсолютно сходится в каком-либо пространстве  $E(T_1)$ ,  $T_1 \in M$ , то

$$\sum_{l=1}^{\infty} |a_l| \phi_\omega(\mu_l) < \infty.$$

Обратно, если последнее неравенство имеет место, то, очевидно, ряд (2.16) абсолютно сходится в любом пространстве  $E(T)$ , если  $T \in M$  (в том числе и в  $E(\mathbb{R}^p)$ , если  $\mathbb{R}^p \in M$ ). Таким образом, из абсолютной сходимости ряда (2.16) в одном каком-нибудь пространстве  $E(T_1)$  следует его абсолютная сходимость в каждом  $E(T)$  с  $T \in M$ .

Конкретные примеры классов ПОЛВП  $E(T)$  с описанными свойствами имеются, например, в работах [80, 82].

**2.1.7.** Теорема 2.1 дает критерий абсолютной сходимости общего ряда (2.1) в ПОЛВП  $H$  при условии, что последовательность  $U\{u_k\}_{k=1}^\infty$   $\ell_1$ -ядерна в  $H$ . Если последнее условие не выполняется, то по той же теореме в общей ситуации можно лишь утверждать, что для абсолютной сходимости ряда (2.1) необходимо выполнение условия (2.3).

Условимся в дальнейшем при  $j = 1, 2$  символом  $A_2(U, H)$  обозначать (векторное) пространство всех числовых последовательностей  $c = (c_k)_{k=1}^\infty$  таких, что соответствующий ряд (2.1) сходится (соответственно, абсолютно сходится) в  $H$ . Пусть еще

$$E_U = \left\{ d = (d_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^N : \sup_{k \geq 1} |d_k| p(u_k) < \infty \forall p \in P \right\}.$$

Тогда  $A_2(U, H) \subseteq A_1(U, H) \subseteq E_U$  и если последовательность  $U$   $\ell_1$ -ядерна в  $H$ , то  $A_2(U, H) = A_1(U, H) = E_U$ .

В одном довольно важном частном случае эти результаты можно уточнить, дав критерий абсолютной сходимости ряда (2.1) в  $H$ . Именно, если  $H$  — пространство Фреше с топологией, определенной неубывающей последовательностью преднорм  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ , то очевидно, что ряд (2.1) сходится абсолютно в таком пространстве тогда и только тогда, когда  $B_n^U(c) := \sum_{k=1}^\infty |c_k| p_n(U_k) < \infty$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Таким образом, для любого пространства Фреше  $H$   $A_2(U, H) = \{c = \{c_k\}_{k=1}^\infty : B_n^U(c) < \infty, n = 1, 2, \dots\}$ . Очевидно, что  $A_2(U, H)$  совпадает с пространством лестничных последовательностей Кёте, т. е. последовательностей  $\{d_k\}_{k=1}^\infty$  таких, что при любом  $n \geq 1$  для  $|d|_n$  справедливо неравенство  $\sum_{k=1}^\infty b_{k,n} |d_k| < \infty$ , где  $0 \leq b_{k,n} \leq b_{k,n+1}$  при всех  $k \geq 1$  и  $n \geq 1$  (в данном случае  $b_{k,n} = p_n(U_k)$ ,  $n, k = 1, 2, \dots$ ). Используя простейшие факты теории таких пространств, можно, как в [6, с. 8–9], показать, что множество  $M_U(H)$  всех мультипликаторов  $A_2(U, H)$  описывается соотношением

$$M_U(H) = \left\{ \lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty : \forall p \geq 1 \exists q \geq 1, \exists M < \infty : \right. \\ \left. \forall n \geq 1 \ b_{n,p} |\lambda_n| \leq M b_{n,q} \right\}.$$

В частности, если  $G$  — любая выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ , содержащая начало координат, а  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$  — возрастающая последовательность ее компактов  $F_n$  с опорной функцией  $H_{F_n}(z)$  таких, что при всех  $n \geq 1$

$F_n \subset \text{int } F_{n+1} \subset F_{n+1} \subset G = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$ , то

$$A_2(E_\Lambda, A(G)) = \left\{ c = (c_k)_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \exp |\lambda_k|_p \cdot H_{F_n} \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) < \infty, \ n = 1, 2, \dots \right\},$$

$$U_{E_\Lambda}(A(G)) = \left\{ \lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty} : \forall p \geq 1 \exists q \geq 1 : \forall n \geq 1 \right. \\ \left. |\lambda_k| \leq M \exp |\lambda_k|_p \left[ H_{F_q} \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) - H_{F_p} \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right] \right\}.$$

## 2.2. Ряды в пространствах с индуктивной топологией

**2.2.1.** Как отмечалось выше, во многих локально выпуклых пространствах преднормы, определяющие в них топологию, не допускают простого описания. Это прежде всего относится к играющим важную роль в анализе пространствам с топологией индуктивного предела, и, в частности,  $IF$ -пространствам, т. е. внутренним индуктивным пределам неубывающих последовательностей пространств Фреше [37]. Однако к этому классу при одном дополнительном предположении удастся применить более общие результаты п. 1.4.1. Следуя [37], скажем, что  $IF$ -пространство  $H = \varinjlim_n H_n$  обладает свойством  $(Y)$ , если для любой последовательности  $(v_n)_{n=1}^{\infty}$  элементов из  $H$ , сходящейся в  $H$  к некоторому элементу  $v \in H$ , найдется номер  $m \geq 1$  такой, что  $v \in H_m$ ,  $v_k \in H_m$  при всех  $k \geq 1$  и  $v_k \rightarrow v$  в  $H_m$ . Условимся называть такое пространство  $IF_0$ -пространством. Как известно [30],  $IF_0$ -пространствами являются  $LN^*$ -пространства, т. е.  $IF$ -пространства, в которых каждое  $H_n$  вложено вполне непрерывно в  $H_{n+1}$ , а также  $LF$ -пространства, т. е. строгие индуктивные пределы пространств Фреше  $H_n$ . Напомним, что  $IF$ -пространство  $H = \varinjlim_n H_n$  является  $LF$ -пространством, если топология в каждом пространстве  $H_n$  совпадает с топологией, индуцированной в  $H_n$  из  $H$ .

Далее, следуя все той же работе [37], скажем, что  $IF$ -пространство  $H = \varinjlim_n H_n$  обладает свойством  $(Y_0)$ , если всякое семейство элементов из  $H$ , абсолютно суммируемое в  $H$ , содержится в некотором пространстве  $H_n$  и абсолютно суммируемо в этом пространстве.

Отсюда, в частности, следует, что если  $H$  обладает свойством  $(Y_0)$ , то любой ряд (2.1) абсолютно сходится в  $H$  тогда и только тогда, когда существует номер  $m \geq 1$  такой, что ряд (2.1) абсолютно сходится в  $H_m$ . Ряд достаточных условий, обеспечивающих свойство  $(Y_0)$  у  $IF$ -пространства  $H$ , был получен автором и его учениками А. В. Абаниным и С. Н. Мелиховым. В частности, С. Н. Мелихов доказал [110, гл. III, следствие 3 теоремы 3.21], что любое  $LN^*$ -пространство обладает свойством  $(Y_0)$ .

**2.2.2.** Условия иного характера, обеспечивающие наличие свойства  $(Y_0)$  у пространств  $H = \varinjlim H_n$  в случае, когда при всех  $n \geq 1$   $H_n$  — пространство числовых последовательностей, указаны автором в статье [40]. Перед их формулировкой напомним некоторые определения из [50, 163].

Пусть  $\Omega$  — некоторое множество индексов и  $E$  — пространство числовых семейств  $X = \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ , где для любого  $\lambda \in \Omega$   $x_\lambda \in \mathbb{C}$  (или  $x_\lambda \in \mathbb{R}$ ). Оно называется нормальным по Кёте или идеальным, если из того, что  $X := \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Omega} \in E$  и  $|y_\lambda| \leq |x_\lambda|$  при любом  $\lambda \in \Omega$ , следует включение  $Y := (y_\lambda)_{\lambda \in \Omega} \in E$ . Далее, взаимным или дуальным (по Кёте) к  $E$  называется совокупность всех числовых семейств  $V(v_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$  таких, что для любого элемента  $X(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$  из  $E$  числовое семейство  $(x_\lambda v_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$  суммируемо. Иными словами [50, §§ 1, 2],

$$V \in E^\alpha \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \Omega} |x_\lambda| |v_\lambda| < +\infty \quad \forall X \in E.$$

Аналогично,  $E^{\alpha\alpha} := \{d = (d_\mu)_{\mu \in \Omega} : \sum_{\mu \in \Omega} |d_\mu| |v_\mu| < \infty \quad \forall V \in E^\alpha\}$ .

Очевидно, что  $E \subseteq E^{\alpha\alpha}$ . Векторное пространство  $E$  называют совершенным, если  $E = E^{\alpha\alpha}$ .

Обозначим символом  $\Psi$  совокупность всех «ортов»  $e_{(\beta)}$ ,  $\beta \in \Omega$ , где  $(e_{(\beta)})_\lambda = 0$  при всех  $\lambda \in \Omega$ , если  $\lambda \neq \beta$ , и  $(e_{(\beta)})_\beta = 1$ . Очевидно, что всегда  $\Psi \subseteq E^\alpha$ . Рассмотрим билинейную форму

$$\langle X, Y \rangle := \sum_{\lambda \in \Omega} x_\lambda y_\lambda, \quad X \in E, Y \in E^\alpha,$$

устанавливающую двойственность между  $E$  и  $E^\alpha$  [143, с. 682–683]. Нетрудно показать (см., например, [50, с. 15]), что если  $\Psi \subseteq E$ , то эта двойственность отделима, т. е.

$$\begin{aligned} \forall X_0 \in E, X_0 \neq 0, \exists V_0 \in E^\alpha : \langle X_0, V_0 \rangle &\neq 0; \\ \forall V_1 \in E^\alpha, V_1 \neq 0, \exists X_1 \in E : \langle X_1, V_1 \rangle &\neq 0. \end{aligned}$$

Будем далее считать, что  $\Psi \subseteq E$ .

В соответствии с общей теорией двойственности в линейных топологических пространствах [143, с. 682–684], в пространстве  $E$  можно ввести слабейшую топологию, согласованную с этой двойственностью, а именно, топологию  $\sigma(E, E^\alpha)$ , которая задается набором непрерывных преднорм

$$q_V(X) := \sup_{1 \leq k \leq n} |\langle X, V_k \rangle|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $V_k$  — произвольные элементы  $E^\alpha$ .

Из других топологий в  $E$ , согласующихся с двойственностью  $(E, E^\alpha)$ , выделим топологию Кёте или нормальную топологию  $\nu(E, E^\alpha)$  (в обозначениях [163]), задаваемую набором преднорм

$$t_V(X) := \sum_{\lambda \in \Omega} |X_\lambda V_\lambda|, \quad V \in E^\alpha.$$

При сделанном ранее предположении о том, что  $\Psi \subseteq E$ , эта топология согласуется с двойственностью  $E, E^\alpha$  (см., например, [50, с. 17]). Теперь уже можно сформулировать условие из [40], обеспечивающее наличие свойства  $(Y_0)$  у пространства  $H = \varinjlim H_n$ . Имено, пусть при всех  $n \geq 1$   $H_n$  — векторное пространство числовых семейств  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ , содержащее  $\Psi$ , и пусть  $(H_n, \lambda_n)$  — нормальное по Кёте ЛВП числовых семейств с топологией  $\lambda_n$ , мажорирующей топологию покоординатной сходимости. Пусть еще при  $n \geq 1$  орты  $\Psi$  образуют абсолютный базис в  $(H_n, \lambda_n)$ . Предположим, наконец, что  $H$  совершенно по Кёте и топология индуктивного предела в  $H$  совпадает с топологией Кёте  $\nu(H, H^\alpha)$ . Тогда  $H$  обладает свойством  $(Y_0)$ .

**2.2.3.** Пусть, как выше,  $H = \varinjlim_n H_n$  —  $IF$ -пространство, т. е. внутренний индуктивный предел неубывающей последовательности пространств Фреше  $H_n$ , топология в каждом из которых задается счетным набором преднорм  $P_n := \{p_{j,n}\}_{j=1}^\infty$ .

Рассмотрим такие утверждения:

- 1) ряд (2.1) сходится в  $H = \varinjlim_n H_n$ ;
- 2) существует номер  $m \geq 1$  такой, что ряд (2.1) сходится в  $H_m$ ;
- 3) ряд (2.1) сходится абсолютно в  $H$ ;
- 4) существует номер  $m \geq 1$  такой, что ряд (2.1) сходится абсолютно в  $H_m$ ;

5) существует номер  $m \geq 1$  такой, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} [\ln |c_k| + \ln p_{j,m}(u_k)] = -\infty$  для любого  $j \geq 1$ ;

6) существует номер  $m \geq 1$  такой, что  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} [\ln |c_k| + \ln p_{j,m}(u_k)] < \infty$  для любого  $j \geq 1$ .

Следующий результат прямо вытекает из приведенных определений.

**Теорема 2.9.** *I) Всегда*

$$4) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1); \quad 2) \Rightarrow 5) \Rightarrow 6); \quad 4) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1).$$

*II) Если  $H = \varinjlim_n H_n$  обладает свойством  $(Y)$ , то дополнительно к утверждению I),  $1) \Leftrightarrow 2)$ , т. е.*

$$1) \Leftrightarrow 2) \Rightarrow 5) \Rightarrow 6); \quad 4) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1) \Leftrightarrow 2).$$

*III) Если  $H = \varinjlim_n H_n$  обладает свойствами  $(Y)$  и  $(Y_0)$ , то дополнительно к утверждениям II),  $3) \Leftrightarrow 4)$ , т. е.*

$$4) \Leftrightarrow 3) \Rightarrow 2) \Leftrightarrow 1) \Rightarrow 5) \Rightarrow 6).$$

*IV) Наконец, если пространство  $H = \varinjlim_n H_n$  обладает свойствами  $(Y)$  и  $(Y_0)$ , а последовательность  $U := (u_k)_{k=1}^\infty$   $l_1$ -ядерна в каждом  $H_n$ , то все утверждения 1)–6) равносильны.*

**2.2.4.** Применим теорему 2.9 к выяснению условий сходимости (и абсолютной сходимости) ряда (1.1) в некоторых конкретных  $IF$ -пространствах аналитических функций.

Пусть  $O \in F$ ,  $F$  — выпуклый компакт в  $\mathbb{C}^p$  и  $H = H(F)$  — пространство аналитических ростков на  $F$  с индуктивной топологией  $\varinjlim_n A(G_n)$ , где для любого  $n \geq 1$   $G_n$  — выпуклая ограниченная область в  $\mathbb{C}^p$  такая, что  $F \subset G_n$ ,  $\overline{G_{n+1}} \subset G_n$  и  $F = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ . В каждом  $A(G_n)$  топология вводится набором норм  $p_{l,n}(y) = |y|_{n,l} := \max\{|y(z)| : z \in q_l \overline{G_n}\}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , где  $0 < q_l \uparrow 1$ . При этом

$$|\exp \langle \lambda, z \rangle_p|_{n,l} = \exp q_l |\lambda|_p H_{\overline{G_n}} \left( \frac{\lambda}{|\lambda|_p} \right) \quad \forall l \geq 1, \forall n \geq 1, \forall \lambda \in \mathbb{C}^p.$$

Как хорошо известно (см., например, [30, с. 418; 122, 124, 137]),  $H(F)$  является  $LN^*$ -пространством и потому обладает свойствами



$(Y)$  и  $(Y_0)$ . Согласно утверждению III теоремы 2.9, если ряд экспонент (1.1) сходится в  $H(F)$ , то существует номер  $m \geq 1$  такой, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \ln |a_k| + q_l |\lambda_k|_p H_{\overline{G}_m} \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right] < +\infty, \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Если еще  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p = \infty$ , то из неравенств (2.17) следуют соотношения:

$$\exists m \geq 1 : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |a_k| + q_l H_{\overline{G}_m} \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right] \leq 0, \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

Так как  $G_m$  — ограниченная выпуклая область, содержащая начало координат, то условия (2.18) равносильны такому:

$$\exists m \geq 1 : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |a_k| + H_{\overline{G}_m} \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right] \leq 0, \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

Итак, если  $|\lambda_k|_p \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$  и если ряд (1.1) сходится в  $H(F)$ , то справедливо соотношение (2.19).

Пусть теперь числа  $|\lambda_k|_p$  при  $k \rightarrow \infty$  возрастают достаточно быстро, а именно, так, что выполнено условие (1.36). Тогда по теореме 2.9 ряд (1.1) абсолютно сходится в  $A(G_m)$  и подавно в  $H(F)$ . Сформулируем полученный результат.

**Теорема 2.10.** Пусть  $F$  — содержащий начало координат выпуклый компакт в  $\mathbb{C}^p$ . Тогда:

1) если ряд (1.1) сходится в  $H(F)$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p = \infty$ , то выполняется условие (2.19);

2) обратно, если справедливо соотношение (2.19) и если выполняется условие (2.5), то ряд (1.1) сходится абсолютно в  $H(F)$ .

**Следствие.** Пусть компакт  $F$  такой же, как в теореме 2.10, и пусть выполнено условие (2.5). Тогда равносильны три утверждения:

- a) ряд (1.1) сходится в  $H(F)$ ;
- b) ряд (1.1) абсолютно сходится в  $H(F)$ ;
- c) имеет место соотношение (2.19).

Заметим, что при всех  $m \geq 1$  и  $k \geq 1$   $H_{\overline{G}_m} \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) > 0$ , так как  $O \in G_m$  для любого  $m \geq 1$ . Поэтому условие (2.19) равносильно тому, что

$$\exists m \geq 1 : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_k|}{|\lambda_k|_p H_{\overline{G}_m} \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right)} \leq -1. \quad (2.20)$$

Если, в частности,  $F = \{0\}$ , то можно положить  $G_m = \varepsilon_m D$  для всех  $m \geq 1$ , где  $D := \{z \in \mathbb{C}^p : |z|_p < 1\}$ ,  $\varepsilon_m \downarrow 0$ . В этом случае условие (2.20) равносильно условию  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_k|}{|\lambda_k|_p} < 0$ .

**2.2.5.** Пусть  $1 < \rho < +\infty$  и  $H = [\rho, \infty)_p$  — пространство всех целых в  $\mathbb{C}^p$  функций конечного типа при порядке  $\rho$  (по совокупности переменных). Полагая  $[\rho, \infty)_p = \varinjlim_m [\rho, m]_p$ , находим без особого труда, что  $[\rho, \infty)_p$  —  $LN^*$ -пространство. Поэтому оно обладает свойствами  $(Y)$  и  $(Y_0)$ . При этом для любых  $\lambda \in \mathbb{C}^p$ ,  $n \geq 1$  и  $m \geq 1$

$$|\exp \langle \lambda, z \rangle_p|_{n, \rho}^{(m)} := \exp A_\rho^{(m + \frac{1}{n})} (|\lambda|_p)^{\rho/(\rho-1)},$$

где  $[\rho, m]_p$  — пространство Фреше с набором норм

$$\|y\|_{n, \rho}^{(m)} = \sup_{r \geq 0} M_r(y) e^{-(m + \frac{1}{n})r^\rho}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если ряд (1.1) сходится в  $H = [\rho, \infty)_p$ , то (в силу того, что  $H$  обладает свойством  $(Y)$ ) он сходится в некотором  $[\rho, m]_p$ ,  $m \geq 1$ , и потому выполнено условие 6) из п. 2.2.1, которое в данном случае имеет такой вид:

$$\exists m \geq 1 : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \ln |a_k| + A_\rho^{(m + \frac{1}{n})} |\lambda_k|^{\rho/(\rho-1)} \right] < +\infty, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.21)$$

При этом  $A_\rho^{(m + \frac{1}{n})} = \frac{(\rho-1)}{(m+1/n)^{1/(\rho-1)} \rho^{\rho/(\rho-1)}}$  и

$$\frac{(\rho-1)}{[(m+1)\rho^\rho]^{1/(\rho-1)}} \leq A_\rho^{(m + \frac{1}{n})} < \frac{(\rho-1)}{(m \cdot \rho^\rho)^{1/(\rho-1)}} \quad \forall m, n \geq 1.$$

Если  $|\lambda_k|_p \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , то из условий (2.21) следует, что

$$\exists m \geq 1 : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p^{\rho/(1-\rho)} \ln |a_n| \leq \frac{(1-\rho)}{[(m+1)\rho^\rho]^{1/(\rho-1)}}$$

и по-прежнему

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{(|\lambda_k|_p)^{\rho/(\rho-1)}} < 0. \quad (2.22)$$

Таким образом, если  $|\lambda_k|_p \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$  и если ряд (1.1) сходится в  $[\rho, \infty)_p$ , где  $\rho \in (1, +\infty)$ , то коэффициенты  $a_k$  ряда (1.1) удовлетворяют условию (2.22).

Пусть теперь стремление  $|\lambda_k|_p$  к  $+\infty$  достаточно быстрое, а именно:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{(|\lambda_k|_p)^{\rho/(\rho-1)}} = 0. \quad (2.23)$$

Тогда, как легко проверить, последовательность  $\{\exp\langle \lambda_k, z \rangle_p\}$   $l_1$ -ядерна в каждом пространстве  $[\rho, m]_p$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . По теореме 2.9 равносильны такие утверждения:

- 1) ряд (1.1) сходится в  $[\rho, \infty)_p$ ;
- 2) ряд (1.1) сходится абсолютно в  $[\rho, \infty)_p$ ;
- 3) выполнено условие

$$\exists m \geq 1 : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \ln |a_k| + \frac{(\rho-1)(|\lambda_k|_p)^{\rho/(\rho-1)}}{(m + \frac{1}{n})^{1/(\rho-1)} \rho^{\rho/(\rho-1)}} \right] < +\infty \quad \forall n \geq 1.$$

Как нетрудно проверить, если коэффициенты  $\{a_k\}$  удовлетворяют условию (2.22), то (при условии, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p = +\infty$ ) из неравенства (2.22) следует, что соотношения (2.21) справедливы при всех достаточно больших  $m$  и любых  $n \geq 1$  (так как  $\lim_{m \rightarrow \infty} A_\rho^{(m+1/n)} = 0$ , причем стремление к пределу равномерно относительно  $n \geq 1$ ). Таким образом, справедлива

**Теорема 2.11.** Пусть  $\rho \in (1, +\infty)$ . Тогда:

- a) если  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p = \infty$  и ряд (1.1) сходится в  $[\rho, \infty)_p$ , то имеет место неравенство (2.22);
- b) обратно, если выполнены условия (2.22) и (2.23), то ряд (1.1) сходится абсолютно в  $[\rho, \infty)_p$ .

Аналогичным образом находятся условия абсолютной сходимости и в других пространствах целых функций, например, пространстве всех целых функций конечного порядка и т. д., а также в различных пространствах бесконечно дифференцируемых функций с индуктивной топологией. И здесь имеет место «заразительность» поведения рядов экспонент (2.14) с чисто мнимыми показателями, но мы уже не будем останавливаться на этом. Отметим, что вопрос об условиях сходимости общего ряда (2.1) в ПОЛВП с проективной и индуктивной топологией исследовался ранее с несколько иных позиций в ряде работ (см., например, [77, 111] и т. д.).

**2.2.6.** Остановимся еще немного на соотношениях (2.2)–(2.4), из которых условие (2.2) и подавно (2.3) необходимо для сходимости

ряда (2.1) в ПОЛВП  $H$  с набором преднорм  $P = \{p\}$ , а пара условий (2.3), (2.4) (тем более, (2.2), (2.4) достаточна для абсолютной сходимости ряда (2.1) в  $H$ ). Прежде всего, условие (2.2) выполняется, если имеет место соотношение (2.3) и для любого  $p_1 \in P$  существует  $p_2 \in P$  такое, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_1(u_k)}{p_2(u_k)} = 0$ .

Далее, в паре условий (2.2), (2.4), обеспечивающих абсолютную сходимость ряда (2.1) в  $H$ , можно усиливать первое из них и ослаблять второе и таким путем получать другие достаточные условия абсолютной сходимости. В качестве примера приведем такой результат.

**Теорема 2.12.** Пусть для ряда (2.1) выполнены такие предположения:

1) для любого  $p \in P$   $\{c_k p(u_k)\}_{k=1}^\infty \in l_{q_1}$ ;

2) для любого  $p_1 \in P$  существует  $p_2 \in P$  такое, что  $\left\{ \frac{p_1(u_k)}{p_2(u_k)} \right\} \in l_{q_2}$ ,

где  $q_1 > 1$ ,  $q_2 > 1$  и  $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1$ .

Тогда ряд (2.1) абсолютно сходится в  $H$ .

Доказательство последней теоремы, аналогичное доказательству теоремы 2.11 и основанное на неравенстве Коши — Буняковского, очевидно, и мы его опускаем, также, как ее индуктивный вариант и его приложения к конкретным функциональным пространствам.

### 2.3. Ряды Дирихле с ограниченными показателями

**2.3.1.** До сих пор в разделах 2.1 и 2.2 этой главы при рассмотрении рядов экспонент (1.1) в конкретных функциональных пространствах предполагалось, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p = +\infty$ . В данном разделе мы остановимся вкратце на свойствах несколько иного класса рядов (1.1), а именно, рядах с ограниченными показателями.

**Лемма 2.1.** Любой ряд (1.1) в точке  $z = 0$  сходится абсолютно тогда и только тогда, когда  $\{a_k\}_{k=1}^\infty \in l_1$ .

Доказательство следует из равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |\exp \langle \lambda_k, 0 \rangle_p| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Пусть теперь  $F$  — ограниченное множество в  $\mathbb{C}^p$  и  $E_F$  — множество всех рядов вида (1.1), у которых  $\lambda_k \in F$  при всех  $k \geq 1$ .

Пусть, далее, ЛВП  $H$  с топологией  $\nu$ , определяемой набором преднорм  $Q = \{q\}$ , обладает такими свойствами:

1) каждый элемент  $H$  является комплекснозначной функцией, определенной по крайней мере в точке  $z = 0$ ;

2)  $e_\lambda := \exp\langle \lambda, z \rangle_p \in H$  для любого  $\lambda \in F$ .

Если пространство  $H$  со свойствами 1), 2) удовлетворяет еще условию:

3)  $|y(0)|$  — непрерывная преднорма в  $(H, \nu)$ ,

то оно называется  $E_F$ -почти правильным. Наконец, если  $(H, \nu)$  обладает свойствами 1)–3) и таково, что:

4)  $\sup\{q(e_\lambda) : \lambda \in F\} < +\infty$  при любом  $q \in Q$ ,

то такое пространство  $(H, \nu)$  назовем  $E_F$ -правильным.

Сформулируем следующие утверждения относительно ряда (1.1):

а) ряд (1.1) абсолютно сходится в точке  $z = 0$ ;

б)  $\{a_k\}_{k=1}^\infty \in l_1$ ;

в) ряд (1.1) абсолютно сходится в  $(H, \nu)$ .

**Теорема 2.13.** Пусть  $F$  — ограниченное множество в  $\mathbb{C}^p$  и  $(H, \nu)$  —  $E_F$ -почти правильное ЛВП. Тогда в)  $\Rightarrow$  а). Если  $(H, \nu)$  —  $E_F$ -правильное ЛВП, то все три утверждения а)–в) равносильны.

$\triangleleft$  Если ряд (1.1) абсолютно сходится в  $E_F$ -почти правильном ЛВП  $H$ , то  $\sum_{k=1}^\infty |a_k| |\exp\langle \lambda_k, 0 \rangle_p| = \sum_{k=1}^\infty |a_k|$ . Таким образом, в)  $\Rightarrow$  а). (Напомним еще, что по лемме 2.1 а)  $\Leftrightarrow$  б).) Пусть теперь  $\{a_k\}_{k=1}^\infty \in l_1$  и  $(H, \nu)$  —  $E_F$ -правильное пространство. Тогда

$$\sum_{k=1}^\infty |a_k| q(e_{\lambda_k}) \leq \sup_{k \geq 1} q(e_{\lambda_k}) \sum_{k=1}^\infty |a_k| < \infty \quad \forall q \in Q,$$

и ряд (1.1) сходится абсолютно в  $(H, \nu)$ . Таким образом, в данном случае в)  $\Rightarrow$  а)  $\Leftrightarrow$  б)  $\Rightarrow$  в), чем и завершается доказательство теоремы.  $\triangleright$

Читатель без особого труда убедится, что  $E_F$ -правильными пространствами будут, например:

- пространства  $A(G)$ ,  $G$  — область в  $\mathbb{C}^p$ , содержащая точку  $z = 0$ ;
- $H(B)$ ,  $B$  — любой компакт в  $\mathbb{C}^p$ , содержащий точку  $z = 0$ ;
- $[\rho, \infty]_p$ ,  $\rho \geq 1$ ;
- $[\rho, \infty)_p$ ,  $\rho \geq 1$ ;
- $[\rho, \sigma]_p$ ,  $1 < \rho < \infty$ ,  $0 \leq \sigma < +\infty$ ;
- $[\rho, \sigma)_p$ ,  $1 < \rho < \infty$ ,  $0 < \sigma \leq +\infty$ .

При доказательстве  $E_F$ -правильности этих пространств наиболее «трудоемкой» (но все-таки несложной) его частью является, пожалуй, проверка выполнения условия 4).

Например, если  $H = [\rho, \sigma]_p$ , где  $p \geq 1$ ,  $\rho > 1$ ,  $0 \leq \sigma < +\infty$ , то при любых  $\lambda \in F$  и  $\varepsilon > 0$

$$\sup_{z \in \mathbb{C}^p} \frac{|\exp\langle \lambda, z \rangle_p|}{\exp(\sigma + \varepsilon)|z|^\rho} \leq \exp \sup_{0 \leq r < +\infty} (M_F r - (\sigma + \varepsilon)r^\rho) = D_\varepsilon < +\infty$$

(здесь  $M_F = \sup\{|\lambda|_p : \lambda \in F\}$ ), и условие 4) выполнено.

Заметим, что при любом  $p \geq 1$  пространство  $M(\mathbb{C}^p)$  всех функций  $y : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$  с топологией  $\gamma$  поточечной сходимости, определяемой набором преднорм  $|y(v)|$ ,  $v \in \mathbb{C}^p$ , является  $E_F$ -правильным, каково бы ни было ограниченное множество  $F$  из  $\mathbb{C}^p$ . Поэтому из теоремы 2.13 вытекает

**Следствие.** Пусть  $F$  — ограниченное множество в  $\mathbb{C}^p$  и  $\lambda_k \in F$  при всех  $k \geq 1$ . Тогда ряд (1.1) сходится абсолютно в любой точке  $z$  из  $\mathbb{C}^p$  в том и только в том случае, если  $\{a_k\} \in \ell_1$ .

Зафиксируем какую-нибудь последовательность  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$  точек из  $F$  и образуем векторное пространство  $M_\Lambda$  всех целых функций  $f(z)$ , представимых в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k \exp(\langle \lambda_k, z \rangle_p),$$

абсолютно сходящегося в каждой точке  $z$  из  $\mathbb{C}^p$ . По следствию теоремы 2.13  $f \in M_\Lambda$  тогда и только тогда, когда

$$\exists \{g_k\}_{k=1}^{+\infty} \in \ell_1 : f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k \exp(\langle \lambda_k, z \rangle_p) \quad \forall z \in \mathbb{C}^p.$$

Введем в пространстве  $M_\Lambda$  топологию с помощью нормы

$$\|f\|_\Lambda := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |f_k| : f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k \exp(\langle \lambda_k, z \rangle_p) \quad \forall z \in \mathbb{C}^p \right\}.$$

Рассмотрим подпространство  $\ell_\Lambda^1$  пространства  $\ell_1$ , состоящее из тех и только тех последовательностей  $\{d_k\}_{k=1}^{+\infty}$ , для которых

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k \exp(\langle \lambda_k, z \rangle_p) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^p.$$

Как нетрудно убедиться,  $\ell_\Lambda^1$  замкнуто в  $B$ -пространстве  $\ell_1$  с обычной нормой  $\|x\| = \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|$ , если  $x = \{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ . Действительно, если  $z_0 \in \mathbb{C}^p$ , то  $\{\exp(\langle \lambda_k, z_0 \rangle_p)\} \in \ell_\infty$  и множество  $T_{z_0}^\Lambda$  всех последовательностей  $\{v_k\}_{k=1}^{+\infty}$  из  $\ell_1$  таких, что  $\sum_{k=1}^{+\infty} v_k \exp(\langle \lambda_k, z_0 \rangle_p) = 0$ , замкнуто в  $\ell_1$ . Но тогда  $\ell_\Lambda^1 = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}^p} T_{z_0}^\Lambda$  — также замкнутое множество в  $\ell_1$ . Очевидно, что  $\|f\|_\Lambda$  совпадает с фактор-нормой — нормой фактор-пространства  $\ell_1/\ell_\Lambda^1$ . Следовательно, пространство  $M_\Lambda, \nu$  с нормой  $\|\cdot\|_\Lambda$  является  $B$ -пространством. При этом каждая функция из  $M_\Lambda$  является целой функцией в  $\mathbb{C}^p$  нормального типа при порядке 1 по совокупности переменных  $z_1, \dots, z_p$ : если  $T_F := \sup\{|\lambda|_p : \lambda \in F\}$ , то

$$|f(z)| \leq \|f\|_\Lambda \exp(T_F) |z|_p \quad \forall f \in M_\Lambda, \quad \forall z \in \mathbb{C}^p.$$

**2.3.2.** Аналогично можно рассмотреть ряд (1.1) в  $\mathbb{R}^p$ , т. е. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp\langle \lambda_k, x \rangle_p, \quad \lambda_k \in F, \quad x \in \mathbb{R}^p, \quad p \geq 1, \quad (2.24)$$

где, как и раньше,  $F$  — ограниченное множество в  $\mathbb{C}^p$ .

Очевидно, что ряд (2.24) абсолютно сходится в точке  $x = 0$  тогда и только тогда, когда  $\{a_k\}_{k=1} \in l_1$ . Далее, ЛВП  $(H, \nu)$  называется  $E_F^{\mathbb{R}}$ -почти правильным, если:

1') каждый элемент  $y(x)$  из  $H$  является комплекснозначной функцией, определенной на некотором подмножестве  $G_y$  из  $\mathbb{R}^p$ , содержащем точку  $x = 0$ ;

2')  $e_\lambda := \exp\langle \lambda, x \rangle_p \in H$  для любого  $\lambda \in F$ ;

3')  $|y(0)|$  — непрерывная преднорма в  $(H, \nu)$ .

$E_F^{\mathbb{R}}$ -почти правильное ЛВП  $(H, \nu)$ , удовлетворяющее еще условию

4')  $\sup_{\lambda \in F} q(e_\lambda) < +\infty$  при всех  $q \in Q$ ,

назовем  $E_F^{\mathbb{R}}$ -правильным ЛВП (как выше,  $Q = \{q\}$  — набор преднорм, определяющий топологию  $\nu$  в  $H$ ).

Запишем три утверждения относительно ряда (2.24):

а') ряд (2.24) абсолютно сходится в точке  $x = 0$ ;

б')  $\{a_k\} \in l_1$ ;

в') ряд (2.24) абсолютно сходится в  $(H, \nu)$ .

Точно так же, как теорема 2.13, доказывается

**Теорема 2.14.** Всегда а')  $\Leftrightarrow$  б'). Далее, если  $F$  — ограниченное множество в  $\mathbb{C}^p$  и  $(H, \nu)$  —  $E_F^{\mathbb{R}}$ -почти правильное ЛВП, то в')  $\Rightarrow$  а').

Наконец, если  $(H, \nu)$  —  $E_F$ -правильное ЛВП, то все три утверждения а')–в') равносильны.

В частности,  $E_F$ -правильными являются пространство  $C^\infty(G)$  и пространство  $C^\infty[T]$ , где, соответственно,  $G$  и  $T$  — область и компакт в  $\mathbb{R}^p$ .

Таким образом, ряды вида (1.1) и (2.24) с ограниченными показателями, как и ряды (1.1) с чисто мнимыми показателями  $\lambda_k = i\mu_k$ ,  $\mu_k \in \mathbb{R}^p$ , обладают довольно сильным свойством «заразительности». Однако причины такого поведения рядов Дирихле из этих двух классов разные: для рядов с мнимыми показателями определяющим фактором являются соотношения  $|e_{i\mu}(x)^{(\alpha)}| = |\mu_1|^{\alpha_1} \dots |\mu_p|^{\alpha_p}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$  (здесь  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ ), а для рядов с ограниченными показателями решающую роль играет ограниченность множества  $F$ , в котором находятся все показатели  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$



## ГЛАВА 3

### ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

#### 3.1. $A$ -представляющие системы, их линейные преобразования

**3.1.1.** Пусть  $H$  — отделимое локально выпуклое пространство (сокращенно ОЛВП) над полем скаляров  $\Phi$ , где  $\Phi = \mathbb{C}$  или  $\Phi = \mathbb{R}$ , с топологией  $\mathcal{P}$ , определяемой набором (непрерывных) преднорм  $p : \mathcal{P} = \{p\}$ . Пусть  $\Omega$  — некоторое счетное множество индексов и  $(\omega_k)_{k=1}^\infty$  — неубывающая последовательность его конечных (т. е. состоящих из конечного числа индексов) подмножеств, исчерпывающая  $\Omega$ :

$$\omega_n \subset \omega_{n+1} \subset \Omega = \omega_1 \cup \left( \bigcup_{k=1}^\infty (\omega_{k+1} \setminus \omega_k) \right) \quad \forall n \geq 1.$$

Возьмем какое-либо счетное множество  $X$  ненулевых элементов  $x_\alpha$  из  $H$  таких, что любая (конечная) система элементов  $(x_\alpha : \alpha \in \omega_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , линейно независима в  $H$  (последнее предположение выполняется на всем протяжении данного раздела). Если  $c = (c_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  — произвольное числовое семейство ( $c_\alpha \in \Phi$  при любом  $\alpha \in \Omega$ ), то для всех  $m \geq 1$  положим  $S_m(c) := \sum_{\alpha \in \omega_m} c_\alpha x_\alpha$ . Образует векторное пространство  $A_1(X, H)$  числовых семейств  $c = (c_\alpha)$ ,  $c_\alpha \in \Phi$  при любом  $\alpha \in \Omega$ , для которых в  $H$  существует предел  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(c)$ . Очевидно, что  $A_1(X, H)$  содержит все «орты»  $e_{(\beta)} = (e_{\gamma, \beta})_{\gamma \in \Omega}$ , где  $\beta \in \Omega$  и  $e_{\gamma, \beta} = 0$  при  $\gamma \neq \beta$ ,  $e_{\beta, \beta} = 1$ .

Пусть теперь  $A$  — (векторное) подпространство  $A_1(X, H)$ . Назовем  $X$   $A$ -представляющей системой в  $H$  ( $A$ -ПС в  $H$ ), если любой элемент  $y$  из  $H$  допускает представление

$$y = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(c), \tag{3.1}$$

в котором предел берется в  $H$  и  $c = (c_\alpha)_{\alpha \in \Omega} \in A$ . Если еще для любых  $y$  из  $H$  его представление в виде (3.1) единственно, то  $A$ -ПС  $X$  в  $H$  называется  $A$ -базисом в  $H$ .

Введем в пространстве  $A_1(X, H)$  топологию  $\tau_1$  набором преднорм

$$Q_{\mathcal{P}} = \{q_p^X\}_{p \in \mathcal{P}}, \quad q_p^X(c) := \sup_{m \geq 1} p(S_m(c)).$$

Заметим, что из отделимости пространства  $H$  следует, что пространство  $(A_1(X, H), \tau_1)$  также отделимо. Действительно, если  $d \in A_1(X, H)$  и  $q_p^X(d) = 0$  для любого  $p \in \mathcal{P}$ , то

$$p(S_m(d)) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}, \forall m \geq 1.$$

Но тогда при любом фиксированном  $m \geq 1$  и всех  $p \in \mathcal{P}$   $p(S_m(d)) = 0$  и в силу отделимости  $H$   $S_m(d) = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Так как по предположению система  $(x_\alpha)_{\alpha \in \omega_m}$  линейно независима и  $\sum_{\alpha \in \omega_m} d_\alpha x_\alpha = 0$ , то  $d_\alpha = 0$  для всех  $\alpha \in \omega_m$  и  $m \geq 1$ . Окончательно,  $d = 0$ .

**3.1.2.** Докажем еще, что топология  $\tau_1$  в  $A_1(X, H)$  мажорирует топологию «покоординатной» сходимости, т. е. при любом  $\alpha \in \Omega$   $|c_\alpha|$  — непрерывная преднорма на  $A_1(X, H), \tau_1$ . Для определенности далее в этом разделе полагаем, что  $\Phi = \mathbb{C}$ . По произвольно взятому индексу  $\alpha$  из  $\Omega$  найдем номер  $N$  настолько большой, что  $\alpha \in \omega_N$ . Множество

$$A_N := \left\{ c = \sum_{\alpha \in \omega_N} c_\alpha e_{(\alpha)} : c_\alpha \in \mathbb{C} \quad \forall \alpha \in \omega_N \right\}$$

является конечномерным подпространством  $A_1(X, H), \tau_1$ . При этом орты  $e_{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \omega_N$ , принадлежат пространству  $A_N$  и составляют в нем (конечный алгебраический) базис. Как известно (см., например, [125, гл. II, раздел 6]) в  $A_N$  есть только одна локально выпуклая топология  $\tau_N$  (а именно, евклидова) и она совпадает с топологией  $\tau_1$ , индуцированной в  $A_N$  из  $A_1(X, H), \tau_1$  и определяемой набором преднорм  $\max_{1 \leq m \leq N} p(\sum_{\alpha \in \omega_m} c_\alpha x_\alpha)$ . Очевидно, что  $|c_\alpha|$  — непрерывная преднорма на  $A_N, \tau_N = A_N, \tau_1$ . Следовательно,  $|c_\alpha|$  — непрерывная преднорма и на  $A_1(X, H), \tau_1$ .

Отсюда, в частности, следует, что для любого  $\alpha \in \Omega$  линейный функционал

$$\psi_\alpha : A_1(X, H) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \psi_\alpha(d) = d_\alpha \quad \forall d \in A_1(X, H),$$

непрерывен на  $A_1(X, H), \tau_1$ .

Покажем, далее, что если  $H$  — ПОЛВП, то  $A_1(X, H), \tau_1$  также полно и, таким образом, является ПОЛВП. Пусть  $\{c^{(\gamma)}\}_{\gamma \in D}$  — какая-либо сеть Коши (по «направлению» — направленному множеству  $D$ ). Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  и всех  $p \in \mathcal{P}$  существует индекс  $\gamma_0 \in D$  такой, что если при  $j = 1, 2$   $\gamma_j \in D$  и  $\gamma_j \succ \gamma_0$ , то  $q_p^X(c^{(\gamma_1)} - c^{(\gamma_2)}) < \frac{\varepsilon}{2}$ , т. е.

$$\sup_{n \geq 1} p \left( \sum_{\alpha \in \omega_n} (c_\alpha^{(\gamma_1)} - c_\alpha^{(\gamma_2)}) x_\alpha \right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, если  $\gamma_j \succ \gamma_1$  при  $j = 1, 2$ , то для любого  $n_1 \geq 1$

$$p \left( \sum_{\alpha \in \omega_{n_1}} (c_\alpha^{(\gamma_1)} - c_\alpha^{(\gamma_2)}) x_\alpha \right) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.2)$$

Воспользуемся теперь тем, что сеть  $\{c^{(\gamma)}\}_{\gamma \in D}$  слабо фундаментальна в  $A_1(X, H), \tau_1$ , а также тем, что

$$\psi_\beta : \psi_\beta(c) = c_\beta \in (A_1(X, H), \tau_1)' \quad \forall \beta \in \Omega.$$

Тогда при любом  $\beta$  из  $\Omega$  числовая сеть  $\{\psi_\beta(c^{(\gamma)})\}_{\gamma \in D} = \{c_\beta^{(\gamma)}\}_{\gamma \in D}$  является сетью Коши в  $\mathbb{C}$  и потому эта сеть сходится (в  $\mathbb{C}$ ) к некоторому числу

$$b_\beta = \lim_{\gamma \in D} c_\beta^{(\gamma)}. \quad (3.3)$$

Зафиксировав любой номер  $\gamma_2$  такой, что  $\gamma_2 \succ \gamma_0$ , с помощью предельного перехода (по направлению  $D$ ) из неравенства (3.2) с учетом соотношений (3.3) получим неравенство

$$p \left( \sum_{\alpha \in \omega_{n_1}} (b_\alpha - c_\alpha^{(\gamma_2)}) x_\alpha \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда для любых  $n_j \geq j$

$$\begin{aligned} p(S_{n_1}(b) - S_{n_2}(b)) &= p \left( \sum_{\alpha \in \omega_{n_1}} b_\alpha x_\alpha - \sum_{\alpha \in \omega_{n_2}} b_\alpha x_\alpha \right) \leq \\ &\leq p \left( \sum_{\alpha \in \omega_{n_1}} b_\alpha x_\alpha - \sum_{\alpha \in \omega_{n_1}} c_\alpha^{(\gamma_2)} x_\alpha \right) + p \left( \sum_{\alpha \in \omega_{n_2}} b_\alpha x_\alpha - \sum_{\alpha \in \omega_{n_2}} c_\alpha^{(\gamma_2)} x_\alpha \right) + \\ &+ p(S_{n_1}(c^{(\gamma_2)}) - S_{n_2}(c^{(\gamma_2)})) \leq \varepsilon + p(S_{n_1}(c^{(\gamma_2)}) - S_{n_2}(c^{(\gamma_2)})). \end{aligned}$$

Так как  $c^{(\gamma_2)} \in A_1(X, H)$ , то найдется номер  $n_3$  такой, что

$$p\left(S_{n_1}(c^{(\gamma_2)}) - S_{n_2}(c^{(\gamma_2)})\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n_j \geq n_3, \quad j = 1, 2.$$

Но тогда для тех же  $n_1, n_2$

$$p\left(S_{n_1}(b) - S_{n_2}(b)\right) < \frac{3}{2}\varepsilon.$$

Таким образом, последовательность  $\{S_m(b)\}_{m=1}^\infty$  элементов из  $H$  фундаментальна в  $H$ . В силу полноты  $H$  она имеет предел в  $H$ .

Следовательно,  $b = (b_\alpha)_{\alpha \in \Omega} \in A_1(X, H)$ . Кроме того,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall p \in \mathcal{P} \exists \tilde{\gamma} \in D : \forall \gamma \succ \tilde{\gamma} \sup_{m \geq N_2} p\left(\sum_{\alpha \in \omega_m} (b_\alpha - c_\alpha^{(\gamma)})x_\alpha\right) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

где  $N_2 = N_2(\varepsilon, p)$ . Учитывая еще, что при любом фиксированном  $\delta$  из  $\Omega$  и любой преднорме  $p$  из  $\mathcal{P}$   $\lim_{\gamma \in D} p((b_\delta - c_\delta^{(\gamma)})x_\delta) = 0$ , получаем окончательно:

$$\lim_{\gamma \in D} q_p^X(b - c^{(\gamma)}) = 0,$$

т. е. сеть  $\{c^{(\gamma)}\}_{\gamma \in D}$  сходится в  $A_1(X, H), \tau_1$  к некоторому элементу  $b$  (из  $A_1(X, H)$ ). Таким образом, пространство  $A_1(X, H), \tau_1$  полно, если исходное пространство  $H$  полно.

**3.1.3.** Приведем еще один важный пример А-ПС. Для чего (считая по-прежнему, что  $H$  — ОЛВП с набором преднорм  $\mathcal{P} = \{p\}$ ) положим

$$A = A_2(X, H) := \left\{ c = (c_\alpha)_{\alpha \in \Omega} \in \mathbb{C}^\Omega : \right. \\ \left. q_p^{(2)}(c) := \sum_{\alpha \in \Omega} |c_\alpha|p(x_\alpha) < +\infty \quad \forall p \in \mathcal{P} \right\}$$

и определим ЛВ топологию  $\tau_2$  на  $A_2(X, H)$  набором преднорм

$$Q_{\mathcal{P}} := \{q_p^{(2)} : p \in \mathcal{P}\}.$$

Зафиксируем произвольный индекс  $\alpha$  в  $\Omega$  и найдем преднорму  $p_\alpha$  из  $\mathcal{P}$  такую, что  $p_\alpha(x_\alpha) > 0$ . Тогда

$$|c_\alpha| = \frac{|c_\alpha p_\alpha(x_\alpha)|}{p_\alpha(x_\alpha)} \leq \frac{q_{p_\alpha}^{(2)}(c)}{p_\alpha(x_\alpha)} \quad \forall c \in A_2(X, H),$$

и линейный функционал  $\psi_\alpha(c) = c_\alpha$  непрерывен на  $A_2(X, H)$ ,  $\tau_2$  для любого индекса  $\alpha \in \Omega$ .

Если  $H$  — ПОЛВП, то, как легко убедиться, для любого элемента  $s$  из  $A_2(X, H)$  в  $H$  существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} c_\alpha x_\alpha$ , и потому  $A_2(X, H) \subseteq A_1(X, H)$ . Более того,  $A_2(X, H), \tau_2 \hookrightarrow A_1(X, H), \tau_1$ . Отсюда следует, что  $A_2(X, H), \tau_2$  отделимо.

Покажем теперь, что пространство  $A_2(X, H), \tau_2$  полно. Пусть  $(C^{(\gamma)})_{\gamma \in D}$  — сеть Коши в  $A_2(X, H), \tau_2$  по направлению  $D$ . Тогда при любом фиксированном индексе  $\alpha$  из  $\Omega$  числовое множество  $\psi_\alpha(C^{(\gamma)})_{\gamma \in D}$  является сетью Коши в  $\mathbb{C}$  и в силу полноты  $\mathbb{C}$  существует  $D_\alpha \in \mathbb{C}$  такое, что

$$\lim_{\gamma \in D} \psi_\alpha(C^{(\gamma)}) = \lim_{\gamma \in D} (C^{(\gamma)})_\alpha = D_\alpha.$$

Далее, для любых  $\varepsilon > 0$  и  $p \in \mathcal{P}$  существует индекс  $\gamma_0 \in D$  такой, что если  $\gamma_j \succ \gamma_0$ ,  $\gamma_j \in D$  ( $j = 1, 2$ ), то

$$q_p^{(2)}(C^{(\gamma_1)} - C^{(\gamma_2)}) = \sum_{\alpha \in \Omega} \left| (C^{(\gamma_1)})_\alpha - (C^{(\gamma_2)})_\alpha \right| p(x_\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$$

и подавно для любого конечного подмножества  $M$  множества  $\Omega$

$$\sum_{\alpha \in M} \left| (C^{(\gamma_1)})_\alpha - (C^{(\gamma_2)})_\alpha \right| p(x_\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \gamma_j \succ \gamma_0, \quad j = 1, 2. \quad (3.4)$$

Зафиксировав произвольный индекс  $\gamma_2$  из  $D$  такой, что  $\gamma_2 \succ \gamma_0$ , из неравенства (3.4) с помощью предельного перехода получаем соотношение

$$\sum_{\alpha \in M} \left| D_\alpha - (C^{(\gamma_2)})_\alpha \right| p(x_\alpha) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in M} |D_\alpha| p(x_\alpha) &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{\alpha \in M} |(C^{(\gamma_2)})_\alpha| p(x_\alpha) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + q_p^{(2)}(C^{(\gamma_2)}) \leq h < +\infty, \quad h = h(\varepsilon, \gamma_2, p). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{\alpha \in \Omega} |D_\alpha| p(x_\alpha) \leq h < \infty, \quad \tilde{D}(D_\alpha)_{\alpha \in \Omega} \in A_2(X, H).$$

При этом для любого  $\varepsilon > 0$  существует индекс  $\gamma_0 \in D$  такой, что для всех  $\gamma \in D$ ,  $\gamma \mapsto \gamma_0$ ,

$$\sum_{\alpha \in \Omega} \left| D_\alpha - (C^{(\gamma)})_\alpha \right| p(x_\alpha) < \varepsilon,$$

и  $\tilde{D} = \lim_{\gamma \in D} C^{(\gamma)}$ . Заметим, что в ходе этого доказательства (в отличие от пространства  $A_1(X, H)$ ) было использовано лишь то, что  $H$  — ОЛВП, а полнота пространства  $H$  не потребовалась.

В дальнейшем  $A_2(X, H)$ -ПС в  $H$  называется абсолютно представляющей системой (коротко АПС) в  $H$ , а  $A_2(X, H)$ -Б в  $H$  называется абсолютным базисом (коротко АБ) в  $H$ . Далее,  $A_1(X, H)$ -ПС называется просто ПС,  $A_1(X, H)$ -Б — просто базисом.

**3.1.4.** Можно привести и другие примеры общих классов  $A(X, H)$ . Ограничимся пока одним из них, который понадобится в дальнейшем.

Пусть  $H$ ,  $\Omega$ ,  $X$  и  $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  те же, что и в пункте 3.1.1. Положим

$$A_3(X, H) := \left\{ d = (d_\alpha)_{\alpha \in \Omega} : \sum_{k=1}^{\infty} p \left( \sum_{\alpha \in \omega_{k+1} \setminus \omega_k} d_\alpha x_\alpha \right) < +\infty \right\}.$$

Если в пространстве  $A_3(X, H)$  ввести топологию  $\tau_3$  набором преднорм  $Q_{\mathcal{P}}^3 = \{q_p^{(3)} : p \in \mathcal{P}\}$ , где для всех  $p \in \mathcal{P}$  и  $d = (d_\alpha)_{\alpha \in \Omega} \in A_3$

$$q_p^{(3)}(d) = p \left( \sum_{\alpha \in \omega_1} d_\alpha x_\alpha \right) + \sum_{k=1}^{\infty} p \left( \sum_{\alpha \in \omega_{k+1} \setminus \omega_k} d_\alpha x_\alpha \right),$$

то, очевидно, что  $A_2(X, H), \tau_2 \hookrightarrow A_3(X, H), \tau_3 \hookrightarrow A_1(X, H), \tau_1$ .

Отсюда следует, что пространство  $A_3$  содержит все орты  $e_{(\alpha)}$ , причем  $|d_\alpha|$  — непрерывная преднорма на  $A_3(X, H), \tau_3$  для любого  $\alpha \in \Omega$ . Далее, так как пространство  $A_1(X, H), \tau_1$  отделимо, то таким же будет и пространство  $A_3(X, H), \tau_3$ . Наконец, оно полно, что устанавливается примерно теми же рассуждениями, как и в случае пространства  $A_2(X, H), \tau_2$ . Итак,  $A_3(X, H), \tau_3$  — ПОЛВП.

**3.1.5.** Возвращаясь к введенному в п. 3.1.1 пространству  $A$ , отметим, что оно определяется следующими факторами:

- пространством  $H$ ,
- выбранной в пространстве  $H$  счетной системой  $X = (x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  ненулевых элементов,

- счетным множеством индексов  $\Omega$ ,
- $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  — выбранной возрастающей последовательностью конечных подмножеств из  $\Omega$ , исчерпывающей  $\Omega$  в том смысле, что

$$\Omega = \omega_1 \cup \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \omega_{k+1} \setminus \omega_k \right).$$

Поэтому правильнее было бы обозначать пространство  $A$  с топологией  $\tau$  символом

$$A(X, H; \Omega, \{\omega_k\}), \tau$$

(аналогично,  $A_j, \tau_j = A_j(X, H; \Omega, \{\omega_k\}), \tau_j$  при  $j = 1, 2, 3$ ; при этом пространство  $A_2, \tau_2$  не зависит, как следует из его определения, от выбора исчерпывающей  $\Omega$  последовательности  $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ :  $A_2, \tau_2 = A_2(X, H; \Omega), \tau_2$ ).

Однако такая система обозначений довольно громоздка. Так как множество индексов  $\Omega$  и последовательность  $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  в ходе рассуждений в данном разделе, как правило, не меняются, то мы будем пользоваться более компактными обозначениями  $A(X, H), \tau$  и  $A_j(X, H), \tau_j$  при  $j = 1, 2, 3$ , или (если это не приведет к недоразумениям) символами  $A, \tau, A_j, \tau_j$  и даже  $A, A_j$ . Всюду в этом разделе предполагается, что  $A, \tau \hookrightarrow A_1, \tau_1$ .

Введем оператор представления (ОП)

$$L_A^X : \forall c = (c_\alpha)_{\alpha \in \Omega} \in A \rightarrow L_A^X(c) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{\alpha \in \omega_m} c_\alpha x_\alpha \right) \in H. \quad (3.5)$$

Очевидно, что  $L_A^X$  — линейный оператор. Кроме того, для любого  $p \in \mathcal{P}$  существуют число  $b < \infty$  и (непрерывная) преднорма  $t_1$  в  $A$  из набора преднорм, определяющих топологию  $\tau$  в  $A$ , такие, что  $q_p^X(c) \leq b t_1(c)$  при всех  $c \in A$ .

Отсюда  $p(L_A^X c) \leq \sup_{m \geq 1} p(\sum_{\alpha \in \omega_m} c_\alpha x_\alpha) = q_p^X(c) \leq b t_1(c)$ ,  $c \in A$ , и оператор  $L_A^X$  непрерывен из  $A, \tau$  в  $H$ .

Очевидно, что  $X$  —  $A$ -ПС в  $H$  тогда и только тогда, когда  $L_A^X$  — эпиморфизм  $A$  на  $H$ . Далее,  $X$  —  $A$ -Б в  $H$  тогда и только тогда, когда  $L_A^X$  — инъективное отображение  $A$  на  $H$ .

**3.1.6.** Ясно, что любой  $A$ -базис в  $H$  (соответственно, абсолютный базис или (просто) базис) будет  $A$ -ПС (соответственно, АПС или ПС) в  $H$ . Обратное заключение, вообще говоря, неверно, в чем можно убедиться на, возможно, не самом общем, но довольно простом

примере, который приводился автором в его лекции, прочитанной на Зимней Саратовской математической школе в 1982 г.

Пусть  $H$  — ПОЛВП функций, определенных на каком-либо множестве  $Q$  из  $B_p$ , где  $p \geq 1$  и  $B_p = \mathbb{C}^p$  или  $B_p = \mathbb{R}^p$ . Будем считать, что пространство  $H$  инвариантно относительно дифференцирования в том смысле, что все операторы частного дифференцирования  $\frac{\partial v}{\partial t_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , где  $t = (t_1, t_2, \dots, t_p) \in B_p$ , действуют непрерывно из  $H$  в  $H$ .

Обозначим, далее, символом  $\Lambda$  множество всех точек  $\lambda$  из  $\mathbb{C}^p$  таких, что  $e_\lambda(t) := \exp\langle \lambda, t \rangle_p \in H$ , и предположим, что множество  $\Lambda$  бесконечно. Допустим еще, что для некоторого собственного счетного подмножества  $\Lambda_1$  множества  $\Lambda$  система экспонент

$$\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_1\} = \{e_{\lambda_n} : n = 1, 2, \dots\}$$

является А-ПС в  $H$ . Тогда, если  $\lambda_0 \in \Lambda \setminus \Lambda_1$ , то

$$e_{\lambda_0}(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{\lambda_\alpha \in \tilde{\omega}_m} \beta_\alpha e_{\lambda_\alpha} \right), \quad \Lambda_1 = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{\omega}_j, \quad \tilde{\omega}_1 \subset \tilde{\omega}_2 \subset \dots \subset \Lambda_1.$$

Здесь  $\tilde{\omega}_k := \Lambda_1 \cap \omega_k$ . При этом существуют такие  $k_1$  и  $m_0$ , что  $k_1 \in \tilde{\omega}_{m_0}$  и  $\beta_{k_1} \neq 0$ .

Так как  $\lambda_0 \neq \lambda_{k_1}$ , то найдется такое  $j \leq p$ , что  $\lambda_{0,j} \neq \lambda_{k_1,j}$ . Про- дифференцировав равенство

$$e_{\lambda_0}(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{\lambda_k \in \tilde{\omega}_m} \beta_k e_{\lambda_k} \right) \quad (3.6)$$

по  $t_j$ , получим

$$\lambda_{0,j} e_{\lambda_0}(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{\lambda_k \in \tilde{\omega}_m} \lambda_{k,j} \beta_k e_{\lambda_k} \right). \quad (3.7)$$

Умножив обе части равенства (3.6) на  $\lambda_{0,j}$  и вычтя полученное соотношение из (3.7), найдем, что

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{\lambda_k \in \omega_m} (\lambda_{k,j} - \lambda_{0,j}) \tilde{\beta}_k e_{\lambda_k} \right),$$

где  $\tilde{\beta}_k = 0$ , если  $k \in \omega_m \setminus \tilde{\omega}_m$ ;  $\tilde{\beta}_k = \beta_k$ , если  $k \in \tilde{\omega}_m$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Так



как предел справа существует, то  $\{(\lambda_{k,j} - \lambda_{0,j})\tilde{\beta}_k\}_{\lambda_k \in \Lambda} \in A$ , причем  $(\lambda_{k_1,j} - \lambda_{0,j})\tilde{\beta}_{k_1} \neq 0$  при  $k = k_1$ , и мы получили нетривиальное представление нуля в  $H$  по системе  $E_{\Lambda_1} := (e_{\lambda_k} : \lambda_k \in \Lambda_1)$ . Отсюда следует, что единственность представления в  $H$  по системе  $E_{\Lambda_1}$  не имеет места и  $E_{\Lambda_1}$  — не  $A$ -базис в  $H$ .

Во многих работах рассматривались функциональные пространства  $H$ , инвариантные относительно дифференцирования и содержащие совокупность экспонент  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ , где  $\Lambda$  имеет мощность континуума. Из приведенных рассуждений следует, что во всех таких пространствах ни одна  $A$ -ПС экспонент не будет  $A$ -базисом. В частности, любая представляющая система экспонент в таком пространстве  $H$  (существование подобных ПС установлено во многих работах) не будет базисом в  $H$ .

В связи с тем, что в общей ситуации единственность представления элементов из  $H$  в виде (3.1) с коэффициентами из  $A$  может не иметь места, дадим определения некоторых подклассов  $A$ -ПС.

1. Если коэффициенты  $(y_\alpha)_{\alpha \in \omega}$  из  $A$  хотя бы одного представления (3.1) произвольного элемента  $y$  из  $H$  могут быть найдены эффективно (т. е. определены конструктивно), то  $X$  называется эффективно  $A$ -представляющей системой (обозначение: ЭА-ПС) в  $H$ . В случае, когда  $A = A_1(X, H)$ , используется обозначение ЭПС, а при  $A = A_2(X, H)$  — обозначение ЭАПС.

2. Если оператор представления  $L_A^X$  является эпиморфизмом  $A$  на  $H$ , имеющим линейный непрерывный правый обратный (ЛНПО), то  $X$  называется правильной  $A$ -ПС (ПА-ПС) (соответственно, ППС и ПАПС).

3. Наконец, если  $L_A^X$  — эпиморфизм  $A$  на  $H$ , имеющий конструктивно определяемый ЛНПО, то  $X$  называется эффективно правильной  $A$ -представляющей системой (ЭПА-ПС) (при  $A = A_1(X, H)$  — ЭППС, а при  $A = A_2(X, H)$  — ЭПАПС).

**3.1.7.** Рассмотрим теперь линейные преобразования  $A$ -ПС. Всюду далее предполагается, что выполнены следующие условия:

- а) при  $j = 1, 2$   $H_j$  — ПОЛВП с набором преднорм  $\mathcal{P}_j = \{p_j\}$ , определяющим топологию в  $H_j$ ;
- б)  $T$  — линейный непрерывный из  $H_1$  в  $H_2$  оператор;
- в)  $X = (x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  — некоторое счетное множество элементов  $(x_\alpha)$  из  $H_1$  таких, что любая конечная подсистема  $X$  линейно независима в  $H_1$ , а любая конечная подсистема множества  $TX := (Tx_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  линейно независима в  $H_2$ .

Отметим сначала один почти очевидный результат.

**Лемма 3.1.**  $A_j(X, H_1) \hookrightarrow A_j(TX, H_2)$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

◁ Действительно, прежде всего, если предел  $\lim_{m \rightarrow \infty} (\sum_{l \in \omega_m} c_l x_l)$  имеется в  $H_1$ , то (в силу непрерывности оператора  $T$ )

$$T \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_k} c_\alpha x_\alpha \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{\alpha \in \omega_k} c_\alpha T x_\alpha \right) \in H_2.$$

Следовательно,  $A_1(X, H_1) \subseteq A_1(TX, H_2)$ . Далее,

$$\forall p_2 \in \mathcal{P}_2 \exists p_1 \in \mathcal{P}_1, \exists b < +\infty : p_2(Tx) \leq b p_1(x) \quad \forall x \in H_1.$$

Отсюда при любом  $c = (c_\alpha)_{\alpha \in \Omega} \in A_1(X, H_1)$  имеем:

$$\begin{aligned} q_{p_2}^{TX}(c) &:= \sup_{m \geq 1} p_2 \left( \sum_{\alpha \in \omega_m} c_\alpha T x_\alpha \right) = \sup_{m \geq 1} p_2 \left( T \left( \sum_{\alpha \in \omega_m} c_\alpha x_\alpha \right) \right) \leq \\ &\leq b \sup_{m \geq 1} p_1 \left( \sum_{\alpha \in \omega_m} c_\alpha x_\alpha \right) = b q_{p_1}^X(c) \quad \text{и} \quad A_1(X, H_1) \hookrightarrow A_1(TX, H_2). \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается справедливость остальных вложений. ▷

**Теорема 3.1.** Пусть  $T$  — линейный непрерывный оператор из ПОЛВП  $H_1$  в ПОЛВП  $H_2$  и пусть  $X$  —  $A_0$ -ПС в  $H_1$ , где  $A_0, \tau \hookrightarrow A_1(X, H_1), \tau_1$ . Тогда

- 1) если  $T$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$ , то  $TX$  —  $A_0$ -ПС в  $H_2$ ;
- 2) если  $TX$  —  $A_0$ -ПС в  $H_2$ , то оператор  $T$  сюръективен.

Перед тем, как доказать эту теорему, заметим, что

$$A_0, \tau \hookrightarrow A_1(X, H_1), \tau_1,$$

а по лемме 3.1  $A_1(X, H_1), \tau_1 \hookrightarrow A_1(TX, H_2), \tau_1$ . Поэтому

$$A_0, \tau \hookrightarrow A_1(TX, H_2), \tau_1$$

и формулировка теоремы корректна.

◁ 1. Если  $T$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$ , то для любого  $y \in H_2$  существует  $v \in H_1$  такое, что  $y = Tv$ . Далее, так как  $X$  —  $A_0$ -ПС

в  $H_1$ , то  $v = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} v_\alpha x_\alpha$ . При этом предел существует в  $H_1$  и  $\{v_\alpha\}_{\alpha \in \Omega} \in A_0$ . В силу непрерывности оператора  $T$

$$y = Tv = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} v_\alpha x_\alpha\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} v_\alpha T x_\alpha,$$

и  $TX - A_0$ -ПС в  $H_2$ .

2. Пусть  $TX - A_0$ -ПС в  $H_2$ ,  $y$  — произвольный элемент из  $H_2$ . Тогда

$$\exists \{y_\alpha\}_{\alpha \in \Omega} \in A_0 : y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} y_\alpha T x_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} T\left(\sum_{\alpha \in \omega_n} y_\alpha x_\alpha\right)$$

(предел берется в  $H_2$ ). Но так как  $\{y_\alpha\} \in A_0 \subseteq A_1(X, H_1)$ , то в  $H_1$  существует предел  $v := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} y_\alpha x_\alpha$ . Отсюда

$$Tv = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} y_\alpha x_\alpha\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T\left(\sum_{\alpha \in \omega_n} y_\alpha x_\alpha\right) = y. \triangleright$$

**Следствие.** Пусть  $T$  — линейный непрерывный оператор из ПОЛВП  $H_1$  в ПОЛВП  $H_2$  и  $X - A_j(X, H_1)$ -ПС в  $H_1$ , где  $j = 1, 2, 3$ . Тогда:

- 1) если  $T$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$ , то  $TX - A_j(X, H_1)$ -ПС в  $H_2$ ;
- 2) если  $TX - A_j(X, H_1)$ -ПС в  $H_2$ , то оператор  $T$  сюръективен.

Это следствие можно дополнить. Прежде всего условимся говорить, что выполняется условие  $(TX)_1$ , если, каково бы ни было числовое семейство  $(b_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ , предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} b_\alpha x_\alpha$  в  $H_1$  существует тогда и только тогда, когда в  $H_2$  имеется предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} b_\alpha T x_\alpha$ . Аналогично, скажем, что выполнено условие  $(TX)_2$ , если для произвольной числовой совокупности  $(b_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  семейство элементов  $(b_\alpha x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  из  $H_1$  абсолютно суммируемо в  $H_1$  в том и только том случае, когда в  $H_2$  абсолютно суммируемо семейство элементов  $\{b_\alpha T x_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ .

Заметим, что условие  $(TX)_1$  (или  $(TX)_2$ ) выполнено тогда и только тогда, когда

$$A_1(X, H_1), \tau_1 = A_1(TX, H_2), \tau_1$$

(соответственно,  $A_2(X, H_1), \tau_2 = A_2(TX, H_2), \tau_2$ ).

**Теорема 3.2.** Пусть  $T$  — линейный непрерывный оператор из ПОЛВП  $H_1$  в ПОЛВП  $H_2$ . Тогда:

1) если  $X$  — ПС или АПС в  $H_1$ , а  $T$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$ , то  $TX$  — ПС (соответственно, АПС) в  $H_2$ ;

2) если  $X$  — ПС (или АПС) в  $H_1$ , а  $TX$  — ПС (соответственно, АПС) в  $H_2$  и выполнено условие  $(TX)_1$  (соответственно,  $(TX)_2$ ), то оператор  $T$  сюръективен.

◁ Так как доказательство для ПС и АПС проводится совершенно аналогично, приведем его только для представляющих систем.

1. Утверждение 1) вытекает из утверждения 1) следствия теоремы 3.1 (при  $j = 1$ ) и из того, что по лемме 3.1  $A_1(X, H_1) \subseteq A_1(TX, H_2)$ .

2. Пусть  $X$  — ПС в  $H_1$ , а  $TX$  — в  $H_2$ . Тогда

$$\forall y \in H_2 \quad \exists (y_\alpha)_{\alpha \in \Omega} \in A_1(TX, H_2) : \\ y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{\alpha \in \omega_n} y_\alpha T x_\alpha \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T \left( \sum_{\alpha \in \omega_n} y_\alpha x_\alpha \right).$$

Далее, так как выполняется условие  $(TX)_1$ , то в  $H_1$  существует предел

$$x := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{\alpha \in \omega_n} y_\alpha x_\alpha \right).$$

Очевидно, что  $Tx = y$ , и  $T$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$ . ▷

**3.1.8.** Обратимся теперь к соответствующим утверждениям для введенных в конце п. 3.1.6 подклассов А-ПС. Будем, как выше, считать, что  $A_0, \tau \hookrightarrow A_1(X, H_1), \tau_1, T$  — линейный непрерывный оператор из  $H_1$  в  $H_2$ .

**Теорема 3.3.** Пусть  $X$  —  $\mathcal{E}A_0$ -ПС в  $H_1$ . Тогда  $TX$  —  $\mathcal{E}A_0$ -ПС в  $H_2$  в том и только том случае, если  $T$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$ , имеющий эффективно определяемый правый обратный.

◁ 1. Если  $X$  —  $\mathcal{E}A_0$ -ПС в  $H_1$ , а  $TX$  — в  $H_2$ , то операторы представления  $L_{A_0}^X$  и  $L_{A_0}^{TX}$  имеют эффективно определяемые правые обратные (соответственно,  $Q$  и  $Q_1$ ):

$$Q : H_1 \rightarrow A_0; \quad \forall x \in H_1 \quad (L_{A_0}^X Q)x = x; \\ Q_1 : H_2 \rightarrow A_0; \quad \forall y \in H_2 \quad (L_{A_0}^{TX} Q_1)y = y.$$

Заметим еще, что если  $T$  — линейный непрерывный оператор из  $H_1$  в  $H_2$ , то  $TL_{A_0}^X c = L_{A_0}^{TX} c$  для любого  $c \in A_0$ . Положим  $B := L_{A_0}^X \cdot Q_1$ . Тогда  $B$  — эффективно определяемый оператор из  $H_2$  в  $H_1$ , причем

$$TB y = (L_{A_0}^{TX} Q_1) y = y \quad \forall y \in H_2.$$

2. Пусть теперь  $X$  —  $\mathcal{E}A_0$ -ПС в  $H_1$ , а  $T$  — линейный непрерывный из  $H_1$  в  $H_2$  оператор, имеющий эффективно определяемый правый обратный  $T_1$ . Пусть еще  $Q$  — существующий по предположению и эффективно определяемый правый обратный для  $L_{A_0}^X$ . Тогда, как легко проверить, эффективно определяемый оператор  $\tilde{Q} := QT_1$  действует из  $H_2$  в  $A_0$ , причем

$$(L_{A_0}^{TX} \tilde{Q}) y = (TL_{A_0}^X QT_1) y = TT_1 y = y \quad \forall y \in H_2. \triangleright$$

**Теорема 3.4.** Пусть  $X$  —  $PA_0$ -ПС в  $H_1$ . Тогда  $TX$  —  $PA_0$ -ПС в  $H_2$  в том и только том случае, когда  $T$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$ , имеющий ЛНПО.

$\triangleleft$  Эта теорема доказывается так же, как предыдущая. Именно, допустим, что существуют ЛНПО  $T_1$  для  $T$  и  $\hat{Q}$  для  $L_{A_0}^X$ . Тогда оператор  $\hat{Q}_1 := \hat{Q} \cdot T_1$  является ЛНПО для  $L_{A_0}^{TX}$ . Обратно, если  $\hat{Q}$  — ЛНПО для  $L_{A_0}^X$ , а  $\hat{Q}_1$  — для  $L_{A_0}^{TX}$ , то  $B := L_{A_0}^X \cdot \hat{Q}_1$  — ЛНПО для  $T$ .  $\triangleright$

Заметим еще, что, как видно из доказательства, в первой его части, если операторы  $T_1$  и  $\hat{Q}$  эффективно определены, то таким же будет и линейный оператор  $\hat{Q}_1$ . Аналогично, во второй части, если операторы  $\hat{Q}$  и  $\hat{Q}_1$  эффективно определены, то таким же будет ЛНПО  $B$  для  $T$ :  $B = L_{A_0}^X \cdot \hat{Q}_1$ . Таким образом, из теоремы 3.4 вытекает

**Следствие.** Пусть  $X$  —  $\mathcal{E}PA_0$ -ПС в  $H_1$ . Тогда  $TX$  —  $\mathcal{E}PA_0$ -ПС в  $H_2$  в том и только том случае, если оператор  $T$  имеет эффективно определяемый ЛНПО.

И здесь можно выделить, пожалуй, важнейшие частные случаи, когда  $A_0 = A_1(X, H_1)$  и  $A_0 = A_2(X, H_1)$ .

**Теорема 3.5.** Пусть  $X$  — ЭПС (или ЭАПС) в  $H_1$ . Тогда:

- 1) если  $T$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$ , имеющий ЛНПО, то  $TX$  — ППС (соответственно, ПАПС) в  $H_2$ ;
- 2) если  $TX$  — ППС (или ПАПС) в  $H_2$  и выполнено условие  $(TX)_2$ , то  $T$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$ , имеющий ЛНПО.

**Следствие.** Пусть  $X$  — ЭППС или ЭПАПС в  $H_1$ . Тогда:

- 1) если  $T$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$ , имеющий эффективно определяемый ЛНПО, то  $TX$  — ЭППС (соответственно, ЭПАПС) в  $H_2$ ;
- 2) если  $TX$  — ЭППС или ЭПАПС и выполняется условие  $(TX)_1$  (соответственно, условие  $(TX)_2$ ), то  $T$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$ , имеющий эффективно определяемый ЛНПО.

Теорема 3.5 доказывается точно так же, как и две предыдущие, с той только разницей, что вместо теоремы 3.1 нужно ссылаться на теорему 3.2.

**3.1.9.** Приведем довольно общий пример, в котором имеет место предположение в), сформулированное в начале п. 3.1.7.

Пусть выполнено условие а) п. 3.1.7 и пусть  $T$  — линейный оператор, действующий из  $H_1$  в  $H_2$  (в отличие от б) непрерывность  $T$  из  $H_1$  в  $H_2$  не предполагается). Пусть, далее,  $X = (x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  — некоторое счетное множество собственных элементов  $x_\alpha$  из  $H_1$  оператора  $T$  с попарно различными собственными значениями:  $Tx_\alpha = \lambda_\alpha x_\alpha$ ,  $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$  при  $\alpha \neq \beta$  (ясно, что если  $\lambda_\alpha \neq 0$ , то  $x_\alpha \in H_1 \cap H_2$ ).

Покажем, что в данной ситуации любая конечная подсистема  $X$  линейно независима в  $H_1$ . Доказательство проведем методом полной математической индукции. Так как по определению собственный элемент оператора  $T$  отличен от нулевого, то при  $n = 1$  нужное утверждение верно. Допустим теперь, что любая совокупность  $n$  элементов  $x_{\alpha_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , из  $X$  линейно независима в  $H_1$ , и докажем, что произвольная система  $(x_{\alpha_j})_{j=1}^{n+1}$  элементов из  $X$ , где  $\alpha_{n+1} \in \Omega$ , также линейно независима в  $H_1$ . Рассуждая от противного, предположим, что система вида

$$(x_{\alpha_j} : x_{\alpha_j} \in X, \alpha_j \in \Omega, j = 1, 2, \dots, n+1)$$

линейно зависима в  $H_1$ , т. е.

$$\exists \{c_j\}_{j=1}^{n+1} : \sum_{j=1}^{n+1} |c_j| > 0, \sum_{j=1}^{n+1} c_j x_{\alpha_j} = 0. \quad (3.8)$$

Применяя к равенству (3.8) линейный оператор  $T$ , получим

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_j \lambda_{\alpha_j} x_{\alpha_j} = 0. \quad (3.9)$$

Пусть  $k_0 \leq k \leq n+1$ ,  $k_0 = \min\{m : 1 \leq m \leq n+1, c_m \neq 0\}$ . Вычитая из равенства (3.9) предыдущее, предварительно умноженное на  $\lambda_{\alpha_{k_0}}$ , находим, что  $\sum_{k=k_0+1}^{n+1} c_k (\lambda_{\alpha_k} - \lambda_{\alpha_{k_0}}) x_{\alpha_k} = 0$ .

В силу исходного предположения математической индукции система  $\{x_{\alpha_k} : 1 \leq k \leq n+1, k \neq k_0\}$  линейно независима в  $H_1$ . Поэтому

$$c_k (\lambda_{\alpha_k} - \lambda_{\alpha_{k_0}}) = 0, \quad k_0 + 1 \leq k \leq n+1.$$

Так как  $\lambda_{\alpha_k} \neq \lambda_{\alpha_{k_0}}$  при  $k \neq k_0$ , то из последних соотношений следует, что  $c_k = 0$ ,  $1 \leq k \leq n+1$ ,  $k \neq k_0$ . Но тогда равенство (3.8) примет такой вид:

$$c_{k_0} x_{\alpha_{k_0}} = 0, \quad c_{k_0} \neq 0.$$

Следовательно,  $x_{\alpha_{k_0}} = 0$ , что невозможно. Этим доказательство по индукции завершается.

Заметим еще, что если  $\lambda_\alpha \neq 0$  для любого  $\alpha \in \Omega$ , то в предположениях данного пункта любая конечная совокупность элементов из  $X$  линейно независима в  $H_1$ , а из  $TX := (\lambda_\alpha x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  — в  $H_2$ . Это означает, что каждая конечная подсистема из  $X$  линейно независима и в  $H_1$ , и в  $H_2$ .

Пожалуй, наиболее интересным для нас является тот частный случай описанной ситуации, когда при  $j = 1, 2$   $H_j$  — ПОЛВП функций от  $p$  (вещественных или комплексных) переменных,  $T$  — оператор свертки:

$$T(\exp\langle \lambda, z \rangle_p) = a(\lambda) \exp\langle \lambda, z \rangle_p; \quad \lambda, z \in \Phi, \quad \Phi = \mathbb{R}^p \text{ или } \mathbb{C}^p.$$

Пусть для любого  $\lambda \in \Omega \subseteq \Phi$

$$\exp\langle \lambda, z \rangle_p \in H_1 \cap H_2; \quad a(\lambda_1) \neq a(\lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \Omega, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Пусть еще оператор  $T$  действует из  $H_1$  в  $H_2$ . Тогда по доказанному любая конечная совокупность элементов системы  $\{\exp\langle \lambda, z \rangle_p\}_{\lambda \in \Omega}$  линейно независима и в  $H_1$ , и в  $H_2$ .

**3.1.10.** Результаты о линейных преобразованиях  $A$ -ПС, изложенные в данном разделе, применяются в дальнейшем, как правило, в случаях, когда  $H_j$  — пространство Фреше ( $j = 1, 2$ ). Однако, в комплексном анализе и теории дифференциальных уравнений (в обычных и, особенно, в частных производных) часто встречаются функциональные ЛВП с индуктивной топологией  $E, \mu = \varinjlim_n E_n, \mu_n$ .

Сложность «работы» с такими пространствами объясняется, прежде всего тем, что нет достаточно простого способа выражения преднорм, определяющих индуктивную топологию  $\mu$  в  $E$ , через преднормы, задающие топологию  $\mu_n$  в  $E_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Опишем кратко довольно общие классы А-ПС в индуктивных пределах  $E$  ПОЛВП  $E_n$ . Пусть  $x_\alpha \neq 0$  и  $x_\alpha \in E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$  при любом  $\alpha \in \Omega$ . Введем для любого  $n \geq 1$  векторное пространство  $A_1(X, E_n)$  всех тех числовых семейств  $\{d_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ , для которых в  $E_n, \mu_n$  существует предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_k} d_\alpha x_\alpha$ , и определим в нем топологию  $\tau_1^{(n)}$  набором преднорм

$$q_p^X(d) = \sup_{k \geq 1} p\left(\sum_{\alpha \in \omega_k} x_\alpha d_\alpha\right),$$

где  $\{p\} = P^{(n)}$  — набор преднорм, определяющий топологию  $\mu_n$  в  $E_n$ . Положим  $A_1^{\text{ind}}(X, E), \tau_1^{\text{ind}} := \varinjlim_n A_1(X, E_n), \tau_1^{(n)}$ .

Так как  $A_1(X, E_n), \tau_1^{(n)} \hookrightarrow A_1(X, E), \tau_1$  при всех  $n \geq 1$ , то

$$A_1^{\text{ind}}(X, E), \tau_1^{\text{ind}} \hookrightarrow A_1(X, E), \tau_1.$$

Здесь, как раньше,  $A_1(X, E)$  — пространство всех числовых семейств  $(d_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  таких, что в  $E, \mu$  существует предел  $\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_l} d_\alpha x_\alpha$ , и с топологией  $\tau_1$ , определяемой набором преднорм

$$q_p^X(d) = \sup_{l \geq 1} p\left(\sum_{\alpha \in \omega_l} d_\alpha x_\alpha\right),$$

где  $\{p\} = P$  — набор непрерывных преднорм, определяющий исходную индуктивную топологию  $\mu$  в  $E$ . При этом пространство  $A_1^{\text{ind}}(X, E), \tau_1^{\text{ind}}$  содержит все орты  $e_{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \Omega$ , и  $d_\alpha \in (A_1^{\text{ind}}(X, E))'$  при любом  $\alpha$  из  $\Omega$ . Таким образом, в качестве пространства  $A, \tau$  можно взять  $A_1^{\text{ind}}(X, E), \tau_1^{\text{ind}}$ .

Пусть теперь  $A_0(X, E_n)$  — подпространство  $A_1(X, E_n)$  с топологией  $\tau_{(n)}$  такой, что

$$\begin{aligned} A_0(X, E_n), \tau_{(n)} &\hookrightarrow A_0(X, E_{n+1}), \tau_{(n+1)} \hookrightarrow \\ &\hookrightarrow A_1^{\text{ind}}(X, E), \tau_1^{\text{ind}} \hookrightarrow A_1(X, E), \tau_1. \end{aligned}$$

Положим  $A_0^{\text{ind}}(X, E), \hat{\tau} := \varinjlim A_0(X, E_n), \tau_{(n)}$ .



Тогда  $A_0^{\text{ind}}(X, E), \hat{\tau} \hookrightarrow A_1(X, E), \tau_1$  и в качестве  $A, \tau$  можно взять пространство  $A_0^{\text{ind}}(X, E), \hat{\tau}$ . В частности, если для любого  $n \geq 1$  положить

$$A_0(X, E_n) = A_2(X, E_n), \tau_2,$$

то  $A, \tau = A_2^{\text{ind}}(X, E), \hat{\tau}_2 = \varinjlim_n A_2(X, E_n), \tau_2^{(n)}$ .

Если  $X = A_1^{\text{ind}}(X, E)$ -ПС или  $A_2^{\text{ind}}(X, E)$ -ПС в  $E = \varinjlim_n E_n$ , то такую систему можно назвать индуктивно представляющей системой (ИПС) в  $E$  или, соответственно, индуктивно абсолютно представляющей системой (ИАПС) в  $E$ . К описанным в данном пункте семействам  $X$  элементов из индуктивного предела  $E = \varinjlim_n E_n$  применимы результаты о линейных преобразованиях  $A$ -ПС и, в частности, теоремы 3.3 и 3.4.

Приведем еще один способ образования индуктивных ПС. Пусть, как и раньше, при всех  $n \geq 1$   $A_0(X, E_n)$  — подпространство  $A_1(X, E)$  с топологией  $\tau_{(n)}$ , удовлетворяющей указанным в этом пункте условиям непрерывного вложения. Предположим, далее, что при каждом  $n \geq 1$   $X = A_0(X, E_n)$ -ПС в  $E_n, \mu_n$ . В этом случае соответствующий оператор представления будет эпиморфизмом  $A_0(X, E_n), \tau_{(n)}$  на  $E_n, \mu_n$  для всех  $n \geq 1$ . Но тогда этот оператор — подавно эпиморфизм  $A_0^{\text{ind}}(X, E), \hat{\tau}$  на  $E = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} E_n, \mu_n$ . Следовательно,  $X$  является  $A_0^{\text{ind}}(X, E), \hat{\tau}$ -ПС в  $E$ . Назовем такую систему сильно индуктивно  $A$ -представляющей в  $E$ , где  $A = A_0^{\text{ind}}(X, E), \hat{\tau}$ .

В частности,  $X$  — сильно индуктивно представляющая система (сокращенно, СИПС) в  $E$ , если  $X$  — ПС в любом  $E_n, \mu_n, n \geq 1$ , и  $X$  — сильно индуктивно абсолютно представляющая система (СИАПС) в  $E$ , когда  $X$  — АПС в  $E_n, \mu_n$  для любого  $n \geq 1$ .

Очевидно, что каждая сильно индуктивно  $A$ -представляющая система в  $E$  тем более будет индуктивной  $A$ -ПС в  $E$ , причем координатные пространства этих двух классов ПС — одни и те же (и совпадают с  $A := A_0^{\text{ind}}(X, E), \hat{\tau}$ ).

Если обратиться к «модельному» случаю  $\Omega = \mathbb{N}, \omega_k = (1, 2, \dots, k), k \in \mathbb{N}$ , то, как легко убедиться, если  $E = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} E_n$  — внутренний индуктивный предел ПОЛВП  $E_n$ , обладающий свойством  $(Y)$ , то каждая ИПС в  $E$  будет СИПС. Если же  $E$  обладает свойством  $(Y_0)$ , то совпадают классы ИАПС и СИАПС в  $E$  (свойства  $(Y)$  и  $(Y_0)$  уже встречались в разделе 2.3).

Заметим, что ранее классы СИПС и СИАПС исследовались (под названием, соответственно, индуктивно представляющих и индук-

тивно абсолютно представляющих систем) первоначально в работах автора (см., например, [37, § 1, пп. 2–4, §§ 4, 5; 47, гл. 1, п. 9]), а в последующем — и его учеников (А. В. Абанин, С. Н. Мелихов и др.).

**3.1.11.** В заключение этого раздела отметим, что понятие представляющей системы (ПС) введено впервые, по-видимому, А. А. Талаляном [130] для пространств Фреше вещественнозначных функций, определенных на каком-либо промежутке  $\mathbb{R}$ . Класс АПС в произвольном ПОЛВП  $H$  был рассмотрен автором в его статьях [37, 38]. Следует заметить, что АПС в некоторых конкретных функциональных пространствах встречались и ранее (например, в «троественной» работе [150] обстоятельно исследованы АПС экспонент  $(e^{\lambda_k z})_{k=1}^{\infty}$  с ограниченными в совокупности показателями  $\lambda_k$  в некотором  $B$ -пространстве целых функций экспоненциального типа) (более подробно об этом сказано ниже, в п. 5.4.7).

Наконец, общее определение  $A$ -ПС было дано в статье автора [39]. К настоящему времени опубликовано довольно много работ, изучались различные свойства ПС и (особенно) АПС и рассматривались некоторые их приложения в анализе и теории дифференциальных уравнений. Однако, публикаций (кроме исходной [39]) по общим  $A$ -ПС в литературе обнаружить не удалось<sup>1</sup>. В настоящей монографии этот пробел частично восполняется.

Некоторые результаты данного раздела опубликованы ранее (частично в менее общей форме) в ряде работ автора (см., например, [78]).

## 3.2. Обобщенный ряд Фурье в пространстве $L_p(Q)$

**3.2.1.** Рассмотрим вначале пример, в котором  $m \geq 1$  — натуральное число,  $Q_2 = Q$  — компакт в  $\mathbb{R}^m$ , являющийся собственным подмножеством некоторого прямоугольного параллелепипеда  $Q_1$  в  $\mathbb{R}^m$ ,

$$Q_1 = D_{a,b} := \{x = (x_1, \dots, x_m) : a_k \leq x_k \leq b_k, \ k = 1, 2, \dots, m\},$$

где  $-\infty < a_k < b_k < +\infty$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Пусть, далее,  $p > 1$  и для любого измеримого ограниченного множества  $E$  в пространстве  $\mathbb{R}^m$

<sup>1</sup>По завершении работы над книгой была опубликована следующая статья: Коробейник Ю. Ф. Об  $A$ -представляющих системах // Владикавказ. мат. журн.— Владикавказ, 2009.—Т. 11, вып. 1.—С. 43–53.

$L_p(E)$  — банахово пространство измеримых на  $E$  функций  $v(x)$  таких, что

$$\|v\|_{L_p(E)} := \left( \int_E |v(t)|^p dt \right)^{1/p} < +\infty.$$

Для любого натурального  $N \geq 0$  положим  $\Omega = \mathbb{N}_1^m$ ,

$$\omega_j = \{k \in \mathbb{N}_1^m : 0 \leq |k|_m \leq j\}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\mathcal{E}_N := \left\{ \exp 2\pi i \left\langle k, \frac{x}{b-a} \right\rangle_m \right\}_{|k|_m=N}^\infty,$$

где  $\mathbb{N}_1 := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ,  $|k|_m = \sum_{s=1}^m |k_s|$ ,

$$\left\langle k, \frac{x}{b-a} \right\rangle_m := \sum_{l=1}^m k_l \frac{x_l}{(b_l - a_l)} \quad \forall k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}_1^m.$$

Всюду далее в этом разделе  $\mathcal{E}_N$  называется обобщенной системой Фурье, а ряд по  $\mathcal{E}_N$  — обобщенным рядом Фурье в  $L_p(Q)$ .

Пусть для любого  $k \in \mathbb{N}_1^m$   $e_k(x) := \exp 2\pi i \left\langle k, \frac{x}{b-a} \right\rangle_m$ .

Как хорошо известно,  $\mathcal{E}_0$  — базис Шаудера в  $L_p(D_{a,b})$  (при  $m = 1$  это показано, например, в монографии [11, с. 594]; при  $m > 1$  рассуждения аналогичны). Поэтому каждая функция  $y$  из  $L_p(D_{a,b})$  представляется единственным образом в виде  $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^y(x)$ , где

$$S_n^y(x) := \sum_{|k|_m=0}^n y_k e_k(x),$$

$$y_k = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} y(t) e^{-2\pi i \left\langle k, \frac{t}{b-a} \right\rangle_m} dt,$$

а сходимость рассматривается в метрике  $L_p(D_{a,b})$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y - S_n^y\|_{L_p(D_{a,b})} = 0.$$

Введем в векторном пространстве  $A_1 = A_1(\mathcal{E}_0, L_p(D_{a,b}))$  всех мультипоследовательностей  $\{d_k\}_{|k|_m=0}^\infty$  таких, что в  $L_p(D_{a,b})$  существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k|_m=0}^n d_k e_k(x)$ , норму  $|d|_{A_1} = \sup_{n \geq 0} \left\| \sum_{|k|_m=0}^n d_k e_k(x) \right\|_{L_p(D_{a,b})}$ .

Согласно п. 3.1.1,  $A_1$  —  $B$ -пространство.

Обозначим символом  $L^{\mathcal{E}_0}$  ОП, действующий из  $A_1$  в  $L_p(D_{a,b})$  по правилу

$$\forall d \in A_1 \rightarrow L^{\mathcal{E}_0}d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{|k|_m=0}^n d_k e_k(x) \right) \in L_p(D_{a,b}).$$

Ясно, что

$$\|L^{\mathcal{E}_0}d\|_{L_p(D_{a,b})} \leq \sup_{n \geq 0} \left\| \sum_{|k|_m=0}^n d_k e_k(x) \right\|_{L_p(D_{a,b})} = |d|_{A_1} \quad \forall d \in A_1,$$

и  $L^{\mathcal{E}_0}$  — линейный непрерывный оператор из  $A_1$  в  $L_p(D_{a,b})$ . Так как  $\mathcal{E}_0$  — базис в  $L_p(D_{a,b})$ , то  $L^{\mathcal{E}_0}$  — сюръективное и инъективное непрерывное линейное отображение  $B$ -пространства  $A_1$  на  $B$ -пространство  $L_p(D_{a,b})$ . Поэтому  $L^{\mathcal{E}_0}$  — (топологический) изоморфизм  $A_1$  на  $L_p(D_{a,b})$  и, следовательно,  $L^{\mathcal{E}_0}$  имеет линейный непрерывный обратный оператор  $M_0$ . Как известно, оператор  $M_0$  определяется эффективно соотношениями

$$(M_0 y)_k = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} y(t) e^{-2\pi i \langle k, \frac{t}{b-a} \rangle_m} dt$$

при всех  $y \in L_p(D_{a,b})$  и  $k \in \mathbb{N}_1^m$ .

Построим правый обратный оператор  $M_{1,2}$  к оператору  $T_{1,2}$  «сужения с  $D_{a,b}$  на  $Q$ », положив для любого  $x \in H_2 = L_p(Q)$

$$(M_{1,2}x)(t) = \begin{cases} x(t), & t \in Q, \\ 0, & t \in D_{a,b} \setminus Q. \end{cases}$$

Ясно, что оператор «подъема»  $M_{1,2}$  — линейный непрерывный оператор из  $H_2$  в  $H_1$ , причем  $\|x\|_{L_p(Q)} = \|M_{1,2}x\|_{L_p(D_{a,b})}$  для любого  $x \in H_2$ . При этом  $M_{1,2}$  — правый обратный для оператора  $T_{1,2}$ , определяемый эффективно.

По следствию теоремы 3.4 система  $T_{1,2}X = \{e_k(x)|_Q\}_{|k|_m=0}^\infty$  является ЭПА<sub>1</sub>-ПС в  $H_2 = L_p(Q)$ , где  $A_1 = A_1(\mathcal{E}_0, L_p(D_{a,b}))$ .

**3.2.2.** Пусть теперь  $N \geq 1$ . Тогда, как нетрудно убедиться, система  $\mathcal{E}_N$  является базисом (Шаудера) в  $B$ -пространстве

$$L_p^N(D_{a,b}) := \left\{ x(t) \in L_p(D_{a,b}) : \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} x(t) \exp \left[ -2\pi i \left\langle k, \frac{t}{b-a} \right\rangle_m \right] dt = 0, \quad |k|_m < N \right\}$$

с индуцированной из  $L_p(D_{a,b})$  топологией (нормой). Соответствующий оператор представления  $L^{\mathcal{E}_N}$ :

$$\begin{aligned} \forall d \in A_1^N &:= A_1(\mathcal{E}_N, L_p^N(D_{a,b})) \rightarrow \\ &\rightarrow L^{\mathcal{E}_N} d = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{|k|_m=N}^s d_k e_k(x) \in L_p^N(D_{a,b}) \end{aligned}$$

линеен, непрерывен (из  $A_1^N$  в  $L_p^N(D_{a,b})$ ) и имеет (также линейный и непрерывный) обратный  $M_N$ , определяемый эффективно соотношением:

$$\forall y \in L_p^N(D_{a,b}) \rightarrow \left\{ \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} y(t) e_k(-t) dt \right\}_{|k|_m=N}^{\infty} \in A_1^N.$$

Таким образом, при всех  $N \geq 1$   $\mathcal{E}_N$  — ЭПА $A_1^N$ -ПС в  $H_1 = L_p^N(D_{a,b})$  с  $A_1^N = A_1(\mathcal{E}_N, L_p^N(D_{a,b}))$ .

Построим оператор продолжения  $M_{1,2}$  из  $L_p(Q)$  в  $L_p^N(D_{a,b})$ . С этой целью положим

$$M_{1,2}y(t) \Big|_Q = y(t), \quad M_{1,2}y(t) \Big|_{D_{a,b} \setminus Q} = \sum_{|l|_m \leq N} b_l e_l(t) \quad \forall y \in L_p(Q),$$

где коэффициенты  $b_l$  определяются из соотношений

$$\int_Q y(t) e_k(-t) dt + \sum_{|l|_m \leq N} b_l \int_{D_{a,b} \setminus Q} e_l(t) e_k(-t) dt = 0, \quad |k|_m < N. \quad (3.10)$$

С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые при  $m = 1$  приводятся в п. 4.3.2, показываем, что система (3.10) при условии

$D_{a,b} \setminus Q \neq \emptyset$  имеет единственное конструктивно определяемое решение  $\{b_l\}_{|l|_m \leq N}$ .

Таким образом,  $T_{1,2}$  — эпиморфизм  $L_p(Q)$  на  $L_p^N(D_{a,b})$ , имеющий эффективно определяемый ЛНПО  $M_{1,2}$ . По той же теореме 3.4

$$T_{1,2}X = \left\{ e_k(x)|_Q \right\}_{|k|_m=N}^\infty - \text{ЭП } A_1^N\text{-ПС в } L_p(Q).$$

Заметим еще, что при  $N = 0$   $L_p^0(D_{a,b}) = L_p(D_{a,b})$ ; соответствующие этому случаю результаты приведены в предыдущем пункте.

**3.2.3.** Хорошо известно, что в пространстве  $L_p(D_{a,b})$  в силу равенств  $\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} 1 \cdot e_k(-t) dt = 0$ ,  $|k|_m > 0$ , система  $\mathcal{E}_1$  неполна. Подавно в этом же пространстве неполна система  $\mathcal{E}_N$  с  $N > 1$ .

Покажем, что при любом  $N \geq 1$   $\mathcal{E}_N$  не может быть базисом в  $L_p(Q)$ . Рассуждая от противного, допустим, что при некотором  $N_1 \geq 1$   $\mathcal{E}_{N_1}$  — базис в  $L_p(Q)$ . Как было выше доказано,  $\mathcal{E}_{N_1+1}$  — ЭПА $_{1,N_1+1}^{N_1+1}$ -ПС в  $L_p(Q)$ . В частности, если  $k_1 \in \mathbb{N}_1^m$  и  $|k_1|_m = N_1$ , то  $e_{k_1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,N_1+1}^{e_{k_1}}(x)$ , где сходимость понимается в метрике  $L_p(Q)$  и при  $n \geq p \geq 1$

$$S_{n,p}^{e_{k_1}}(z) := \sum_{|k|_n=p}^n d_k(e_{k_1})e_k(x).$$

Но тогда система  $\mathcal{E}_{N_1}$  не может быть базисом в  $L_p(Q)$  (нарушается свойство единственности).

Теперь можно сформулировать итоговый результат данного пункта.

**Теорема 3.6.** Пусть  $m \geq 1$ ,  $-\infty < a_l < b_l < +\infty$ ,  $l = 1, \dots, m$ , и  $Q$  — компакт, лежащий внутри прямоугольного параллелепипеда  $D_{a,b} := \{x \in \mathbb{R}^m : a_l \leq x_l \leq b_l, l = 1, \dots, m\}$ . Тогда при  $p \geq 1$ :

1.  $\mathcal{E}_0$  — базис Шаудера в  $L_p(D_{a,b})$ , но при всех  $N \geq 1$  система  $\mathcal{E}_N$  неполна в  $L_p(D_{a,b})$ .

2. При всех  $N \geq 0$   $\mathcal{E}_N$  — ЭПА $_1^N$ -ПС (но не базис) в  $L_p(Q)$ , где

$$A_1^N = A_1(\mathcal{E}_N, L_p^N(D_{a,b})).$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Утверждение 1 теоремы 3.6, конечно, хорошо известно и приведено для полноты изложения. Кроме того, сравнение

утверждений 1 и 2 показывает, что аппроксимационные свойства последовательности  $\mathcal{E}_N$  в пространствах  $L_p(D_{a,b})$  и  $L_p(Q)$  различны при любом  $N \geq 0$ , если компакт  $Q$  лежит (строго) внутри  $D_{a,b}$ .

**3.2.4.** В том случае, когда  $p = 2$ , пространство коэффициентов  $A_1^N = A_1(\mathcal{E}_1, L_2(D_{a,b}))$  допускает простое описание (оно будет использовано в разделе 3.3.4). Имеем при всех  $N \geq 0$ :

$$\begin{aligned} A_1^N &= \left\{ (c_k)_{|k|_m \geq N} : \sup_{s \geq N} \int_{D_{a,b}} \left| \sum_{n=N}^s \sum_{|\gamma|_m \leq n} c_\gamma e^{2\pi i \langle \gamma, \frac{t}{b-a} \rangle_m} \right|^2 dt < +\infty \right\} = \\ &= \left\{ (c_k)_{|k|_m \geq N} : \sup_{n \geq N} \sum_{N \leq |j|_m \leq n} |c_j|^2 < +\infty \right\} = \\ &= \left\{ (c_k)_{|k|_m \geq N} : \sum_{|\gamma|_m = N}^{\infty} |c_\gamma|^2 < +\infty \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что норма в  $B$ -пространстве  $A_1^N$  равна  $\|c\|_{A_1^N} = \alpha \left[ \sum_{|j|_m \geq N} |c_j|^2 \right]^{1/2}$  и  $A_1^N$  топологически изоморфно гильбертову пространству

$$l_{2,m}^N := \left\{ (c_k)_{|k|_m \geq N} : \sum_{|\gamma|_m = N}^{\infty} |c_\gamma|^2 < +\infty \right\}.$$

Как было показано выше,  $\mathcal{E}_N$  — ЭП  $l_{2,m}^N$ -ПС в  $L_2(Q)$  для любого  $N \geq 0$ . Отсюда следует, что любой элемент  $x$  из  $L_2(Q)$  можно представить в виде

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{N \leq |\gamma|_m \leq k} x_\gamma e_\gamma(x) \right)$$

(сходимость имеет место по норме  $L_2(Q)$ ), причем

$$\exists B < +\infty : \forall y \in L_2(Q)$$

$$\sum_{|\gamma|_m \geq N} |y_\gamma|^2 \leq B \int_Q |y(t)|^2 dt = B \int_Q \left| \sum_{|\gamma|_m \geq N} y_\gamma e_\gamma(t) \right|^2 dt =: B \cdot J_1.$$

Но  $J_1 \leq \int_{D_{a,b}} \left| \sum_{|\gamma|_m \geq N} y_\gamma e_\gamma(t) \right|^2 dt = d \cdot \sum_{|\gamma|_m \geq N} |y_\gamma|^2$ . Следовательно, существуют  $B < +\infty$  и  $d < +\infty$  такие, что

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty, (L_2(Q))} \left( \sum_{N \leq |\gamma|_m \leq k} x_\gamma e_\gamma(t) \right) \quad \forall x \in L_2(Q),$$

и

$$\sum_{|\gamma|_m \geq N} |x_\gamma|^2 \leq B \int_Q |x(t)|^2 dt \leq B \cdot \sum_{|\gamma|_m \geq N} |x_\gamma|^2.$$

### 3.3. Обобщенный ряд Фурье в $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$

**3.3.1.** В этом разделе будем считать, что  $p > 1$  и, ради простоты изложения,  $m = 1$ . В качестве пространства  $H_2$  возьмем  $B$ -пространство  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$  всех функций  $y(x)$ , абсолютно непрерывных на  $[-\pi, \pi]$  вместе со всеми своими производными до порядка  $n$  и с производной  $y^{(n+1)}(x)$  из  $L_p[-\pi, \pi]$ , с нормой  $\|y\|_{p,n}^{[-\pi,\pi]} := \max_{x \in [-\pi,\pi]} \left( \sum_{j=0}^n |y^{(j)}(x)| \right) + \|y^{(n+1)}(x)\|_{L_p[-\pi,\pi]}$ , где, как обычно,  $\|v(t)\|_{L_p[-\pi,\pi]} := \left( \int_{-\pi}^{\pi} |v(t)|^p dt \right)^{1/p}$ .

Под обобщенным рядом Фурье в  $W_p^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$  будем далее понимать любой ряд по системе  $E_\theta^N$ , где, как на с. 9 предисловия,  $E_\theta^N := (\exp ik\theta x)_{|k| \geq N}$  для любого  $N \in \mathbb{N}_0$ . В дальнейшем также будем использовать при  $\theta \in (0, 1)$  два замкнутых подпространства  $W_p^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$  с индуцированной из него нормой:

$$\begin{aligned} W_{p,0}^{n+1} \left[ -\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta} \right] &:= \\ &:= \left\{ y \in W_p^{n+1} \left[ -\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta} \right] : y^{(j)} \left( \frac{\pi}{\theta} \right) = y^{(j)} \left( -\frac{\pi}{\theta} \right), 0 \leq j \leq n \right\}; \\ W_{p,0}^{n+1,N} \left[ -\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta} \right] &:= \\ &:= \left\{ y \in W_{p,0}^{n+1} : \int_{-\frac{\pi}{\theta}}^{\frac{\pi}{\theta}} y(t) e^{-ik\theta t} dt = 0, |k| \leq N \right\}; \quad n \geq 0, N \geq 0. \end{aligned}$$

Чтобы применить здесь общие результаты, полученные в пунктах 3.1.4–3.1.7, необходимо прежде всего найти конструктивный метод продолжения любой функции  $y$  из  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$  до функции



$y_1$  из  $W_{p,0}^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ . С этой целью для произвольно взятой функции  $y$  из  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$  определим сначала функцию  $y_0(t)$ , равную  $P_1(t) := \sum_{s=0}^n \frac{y^{(s)}(-\pi)}{s!} (t + \pi)^s$  на  $[-\frac{\pi}{\theta}, -\pi]$ ,  $y(t)$  на  $[-\pi, \pi]$ , и  $P_2(t) := \sum_{s=0}^n \frac{y^{(s)}(\pi)}{s!} (t - \pi)^s$  на  $[\pi, \frac{\pi}{\theta}]$ . Функция  $y_0(t)$  принадлежит  $W_p^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ , причем оператор  $P_0 y = y_0$  линеен и непрерывен из  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$  в  $W_p^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ . Как следует из доказательства теоремы 1.4.1 в [138], можно построить функцию  $v_0(x)$  из пространства  $C_0^\infty(-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta})$  бесконечно дифференцируемых на  $(-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta})$  функций с компактным носителем в  $(-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta})$  такую, что  $v_0(x) \equiv 1$  на  $[-\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon]$ ,  $v_0(x) \equiv 0$  в  $(-\frac{\pi}{\theta}, -\pi - 2\varepsilon) \cup (\pi + 2\varepsilon, \frac{\pi}{\theta})$ , где  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{3}(1/\theta - 1)$ .

Очевидно,  $v_0(x) \in C_0^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ . Если  $y_1(x) = v_0(x)y_0(x)$ , то  $y_1 \in W_{p,0}^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$  и оператор  $P y = v_0(x)y_0(x) = v_0 \cdot P_0 y$  линеен и непрерывен из  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$  в  $W_{p,0}^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ , т. е. существует  $d < \infty$  такое, что для всех  $y \in W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$

$$\|P y\|_{p,n}^{[-\pi/\theta, \pi/\theta]} \leq d \|y\|_{p,n}^{[-\pi, \pi]}.$$

Как нетрудно убедиться, оператор  $P$ , определенный эффективно, является ЛНПО для оператора сужения

$$\Pi : \forall g \in W_{p,0}^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}] \rightarrow \Pi g = g|_{[-\pi, \pi]} \in W_p^{n+1}[-\pi, \pi].$$

Далее,  $E_\theta^0 := (\exp il\theta t)_{|l| \geq 0} - A_0$ -базис в  $B$ -пространстве  $W_{p,0}^{n+1}[Q_1]$ , где  $Q_1 = [-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ , и  $A_0$  — банахово пространство с нормой

$$\begin{aligned} \|c\|_p^0 = & \sup_{|m| \geq 0} \left\{ \max |S_m^{(j)}(x)| : x \in Q_1, 0 \leq j \leq n \right\} + \\ & + \left[ \int_{-\pi/\theta}^{\pi/\theta} |S_m^{(n+1)}(x)|^p dx \right]^{1/p}, \end{aligned}$$

а  $S_m(x) = \sum_{l=-m}^m c_l \exp il\theta x$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ;  $(c_l)_{|l| \geq 0} \in A_0$ . В данном случае

$$\Omega = (0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \omega_k = (l : 0 \leq |l| \leq k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Как и в случае пространства  $L_p(D_{a,b})$ , обратный оператор  $L_r^{-1} = L^{-1}$  для ОП  $L : A_0 \rightarrow H_1 = W_{p,0}^{n+1}(Q_1)$  определяется эффективно:

$$L^{-1}g = \left\{ \frac{\theta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\theta}}^{\frac{\pi}{\theta}} g(x) e^{-il\theta x} dx \right\}_{|l| \geq 0} \quad \forall g \in W_{p,0}^{n+1}(Q_1).$$

По следствию теоремы 3.4 при любом  $\theta \in (0, 1)$   $E_\theta^0$  — ЭП  $A_0$ -ПС в  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$ .

Так как  $\int_{-\frac{\pi}{\theta}}^{\frac{\pi}{\theta}} 1 \cdot e^{l\pi i \theta x} dx = 0$  для всех  $l$  таких, что  $|l| \geq 1$ , и  $\phi_g(y) := \int_{-\frac{\pi}{\theta}}^{\frac{\pi}{\theta}} g(t) y(t) dt$  — линейный непрерывный функционал на  $W_{p,0}^{n+1}(Q_1)$  при любой фиксированной функции  $g(t)$  из  $C(Q_1)$ , то по теореме Банаха система  $E_\theta^1 = \{\exp e^{il\theta x}\}_{|l| \geq 1}$  (и подавно  $E_\theta^N = \{\exp e^{il\theta x}\}_{|l| \geq N}$ ,  $N \geq 1$ ) неполна в  $W_{p,0}^{n+1}(Q_1)$ . Таким образом, справедлива

**Теорема 3.7.** Пусть  $p \geq 1$ ,  $n \geq 0$ ,  $\theta \in (0, 1)$ . Тогда:

1.  $E_\theta^0$  —  $A_0$ -базис в  $W_p^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ ;
2. При любом  $N \geq 1$  система  $E_\theta^N$  неполна в  $W_p^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ ;
3.  $E_\theta^0$  — ЭП  $A_0$ -ПС в  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$ .

**3.3.2.** Зафиксируем  $n \geq 0$ ,  $N \geq 0$ ,  $\theta \in (0, 1)$  и продолжим функцию  $y$  из  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$  до функции  $y_2$  из  $W_{p,0}^{n+1,N}([-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}])$ . Пусть, как в 3.3.1,  $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{3}(1/\theta - 1))$  и  $y_1 := Py = v_0 P_0 y \in W_{p,0}^{n+1}([-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}])$ . Положим

$$y_2(t) = \begin{cases} \left\{ \left[ t^2 - \left( \frac{\pi}{\theta} \right)^2 \right] (t^2 - (\pi + 2\varepsilon)^2) \right\}^{n+1} \sum_{l=-N}^N c_l e^{il\theta t} & \text{на } [-\frac{\pi}{\theta}, -\pi - 2\varepsilon] \\ \left\{ \left[ t^2 - \left( \frac{\pi}{\theta} \right)^2 \right] (t^2 - (\pi + 2\varepsilon)^2) \right\}^{n+1} \sum_{l=-N}^N c_l e^{il\theta t} & \text{на } [\pi + 2\varepsilon, \frac{\pi}{\theta}] \\ y_1(t) & \text{на } [-\pi - 2\varepsilon, \pi + 2\varepsilon]. \end{cases}$$

Ясно, что  $y_2 \in W_{p,0}^{n+1}([-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}])$ . Теперь остается подобрать числа  $\{c_l\}_{0 \leq |l| \leq N}$  так, чтобы  $\int_{-\frac{\pi}{\theta}}^{\frac{\pi}{\theta}} y_2(t) e^{-is\theta t} dt = 0$ ,  $|s| \leq N$ , т. е. чтобы

$$\sum_{l=-N}^N c_l \int_{-\frac{\pi}{\theta}}^{\frac{\pi}{\theta}} f_l(t) e^{-ij\theta t} dt + \int_{-\pi-2\varepsilon}^{\pi+2\varepsilon} y_1(t) e^{-ij\theta t} dt = 0, \quad 0 \leq |j| \leq N, \quad (3.11)$$

где  $f_l(t) = 0$  на сегментах  $[-\frac{\pi}{\theta}, -\pi - 2\varepsilon]$  и  $[\pi + 2\varepsilon, \frac{\pi}{\theta}]$  и

$$f_l(t) = \left\{ \left[ t^2 - \left( \frac{\pi}{\theta} \right)^2 \right] [t^2 - (\pi + 2\varepsilon)^2] \right\}^{n+1} e^{i\theta l t} = g_n(t) e^{i\theta l t},$$

когда  $t \in [-\pi - 2\varepsilon, \pi + 2\varepsilon]$ . Систему уравнений (3.11) с подлежащими определению числами  $\{c_k\}_{|k| \leq N}$  можно переписать так:

$$\sum_{k=-N}^N d_{j-k} c_k = b_j, \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm N,$$

где

$$b_j = - \int_{-\pi-2\varepsilon}^{\pi+2\varepsilon} y_1(t) e^{-ij\theta t} dt, \quad d_s = \int_{-\pi-2\varepsilon}^{\pi+2\varepsilon} g_n(t) e^{-is\theta t} dt.$$

Если еще положить

$$l = k + N, \quad s = j + N, \quad b_j = b_{s-N} =: B_s, \quad c_k = c_{l-N} =: x_l,$$

то мы приходим к системе

$$\sum_{l=0}^{2N} d_{s-l} x_l = B_s, \quad s = 0, 1, \dots, 2N. \quad (3.12)$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} d_0 & d_{-1} & \dots & d_{-2N} \\ d_1 & d_0 & \dots & d_{-2N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{2N} & d_{2N-1} & \dots & d_0 \end{vmatrix}$$

положителен, так как он является теплицевским определителем эрмитовой (теплицевой) формы [18, §§ 1.10, 1.11, гл. 1]

$$T_{2N} := \int_{-\pi/\theta}^{\pi/\theta} \left| u_0 + u_1 e^{i\theta t} + \dots + u_{2N} e^{i2N\theta t} \right|^2 \hat{g}_n(t) dt = \sum_{\nu, \mu=0}^{2N} d_{\nu-\mu} u_\nu \cdot \bar{u}_\mu;$$

здесь

$$\hat{g}_n(t) = \begin{cases} g_n(t) & \text{на } [-\pi - 2\varepsilon, \pi + 2\varepsilon], \\ 0 & \text{на } [-\pi/\theta, \pi/\theta] \setminus [-\pi - 2\varepsilon, \pi + 2\varepsilon]. \end{cases}$$

В свою очередь (см. там же) форма  $T_{2N}$  положительно определена в силу того, что функция  $\int_{-\pi/\theta}^t \hat{g}_n(\tau) d\tau$  принимает бесконечное множество значений на  $[\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ . Следовательно, система (3.12) имеет единственное решение  $(x_l)_{l=0}^{2N}$ , порождающее нужную нам функцию  $y_2$  из  $W_{p,0}^{n+1,N}(Q_1)$ .

Учитывая, что такое решение записывается по известным формулам Крамера, убеждаемся в том, что  $y_2 = T_\theta(y)$ , где  $T_\theta$  — линейный непрерывный оператор из  $W_p^{n+1}([-\pi, \pi])$  в  $W_{p,0}^{n+1,N}(Q_1)$ . Далее, как нетрудно проверить,  $E_\theta^{N+1}$  —  $A_{(N)}$ -базис в  $W_{p,0}^{n+1,N}(Q_1)$ , где  $A_{(N)}$  —  $B$ -пространство числовых последовательностей  $d = (d_l)_{N < |l| < \infty}$  таких, что

$$\|d\|_N := \sup_{|m| > N} \left\{ \max |S_{m,N}^{(j)}(x)| : x \in Q_1, 0 \leq j \leq n \right\} + \left( \int_{-\pi/\theta}^{\pi/\theta} |S_{m,N}^{(n+1)}(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

и

$$S_{m,N}(x) := \sum_{N < |l| \leq m} d_l \exp il\theta x, \quad m = N+1, N+2, \dots$$

По следствию все той же теоремы 3.4, при любом  $N \geq 0$

$$E_\theta^{N+1} — \text{ЭП } A_{(N)}\text{-ПС в } W_p^{n+1}[-\pi, \pi].$$

Применяя такие же рассуждения, как в конце 3.2.2, показываем, что система  $E_\theta^N$  не может быть базисом в  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$  при всех  $n \geq 0$ ,  $\theta \in (0, 1)$  и  $N \geq 0$ . Таким образом, справедлива

**Теорема 3.8.** Пусть  $p > 1$ ,  $n \geq 0$ ,  $\theta \in (0, 1)$ ,  $N \geq 0$ . Тогда:

1.  $E_\theta^{N+1}$  —  $A_{(N)}$ -базис в  $W_{p,0}^{n+1,N}(Q_1)$ ;
2.  $E_\theta^{N+1}$  — ЭП  $A_{(N)}$ -ПС в  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$  (но не базис);
3.  $E_\theta^0$  — ЭП  $A_0$ -ПС в  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$  (но не базис).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Отправляясь от результатов, полученных для системы (3.12) в ходе доказательства теоремы 3.8, и применяя принцип полной математической индукции, можно показать однозначную разрешимость системы (3.11), являющуюся многомерным аналогом системы (3.12). Этот факт был использован в п. 3.2.2.

**3.3.3.** Переходя к описанию в пространстве  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$  свойств системы  $E_\theta^N$ , когда  $N \geq 0$ ,  $\theta \geq 1$ ,  $p > 1$ , воспользуемся одним вспомогательным результатом из [71], который применим и к другим функциональным пространствам.

**Теорема 3.9.** Пусть  $E$  — линейное топологическое пространство определенных на  $[-\pi, \pi]$  функций с такими свойствами:

- 1)  $\exp i\mu t \in E$  для любого  $\mu \in \mathbb{R}$ ;
- 2) при любом  $t_0 \in [-\pi, \pi]$  множество  $v(t_0, \varepsilon) := \{y(t) \in E : |y(t_0)| < \varepsilon\}$  — окрестность нуля в  $E$  для каждого  $\varepsilon > 0$ ;
- 3) для любых различных точек  $t_1, t_2$  из  $[-\pi, \pi]$  найдется функция  $w(t)$  из  $E$ , для которой  $w(t_1) \neq w(t_2)$  (про такую пару точек говорят, что она разделяет  $E$ ; в этой терминологии свойство 3) означает, что любая пара различных точек из  $[-\pi, \pi]$  разделяет  $E$ ).

Тогда система  $E_\theta^0$  неполна в  $E$  при любом  $\theta \geq 1$ .

< Пусть  $t_0 \in [-\pi, \pi]$  и  $t_\theta := t_0 + \frac{2\pi}{\theta} \in [-\pi, \pi]$ . В силу свойства 3) в  $E$  найдется функция  $w$ , для которой  $|w(t_0) - w(t_\theta)| = d > 0$ . Так как  $V_0 := \{y \in E : |y(t_0)| < \frac{d}{4}\}$  и  $V_1 := \{y \in E : |y(t_\theta)| < \frac{d}{4}\}$  — окрестности нуля в  $E$ , то найдется окрестность нуля  $V$  такая, что  $V \subset V_0 \cap V_1$ . Допустим, рассуждая от противного, что система  $E_\theta^0$  полна в  $E$ . Тогда найдется линейный агрегат  $A(t)$  из множества  $\text{span } E_\theta^0$  всех конечных линейных комбинаций функций  $\exp i\theta kt$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$ , такой, что  $w(t) - A(t) \in V$ . Отсюда следует, что  $|w(t_0) - A(t_0)| < \frac{d}{4}$  и  $|w(t_\theta) - A(t_\theta)| < \frac{d}{4}$ . Но тогда

$$\begin{aligned} d &= |w(t_0) - w(t_\theta)| = \\ &= |w(t_0) - A(t_0) - w(t_\theta) + A(t_\theta) - [A(t_\theta) - A(t_0)]| = \\ &= |w(t_0) - A(t_0) - w(t_\theta) + A(t_\theta)| \leq \\ &\leq |w(t_0) - A(t_0)| + |w(t_\theta) - A(t_\theta)| < \frac{d}{2}, \end{aligned}$$

что невозможно, если  $d > 0$ .

Полученным противоречием и завершается доказательство. >

В частности, теорема 3.9 применима в случае, когда топология в  $E$  мажорирует топологию поточечной сходимости и в  $E$  имеется хотя бы одна функция, строго монотонная на  $[-\pi, \pi]$ .

Ясно, что пространство  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$  при любом  $n \geq 0$  обладает такими свойствами. Следовательно, система  $E_\theta^0$  (подавно  $E_\theta^m$  при

всех  $m \geq 1$ ) неполна в  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$  при любом  $\theta \geq 1$ . Теперь уже можно сформулировать итоговый результат данного раздела, характеризующий аппроксимационные свойства системы  $E_\theta^N$  в пространстве  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$  при всех  $N \geq 0$ .

**Теорема 3.10.** Пусть  $p > 1$ ,  $\theta > 0$ ,  $m \geq 0$ ,  $N \geq 0$ . Тогда:

- 1)  $E_\theta^0$  — ЭП  $A_0$ -ПС (но не базис) в  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$  при всех  $\theta \in (0, 1)$ ,  $n \geq 0$ ;
- 2)  $E_\theta^N$  — ЭП  $A_{(N-1)}$ -ПС (но не базис) в  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$  при всех  $\theta \in (0, 1)$ ,  $n \geq 0$ ,  $N \geq 1$ ;
- 3)  $E_\theta^N$  — неполная система в  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$  при всех  $\theta \geq 1$ ,  $n \geq 0$ ,  $N \geq 0$ .

**3.3.4.** Остановимся в заключение на одном важном частном случае, когда  $p = 2$ . В этом случае  $E_\theta^0$  — базис в  $W_{2,0}^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}; \frac{\pi}{\theta}]$ , и построенная выше функция  $y_1 = Py$  из  $W_{2,0}^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}; \frac{\pi}{\theta}]$ , являющаяся продолжением на  $[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$  функции  $y$  из  $W_2^{n+1}[-\pi; \pi]$ , разлагается единственным образом в сходящийся в  $W_{2,0}^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}; \frac{\pi}{\theta}]$  ряд Фурье по системе  $\{\exp il\theta t\}_{|l| \geq 0}$ :

$$y_1(t) = \sum_{|l| \geq 0} y_l \exp il\theta t,$$

где  $y_l = \frac{\theta}{2\pi} \int_{-\pi/\theta}^{\pi/\theta} y_1(x) e^{i\theta l x} dx$  при  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Как легко проверить, ряд Фурье для  $y_1(x)$  сходится в  $W_{2,0}^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}; \frac{\pi}{\theta}]$  или, что то же самое, в  $W_2^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}; \frac{\pi}{\theta}]$  тогда и только тогда, когда

$$\sum_{|l| \geq 0} |y_l|^2 |l|^{2n+2} < +\infty.$$

При этом для тех же  $l$   $y_l = (Sy_1)_l$ , где  $S$  — линейный непрерывный оператор, действующий из  $W_{2,0}^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}; \frac{\pi}{\theta}]$  в пространство

$$A_0 := A_1 \left( E_\theta^0; W_{2,0}^{n+1} \left[ -\frac{\pi}{\theta}; \frac{\pi}{\theta} \right] \right) = \left\{ (c_l)_{|l| \geq 0} : \sum_{|l| \geq 0} |c_l|^2 |l|^{2n+2} < \infty \right\}.$$

Следовательно,  $\|Sy_1\|_{A_0} \leq b_1 \|y_1\|_{W_{2,0}^{n+1}[-\frac{\pi}{\theta}; \frac{\pi}{\theta}]} \leq b \|y\|_{W_2^{n+1}[-\pi; \pi]}$  при любом  $y \in W_2^{n+1}[-\pi; \pi]$ , где  $b$  и  $b_1$  не зависят от  $y$  и  $y_1$ . При этом

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{|l| \geq 0} |y_l|^2 |l|^{2n+2} \right)^{1/2} \leq \|Sy_1\|_{A_0} = \\ & = \sup_{m \geq 0} \left\{ \left[ \int_{-\frac{\pi}{\theta}}^{\frac{\pi}{\theta}} \left| \sum_{|l|=0}^m y_l(l)^{n+1} e^{il\theta x} \right|^2 dx \right]^{1/2} + \max_{\substack{x \in [-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}], \\ 0 \leq j \leq n}} \left| \sum_{|l|=0}^m y_l(l)^j e^{il\theta x} \right| \right\}. \end{aligned}$$

Положив  $A_n^0 := \{d = (d_l)_{|l| \geq 0} : \|d\|_n^0 := (\sum_{|l| \geq 0} |d_l| |l|^{2n+2})^{1/2} < \infty\}$ , видим, что результат, полученный для  $E_\theta^0$  в конце п. 3.3.1, можно в случае  $p = 2$  уточнить следующим образом. Система  $E_\theta^0$  является ЭП  $A_n^0$ -ПС в  $W_2^{n+1}[-\pi; \pi]$  такой, что любую функцию  $y$  из  $W_2^{n+1}[-\pi; \pi]$  можно представить в виде сходящегося в  $W_2^{n+1}[-\pi; \pi]$  ряда  $y(x) = \sum_{|l| \geq 0} y_l \exp il\theta x$ , где  $y_l = \phi_l(y)$ ,  $\phi_l \in (W_2^{n+1}[-\pi; \pi])'$  при  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и

$$\left( \sum_{|l| \geq 0} |y_l|^2 |l|^{2n+2} \right)^{1/2} \leq b_0 \|y\|_{W_2^{n+1}[-\pi; \pi]}.$$

Пусть  $A_{n,N}^0 = \{d_l\}_{|l| \geq N} : \sum_{|l| \geq N} |d_l|^2 |l|^{2n+2} < +\infty\}$ . Применяя те же рассуждения, получим, что при всех  $\theta \in (0, 1)$  и  $N \geq 1$   $E_\theta^N$  — такая ЭП  $A_{n,N}^0$ -ПС в  $W_2^{n+1}[-\pi; \pi]$ , что любая функция  $y(x)$  из  $W_2^{n+1}[-\pi; \pi]$  представляется в виде сходящегося в  $W_2^{n+1}[-\pi; \pi]$  ряда  $y(x) = \sum_{|l| \geq N} y_l e^{il\theta x}$ , у которого  $y_l = \phi_l(y)$ ,  $\phi_l \in (W_2^{n+1}[-\pi; \pi])'$  при  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , и

$$\left[ \sum_{|l| \geq N} |y_l|^2 |l|^{2n+2} \right]^{1/2} \leq b_N \|y\|_{W_2^{n+1}[-\pi; \pi]}.$$

Заметим, что случай  $p = 2$  выгодно отличается от других  $p > 1$  благодаря известной теореме Фишера — Рисса или, попросту, справедливости равенства Парсеваля, позволяющего эффективно описать пространства коэффициентов базисных разложений (при  $N \geq 0$ ,

$n \geq 0$ )

$$A_1^{N_0} \left( E_\theta^N, L_2 \left[ -\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta} \right] \right) = \left\{ (d_l)_{|l| \geq N} : \sum_{|l| \geq N} |d_l|^2 < \infty \right\};$$

$$A_1^{N_0} \left( E_\theta^N, W_{2,0}^{n+1} \left[ -\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta} \right] \right) = \left\{ (d_l)_{|l| \geq N} : \sum_{|l| \geq N} |d_l|^2 |l|^{2n+2} < \infty \right\}.$$

### 3.4. $\theta$ -тригонометрические системы в пространствах гладких функций

**3.4.1.** В разделах 3.2 и 3.3 общие результаты, полученные в 3.1, были применены к исследованию аппроксимационных свойств  $\theta$ -тригонометрической системы, т. е. системы вида  $E_\theta^N := (\exp il\theta x)_{|l| \geq N}$  ( $N = 0, 1, \dots$ ), в банаховых пространствах  $L_p(Q)$  и  $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$ , где  $n \geq 0$ ,  $p > 1$ ,  $N \geq 0$ ,  $\theta > 0$ . Однако тем же способом можно получить аналогичные результаты и в других (не обязательно банаховых) пространствах. В качестве примера мы рассмотрим уже знакомое пространство Фреше  $C^\infty[a, b]$  функций  $y(x)$ , бесконечно дифференцируемых на  $[a, b]$ , с топологией, определяемой системой норм

$$\|y\|_m := \max_{0 \leq k \leq m} \max \left\{ |y^{(k)}(x)| : x \in [a, b] \right\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть  $\theta > 0$ ,  $[a, b] \subset (-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta})$  и  $y(x)$  — произвольно зафиксированная функция из  $C^\infty[a, b]$ . Как было показано в конце XIX века Э. Борелем [148], для любой точки  $x_0$  из  $\mathbb{R}$  и любой последовательности чисел  $(c_n)_{n=0}^\infty$  найдется функция  $v(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$  (т. е. бесконечно дифференцируемая на  $\mathbb{R}$  функция) такая, что  $v^{(n)}(x_0) = c_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$

Этот результат вытекает также в качестве частного случая из более общего, который будет получен ниже (теоремы 5.1 и 5.6 из раздела 5.2). Следовательно, найдутся функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  из  $C^\infty(\mathbb{R})$  такие, что

$$y_1^{(s)}(a) = y^{(s)}(a), \quad y_2^{(s)}(b) = y^{(s)}(b), \quad s \geq 0.$$

Положив функцию  $y_3(x)$  равной  $y_1(x)$  на  $(-\infty, a]$ ,  $y(x)$  — на  $[a, b]$  и  $y_2(x)$  — на  $[b, +\infty)$ , убедимся без труда, что  $y_3 \in C^\infty(-\infty, +\infty)$ . Выберем число  $\varepsilon > 0$  так, чтобы  $3\varepsilon < \min \left\{ a + \frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta} - b \right\}$ .



Используя, как в предыдущем разделе, теорему 1.4.1 из [138], найдем (эффективно) функцию  $v(x)$  из  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  такую, что  $v(x) \equiv 1$  на  $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$  и носитель  $v$  принадлежит отрезку  $[a - 2\varepsilon, b + 2\varepsilon] \subset (-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta})$ . Очевидно, что функция  $y_4(x) = v(x) \cdot y_3(x)$  бесконечно дифференцируема на отрезке  $[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ , причем  $y_4^{(n)}(-\frac{\pi}{\theta}) = y_4^{(n)}(\frac{\pi}{\theta}) = 0$  для любого  $n \geq 0$ .

Пусть  $W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$  — пространство Фреше всех функций  $x(t)$  из пространства  $C^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$  таких, что  $x^{(n)}(-\frac{\pi}{\theta}) = x^{(n)}(\frac{\pi}{\theta})$  при всех  $n \geq 0$ , с индуцированной из  $C^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$  топологией. Ясно, что оператор  $P$  умножения на  $v$ :  $Pu = v \cdot u$ ,  $u \in C^\infty[a, b]$ , является линейным оператором из  $C^\infty[a, b]$  в  $W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ . При этом  $P$  — правый обратный для оператора  $\Pi = T_{1,2}$  «сужения на  $[a, b]$ »:  $\Pi x = x|_{[a, b]}$  для любого  $x(t) \in W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ .

Заметим еще, что оператор  $\Pi$  непрерывен из  $W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$  в  $C^\infty[a, b]$ . Положим  $H_1 := W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ ,  $H_2 := C^\infty[a, b]$ ,  $Q_1 = [-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ ,  $Q_2 = [a, b]$ . Нетрудно проверить, что  $E_\theta^0$  — базис в  $W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ , и любую функцию  $x(t)$  из  $W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$  можно представить единственным образом в виде сходящегося в  $W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$  (т. е. в  $C^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ ) ряда

$$x(t) = \sum_{|l| \geq 0} x_l e^{il\theta t}, \quad x_l = \frac{\theta}{2\pi} \int_{-\pi/\theta}^{\pi/\theta} x(t) e^{-il\theta t} dt, \quad l = 0, \pm 1, \dots$$

При этом, так как пространство Фреше  $C^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$  ядро [123, теорема 6.2.1], а  $W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$  — его подпространство, то оно также ядро (см. там же, предложение 5.1.1). Тогда [123, теоремы 10.1.2, 10.2.1]  $E_\theta^0$  — абсолютный базис в  $W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ . Следовательно, для любой функции  $x(t)$  из  $W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$  ее  $\theta$ -ряд Фурье (ряд по  $\theta$ -тригонометрической системе  $E_\theta^0$ ) сходится абсолютно в  $W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ . Иначе говоря,

$$\{x_l\}_{|l| \geq 0} \in A_2 = \left\{ d = (d_l)_{|l| \geq 0} : \sum_{|l| \geq 0} |d_l| |l|^s < +\infty, \quad s = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

Нетрудно видеть, что ряд  $\sum_{|l| \geq 0} d_l e^{il\theta t}$  обладает описанным ранее свойством «заразительности» относительно абсолютной сходимости

(вследствие равенства  $|e^{il\theta t}| = 1$  при всех  $t \in \mathbb{R}$ ). Именно, равносильны такие утверждения:

1. Ряд  $\sum_{|l| \geq 0} d_l e^{il\theta t}$  сходится абсолютно в  $W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ .
2. Ряд  $\sum_{|l| \geq 0} d_l e^{il\theta t}$  сходится абсолютно в  $C^\infty[a, b]$ .
3.  $\sum_{|l| \geq 0} |d_l| |l|^s < \infty$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$

Поэтому  $E_\theta^0 := (e^{il\theta t})_{|l| \geq 0}$  —  $A_2$ -ПС в  $C^\infty[a, b]$  тогда и только тогда, когда, когда  $E_\theta^0$  — АПС в  $C^\infty[a, b]$ .

Из теоремы 3.1 получаем следующий результат.

**Теорема 3.11.** Система  $E_\theta^0$  при любом  $\theta$  из  $(0, +\infty)$  является  $A_2$ -ПС (т. е. АПС) в  $C^\infty[a, b]$ , если  $[a, b] \subset [-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Очевидно, что  $E_\theta^0$  — эффективный  $A_2$ -базис в пространстве  $W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ . Кроме того, функция  $v(x)$  из  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ , как следует из доказательства теоремы 1.4.1 из [138], может быть определена эффективно. Наконец (более подробно см. пп. 6.2.2 и 6.2.3), функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ , являющиеся решением интерполяционной задачи Бореля, также могут быть построены конструктивно. Следовательно,  $T_{1,2} = \Pi$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$ , имеющий эффективно определяемый правый обратный оператор, а именно, оператор продолжения  $P$ . Применяя теорему 3.3 или теорему 3.5, получаем некоторое уточнение теоремы 3.11.

**Теорема 3.12.** При любом  $\theta$  из  $(0, +\infty)$   $E_\theta^0$  — ЭАПС в  $C^\infty[a, b]$ , если  $[a, b] \subset (-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta})$ .

**3.4.2.** Описанный метод построения оператора продолжения  $P$  довольно прост, но обладает серьезным недостатком. Как было показано Б. С. Митягиным [118], оператор «восстановления» функции  $y(x)$  из  $C^\infty(\mathbb{R})$  по значениям всех ее производных не является линейным непрерывным оператором из пространства  $C^\infty$  всех последовательностей в пространство  $C^\infty(\mathbb{R})$  (топология в  $C^\infty$  задается набором преднорм  $|c|_n := \max\{|c_k| : k = 0, 1, \dots, n\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $c = (c_k)_{k=0}^\infty \in C^\infty$ ). Поэтому такой метод построения оператора  $P$  продолжения не позволяет установить (без дополнительных рассуждений) его непрерывность.

Применяя алгоритм Р. Сили — Р. Хестенса [27, 173] построения линейного непрерывного оператора продолжения из

$$C^\infty[0, +\infty) \text{ в } C^\infty(-\infty, +\infty),$$

можно не слишком простым способом, описанным в работе [71], дать конструктивное доказательство существования линейного непрерыв-

ного оператора продолжения  $P$  из  $C^\infty[a, b]$  в  $W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$  в случае, когда  $[a, b] \subset (-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta})$ . Этот оператор будет ЛНПО для оператора «сужения»

$$T_{1,2} = \Pi : \forall y \in W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}] \rightarrow \Pi y = y|_{[a,b]}.$$

При этом  $\Pi$  непрерывен из  $W^\infty[-\pi/\theta, \pi/\theta]$  в  $C^\infty([a, b])$  и, следовательно,  $\Pi$  — эпиморфизм  $W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$  на  $C^\infty[a, b]$ , имеющий конструктивно определяемый ЛНПО  $P$ . По теореме 3.5  $E_\theta^0$  — ЭПАПС в  $C^\infty[a, b]$ .

Аналогично, если  $N \geq 0$  и  $[a, b] \subset (-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta})$ , то  $E_\theta^N = (e^{il\theta t})_{|l| \geq N}$  — ЭПАПС в  $C^\infty[a, b]$ .

Стоит отметить, что все результаты данного раздела перестают быть верными, если  $[a, b]$  содержит отрезок  $[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$  или хотя бы совпадает с ним. Действительно, в этом случае точка  $\pm \frac{\pi}{\theta}$  принадлежит отрезку  $[a, b]$ . Но, очевидно, что любая функция вида  $e^{il\theta t}$ , где  $|k| \geq 0$ , принимает одинаковые значения в этой паре точек. Поэтому, если бы при каком-либо  $N \geq 0$  система  $E_\theta^N$  была полна в  $C^\infty[a, b]$ , то для любой функции  $f$  из  $C^\infty[a, b]$  имели бы  $y(-\frac{\pi}{\theta}) = y(\frac{\pi}{\theta})$ , что невозможно, например, для функции  $x$  из  $C^\infty[a, b]$ .

Далее, система  $E_\theta^N$  не может быть базисом в  $C^\infty[a, b]$ , когда  $[a, b] \subset (-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta})$  и  $N \geq 0$ . Действительно, допустим, что  $E_{\theta_0}^N$  — (абсолютный) базис в  $C^\infty[a, b]$  при некотором  $N \geq 0$  и  $\theta_0 > 0$ . Тогда, в частности,

$$t = \sum_{|l| \geq N} d_l e^{il\theta_0 t}, \quad \text{причем} \quad \sum_{|l| \geq N} |d_l| |l|^s < \infty, \quad s = 0, 1, \dots$$

Дифференцируя почленно этот ряд, сходящийся абсолютно в  $C^\infty[a, b]$ , находим:  $1 = i \sum_{|l| \geq N} l\theta_0 d_l e^{ik\theta_0 t}$ . Но тогда существует  $l_0$  такой, что  $|l_0| \geq N$ ,  $l_0\theta_0 d_{l_0} \neq 0$ . После повторного дифференцирования получим абсолютно сходящийся в  $C^\infty$  нуль-ряд:

$$0 = \sum_{|l| \geq N} (l\theta_0)^2 d_l e^{il\theta_0 t}, \quad t \in [a, b],$$

т. е. абсолютное нетривиальное разложение нуля (а. н. р. н.) в  $C^\infty[a, b]$  по системе  $E_\theta^N$ , которая поэтому не может быть базисом в  $C^\infty[a, b]$ .

Резюмируя результаты этого пункта, можно сказать, что если  $N \geq 0$ ,  $\theta > 0$  и  $[a, b] \subset (-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta})$ , то  $E_\theta^N$  — ЭПАПС (но не базис)

в  $C^\infty[a, b]$ . Если же  $[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}] \subseteq [a, b]$ , то система  $E_\theta^0$  (подавно  $E_\theta^N$ ) неполна в  $C^\infty[a, b]$ .

**1.4.3.** В заключение отметим, что, пожалуй, самый простой (из известных автору) способ построения линейного непрерывного оператора продолжения имеется фактически в обзорной статье [118]. Именно, по теореме 14 этой работы существует линейный непрерывный оператор  $P_3$  продолжения из  $C^\infty[a, b]$  в  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ ; при этом, как показывает несложный анализ доказательства этой теоремы из [118], оператор  $P_3$  строится конструктивно и действует из  $C^\infty[a, b]$  в  $W^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ ; более того, он действует (линейно и непрерывно) из  $C^\infty[a, b]$  в  $C_0^\infty(-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta})$ . Кроме того, оператор  $P_3$  является ЛНПО для оператора «сужения»  $\Pi$ , и мы вновь приходим к результатам, приведенным в конце п. 3.4.2.

Основная часть результатов, изложенных в разделах 3.2–3.4, опубликована ранее в работах [71, 78].

### 3.5. Свободные $A$ -представляющие системы экспонент

**3.5.1.** Пусть, как и выше,  $H$  — ПОЛВП над полем скаляров  $\Phi$  (где  $\Phi = \mathbb{C}$  или  $\Phi = \mathbb{R}$ );  $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty \omega_k$  — бесконечное множество индексов из  $\Phi$ , причем при любом  $k \geq 1$  множество  $\omega_k$  состоит из конечного числа индексов и  $\omega_k \subset \omega_{k+1} \subset \Omega$ . Пусть, далее, для всех  $\lambda \in \Omega$   $x_\lambda \in H$ ,  $x_\lambda \neq 0$ , и, как ранее, любая конечная совокупность различных элементов  $x_\lambda$  линейно независима в  $H$ .

Пусть  $X_\Omega := \{x_\lambda : \lambda \in \Omega\}$ . Введем знакомое пространство (над полем  $\Phi$  скаляров  $\mathbb{C}$  или  $\mathbb{R}$ )  $A_1(X_\Omega, H)$  числовых семейств  $c = (c_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$  таких, что  $c_\lambda \in \Phi$  при любом  $\lambda \in \Omega$  и в  $H$  существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \in \omega_n} c_\lambda x_\lambda$ .

Если в  $A_1(X_\Omega, H)$  ввести топологию  $\tau_1$  набором преднорм

$$Q_{\mathcal{P}} := \{q_p : p \in \mathcal{P}\}, \quad q_p(c) = \sup_{k \geq 1} p \left( \sum_{\lambda \in \omega_k} c_\lambda x_\lambda \right),$$

и  $\mathcal{P}$  — набор преднорм, определяющий топологию в  $H$ , то, согласно п. 3.1.1,  $A_1(X_\Omega, H), \tau_1$  является ПОЛВП.

Зафиксируем какое-либо конечное подмножество  $\Omega_1$  множества  $\Omega$  и положим  $(\Omega_1) := \Omega \setminus \Omega_1$ ;  $X_{(\Omega_1)} := \{x_\lambda : \lambda \in (\Omega_1)\}$ . Пусть  $A$  — некоторое (векторное) подпространство  $A_1(X_\Omega, H)$  с локально выпуклой

топологией  $\tau$  такой, что  $A, \tau \hookrightarrow A_1(X_\Omega, H), \tau_1$ . Положим

$$A_{(\Omega_1)} := \{(d_\lambda)_{\lambda \in \Omega} \in A : d_\lambda = 0 \ \forall \lambda \in \Omega_1\}$$

и индуцируем в этом подпространстве пространства  $A$  топологию из  $A, \tau$ . Каждому семейству  $d = (d_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$  из  $A_{(\Omega_1)}$  можно поставить во взаимно однозначное соответствие элемент  $\hat{d} = (d_\lambda)_{\lambda \in (\Omega_1)}$ ; совокупность  $\hat{A}(\Omega_1)$  всех таких элементов  $\hat{d}$ ,  $d \in A_{(\Omega_1)}$ , образует (алгебраически) изоморфное  $A_{(\Omega_1)}$  подпространство  $\Phi^{(\Omega_1)}$ .

Пусть еще для всех  $n \geq 1$   $\hat{\omega}_n = (\Omega_1) \cap \omega_n$  и  $A_1(X_{(\Omega_1)}, H)$  — множество таких числовых семейств  $(d_\mu)_{\mu \in (\Omega_1)}$ , что в  $H$  существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu \in \hat{\omega}_n} d_\mu x_\mu$ . Ясно, что  $(\Omega_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{\omega}_n$ . Если в  $A_1(X_{(\Omega_1)}, H)$  вновь определить топологию  $\tau_1$  набором преднорм  $q_p(d) = \sup_{n \in \mathbb{N}} p(\sum_{\alpha \in \hat{\omega}_n} d_\alpha x_\alpha)$ ,  $p \in \mathcal{P}$ , то  $A_1(X_{(\Omega_1)}, H), \tau_1$  — ПОЛВП.

Далее, если в  $\hat{A}(\Omega_1)$  индуцировать топологию  $\hat{\tau}$  из  $A_{(\Omega_1)}$  с помощью изоморфизма  $d \leftrightarrow \hat{d}$  и учесть соотношение  $A, \tau \hookrightarrow A_1(X_\Omega, H), \tau_1$ , то мы найдем, что  $\hat{A}(\Omega_1), \hat{\tau} \hookrightarrow A_1(X_{(\Omega_1)}, H), \tau_1$ .

Предположим, что  $X_\Omega = (x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$  —  $A$ -ПС в  $H$ . Назовем ее свободной  $A$ -ПС в  $H$ , если для любого конечного подмножества  $\Omega_1$  множества  $\Omega$   $X_{(\Omega_1)}$  —  $\hat{A}(\Omega_1)$ -ПС в  $H$ .

Из этого определения, в частности, следует, что АПС  $X$  в  $H$  будет свободной тогда и только тогда, когда она остается АПС в  $H$  и после удаления из нее любого конечного числа ее элементов.

В ситуации, когда  $\Phi = \mathbb{C}$  или  $\mathbb{R}$ ,  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\omega_k = (1, 2, \dots, k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , пространство  $A_1(X_\Omega, H)$  состоит из всех числовых последовательностей  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$  таких, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$  сходится в ПОЛВП  $H$ . Как нетрудно убедиться, в этом случае любая ПС или АПС  $X = (x_k)_{k \geq 1}$  в  $H$  является свободной в  $H$  тогда и только тогда, когда каждая ее сдвигка  $[X]_n := \{X = (x_k)_{k \geq n}\}$  остается ПС (соответственно, АПС) в  $H$ .

Определение свободной  $A$ -ПС, по-видимому, впервые появилось в работе [157] именно для такой «одномерной» ситуации и для случаев, когда  $A = A_1(X, H)$  или  $A = A_2(X, H)$ ; там же довольно подробно исследованы (для этих специальных ситуаций) свойства свободных ПС и АПС.

В настоящем разделе используется несколько иной подход к изучению свободных  $A$ -ПС, уже встречавшийся в более частных ситуациях в других работах автора [67, 69, 76]. Этот подход удобно при-

менять как раз к системам экспонент, что отвечает общей направленности данной книги.

**3.5.2.** Всюду далее в этом разделе предполагается, что  $H$  является некоторой совокупностью отображений  $B_p$  в  $\mathbb{C}^p$ , где  $p \geq 1$  и  $B_p$  — фиксированное подмножество  $\mathbb{C}^p$  или  $\mathbb{R}^p$ . Как выше,

$$\forall t = (t_1, \dots, t_p) \in B_p, \quad \forall \mu = (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{C}^p$$

$$\langle \mu, t \rangle_p := \sum_{k=1}^p \mu_k t_k; \quad e_\mu(t) := \exp \langle \mu, t \rangle_p.$$

Пусть, далее,  $\Omega$  — некоторое множество индексов из  $\mathbb{C}^p$ . Будем предполагать, что пространство  $H$  обладает следующими свойствами:

- 1) при любом  $\lambda \in \Omega$   $e_{\pm\lambda}(t) \in H$ ;
- 2) при любом  $\lambda \in \Omega$   $e_{\pm\lambda}(t)$  — непрерывный мультипликатор  $H$ ;
- 3) существует  $j_0 \leq p$  такое, что оператор  $D_{j_0}$ :  $(D_{j_0}y)(t) = \left(\frac{\partial y}{\partial t_{j_0}}\right)(t)$  — эпиморфизм  $H$ .

Наконец, пусть  $A$  — пространство числовых семейств  $c = \{c_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ , удовлетворяющих следующим условиям:

- 4)  $A \hookrightarrow A_1(E_\Omega, H)$ , где  $E_\Omega := \{e_\lambda(t)\}_{\lambda \in \Omega}$ ;
- 5) при любом  $c = \{c_\lambda\}_{\lambda \in \Omega} \in A$   $\{c_\lambda \lambda_{j_0}\}_{\lambda \in \Omega} \in A$ .

В частности, если при каком-либо  $j_0 \leq p$  оператор  $D_{j_0}$  непрерывен в  $H$ , то пространства  $A_1(E_\Omega, H)$  и  $A_2(E_\Omega, H)$  обладают свойствами 4), 5). Так как выполнение условия 4) для обоих пространств очевидно, то достаточно показать, что при  $j = 1, 2$  пространство  $A_j(E_\Omega, H)$  обладает свойством 5). Как мы уже знаем,  $c = \{c_\lambda\}_{\lambda \in \Omega} \in A_1(E_\Omega, H)$  тогда и только тогда, когда в  $H$  существует предел

$$M_c := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \in \omega_k} c_\lambda e_\lambda(t).$$

Но для любого такого элемента  $c$

$$D_{j_0} M_c = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \in \omega_k} c_\lambda D_{j_0} e_\lambda(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \in \omega_k} c_\lambda \lambda_{j_0} e_\lambda(t).$$

Так как последний ряд сходится в  $H$ , то  $\{c_\lambda \lambda_{j_0}\}_{\lambda \in \Omega} \in A_1(E_\Omega, H)$ .

Аналогично, если  $A = A_2^\Omega := A_2(E_\Omega, H)$ , то

$$A_2^\Omega = \left\{ c = \{c_\lambda\}_{\lambda \in \Omega} : \forall p \in \mathcal{P} \sum_{\lambda \in \Omega} |c_\lambda| p(e_\lambda) < +\infty \right\},$$

где  $\mathcal{P} = \{p\}$  — набор преднорм, определяющий топологию в  $H$ . Но тогда для любого  $p \in \mathcal{P}$  существует  $p_1 \in \mathcal{P}$  такое, что

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Omega} p(c_\lambda \lambda_{j_0} e_\lambda(t)) &= \sum_{\lambda \in \Omega} p(c_\lambda D_{j_0} e_\lambda) \leq \\ &\leq b \sum_{\lambda \in \Omega} |c_\lambda| p_1(e_\lambda) = b \sum_{\lambda \in \Omega} p_1(c_\lambda e_\lambda) < +\infty, \end{aligned}$$

и  $\{c_\lambda \lambda_{j_0}\}_{\lambda \in \Omega} \in A_2^\Omega$ .

Примеры пространств  $H$  со свойствами 1)–3) будут приведены ниже.

Установим основной результат данного раздела.

**Теорема 3.13.** *Если пространство  $H$  удовлетворяет условиям 1)–3),  $A, \tau$  — условиям 4)–5) и  $E_\Omega$  —  $A$ -ПС в  $H$ , то  $E_\Omega$  — свободная  $A$ -ПС.*

◁ Зафиксируем произвольный индекс  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  из  $\Omega$  и покажем сначала, что линейный оператор

$$T_{j_0}^\alpha : T_{j_0}^\alpha y = D_{j_0} y - \alpha_{j_0} y \quad \forall y \in H,$$

является эпиморфизмом  $H$ . С этой целью по произвольному элементу  $y$  из  $H$  найдем в  $H$  элемент  $x_1$  такой, что  $D_{j_0} x_1 = y(t) e_{-\alpha}(t)$ . Тогда, если  $x_2 := x_1(t) e_\alpha(t)$ , то

$$T_{j_0}^\alpha x_2 = (D_{j_0} x_1(t)) e_\alpha(t) + x_1(t) \alpha_{j_0} e_\alpha(t) - \alpha_{j_0} x_1(t) e_\alpha(t) = y(t).$$

Таким образом,  $T_{j_0}^\alpha(H) = H$ .

Пусть теперь  $\mu$  — произвольный индекс из  $\Omega$ , а  $y(t)$  — любой элемент из  $H$ . Найдем в  $H$  элемент  $x$  такой, что  $y = T_{j_0}^\mu x$ . Так как по исходному предположению  $E_\Omega$  —  $A$ -ПС в  $H$ , то  $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \in \omega_n} x_\lambda e_\lambda(t)$  (здесь предел берется в  $H$  и  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Omega} \in A$ ). Отсюда

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \in \omega_n} x_\lambda T_{j_0}^\mu(e_\lambda(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{\lambda \in \omega_n} x_\lambda (\lambda_{j_0} - \mu_{j_0}) e_\lambda(t) \right).$$

Из условия 5) следует, что  $\{x_\lambda (\lambda_{j_0} - \mu_{j_0})\}_{\lambda \in \Omega} \in A$ .

Положим  $\Omega_\mu := \Omega \setminus \{\mu\}$ . Учитывая, что  $\lambda_{j_0} = \mu_{j_0}$  при  $\lambda = \mu$ , получаем

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{\lambda \in \omega_n \setminus \{\mu\}} x_\lambda (\lambda_{j_0} - \mu_{j_0}) \right).$$

При этом

$$\{x_\lambda(\lambda_{j_0} - \mu_{j_0})\}_{\lambda \in \Omega_\mu} \in \hat{A}_{\Omega_\mu} \subset A_1(E_{\Omega_\mu}, H),$$

и, следовательно,  $\{e_\lambda(t)\}_{\lambda \in \Omega_\mu}$  —  $\hat{A}$ -ПС в  $H$ .  $\triangleright$

**3.5.3.** Приведем примеры пространств  $H$  со свойствами 1)–3).

1. Пусть  $p \geq 1$ ,  $F$  — выпуклый компакт в  $\mathbb{R}^p$ ,  $H = C^\infty[F]$  — пространство Фреше всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых на  $F$  функций с определяющим топологию в  $H$  счетным набором норм

$$\|y\|_n^F = \max \left\{ \left| \left( \frac{\partial^{|\alpha|_p} y}{\partial t_1^{\alpha_1} \partial t_2^{\alpha_2} \dots \partial t_p^{\alpha_p}} \right) (t) \right| : \right. \\ \left. t \in F, 0 \leq \alpha_j, |\alpha|_p := \sum_{j=1}^p \alpha_j \leq n \right\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Как легко проверить,  $C^\infty[F]$  обладает свойствами 1)–3), если  $\Omega$  — любое счетное подмножество  $i\mathbb{R}^p$ . Поэтому для пространства  $A$  тако-го, что  $A, \tau \hookrightarrow A_1(E^\Omega, H), \tau_1$ , каждая  $A$ -ПС в  $C^\infty[F]$  вида  $\{e_\lambda(t)\}_{\lambda \in \Omega}$  свободна.

Остановимся отдельно на одномерной ситуации ( $p = 1$ ). В этом случае  $F = [a, b]$ , где  $-\infty < a < b < +\infty$ . Пусть  $\theta > 0$  и  $[a, b] \subset (-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta})$ . Положим

$$\Omega_\theta := \{0, \pm i\theta, \pm 2i\theta, \dots\}, \\ \omega_k := \{il\theta : l = 0, \pm 1, \dots, \pm(k-1)\}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ x_\lambda = \exp \lambda t, \quad \lambda \in \Omega_\theta, t \in \mathbb{R}.$$

Если  $E_\theta^0 := (\exp ik\theta t)_{|k| \geq 0}$ , то в данной ситуации

$$A_2 := A_2(E_\theta^0, [a, b]) = A_2 \left( E_\theta^0, \left[ -\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta} \right] \right) = \\ = \left\{ c = \{c_k\}_{|k|=0}^\infty : \sum_{|k|=1}^\infty |k|^s |c_k| < \infty, s = 0, 1, \dots \right\}.$$

По теореме 3.12  $E_\theta^0$  —  $\mathfrak{A}A_2$ -ПС в  $C^\infty[a, b]$ . Этот результат можно теперь на основании теоремы 3.13 дополнить утверждением о том,



что при любом  $N \geq 0$   $E_\theta^N := \{\exp i l \theta t\}_{|l| \geq N}$  —  $A$ -ПС (но не базис!) в  $C^\infty[a, b]$ .

Возвращаясь к общей многомерной ( $p$ -мерной) ситуации, рассмотрим, как в п. 2.1.5, систему  $E_\Lambda := \{\exp \langle \lambda_k, z \rangle_p\}_{k=1}^\infty$ , где для всех  $k \geq 1$

$$\lambda_k = (\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{p,k}) \in \mathbb{C}^p; \quad \omega_k = \{\lambda_s : 1 \leq s \leq k\},$$

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^\infty \omega_k = \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Используя теорему 2.7 и рассуждения, приведенные в п. 2.1.5, находим, что если показатели  $\lambda_k$  удовлетворяют условию (2.13), то

$$\begin{aligned} A_1(E_\Lambda, C^\infty[F]) &= A_2(E_\Lambda, C^\infty[F]) = \\ &= \left\{ \{a_k\}_{k=1}^\infty : \varliminf_{k \rightarrow \infty} \left[ \ln |a_k| + |\lambda_k|_p H_F \left( \frac{|\lambda_k|}{|\lambda_k|_p} \right) \right] = -\infty \right\}, \end{aligned}$$

где, как и в п. 2.1.5,  $|\lambda_k|_p = |\lambda_{1,k}| + \dots + |\lambda_{p,k}|$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Если  $E_\Lambda$  — АПС в  $C^\infty[F]$ , то по теореме 3.13  $E_\Lambda$  — свободная АПС в  $C^\infty[F]$ .

2. Пусть  $G$  — содержащая начало координат выпуклая (не обязательно ограниченная) область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ , и пусть  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$  — возрастающая последовательность выпуклых компактов  $F_n$  из  $G$ , исчерпывающая  $G$ :

$$F_n \subset F_{n+1}^0 := \text{int } F_{n+1} \subset G = \bigcup_{m=1}^\infty F_m \quad \forall n \geq 1.$$

Пусть, далее,  $C^\infty(G)$  — пространство всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых в  $G$  функций, с проективной (как в п. 2.1.3) топологией:  $C^\infty(G) = \varprojlim C^\infty[F_n]$ . Пусть  $\lambda_k$ ,  $\omega_k$ ,  $\Lambda$  и  $E_\Lambda$  — те же, что и в предыдущем примере. И здесь легко убедиться в том, что  $C^\infty(G)$  обладает свойствами 1)–3), в которых  $\Omega = \Lambda$ .

Если пространство числовых последовательностей  $A = \{(a_k)_{k=1}^\infty\}$  непрерывно вложено в пространство  $A_1(E_\Lambda, C^\infty(G))$  и  $E_\Lambda$  —  $A$ -ПС в  $C^\infty(G)$ , то по теореме 3.13  $E_\Lambda$  — свободная  $A$ -ПС в  $C^\infty(G)$ . В частности, если  $E_\Lambda$  — ПС или АПС в  $C^\infty(G)$ , то  $E_\Lambda$  — свободная ПС (соответственно, АПС) в  $C^\infty(G)$ . Кроме того, по теореме 2.8, если

выполнено условие (2.13), то

$$A_1(E_\Lambda, C^\infty(G)) = A_2(E_\Lambda, C^\infty(G)) = \\ = \left\{ a = (a_k)_{k=1}^\infty : \forall n \geq 1 \lim_{|k|_p \rightarrow \infty} \left[ \ln |a_k| + |\lambda_k|_p H_{F_n} \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right] = -\infty \right\},$$

где, как и выше,  $H_{F_n}(\lambda)$  — опорная функция выпуклого компакта  $F_n$  из  $G$  с непустой внутренностью  $F_n^0$ .

3. Перейдем теперь к пространствам аналитических функций и рассмотрим сначала, как в п. 2.1.2, пространство Фреше  $A(G)$  всех функций, аналитических в ограниченной выпуклой области  $G \subseteq \mathbb{C}^p$ , содержащей начало координат, с описанными в п. 2.1.2 опорной функцией  $H_G(\lambda)$  и топологией. Пусть для любого  $k \geq 1$   $\lambda_k$ ,  $\omega_k$ ,  $\Lambda$ ,  $E_\Lambda$  те же, что и выше.

Пространство  $A(G)$  обладает свойствами 1)–3), и если

$$A \hookrightarrow A_1(E_\Lambda, A(G)),$$

а  $E_\Lambda$  —  $A$ -ПС в  $A(G)$ , то  $E_\Lambda$  — свободная  $A$ -ПС в  $H(G)$ . Далее, если показатели  $\lambda_k$  удовлетворяют условию (2.5), то

$$A_1(E_\Lambda, A(G)) = A_2(E_\Lambda, A(G)) = \\ = \left\{ a = (a_k)_{k=1}^\infty : \varlimsup_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |a_k| + H_G \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) \right] \leq 0 \right\}.$$

Точно также теорему 3.13 можно применить к пространству  $A(G)$  функций, аналитических в выпуклой (но уже не обязательно ограниченной) области  $G$ , к пространству  $A(\mathbb{C}^p)$  всех целых функций в  $\mathbb{C}^p$  и различным его подпространствам, например, пространству  $[\rho, \infty]_p$ ,  $\rho \geq 1$ ,  $p \geq 1$  (см. п. 2.1.4), пространству  $[\rho, \sigma]_p$ , где  $1 < \rho < \infty$ ,  $0 \leq \sigma < \infty$  (см. там же), и другим. Все эти пространства  $H$  содержат множество экспонент  $e_\lambda(z) := \exp \langle \lambda, z \rangle_p$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}^p$ , инвариантны относительно дифференцирования и обладают свойствами 1)–3). Поэтому любая  $A$ -ПС экспонент  $(e_{\lambda_k}(z))_{k=1}^\infty$  со свойствами 4)–5) в таком пространстве  $H$  будет свободной  $A$ -ПС. При не слишком жестких ограничениях на показатели  $\lambda_k$ , уже встречавшихся в разделе 2.1, нетрудно показать, что  $A_1(E_\Lambda, H) = A_2(E_\Lambda, H) = A_0$ , и дать явное описание множества  $A_0$ . Например, если  $H = A(\mathbb{C}^p)$ ,  $p \geq 1$ , и выполнено условие (2.10), то

$$A_0 = \left\{ a = \{a_k\}_{k=1}^\infty : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |a_k| = -\infty \right\}.$$

Теорема 3.13 применима к широкому кругу пространств. Но существуют пространства, к которым она неприменима, например, пространства  $W_2^{n+1}[-\pi, \pi]$  и  $L_p(Q)$ , рассмотренные в разделе 3.2. Хотя они и содержат все экспоненты и, более того, обладают свойствами 1)–2), но они не инвариантны относительно дифференцирования и потому свойство 3) для них вообще не имеет смысла.

**3.5.4.** В связи с теоремой 3.13 возникает естественный вопрос о том, сохраняется ли у последовательности  $E_\Omega$  свойство оставаться  $A$ -ПС в  $H$  после удаления из нее уже бесконечной подпоследовательности.

Приведем некоторые результаты в этом направлении, ограничившись модельной ситуацией, когда  $H = A(G)$ , где  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ , и  $X = \{\exp\langle \lambda_k, z \rangle_p\}_{k=1}^\infty$ ,  $\lambda_k = (\lambda_{k,s})_{s=1}^p \in \mathbb{C}^p$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Положим  $\Omega := \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ ,  $\Omega_1 := \{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\mu_n = (\mu_{n,s})_{s=1}^p$ ; при этом для всех  $n \geq 1$   $\mu_n = \lambda_{\ell_n}$  и  $\ell_n \uparrow \infty$ . Скажем, что  $\Omega_1$  — подходящая последовательность для класса  $[1, 0]_p$  всех целых функций в  $\mathbb{C}^p$  минимального типа при порядке 1 (по совокупности переменных), если найдется хотя бы одна функция  $v \in [1, 0]_p$  такая, что  $v(\mu_n) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . При этом функция  $v$  может иметь и другие нули, кроме  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ .

Пусть  $\Omega_1$  — подходящая последовательность для класса  $[1, 0]_p$ ,  $F(z) \in [1, 0]_p$  и  $F(\mu_n) = 0$  при любом  $n \geq 1$ . Обозначим символом  $O_F$  множество всех нулей  $F$  и положим  $\Omega_f^0 = \Omega \setminus O_F$ . Запишем представление функции  $F$  в виде ее ряда Тейлора — Маклорена, абсолютно сходящегося в  $A(\mathbb{C}^p)$ :

$$F(z) = \sum_{|m|_p=0}^{\infty} f_m z^m; \quad z \in \mathbb{C}^p.$$

Образует по  $F$  линейный дифференциальный оператор  $T_F$  бесконечного порядка с символом  $F(z)$ :  $(T_F y)(z) = \sum_{|m|_p=0}^{\infty} f_m (D^m y)(z)$ , где

$$D^m = \frac{\partial^{|m|_p}}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_p^{m_p}}, \quad m = (m_1, \dots, m_p).$$

Как известно (см., например, [119, 122]),  $T_F$  — линейный непрерывный оператор в  $A(G)$  для любой области  $G$  из  $\mathbb{C}^p$ . Кроме того, если область  $G$  выпукла, то  $T_F$  — эпиморфизм  $A(G)$  (этот результат установлен независимо Мартино [168] при  $p \geq 1$  и автором [34, 35] при

$p = 1$ ). Следовательно, для любого элемента  $x(z)$  из  $A(G)$  в этом же пространстве  $A(G)$  найдется функция  $y(z)$  такая, что  $(T_F y)(z) = x(z)$  для любого  $z \in G$ .

Предположим, что  $E_\Omega$  —  $A$ -ПС в  $A(G)$ , обладающая таким свойством:

В) для любой функции  $b(z)$  из  $[1, 0]_p$  и любой подпоследовательности  $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$  ее нулей последовательность  $\{b(\tau_k)\}_{k=1}^\infty$  является мультипликатором пространства  $A = A(E_\Omega; A(G)) \hookrightarrow A_1(E_\Omega; A(G))$ .

Согласно сделанному предположению в  $A$  найдется хотя бы одна последовательность  $\{d_k\}_{k=1}^\infty$  такая, что

$$y(z) = \sum_{|k|_p=0}^{\infty} d_k \exp\langle \lambda_k, z \rangle_p \quad \forall z \in G,$$

причем ряд справа сходится в топологии  $A(G)$ . В силу непрерывности оператора  $T_F$  в  $A(G)$  имеем для всех  $z \in G$ :

$$\begin{aligned} x(z) &= (T_F y)(z) = T_F \left( \sum_{|k|_p=0}^{\infty} d_k \exp\langle \lambda_k, z \rangle_p \right) = \\ &= \sum_{|k|_p=0}^{\infty} d_k T_F (\exp\langle \lambda_k, z \rangle_p) = \sum_{\lambda_\ell \in \Omega_F^0} d_\ell F(\lambda_\ell) \exp\langle \lambda_\ell, z \rangle_p. \end{aligned}$$

При этом последний ряд сходится в  $A(G)$ . Кроме того, так как ни одна конечная совокупность экспонент не может быть  $A$ -ПС в  $A(G)$ , то (в силу того, что  $x(z)$  — произвольная функция из  $A(G)$ ) множество  $\Omega_F^0$  бесконечно. Согласно В)  $\{d_\ell F(\lambda_\ell)\}_{\ell=1}^\infty \in A$  и, следовательно,  $E_{\Omega_F^0}$  —  $A$ -ПС в  $A(G)$ . Таким образом, справедлива

**Теорема 3.14.** Пусть  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ ;  $\Omega = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$ ,  $\lambda_k \in \mathbb{C}^p$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и  $\Omega_1 = (\mu_j)_{j=1}^\infty$  — подходящая последовательность для класса  $[1, 0]_p$ . Пусть, далее,  $E_\Omega$  —  $A$ -ПС в  $A(G)$  со свойством В) и  $H_1(z)$  — любая функция из класса  $[1, 0]_p$ , множество  $O_{H_1}$  всех нулей которой содержит  $\Omega_1$ . Тогда:

- 1) множество  $\Omega_2 := \Omega \setminus O_{H_1}$  бесконечно;
- 2)  $E_{\Omega_2}$  —  $A$ -ПС в  $A(G)$ .

Как легко убедиться, любая ПС или АПС экспонент  $E_\Lambda$  в  $A(G)$  обладает свойством В) (при  $A = A_1(E_\Lambda, A(G))$  или, соответственно,  $A = A_2(E_\Lambda, A(G))$ ). Поэтому имеет место

**Следствие 1.** Пусть  $p, G, \Omega, \Omega_1, \Omega_2$  и  $H_1(z)$  те же, что и в теореме 3.14, и пусть  $E_\Omega$  — ПС или АПС в  $A(G)$ . Тогда  $E_{\Omega_2}$  — ПС (соответственно, АПС) в  $A(G)$ .

Отметим еще один результат, вытекающий из теоремы 3.14.

**Следствие 2.** Пусть  $p \geq 1, G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}^p, \lambda_k = (\lambda_{k,\ell})_{\ell=1}^p \in \mathbb{C}^p, \Omega = (\lambda_k: k \geq 1)$ . Пусть далее, для любого  $s \geq 1$   $k_s \in \mathbb{N}, k_s \uparrow \infty$  и

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{|\lambda_{k_s}|_p} = 0.$$

Пусть, наконец,  $E_\Omega$  — ПС или АПС в  $A(G)$ . Тогда, если  $\Omega_1 := \{\lambda_{k_s}\}_{s=1}^\infty$  и  $\Omega_2 := \Omega \setminus \Omega_1$ , то  $E_{\Omega_2}$  — ПС (соответственно, АПС) в  $A(G)$ .

◁ Чтобы вывести этот результат из теоремы 3.14, достаточно показать, что если  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{|\lambda_{k_s}|_p} = 0$ , то в классе  $[1, 0]_p$  найдется функция  $F$ , для которой  $F(\lambda_{k_s}) = 0$  при всех  $s \geq 1$ . Подобную функцию можно построить хотя бы таким образом. Прежде всего, напомним, что  $|\lambda_{k_s}|_p = \sum_{\ell=1}^p |\lambda_{k_s,\ell}|$ . Если  $\alpha_s := \max\{|\lambda_{k_s,\ell}|: 1 \leq \ell \leq p\}$ , то  $\alpha_s \leq |\lambda_{k_s}|_p \leq p\alpha_s$ . Поэтому

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{|\lambda_{k_s}|_p} = 0 \iff \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{\alpha_s} = 0.$$

Обозначим еще символом  $\ell_s$  наибольший из номеров  $\ell \leq p$ , для которых  $|\lambda_{k_s,\ell}| = \alpha_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ). Искомую функцию  $F(z)$  будем искать в таком виде: для любого  $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$

$$F(z) = \prod_{j=1}^p f_j(z_j), \quad f_j(z_j) = \prod_{s=1}^\infty \left[ 1 - \left( \frac{z_j}{e^{\varphi_{s,j}i} \alpha_s} \right)^2 \right] \quad \forall j \leq p.$$

При этом числа  $\varphi_{s,j}$  ( $1 \leq j \leq p$ ) из  $[0, 2\pi)$  определяем следующим образом: для любого  $s \geq 1$  полагаем  $\varphi_{s,\ell_s} = \arg \lambda_{k_s,\ell_s}$  и  $\varphi_{s,m} = 0$ , когда  $1 \leq m \leq p$  и  $m \neq \ell_s$ . С помощью известной теоремы Линделёфа [98, с. 42, теорема 15] нетрудно вывести, используя равенство  $\lim_{s \rightarrow \infty} s/\alpha_s = 0$ , что каждая функция  $f_j(z_j)$ ,  $1 \leq j \leq p$ , принадлежит классу  $[1, 0]$ , а их произведение  $F(z)$  — классу  $[1, 0]_p$ . При этом для всех  $s \geq 1$   $f_{\ell_s}(\lambda_{k_s,\ell_s}) = 0$ , откуда  $F(\lambda_{k_s}) = 0$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , и нужная функция  $F$  построена. ▷

Заметим, что в случае  $p = 1$  следствие 2 получено автором гораздо раньше, чем общая теорема 3.14 (см. по этому поводу работу [43],

в которой отмечено, что следствие неумлучшаемо в том смысле, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся последовательность  $\Omega = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$  и ее подпоследовательность  $(\lambda_{k_s})_{s=1}^\infty$  такие, что  $\lim_{s \rightarrow \infty} s/|\lambda_{k_s}| \leq \varepsilon$ ,  $E_\Omega$  — АПС в  $A(G)$ , а система  $E_{\Omega_2}$ , где  $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ , даже неполна в  $A(G)$ .

Отметим еще один результат, непосредственно вытекающий из следствия 3.5.4 и находящий применение при эффективном построении частного решения уравнения свертки (более подробно об этом сказано ниже в главе 5, п. 5.6.1).

Для простоты изложения ограничимся здесь «одномерной» версией ( $p = 1$ ) этого результата. Следуя [98], скажем, что множество  $T_0$  кружков  $\varepsilon_j$  радиусов  $r_j$  является  $C^0$ -множеством, если оно имеет нулевую линейную плотность, т. е. [98], если  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{(r)}(r)}{r} = 0$ , где  $\sum_{(r)}$  — сумма радиусов  $r_j$  всех кружков из  $T_0$ , центры которых лежат в круге  $|z| < r$ .

Пусть  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  — произвольная последовательность комплексных чисел такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = \infty$ , и пусть  $T_0$  — какое-либо  $C^0$ -множество. Положим  $\Lambda^0 := \Lambda \cap T_0 = \{\lambda_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ . Тогда, как легко показать,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|} = 0$  и подавно  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_{n_k}|} = 0$ . Следовательно, если  $E_\Lambda := \exp(\lambda_k z)_{k=1}^\infty$  — АПС в  $A(G)$ , где  $G$  — какая-либо выпуклая область в  $\mathbb{C}$ , а  $T_0$  — произвольное  $C^0$ -множество, то  $E_{\Lambda^1}$  — АПС в  $A(G)$ , где  $\Lambda^1 = \Lambda \setminus \Lambda^0$ .

В частности, если  $E_\Lambda$  — АПС в  $A(G)$ , где  $G$  — любая выпуклая область в  $\mathbb{C}$ , и  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = \infty$ , то без ограничения общности можно считать, что все показатели  $\lambda_k$ ,  $k \geq 1$ , лежат вне какого-либо фиксированного  $C^0$ -множества кружков.

**3.5.5.** Для некоторых неограниченных выпуклых областей в  $\mathbb{C}^p$  теорему 3.14 и ее следствия можно усилить. Покажем это на примере области  $G = \mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ . Предварительно назовем последовательность  $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty = \{\lambda_{m_k}\}_{k=1}^\infty$ ,  $m_k \uparrow \infty$ , соответствующей классу  $[1, \infty)_p$ , если в классе  $[1, \infty)_p$  всех целых в  $\mathbb{C}^p$  функций конечного типа при порядке 1 (по совокупности переменных) найдется функция  $L(z)$  такая, что  $L(\mu_k) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (Как и выше,  $L(\lambda)$  может иметь и другие нули, кроме  $(\mu_k)_{k=1}^\infty$ , и кратность каждого нуля  $\mu_k$  произвольна.) Напомним еще результат Мальгранжа [165], согласно которому оператор свертки  $T_F$  с символом  $F$  из класса  $[1, \infty)_p$  является эпиморфизмом  $A(\mathbb{C}^p)$  и подавно — линейным оператором, непрерывно действующим из  $A(\mathbb{C}^p)$  в  $A(\mathbb{C}^p)$ . Будем еще говорить, что А-ПС  $E_\Omega$

в  $A(\mathbb{C}^p)$  обладает свойством  $B_1$ ), если для любой функции  $b(z)$  из  $[1, \infty)_p$  и любой последовательности  $\{\lambda_s\}_{s=1}^\infty$  ее нулей  $\{b(\lambda_s)\}_{s=1}^\infty$  — мультипликатор пространства  $A = A(E_\Omega; A(\mathbb{C}^p))$ .

В частности, из непрерывности в  $A(\mathbb{C}^p)$  любого оператора свертки  $T_b$  с символом  $b(z)$  из  $[1, \infty)_p$  легко вывести, что любая ПС или АПС  $E_\Omega$  в  $A(\mathbb{C}^p)$  обладает свойством  $B_1$ ).

Тем же методом, что и теорема 3.14, доказывается ее аналог.

**Теорема 3.15.** Пусть  $p \geq 1$ ,  $\Omega = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$ ,  $\lambda_k \in \mathbb{C}^p$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и  $\Omega_1 = (\mu_j)_{j=1}^\infty$  — соответствующая классу  $[1, \infty)_p$  последовательность. Пусть, далее,  $E_\Omega$  —  $A$ -ПС в  $A(\mathbb{C}^p)$  со свойством  $B_1$ ) и  $H_1(z)$  — любая функция из класса  $[1, \infty)_p$ , множество  $O_{H_1}$  всех нулей которой содержит  $\Omega_1$ . Тогда:

- 1) множество  $\Omega_2 := \Omega \setminus O_{H_1}$  бесконечно;
- 2)  $E_{\Omega_2}$  —  $A$ -ПС в  $A(\mathbb{C}^p)$ .

Справедливы и аналоги следствий 1 и 2, которые получаются тем же методом; единственное различие состоит в том, что при выводе следствия 2 из теоремы 3.15 вспомогательные функции  $f_j(z_j)$  из  $[1, \infty)$  берутся в виде

$$f_j(z_j) = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z_j}{\alpha_k e^{i\varphi_{k,j}}} \right) e^{z_j / (\alpha_k e^{i\varphi_{k,j}})},$$

а числа  $\varphi_{k,j}$  определяются, как раньше.

**Следствие 1.** Пусть  $p$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $H_1(z)$  те же, что и в теореме 3.15, и пусть  $E_\Omega$  — ПС или АПС в  $A(\mathbb{C}^p)$ . Тогда  $E_{\Omega_2}$  — ПС (или АПС) в  $A(\mathbb{C}^p)$ .

**Следствие 2.** Пусть  $p \geq 1$ ,  $\lambda_k \in \mathbb{C}^p$  для любого  $k \geq 1$ . Пусть, далее, при всех  $s \geq 1$   $k_s \in \mathbb{N}$  и

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{|\lambda_{k_s}|_p} < \infty \quad (1 \leq k_s \uparrow \infty).$$

Пусть, наконец,  $\Omega = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$ ,  $\Omega_1 = \{\lambda_{k_s} : s = 1, 2, \dots\}$ ,  $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$  и  $E_\Omega$  — ПС или АПС в  $A(\mathbb{C}^p)$ . Тогда  $E_{\Omega_2}$  — ПС или (соответственно, АПС) в  $A(\mathbb{C}^p)$ .

На наш взгляд, было бы интересно получить результат, аналогичный теореме 3.14, для  $A$ -ПС в общем ПОЛВП  $H$  (при определенных дополнительных предположениях относительно пространств  $H$  и  $A$ ).

**3.5.6.** В заключение этого раздела введем один класс ПС, являющихся обобщением свободных ПС, и с помощью этого класса опишем структуры произвольных ПС и АПС.

Назовем А-ПС  $X_\Omega$  в ОЛВП  $H$  почти свободной, если для любого номера  $N \geq 1$  в  $X_\Omega$  найдутся  $N$  элементов  $x_{n_1}, \dots, x_{n_N}$ , после удаления которых из системы  $X_\Omega$  последняя остается А-ПС в  $H$ .

Очевидно, что любая свободная А-ПС в  $H$  подавно почти свободна (в  $H$ ).

Для простоты изложения ограничимся, следуя [43], ситуацией, когда  $\Omega = N$ ,  $\omega_k = (1, 2, \dots, k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и  $A(X_\Omega, H) = A_1(X_\Omega, H)$  или  $A(X_\Omega, H) = A_2(X_\Omega, H)$ .

**Теорема 3.16** [43]. Пусть  $X = (x_k)_{k=1}^\infty$  — любая ПС или АПС в ПОЛВП  $H$ . Тогда имеет место альтернатива: либо  $X$  — почти свободная ПС (соответственно, АПС) в  $H$ , либо последовательность  $X$  образована добавлением (возможно, пустого) множества  $M_0$ , состоящего из конечного числа элементов  $H$ , к некоторому базису (соответственно, абсолютному базису) в  $H$ .

◁ Пусть для определенности  $X$  — ПС в  $H$ . Если  $X$  — базис в  $H$ , то мы имеем второй случай альтернативы (с  $M_0 = \emptyset$ ). Если же  $X$  — ПС, но не базис в  $H$ , то найдется хотя бы одно сходящееся в  $H$  нетривиальное разложение нуля (н. р. н.) по  $X$ :  $\sum_{m=1}^\infty a_m x_m = 0$  и существует  $m_1 \geq 1$  такое, что  $a_{m_1} \neq 0$ . Очевидно, что  $X_1 := \{x_m : m \geq 1, m \neq m_1\}$  — ПС в  $H$ . Если она — базис в  $H$ , то вновь приходим ко второму случаю альтернативы. Если же  $X_1$  — не базис в  $H$ , то  $X_1$  остается ПС в  $H$  после удаления из нее некоторого элемента  $x_{m_2}$ , где  $m_2 \neq m_1$ . Таким образом,  $X_2 := \{x_m : m \geq 1, m \neq m_1, m \neq m_2\}$  — снова ПС в  $H$ .

При неограниченном продолжении этой процедуры либо на каком-то ее шаге мы придем к базису в  $H$  (и тогда имеет место второй случай альтернативы), либо на каждом шаге будет получаться ПС, не являющаяся базисом  $H$ . В этом случае  $X$  — почти свободная ПС в  $H$ . ▷

Рассмотрев произвольное счетное множество индексов

$$\Omega = \omega_1 \bigcup_{k=1}^\infty (\omega_{k+1} \setminus \omega_k),$$

нетрудно установить аналог теоремы 3.16 для произвольной А-ПС в  $H$ .



Отметим еще, что из примера, приведенного в п. 3.1.6, следует, что если  $H$  — какое-либо пространство отображений  $Q$  в  $\mathbb{C}^p$  (или в  $\mathbb{R}^p$ ) и если  $H$  инвариантно относительно любого частного дифференцирования, а в  $H$  имеется бесконечное множество экспонент  $e_\lambda := \exp(\lambda, z)_p$ , где  $\lambda \in \Omega$ , то любая ПС в  $H$  вида  $E_{\Lambda_1}$ , где  $\Lambda_1$  — счетное подмножество  $\Omega$ , почти свободна в  $H$ .

### 3.6. Продолжаемые представляющие системы

**3.6.1.** Пусть  $H_1, H_2$  — локально выпуклые пространства,  $\Lambda$  — некоторое счетное множество индексов,  $X_\Lambda = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  — какая-либо совокупность ненулевых элементов из  $H_1 \cap H_2$ , являющаяся  $A$ -ПС в  $H_1$ , где, как раньше,  $A, \tau \hookrightarrow A_1(X_\Lambda, H_1), \tau_1$ .

Если  $X_\Lambda$  будет  $A$ -ПС в  $H_2$  при некотором  $\tilde{A} \subseteq A_1(X_\Lambda, H_2)$ , то в этом случае скажем, что  $A$ -ПС  $X_\Lambda$  продолжаема или продолжима из  $H_1$  в  $H_2$ .

Продолжаемые  $A$ -ПС фактически уже встречались в этой главе. А именно, основное содержание разделов 3.2–3.4 составляет применение полученных в 3.1 результатов о линейных преобразованиях  $A$ -ПС к различным функциональным пространствам.

При этом все рассуждения, как правило, относились к некоторой общей ситуации, которую можно описать следующим образом.

Пусть при  $j = 1, 2$  пространства  $H_j$  принадлежат некоторому классу ПОЛВП функций  $\{E(Q)\}$ , где  $Q$  — произвольное множество из совокупности  $M := (Q_\beta)_{\beta \in \Gamma}$ . При этом, если  $\beta_j \in \Gamma$  ( $j = 1, 2$ ) и  $Q_{\beta_2} \subseteq Q_{\beta_1}$ , то  $E(Q_{\beta_1}) \hookrightarrow E(Q_{\beta_2})$ . Пусть  $Q_2 \subseteq Q_1$ ,  $Q_j \in M$  и пусть  $H_j = E(Q_j)$ ,  $j = 1, 2$ . Если  $T$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$  и  $X_\Lambda$  —  $A$ -ПС в  $H_1$ , то по теореме 3.1  $TX_\Lambda$  —  $A$ -ПС в  $H_2$ .

Предположим еще, что оператор  $T$  имеет некоторое множество собственных элементов  $e_{(\lambda)}$ :  $Te_{(\lambda)} = \gamma_\lambda e_{(\lambda)}$  для любого  $\lambda \in \Lambda$ , где  $\gamma_\lambda \in \mathbb{C}$ .

Тогда, если  $E_\Lambda := (e_{(\lambda)})_{\lambda \in \Lambda}$  —  $A$ -ПС в  $H_1$ , то по той же теореме 3.1

$$TE_\Lambda := (Te_{(\lambda)})_{\lambda \in \Lambda} = (\gamma_\lambda e_{(\lambda)})_{\lambda \in \Lambda} \text{ — } A\text{-ПС в } H_2.$$

Допустим, что при любом  $\lambda \in \Lambda$   $\gamma_\lambda \neq 0$ , и положим

$$\tilde{A} := \{d = (d_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} : \forall \alpha \in \Lambda \ d_\alpha = \gamma_\alpha c_\alpha, \\ \text{где } c(c_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \text{ — произвольный элемент из } A\}.$$

Из непрерывности оператора  $T : H_1 \rightarrow H_2$  следует, что  $\tilde{A} \subseteq A_1(X_\Lambda, H_2)$ . Таким образом,  $E_\Lambda - \tilde{A}$ -ПС в  $H_2$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Если, в частности,  $A = A_1(X_\Lambda, H_2)$ , то  $E_\Lambda - \tilde{A}$ -ПС (подавно просто ПС) в  $H_2$ . Аналогично, при тех же предположениях относительно оператора  $T$  и пространств  $H_1, H_2$ , если  $E_\Lambda - \text{АПС}$  в  $H_1$ , то  $E_\Lambda - \text{АПС}$  в  $H_2$ . В обоих случаях  $E_\Lambda$  продолжается из  $H_1$  в  $H_2$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** В разделах 3.2–3.4 рассматривалась, в частности, ситуация, в которой  $T$  — оператор (тождественного) вложения  $H_1$  в  $H_2$ , т. е. оператор  $\Pi$  «сужения» на  $Q_2$ : для любого  $y \in H_1 = E(Q_1)$   $Ty = \Pi y = y|_{Q_2}$ .

Предположим, что справедлива такая теорема единственности: если  $y \in H_1$  и  $\Pi y = y|_{Q_2} = 0$ , то  $y \equiv 0$ . Тогда при любом  $\lambda \in \Lambda$   $\Pi e_{(\lambda)} = e_{(\lambda)}$ , откуда  $\gamma_\lambda = 1$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . В этом случае, если  $\Pi$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$  и  $E_\Lambda - A$ -ПС в  $H_1$ , где, как обычно,  $A, \tau \mapsto A_1(E_\Lambda, H_1), \tau_1$ , то по теореме 3.1  $E_\Lambda - A$ -ПС и в  $H_2$ . Таким образом,  $A$ -ПС  $E_\Lambda$  продолжается из  $H_1$  в  $H_2$ , если существует оператор «подъема» из  $H_2$  в  $H_1$ .

**3.6.2.** Рассмотрим теперь ситуацию, когда  $Q_2 = G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ ,  $Q_1 = G + B$ , где  $B$  — выпуклый компакт, содержащий начало координат (это предположение несущественно и от него нетрудно избавиться с помощью линейной замены независимой переменной), и справедлива вышеуказанная теорема единственности.

Пусть, далее,  $F$  — линейный непрерывный функционал на  $A(Q_1)$ :  $F \in A'(G + B)$ , и пусть  $B$  — определяющее множество функционала  $F$ . Это означает (см., например, [122, с. 19–20]), что для всякой окрестности  $\omega$  компакта  $B$  найдется постоянная  $c_\omega$  такая, что

$$|F(f)| \leq c_\omega \sup_{z \in \omega} |f(z)| \quad \forall f \in A(Q_1).$$

Тогда (см. там же) функционал  $F$  порождает оператор свертки

$$M_F(f) = F_z(f(z + w)),$$

непрерывно действующий из  $A(G + B)$  в  $A(G)$  (как обычно, символ  $G + B$  обозначает арифметическую сумму множеств  $G + B$ ). Характеристической функцией оператора  $M_F$  называется [122, с. 132] функция

$$\hat{F}(\eta) := F(\exp \langle \eta, z \rangle_p),$$

которая является целой функцией экспоненциального типа [122, с. 76]. Формулировке нужного нам результата об эпиморфности оператора свертки  $M_F$  придется предпослать некоторые сведения из теории множеств и целых функций. Прежде всего, множество точек  $E_0$  из  $(0, +\infty)$  называется множеством нулевой относительной меры, если при каждом  $r > 0$  множество  $E_0 \cap [0, r]$  измеримо и  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(E_0 \cap [0, r])}{r} = 0$ . Далее, целую функцию  $\phi(z)$  порядка  $\rho > 0$  и конечного типа называют функцией вполне регулярного роста [122, с. 34; 127, с. 283], если для почти всех  $z$  из  $\mathbb{C}^p$  и любого  $t = re^{i\theta}$  из  $\mathbb{C}$  функция  $\phi(zt)$  удовлетворяет равенству

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty, \\ r \notin E_0}} r^{-\rho} \ln |\phi(re^{i\theta}z)| = h_{\phi(zt)}(\theta)r^\rho, \quad 0 < \theta \leq 2\pi.$$

Здесь  $E_0$  — множество нулевой относительной меры (возможно, зависящее от точки  $z$ ), а  $h_{\phi(zt)}(\theta)$  — индикатор (индикатрисса) роста (см., например, [98])  $\phi(zt)$ , как функции переменного  $t$ .

Как было показано В. В. Моржаковым [119], а при  $p = 1$  ранее автором [35, 36] (см. также [122, с. 203, 232]), если функция  $\hat{F}(\eta)$  имеет вполне регулярный рост, то  $M_F$  — эпиморфизм  $A(G + B)$  на  $A(G)$ . При этом для любого  $\lambda \in \mathbb{C}^p$

$$M_F(\exp\langle \lambda, z \rangle_p) = F_z(\exp\langle \lambda, z + w \rangle_p) = \exp\langle \lambda, z \rangle_p \cdot \hat{F}(\lambda).$$

Положив  $e_\lambda(z) := \exp\langle \lambda, z \rangle_p$ , имеем согласно замечанию 1 в конце п. 3.6.1 такой результат о продолжимости.

**Теорема 3.17.** *Если  $E := (e_{\lambda_k}(z))_{k=1}^\infty$  — ПС или АПС в  $A(G + B)$ , то  $E$  — ПС (соответственно, АПС) в  $A(G)$ .*

Ранее эта теорема была доказана в случае  $p = 1$  А. Ф. Леонтьевым в работе [90]. Позднее, в общей (многомерной) ситуации теорема 3.17 была получена А. В. Абаниным способом, отличным от вышеизложенного и основанным на использовании слабо достаточных множеств [3, теорема 1.9.8, с. 105]. Термин «слабо достаточное множество» будет разъяснен ниже, в разделе 4.1.10.

Назовем выпуклую подобласть  $G_1$  выпуклой области  $G$  выпукло дополнимой, если найдется выпуклый компакт  $D$  такой, что  $G_1 + D = G$ . Согласно теореме 3.17, если  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ , то каждая ПС или АПС экспонент  $E$  в  $A(G)$  продолжима из  $A(G)$  в  $A(G_1)$ , если  $G_1$  — выпукло дополнимая подобласть  $G$ .

**3.6.3.** Понятие продолжимости можно ввести и для полных систем и базисов. Так как каждый базис в  $H$  является ПС (а абсолютный базис — АПС) в  $H_1$  и, в свою очередь, любая ПС (подавно АПС) в  $H$  будет полной системой в  $H$ , то естественно ожидать, что свойство продолжимости у ПС будет в какой-то мере промежуточным между соответствующими свойствами полных систем и базисов. Как мы убедимся ниже на примерах, относящихся к одномерной ситуации ( $p = 1$ ), условия продолжимости наиболее «либеральны» для полных систем и наиболее жестки для базисов. Что же касается ПС, то здесь наблюдается довольно большой разницей в их свойствах продолжимости.

Как известно, полная в односвязной области  $G$  из  $\mathbb{C}$  система функций из  $A(G)$  продолжима в любую ее односвязную подобласть  $G_1$  (остается полной в  $A(G_1)$ ). Базисы ведут себя более «капризно». Например, система степеней  $Z = \{z^n\}_{n=0}^\infty$ , являющаяся базисом в любом пространстве  $A(K_R)$ , где  $K_R := \{z : |z| < R\}$ , продолжима в каждое пространство  $A(K_{qR})$ , где  $0 < q < 1$ , и не является базисом в  $A(D)$ , если  $D$  — любая подобласть  $K_R$ , отличная от  $K_{qR}$ . Более того, с помощью первой теоремы Абеля легко показать, что базисная в  $A(K_R)$  система  $Z$ , подавно являющаяся АПС в  $A(K_R)$ , не продолжима в подобласть  $K_R$ , отличную от  $K_{qR}$ ,  $0 < q < 1$  (т. е.  $Z$  не является АПС и ПС в  $A(Q)$ , если  $Q$  — подобласть  $K_R$  и  $Q \neq K_{qR}$ ,  $0 < q < 1$ ). Как показано М. М. Драгилевым [22], подобная жесткая продолжимость базисов из  $A(G)$  имеет место и в общем случае. Заметим, что понятие продолжимых базисов было введено М. М. Драгилевым в [22], а продолжимых ПС и АПС — автором в [47, 90].

Остановимся подробнее на системах экспонент в  $A(G)$ , где  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}$ . Прежде всего заметим, что если  $E = (e^{\lambda_k z})_{k=1}^\infty$  — ПС или АПС в  $A(G)$ , то  $E$  — ПС (соответственно, АПС) в  $A(G_a)$ , где  $G_a = G + a$  — сдвиг области  $G$  на  $a \in \mathbb{C}$ . Из теоремы 3.17 следует, что если  $E$  — ПС или АПС в  $A(G)$ , где  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}$ , содержащая начало координат, то  $E$  продолжима в любую ее выпукло дополнимую подобласть  $G_1$ , содержащую начало координат, в любую подобную ее подобласть  $G_\rho = \rho \cdot G$ ,  $0 < \rho < 1$ , а также во все сдвиги областей  $G_1$  и  $G_\rho$ , лежащие в  $G$  (здесь и далее условимся говорить, что А-ПС в  $A(G_1)$  продолжима в область  $G_1$ , если она остается А-ПС и в  $A(G_1)$ ).

Стоит отметить, что существуют ПС экспонент  $E_\Delta$ , которые продолжимы лишь в подобласти только что указанного вида. Чтобы

убедиться в этом, приведем пример довольно общего характера, используя некоторые результаты монографии А. Ф. Леонтьева [100]. Пусть  $P$  — треугольник, содержащий начало координат, со сторонами  $l_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , и опорной функцией  $a(-\phi)$ . Выберем множество  $D = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  комплексных чисел  $\lambda_k$  так, чтобы каждая точка  $\lambda_k$  лежала на одной из трех нормалей к сторонам  $l_s$ , проведенных через начало координат. Точки  $\lambda_k$  расположим на нормалях так, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1)  $\lambda_k$  — простые нули некоторой целой функции  $L(\lambda)$  экспоненциального типа с индикатором  $a(\phi)$ ;
- 2) ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}$  сходится к нулю равномерно внутри  $P$ ;
- 3) существует  $\mu > 1$ :  $|L(re^{i\phi})| \leq r^{-\mu} \exp[a(\phi)r]$ ,  $r \geq 1$ .

Как показано в монографии [100], такой выбор всегда возможен, причем  $E := (e^{\lambda_k z})_{k=1}^{\infty}$  — АПС в  $A(P)$ . Допустим, что она будет ПС в  $A(G_1)$ , где  $G_1$  — некоторая подобласть  $P$ . Проведем к  $G_1$  опорные прямые, параллельные сторонам  $P$ . Тогда область  $G_1$  впишется в треугольник  $P_1$ , подобный  $P$  и лежащий в  $P$ ; при этом каждая сторона  $P_1$  имеет непустое пересечение с границей  $G_1$ .

Из того, что все точки  $\lambda_k$  лежат на трех лучах, можно вывести [100, с. 7], что если какой-либо ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k z}$  сходится (точечно) в  $G_1$ , то он сходится в  $A(P_1)$ , т. е. равномерно внутри  $P_1$ . Таким образом, последовательность  $E := (e^{\lambda_k z})_{k=1}^{\infty}$  будет ПС в  $A(G_1)$  тогда и только тогда, когда  $G_1 = P_1$ . При этом область  $G_1$  получается из  $G$  преобразованиями подобия и сдвига (в  $G$ ).

Заметим, что существуют выпукло дополнимые подобласти, которые не получают друг из друга с помощью преобразований сдвига и подобия. Если, например,  $\tilde{P}$  — внутренность какого-либо выпуклого многоугольника,  $\tilde{K}_R := \{z : |z| \leq R\}$ ,  $0 < R < \infty$ , и  $\tilde{G} = \tilde{P} + \tilde{K}_R$ , то в  $\tilde{G}$  выпукло дополнима любая область вида  $\rho\tilde{G}$ ,  $0 < \rho < \infty$ , а также многоугольник  $\tilde{P}$ ; очевидно, что  $\tilde{P}$  не получается из области  $\tilde{G}$  преобразованиями подобия и сдвига. По теореме 3.17 ПС  $E$  в  $A(\tilde{G})$  продолжима в области вида  $\rho\tilde{G}$ ,  $\rho\tilde{P}$ ,  $0 < \rho < 1$ , а также в любые сдвиги этих областей, лежащие в  $\tilde{G}$ . Таким образом, степень «жесткости» свойства продолжимости в этом примере несколько уменьшается по сравнению с первым примером (в котором рассматривался треугольник  $P$ ).

**3.6.4.** Оказывается, что такое уменьшение «жесткости» свойства продолжимости модельной системы экспонент  $E$  может зайти до-

вольно далеко. В этом нас убеждает один результат, который будет сейчас сформулирован. Предварительно условимся обозначать символом  $d_\Lambda(z)$  величину  $\rho(z, \Lambda) = \min_{\lambda_k \in \Lambda} |z - \lambda_k|$ , где  $\Lambda = (\lambda_k)$  — множество попарно различных точек из  $\mathbb{C}$  такое, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = +\infty$ .

Положим еще  $D_\Lambda(r) := \sup\{d_\Lambda(z) : |z| = r\}$  для всех  $r \geq 0$  и, следуя [47], назовем  $E_\Lambda$  универсальной АПС (УАПС), если  $E_\Lambda$  — АПС в  $A(G)$ , какова бы ни была выпуклая область  $G$  в  $\mathbb{C}$  (и, в частности, вся конечная комплексная плоскость  $\mathbb{C}$ ).

**Теорема 3.18** [90]. *Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_\Lambda(n^2)}{n} = 0$ , то  $E_\Lambda$  — УАПС.*

◁ Из теоремы 13 работы [47] в частном случае  $p = 1$  следует, что если предположение теоремы 3.18 выполнено, то  $E_\Lambda$  — АПС в  $A(\mathbb{C})$ , а также в  $A(G)$ , где  $G$  — любая ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$ . Но тогда, согласно результатам А. В. Абанина (см. [2] или [3, гл. 1, § 1.9, п. 4]),  $E_\Lambda$  — УАПС. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3.18 является точной в том смысле, что ее исходное предположение  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_\Lambda(n^2)}{n} = 0$  нельзя заменить условием

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_\Lambda(n^2)}{n} < \eta$ , каким бы малым не брать число  $\eta > 0$ . Действительно, используя те же рассуждения, что и приведенные на с. 119 и 120 статьи [47] при доказательстве точности (в определенном смысле) теоремы 12 этой работы, можно для любого  $\eta > 0$  указать последовательность  $\Lambda_0 = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  простых нулей некоторой целой функции  $F_{\Lambda_0}(\lambda)$  экспоненциального типа, построенной, как в лемме 6 из § 2 главы III обзора [47], по содержащей начало координат выпуклой ограниченной области  $G_0$  с достаточно гладкой границей, для которых  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{\Lambda_0}(n^2)}{n} = \eta$ ,  $E_{\Lambda_0}$  — АПС в  $A(qG_0)$  при  $q \in (0, 1)$ , но  $E_{\Lambda_0}$  — не АПС в  $A(hG_0)$ , если  $h \in (1, +\infty)$ .

Несложный геометрический анализ показывает, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_\Lambda(n^2)}{n} = 0,$$

то любая целая функция  $F_\Lambda(z)$ , имеющая простой нуль в каждой точке  $\lambda_k$  из  $\Lambda$ , будет или целой функцией порядка больше 1, или иметь максимальный тип при порядке 1. Таким образом, если  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  — УАПС, то любая целая функция  $F_\Lambda(z)$ , у которой каждая точка  $\lambda_k$  — простой нуль (но, возможно, есть и другие нули), не может быть целой функцией экспоненциального типа.

Это же заключение можно установить и другим, довольно простым способом. Пусть  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  — нули целой функции экспоненциального типа  $F(z) = \sum_{k=0}^\infty \gamma_k z^k$  степени  $\leq \sigma < \infty$ . Как хорошо известно и как легко проверить непосредственно, сумма  $g(z)$  любого ряда  $\sum_{k=1}^\infty c_k e^{\lambda_k z}$ , равномерно сходящегося внутри выпуклой области  $G$ , содержащей круг  $\bar{K}_\sigma = \{z : |z| \leq \sigma\}$ , удовлетворяет в некоторой окрестности нуля однородному линейному дифференциальному уравнению бесконечного порядка  $\sum_{k=0}^\infty \gamma_k y^{(k)}(z) = 0$ . Но последнему уравнению не удовлетворяет, например, функция  $z^{k_0}$ , где  $k_0$  — номер первого отличного от нуля тейлоровского коэффициента  $\gamma_k$  функции  $F$ . Значит, в этом случае  $E_\Lambda$  не может быть АПС в  $A(G)$ , где  $G$  — любая выпуклая область, содержащая  $\bar{K}_\sigma$ . Отсюда уже следует, что если  $E = (e^{\lambda_k z})_{k=1}^\infty$  — УАПС, то  $F(z) \notin [1, \infty)$ .

В связи с теоремой 3.18 заметим, что позднее она была уточнена и перенесена на многомерную ситуацию А. В. Абаниным [2, 3]. Именно, из результатов главы I (§ 1.9, теорема 1.9.12) диссертации [3] следует фактически, что если  $\lim_{|z|_p \rightarrow \infty} \frac{d_\Lambda(z)}{|z|_p^{1/2}} = 0$ , то  $E_\Lambda$  — УАПС в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ . Там же показано, что последний результат неумлучшаем в следующем смысле: для любого  $\varepsilon > 0$  найдется последовательность  $\Lambda$  в  $\mathbb{C}^p$  такая, что  $\lim_{|z|_p \rightarrow \infty} \frac{d_\Lambda(z)}{|z|_p^{\frac{1}{2} + \varepsilon}} = 0$ , но  $E_\Lambda$  — не УАПС в  $\mathbb{C}^p$ . Напомним, что  $E_\Lambda$  — УАПС в  $\mathbb{C}^p$ , если  $E_\Lambda$  — АПС в  $A(G)$  для любой выпуклой области  $G$  из  $\mathbb{C}^p$ .

Отметим, что в главе II обзорной статьи [47] достаточно подробно изучены свойства ПС Миттаг — Леффлера  $E_{\rho, \Lambda} := \{E_\rho(\lambda_k z)\}_{k=1}^\infty$ , где  $E_\rho(z) := \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(1+n/\rho)}$ ,  $\rho > 0$ ,  $\Gamma$  — гамма-функция. В частности, там показано, что если  $E_{\rho, \Lambda}$  является ПС или АПС в  $A(G)$ , где  $G$  —  $\rho$ -выпуклая область, содержащая начало координат, то  $E_{\rho, \Lambda}$  продолжима в любую  $\rho$ -выпукло дополнимую подобласть  $G$  (определения  $\rho$ -выпуклой и  $\rho$ -выпукло дополнимой области можно найти, например, в [47, гл. II, § 1]).

**3.6.5.** Если обратиться к общим ПС и АПС аналитических функций, то продолжимость таких систем, если она вообще имеется, не обязательно связана с понятием выпуклой дополнимости или ее обобщениями (таким, например, как  $\rho$ -выпуклая дополнимость). В этом можно убедиться на простом примере, взятом из [47]. Пусть  $G$  — односвязная область в  $\mathbb{C}$  и  $w = \phi(z)$  — функция из  $A(G)$ , отображающая взаимно однозначно область  $G$  на круг  $K_R$ . Пусть, далее,

$D_{(r)} := \{z \in G : |\phi(z)| < r\}$ ,  $0 < r \leq R$ . Тогда  $\Phi := \{(\phi(z))^n\}_{n=0}^\infty$  — абсолютный базис (подавно АПС) в  $A(D_{(r)})$ ,  $0 < r \leq R$ , но  $\Phi$  — не ПС в любой внутренней подобласти  $G$ , отличной от  $D_{(r)}$ . Таким образом, в этом примере АПС  $\Phi$  в  $A(G)$  продолжима в каждую область  $D_{(r)}$  и только такую подобласть  $G$ . При этом, если  $G$  — некруговая область, то области  $D_{(r)}$  не подобны  $G$ ; в частности, если область  $G$  выпукла, то область  $D_{(r)}$  не обязательно выпукло дополнима.

### 3.7. АПС экспонент с мнимыми показателями в пространствах бесконечно дифференцируемых функций и продолжимость по Уитни

**3.7.1.** Пусть  $Q$  — компакт в  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 1$ , с внутренностью  $Q^0 := \text{int } Q$ . Он называется толстым [79, 169], если  $Q^0 \neq \emptyset$  и  $Q = \overline{Q^0}$ . Обозначим символом  $F_G$  совокупность всех толстых компактов, содержащихся в некотором открытом множестве  $G$  из  $\mathbb{R}^p$  (в случае  $G = \mathbb{R}^p$  будем писать  $F$  вместо  $F_{\mathbb{R}^p}$ ). Пусть  $C^\infty[Q]$  — пространство Фреше всех комплекснозначных функций, бесконечно дифференцируемых в  $Q^0$  и равномерно непрерывных в  $Q^0$  вместе со своими частными производными. Топология в  $C^\infty[Q]$  задается набором норм

$$\|y\|_m := \sup \left\{ |y^{(\alpha)}(x)| : x \in Q^0, |\alpha|_p \leq m \right\}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Здесь  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}_0^p$ ,  $\mathbb{N}_0 := (0, 1, \dots)$ ;  $|\alpha|_p = \sum_{k=1}^p |\alpha_k|$ .

Как известно, любая функция  $y$  из  $C^\infty[Q]$ , где  $Q \in F$ , равно как и каждая ее частная производная, может быть продолжена по непрерывности на весь компакт  $Q$ .

Далее, если  $G$  — произвольное непустое открытое подмножество  $\mathbb{R}^p$ , то  $C^\infty(G)$  — пространство Фреше всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых в  $G$  функций с топологией, определенной преднормами

$$\|y\|_{m,Q} := \sup \left\{ |y^{(\alpha)}(x)| : |\alpha|_p \leq m, x \in Q \right\}, \quad m = 0, 1, \dots; Q \in F_G.$$

Очевидно, что для любого  $K \in F_G$   $C^\infty(G) \hookrightarrow C^\infty[K]$ . Далее, для всех открытых непустых множеств  $G$  и любых компактов  $Q$  из  $F$   $C^\infty(\mathbb{R}^p) \hookrightarrow C^\infty(G)$ ,  $C^\infty(\mathbb{R}^p) \hookrightarrow C^\infty[Q]$ . Наконец,  $C^\infty(G) = \varprojlim_{K \in F_G} C^\infty[K]$ .



Назовем компакт  $K$  компактом Уитни, если

$$\forall f \in C^\infty[K] \exists g \in C^\infty(\mathbb{R}^p) : g|_K = f.$$

Иначе говоря,  $K$  — компакт Уитни тогда и только тогда, когда операция «сужения» на  $K$   $\Pi_K y = y|_K$  для любого  $y \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$  сюръективна (т. е. оператор  $\Pi_K$  отображает  $C^\infty(\mathbb{R}^p)$  на  $C^\infty[K]$ ).

Вновь рассмотрим систему экспонент с чисто мнимыми показателями

$$E_\mu := \{ \exp i \langle \mu_l, x \rangle_p \}_{|l|_p=0}^\infty, \quad l = (l_1, \dots, l_p), \quad l_j = 0, \pm 1, \dots; \quad (3.13)$$

$$j = 1, 2, \dots, p, \quad \mu_l = (\mu_{1,l}, \dots, \mu_{p,l}) \in \mathbb{R}^p.$$

**3.7.2.** В разделе 3.7 находятся условия, при которых в пространстве  $C^\infty[Q]$ , где  $Q \in F$ , имеется хотя бы одна АПС вида (3.13), а также критерии абсолютной сходимости в  $C^\infty[Q]$  и  $C^\infty(G)$  ряда экспонент с чисто мнимыми показателями:

$$\sum_{|l|_p=0}^\infty d_l \exp i \langle \mu_l, x \rangle_p; \quad d_l \in \mathbb{C}; \quad \mu_l = (\mu_{1,l}, \dots, \mu_{p,l}) \in \mathbb{R}^p. \quad (3.14)$$

Предварительно условимся называть ассоциированным с рядом (3.14) ряд, полученный его почленным дифференцированием любое число раз по переменным  $x_1, \dots, x_p$ .

Запишем вначале ряд утверждений для ряда (3.14).

1. Ряд (3.14) сходится абсолютно в  $C^\infty(\mathbb{R}^p)$ .
2. Ряд (3.14) абсолютно сходится в  $C^\infty(G)$  для любого открытого множества  $G$  из  $\mathbb{R}^p$ .
3. Ряд (3.14) абсолютно сходится в  $C^\infty(G)$  для некоторого непустого открытого множества  $G$  из  $\mathbb{R}^p$ .
4. Ряд (3.14) абсолютно сходится в  $C^\infty[K]$  для любого компакта  $K$  из  $F$ .
5. Ряд (3.14) абсолютно сходится в  $C^\infty[K]$  для некоторого компакта  $K$  из  $F$ .
6. Ряд (3.14) и все ассоциированные с ним ряды сходятся абсолютно в любой точке из  $\mathbb{R}^p$ .
7. Ряд (3.14) и все ассоциированные с ним ряды сходятся абсолютно в некоторой точке из  $\mathbb{R}^p$ .
8. Для любого  $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$   $\sum_{|l|_p=0}^\infty |d_l| |\mu_l|^\alpha < \infty$ , где

$$|\mu_l|^\alpha := |\mu_{1,l}|^{\alpha_1} \dots |\mu_{p,l}|^{\alpha_p}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p).$$

9. Ряд (3.14) сходится в  $C^\infty(\mathbb{R}^p)$ .
10. Ряд (3.14) сходится в  $C^\infty(G)$  для любого открытого множества  $G$  из  $\mathbb{R}^p$ .
11. Ряд (3.14) сходится в  $C^\infty(G)$  для некоторого непустого открытого множества  $G$  из  $\mathbb{R}^p$ .
12. Ряд (3.14) сходится в  $C^\infty[K]$  для любого компакта  $K$  из  $F$ .
13. Ряд (3.14) сходится в  $C^\infty[K]$  для некоторого компакта  $K$  из  $F$ .
14. Ряд (3.14) и все ассоциированные с ним ряды сходятся в любой точке из  $\mathbb{R}^p$ .
15. Ряд (3.14) и все ассоциированные с ним ряды сходятся в некоторой точке из  $\mathbb{R}^p$ .
16. Для любого  $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$   $\sup_{|l|_p \geq 0} |d_l| |\mu_l|^\alpha < +\infty$ .

**Лемма 3.2.** а) Любое из утверждений 1)–7) равносильно утверждению 8).

б) Любое из утверждений 9)–15) влечет за собой утверждение 16). При этом

$$\begin{aligned} 9) \Rightarrow 10) \Rightarrow 11) \Rightarrow 13) \Rightarrow 15), \\ 9) \Rightarrow 10) \Rightarrow 12) \Rightarrow 14). \end{aligned}$$

в) Любое из утверждений 1)–8) влечет за собой каждое из утверждений 9)–16).

г) Если дополнительно выполняется условие

$$\overline{\lim}_{|l|_p \rightarrow \infty} \frac{\ln |l|_p}{\ln |\mu_l|_p} < \infty, \quad (3.15)$$

то  $16) \Rightarrow 8)$ , и в этом случае все утверждения 1)–16) равносильны.

Простое доказательство леммы 3.2, которое здесь опущено, основано на равенстве  $|\exp i\langle \mu, x \rangle_p| = 1$  для всех  $\mu, x \in \mathbb{R}^p$  и на том факте, что

$$\sum_{|l|_p=0}^{\infty} \frac{1}{(|l|_p)^\beta} < \infty \quad \forall \beta > 2p.$$

**Теорема 3.19.** Пусть  $K$  — компакт Уитни,  $D_{a,b}$  — любой открытый прямоугольный параллелепипед в  $\mathbb{R}^p$ , содержащий  $K$ ,

$$D_{a,b} := \{x \in \mathbb{R}^p : -\infty < a_j < x_j < b_j < +\infty, j = 1, 2, \dots, p\}.$$

Тогда система

$$\mathcal{E}_p^{a,b} := \left\{ \left\{ \exp 2\pi i \left\langle l, \frac{x}{b-a} \right\rangle_p \right\}_{|l|_p=0}^\infty, \quad l = (l_1, \dots, l_p), \right. \\ \left. l_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad \frac{x}{b-a} := \left( \frac{x_j}{b_j - a_j} \right)_{j=1}^p \right\}$$

является АПС в  $C^\infty[K]$ .

◁ Для любого открытого множества  $G$  из  $\mathbb{R}^p$  символом  $C_0^\infty(G)$  обозначим совокупность всех функций из  $C^\infty(G)$  с носителями в  $G$ . Иначе говоря,  $f \in C_0^\infty(G)$  тогда и только тогда, когда  $f \in C^\infty(G)$  и в  $G$  имеется компакт  $K_1$  такой, что  $f \equiv 0$  в  $G \setminus K_1$ . Пусть  $y(x)$  — любая функция из  $C^\infty(K)$  и  $Y(x)$  — ее продолжение до функции из  $C^\infty(\mathbb{R}^p)$ :  $Y \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$ ,  $Y|_K = y$ .

Положим  $d := \rho(K, \partial D_{a,b}) = \min\{|x - v|_p : x \in K, v \in \partial D_{a,b}\}$ .

Как уже отмечалось ранее, из доказательства теоремы 1.4.1. в [138] следует (в случае, когда  $X = \mathbb{R}^p$ ), что можно определить эффективно функцию  $h$  из  $C_0^\infty(\mathbb{R}^p)$ , для которой

$$h|_K \equiv 1, \quad \text{supp } h \subset (K)_{d/2} := \left\{ x \in \mathbb{R}^p : \rho(x, K) \leq \frac{d}{2} \right\}.$$

Тогда  $h_1 := h \cdot Y \in C_0^\infty(D_{a,b})$  и  $h_1|_K = y$ . Составим ряд Фурье по системе  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  для функции  $h_1$ :

$$h_1 \sim \sum_{|l|_p=0}^\infty v_l \exp i2\pi \left\langle l, \frac{x}{b-a} \right\rangle_p, \quad (3.16)$$

где

$$\prod_{j=1}^p (b_j - a_j) \cdot v_l = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_p}^{b_p} h_1(x) \exp \left( -2\pi i \left\langle l, \frac{x}{b-a} \right\rangle_p \right) dx, \quad (3.17) \\ l \in Z^p, \quad Z := (0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Интегрируя по частям равенство (3.17) и учитывая, что вблизи границы  $D_{a,b}$   $h_1^{(\gamma)}(x) \equiv 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{N}_0^p$ , получим для любого  $\beta$  из  $\mathbb{N}_0^p$ :

$$\prod_{j=1}^p (b_j - a_j) \cdot |v_l| \leq \frac{(b-a)^\beta}{(2\pi)^{|\beta|_p} |l|^\beta} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_p}^{b_p} |h_1^{(\beta)}(x)| dx,$$

где

$$(b-a)^\beta := \prod_{j=1}^p (b_j - a_j)^{\beta_j},$$

$$|l|^\beta := |l_1|^{\beta_1} \dots |l_p|^{\beta_p}, \quad (0)^{\beta_j} = 1, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Отсюда для  $l \in Z^p$ ,  $\beta \in \mathbb{N}_0^p$ ,

$$(2\pi)^{|\beta|_p} |v_l| \leq \frac{(b-a)^{\beta+1}}{|l|^\beta} \sup \left\{ |h_1^{(\beta)}(x)| : x \in D_{a,b} \right\}. \quad (3.18)$$

Далее, если  $l \in Z^p$ ,  $m \in \mathbb{N}_0^p$  и  $F = \bar{D}_{a,b}$ , то

$$\begin{aligned} & \left\| v_l \exp 2\pi i \left\langle l, \frac{x}{b-a} \right\rangle_p \right\|_{m,F} \leq \\ & \leq |v_l| (2\pi)^m \cdot \max \{ |l|^\gamma \cdot (b-a)^{-\gamma} : |\gamma|_p \leq m \}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Положим  $\beta_j = \gamma_j + 2p$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , для каждого  $\gamma$  из  $\mathbb{N}_0^p$  такого, что  $|\gamma|_p \leq m$ . Тогда

$$\begin{aligned} & |\beta|_p = |\gamma|_p + 2p^2 \leq m + 2p^2; \\ & \sup \left\{ |h_1^{(\beta)}(x)| : x \in D_{a,b} \right\} \leq \|h_1\|_{m+2p^2, F}. \end{aligned}$$

Оценки (3.18), (3.19) приводят к неравенству

$$\begin{aligned} & \left\| v_l \exp 2\pi i \left\langle l, \frac{x}{b-a} \right\rangle_p \right\|_{m,F} \leq A_m \|h_1\|_{m+2p^2, F} \cdot |l|^{-2p}, \\ & l \in Z^p, \quad m \geq 0, \quad F = \bar{D}_{a,b}. \end{aligned}$$

Следовательно, в  $C^\infty(\bar{D}_{a,b})$  ряд в правой части (3.16) сходится абсолютно. Но тогда этот ряд сходится равномерно на  $\bar{D}_{a,b}$ , откуда

$$h_1(x) = \sum_{|l|_p}^\infty v_l \exp 2\pi i \left\langle l, \frac{x}{b-a} \right\rangle_p \quad \forall x \in \bar{D}_{a,b}. \quad (3.20)$$

В частности, для любого  $x$  из  $K$  сумма ряда в правой части (3.20) равна  $h_1(x) = h_1|_K = y(x)$ , причем сам ряд сходится абсолютно в  $C^\infty(K)$ , чем и завершается доказательство теоремы.  $\triangleright$

Следующий результат почти очевиден.

**Теорема 3.20.** Пусть  $K$  — произвольный толстый компакт в  $\mathbb{R}^p$  и пусть в  $C^\infty[K]$  имеется хотя бы одна АПС  $\mathcal{E}_p^{a,b}$ , где  $K \subset D_{a,b}$ . Тогда  $K$  — компакт Уитни.

◁ Если система вида  $\mathcal{E}_p^{a,b}$ , где  $D_{a,b}$  — (открытый) прямоугольный параллелепипед, содержащий  $K$ , является АПС в  $C^\infty([K])$ , то для любой функции  $y$  из  $C^\infty[K]$  найдется ряд вида

$$\sum_{|l|_p=0}^{\infty} y_l \exp i \langle \mu_l, x \rangle_p, \quad \mu_l \in \mathbb{R}^p, \quad l \in \mathbb{N}_0^p, \quad (3.21)$$

сходящийся абсолютно в  $C^\infty[K]$ , причем его сумма (на  $K$ ) равна  $y(x)$ . По лемме 3.2 ряд (3.21) сходится абсолютно в  $C^\infty(\mathbb{R}^p)$ . Если  $Y(x)$  — его сумма, то  $Y \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$  и  $Y|_K = y$ . ▷

**3.7.3.** Заметим, что если ряд (3.21) сходится абсолютно в  $C^\infty(\mathbb{R}^p)$ , то по той же лемме 3.2 имеет место ее утверждение а). Поэтому каждый ряд  $\sum_{|l|_p=0}^{\infty} y_l (\exp i \langle \mu_l, x \rangle_p)^{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ , сходится абсолютно в любой точке  $x$  из  $\mathbb{R}^p$ . Если  $Y(x)$  — сумма ряда (3.21), то  $|Y(x)| \leq \sum_{|l|_p=0}^{\infty} |y_l| < \infty$  при всех  $x \in \mathbb{R}^p$  и, кроме того,  $\|Y^{(\alpha)}(x)\| \leq \sum_{|l|_p=0}^{\infty} |y_l| \cdot |\mu_l^\alpha| < +\infty$  для любого  $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ .

Обозначим символом  $BC^\infty(\mathbb{R}^p)$  множество всех функций из  $C^\infty(\mathbb{R}^p)$ , ограниченных в  $\mathbb{R}^p$  вместе со своей любой частной производной. Можно сформулировать небольшое и очевидное усиление теоремы 3.20.

**Теорема 3.21.** Если выполнены исходные предположения теоремы 3.20, то

$$\forall y \in C^\infty[K] \quad \exists y \in BC^\infty(\mathbb{R}^p) : Y|_K = y.$$

Теперь уже можно сформулировать результат критериального характера, содержащий теоремы 3.19–3.21.

**Теорема 3.22.** Пусть  $K$  — произвольный толстый компакт в  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 1$ . Тогда равносильны следующие утверждения:

- 1)  $K$  — компакт Уитни;
- 2) для любого  $y \in C^\infty[K]$  существует  $Y \in BC^\infty(\mathbb{R}^p)$ :  $Y|_K = y$ ;
- 3) в  $C^\infty[K]$  имеется АПС экспонент вида (3.13);
- 4) если  $D_{a,b}$  — любой прямоугольный открытый параллелепипед в  $\mathbb{R}^p$ , содержащий  $K$ , то соответствующая система  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  является АПС в  $C^\infty[K]$ .

◁ Импликация  $4) \Rightarrow 3)$  очевидна,  $3) \Rightarrow 1)$  следует из теоремы 3.20,  $3) \Rightarrow 2)$  — из теоремы 3.21, а  $2) \Rightarrow 1)$  вытекает из определения компакта Уитни. Наконец, импликация  $1) \Rightarrow 4)$  следует из теоремы 3.19. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ. Если справедливо одно из эквивалентных утверждений 1)–4) теоремы 3.22, то каждая функция  $y(x)$  из  $C^\infty[K]$  продолжается во все пространство  $\mathbb{R}^p$  как сумма  $Y$  некоторого ряда вида (3.14), абсолютно сходящегося в  $C^\infty(\mathbb{R}^p)$ . Но функция  $Y$ , как это следует из способа ее построения, является  $p$ -периодической с периодом  $b - a$ :  $Y(x_1) = Y(x_2)$ , если

$$x_{1,m} := (x_1)_m = (x_2)_m + b_m - a_m = x_{2,m} + b_m - a_m \quad \forall m \leq p.$$

Этот период «продолженной» функции  $y(x)$  может меняться в довольно широких пределах. Именно, можно построить требуемое продолжение  $Y(x)$  из  $C^\infty(\mathbb{R}^p)$ , если в  $\mathbb{R}^p$  найдется точка  $(\delta_1, \dots, \delta_p)$  такая, что

$$K \subset \{x : a_j < x < a_j + \delta_j, j = 1, 2, \dots, p\}.$$

Если положить  $K_j := \{(x)_j : x \in K\}$ ,  $1 \leq j \leq p$ , то последнее включение равносильно неравенствам

$$\delta_j > \text{diam } K_j := \max \{(x)_j - (t)_j : x, t \in K\}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Итак, конструктивное построение продолжения в  $C^\infty(\mathbb{R}^p)$  каждой функции из  $C^\infty[K]$ , где  $K$  — компакт Уитни, возможно с периодом  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$  в случае, когда  $\delta_j \geq \text{diam } K_j$  для любого  $j \leq p$ .

**3.7.4.** Согласно [108, 138, 180, 181], связный толстый компакт  $K$  в  $\mathbb{R}^p$  является компактом Уитни, если  $K$  обладает следующим свойством  $(P)$ : существуют постоянные  $M < +\infty$  и  $\gamma \in (0, 1]$  такие, что каждую пару точек  $X^{(1)}, X^{(2)}$  из  $K$  можно соединить в  $K$  спрямляемой кривой  $L$  с длиной, не превосходящей  $M(|X^{(1)} - X^{(2)}|_p)^\gamma$  и с концами в  $X^{(1)}$  и  $X^{(2)}$ . Очевидно, что каждый выпуклый толстый компакт в  $\mathbb{R}^p$  обладает свойством  $(P)$ . Отсюда следует по теореме 3.22, что в  $C^\infty[K]$  имеется АПС вида (4.11), если  $K$  — связный толстый компакт со свойством  $(P)$  и, в частности, выпуклый компакт в  $\mathbb{R}^p$ .

Более того, анализ статей [180, 181] показывает, что если  $K$  обладает свойством  $(P)$ , то для любой функции  $y(x)$  из  $C^\infty[K]$  ее «продолженная в  $\mathbb{R}^p$ » функция  $Y(x)$  из  $C^\infty(\mathbb{R}^p)$  может быть определена

конструктивно. Назовем компакт Уитни с таким свойством эффективным Уитни-компактом.

Из доказательства теоремы 3.19 видно, что в случае, когда  $K$  — эффективный компакт Уитни в  $C^\infty[K]$  и  $K \subset D_{a,b}$ , точно так же устанавливается, что  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  — ЭАПС в  $C^\infty[K]$ . Кроме того, если  $K$  — любой толстый компакт в  $\mathbb{R}^p$  и если в  $C^\infty[K]$  существует хотя бы одна ЭАПС  $\mathcal{E}_p^{a,b}$ , где  $K \subseteq D_{a,b}$ , то  $K$  — эффективный компакт Уитни; более того, при тех же исходных предположениях для любой функции  $y(x)$  из  $C^\infty[K]$  можно определить конструктивно функцию  $Y(x)$  из  $BC^\infty(\mathbb{R}^p)$ , для которой  $Y|_K = y$ . На основе этих соображений можно уже сформулировать аналог теоремы 3.22.

**Теорема 3.23.** *Если  $K$  — какой-либо толстый компакт в  $\mathbb{R}^p$ , то следующие утверждения равносильны:*

- 1)  $K$  — эффективный компакт Уитни;
- 2) для любой функции  $y(x)$  из  $C^\infty[K]$  можно конструктивно определить функцию  $Y(x)$  из  $BC^\infty(\mathbb{R}^p)$ , для которой  $Y|_K = y$ ;
- 3) в  $C^\infty[K]$  имеется ЭАПС экспонент вида (3.13);
- 4) если  $D_{a,b}$  — любой прямоугольный открытый параллелепипед в  $\mathbb{R}^p$ , содержащий  $K$ , то соответствующая система  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  является ЭАПС в  $C^\infty[K]$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В случае  $p = 1$  компакт  $F$  является связным и толстым тогда и только тогда, когда  $F = [a, b]$ , где  $-\infty < a < b < +\infty$ . Очевидно, что любой такой компакт обладает свойством  $(P)$  (при этом  $\gamma = M = 1$ ). Таким образом, любой сегмент  $[a, b]$  в  $\mathbb{R}^1$  является компактом Уитни. Тем самым получено другое доказательство установленного выше результата о существовании эффективно определяемого оператора продолжения из  $C^\infty[a, b]$  в  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

**3.7.5.** Наличие в каком-либо пространстве бесконечно дифференцируемых функций хотя бы одной АПС экспонент вида (3.13) влияет и на другие характеристики данного пространства. Покажем это на одном довольно общем примере, в котором  $X_0$  — произвольно зафиксированная точка из  $\mathbb{R}^p$ ,

$$C_{X_0}^\infty := \varinjlim_m C^\infty[Q_m], \quad Q_m := \left\{ X \in \mathbb{R}^p : |X - X_0|_p \leq \frac{1}{m} \right\} \quad \forall m \geq 1.$$

Пусть  $H$  — какое-либо полное отделимое бочечное пространство бесконечно дифференцируемых функций такое, что

$$BC^\infty(\mathbb{R}^p) \hookrightarrow H \hookrightarrow C_{X_0}^\infty. \quad (3.22)$$

Пусть, далее,  $E_\mu$  — система экспонент вида (3.13). По лемме 3.1

$$A_2(E_\mu, C_{X_0}^\infty) = A_2(E_\mu, BC^\infty(\mathbb{R}^p)) = \left\{ d = (d_k)_{|k|_p=0}^\infty : \right. \\ \left. \forall m \geq 1 [d]_m := \max \left[ \sum_{|k|_p=0}^\infty |d_k| |(\mu_k)^\alpha| : |\alpha|_p \leq m, \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] < +\infty \right\}.$$

Учитывая соотношения (3.22), заключаем, что

$$A_2(E_\mu, C_{X_0}^\infty) = A_2(E_\mu, H) = A_2(E_\mu, BC^\infty(\mathbb{R}^p)).$$

Топология в этих пространствах, имеющих одинаковые наборы элементов, определяется одной и той же последовательностью неубывающих норм  $\{[d_m]\}_{m=1}^\infty$ , и все они — пространства Фреше.

Так как пространство Фреше  $A_2(E_\mu, H)$  совершенно полно, а само  $H$  бочечно, то по теореме об открытом отображении (см., например, [125, гл. VI, теорема 7, с. 170]) отображение  $L_{A_2}^{E_\mu} : A_2(E_\mu, H) \rightarrow H$  открыто. Но тогда по предложению 13 главы VI той же книги [125]  $H$  — пространство Фреше. Таким образом, справедлива

**Теорема 3.24.** Пусть  $H$  — полное отделимое бочечное ЛВП со свойством (3.22) и пусть в  $H$  имеется хотя бы одна АПС экспонент с чисто мнимыми показателями. Тогда  $H$  — пространство Фреше.

К сожалению, теорема 3.24 не допускает прямого обращения. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пространство  $C^\infty(G)$ , где  $G$  — произвольное непустое открытое множество в  $\mathbb{R}^p$ . Отметим вначале одно простое вспомогательное утверждение.

**Лемма 3.3.** Пусть  $G$  — непустое открытое множество в  $\mathbb{R}^p$  и пусть в  $C^\infty(G)$  имеется хотя бы одна АПС вида (3.13). Тогда

$$\forall y \in C^\infty(G) \exists Y \in BC^\infty(\mathbb{R}^p) : Y|_G = y.$$

◁ Пусть  $E_\nu := \{\exp i\langle \nu_k, X \rangle_p\}_{|k|_p=0}^\infty$  — АПС в  $C^\infty(G)$  и пусть  $y(x)$  — произвольная функция из  $C^\infty(G)$ . Тогда найдется абсолютно сходящийся в  $C^\infty(G)$  ряд по системе  $E_\nu$ , сумма которого совпадает с  $y(X)$ :

$$y(X) = \sum_{|k|_p=0}^\infty b_k \exp i\langle \nu_k, X \rangle_p, \quad X \in G.$$



Очевидно, что последний ряд сходится абсолютно в  $C^\infty[K]$ , если  $K$  — любой компакт  $G$ . Согласно утверждению а) леммы 3.2

$$\sum_{|l|_p=0}^{\infty} |b_l| |\nu_l|^\alpha < \infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^p.$$

По той же лемме этот ряд сходится абсолютно в  $C^\infty(\mathbb{R}^p)$ ; при этом, если  $Y(X)$  — его сумма, то

$$|Y^{(\alpha)}(X)| \leq \sum_{|l|_p=0}^{\infty} |b_l| |\nu_l|^\alpha < \infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^p, \forall X \in \mathbb{R}^p,$$

где

$$|\nu_l|^\alpha = |\nu_{l,1}|^{\alpha_1} \dots |\nu_{l,p}|^{\alpha_p}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p), \quad \nu_l = (\nu_{l,1}, \dots, \nu_{l,p}).$$

Ясно, что  $Y \in BC^\infty(\mathbb{R}^p)$  и  $Y|_G = y$ .  $\triangleright$

**Теорема 3.25.** Если  $G$  — открытое непустое множество в  $\mathbb{R}^p$ , то в  $C^\infty(G)$  нет ни одной АПС вида (3.13)

$\triangleleft$  Пусть сначала граница  $\partial G$  множества  $G$  содержит хотя бы одну конечную точку  $\gamma$ . Как нетрудно убедиться, функция

$$\lambda(X) := \left[ \sum_{j=1}^p (x_j - \gamma_j)^2 \right]^{-1}$$

принадлежит  $C^\infty(G)$ . Однако, она неограничена в  $G$  и потому не может быть продолжена из  $G$  в  $\mathbb{R}^p$  до некоторой функции из  $BC^\infty(\mathbb{R}^p)$ . Если же  $\partial G$  не содержит ни одной конечной точки, то множество  $G$  неограничено в  $\mathbb{R}^p$ . Но тогда функция  $f(X) = \sum_{j=1}^p (x_j)^2$  принадлежит  $C^\infty(G)$ , но неограничена в  $G$  и потому также не может быть представлена в виде суммы ряда, сходящегося абсолютно в  $C^\infty(G)$  (а, следовательно, и в  $BC^\infty(\mathbb{R}^p)$ ).  $\triangleright$

В связи с теоремами 3.24, 3.25 естественным образом возникает задача об описании всех пространств Фреше бесконечно дифференцируемых функций, имеющих хотя бы одну АПС вида (3.13). Ясно лишь, что любая функция из такого пространства, непрерывно вложенного хотя бы в одно пространство  $C_{X_0}^\infty$ , должна допускать продолжение до функции из  $BC^\infty(\mathbb{R}^p)$ .

Основные результаты этого раздела содержатся в работах [161, 162].

### 3.8. Ряды экспонент с мнимыми показателями в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций

**3.8.1.** Результаты, аналогичные изложенным в разделе 3.7 для пространств  $C^\infty[F]$  и  $C^\infty(G)$ , можно получить и для весьма общих классов весовых пространств типа Данжуа — Карлемана бесконечно дифференцируемых функций. Некоторые из таких классов описываются в настоящем разделе. Приведенные в нем результаты взяты из работ автора [80, 85].

Пусть  $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ . Весовой функцией  $\phi$  будем называть отображение  $\mathbb{N}_0^p \times (0, +\infty)$  в  $(0, +\infty)$  со следующими свойствами:

- а) для любого  $h \in (0, +\infty)$   $\inf\{\phi(\alpha, h) : \alpha \in \mathbb{N}_0^p\} > 0$ ;
- б) для любых  $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ ,  $h_2 \in (0, +\infty)$  и  $h_1 \in [h_2, +\infty)$   $\phi(\alpha, h_1) \geq \phi(\alpha, h_2)$ .

Пусть  $G$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 1$ . Положим для любого  $h$  из  $(0, +\infty)$  и весовой функции  $\phi$

$$E_h^\phi(G) := \left\{ y \in C^\infty(G) : \right. \\ \left. \|y\|_h^\phi := \sup \left[ \frac{|y^{(\alpha)}(X)|}{\phi(\alpha, h)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p, X \in G \right] < +\infty \right\}; \\ E_{h,c}^\phi(G) := \left\{ y \in BC^\infty(G) : \|y\|_h^\phi < \infty \right\}.$$

Здесь  $X = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ ;  $BC^\infty(G)$  — множество всех функций из  $B^\infty(G)$ , равномерно непрерывных в  $G$  вместе с любой своей производной, а  $B^\infty(G)$  — пространство Фреше всех функций из  $C^\infty(G)$ , ограниченных в  $G$  вместе с каждой своей (частной) производной. Топология в  $B^\infty(G)$  вводится набором норм

$$\|y\|_k := \sup \left\{ |y^{(\alpha)}(X)| : X \in G, |\alpha|_p \leq k \right\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Множество  $BC^\infty(G)$  замкнуто в  $B^\infty(G)$  в индуцированной топологии и потому также является пространством Фреше.

Ряд условий, при которых пространство  $BC^\infty(G)$  совпадает с  $B^\infty(G)$  или же является его собственным подпространством, приведен в работе [82]. В частности, согласно теореме 5 этой статьи

равенство  $BC^\infty(G) = B^\infty(G)$  имеет место для любой ограниченной непустой выпуклой области  $G$  в  $\mathbb{R}^p$ , а также для  $G = \mathbb{R}^p$ .

Как выше,  $C_0^\infty(G)$  — это множество всех функций из  $C^\infty(G)$  с компактными носителями. Очевидны включения

$$C_0^\infty(G) \subseteq BC^\infty(G) \subseteq B^\infty(G) \subseteq C^\infty(G).$$

При этом [138], если  $G \neq \emptyset$ , то  $C_0^\infty(G)$  содержит функции, отличные от нуля. Далее, если  $d \in [0, +\infty)$ , то можно образовать пространства

$$E_{(\phi)}^d(G) := \varprojlim_{d < h < +\infty} E_h^\phi(G); \quad E_{(\phi)}^{d,c}(G) := \varprojlim_{d < h < +\infty} E_{h,c}^\phi(G).$$

Так как  $E_h^\phi(G)$  —  $B$ -пространство, а  $E_{h,c}^\phi(G)$  — его замкнутое подпространство, то  $E_{(\phi)}^d(G)$  — пространство Фреше, а  $E_{(\phi)}^{d,c}(G)$  — его замкнутое подпространство (и, следовательно, тоже пространство Фреше).

Если же  $d \in (0, +\infty]$ , то определим пространства

$$E_{\{\phi\}}^d(G) := \varprojlim_{0 < h < d} E_h^\phi(G);$$

$$E_{\{\phi\}}^{d,c}(G) := \varprojlim_{0 < h < d} E_{h,c}^\phi(G) = \varprojlim_{0 < h_s \uparrow d} E_{h_s,c}^\phi(G).$$

При этом  $E_{\{\phi\}}^d(G)$  и  $E_{\{\phi\}}^{d,c}(G)$  —  $IF$ -пространства, непрерывно вложенные в  $B^\infty(G)$ .

Пусть еще при любом  $l \geq 1$   $G_l$  — ограниченное непустое открытое множество в  $\mathbb{R}^p$  и  $\tilde{G}_l \subset G_{l+1} \subset G = \bigcup_{m=1}^\infty G_m$ . Определим еще две пары пространств. Именно, если  $d \in [0, +\infty)$ , то

$$E_{(\phi)}^d[G] := \varprojlim_{l \uparrow \infty} E_{(\phi)}^d(G_l); \quad E_{(\phi)}^{d,c}[G] = \varprojlim_{m \uparrow \infty} E_{(\phi)}^{d,c}(G_m).$$

Как нетрудно проверить,  $E_{(\phi)}^d[G] = E_{(\phi)}^{d,c}[G] = \varprojlim_{\infty > h_m \downarrow d} E_{h_m}^\phi(G_m)$ .

Если же  $d \in (0, +\infty]$ , то полагаем

$$E_{\{\phi\}}^d[G] := \varprojlim_{l \uparrow \infty} E_{\{\phi\}}^d(G_l); \quad E_{\{\phi\}}^{d,c}[G] = \varprojlim_{l \uparrow \infty} E_{\{\phi\}}^{d,c}(G_l).$$

И здесь  $E_{\{\phi\}}^d[G] = E_{\{\phi\}}^{d,c}[G]$ .

При описании топологических свойств введенных пространств весьма полезна

**Лемма 3.4.** Пусть  $G_1, G_2$  — открытые множества в  $\mathbb{R}^p$  такие, что  $G_1$  ограничено в  $\mathbb{R}^p$ ,  $\bar{G}_1 \subset G_2$ , а весовая функция  $\phi(\alpha, h)$  удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \exists h_2 \in (0, +\infty), \exists h_1 \in (h_2, +\infty) : \\ \lim_{|\alpha|_n \rightarrow \infty} \frac{\phi(\alpha, h_2)}{\phi(\alpha, h_1)} = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Тогда  $E_{h_2}^\phi(G_2)$  вполне непрерывно вложено в  $E_{h_1}^\phi(G_1)$ .

Доказательство этой леммы совершенно аналогично доказательству леммы 1.2 из [80] и потому опускается.

Из этой леммы следует, например, что когда  $d \in [0, +\infty)$ , а весовая функция  $\phi(\alpha, h)$  такова, что для любого  $h_1$  из  $(d, +\infty)$  найдется число  $h_2$  из  $(d, h_1)$ , при котором выполняется условие (3.23), то для произвольного открытого множества  $G$  в  $\mathbb{R}^p$   $E_{(\phi)}^d(G)$  —  $M^*$ -пространство<sup>1</sup>. Действительно, если положить  $h_{m_1} = h_1$  и для любого  $l \geq 1$  выбрать  $h_{m_{l+1}}$  в  $(d, h_{m_l})$  так, чтобы условие (3.23) выполнялось (при  $h_1 = h_{m_l}$ ,  $h_2 = h_{m_{l+1}}$ ), то  $E_{(\phi)}^d = \varprojlim_{\infty > h_m \downarrow d} E_{h_m}^\phi(G_m)$ , где по лемме 3.4  $E_{h_{m_{l+1}}}^\phi(G_{m_{l+1}})$  вполне непрерывно вложено в  $E_{h_{m_l}}^\phi(G_{m_l})$ , и, следовательно,  $E_{(\phi)}^d(G)$  —  $M^*$ -пространство (подавно монтелиевское).

**3.8.2.** В работе [80] приводятся критерии того, что функции  $e^{\langle a, X \rangle_p}$ , а также совокупность всех таких экспонент, принадлежат каждому из введенных в предыдущем пункте пространств [80, предложения 2.1–2.7 и их следствия, с. 97–100]. В соответствии с тематикой данного раздела мы ограничимся здесь некоторыми результатами, относящимися к экспонентам с чисто мнимыми показателями. Положим

$$e_{i,\mu}(\cdot) = \exp i \sum_{k=1}^p \mu_k x_k =: \exp i \langle \mu, X \rangle_p.$$

<sup>1</sup>В терминологии Себаштьяна-и-Силвы [129]  $M^*$ -пространством называется проективный предел последовательности  $B$ -пространств, каждое из которых вполне непрерывно вложено в предыдущее.

**Предложение 3.1.** Пусть  $d \in [0, +\infty)$ ,  $p \geq 1$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^p$ . Тогда равносильны следующие утверждения:

- A)  $e_{i,\mu}(\cdot) \in E_{(\phi)}^d(G_1)$  для некоторого непустого открытого множества  $G_1$  в  $\mathbb{R}^p$ ;
- B)  $e_{i,\mu}(\cdot) \in E_{(\phi)}^d(G)$  для любого открытого множества  $G$  в  $\mathbb{R}^p$ ;
- C) для любого  $h > d$  выполняется условие:

$$\sup \left[ \frac{|\mu_1|^{\alpha_1} \dots |\mu_p|^{\alpha_p}}{\psi(\alpha, h)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right] < +\infty. \quad (3.24)$$

Обозначим символом  $E_{\text{Im}}$  совокупность всех экспонент  $e_{i,\mu}(\cdot)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^p$ , с чисто мнимыми показателями.

**Предложение 3.2.** Пусть  $d \in [0, +\infty)$ ,  $p \geq 1$ . Равносильны следующие утверждения:

- A<sub>1</sub>)  $E_{\text{Im}} \subseteq E_{(\phi)}^d(G_1)$ , где  $G_1$  — некоторое непустое открытое множество  $\mathbb{R}^p$ ;
- B<sub>1</sub>)  $E_{\text{Im}} \subseteq E_{(\phi)}^d(G)$  для любого открытого множества в  $\mathbb{R}^p$ ;
- C<sub>1</sub>) для каждого  $h$  из  $(d, +\infty)$  выполняется условие

$$\lim_{|\alpha|_p \rightarrow +\infty} [\phi(\alpha, h)]^{1/|\alpha|_p} = +\infty. \quad (3.25)$$

**Предложение 3.3.** Пусть  $d \in (0, +\infty]$ ,  $p \geq 1$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^p$ . Тогда такие утверждения равносильны:

- A)  $e_{i,\mu}(\cdot) \in E_{\{\phi\}}^d(G_1)$  для некоторого непустого открытого множества  $G_1$  в  $\mathbb{R}^p$ ;
- B)  $e_{i,\mu}(\cdot) \in E_{\{\phi\}}^d(G)$  для любого открытого множества  $G$  в  $\mathbb{R}^p$ ;
- C) при некотором  $h$  из  $(0, d)$  выполняется условие (3.24).

**Предложение 3.4.** Если  $d \in (0, +\infty]$ ,  $n \geq 1$ , то равносильны такие утверждения:

- A<sub>1</sub>)  $E_{\text{Im}} \subseteq E_{\{\phi\}}^d(G_1)$ , где  $G_1$  — некоторое непустое открытое множество  $\mathbb{R}^p$ ;
- B<sub>1</sub>)  $E_{\text{Im}} \subseteq E_{\{\phi\}}^d(G)$ , где  $G$  — любое открытое множество в  $\mathbb{R}^p$ ;
- C<sub>1</sub>) Выполнено условие

$$\lim_{h \uparrow d} \lim_{|\alpha|_p \rightarrow \infty} [\phi(\alpha, h)]^{1/|\alpha|_p} = +\infty. \quad (3.26)$$

Предложения 3.2–3.4 доказываются одним и тем же методом, уже использованном в разделе 4.7 и основанном на равенстве

$$|e_{i,\mu}^{(\alpha)}(x)| = |\mu_1|^{\alpha_1} \dots |\mu_p|^{\alpha_p} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^p, \forall \mu \in \mathbb{R}. \quad (3.27)$$

В свою очередь, из этих предложений вытекают такие результаты для пространств  $E_{(\phi)}^d[G]$  и  $E_{\{\phi\}}^d[G]$ .

**Предложение 3.5.** Если  $d \in [0, +\infty)$ ,  $n \geq 1$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^p$ , то равносильны такие утверждения:

A)  $e_{i,\mu}(\cdot) \in E_{(\phi)}^d[G_1]$ , где  $G_1$  — некоторое непустое открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ ;

B)  $e_{i,\mu}(\cdot) \in E_{(\phi)}^d[G]$  для любого открытого множества  $G$  в  $\mathbb{R}^p$ ;

C) для всех  $h > d$  выполнено условие (3.24).

**Предложение 3.6.** Пусть  $d \in [0, +\infty)$ ,  $n \geq 1$ . Равносильны следующие утверждения:

A<sub>1</sub>)  $E_{\text{Im}} \subseteq E_{(\phi)}^d[G_1]$  для некоторого непустого открытого множества  $G_1$  в  $\mathbb{R}^p$ ;

B<sub>1</sub>)  $E_{\text{Im}} \subseteq E_{(\phi)}^d[G]$ , где  $G$  — произвольное открытое множество в  $\mathbb{R}^p$ ;

C<sub>1</sub>) условие (3.25) выполняется для любого  $h$  из  $(d, +\infty)$ .

**Предложение 3.7.** Если  $d \in (0, +\infty]$ ,  $p \geq 1$  и  $\mu \in \mathbb{R}^p$ , то равносильны такие утверждения:

A)  $e_{i,\mu}(\cdot) \in E_{\{\phi\}}^d[G_1]$  для некоторого непустого открытого множества  $G_1$  в  $\mathbb{R}^p$ ;

B)  $e_{i,\mu}(\cdot) \in E_{\{\phi\}}^d[G]$  для любого открытого множества  $G$  в  $\mathbb{R}^p$ ;

C) при некотором  $h$  из  $(0, d)$  выполняется условие (3.24).

**Предложение 3.8.** Пусть  $d \in (0, +\infty]$ ,  $p \geq 1$ . Равносильны следующие утверждения:

A<sub>1</sub>)  $E_{\text{Im}} \subseteq E_{\{\phi\}}^d[G_1]$ , где  $G_1$  — некоторое непустое открытое множество  $\mathbb{R}^p$ ;

B<sub>1</sub>)  $E_{\text{Im}} \subseteq E_{\{\phi\}}^d[G]$ , где  $G$  — любое открытое множество в  $\mathbb{R}^p$ ;

C<sub>1</sub>) выполняется условие (3.26).

**3.8.3.** Как и в предыдущем пункте, можно исследовать сходимость ряда вида (3.14) во введенных пространствах бесконечно дифференцируемых функций. Приведем здесь лишь результаты, относящиеся к абсолютной сходимости ряда (3.14). При этом их доказательства здесь опускаются, так как они проводятся тем же методом, что

и в разделе 3.7, основанном на свойстве «заразительности» сходимости ряда (3.14), обусловленном равенствами (3.27).

**Предложение 3.9.** Пусть  $p \geq 1$ ,  $h \in [0, +\infty)$  и выполнено условие (3.25). Тогда равносильны такие утверждения:

A) ряд (3.14) сходится абсолютно в  $E_h^\phi(G_1)$  (или в  $E_{h,c}^\phi(G_1)$ ), где  $G_1$  — некоторое непустое открытое множество в  $\mathbb{R}^p$ ;

B) ряд (3.14) абсолютно сходится в  $E_h^\phi(G_1)$  (или в  $E_{h,c}^\phi(G_1)$ ) для любого открытого множества  $G_1$  в  $\mathbb{R}^p$ ;

C) справедливо неравенство

$$\sum_{|l|_p=0}^{\infty} |d_l| \sup_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}_0^p} \frac{|\mu_{1,l}|^{\alpha_1} \dots |\mu_{p,l}|^{\alpha_p}}{\phi(\alpha, h)} < +\infty. \quad (3.28)$$

**Предложение 3.10.** Пусть  $d \in [0, +\infty)$ ,  $p \geq 1$  и для любого  $h > d$  выполнено условие (3.25). Тогда следующие утверждения равносильны:

A) ряд (3.14) сходится абсолютно в  $E_{(\phi)}^d(G_1)$  (или в  $E_{(\phi)}^{d,c}(G_1)$ ), где  $G_1$  — некоторое непустое открытое множество в  $\mathbb{R}^p$ ;

B) ряд (3.14) абсолютно сходится в  $E_{(\phi)}^d(G)$  (или в  $E_{(\phi)}^{d,c}(G)$ ) для любого открытого множества  $G$  в  $\mathbb{R}^p$ ;

C) неравенство (3.28) справедливо для всех  $h > d$ ;

D) ряд (3.14) абсолютно сходится в  $E_{(\phi)}^d[G_1]$ , где  $G_1$  — некоторое непустое открытое множество в  $\mathbb{R}^p$ ;

E) ряд (3.14) сходится абсолютно в  $E_{(\phi)}^d[G_1]$  для любого открытого множества  $G_1$  в  $\mathbb{R}^p$ .

Заметим лишь, что доказательство предложения 3.10 использует, в частности, импликации  $B) \Rightarrow E) \Rightarrow D); A \Rightarrow D) \Rightarrow C) \Rightarrow B) \Rightarrow A)$ .

**3.8.4.** Предложения 3.9, 3.10 позволяют охарактеризовать пространство коэффициентов ряда (3.14), абсолютно сходящегося в пространствах типа  $E_h^\phi(G)$ ,  $E_{(\phi)}^d(G)$ ,  $E_{(\phi)}^d[G]$ , если  $G$  — любое открытое множество в  $\mathbb{R}^p$ .

Пусть  $H$  — ПОЛВП с набором преднорм  $\mathcal{P} = \{p\}$ , определяющим топологию в нем. Пусть, далее,  $Y = (y_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  — некоторая счетная совокупность его ненулевых элементов. Введем, как раньше, координатное пространство

$$A_2(Y; H) := \left\{ d = (d_\alpha)_{\alpha \in \Omega} : q_p(d) := \sum_{\alpha \in \Omega} |d_\alpha| p(y_\alpha) < \infty \ \forall p \in \mathcal{P} \right\};$$

Пусть еще  $E_{i,\mu} := \{e_{i,\mu_l}(X)\}_{|l|_p=0}^\infty$ . Из предложения 3.10 следует, что если  $d \in [0, +\infty)$  и выполнено условие (3.25), то для любого открытого множества  $G$  из  $\mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} A_2(E_{i,\mu}; E_{(\phi)}^d(G)) &= A_2(E_{i,\mu}; E_{(\phi)}^{d,c}(G)) = A_2(E_{i,\mu}; E_{(\phi)}^d[G]) = \\ &= \left\{ (d_l)_{|l|_p=0}^\infty : \forall h > d \sum_{|l|_p=0}^\infty |d_l| \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^p} \left[ \frac{|\mu_{1,l}|^{\alpha_1} \cdots |\mu_{p,l}|^{\alpha_p}}{\phi(\alpha, h)} \right] < +\infty \right\}. \end{aligned}$$

Предложение 3.10 позволяет также выявить одно, на наш взгляд, довольно любопытное свойство пространства  $E_{(\phi)}^d[G]$ .

**Предложение 3.11.** Пусть  $d \in [0, +\infty)$ , при любом  $h > d$  весовая функция  $\phi(\alpha, h)$  удовлетворяет условию (3.25) и пусть  $G$  — произвольное неограниченное открытое множество в  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 1$ . Тогда в пространстве  $E_{(\phi)}^d[G]$  нет ни одной АПС экспонент с чисто мнимыми показателями.

◁ Докажем это предложение методом от противного. Пусть для некоторого непустого неограниченного открытого множества  $G_1$  в  $E_{(\phi)}^d[G]$  имеется АПС вида  $E_{i,\mu} := \{e_{i,\mu_l}(X)\}_{|l|_p=0}^\infty$ .

Ввиду того, что многочлен  $\sum_{k=1}^p (x_k)^2 = \rho^2(X, 0)$  принадлежит  $E_{(\phi)}^d[G_1]$ , найдется абсолютно сходящийся в  $E_{(\phi)}^d[G_1]$  ряд вида  $\sum_{|l|_p=0}^\infty c_l e^{i\langle \mu_l, X \rangle_p}$ , сумма которого в  $G$  равна  $\rho^2(X, 0)$ . Далее, так как  $e_{i,\mu_l}(X) \in B^\infty(\mathbb{R}^p) = BC^\infty(\mathbb{R}^p)$  и этот ряд абсолютно сходится (предложение 3.10, пункт В)) в  $E_{(\phi)}^{d,c}(\mathbb{R}^p) \subseteq BC^\infty(\mathbb{R}^p)$ , то его сумма  $V(X)$  принадлежит пространству  $B^\infty(\mathbb{R}^p)$  и потому  $\sup\{|V(X)| : X \in \mathbb{R}^p\} < \infty$ . Но последнее неравенство невозможно в силу того, что  $V(X) = \rho^2(X, 0) \notin B^\infty(\mathbb{R}^p)$ . ▷

При дополнительном предположении на весовую функцию  $\phi(\alpha, h)$  аналогичный результат [80, предложение 3.4] можно установить и для ограниченного открытого множества. Однако до сих пор неясно, вызвано ли это дополнительное предположение использованным методом доказательства или существом дела. Поэтому соответствующая формулировка здесь не приводится. Что же касается самого предложения 3.4 из [80], то оно содержится в замечании в конце п. 3.8.8.

Отметим еще, что критерий абсолютной сходимости ряда (3.14) в индуктивном пределе  $E_{\{\phi\}}^d(G)$  получен в [85, теорема 5.8].



**3.8.5. Установим теперь базисность системы**

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p^{a,b} &:= \left\{ \exp 2\pi i \left\langle l, \frac{x}{b-a} \right\rangle_p \right\}_{|l|_p=0}^\infty = \\ &= \exp \left\{ 2\pi i \sum_{j=1}^p \frac{l_j x_j}{b_j - a_j} : l_j = 0, \pm 1, \dots; 1 \leq j \leq p \right\} \end{aligned}$$

в одном пространстве функций, бесконечно дифференцируемых в  $p$ -мерном прямоугольном параллелепипеде

$$D_{a,b} := \left\{ X = (x_1, \dots, x_p) : -\infty < a_j \leq x_j \leq b_j < +\infty, j = 1, \dots, p \right\}.$$

Переходя к определению этого пространства, введем множество  $B_D$  пар различных точек  $(X, Y)$  из  $\overline{D}_{a,b}$  таких, что разность координат этих точек  $y_k - x_k$  при  $k = 1, 2, \dots, p$  принимает значения  $\pm(b_k - a_k)$  либо 0. Как нетрудно проверить,  $B_D \subseteq \partial D_{a,b} \times \partial D_{a,b}$ . Определим векторное подпространство  $E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b})$  пространства  $E_{(\phi)}^d(D_{a,b})$  соотношением

$$\begin{aligned} E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b}) &:= \{ V \in E_{(\phi)}^d(D_{a,b}) : \\ &V^{(\alpha)}(X) = V^{(\alpha)}(Y), \alpha \in \mathbb{N}_0^p, (X, Y) \in B_D \}. \end{aligned}$$

Будем считать, что  $\phi$  удовлетворяет условию (3.25). Как легко убедиться,  $E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b})$  — замкнутое подпространство  $E_{(\phi)}^d(D_{a,b})$  и, следовательно, тоже пространство Фреше. Заметим, что по предложению 3.2  $e_{i,\mu}(X) \in E_{(\phi)}^d(D_{a,b})$ . При этом для любого  $l \in \mathbb{N}_0^p$   $\exp 2\pi i \left\langle l, \frac{X}{b-a} \right\rangle_p \in E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b})$ .

Покажем, что при определенных условиях  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  — абсолютный базис в  $E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b})$ . Пусть  $d \in [0, +\infty)$  и при любом  $h > d$  функция  $\phi(\alpha, h)$  удовлетворяет условию (3.25). Поставим в соответствие любой функции  $V(X)$  из  $E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b})$  ее ряд Фурье по системе  $\mathcal{E}_p^{a,b}$ :

$$V \sim \sum_{|l|_p=0}^\infty V_l \exp 2\pi i \left\langle l, \frac{X}{b-a} \right\rangle_p,$$

где  $l = (l_1, \dots, l_p)$ ,  $l_j \in \mathbb{Z} := (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ ,  $1 \leq j \leq p$ ;

При любом  $l \in Z^p$

$$\prod_{j=1}^p (b_j - a_j) \cdot V_l = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_p}^{b_p} V(X) \exp \left( -2\pi i \left\langle l, \frac{X}{b-a} \right\rangle_p \right) dX. \quad (3.29)$$

Интегрируя по частям правые части равенств (3.29) и принимая во внимание, что внеинтегральные члены обращаются в нуль, приходим к неравенствам

$$\prod_{j=1}^p (b_j - a_j) |V_l| \leq \frac{(b-a)^\alpha}{(2\pi)^{|\alpha|_p} \cdot |l|^\alpha} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_p}^{b_p} |V^{(\alpha)}(X)| dX,$$

в которых

$$(b-a)^\alpha := \prod_{j=1}^p (b_j - a_j)^{\alpha_j}; \quad |l|^\alpha := |l_1|^{\alpha_1} \dots |l_p|^{\alpha_p}; \\ (0)^{\alpha_j} = 1, \quad 1 \leq j \leq p; \quad \alpha \in \mathbb{N}^p.$$

Следовательно, при любых  $h_1 > d$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$  и  $l \in Z^p$  справедливо соотношение

$$(2\pi)^{|\alpha|_p} |V_l| \leq \frac{(b-a)^\alpha}{|l|^\alpha} \phi(\alpha, h_1) \sup \left\{ \frac{|V^{(\beta)}(X)|}{\phi(\beta, h_1)} : \beta \in \mathbb{N}_0^p, X \in D_{a,b} \right\} = \\ = \frac{(b-a)^\alpha}{|l|^\alpha} \phi(\alpha, h_1) \|V\|_{h_1}^\phi.$$

Оценим норму общего члена ряда Фурье функции  $V(X)$  в пространстве  $E_{h_2}^\phi(D_{a,b})$  при  $h_2 > h_1 > d$ :

$$\left\| V_l \exp 2\pi i \left\langle l, \frac{X}{b-a} \right\rangle_p \right\|_{h_2}^\phi \leq \\ \leq \|V\|_{h_1}^\phi \sup \left\{ \frac{(b-a)^\alpha \phi(\alpha, h_1)}{|l|^\alpha \cdot (2\pi)^{|\alpha|_p}} \cdot \frac{|l|^\gamma \cdot (2\pi)^{|\gamma|_p}}{\phi(\gamma, h_2)(b-a)^\gamma} : \gamma \in \mathbb{N}_0^p \right\}. \quad (3.30)$$

Предположим, что весовая функция  $\phi(\alpha, h)$  удовлетворяет условию

$$\forall d \in [0, +\infty), \forall l \geq 1, \forall h_2 \in (d, +\infty) \exists h_1 \in (d, h_2) : \\ \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^p} \frac{\phi(\alpha + l, h_1)}{\phi(\alpha, h_2)} < +\infty. \quad (3.31)$$

Выбирая в правой части неравенства (3.30) при любом  $\gamma$  из  $\mathbb{N}_0^p$  значение  $\alpha$  равным  $\gamma + 2p$  (т. е.  $\alpha_j = \gamma_j + 2p$  при  $j = 1, 2, \dots, p$ ), получаем при надлежащем образом выбранном по  $h_2$  (согласно (3.31)) значении  $h_1$  из  $(d, h_2)$ :

$$\left\| V_l \exp 2\pi i \left\langle l, \frac{X}{b-a} \right\rangle_p \right\|_{h_2}^\phi \leq \|V\|_{h_1}^\phi \cdot \frac{(b-a)^{2p} B(h_1, h_2)}{|l|^{2p} (2\pi)^{2p^2}},$$

$$B(h_1, h_2) := \sup \left\{ \frac{\phi(\alpha + 2p^2, h_1)}{\phi(\alpha, h_2)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^p \right\}.$$

Отсюда для любого  $h_2 \in (d, +\infty)$  существует  $h_1 \in (d, h_2)$  такое, что при всех  $V \in E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b})$

$$\sum_{|l|_p=0}^{\infty} |V_l| \left\| \exp 2\pi i \left\langle l, \frac{X}{b-a} \right\rangle_p \right\|_{h_2}^\phi \leq \frac{\prod_{j=1}^p (b_j - a_j)^{2p} B(h_1, h_2)}{(2\pi)^{2p^2} |l_1|^{2p} \dots |l_p|^{2p}}.$$

Следовательно, ряд Фурье для  $V(X)$  сходится абсолютно в  $E_{(\phi)}^d(D_{a,b})$  и подавно равномерно (как и все ассоциированные с ним ряды) в  $D_{a,b}$ . Поэтому его сумма равна  $V(X)$ . Заметим еще, что если какой-нибудь ряд вида  $\sum_{|l|_p=0}^{\infty} d_l \exp 2\pi i \left\langle l, \frac{X}{b-a} \right\rangle_p$  сходится в  $E_{(\phi)}^d(D_{a,b})$ , то он сходится равномерно на  $\overline{D}_{a,b}$ . Если сумма этого ряда равна нулю, то для любого  $l_0$  из  $Z^p$  после умножения всех членов ряда на  $\exp \left( -2\pi i \left\langle l_0, \frac{X}{b-a} \right\rangle_p \right)$  и почленного интегрирования на  $\overline{D}_{a,b}$  найдем, что  $\prod_{j=1}^p (b_j - a_j) d_{l_0} = 0$ , откуда  $d_l = 0$  при всех  $l \in Z^p$ . Сформулируем полученный в итоге результат.

**Теорема 3.26.** Пусть  $d \in [0, +\infty)$  и весовая функция  $\phi(\alpha, X)$  удовлетворяет условию (3.31) и (при всех  $h > d$ ) условию (3.25). Тогда  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  — абсолютный базис в  $E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b})$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Как легко проверить, условие (3.31) равносильно такому, формально более слабому:

$$\forall d \in [0, +\infty), \forall h_2 \in (d, +\infty) \exists h_1 \in (d, h_2) :$$

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^p} \left\{ \frac{\phi(\alpha + 1, h_1)}{\phi(\alpha, h_2)} < +\infty \right\}.$$

**3.8.6.** Теорему 3.26 можно дополнить и уточнить. Пусть ее исходные предположения имеют место. Введем, как выше, пространство числовых семейств

$$A_2 := A_2(\mathcal{E}_p^{a,b}; E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b})) = \left\{ c := (c_l)_{|l|_p=0}^\infty : \right. \\ \left. |c|_h := \sum_{|l|_p=0}^\infty |c_l| \left\| \exp 2\pi i \left\langle l, \frac{X}{b-a} \right\rangle_p \right\|_h^\phi < \infty \ \forall h \in (d, +\infty) \right\}$$

и соответствующий оператор  $L_2$  абсолютного представления

$$L_2 : \forall c \in A_2 \rightarrow \sum_{|l|_p=0}^\infty c_l \exp 2\pi i \left\langle l, \frac{X}{b-a} \right\rangle_p,$$

который действует линейно и непрерывно из пространства Фреше  $A_2$  с набором норм  $|c|_h$ ,  $h > d$ , в пространство Фреше  $E(a, b; d) := E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b})$ .

Так как по теореме 3.26  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  — абсолютный базис в  $E(a, b; d)$ , то  $L_2$  отображает взаимно однозначно и взаимно непрерывно  $A_2$  на  $E(a, b; d)$ . Обратный к  $L_2$  оператор  $L_2^{-1}$  отображает линейно и непрерывно  $E(a, b; d)$  на  $A_2$ . При этом согласно предложению 3.10

$$A_2 = \left\{ c = (c_l)_{|l|_p=0}^\infty : \right. \\ \left. \sum_{|l|_p=0}^\infty |c_l| \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^p} \left[ \frac{|l_1|^{\alpha_1} \dots |l_p|^{\alpha_p} (2\pi)^{|\alpha|_p}}{(b-a)^\alpha \phi(\alpha, h)} \right] < \infty \ \forall h > d \right\}. \quad (3.32)$$

Далее, оператор  $L_2^{-1}$  определяется эффективно соотношением

$$f \in E(a, b; d) \rightarrow L_2^{-1} f = \\ = \left\{ \left( \prod_{j=1}^p (b_j - a_j) \right)^{-1} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_p}^{b_p} f(X) e^{-2\pi i \left\langle l, \frac{X}{b-a} \right\rangle_p} dX \right\}_{|l|_p=0}^\infty. \quad (3.33)$$

Таким образом, в предположениях теоремы 3.26  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  — эффективно правильный абсолютный базис в  $E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b})$ .

**3.8.7.** Установим теперь аналог теоремы 3.26 для всего пространства  $\mathbb{R}^p$ . С этой целью введем множество  $R_{a,b}^p$  всех пар  $(X, Y)$  точек из  $\mathbb{R}^p$  таких, что  $\sum_{k=1}^p |x_k - y_k|^2 > 0$  и при  $k = 1, 2, \dots, p$  каждая разность одноименных координат  $x_k - y_k$  может принимать лишь значения 0 или  $\pm l_k(b_k - a_k)$ , где  $l_k = 1, 2, \dots$ .

Пусть, далее,

$$E_{(\phi)_0}^{d,c}(\mathbb{R}^p) := \left\{ V(X) \in E_{(\phi)}^{d,c}(\mathbb{R}^p) : \right. \\ \left. V^{(\alpha)}(X) = V^{(\alpha)}(Y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^p, \quad \forall (X, Y) \in R_{a,b}^p \right\}.$$

Тогда пространство  $E_{(\phi)_0}^{d,c}(\mathbb{R}^p)$  — замкнутое подпространство пространства Фреше  $E_{(\phi)}^{d,c}(\mathbb{R}^p)$  и, следовательно, также пространство Фреше.

**Теорема 3.27.** Пусть  $p \geq 1$ ,  $d \in [0, +\infty)$  и весовая функция  $\phi(\alpha, h)$  удовлетворяет предположениям теоремы 3.26. Тогда  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  — абсолютный базис в  $E_{(\phi)_0}^{a,b}(\mathbb{R}^p)$ .

◁ Пусть  $V \in E_{(\phi)_0}^{d,c}(\mathbb{R}^p)$ . Тогда  $V|_{D_{a,b}} \in E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b})$  и по теореме 3.26

$$V(X) = \sum_{|l|_p = 0}^{\infty} V_l \exp 2\pi i \left\langle l, \frac{X}{b-a} \right\rangle_p \quad \forall X \in D_{a,b}. \quad (3.34)$$

При этом ряд в правой части (3.34) сходится абсолютно в  $E_{(\phi)}^d(D_{a,b})$ , а его коэффициенты  $V_k$  определяются по формуле (3.29). Из определения пространства  $E_{(\phi)_0}^{d,c}(D_{a,b})$  следует, что ряд справа в (3.34) сходится абсолютно в  $E_{(\phi)}^{d,c}(\mathbb{R}^p)$ , а само равенство (3.32) в силу того, что  $V \in E_{(\phi)_0}^{d,c}(\mathbb{R}^p)$ , имеет место всюду в  $\mathbb{R}^p$ .

Пусть теперь ряд  $\sum_{|l|_p=0}^{\infty} d_l e^{2\pi i \langle l, \frac{X}{b-a} \rangle_p}$  сходится к нулю в  $E_{(\phi)}^{d,c}(\mathbb{R}^p)$  или, что все равно, в  $E_{(\phi)_0}^{d,c}(\mathbb{R}^p) \hookrightarrow E_{(\phi)_0}^d(\mathbb{R}^p)$ . Тогда этот ряд сходится и в  $E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b})$ , причем его сумма равна нулю в  $D_{a,b}$ . Так как по теореме 3.26  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  — абсолютный базис в  $E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b})$ , то  $d_l = 0$  для любого  $l \in Z^p$ , чем и заканчивается доказательство. ▷

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Из уже отмечавшегося ранее свойства «заразительности» абсолютной сходимости ряда по системе (4.11) следует, что

пространство числовых семейств  $\tilde{A}_2 := A_2(\mathcal{E}^{a,b}; E_{(\phi)_0}^{d,c}(\mathbb{R}^p))$  совпадает с пространством  $A_2 := A_2(\mathcal{E}^{a,b}; E_{(\phi)}^d(D_{a,b}))$ , определенным формулой (3.32). Кроме того, линейный оператор (абсолютного) представления

$$L_2 : d \in \tilde{A}_2 \rightarrow \sum_{|l|_p=0}^{\infty} d_l \exp 2\pi i \left\langle l, \frac{X}{b-a} \right\rangle_p \in E_{(\phi)_0}^{d,c}(\mathbb{R}^p)$$

отображает взаимно однозначно и взаимно непрерывно  $\tilde{A}_2$  на  $E_{(\phi)_0}^{d,c}(\mathbb{R}^p)$ , а обратный к нему линейный непрерывный оператор  $L_2^{-1}$  определяется конструктивно по формуле (3.33) с заменой  $E(a, b; d)$  на  $E_{(\phi)_0}^{d,c}(\mathbb{R}^p)$  и  $A_2$  на  $\tilde{A}_2$ . Следовательно,  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  — эффективно правильный абсолютный базис (т. е. ЭПАБ) в  $E_{(\phi)_0}^d(\mathbb{R}^p)$ .

**3.8.8.** Применим результаты из п. 3.1.7 к ситуации, когда  $Q_2 = G$ , где  $G$  — ограниченное открытое множество в  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 1$ , и  $H_2 = E_{(\phi)}^d(G)$ ,  $0 \leq d < +\infty$ . В качестве  $Q_1$  возьмем любой произвольный прямоугольный параллелепипед  $D_{a,b}$ , содержащий  $G$  (и тогда  $H_1 = E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b})$ ), либо  $\mathbb{R}^p$  (в этом случае  $H_1 = E_{(\phi)_0}^{d,c}(\mathbb{R}^p)$ ). В обоих случаях в качестве оператора  $T$  выберем оператор (тождественного) вложения  $H_1$  в  $H_2$ , а в качестве  $X$  возьмем систему  $\mathcal{E}_p^{a,b}$ . Для нее, как это следует из леммы 3.2, выполнено условие  $(T\mathcal{E}_p^{a,b})_2$  (напомним, что это условие введено в п. 3.1.7 перед формулировкой теоремы 3.2), а во-вторых, согласно теоремам 3.26 и 3.27, уточнению первой из них (в п. 3.8.6) и замечанию ко второй,  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  — ПАБ (по-прежнему ПАПС) в обоих пространствах  $E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b})$ ,  $E_{(\phi)_0}^{d,c}(\mathbb{R}^p)$ . С учетом этого непосредственно из теорем 3.2, 3.5 и ее следствия (см. п. 3.1.7) вытекает такой результат.

**Теорема 3.28.** Пусть  $p \geq 1$ ,  $0 \leq d < +\infty$ ,  $G$  — ограниченное открытое множество в  $\mathbb{R}^p$  и  $D_{a,b}$  — открытый прямоугольный параллелепипед, содержащий  $G$ . Пусть, далее,  $H_1$  — либо  $E_{(\phi)_0}^d(D_{a,b})$ , либо  $E_{(\phi)_0}^{d,c}(\mathbb{R}^p)$ . Тогда в каждой из нижеперечисленных четырех групп утверждений все утверждения одной и той же группы равносильны.

- I. (a)  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  — АПС в  $E_{(\phi)}^d(G)$ ;
- (b) существует непрерывный оператор продолжения  $B$  из  $E_{(\phi)}^d(G)$  в  $H_1$ .
- II. (a)  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  — ЭАПС в  $E_{(\phi)}^d(G)$ ;

- (b) существует эффективно определяемый непрерывный оператор продолжения  $B$  из  $E_{(\phi)}^d(G)$  в  $H_1$ .
- III. (a)  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  — ПАПС в  $E_{(\phi)}^d(G)$ ;
- (b) существует линейный непрерывный оператор продолжения  $B$  из  $E_{(\phi)}^d(G)$  в  $H_1$ .
- IV. (a)  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  — ЭПАПС (т. е. ЭПАПС) в  $E_{(\phi)}^d(G)$ ;
- (b) определен конструктивно оператор  $B$  со свойствами, указанными в III (b).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В формулировке теоремы 3.28 при тех же исходных предположениях относительно  $d$  и  $G$  вместо  $E_{(\phi)}^d(G)$  можно взять  $E_{(\phi)}^d[G]$ . Разумеется, такая замена имеет смысл, если в  $E_{(\phi)}^d[G]$  есть хотя бы одна АПС с чисто мнимыми показателями, что бывает далеко не всегда. Например, такой АПС в  $E_{(\phi)}^d[G]$  согласно предложению 3.4 из [80] нет, если  $G$  — любое ограниченное открытое множество в  $\mathbb{R}^p$ , а весовая функция  $\phi$  такова, что

$$\lim_{|\alpha|_p \rightarrow \infty} \frac{|\alpha|_p}{[\phi(d, h)]^{1/|\alpha|_p}} = 0.$$

**3.8.9.** Покажем, что условие  $G \subset D_{a,b}$  в теореме 3.28 существенно для ее справедливости. Перед формулировкой соответствующего результата условимся обозначать, как обычно, символом  $C(\bar{G})$  для любого ограниченного множества  $G$  в  $\mathbb{R}^p$  пространство всех комплекснозначных непрерывных на  $\bar{G}$  функций с  $\sup$ -нормой  $\sup_{t \in \bar{G}} |y(t)|$  :

**Теорема 3.29.** Пусть  $a, b \in \mathbb{R}^p$  и  $a < b$  (т. е.  $a_k < b_k$  при  $k = 1, \dots, p$ );  $G$  — ограниченное открытое множество в  $\mathbb{R}^p$  такое, что  $(\bar{G} \times \bar{G}) \cap B_D \neq \emptyset$ . Пусть еще  $F(G)$  — полное отделимое ЛВП определенных на  $\bar{G}$  функций, содержащее все «координатные» функции  $\phi_k(X) = x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ , и непрерывно вложенное в  $C(\bar{G})$ . Тогда система  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  неполна в  $F(G)$ .

◁ Пусть  $(X_0, Y_0) \in (\bar{G} \times \bar{G}) \cap B_D$  (напомним, что множество  $B_D$  определено в начале п. 3.8.5). Тогда  $X_0 \neq Y_0$ ,  $X_0 \in \bar{G}$ ,  $Y_0 \in \bar{G}$ , и найдется номер  $k_0$  такой, что  $k_0 \leq p$ , а разность  $(X_0)_{k_0} - (Y_0)_{k_0} = x_{k_0,0} - y_{k_0,0}$  отлична от нуля и равна или  $b_{k_0} - a_{k_0}$ , или  $a_{k_0} - b_{k_0}$ . Рассуждая от противного, допустим, что система  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  полна в  $F(G)$ . Так как  $F(G) \hookrightarrow C(\bar{G})$ , то  $\max\{|y(X_0)|, |y(Y_0)|\}$  — непрерывная преднорма на  $F(G)$ . Положим  $\mu(X) := (X)_{k_0}$ . Тогда  $\mu \in F(G)$ . Зафиксировав

любое  $\varepsilon > 0$ , найдем функцию  $w$  из  $\text{span } \mathcal{E}_p^{a,b}$  такую, что

$$|\mu(X_0) - w(X_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\mu(Y_0) - w(Y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & |\mu(X_0) - \mu(Y_0)| \leq \\ & \leq |\mu(X_0) - w(X_0)| + |w(X_0) - w(Y_0)| + |w(Y_0) - \mu(Y_0)| = \\ & = |\mu(X_0) - w(X_0)| + |w(Y_0) - \mu(Y_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Устремляя  $\varepsilon > 0$  к нулю, получим  $|b_{k_0} - a_{k_0}| \leq 0$  и  $a_{k_0} = b_{k_0}$ , что невозможно.  $\triangleright$

**Следствие.** Система  $\mathcal{E}_p^{a,b}$  неполна в  $E_{(\phi)}^d(D_{a,b})$ .

$\triangleleft$  Действительно,

$$E_{(\phi)}^d(D_{a,b}) = E_{(\phi)}^{d,c}(D_{a,b}) \hookrightarrow C(\bar{D}_{a,b}) \text{ и } (\bar{D}_{a,b} \times \bar{D}_{a,b}) \cap B_D \neq \emptyset. \triangleright$$

**3.8.10.** С помощью теоремы 3.28 можно найти условия, при которых  $\mathcal{E}^{a,b}$  — АПС в  $E_{(\phi)}^d(G)$ . В частности, на этом пути устанавливается полный аналог теоремы 5.4 из [80]. В этом пункте, не останавливаясь на подобных результатах, приведем некоторые общие примеры весовых функций  $\phi(\alpha, h)$ .

Назовем весовую функцию  $\phi(\alpha, h)$  равномерно весовой, если

$$\phi(\alpha, h) = g(|\alpha|_p, h) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^p, \forall h \in (0, +\infty),$$

где  $g$  — отображение  $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$  в  $(0, +\infty)$  такое, что

$$\inf[g(t, h) : t \in [0, +\infty)] > 0 \quad \forall h \in (0, +\infty),$$

и для любого фиксированного  $t$  из  $[0, +\infty)$  функция  $g_t(h) = g(t, h)$  не убывает по  $h$  в  $(0, +\infty)$ .

Для равномерно весовой функции  $g(t, h)$  условие (3.23) выполняется, если существуют  $h_2 \in (0, +\infty)$  и  $h_1 \in (h_2, +\infty)$  такие, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t, h_2)}{g(t, h_1)} = 0$ ; условие (3.25) — если  $\lim_{t \rightarrow +\infty} [g(t, h)]^{1/t} = +\infty$  для любого  $h \in (d, +\infty)$ , а условие (3.26) — когда  $\lim_{h \uparrow d} \lim_{t \rightarrow +\infty} [g(t, h)]^{1/t} = +\infty$ .

Наконец, условие (3.31) выполняется для  $\phi(\alpha, h) = g(|\alpha|_p, h)$  тогда и только тогда, когда

$$\forall d \in [0, +\infty), \forall l \geq 1, \forall h_2 \in (d, +\infty) \exists h_1 \in (d, h_2) :$$

$$\sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{g(t+l, h_1)}{g(t, h_2)} < +\infty.$$



Пожалуй, наиболее важным примером равномерно весовой функции является функция  $\phi(\alpha, h) = g_M(t, h) := M(t)h^t$ , где  $M(t)$  — отображение  $[0, +\infty)$  в  $[0, +\infty)$  такое, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} (M(t))^{1/t} = +\infty$ . Такую функцию будем называть весовой функцией Данжуа — Карлемана, а пространства, образованные с ее помощью, — пространствами Данжуа — Карлемана.

В частности, для любого открытого множества  $G$  из  $\mathbb{R}^p$  вводятся такие пространства:

- $E_{(M(t)t^k)}^0(G)$  — пространство Данжуа — Карлемана минимального проективного типа;
- $E_{\{M(t)t^k\}}^\infty(G)$  — пространство Данжуа — Карлемана максимального индуктивного типа;
- $E_{\{M(t)t^k\}}^d(G)$ ,  $0 < d < \infty$ , — пространство Данжуа — Карлемана нормального индуктивного типа.

Аналогичным образом определяются, как и раньше, пространства

$$E_{(M(t)t^k)}^d[G], \quad d \in [0, +\infty); \quad E_{\{M(t)t^k\}}^d[G], \quad d \in (0, +\infty];$$

а также пространство типа  $E_{(M(t)t^k)}^{d,c}(G)$  и т. д.

Видимо первой известной в литературе весовой функцией Данжуа — Карлемана была функция Жевре (Jevrey) или сокращенно Jev-функция, для которой  $p = 1$ ,  $M(t) = (\Gamma(t+1))^\gamma$ ,  $\gamma > 1$ .

Для пространств из данного пункта справедливы все результаты, приведенные в этом разделе. Заметим, что пространства Данжуа — Карлемана нормального (проективного и индуктивного) типа были введены впервые, по-видимому, в работе [75].

**3.8.11.** Общие весовые пространства функций, бесконечно дифференцируемых в открытом множестве  $G$  из  $\mathbb{R}^p$  ( $p \geq 1$ ) рассмотрены в статье [85]. Они определялись с помощью перехода к проективным и индуктивным пределам банаховых пространств, каждое из которых характеризовалось с помощью двух весовых функций: уже знакомой функции  $\phi(\alpha, h)$  с указанными выше свойствами и отображения  $g(s, X)$  из  $\mathbb{N}_0 \times G$  в  $(0, \infty)$ , удовлетворяющего условиям:

- а) при всех  $m \in \mathbb{N}_0$  и  $X \in G$   $g(m+1, X) \geq g(m, X)$ ;
- б) для любого компакта  $T$  из  $G$  и произвольного  $s \in \mathbb{N}_0$

$$0 < \inf [g(s, X) : X \in T] \leq \sup [g(s, X) : X \in T] < +\infty.$$

Эти две весовые функции определяют порядок роста модулей  $|y^{(\alpha)}(X)|$  всех частных производных функций из рассмотренных

в [85]  $B$ -пространств в зависимости от индекса  $\alpha$  из  $\mathbb{N}_0^p$  (порядок частного дифференцирования) и от точки  $X$  из  $G$ .

В работе [85] указаны условия критериального характера, при которых во введенных в ней пространствах содержатся многочлены и экспоненты, а также достаточные условия, обеспечивающие непрерывность в них операторов частного дифференцирования и умножения на функцию. Приведены критерии абсолютной сходимости в этих пространствах рядов из экспонент с мнимыми показателями и описано определенное свойство «заразительности» поведения подобных рядов.

За более подробными сведениями автор отсылает читателя к статье [85]. Отметим лишь, что в том частном случае, когда  $g(s, X) \equiv 1$ , основные результаты этой статьи изложены в данном разделе. Дополнительную информацию о рядах экспонент с чисто мнимыми показателями в таких весовых пространствах можно найти и в статье автора [80].

**3.8.12.** В §§ 3–5, 7 работы [80] исследована связь между наличием в некотором классе весовых пространств  $E$  бесконечно дифференцируемых функций АПС экспонент с чисто мнимыми показателями и возможностью продолжения всех функций из  $E$ , определенных на подмножестве  $Q$  из  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 1$ , на все  $\mathbb{R}^p$  (с сохранением класса пространств). При этом весовая функция  $\mu(\alpha)$ , определяющая пространство  $E$ , зависела от одной переменной  $\alpha \in \mathbb{N}^p$ , характеризующей для каждой функции  $y$  из  $E$  допустимый рост ее частных производных  $y^{(\alpha)}(X)$ , а точнее — рост величины

$$\sup_{X \in Q} \frac{|y^{(\alpha)}(X)|}{\mu(\alpha)} =: \mu_y(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{N}^p.$$

В то же время в § 9 этой же работы был введен более общий класс весовых функций  $g(\alpha, X)$ , зависящих и от индекса  $\alpha \in \mathbb{N}^p$ , и от переменной  $X \in Q$ , и определяющих для каждой функции  $y$  из соответствующего весового пространства бесконечно дифференцируемых функций допустимый рост модуля ее частной производной  $|y^{(\alpha)}(X)|$  в зависимости от двух переменных  $\alpha$  и  $X$ . Однако связь между наличием АПС экспонент с чисто мнимыми показателями в таких весовых пространствах и возможностью продолжения любой функции из этих пространств с  $Q$  на  $\mathbb{R}^p$  (с сохранением класса пространств) в работе [80] не изучалась. В настоящем разделе этот пробел восполнен.

Пользуясь случаем, отметим, что в формулировке теоремы 5.7 в [85] есть неточность. Первая ее фраза должна звучать так: «Пусть  $d \in [0, +\infty)$ ,  $\phi$  обладает свойством 1) из п. 1.1 и свойством (10) при всех  $h > \alpha$ ».

**3.8.13.** Несколько иной, чем в данном разделе, но близкий подход к исследуемой проблеме был ранее применен в статье [75], в которой рассмотрено некоторое семейство ПОЛВП функций, бесконечно дифференцируемых в области или толстом компакте из  $\mathbb{R}^p$ . При условии, что это семейство обладает определенными свойствами, в [75] устанавливается двойственная связь между наличием в пространствах данного семейства АПС экспонент с мнимыми показателями и продолжимостью любой функции из этих пространств до функции на  $\mathbb{R}^p$  с аналогичными дифференциальными свойствами. В частности, такие результаты получены для введенных выше пространств Данжуа — Карлемана.

В диссертации [134, гл. II, § 4] этим же методом получены аналогичные результаты для общих пространств Берлинга — Бьорка (по поводу этих пространств см., например, [149]), которые в работе [75] не рассматривались (часть результатов из [134] опубликована в работах [132, 133]).

Позднее результаты, аналогичные приведенным в настоящем разделе, были получены в диссертации [7] для так называемых пространств ультрадифференцируемых функций Берлинга — Бьорка нормального типа (соответствующее определение см., например, в [8]). В частности, в [7, гл. 2, § 6] для таких пространств установлены результаты, аналогичные приведенным в данном разделе. Ввиду ограничений на объем книги, не будем останавливаться подробнее на работах [7, 8, 132, 134]. Отметим лишь, что они показывают, что изложенные методы применимы к представляющим системам экспонент в разнообразных пространствах аналитических и бесконечно дифференцируемых функций.

### 3.9. Теория двойственности для А-ПС

**3.9.1.** Пусть  $H$  — ПОЛВП над полем скаляров  $\Phi$  ( $\Phi = \mathbb{C}$  или  $\Phi = \mathbb{R}$ ) с топологией, определяемой набором преднорм  $\mathcal{P} = \{p\}$  и, как выше,  $\Omega = \omega_1 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (\omega_{k+1} \setminus \omega_k)$  — счетная совокупность индексов, а  $\omega_k$  — конечные множества такие, что для любого  $k \geq 1$   $\omega_k \subset \omega_{k+1} \subset \Omega$ .

Пусть, далее,  $A$  — ЛВП числовых семейств с топологией  $\tau$ , причем  $A, \tau \hookrightarrow A_1(X, H), \tau_1$ ;  $X = (x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  — некоторая система ненулевых элементов  $x_\alpha$  из  $H$ , а  $A_1(X, H), \tau_1$  — введенное в разделе 3.1 ПОЛВП числовых семейств с топологией  $\tau_1$ , определяемой набором преднорм

$$Q_{\mathcal{P}} = \{q_p^X(c) : p \in \mathcal{P}\}.$$

Выше было показано, что оператор представления  $L_A^X$  непрерывен (а, следовательно, и слабо непрерывен) из  $(A, \tau)$  в  $H$ , причем  $X$  —  $A$ -ПС в  $H$  тогда и только тогда, когда  $L_A^X$  — эпиморфизм  $(A, \tau)$  на  $H$ . Аналогично,  $X$  —  $A$ -базис в  $H$  в том и только том случае, если  $L_A^X$  отображает непрерывно и взаимно однозначно  $(A, \tau)$  на  $H$ . Чтобы применять эти общие результаты к конкретным  $H, X$  и  $A$ , иногда удобно использовать общую теорию двойственности в ОЛВП (см., например, [143, гл. VIII]).

На всем протяжении данного раздела будем считать, что  $A$  содержит все орты  $e_{(\beta)}$ ,  $\beta \in \Omega$ .

Если символом  $\text{span } X$  обозначить линейную оболочку множества  $X$ , а символом  $(X; H)$  — замыкание  $\text{span } X$  в  $H$ , то из сделанного выше предположения относительно  $A$  следует, что  $\text{span } X \subseteq L_A^X(A) \subseteq (X; H)$ . Следовательно,

$$\overline{(L_A^X(A))} = (X; H)$$

(здесь и далее  $L_A^X(A) = \{L_A^X(d) : d \in A\}$ , а верхняя черта над каким-либо множеством из ЛВП  $E$ , как обычно, означает замыкание множества в  $E$ ).

Очевидно, что  $X$  —  $A$ -ПС в  $(X; H)$  тогда и только тогда, когда

$$L_A^X(A) = (X; H);$$

далее,  $X$  —  $A$ -базис в  $(X; H)$  тогда и только тогда, когда

$$L_A^X(A) = (X; H) \text{ и } L_A^{X^{-1}}(0) = 0.$$

**3.9.2.** Пусть  $Y_1, Y_2$  — пара ОЛВП,  $L_\sigma(Y_1, Y_2)$  — множество всех линейных операторов, действующих слабо непрерывно из  $Y_1$  в  $Y_2$ . Следуя [39], скажем, что для пары  $Y_1, Y_2$  имеет место:

а) первая ситуация двойственности, если для всех  $T \in L_\sigma(Y_1, Y_2)$

$$T^{-1}(0) = 0, \quad \overline{T(Y_1)} = T(Y_1) \Leftrightarrow T'(Y_2') = Y_1';$$

б) вторая ситуация двойственности, если для всех  $T \in L_\sigma(Y_1, Y_2)$

$$T(Y_1) = Y_2 \Leftrightarrow T'^{-1}(0) = 0, \quad T'(Y_2') = \overline{T'(Y_2')}$$

(замыкание берется по сильной топологии  $\beta(Y_1', Y_1)$ );

в) третья ситуация двойственности, если для всех  $T \in L_\sigma(Y_1, Y_2)$

$$\overline{T(Y_1)} = T(Y_1) \Leftrightarrow T'(Y_2') \text{ слабо замкнуто в } Y_1';$$

г) четвертая ситуация двойственности, если при  $T \in L_\sigma(Y_1, Y_2)$

$$T(Y_1) = Y_2, \quad T^{-1}(0) = 0 \Leftrightarrow T'(Y_2') = Y_1', \quad T'^{-1}(0) = 0.$$

Пусть еще  $Q$  — какая-либо совокупность семейств  $d = (d_\gamma)_{\gamma \in \Omega}$  из  $\mathbb{C}^\Omega$ . Будем говорить, снова следуя [39], что:

1) задача  $[H'; X; Q]$  разрешима, если интерполяционная задача (или, в терминологии [28, 107], общая проблема моментов)

$$\phi(x_\alpha) = d_\alpha, \quad \phi \in H', \quad \alpha \in \Omega, \quad (3.35)$$

имеет решение  $\phi$  в  $H'$  для любой последовательности  $d = (d_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  из  $Q$ ;

2) задача  $[H'; X; Q]$  однозначно разрешима, если задача (3.35) имеет единственное решение  $\phi$  из  $H'$  для любого семейства  $d = (d_\gamma)_{\gamma \in \Omega}$  из  $Q$ .

Непосредственно из этих определений вытекает

**Теорема 3.30.** Пусть  $H$  — ОЛВП;  $X = (x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ ;  $x_\alpha \neq 0$  для любого  $\alpha \in \Omega$ . Пусть, далее,  $A$  — содержащее все орты  $\{e_{(\beta)}\}_{\beta \in \Omega}$  подпространство  $A_1(X, H)$  с топологией  $\tau$  такой, что  $(A, \tau) \hookrightarrow (A_1(X, H), \tau_1)$ . Тогда справедливы такие утверждения:

I. Если для пары  $A, H$  имеет место первая ситуация двойственности, то  $X$  —  $A$ -базис в  $(X; H)$  тогда и только тогда, когда разрешима задача  $[H'; X; A']$ .

II. Если для пары  $A, H$  имеет место вторая ситуация двойственности, то  $X$  —  $A$ -ПС в  $H$  тогда и только тогда, когда  $(L_A^X)'$  отображает  $H'$  взаимно однозначно на замкнутое подпространство  $(A', \beta(A', A))$ .

III. Если к паре  $(A, H)$  применима третья ситуация двойственности, то  $X$  —  $A$ -ПС в  $(X; H)$  в том и только том случае, когда множество  $(L_A^X)'(H')$  слабо замкнуто в  $A'$ .

*IV. Наконец, если для пары  $(A, H)$  имеет место четвертая ситуация двойственности, то  $X$  —  $A$ -базис в  $H$  в том и только том случае, когда задача  $[H'; X; A']$  однозначно разрешима.*

**3.9.3.** Чтобы применить приведенные в теореме 3.30 общие результаты к пространствам  $H, A, \tau$  и оператору  $L_A^X$ , необходимо иметь представления сопряженного пространства  $(A, \tau)'$  и сопряженного оператора  $(L_A^X)'$ .

Для того чтобы получить эти нужные нам представления, будем считать, что пространство  $A, \tau$  удовлетворяет, кроме уже сделанных предположений, еще и такому условию:

$(B_1)$  последовательность  $\{\sum_{\alpha \in \omega_n} c_\alpha e(\alpha)\}_{n=1}^\infty$  сходится к  $c$  в  $A, \tau$  для любого элемента  $c = (c_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  из  $A$ .

Условие  $(B_1)$  означает, что система  $E := (e(\alpha))_{\alpha \in \Omega}$  является  $A$ -ПС в  $(A, \tau)$ . При этом, так как  $(A, \tau) \hookrightarrow A_1(X, H), \tau$  и, как показано в разделе 3.1,  $\psi_\alpha(c) := c_\alpha \in (A_1(X, H), \tau_1)'$  для любого  $\alpha \in \Omega$ , то подалюбо  $\psi_\alpha \in (A, \tau)'$ . Но тогда  $E$  —  $A$ -базис в  $A, \tau$ . Действительно, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} d_\alpha e(\alpha) = 0$  и  $\{d_\beta\}_{\beta \in \Omega} \in A$ , то при любом  $\alpha \in \Omega$   $0 = \psi_\alpha(0) = d_\alpha$  и  $d(d_\alpha)_{\alpha \in \Omega} = 0$ .

Пусть пространство  $(A, \tau)$  обладает свойством  $(B_1)$  и  $\phi \in (A, \tau)'$ . Тогда

$$\phi(c) = \phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} c_\alpha e(\alpha)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} c_\alpha \eta_\alpha \quad \forall c \in A,$$

где  $\eta_\alpha = \phi(e(\alpha))$  при любом  $\alpha \in \Omega$ . Введем пространство  $\tilde{A}$  всех числовых семейств  $b\{b_\gamma\}_{\gamma \in \Omega}$  таких, что для любого  $c = (c_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  из  $A$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} c_\alpha b_\alpha =: \langle c, b \rangle_\Omega.$$

В данном случае  $(A, \tau)'$  можно отождествить с некоторым подпространством  $M_A$  пространства  $\tilde{A}$  (именно,

$$M_A = \{(\phi(e(\alpha)))_{\alpha \in \Omega} : \phi \in (A, \tau)'\}.$$

Допустим теперь, что пространство  $A, \tau$  бочечно (определение бочечного ЛВП можно найти, например, в [125, с. 99]). Зафиксируем какой-либо элемент  $\{\eta_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$  из  $\tilde{A}$  и рассмотрим последовательность

линейных функционалов  $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ , где

$$h_n(c) := \sum_{\alpha \in \omega_n} c_\alpha \eta_\alpha \quad \forall n \geq 1, c \in A.$$

Ясно, что

$$h_n(c) = \sum_{\alpha \in \omega_n} \eta_\alpha \psi_\alpha(c) \quad \forall c \in A, \forall n \geq 1,$$

и потому каждый функционал  $h_n$  непрерывен на  $A, \tau$ . Так как последовательность  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$  линейных непрерывных функционалов сходится поточечно на ОЛВП  $A, \tau$  и пространство  $(A, \tau)$  бочечно, то по теореме Банаха — Штейнгауза (см., например, [125, с. 105])

$$h(c) := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(c) \in (A, \tau)'.$$

Таким образом, в данном случае  $(A, \tau)'$  можно отождествить со всем пространством  $\tilde{A}$  (при этом  $\tilde{A} = M_A$ ).

Перейдем теперь к оператору  $(L_A^X)'$ . Имеем для любых  $\phi \in H'$  и  $c \in A$ :

$$((L_A^X)'\phi)(c) = \phi(L_A^X c) = \phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} c_\alpha x_\alpha\right).$$

Так как  $A \subseteq A_1(X, H)$ , то существует предел последовательности  $\{\sum_{\alpha \in \omega_n} c_\alpha x_\alpha\}_{n=1}^\infty$  в  $H$ .

Поэтому

$$\phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} c_\alpha x_\alpha\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} c_\alpha \phi(x_\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \omega_n} c_\alpha \eta_\alpha \quad \forall \phi \in H',$$

где  $\eta_\alpha = \phi(x_\alpha)$  при любом  $\alpha \in \omega$  и семейство  $(\eta_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  принадлежит пространству  $\tilde{A}$ . Следовательно, образ сопряженного оператора  $(L_A^X)'(H')$  в  $(A, \tau)'$  можно отождествить с множеством  $E_\Omega^{H'} := \{(\phi(x_\alpha))_{\alpha \in \Omega} : \phi \in H'\}$ , являющимся подпространством пространства  $M_A \subseteq \tilde{A}$ .

**3.9.4.** Непосредственно из теоремы 3.30 можно теперь получить такие утверждения.

**Теорема 3.31.** Пусть  $A, \tau \hookrightarrow A_1(X, H), \tau_1$  и пространство  $A, \tau$  обладает свойством  $(B_1)$ . Тогда:

*I.* Если для пары  $A, \tau; H$  справедлива 1-ая ситуация двойственности, то:

- $a_1)$   $X$  —  $A$ -базис в  $(X; H)$ , если и только если  $E_{\Omega}^{H'} = M_A$ ;  
 $b_1)$  для того чтобы  $X$  было  $A$ -базисом в  $(X; H)$ , достаточно, а в случае, когда  $(A, \tau)$  бочечно, и необходимо, чтобы задача  $[H'; X; \tilde{A}]$  была разрешима.

II. Если для пары  $A, \tau; H$  имеет место вторая ситуация двойственности, то:

- $a_2)$   $X$  —  $A$ -ПС в  $H$  если и только если задача  $[H'; X; E_A^{H'}]$  однозначно разрешима и множество  $E_A^{H'}$  слабо (или сильно) замкнуто в  $M_A$  (в топологии, индуцированной в  $M_A$  из  $(A, \tau)'$ );  
 $b_2)$  для того чтобы семейство  $X$  было  $A$ -ПС в  $H$ , достаточно, а в случае, когда  $(A, \tau)$  бочечно, и необходимо, чтобы задача  $[H'; X; E_A^{H'}]$  была однозначно разрешима и чтобы множество  $E_A^{H'}$  было (слабо или сильно) замкнуто в пространстве  $\tilde{A}$  с индуцированной из  $(A, \tau)'$  топологией.

III. Если к паре  $(A, \tau); H$  применима третья ситуация двойственности, то:

- $a_3)$   $X$  —  $A$ -ПС в  $(X; H)$  в том и только том случае, когда  $E_A^{H'}$  слабо замкнуто в  $M_A$ ;  
 $b_3)$  для того чтобы система  $X$  была  $A$ -ПС в  $(X; H)$ , достаточно, а в случае, когда пространство  $A, \tau$  бочечно, и необходимо, чтобы  $E_A^{H'}$  было слабо замкнуто в  $\tilde{A}$ .

IV. Наконец, если для пары  $A, \tau; H$  имеет место четвертая ситуация двойственности, то:

- $a_4)$   $X$  —  $A$ -базис в  $H$  тогда и только тогда, когда задача  $[H'; X; M_A]$  однозначно разрешима;  
 $b_4)$  для того чтобы система  $X$  была  $A$ -базисом в  $H$ , достаточно, а в случае, когда  $A, \tau$  бочечно, и необходимо, чтобы задача  $[H'; X; \tilde{A}]$  была однозначно разрешима.

Из общей теории двойственности [143, гл. VIII] следует, что теорема 3.31 применима, в частности, к случаям, когда оба пространства  $H$  и  $A, \tau$  будут или пространствами Фреше, или сильными сопряженными к рефлексивным пространствам Фреше. Например, первый случай имеет место, когда  $H$  — пространство Фреше, а пространство  $A, \tau$  совпадает с одним из рассмотренных в разделе 3.1 пространств  $A_j(X, H), \tau_j, 1 \leq j \leq 3$ , так как каждое из этих пространств в данном случае также является пространством Фреше.

К сожалению, при переходе к другим классам пространств  $H$  ситуация сильно усложняется из-за трудностей в описании топологических свойств пространств  $A_j, \tau_j, j = 1, 2, 3$ . Например, до сих пор



неизвестен ответ на вопрос, поставленный автором почти тридцать лет назад: если  $H$  — сильное сопряженное к рефлексивному пространству Фреше, то будет ли таким же какое-либо из пространств  $A_j(X, H), \tau_j, 1 \leq j \leq 3$ .

Для различных конкретных функциональных пространств  $H$  фигурирующую в теореме 3.31 интерполяционную задачу (общую проблему моментов) (3.35) можно исследовать и тем самым получить соответствующие результаты критериального характера для А-ПС и А-базисов.

Результаты подобного рода можно найти, например, в статье [23] (в случае, когда  $A = A_2$  и  $X$  —  $A_2$ -базис в  $(X; H)$ ), статьях [37, 38] (здесь  $A = A_1$  или  $A = A_2$  и находятся условия, при которых  $X$  —  $A_j$ -ПС или  $A_j$ -базис (при  $j = 1, 2$ ) в  $(X; H)$  или в  $H$ , где  $H$  — пространство Фреше или  $LN^*$ -пространство) и т. д.

**3.9.5.** Не приводя все довольно многочисленные результаты в этом направлении, полученные для различных конкретных функциональных пространств  $H$  и последовательностей функций  $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty$ , ограничимся некоторыми из них, причем, в качестве  $X$  выберем модельную систему экспонент  $E_\Omega := (\exp\langle \lambda_\alpha, z \rangle_p)_{\alpha \in \Omega}$ , где

$$\Omega = \omega_1 \cup \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega_{k+1} \setminus \omega_k \right), \quad \omega_1 \subset \omega_2 \subset \dots \subset \omega_n \subset \Omega = \mathbb{N}^p, \\ p \geq 1, \quad \lambda_\alpha \in \mathbb{C}^p \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^p.$$

Пусть  $G$  — содержащая начало координат ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ . Положим  $H = A(G)$ , где, как выше,  $A(G)$  — пространство всех аналитических в области  $G$  функций с топологией, заданной счетным набором норм

$$p_n(y) := \max_{z \in q_n G} |y(z)|, \quad 0 < q_n \uparrow 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

В качестве  $A(E_\Omega; A(G))$  возьмем пространство  $A_2 := A_2(E_\Omega; A(G))$ :

$$A_2 = \left\{ c = (c_\alpha)_{\alpha \in \Omega} : \sum_{\alpha \in \Omega} |c_\alpha| \exp q_n H(\lambda_\alpha) < \infty, \quad 0 < q_n \uparrow 1, \quad n = 1, 2, \dots \right\}$$

(здесь и далее  $H(z) := \sup_{w \in G} \Re \langle z, w \rangle_p$  — опорная функция области  $G$ ).

Как было показано Мартино и Эренпрайсом (см. [151, 166], а также [122, 137]), преобразование Лапласа

$$\forall \psi \in (A(G))' \rightarrow \psi(\exp \langle \mu, z \rangle_p) =: g_\psi(\mu)$$

является топологическим изоморфизмом пространства  $(H', \beta)$  на пространство  $[1, H(z))_p$  всех целых функций в  $\mathbb{C}^p$  таких, что

$$\forall f \in [1, H(z))_p \exists n = n(f), \exists M = M(n, f) : \\ |f|_n := \sup_{z \in \mathbb{C}^p} \frac{|f(z)|}{\exp q_n H(z)} < +\infty.$$

При этом  $[1, H(z))_p = \varinjlim_n EC(\overline{q_n G})$ , где при любом  $n \geq 1$   $EC(\overline{q_n G})$  — пространство всех целых функций  $y(z)$  в  $\mathbb{C}^p$  таких, что  $|y|_n < +\infty$ . Если  $|\cdot|_n$  — норма в  $EC(\overline{q_n G})$ , то, как хорошо известно (см. по этому поводу, например, обзор [137] или книгу [122]),  $[1, H(z))_p$  — регулярный индуктивный предел последовательности  $B$ -пространств  $\{EC(\overline{q_n G})\}_{n=1}^\infty$  и, более того,  $LN^*$ -пространство в терминологии Себаштьяна-и-Силвы. Как легко проверить с помощью теоремы 2.3, в данном случае

$$A_2 = \left\{ c = \{c_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^p} : \overline{\lim}_{|\alpha|_p \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_\alpha|_p} \ln |c_\alpha| + H(\lambda_\alpha) \right] \leq 0 \right\}.$$

На основании теоремы 3.31  $E_{\mathbb{N}^p}$  — АПС в  $A(G)$  тогда и только тогда, когда оператор интерполирования  $G_E$

$$\forall y \in [1, H(z))_p \rightarrow \{y(\lambda_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \in A_2$$

отображает взаимно однозначно  $[1, H(z))_p$  на множество

$$E_{A_2}^{(A(G))'} := \{ \{y(\lambda_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{N}^p} : y \in [1, H(z))_p \},$$

замкнутое (слабо или, что все равно, сильно) в пространстве  $(A_2, \tau_2)' := \varinjlim_n B_n$ , где для любого  $n \geq 1$

$$B_n = \left\{ \{d_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^p} : \|d\|_n := \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^p} |d_\alpha| \exp q_n H(\lambda_\alpha) < \infty \right\}.$$

Далее, по той же теореме 3.31  $E_{\mathbb{N}^p}$  — АПС в  $(E_{\mathbb{N}^p}; A(G))$  тогда и только тогда, когда оператор  $G_E$  отображает  $[1, H(z))_p$  на слабо или сильно замкнутое подпространство  $(A_2, \tau_2)'$ .

Наконец,  $E_{\mathbb{N}^p}$  — абсолютный базис в  $(E_{\mathbb{N}^p}; A(G))$  в том и только том случае, когда интерполяционная задача

$$y(\lambda_\alpha) = d_\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}^p, \quad (3.36)$$

разрешима в  $[1, H(z)]_p$  для любой системы  $\{d_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^p}$  из  $(A_2)'$ ;  $E_{\mathbb{N}^p}$  — абсолютный базис в  $A(G)$  тогда и только тогда, когда оператор  $G_E$  является топологическим изоморфизмом  $[1, h(z)]_p$  на  $(A_2, \tau_2)' =: \hat{A}_2$ .

В случае  $p = 1$  интерполяционная задача (3.36) изучалась в течение довольно длительного времени, и по этому вопросу имеется обширная библиография (см., например, [37, 38, 88, 97, 98, 102, 146, 174]).

**3.9.6.** Пусть теперь  $F$  — выпуклый компакт в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ , с опорной функцией  $h_F(z)$ ;  $G_n$  — содержащая  $F$  ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$  с опорной функцией  $h_{G_n}(z) = h_F(z) + \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , т. е.  $G_n = F + K_p(0, 1/n)$ , где  $K_p(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}^p : |z - z_0| < r\}$ . Ясно, что

$$F \subset G_{n+1} \subset \overline{G_{n+1}} \subset G_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

причем  $\bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n = F$ . Обозначим символом  $H(F)$  пространство всех аналитических ростков на  $F$ . Каждый из этих ростков является классом эквивалентности, состоящим из всех локально аналитических на  $F$  функций  $f$  таких, что

$$\exists n_0 = n_0(f) : f \in A(G_{n_0}), \quad f(z) = f_0(z) \quad \forall z \in G_{n_0},$$

где  $f_0$  — некоторая фиксированная локально аналитическая на  $F$  функция, определяющая данный класс эквивалентности.

Введем в  $H(F)$  топологию  $\mu$  индуктивного предела пространств Фреше  $A(G_n)$  — сильнейшую из локально выпуклых топологий таких, что оператор «тождественного вложения», ставящий в соответствие каждой функции из  $A(G_n)$  содержащий ее класс эквивалентности в  $H(F)$ , непрерывен при всех  $n \geq 1$ . Как легко убедиться, каждое пространство  $A(G_n)$  вложено вполне непрерывно в  $A(G_{n+1})$  для любого  $n \geq 1$  (такое вложение далее будем обозначать как  $A(G_n) \hookrightarrow A(G_{n+1})$ ), и потому  $H(F), \mu = \varinjlim_n (A(G_n))'_\beta = LN^*$ -пространство (см., например, [124, 129]). Очевидно, что  $\exp(\langle \lambda, z \rangle_p) \in H(F)$  для любого  $\lambda \in \mathbb{C}^p$ . При этом, согласно [122, 125, 143],  $(H(F), \mu)'_\beta = \varprojlim_n (A(G_n))'_\beta$ ; с помощью преобразования Лапласа

пространство  $(H(F), \mu)'_\beta$  отождествляется с пространством  $[1, h_F]_p = \varprojlim_n [1, h_{G_n}]_p$ .

Зафиксируем какую-либо последовательность экспонент

$$E_\Lambda := \{\exp(\langle \lambda_k, z \rangle_p)\}_{k=1}^\infty, \quad \Lambda := \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\mathbb{N}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p = \infty.$$

По системе  $E_\Lambda$  образуем пространство  $A_2 = A_2(E_\Lambda, H(F))$  всех последовательностей  $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$  таких, что ряд  $\sum_{k=1}^\infty c_k \exp(\langle \lambda_k, z \rangle_p)$  абсолютно сходится в  $H(F)$ . Как отмечено в п. 2.2.1,  $LN^*$ -пространство  $H(F)$  обладает свойством  $(Y_0)$ . Поэтому

$$A_2 = \left\{ \{c_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \text{ряд } \sum_{k=1}^\infty c_k \exp(\langle \lambda_k, z \rangle_p) \text{ абсолютно} \right. \\ \left. \text{сходится в } A(G_n) \text{ при некотором } n = n(c) \right\}.$$

Учитывая сказанное в начале пункта 2.2.4, заключаем, что

$$A_2 = \bigcup_{n=1}^\infty A_{n,2},$$

где

$$A_{n,2} := \left\{ \{c_k\}_{k=1}^\infty : \varprojlim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_k|_p} \ln |c_k| + h_F \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) + \frac{1}{n} \right] \leq 0 \right\}.$$

Если в каждом пространстве  $A_{n,2}$  ввести топологию счетным набором норм

$$|c|_{m,n} = \sum_{k=1}^\infty |c_k| \exp \left\{ q_m |\lambda_k|_p \left[ h_F \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right) + \frac{1}{n} \right] \right\},$$

где  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 < q_m \uparrow 1$ , а в пространстве  $A_2$  — топологию  $\varinjlim_n A_{n,2}$ , то, как нетрудно проверить,  $A_{n,2} \xrightarrow{\sim} A_{n+1,2}$  и, следовательно,  $A_2, \mu_1 := \varinjlim_n A_{n,2}$  —  $LN^*$ -пространство. Кроме того, билинейная форма  $\langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^\infty c_k d_k$  устанавливает отделимую двойственность между  $A_2, \mu_1$  и пространством Фреше

$$\hat{A}_2 := \left\{ d = \{d_k\}_{k=1}^\infty : [d]_n = \sup_{r \geq 1} \frac{|d_k| \exp(-|\lambda_k|_p/n)}{\exp(|\lambda_k|_p) h_F \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|_p} \right)} < +\infty \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

с определяющим топологию  $\nu_2$  в нем набором норм  $[\cdot]_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Таким образом,  $(A_2, \mu_1)'_\beta = \hat{A}_2, \nu_2$ . А так как для  $LN^*$ -пространств  $H(F)$ ,  $\mu$  и  $A_2, \mu_1$  справедливы все четыре ситуации двойственности, то из теоремы 3.31 следует такой результат.

**Теорема 3.32.** Если  $p \geq 1$  и  $F$  — выпуклый компакт в  $\mathbb{C}^p$ , то:

1) для того чтобы система  $E_\Lambda$  была абсолютным базисом в  $H(F)$ , необходимо и достаточно, чтобы интерполяционная задача (3.36) была разрешима в  $[1, h_F]_p$  для любой правой части  $d$  из  $\hat{A}_2$ ;

2)  $E_\Lambda$  — АПС в  $(E_\Lambda; H(F))$  тогда и только тогда, когда множество

$$T_F := \{(g(\lambda_k))_{k=1}^\infty : g \in [1, h_F]_p\}$$

замкнуто (сильно или слабо) в  $\hat{A}_2, \nu_2$ ;

3) для того чтобы система  $E_\Lambda$  была АПС в  $H(F)$ , необходимо и достаточно, чтобы интерполяционная задача  $y(\lambda_k) = 0$ ,  $k \geq 1$ , имела только нулевое решение в  $[1, h_F]_p$  и чтобы множество  $T_F$  было замкнуто (слабо или сильно) в  $\hat{A}_2, \nu_2$ .

**3.9.7.** В заключение применим теорему 3.31 к одному классу целых функций, рассмотренному в статье [150]. Пусть  $G$  — ограниченная односвязная область в  $\mathbb{C}$  и  $E_{(G)}$  — множество всех целых функций  $y(z)$ , представимых в виде абсолютно сходящегося в каждой конечной точке  $z$  из  $\mathbb{C}$  ряда  $y(z) = \sum_{k=1}^\infty y_k e^{\mu_k z}$ , в котором  $(y_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$ , а  $(\mu_k)_{k=1}^\infty$  — какая-либо последовательность точек из  $G$ . Пусть  $M_G = \sup_{v \in G} |v|$ . Из неравенства

$$|y(z)| \leq \sum_{k=1}^\infty |y_k| e^{\mu_k z} \leq C(y) e^{M_G |z|}$$

выводим, что каждая функция из  $E_{(G)}$  является целой функцией экспоненциального типа; более того, как нетрудно проверить,  $E_{(G)} \subset [1, h_{\bar{G}}]$ .

Зафиксируем произвольную последовательность  $\Lambda$  точек  $(\lambda_k)_{k=1}^\infty$  из  $G$  и выясним, когда  $E_\Lambda := \{\exp(\lambda_k, z)\}_{k=1}^\infty$  — АПС в  $E_{(G)}$ . Напомним, что любой ряд вида  $\sum_{k=1}^\infty c_k e^{\mu_k z}$ , в котором  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_k \in G$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , согласно следствию теоремы 2.13 сходится абсолютно в каждой конечной точке  $z$  из  $\mathbb{C}$  тогда и только тогда, когда  $c_k \in \ell_1$ .

Следовательно, в рассматриваемой ситуации

$$A_2 = A_2(E_\Lambda, E_{(G)}) = \left\{ (c_k)_{k=1}^\infty : \sum_{k=1}^\infty |c_k| < +\infty \right\} = \ell_1.$$

При этом,  $A_2$  —  $B$ -пространство с нормой  $\|c\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ , а сопряженное с ним пространство можно отождествить с  $B$ -пространством

$$\ell_{\infty} = \left\{ (d_k)_{k=1}^{\infty} : \sup_{k \in \mathbb{N}} |d_k| < +\infty \right\} \text{ с нормой } \|d\|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |d_k|.$$

Если  $E_{\Lambda}$  — АПС в  $E_{(G)}$ , то  $B$ -пространство  $M_{\Lambda, \nu}$  из п. 2.3.1 (с  $p = 1$ ) совпадает по набору элементов с  $E_{(G)}$ . В данном случае  $E_{(G), \nu}$  —  $B$ -пространство, причем, как показано в [150],  $(E_{(G), \nu})'$  можно с помощью преобразования Лапласа отождествить с  $B$ -пространством  $E_{(G)}^{\infty}$ , состоящим из всех аналитических и ограниченных в  $G$  функций  $g$ , снабженным  $\sup$ -нормой  $\|g\|_{\infty}^G = \sup_{z \in G} |g(z)|$ . Поэтому при определении условий, при которых  $E_{\Lambda}$  — АПС в  $E_{(G), \nu}$ , можно считать, что  $E_{(G), \nu}$  —  $B$ -пространство. Но в этом случае к паре пространств  $E_{(G), \nu}$  и  $A_2$  применимы все четыре ситуации двойственности. Следовательно, чтобы последовательность  $E_{\Lambda}$  была АПС в  $(E_{\Lambda}, E_{(G)})$ , необходимо и достаточно, чтобы множество  $T_0 := \{(g(\lambda_k))_{k=1}^{\infty} : g \in E_{(G)}^{\infty}\}$  было замкнутым в  $\ell_{\infty}$ . Далее,  $E_{\Lambda}$  — АПС в  $E_{(G), \nu}$  тогда и только тогда, когда интерполяционная задача  $y(\lambda_k) = 0$ ,  $k \geq 1$ , имеет только нулевое решение в  $E_{(G)}^{\infty}$ , а множество  $T_0$  замкнуто в  $\ell_{\infty}$ . Иначе говоря,  $E_{\Lambda}$  — АПС в  $E_{(G), \nu}$  в том и только в том случае, когда «оператор интерполирования»

$$\ell_{\Lambda} : \forall g \in E_{(G)}^{\infty} \rightarrow \{g(\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$$

отображает  $B$ -пространство  $E_{(G)}^{\infty}$  взаимно однозначно на замкнутое подпространство ( $B$ -пространство) пространства  $\ell_{\infty}$ .

Так как оператор  $\ell_{\Lambda}$  непрерывен из  $E_{(G)}^{\infty}$ ,  $\|\cdot\|_{\infty}^G$  в  $\ell_{\infty}$ , то, привлекая теорему Банаха об изоморфизме, можно выведенный из теоремы 3.31 критерий выразить соотношением

$$\exists b < \infty : \sup_{z \in G} |g(z)| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |g(\lambda_k)| \quad \forall g \in E_{(G)}^{\infty},$$

и тем самым получить один из установленных в [150] критериев того, что  $E_{\Lambda}$  — АПС в  $E_{(G)}$ .

## ГЛАВА 4

### ОБОБЩЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

#### 4.1. Абсолютно представляющие семейства элементов

**4.1.1.** Пусть  $H$  — ПОЛВП над полем скаляров  $\Phi$ , где  $\Phi = \mathbb{C}$  или  $\Phi = \mathbb{R}$ . Для определенности всюду далее в этом разделе предполагается, что  $\Phi = \mathbb{C}$ . Однако все излагаемые результаты справедливы (почти без изменения доказательств) и для случая, когда  $\Phi = \mathbb{R}$ .

Пусть  $\Lambda$  — фиксированное множество индексов (не обязательно счетное) и  $X_\Lambda = \{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$  — некоторая совокупность ненулевых попарно различных элементов из  $H$ . Следуя определению из работы [54, с. 670], назовем  $X_\Lambda$  абсолютно представляющим семейством (АПСм в  $H$ , если для любого  $x$  из  $H$  найдется семейство элементов из  $H$  вида

$$\{c_\alpha x_\alpha : c_\alpha \in \Phi, \alpha \in \Lambda\},$$

абсолютно суммируемое к  $x$  в  $H$ , т. е. суммируемое к  $x$  в  $H$  и такое, что  $\sum_{\alpha \in \Lambda} p(x_\alpha) |c_\alpha| < \infty$  при всех  $p \in \mathcal{P}$ , где  $\mathcal{P} = \{p\}$  — набор преднорм, определяющий топологию в  $H$ . Если для каждого  $x$  из  $H$  семейство с указанными свойствами не только существует, но и единственно,  $X_\Lambda$  называется абсолютно суммирующим базисом (АСмБ) в  $H$ . В частном случае, для счетного множества  $\Lambda$ , определения АПСм и АСмБ совпадают, соответственно, с определениями АПС и АБ из главы 3.

По аналогии с п. 3.1.3 введем пространство  $A_2 = A_2(X_\Lambda, H)$  числовых семейств из  $\mathbb{C}^\Lambda$

$$A_2(X_\Lambda, H) = \left\{ c = (c_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} : c_\alpha \in \mathbb{C} \ \forall \alpha \in \Lambda; \right. \\ \left. q_p(c) := \sum_{\alpha \in \Lambda} |c_\alpha| p(x_\alpha) < \infty \ \forall p \in \mathcal{P} \right\}$$

с топологией  $\mu$ , определяемой набором преднорм  $Q_{\mathcal{P}} := \{q_p : p \in \mathcal{P}\}$ . Тогда  $(A_2, \mu)$  — ПОЛВП.

Для любого индекса  $\beta$  из  $\Lambda$  определим в  $A_2$  «орт»  $e_{(\beta)} = \{e_{\beta}^{(\gamma)}\}_{\gamma \in \Lambda}$ , где  $e_{\beta}^{(\gamma)}$  — символ Кронекера, т. е.  $e_{\beta}^{(\beta)} = 1$  и  $e_{\beta}^{(\gamma)} = 0$  при  $\gamma \in \Lambda, \gamma \neq \beta$ . Очевидно, что  $e_{(\beta)} \in A_2(X_{\Lambda}, H)$  для любого  $\beta \in \Lambda$ .

Введем оператор представления  $L_{\Lambda}$ :

$$\forall c \in A_2 \rightarrow L_{\Lambda}c = \sum_{\alpha \in H} c_{\alpha}x_{\alpha} \in H.$$

Ясно, что  $L_{\Lambda}$  — линейный оператор, непрерывно действующий из  $(A_2, \mu)$  в  $H$ . Следующий результат очевиден.

**Теорема 4.1.**  $X_{\Lambda}$  — АПСМ в  $H$  тогда и только тогда, когда  $L_{\Lambda}$  — эпиморфизм  $A_2$  на  $H$ .

Прежде чем сформулировать другой, не столь очевидный, критерий, заметим, что, как легко проверить, семейство «ортов»  $\{e_{(\beta)}\}_{\beta \in \Lambda}$  является АСмБ в  $(A_2, \mu)$ , причем  $L_{\Lambda}e_{(\beta)} = x_{\beta}$  при любом  $\beta \in \Lambda$ .

**Теорема 4.2.** Семейство  $X_{\Lambda}$  является АПСМ в ПОЛВП  $H$  тогда и только тогда, когда существуют ПОЛВП  $E$  с АСмБ  $\{v_{\gamma}\}_{\gamma \in \Lambda}$  и эпиморфизм  $T$  из  $E$  на  $H$  такие, что  $Tv_{\gamma} = x_{\gamma}$  при всех  $\gamma \in \Lambda$ .

◁ 1. Пусть  $X_{\Lambda}$  — АПСМ в  $H$ ; тогда в качестве  $E$  можно взять пространство  $A_2(X_{\Lambda}, H)$ , в качестве  $\{v_{\gamma}\}_{\gamma \in \Lambda}$  — семейство ортов  $\{e_{(\beta)}\}_{\beta \in \Lambda}$  и, наконец, в качестве  $T$  — оператор представления  $L_{\Lambda}$ .

2. Пусть, обратно,  $V := (v_{\gamma})_{\gamma \in \Lambda}$  — АСмБ в некотором ПОЛВП  $E$  и  $T$  — эпиморфизм  $E$  на  $H$  такой, что для всех  $\gamma \in \Lambda$   $Tv_{\gamma} = x_{\gamma}$ . Для любого  $x$  из  $H$  найдется элемент  $g$  из  $E$  такой, что  $Tg = x$ . Далее, так как  $V$  — АСмБ в  $E$ , то  $g = \sum_{\alpha \in \Lambda} d_{\alpha}v_{\alpha}$ , причем семейство  $\{d_{\alpha}v_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$  абсолютно суммируемо (к  $g$ ) в  $E$ . Но тогда в силу линейности и непрерывности оператора  $T$

$$x = Tg = T\left(\sum_{\alpha \in \Lambda} d_{\alpha}v_{\alpha}\right) = \sum_{\alpha \in \Lambda} d_{\alpha}Tv_{\alpha} = \sum_{\alpha \in \Lambda} d_{\alpha}x_{\alpha},$$

и семейство  $\{d_{\alpha}x_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$  абсолютно суммируемо (к  $x$ ) в  $H$ . Следовательно,  $X_{\Lambda}$  — АПСМ в  $H$ . ▷

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В теореме 4.2 предположение о том, что  $V$  — АСмБ в  $E$ , можно заменить (без изменения доказательства) требованием, чтобы  $V$  было АПСМ в  $E$ .



**4.1.2.** Критерий 4.2 позволяет исследовать свойства АПСм и строить различные примеры АПСм, варьируя ПОЛВП  $E$  и АПСм  $V$  (результаты такого рода для случая, когда множество  $\Lambda$  счетно, т. е. для абсолютно представляющих систем, имеются в ряде работ автора (см., например, [47]). Однако, этот критерий малоэффективен при решении вопроса о том, будет ли заданное множество элементов  $X_\Lambda$  АПСм в  $H$ . В данном пункте приводятся критерии иного рода, более полезные в этом отношении. Для простоты изложения всюду далее предполагается, что  $H$  — пространство Фреше с определяющим топологию набором преднорм  $\mathcal{P} = \{p_n\}_{n=1}^\infty$  (результаты, подобные изложенным далее, можно получить, но более сложным путем и при определенных дополнительных предположениях, и в случае, когда  $H$  — внутренний индуктивный предел возрастающей последовательности пространств Фреше или же пространство, сильно сопряженное к рефлексивному пространству Фреше).

По-видимому, первый критерий такого рода был установлен для пространств Фреше в [54, теорема 1]. Он основан на описанном чуть ниже понятии строгой  $X_\Lambda$ -топологии и, как показано на ряде примеров в [54], весьма полезен при определении условий, необходимых для того, чтобы  $X_\Lambda$  было АПСм в  $H$ . Однако до сих пор он мало что дал для отыскания достаточных условий.

Поэтому мы приведем здесь его формулировку, снабдив ее доказательством только той части, которая относится к необходимости и используется в дальнейшем (в разделе 4.4).

Предварительно напомним некоторые определения из [54]. Пусть  $H$  — ПОЛВП с определяющим топологию набором преднорм  $P = \{p_n\}_{n \in B}$ , где  $B$  — или бесконечное счетное множество индексов, или одноэлементное множество. Соответственно,  $H$  — или не банахово пространство Фреше, или  $B$ -пространство. Пусть, как выше,  $x_\alpha \in H$  для любого  $\alpha \in \Lambda$  и  $X_\Lambda := (a_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ . Следуя [54], назовем подпространство  $H_0$  с топологией  $\delta$  пространства  $H$   $X_\Lambda$ -подпространством  $H$ , если:

- 1)  $\text{span } X_\Lambda \subseteq H_0$ ;
- 2) топология  $\delta$  в  $H_0$  определяется набором преднорм  $(q_n)_{n \in B}$  таких, что для любого  $n \in B$  существует  $b_n < \infty : p_n(x) \leq b_n q_n(x)$  при всех  $x \in H_0$  (и, следовательно,  $(H_0, \delta) \hookrightarrow H$ );
- 3) при любых  $n \in B$  и  $\alpha \in \Lambda$   $p_n(x_\alpha) = q_n(x_\alpha)$ ;
- 4)  $(H_0, \delta)$  — полное ЛВП.

Из условия 2) следует, что пространство  $H_0$  отделимо.

Далее, согласно [54],  $H$  — пространство со строгой  $X_\Lambda$ -топологией, если не существует ни одного собственного  $X_\Lambda$ -подпространства  $H$ .

**Теорема 4.3** [54]. *Для того чтобы  $X_\Lambda$  была АПСм в  $H$ , необходимо и достаточно, чтобы пространство  $H$  являлось пространством со строгой  $X_\Lambda$ -топологией.*

◁ *Необходимость.* Пусть  $H$  не является пространством со строгой  $X_\Lambda$ -топологией. Тогда найдется хотя бы одно собственное  $X_\Lambda$ -подпространство  $H_0$  пространства  $H$ . Очевидно, что если какое-либо семейство элементов из  $H$  вида  $(c_\alpha x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  абсолютно суммируемо в  $H$  к какому-то элементу  $v$ , то

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} |c_\alpha| p_n(x_\alpha) = \sum_{\alpha \in \Lambda} |c_\alpha| q_n(x_\alpha) < +\infty \quad \forall n \in B.$$

Тогда, в силу полноты  $H_0$ , найдется элемент  $v_1$  из  $H_0$  такой, что семейство  $(c_\alpha x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  абсолютно суммируемо к  $v_1$  в  $(H_0, \delta)$ . Так как  $(H_0, \delta) \hookrightarrow H$ , то это семейство абсолютно суммируемо к  $v_1$  и в  $H$ , т. е.  $v = v_1 \in H_0$ .

Таким образом, множество всех элементов  $x$  из  $H$  вида  $x = \sum_{\alpha \in \Lambda} d_\alpha x_\alpha$ , где  $d_\alpha \in \Phi$  для любого  $\alpha \in \Lambda$  и  $\sum_{\alpha \in \Lambda} |d_\alpha| p_n(x_\alpha) < \infty$  при всех  $n \in B$ , содержится в собственном подпространстве  $H_0$  пространства  $H$ . Следовательно (так как  $H \setminus H_0 \neq \emptyset$ ),  $X_\Lambda$  — не АПСм в  $H$ . ▷

Основная же часть данного раздела посвящена выводу другого критерия с помощью общей теории двойственности в локально выпуклых пространствах.

**4.1.3.** Кроме пространства  $A_2(X_\Lambda, H)$  введем еще одно пространство числовых семейств

$$\hat{A}_2 := \hat{A}_2(X_\Lambda, H) = \{d = (d_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \mid \exists b = b(d) < \infty, \exists n = n(d) : \\ |d_\alpha| \leq b p_n(x_\alpha) \quad \forall \alpha \in \Lambda\}.$$

Билинейная форма  $\langle c, d \rangle = \sum_{\alpha \in \Lambda} c_\alpha d_\alpha$  устанавливает отделимую двойственность между  $A_2$  и  $\hat{A}_2$ . С помощью тех же рассуждений, как на с. 196 и 197 работы [37], убеждаемся в том, что топология Фреше в  $A_2$ , заданная набором преднорм  $Q_{\mathcal{P}}$ , согласуется с двойственностью  $A_2, \hat{A}_2$ .

Так как оператор представления  $L_\Lambda$  непрерывен из  $A_2$  в  $H$ , то его сопряженный  $l_\Lambda := (L_\Lambda)'$  непрерывен слабо и сильно из  $H'$  в  $\hat{A}_2$ . Если  $\langle x, \phi \rangle_0$  — билинейная форма, устанавливающая (отделимую) двойственность между  $H$  и  $H'$ , то

$$\langle L_\Lambda c, \phi \rangle_0 = \langle c, l_\Lambda \phi \rangle \quad \forall c \in A_2, \forall \phi \in H'.$$

Полагая  $c = (e_{(\beta)})$ , где  $\beta$  — произвольный индекс из  $\Lambda$ , находим:

$$\langle e_{(\beta)}, l_\Lambda \phi \rangle = (l_\Lambda \phi)_\beta = \langle L_\Lambda e_{(\beta)}, \phi \rangle_0 = \langle x_\beta, \phi \rangle_0 = \phi(x_\beta).$$

Таким образом, сопряженный с  $L_\Lambda$  оператор  $l_\Lambda$  действует по правилу

$$\forall \phi \in H' \rightarrow l_\Lambda \phi = \{\phi(x_\beta)\}_{\beta \in \Lambda}.$$

В пространстве  $H'$ , сопряженном к пространству Фреше  $H$ , можно ввести различные топологии, описанные, например, в [125, 143]. В последующем используется индуктивная топология, определенная в  $H'$  по общей схеме, изложенной на с. 698 монографии [143]. Именно, положим вначале  $\mathcal{U}_n := \{x \in H : p_n(x) \leq 1\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Тогда множество  $\mathcal{U} := \{\mathcal{U}_n : n = 1, 2, \dots\}$  является семейством окрестностей нуля в  $H'$ , гомотетические образы которых образуют базу в нуле. Пусть  $\mathcal{P}_n$  — поляра  $\mathcal{U}_n$  в  $H'$ . С помощью леммы 2 на с. 27 книги [125] устанавливаем, что  $\mathcal{P}_n = \{\phi \in H' : |\phi(x)| \leq p_n(x) \text{ для любого } x \in H\}$ .

Если положить  $G_n := \bigcup_{r>0} r\mathcal{P}_n$ ,  $n \geq 1$ , то  $H' = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ . Определим на  $H'$  функцию  $\tilde{p}_n(\phi)$  со значениями из  $[0, +\infty]$  соотношением

$$\tilde{p}_n(\phi) := \inf\{r > 0 : \phi \in r\mathcal{P}_n\}.$$

Тогда  $G_n = \{\phi \in H' : \tilde{p}_n(\phi) < +\infty\}$  при всех  $n \geq 1$ . Зафиксировав  $n \geq 1$ , найдем, что  $|\phi(x)| \leq p_n(x)\tilde{p}_n(\phi)$  для любого  $\phi \in G_n$  и, следовательно,

$$\tilde{p}_n(\phi) = \min\{r \geq 0 : |\phi(x)| \leq rp_n(x) \forall x \in H\}.$$

Таким образом,  $\tilde{p}_n(\phi) \in [0, +\infty)$  для любого  $\phi \in G_n$ .

Будем всюду далее придерживаться общепринятого соглашения, по которому

$$\frac{c}{0} < +\infty \Leftrightarrow \frac{c}{0} = 0 \Leftrightarrow c = 0 \quad \forall c \geq 0. \quad (4.1)$$

Тогда  $\tilde{p}_n(\phi) = \sup_{x \in H} \frac{|\phi(x)|}{p_n(x)}$ .

Пусть, как обычно,  $H'_\beta = H'$ ,  $\beta(H', H)$  — сильное сопряженное к пространству  $H$ .

Применим к пространству  $H'$  лемму 6.5.2 из [143, с. 609], положив в обозначениях этой леммы  $E = H'_\beta$ ,  $A = P_n$ . Тогда  $E_A = G_n$ . Так как множество  $P_n$  выпукло, уравновешенно, ограничено, секвенциально полно и секвенциально замкнуто в  $H'_\beta$ , то по лемме 6.5.2 топология  $\tau_n$ , определенная на  $G_n$  с помощью преднормы  $\tilde{p}_n(\phi)$ , является нормированной, а само  $G_n$  —  $B$ -пространством. Согласно той же лемме,  $(G_n, \tau_n) \hookrightarrow H'_\beta$ . Положим  $(H', \lambda) := \varinjlim G_n$ , где при любом  $n \geq 1$   $G_n$  —  $B$ -пространство с нормой  $\tilde{p}_n(\phi)$ . Так как при всех  $n \geq 1$   $G_n \hookrightarrow H'_\beta$ , то  $\lambda \geq \beta$ . Далее, как установлено в [143] (см. формулировку предложения 8.4.15 на с. 698 этой монографии, а также его доказательство), набор ограниченных множеств в  $H'_\beta$  и в  $(H', \lambda)$  — один и тот же; кроме того, множество  $D$  ограничено в  $(H', \lambda)$  тогда и только тогда, когда  $D$  содержится в некотором  $(G_n, \tau_n)$  и ограничено в нем, т. е.  $(H', \lambda)$  — регулярный индуктивный предел. Как показано в [143], равенство  $\lambda = \beta$  имеет место, в частности, если  $H$  —  $B$ -пространство или рефлексивное пространство Фреше (пространства Фреше  $H$ , для которых топологии  $\lambda$  и  $\beta$  в  $H'$  совпадают, названы в [143] правильными).

Обратимся теперь к оператору  $l_\Lambda = (L_\Lambda)'$ , действующему из  $H'$  в  $B := l_\Lambda(H') \subseteq \hat{A}_2$ . Если при любом  $n \geq 1$

$$B_n := \{g \in B \mid \exists d < \infty : |g_\mu| \leq dp_n(x_\mu) \quad \forall \mu \in \Lambda\},$$

то  $B_n$  — линейное пространство с нормой  $|g|_n^\wedge$ , где

$$\begin{aligned} |g|_n^\wedge &:= \inf \{r \geq 0 : |g_\lambda| \leq rp_n(x_\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda\} = \\ &= \min \{r \geq 0 : |g_\lambda| \leq rp_n(x_\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda\} = \sup_{\mu \in \Lambda} \frac{|g_\mu|}{p_n(x_\mu)}. \end{aligned}$$

Тогда  $B_n = \{g \in B : |g|_n^\wedge < +\infty\}$  и  $B = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ . Так как

$$|\phi(x)| \leq \tilde{p}_n(\phi)p_n(x) \quad \forall n \geq 1, \forall x \in H, \forall \phi \in G_n,$$

то  $l_\Lambda$  действует непрерывно из каждого  $G_n$  в  $B_n$  и, следовательно, непрерывно из  $(H', \lambda)$  в  $(B, \mu_\Lambda) := \varinjlim B_n$ . По критерию Банаха оператор  $l_\Lambda$  инъективен тогда и только тогда, когда  $\text{span } \overline{X_\Lambda} = H$ .

**4.1.4.** Прежде всего установим необходимое условие того, что  $X_\Lambda$  — АПС<sub>М</sub> в  $H$ .

**Теорема 4.4.** Если  $X_\Lambda$  — АПС<sub>М</sub> в пространстве Фреше  $H$ , то

$$\forall n \geq 1 \exists m \geq 1, \exists b < +\infty : \tilde{p}_m(\phi) \leq b |l_\Lambda \phi|_n^\wedge \quad \forall \phi \in H'. \quad (4.2)$$

◁ Если  $X_\Lambda$  — АПС<sub>М</sub> в  $H$ , то  $L_\Lambda$  — эпиморфизм  $A_2$  на  $H$ , и потому отображение  $L_\Lambda$  открыто. Зададим произвольно  $n \geq 1$  и найдем число  $b < +\infty$  и номер  $m \geq 1$  такие, что

$$\forall x \in H \exists C_x := (c_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in A_2 : L_\Lambda C_x = x; \quad q_{p_n}(C_x) \leq b p_m(x).$$

Для любого  $\phi$  из  $H'$  имеем

$$|\phi(x)| = \left| \phi \left( \sum_{\alpha \in \Lambda} c_\alpha x_\alpha \right) \right| \leq |l_\Lambda \phi|_n^\wedge \sum_{\alpha \in \Lambda} |c_\alpha| p_n(x_\alpha) \leq b |l_\Lambda \phi|_n^\wedge p_m(x).$$

Отсюда  $\tilde{p}_m(\phi) \leq b |l_\Lambda \phi|_n^\wedge$  и соотношение (4.2) установлено. ▷

Учитывая еще соглашение (4.1), неравенство (4.2) можно переписать в таком виде:

$$\forall n \geq 1 \exists m \geq 1, \exists b < +\infty : \sup_{x \in H} \frac{|\phi(x)|}{p_m(x)} \leq b \sup_{\lambda \in \Lambda} \frac{|\phi(x_\lambda)|}{p_n(x_\lambda)} \quad \forall \phi \in H'. \quad (4.3)$$

Извлечем некоторые следствия из соотношений (4.2)–(4.3). Для этого предварительно установим одно вспомогательное утверждение, обобщающее лемму 9 из § 4 работы [53].

**Лемма 4.1.** Пусть при  $j = 1, 2$   $H_j = \varinjlim_n H_{n,j}$  — внутренний индуктивный предел линейных нормированных пространств  $H_{n,j}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Пусть, далее,  $T$  — линейный оператор, действующий из  $H_1$  в  $H_2$ . Для того чтобы оператор  $T$  был непрерывен из  $H_1$  в  $H_2$ , достаточно, а в случае, если  $H_2$  — регулярный индуктивный предел пространств  $H_{n,2}$ , и необходимо, чтобы для любого  $n \geq 1$  существовало  $m \geq 1$  такое, что  $T$  непрерывен из  $H_{n,1}$  в  $H_{m,2}$ .

◁ *Достаточность.* Пусть для любого  $n$  оператор  $T$  действует непрерывно из  $H_{n,1}$  в  $H_{m,2}$ , где  $m = m(n) \geq 1$ . Так как  $H_{m,2} \hookrightarrow H_2$  при любом  $m \geq 1$ , то  $T$  непрерывен из  $H_{n,1}$  в  $H_2$  при всех  $n \geq 1$  и, следовательно (см., например, [125, гл. V, п. 2, предложение 5]),  $T$  непрерывен из  $H_1$  в  $H_2$ .

*Необходимость.* Пусть оператор  $T$  отображает непрерывно  $H_1$  в  $H_2$ . Подавно  $T$  непрерывен из  $H_{n,1}$  в  $H_2$  при любом  $n \geq 1$ . Обозначим символом  $\|\cdot\|_n^j$  ( $j = 1, 2; n = 1, 2, \dots$ ) норму, определяющую топологию в нормированном пространстве  $H_{n,j}$ , и символом  $S_{n,j}$  — единичную сферу в  $H_{n,j}$ :  $S_{n,j} := \{y \in H_{n,j} : \|y\|_n^j \leq 1\}$ . Ясно, что множество  $S_{n,1}$  при любом  $n \geq 1$  ограничено в  $H_{n,1}$ . Так как линейный оператор  $T$  непрерывен из  $H_{n,1}$  в  $H_2$ , то он переводит множество  $S_{n,1}$  в множество  $Q_n := T(S_{n,1}) = \{y = Tx : x \in S_{n,1}\}$ , ограниченное в регулярном индуктивном пределе  $H_2 = \varinjlim_k H_{k,2}$ . Но тогда существует  $p \geq 1$  такое, что  $Q_n$  содержится в пространстве  $H_{p,2}$  и ограничено в нем, т. е.  $\sup_{x \in Q_n} \|x\|_p^2 = M < +\infty$ . Отсюда следует, что

$$\|Tx\|_p^2 = \|x\|_n^1 \left| T \left( \frac{x}{\|x\|_n^1} \right) \right|_n^2 \leq \|x\|_n^1 M \quad \forall x \in H_{n,1},$$

если  $x \neq 0$ . Если же  $x = 0$ , то  $\|T0\|_p^2 = 0 = \|0\|_n^1 \cdot M$ . Таким образом,

$$\forall n \geq 1 \exists p \geq 1, \exists M < +\infty : \|Tx\|_p^2 \leq M \|x\|_n^1 \quad \forall x \in H_{n,1}.$$

Следовательно,  $T$  непрерывен из  $H_{n,1}$  в  $H_{p,2}$ .  $\triangleright$

Теперь уже можно установить первый результат критериального характера.

**Теорема 4.5.** Пусть  $H$  — пространство Фреше,  $x_\alpha \in H$ ,  $x_\alpha \neq 0$  для всех  $\alpha \in \Lambda$  и  $X_\Lambda := (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) выполняется соотношение (4.2);
- 2)  $l_\Lambda$  — топологический изоморфизм  $(H', \lambda)$  на  $(B, \mu_\Lambda)$ .

$\triangleleft 1) \Rightarrow 2)$ . Пусть выполнено неравенство (4.2). Тогда отображение  $l_\Lambda$  инъективно. Так как  $l_\Lambda(H') = B$ , то  $l_\Lambda$  отображает взаимно однозначно  $H'$  на  $B$  и потому существует обратный оператор  $l_\Lambda^{-1}$ . Согласно (4.2)

$$\forall n \geq 1 \exists m \geq 1, \exists b < +\infty : \tilde{p}_m(l_\Lambda^{-1}g) \leq b|g|_n^\wedge \quad \forall g \in B, \quad (4.4)$$

или, что равносильно,

$$\forall n \geq 1 \exists m \geq 1 \exists b < +\infty : \tilde{p}_m(l_\Lambda^{-1}g) \leq b|g|_n^\wedge \quad \forall g \in B_n. \quad (4.5)$$

Но соотношение (4.5) означает, что для любого  $n \geq 1$  существует  $m \geq 1$  такое, что  $l_\Lambda^{-1}$  действует непрерывно из  $B_n$  в  $G_m$ . Следовательно,  $l_\Lambda^{-1}$  непрерывен (по лемме 4.1) и из  $(B, \mu_\Lambda)$  в  $(H', \lambda)$ . Таким образом,  $l_\Lambda$  — топологический изоморфизм  $(H', \lambda)$  на  $(B, \mu_\Lambda)$ .

2)  $\Rightarrow$  1). Пусть, обратно,  $l_\Lambda$  — топологический изоморфизм  $(H', \lambda)$  на  $(B, \mu_\Lambda)$ . Тогда оператор  $l_\Lambda$  инъективен и обратный к нему оператор  $l_\Lambda^{-1}$  действует непрерывно из  $(B, \mu_\Lambda)$  в регулярный индуктивный предел  $(H', \lambda)$ . При этом

$$(B, \mu_\Lambda) = \varinjlim B_n, \quad (H', \lambda) = \varinjlim G_n,$$

и при всех  $n \geq 1$   $B_n$  и  $G_n$  — линейные нормированные пространства. По лемме 4.1 для любого  $n \geq 1$  существует такое  $m \geq 1$ , что  $l_\Lambda^{-1}$  непрерывен из  $B_n$  в  $G_m$ , т. е. выполняется соотношение (4.5) или, что все равно, соотношение (4.4). Полагая в последнем  $g = l_\Lambda \phi$ , где  $\phi$  — любой элемент  $H'$ , приходим к (4.2).  $\triangleright$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Несложный анализ доказательства теоремы 4.5 показывает, что условие (4.3) равносильно любому из трех условий:

1) для любого  $n \geq 1$  существуют  $m \geq 1$  и  $b < +\infty$  такие, что

$$\sup_{x \in H} \frac{|(l_\Lambda^{-1}g)(x)|}{p_m(x)} \leq b|g|_n^\wedge \quad \forall g \in B; \quad (4.6)$$

2) для любого  $n \geq 1$  существуют  $m \geq 1$  и  $b < +\infty$  такие, что

$$\sup_{x \in H} \frac{|(l_\Lambda^{-1}g)(x)|}{p_m(x)} \leq b|g|_n^\wedge \quad \forall g \in B_n; \quad (4.7)$$

3) для любого  $n \geq 1$  существуют  $m \geq 1$  и  $b < +\infty$  такие, что

$$\sup_{x \in H} \frac{|\phi(x)|}{p_m(x)} \leq b \sup_{\lambda \in \Lambda} \frac{|\phi(x_\lambda)|}{p_n(x_\lambda)} \quad \forall \phi \in l_\Lambda^{-1}(B_n). \quad (4.8)$$

Из теорем 4.4 и 4.6 вытекает

**Следствие.** Пусть выполнены исходные предположения теоремы 4.5 и пусть  $X_\Lambda$  — АПСМ в  $H$ . Тогда имеет место любое из двух равносильных утверждений 1) и 2) теоремы 4.5.

**4.1.5.** Последний результат можно обратить. Предварительно определим индуктивную топологию в пространстве  $\hat{A}_2 := A'_2$  точно таким же образом, как выше в пространстве  $H'$  была введена топология  $\lambda$ . Положим

$$\tilde{A}_n := \{c = (c_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} : q_n(c) < +\infty\} \quad \forall n \geq 1.$$

Тогда  $(A_2(X_\Lambda, H))' = \varprojlim \tilde{A}_n$ , где  $\tilde{A}_n$  — полунормированное пространство с топологией, определяемой преднормой (полунормой)  $q_n(c)$ .

Если  $H = A_2$ , то

$$\begin{aligned}\tilde{U}_n &= \{c \in A_2 : q_n(c) \leq 1\}, \\ \tilde{\mathcal{P}}_n &= \{d \in \hat{A}_2 : |\langle c, d \rangle| \leq q_n(c) \ \forall c \in A_2\}\end{aligned}$$

(здесь  $\tilde{\mathcal{P}}_n$  — поляра  $\tilde{U}_n$  в  $\hat{A}_2$ ). Далее,  $\tilde{G}_n = \bigcup_{r \geq 0} r \tilde{\mathcal{P}}_n$ ;

$$|d|_n = \min \{r \geq 0 : |\langle c, d \rangle| \leq r q_n(c) \ \forall c \in A_2\} = \sup_{c \in A_2} \frac{|\langle c, d \rangle|}{q_n(c)}.$$

Приведем эквивалентные, но более удобные для дальнейшего представления  $\tilde{G}_n$  и  $|d|_n$ ,  $n \geq 1$ . С этой целью положим, по аналогии с вышеизложенным,  $A_n^\wedge := \{d = (d_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} : |d|_n^\wedge < \infty\}$ . Тогда  $A_n^\wedge$  — нормированное линейное пространство с нормой

$$|d|_n^\wedge = \min \{r \geq 0 : |d_\alpha| \leq r p_n(x_\alpha) \ \forall \alpha \in \Lambda\} = \sup_{\alpha \in \Lambda} \frac{|d_\alpha|}{p_n(x_\alpha)}.$$

Для любого  $c$  из  $A_2$  имеем

$$|\langle c, d \rangle| \leq |d|_n^\wedge \cdot \sum_{\alpha \in \Lambda} |c_\alpha| p_n(x_\alpha) \leq |d|_n^\wedge \cdot q_n(c).$$

Отсюда  $|d|_n \leq |d|_n^\wedge$  и  $A_n^\wedge \hookrightarrow \tilde{G}_n$  при всех  $n \geq 1$ . Пусть теперь  $d \in \hat{A}_2$ ,  $|d|_n < \infty$ . Тогда  $|\langle c, d \rangle| \leq |d|_n q_n(c)$ ,  $c \in A_2$ . Полагая для всех  $\alpha \in \Lambda$   $c = e_{(\alpha)}$ , найдем:

$$|d_\alpha| \leq |d|_n p_n(x_\alpha), \quad \text{откуда} \quad |d|_n^\wedge \leq |d|_n, \quad \tilde{G}_n \hookrightarrow A_n^\wedge.$$

Таким образом,  $|d|_n^\wedge = |d|_n$  для любого  $d \in \hat{A}_2$  и  $A_n^\wedge = \tilde{G}_n$  при всех  $n \geq 1$ .

При этом  $\hat{A}_2 = \bigcup_{n=1}^\infty A_n^\wedge = \bigcup_{n=1}^\infty \tilde{G}_n$ . Если в  $\hat{A}_2$  ввести индуктивную топологию  $\delta$ :  $(\hat{A}_2, \delta) = \varinjlim A_n^\wedge$ , то из полученных выше результатов для более общего пространства  $(H', \lambda)$  следует, что  $(\hat{A}_2, \delta)$  — регулярный индуктивный предел  $B$ -пространств  $A_n^\wedge$ .

Теперь уже можно получить обещанное обращение теоремы 4.5.

**Теорема 4.6.** *Если выполнены исходные предположения теоремы 4.5 и справедливо соотношение (4.2), то  $X_\Lambda$  — АПСм в  $H$ .*

◁ По теореме 4.1  $X_\Lambda$  — АПСм в  $H$  тогда и только тогда, когда оператор представления  $L_\Lambda$  является эпиморфизмом  $A_2$  на  $H$ . В свою



очередь эпиморфность оператора  $L_\Lambda : A_2 \rightarrow H$  в силу того, что  $H$  и  $A_2$  — пространства Фреше, равносильна (согласно общей теории двойственности, см. [143, гл. 8]) тому, что сопряженный оператор  $l_\Lambda = (L_\Lambda)'$  отображает взаимно однозначно  $H'$  на множество, слабо замкнутое в  $\hat{A}_2$ . Инъективность  $l_\Lambda$  следует из неравенства (4.2). Чтобы установить слабую замкнутость в  $\hat{A}_2$  векторного пространства  $B = l_\Lambda(H')$ , напомним, что по следствию теоремы 5 на с. 95 книги [15] множество  $B$  слабо замкнуто в  $\hat{A}_2$ , если его пересечение с каждым слабо замкнутым ограниченным множеством из  $\hat{A}_2$  слабо компактно. Пусть  $Q$  — какое-либо слабо замкнутое ограниченное подмножество  $\hat{A}_2$  и пусть  $D := B \cap Q$ . Пусть, далее,  $v = (v_\gamma)_{\gamma \in \omega}$  — произвольная сеть в  $D$ . Тогда

$$\forall \gamma \in \omega \exists y_\gamma \in H' : v_\gamma = \{y_\gamma(x_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}.$$

Положим  $Y := (y_\gamma)_{\gamma \in \omega}$ . Так как  $Q$  ограничено в  $\hat{A}_2$ , то  $Q$  ограничено в  $(A', \lambda) = (\hat{A}_2, \delta)$  и поэтому содержится и ограничено в некотором  $A_n^\wedge$ , т. е.  $\sup_{d \in Q} |d|_n^\wedge =: F < +\infty$ . Из условия (4.2) следует:

$$\exists m \geq 1, \exists b < +\infty : \sup \{\tilde{p}_m(\phi) : \phi \in l_\Lambda^{-1}(D)\} \leq bF.$$

Положим  $D_1 := l_\Lambda^{-1}(D)$ . Множество  $D$  содержится и ограничено в  $G_m$ ; тем более оно ограничено в  $H'_\beta$ . Так как пространство Фреше  $H$  бочечно, то (см. [15, теорема 5.2, с. 180])  $D_1$  относительно слабо компактно в  $H'$ . Поэтому из сети  $Y$  можно извлечь подсеть  $\{y_\beta\}_{\beta \in \omega_1}$ , где  $\omega_1 \subseteq \omega$ , слабо сходящуюся к элементу  $w \in H'$ . В силу слабой непрерывности оператора  $l_\Lambda$  сеть  $\{l_\Lambda y_\beta\}_{\beta \in \omega_1} = \{v_\beta\}_{\beta \in \omega_1}$  слабо сходится к  $l_\Lambda w \in B$ . Так как  $Q$  слабо замкнуто, то  $l_\Lambda w \in Q$ , т. е.  $l_\Lambda w \in B \cap Q$ .  $\triangleright$

**4.1.6.** Прежде чем сформулировать итоговый критерий того, что  $X_\Lambda$  — АПСм в пространстве Фреше  $H$ , приведем еще одно определение, введенное автором в [55] и [91, § 2]. Будем говорить, что пространство  $(H', \lambda)$  допускает  $X_\Lambda$ -реализацию (или  $X_\Lambda$ -описание), если оператор  $l_\Lambda$  является топологическим изоморфизмом  $(H', \lambda)$  на  $(B, \mu_\Lambda)$ . Непосредственно из теоремы 4.6 и следствия теоремы 4.5 вытекает

**Теорема 4.7.** Пусть  $H$  — пространство Фреше;  $x_\alpha \in H$ ,  $x_\alpha \neq 0$  для любого  $\alpha \in \Lambda$ ;  $X_\Lambda := (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ . Тогда равносильны такие утверждения:

- 1)  $X_\Lambda$  — АПСм в  $H$ ;

- 2) справедливо соотношение (4.3) (или, что все равно, (4.2));  
 3)  $(H', \lambda)$  допускает  $X_\Lambda$ -реализацию.

Условие 3) теоремы 4.7 можно выразить и в немного иной, но эквивалентной форме. Именно, положим для любого  $m \geq 1$

$$H_m := \left\{ \varphi \in H' : p_{m,\Lambda}(\varphi) := \sup_{\lambda \in \Lambda} \frac{|\varphi(x_\lambda)|}{p_m(x_\lambda)} < +\infty \right\}.$$

Тогда  $H_m$  — линейное полунормированное пространство с полунормой  $p_{m,\Lambda}$ , причем при всех  $m \geq 1$   $G_m \hookrightarrow H_m$  и  $H' = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m$ . Если  $(H', \tau_\Lambda) := \varinjlim_{n \rightarrow \infty} H_n$ , то по лемме 4.1  $\lambda \geq \tau_\Lambda$ . Обобщая соответствующее определение из [47], скажем, что множество  $X_\Lambda$   $\lambda$ -достаточно для  $H'$ , если  $\tau_\Lambda = \lambda$ . Так как  $H', \lambda = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} G_n$  — регулярный внутренний индуктивный предел  $B$ -пространств  $G_n$ , то по лемме 4.1 множество  $X_\Lambda$   $\lambda$ -достаточно для  $H'$  тогда и только тогда, когда выполняется неравенство (4.3), т. е. когда  $(H', \lambda)$  допускает  $X_\Lambda$ -реализацию.

Отметим еще, что в частном случае, когда  $\Lambda$  — счетное множество, понятие  $\lambda$ -достаточности было введено гораздо раньше, а именно, в главе I обзорной статьи [47]. Это понятие использовалось при исследовании различных конкретных АПС в пространствах аналитических функций в ряде работ автора и его учеников (см., например, [43, 47, 141] и др.).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если пространство  $H$  правильно (в частности, если  $H$  —  $B$ -пространство или рефлексивное пространство Фреше), то утверждение 3) равносильно следующему:

3')  $(H', \beta)$  допускает  $X_\Lambda$ -реализацию (т. е.  $l_\Lambda$  — топологический изоморфизм  $(H')_\beta$  на  $(B, \mu_\Lambda)$ ).

**4.1.7.** Отметим один важный для приложений к АПС и довольно распространенный среди функциональных пространств  $H$  случай, когда теорему 4.7 можно дополнить утверждением, равносильным 1)–3).

Условимся говорить, что семейство  $X_\Lambda$  сепарабельно в полном линейном топологическом пространстве  $H$ , если некоторое его счетное подмножество  $X_{\Lambda_1} := \{x_{\alpha_n} : n = 1, 2, \dots\}$  плотно в  $X_\Lambda$  (в топологии  $H$ ).

Установим сначала простой, но полезный результат.

**Лемма 4.2.** Если  $X_\Lambda$  — АПС<sub>М</sub> в  $H$ ,  $\Lambda_1 \subset \Lambda$  и  $X_{\Lambda_1}$  плотно в  $X_\Lambda$ , то  $X_{\Lambda_1}$  — АПС<sub>М</sub> в  $H$ .

◁ Положим для всех  $n \geq 1$  и  $\phi \in H'$

$$|l_{\Lambda_1} \phi|_n^{\Lambda_1} := \inf \{ r \geq 0 : |\phi(x_\gamma)| \leq r p_n(x_\gamma) \quad \forall \gamma \in \Lambda_1 \} = \sup_{\gamma \in \Lambda_1} \frac{|\phi(x_\gamma)|}{p_n(x_\gamma)}.$$

Зафиксируем любые  $\phi \in H'$  и  $n \geq 1$ . По произвольно взятым  $\lambda \in \Lambda$  и  $\varepsilon > 0$  найдем индекс  $\gamma \in \Lambda_1$  такой, что

$$|\phi(x_\lambda - x_\gamma)| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad |l_{\Lambda_1} \phi|_n^{\Lambda_1} \cdot p_n(x_\lambda - x_\gamma) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\phi(x_\lambda)| &< \frac{\varepsilon}{2} + |l_{\Lambda_1} \phi|_n^{\Lambda_1} \cdot p_n(x_\gamma) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |l_{\Lambda_1} \phi|_n^{\Lambda_1} p_n(x_\lambda) + |l_{\Lambda_1} \phi|_n^{\Lambda_1} p_n(x_\gamma - x_\lambda) < \varepsilon + |l_{\Lambda_1} \phi|_n^{\Lambda_1} p_n(x_\lambda). \end{aligned}$$

Устремляя  $\varepsilon > 0$  к нулю, получим  $|l_\Lambda \phi|_n^\Lambda \leq |l_{\Lambda_1} \phi|_n^{\Lambda_1}$ . Так как  $X_\Lambda$  — АПСм в  $H$ , то по теореме 4.1

$$\forall n \geq 1 \exists m \geq 1, \exists b < +\infty : \tilde{p}_m(\phi) \leq b |l_\Lambda \phi|_n^\Lambda \quad \forall \phi \in H'.$$

Подавно для тех же  $n, m$  и  $b$   $\tilde{p}_m(\phi) \leq b |l_{\Lambda_1} \phi|_n^{\Lambda_1}$  при любом  $\phi \in H'$ . Согласно теореме 4.4  $X_{\Lambda_1}$  — АПСм в  $H$ . ▷

Из леммы 4.2 и теоремы 4.7 непосредственно следует

**Теорема 4.8.** Пусть выполнены исходные предположения теоремы 4.7 и пусть семейство  $X_\Lambda$  сепарабельно в  $H$ . Тогда любое из утверждений 1)–3) теоремы 4.7 равносильно такому:

4) Найдется хотя бы одна АПС в  $H$  вида  $(x_{\gamma_n})_{n=1}^\infty$ , где  $\gamma_n \in \Lambda$  при всех  $n \geq 1$ .

Равносильным друг другу условиям (4.2) и (4.3) можно придать иную форму. С этой целью введем следующие характеристики, положив для любых  $m \geq 1$  и  $\psi \in H$

$$\begin{aligned} p_m^0(\psi) &:= \sup \{ |\psi(x)| : x \in H, p_m(x) \leq 1 \}; \\ |l_\Lambda^0 \psi|_m^\Lambda &:= \sup \left\{ \left| \psi \left( \frac{x_\lambda}{p_m(x_\lambda)} \right) \right| : \lambda \in \Lambda, p_m(x_\lambda) > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Если  $\tilde{p}_m(\psi) < +\infty$ , то

$$p_m^0(\psi) \leq \sup \{ \tilde{p}_m(\psi) p_m(x) : x \in H, p_m(x) \leq 1 \} \leq \tilde{p}_m(\psi) \quad \forall m \geq 1.$$

Очевидно, что неравенство  $p_m^0(\psi) \leq \tilde{p}_m(\psi)$  тем более справедливо, если  $\tilde{p}_m(\psi) = +\infty$ . Таким образом, оно верно всегда (для всех  $m \geq 1$  и  $\psi \in H'$ ).

С другой стороны, если  $p_m^0(\psi) < +\infty$ , то

$$|\psi(x)| \leq p_m^0(\psi) \quad \forall x \in H, \quad p_m(x) \leq 1.$$

Допустим, что при некотором  $x_0$  из  $H$   $p_m(x_0) = 0$ , но  $\psi(x_0) \neq 0$ . Тогда

$$\alpha x \in H, \quad \psi(\alpha x_0) = \alpha \psi(x_0) \quad \forall \alpha \in (0, +\infty).$$

Отсюда следует, что  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} |\psi(\alpha x_0)| = +\infty$ , но  $p_m(\alpha x_0) = \alpha p_m(x_0) = 0$  при всех  $\alpha$  из  $(0, +\infty)$ , откуда

$$p_m^0(\psi) \geq \sup \{ |\psi(\alpha x_0)| : \alpha \in (0, +\infty) \} = +\infty,$$

что противоречит ранее сделанному предположению.

Итак, если  $p_m^0(\psi) < +\infty$  и  $p_m(x_0) = 0$ , то  $\psi(x_0) = 0$ . Но тогда

$$\left| \frac{\psi(x)}{p_m(x)} \right| = \left| \psi \left( \frac{x}{p_m(x)} \right) \right| \leq p_m^0(\psi) \quad \forall x \in H,$$

откуда  $\tilde{p}_m(\psi) \leq p_m^0(\psi)$ . Последнее неравенство подавно верно, если  $p_m^0(\psi) = +\infty$ . Следовательно,  $p_m^0(\psi) = \tilde{p}_m(\psi)$  при всех  $\psi \in H'$  и  $m \geq 1$ , соотношение (4.2) можно переписать в такой (равносильной) форме:

$$\forall n \geq 1 \exists m \geq 1, \exists b < +\infty : p_m^0(\psi) \leq b |l_\Lambda \psi|_n^\Lambda \quad \forall \psi \in H'.$$

Таким же образом преобразуется правая часть неравенства (4.2). Именно, из определения величин  $|l_\Lambda \psi|_n^\Lambda$ ,  $|l_\Lambda^0 \psi|_n^\Lambda$  следует прежде всего, что

$$|l_\Lambda^0 \psi|_n^\Lambda \leq |l_\Lambda \psi|_n^\Lambda \quad \forall n \geq 1, \forall \psi \in H'.$$

Далее, если  $|l_\Lambda \psi|_n^\Lambda < +\infty$ , то, как выше, показываем, что если  $p_n(x_\lambda) = 0$  для некоторого  $x_\lambda$  из  $H$ , то  $\psi(x_\lambda) = 0$ . Но тогда

$$\left| \frac{\psi(x_\lambda)}{p_n(x_\lambda)} \right| = \left| \psi \left( \frac{x_\lambda}{p_n(x_\lambda)} \right) \right| \leq |l_\Lambda^0 \psi|_n^\Lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Окончательно,  $|l_\Lambda \psi|_n^\Lambda = |l_\Lambda^0 \psi|_n^\Lambda$  при любых  $n \geq 1$  и  $\psi \in H'$  и соотношение (4.2) можно записать в эквивалентной форме:

$$\forall n \geq 1, \exists m \geq 1, \exists b < +\infty : p_m^0(\psi) \leq b |l_\Lambda^0 \psi|_n^\Lambda \quad \forall \psi \in H'. \quad (4.9)$$

Сформулируем полученный результат.

**Теорема 4.9.** Пусть  $H$  — пространство Фреше с определяющим топологию набором (непрерывных) преднорм  $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ . Пусть, далее,  $\Lambda$  — любое множество индексов,  $X_\Lambda := \{x_\alpha \in H \mid \forall \alpha \in \Lambda\}$  — произвольно взятая совокупность ненулевых элементов из  $H$ . Для того чтобы  $X_\Lambda$  являлась АПС<sub>м</sub> в  $H$ , необходимо и достаточно выполнение любого из трех эквивалентных соотношений (4.2), (4.3), (4.9) или же утверждения 3) теоремы 4.7.

В частном случае, когда исходное множество индексов  $\Lambda$  счетно, из теоремы 4.9 вытекает

**Следствие.** Пусть  $H$  — пространство Фреше с определяющим топологию набором преднорм  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$  и пусть  $X := (x_k)_{k=1}^\infty$  — произвольная последовательность ненулевых элементов из  $H$ . Для того чтобы  $X$  являлась АПС в  $H$ , необходимо и достаточно выполнение любого из таких равносильных условий:

а) для любого  $n \geq 1$  существует  $b < +\infty$  такое, что

$$\sup \left\{ \frac{|\psi(x)|}{p_m(x)} : x \in H \right\} \leq b \sup \left\{ \frac{|\psi(x_k)|}{p_n(x_k)} : k \geq 1 \right\} \quad \forall \psi \in H'; \quad (4.10)$$

б) для любого  $n \geq 1$  существует  $b < +\infty$  такое, что

$$\sup \{ |\psi(x)| : x \in H, p_m(x) \leq 1 \} \leq b \sup_{k \geq 1} \frac{|\psi(x_k)|}{p_n(x_k)} \quad \forall \psi \in H'; \quad (4.11)$$

с) для любого  $n \geq 1$  существует  $b < +\infty$  такое, что

$$\begin{aligned} & \sup \{ |\psi(x)| : x \in H, p_m(x) \leq 1 \} \leq \\ & \leq b \sup \left\{ \frac{|\psi(x_k)|}{p_n(x_k)} : k \geq 1, p_n(x_k) > 0 \right\} \quad \forall \psi \in H'. \end{aligned} \quad (4.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Соотношения (4.10)–(4.12) записаны с учетом соглашения (4.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Любое из соотношений (4.10)–(4.12) в предположениях следствия равносильно тому, что  $l_\Lambda$  (где  $\Lambda = \{1, 2, \dots\}$ ) — топологический изоморфизм пространства  $(H', \lambda) = \varinjlim G_n$ , в котором при всех  $n \geq 1$   $G_n$  —  $B$ -пространство с нормой  $\tilde{p}_n(\phi) = \sup_{x \in H} \frac{|\phi(x)|}{p_n(x)}$ ,

на пространство  $(B, \mu_\Lambda) = \varinjlim B_n$ , где для любого  $n \geq 1$

$$B_n = \left\{ g \in (L_\Lambda)'(H') : |g|_n^\Lambda := \sup_{k \geq 1} \frac{|g_k|}{p_n(x_k)} < \infty \right\}$$

является  $B$ -пространством с нормой  $|g|_n^\Lambda$ .

Отметим еще, что в силу того, что определение АПС в общем полном локально выпуклом пространстве  $H$  было дано более чем на 10 лет ранее определения АПСм, соответствующие критерии вида (4.10)–(4.12) появились, как правило, раньше, чем критерий (4.2) (или (4.3)). Так, в статье [41] критерий вида (4.11) получен при дополнительном предположении о том, что  $H$  —  $M^*$ -пространство, а в работах [47, 53] — в случае, когда  $H$  — приведенный проективный предел  $B$ -пространств  $H_n$  с нормой  $\|\cdot\|_n$ . Определение приведенного проективного предела имеется, например, в главе XI книги [30] или в статьях [47, 53]. При этом в работах [41, 47] заданная последовательность  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  ненулевых элементов из  $H$  удовлетворяла дополнительному условию:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_k\|_n}{\|x_k\|_{n+1}} = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), снятому затем в [53].

Различные модификации критериев (4.10), (4.11) (при только что приведенном дополнительном условии на  $X = (x_k)_{k=1}^\infty$ ) имеются также в §§ 6, 7 главы I обзора [47] для случая, когда  $H$  — приведенный проективный предел  $B$ -пространств  $H_n$ .

**4.1.8.** Пусть  $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$ ,  $X_{\Lambda_1} := \{x_\alpha : \alpha \in \Lambda_1\}$ . Допустим, что  $X_\Lambda$  — АПСм в пространстве Фреше  $H$ , и выясним, когда  $X_{\Lambda_1}$  — также АПСм в  $H$ . Простое достаточное условие для справедливости такого заключения в случае произвольного полного ЛВП  $H$  было ранее указано в лемме 4.2.

Предварительно дадим одно определение. Пусть  $Q$  — какое-либо подпространство  $\hat{A}_2$  и  $Q_n^\Lambda := Q \cap A_n^\Lambda$  для любого  $n \geq 1$ . Напомним, что пространство  $\hat{A}_2$  введено в начале п. 4.1.3. Индуцируем в  $Q_n^\Lambda$  топологию из линейного нормированного пространства  $A_n^\Lambda$  с нормой  $|d|_n^\Lambda$  и положим  $Q, \mu_\Lambda := \varinjlim_{n \rightarrow \infty} Q_n^\Lambda$ . Аналогично, при всех  $n \geq 1$   $Q_n^{\Lambda_1} := Q \cap A_n^{\Lambda_1}$ ,  $Q = \bigcup_{n=1}^\infty Q_n^{\Lambda_1}$  и  $Q, \mu_{\Lambda_1} = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} Q_n^{\Lambda_1}$ , где

$$Q_n^{\Lambda_1} := \left\{ d \in Q : |d|_n^{\Lambda_1} := \sup_{\alpha \in \Lambda_1} \frac{|d_\alpha|}{p_n(x_\alpha)} < \infty \right\}$$

— линейное полунормированное пространство с полунормой  $|\cdot|_n^{\Lambda_1}$ .

Так как  $Q_n^\Lambda \hookrightarrow Q_n^{\Lambda_1}$  для любого  $n \geq 1$ , то  $\mu_{\Lambda_1} \leq \mu_\Lambda$ . Назовем, следуя [57], подмножество  $\Lambda_1$  множества  $\Lambda$  индуктивно достаточным для  $Q, \mu_\Lambda$ , если  $\mu_{\Lambda_1} = \mu_\Lambda$ .

**Теорема 4.10.** Пусть  $X_\Lambda$  — АПСм в  $H$  и  $\Lambda_1$  — произвольное подмножество  $\Lambda$ . Для того чтобы  $X_{\Lambda_1}$  было АПСм в  $H$ , необходимо и достаточно, чтобы множество  $\Lambda_1$  было индуктивно достаточным для  $B = \ell_\Lambda(H')$ .

◁ Положим для всех  $n \geq 1$   $\hat{A}_2^{\Lambda_1} := \bigcup_{n=1}^\infty A_n^{\Lambda_1}$  и определим линейный оператор

$$\ell_{\Lambda_1} : \forall \varphi \in H' \rightarrow \ell_{\Lambda_1} \varphi = \{\varphi(x_\beta)\}_{\beta \in \Lambda_1} \in \hat{A}_2^{\Lambda_1}.$$

Положим  $B_{\Lambda_1} := \ell_{\Lambda_1}(H')$ ;  $B_n^{\Lambda_1} = B_{\Lambda_1} \cap A_n^{\Lambda_1}$ ,  $n \geq 1$ . Напомним (п. 4.1.2), что  $H', \lambda = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} G_n$ . При этом оператор  $\ell_\Lambda$  действует непрерывно из  $G$  в  $B_n$  при любом  $n \geq 1$ , а  $\ell_{\Lambda_1}$  — из  $G$  в  $B_n^{\Lambda_1}$ . Кроме того,

$$\tilde{p}_n(\varphi) \geq |\ell_\Lambda(\varphi)|_n^\Lambda \geq |\ell_\Lambda \varphi|_n^{\Lambda_1} = |\ell_{\Lambda_1} \varphi|_n^{\Lambda_1} \quad \forall \varphi \in H', \forall n \geq 1.$$

Допустим, что  $X_{\Lambda_1}$  — АПСм в  $H$ . Тогда по теореме 4.4 для любого  $n \geq 1$  существуют номер  $m \geq 1$  и число  $b < \infty$  такие, что при любом  $\varphi \in H'$   $\tilde{p}_m(\varphi) \leq b|\ell_{\Lambda_1} \varphi|_n^{\Lambda_1}$ . Отсюда для тех же  $n \geq 1$  найдутся  $m \geq 1$  и  $b < +\infty$  такие, что  $|\ell_\Lambda \varphi|_m^\Lambda \leq b|\ell_\Lambda \varphi|_n^{\Lambda_1}$  при всех  $\varphi \in H'$ .

Пусть  $B_n^{\Lambda_1} := \{g \in B : |g|_n^{\Lambda_1} < \infty\}$  и  $B, \mu_{\Lambda_1} := \varinjlim_{n \rightarrow \infty} B_n^{\Lambda_1}$ ,  $n \geq 1$ . Для любого  $g$  из  $B_n^{\Lambda_1}$  имеется функционал  $\varphi$  из  $H'$  такой, что  $g = \ell_{\Lambda_1} \varphi$ ; при этом  $|g|_n^{\Lambda_1} = |\ell_{\Lambda_1} \varphi|_n^{\Lambda_1} < +\infty$ . Но тогда для любого  $n \geq 1$  существуют  $m \geq 1$  и  $b < \infty$  такие, что при всех  $g \in B_n^{\Lambda_1}$   $|g|_m^\Lambda \leq b|g|_n^{\Lambda_1}$  и  $B_n^{\Lambda_1} \hookrightarrow B_m^\Lambda$ . Таким образом,  $\mu_{\Lambda_1} = \mu_\Lambda$ .

Пусть теперь  $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$  и  $\mu_{\Lambda_1} = \mu_\Lambda$ . Так как  $X_\Lambda$  — АПСм в  $H$ , то по теореме 4.5 и ее следствию  $\ell_\Lambda$  — топологический изоморфизм  $(H', \lambda)$  на  $B, \mu_\Lambda$ . Но тогда обратный к  $\ell_\Lambda$  оператор  $\ell_\Lambda^{-1}$  отображает непрерывно  $B, \mu_\Lambda$  на  $H', \lambda$ . Так как  $(H', \lambda)$  — регулярный индуктивный предел  $B$ -пространств  $G_n$  с нормой  $\tilde{p}_n(\varphi)$ , то по лемме 4.1 для любого  $n \geq 1$  существуют  $m \geq 1$  и  $b < \infty$ :

$$\tilde{p}_m(\ell_\Lambda^{-1} g) \leq b|g|_n^{\Lambda_1} \quad \forall g \in B_n^{\Lambda_1}. \quad (4.13)$$

Пусть  $\varphi \in H'$ ,  $n \geq 1$ ,  $g = \ell_\Lambda \varphi$ . Выберем номер  $m \geq 1$  и число  $b < +\infty$  так, чтобы выполнялось неравенство (4.13). Если  $g \in B_n^{\Lambda_1}$ ,

то в силу (4.13)

$$\tilde{p}_m(\varphi) \leq b|\ell_\Lambda \varphi|_n^{\Lambda_1} = b|\ell_{\Lambda_1} \varphi|_n^{\Lambda_1}.$$

Если же  $g \notin B_n^{\Lambda_1}$ , то  $|\ell_{\Lambda_1} \varphi|_n^{\Lambda_1} = +\infty$ , и снова  $\tilde{p}_m(\varphi) \leq b|\ell_{\Lambda_1} \varphi|_n^{\Lambda_1}$ . По теореме 4.6  $X_{\Lambda_1}$  — АПСМ в  $H$ .  $\triangleright$

Следующий результат, дополняющий теорему 4.10, бывает полезен в приложениях к конкретным функциональным пространствам  $H$  и семействам элементов  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ .

**Теорема 4.11.** Пусть  $H$  — пространство Фреше,  $B \subseteq F \subseteq \hat{A}_2$ ,  $\Lambda_1$  — подмножество  $\Lambda$ ,  $X_{\Lambda_1}$  — АПСМ в  $H$ , а множество  $\Lambda_1$  индуктивно достаточно для пространства  $F$ ,  $\mu_\Lambda = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} F_n$ , где  $F_n := F \cap A_n^\Lambda$  для любого  $n \geq 1$ . Тогда  $X_{\Lambda_1}$  — АПСМ в  $H$ .

$\triangleleft$  Очевидно, что  $F_n := \{y \in F: |y|_n^\Lambda < +\infty\}$ ,  $n \geq 1$ , и

$$F, \mu_\Lambda \hookrightarrow \hat{A}_2, \delta = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} A_n^\Lambda.$$

Так как  $\hat{A}_2, \delta$  — регулярный индуктивный предел, то, как легко проверить,  $F, \mu_\Lambda$  — также регулярный индуктивный предел. Учитывая, что по предположению теоремы  $\mu_\Lambda = \mu_{\Lambda_1}$ , находим по лемме 4.1:

$$\forall n \geq 1 \exists m \geq 1: F_n^{\Lambda_1} \hookrightarrow F_m.$$

Но  $B_k = B \cap F_k$  для любого  $k \geq 1$  и, если  $B_k^{\Lambda_1} := B \cap F_k^{\Lambda_1}$ , то  $B_k$  (соответственно,  $B_k^{\Lambda_1}$ ) — топологическое подпространство пространства  $F_k$  (соответственно, пространства  $F_k^{\Lambda_1}$ ). Поэтому из непрерывного включения  $F_n^{\Lambda_1} \hookrightarrow F_m$  следует, что  $B_n^{\Lambda_1} \hookrightarrow B_m$ . Таким образом,  $B, \mu_{\Lambda_1} \hookrightarrow B, \mu_\Lambda$  и  $\mu_{\Lambda_1} = \mu_\Lambda$ . По теореме 4.10  $X_{\Lambda_1}$  — АПСМ в  $H$ .  $\triangleright$

**4.1.9.** Применим общие результаты, полученные в данном разделе, к АПСМ из экспонент  $e_\lambda(z) := \exp\langle \lambda, z \rangle_p$ ,  $p \geq 1$ . Пусть  $H$  — банахово пространство или рефлексивное пространство Фреше функций от  $p$  переменных  $(z_1, z_2, \dots, z_p) = z \in \mathbb{C}^p$  с определяющим топологию в  $H$  набором преднорм  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ , и пусть  $\Lambda_H := \{\lambda \in \mathbb{C}^p: e_\lambda(z) \in H\}$ .

Согласно теореме 4.9, если  $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_H$ , то  $E_{\Lambda_1} := \{e_\lambda(z): \lambda \in \Lambda_1\}$  — АПСМ в  $H$  тогда и только тогда, когда справедливо любое из двух равносильных утверждений:

а)  $(H', \beta)$  допускает  $E_{\Lambda_1}$ -реализацию или, что все равно, множество  $\Lambda_1$   $\lambda$ -достаточно для  $H'$ ;

б) для любого  $n \geq 1$  существуют номер  $m \geq 1$  и число  $b < +\infty$  такие, что  $\sup_{y \in H} \frac{|\psi(y)|}{p_m(y)} \leq b \sup_{\lambda \in \Lambda_1} \frac{|\psi(e_\lambda)|}{p_n(e_\lambda)}$  при всех  $\psi \in H'$ .



В частности, если множество  $\Lambda_1$  счетно, то этот результат принимает такой вид:  $E_{\Lambda_1} := \{e_{\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty}$  (для любого  $k \geq 1$   $\lambda_k \in \mathbb{C}^p$ ,  $e_{\lambda_k} = e_{\lambda_k}(z) \in H$ ) — АПС в  $H$  тогда и только тогда, когда выполнено любое из двух эквивалентных условий:

- а)  $(H', \beta) = (H', \lambda)$  допускает  $E_{\Lambda_1}$ -реализацию;
- б) для любого  $n \geq 1$  существуют номер  $m \geq 1$  и число  $b < +\infty$  такие, что  $\sup_{y \in H} \frac{|\psi(y)|}{p_m(y)} \leq b \sup_{k \geq 1} \frac{|\psi(e_{\lambda_k})|}{p_n(e_{\lambda_k})}$  при всех  $\psi \in H'$ .

Последний результат (сначала для  $p = 1$ , а затем и при  $p \geq 1$ ), использовался во многих работах автора и его учеников, начиная со второй половины 70-х гг. XX века (см., например, [3, 41, 43, 47, 53, 55, 91, 81] и др.). При этом, как правило, для заданного пространства Фреше  $H$  условие б) принимало более конкретный и удобный для приложений вид в случае, когда сопряженное пространство  $H'$  допускало определенную функциональную реализацию.

Проиллюстрируем эти общие соображения на примере уже хорошо знакомого пространства  $A(G)$  всех функций, аналитических в области  $G$  из  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ , со стандартной топологией равномерной сходимости на каждом компакте в области  $G$ , т. е. топологии, определяемой счетным набором норм  $\{p_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ , где

$$p_n(y) := \max \{|y(z)| : z \in F_n\} \quad \forall n \geq 1, \forall y \in A(G).$$

Здесь  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$  — возрастающая последовательность компактов из  $G$  с непустыми внутренностями, исчерпывающая  $G$ :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = G; \quad F_n \subset F_{n+1} \subset G \quad \forall n \geq 1.$$

Как хорошо известно,  $A(G)$  — монтелевское (потому рефлексивное) пространство Фреше. При этом  $e_{\lambda}(z) \in A(G)$  при любом  $\lambda \in \mathbb{C}^p$ . Но множество  $\mathbb{C}^p$  имеет счетное плотное (в  $\mathbb{C}^p$ ) подмножество  $\Lambda_0$ . Например, в качестве  $\Lambda_0$  можно взять совокупность всех точек  $z = (z_k)_{k=1}^p$ , у которых  $z_k = x_k + iy_k$  при  $1 \leq k \leq p$  и  $x_k, y_k$  — рациональные вещественные числа. Отсюда легко вывести, что  $E_{\Lambda_0}$  — плотное (по топологии  $A(G)$ ) подмножество  $E_{\mathbb{C}^p}$ .

Очевидно, что если  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}^p$  и  $E_{\Lambda}$  — АПСм в  $A(G)$ , то подавно  $E_{\mathbb{C}^p}$  — АПСм в  $A(G)$ . С другой стороны, если  $E_{\mathbb{C}^p}$  — АПСм в  $A(G)$ ,  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}^p$  и  $E_{\Lambda}$  плотно в  $E_{\mathbb{C}^p}$  (по топологии  $A(G)$ ), то по лемме 4.2  $E_{\Lambda}$  — АПСм в  $A(G)$ . В частности,  $E_{\Lambda_0}$  — АПСм в  $A(G)$  тогда и только тогда, когда  $E_{\mathbb{C}^p}$  — АПСм в  $A(G)$ . Отсюда следует, что справедлива

**Теорема 4.12.** Если  $G$  — произвольная область в  $\mathbb{C}^p$  ( $p \geq 1$ ), то равносильны следующие утверждения:

1.  $E_{\mathbb{C}^p}$  — АПСМ в  $A(G)$ .
2.  $E_{\Lambda_0}$  — АПС в  $A(G)$ .
3. В  $A(G)$  имеется хотя бы одно АПСМ вида  $E_\Lambda$ , где  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}^p$ .
4. Существует АПС в  $A(G)$  вида  $E_\Lambda$ , где  $\Lambda$  — счетное подмножество  $\mathbb{C}^p$ .

Напомним некоторые определения из теории аналитических функций многих комплексных переменных (см., например, [139]). Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{C}^p$ . Область  $G_1$ , содержащая  $G$  в качестве собственной подобласти, называется ее голоморфным расширением, если любая функция  $y(z)$  из  $A(G)$  допускает однозначное аналитическое продолжение в  $G_1$ . Далее,  $G$  называется (см., например, [139, с. 225]) областью голоморфности какой-либо функции  $f$  из  $A(G)$ , если для любой точки  $z^0$  из  $G$  сужение  $f$  на шар  $B(z^0, r) := \{z \in \mathbb{C}^p : |z - z^0|_p \leq r\}$ , где  $r = \rho(z^0, \partial G)$ , не продолжается аналитически в любой шар  $B(z^0, r_1)$ , если  $r_1 > r$ .

Область  $G$  называется областью голоморфности (см. там же), если она является областью голоморфности некоторой функции из  $A(G)$ . Иными словами,  $G$  — область голоморфности, если в  $A(G)$  имеется хотя бы одна функция, непродолжаемая за пределы  $G$ . Как известно (см., например, [139, с. 224–225]), не всякая область в  $\mathbb{C}^p$  при  $p > 1$  является областью голоморфности, хотя любая выпуклая в  $\mathbb{C}^p$  область будет областью голоморфности. В то же время любая область в  $\mathbb{C}$  ( $p = 1$ ) — это область голоморфности.

Напомним еще, что по теореме 1.1 множество всех точек абсолютной сходимости любого ряда вида  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp\langle \lambda_k, z \rangle_p$ ,  $\lambda_k \in \mathbb{C}^p$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , выпукло в  $\mathbb{C}^p$ . Поэтому, если  $G$  — область в  $\mathbb{C}^p$  и справедливо любое из четырех эквивалентных утверждений 1–4 теоремы 4.12, то  $\text{conv } G$  — голоморфное расширение области  $G$ . В частности, если  $G$  — область голоморфности в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p > 1$ , или произвольная область в  $\mathbb{C}$  и если в  $A(G)$  имеется хотя бы одна АПС экспонент, то  $G$  — выпуклая область.

Пусть, обратно,  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ . Как уже отмечалось выше (см. [151, 166], а также [122, 137]), для любой выпуклой области  $G$  в  $\mathbb{C}^p$  преобразование Лапласа

$$\forall \psi \in A'(G) \rightarrow \psi(\exp\langle \mu, z \rangle_p) =: g_\psi(\mu)$$

является топологическим изоморфизмом пространства  $(H', \beta)$  на пространство  $[1, h(z))_p$  всех целых в  $\mathbb{C}^p$  функций  $f$  таких, что

$$\forall f \in [1, h(z))_p \quad \exists n = n(f), \exists M = M(n, f) : \\ |f|_n := \sup_{z \in \mathbb{C}^p} \frac{|f(z)|}{\exp H_n(z)} \leq M_n < +\infty.$$

Здесь  $H_n(z) := \max_{z \in F_n} \Re \langle \mu, z \rangle_p$ ,  $n \geq 1$ , — опорная функция [122, с. 76] компакта  $F_n$ , который в рассматриваемой ситуации можно считать выпуклым, а  $h(z) = \sup_{n \geq 1} H_n(z)$  — опорная функция выпуклой области  $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ; при этом  $F_n \subseteq \text{int } F_{n+1} \subset G$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ .

Далее,  $[1, h(z))_p = \varinjlim EC(F_n)$ , где при всех  $n \geq 1$   $EC(F_n)$  —  $B$ -пространство всех целых в  $\mathbb{C}^p$  функций  $v(z)$  таких, что  $|v|_n < +\infty$ . Кроме того,  $[1, h(z))_p$  — регулярный индуктивный предел последовательности  $B$ -пространств  $\{EC(F_n)\}_{n=1}^{\infty}$  и, более того,  $LN^*$ -пространство.

Приведенный результат Мартино и Эренпрайса показывает, что пространство  $(H', \lambda) = (H', \beta)$ , где  $H = A(G)$  и  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ , допускает  $E_{\mathbb{C}^p}$ -реализацию. Иными словами, линейный оператор

$$l_{\mathbb{C}^p} : \forall \psi \in H' \rightarrow \psi(\exp \langle \mu, z \rangle_p) \in [1, h(z))_p$$

отображает взаимно непрерывно и взаимно однозначно  $(H', \beta)$  на пространство  $(B, \mu_{\mathbb{C}^p})$ , где

$$B = l_{\mathbb{C}^p}(H') = [1, h(z))_p; \quad (B, \mu_{\mathbb{C}^p}) = \varinjlim B_n, \\ B_n := \left\{ f \in [1, h(z))_p : \sup_{\mu \in \mathbb{C}^p} \frac{|f(\mu)|}{p_n(\exp \langle \mu, z \rangle_p)} = \right. \\ \left. = \sup_{\mu \in \mathbb{C}^p} \frac{|f(\mu)|}{\exp H_n(\mu)} =: |f|_n < +\infty \right\}.$$

По теореме 4.7  $E_{\mathbb{C}^p}$  — АПСм в  $A(G)$ . Но тогда по теореме 4.10 заключаем, что если  $G$  — любая выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ , то всегда существует АПС в  $A(G)$  вида

$$E_{\{\lambda_k\}} := \left\{ \exp \langle \lambda_k, z \rangle_p \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \lambda_k \in \mathbb{C}^p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда, в частности, следует, что если  $G$  — область в  $\mathbb{C}^p$  такая, что  $\text{conv } G$  — ее голоморфное расширение, то имеющаяся в

$A(\text{conv } G)$ , как только что было установлено, АПС  $E_\Lambda$  экспонент по-прежнему будет АПС в  $A(G)$ . Теперь уже можно сформулировать некоторые результаты, вытекающие непосредственно из теоремы 4.12.

**Следствие 1.** Если  $G$  — произвольная область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ , то любое из утверждений 1–4 теоремы 4.12 равносильно такому:

5.  $\text{conv } G$  является голоморфным расширением  $G$ .

**Следствие 2.** Пусть  $p > 1$  и  $G$  — любая область голоморфности в  $\mathbb{C}^p$ . Тогда в  $A(G)$  имеется хотя бы одна АПС экспонент в том и только том случае, когда  $G$  выпукла в  $\mathbb{C}^p$ .

**Следствие 3.** Если  $G$  — произвольная область в  $\mathbb{C}$ , то в  $A(G)$  имеется хотя бы одна АПС экспонент  $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^\infty$ ,  $\lambda_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , тогда и только тогда, когда область  $G$  выпукла.

В то же время до сих пор неизвестна характеристика областей  $G$  (в  $\mathbb{C}^p$  или хотя бы в  $\mathbb{C}$ ) таких, что в  $A(G)$  имеется хотя бы одна ПС экспонент. Более того, нет работ, в которых находились бы критерии наличия в  $A(G)$  хотя бы одной А-ПС экспонент  $E_\Lambda$ , где  $A, \tau \mapsto A_1(A(G), E_\Lambda), \tau_1$ ,  $A \neq A_2(A(G), E_\Lambda)$ , а  $\Lambda$  — какая-либо последовательность точек из  $\mathbb{C}^p$ .

**4.1.10.** Теорему 4.10 можно дополнить. Сначала напомним определение слабо достаточного множества, введенного Шнейдером [171]. Пусть  $Q, \mu = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} Q_n$  — внутренний индуктивный предел линейных нормированных весовых пространств функций из  $A(D)$ , где  $D$  — область в  $\mathbb{C}^p$ ,

$$Q_n := \left\{ y \in A(D) : \|y\|_n := \sup_{z \in D} \frac{|y(z)|}{q_n(z)} < \infty \right\} \quad \forall n \geq 1,$$

и  $q_n(z)$  — вес на  $D$ , т. е. для любого компакта  $M$  из области  $D$

$$\gamma_M := \inf \{q_n(z) : z \in M\} > 0; \quad \Gamma_M := \sup \{q_n(z) : z \in M\} < +\infty.$$

Пусть  $\Lambda$  — произвольное подмножество  $D$ ; для любого  $m \geq 1$   $T_m^\Lambda$  — полунормированное пространство  $T_m^\Lambda := \left\{ y \in Q : \|y\|_m^\Lambda := \sup_{\lambda \in \Lambda} \frac{|y(\lambda)|}{q_m(\lambda)} < \infty \right\}$  и  $Q, \mu_\Lambda := \varinjlim_{m \rightarrow \infty} T_m^\Lambda$ .

Множество  $\Lambda$  называется слабо достаточным для  $Q$ , если  $\mu_\Lambda = \mu$  (например, множество  $\Lambda = D$  всегда слабо достаточно для  $Q$ ). Предположим, что все веса  $q_n(z)$  упорядочены по возрастанию: при любом

$n \geq 1$   $q_n(z) \leq q_{n+1}(z)$ ,  $z \in D$ . Согласно теореме 1 из [26] О. В. Епифанова всякое слабо достаточное множество  $\Lambda$  содержит дискретное, замкнутое в  $D$ , слабо достаточное для  $Q$  подмножество  $\Lambda_1$ . При этом дискретность и замкнутость в  $D$  множества  $\Lambda_1$  означают, что все его предельные точки принадлежат границе  $D$ . В частности, если  $D = \mathbb{C}^p$ , функции  $q_n(z)$  непрерывны, а  $\frac{1}{q_n(z)}$  ограничены сверху на каждом компакте  $\mathbb{C}^p$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , то всякое слабо достаточное для  $Q$  множество  $\Lambda$  содержит счетное подмножество  $\Lambda_1 = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ , в котором  $\lambda_k \in \mathbb{C}^p$  при любом  $k \geq 1$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p = \infty$ .

Заметим еще, что в случае, когда  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$  и  $H = A(G)$ , то, как уже отмечалось,  $H', \lambda = [1, h(z))_p = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} B_n$ , где для любого  $n \geq 1$

$$B_n = \left\{ v \in A(\mathbb{C}^p) : |V|_n := \sup_{z \in \mathbb{C}^p} \frac{|v(z)|}{\exp H_n(z)} < \infty \right\};$$

$H_n(z)$  — опорная функция (выпуклого) компакта  $F_n$  из возрастающей последовательности  $\{F_m\}_{m=1}^\infty$  компактов, исчерпывающей  $G$ :

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset G = \bigcup_{k=1}^\infty F_k,$$

и, наконец,  $h(z) := \sup_n H_n(z)$  — опорная функция области  $G$ . Как нетрудно заметить, в данном случае любое множество  $\Lambda$  из  $\mathbb{C}^p$  слабо достаточно для  $[1, h(z))_p$  тогда и только тогда, когда оно  $\lambda$ -достаточно для  $[1, h(z))_p$ . Поэтому любое из утверждений 1–4 теоремы 4.12 равносильно такому:

6. В  $A(G)$  существует АПС экспонент вида  $\{\exp \langle \lambda_k, z \rangle_p\}_{k=1}^\infty$ , где  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p = \infty$ .

Возвращаясь к АПС экспонент, заметим, что по той же теореме 4.7 любая последовательность

$$E_{\{\mu_k\}} := \{\exp \langle \mu_k, z \rangle_p\}_{k=1}^\infty$$

является АПС в  $A(G)$  тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух равносильных условий:

а) для любого  $n \geq 1$  существуют  $m \geq 1$  и  $b < +\infty$  такие, что

$$\sup_{\mu \in \mathbb{C}^p} \frac{|f(\mu)|}{\exp H_m(\mu)} \leq b \sup_{\mu \in \mathbb{C}^p} \frac{|f(\mu_k)|}{\exp H_n(\mu_k)} \quad \forall f \in [1, h(z))_p;$$

б) пространство  $(A'(G), \beta)$  допускает  $E_{\{\mu_k\}}$ -реализацию.

Такие же более конкретные и удобные для дальнейшего использования критерии того, что последовательность вида  $E_{\{\mu_k\}}$  является АПС в пространстве  $H$ , можно вывести аналогичным путем из теорем 4.4–4.7 для других функциональных пространств  $[\rho, \infty]$  ( $\rho \geq 1$ ),  $[\rho, h(\theta)]$ ,  $[\rho, 0]$  ( $\infty > \rho > 1$ ) и т. д. Соответствующие результаты (которые ранее получались также с помощью теории двойственности, но отдельно для каждого такого пространства), имеются в работах [3, 41, 47, 55, 81] и др.

**4.1.11.** Как и в случае  $A$ -ПС, можно рассмотреть линейные непрерывные преобразования АПСм и получить на этом пути результаты, обобщающие (при  $A = A_2$ ) теоремы из раздела 3.1. Ограничимся здесь лишь одним, начальным, результатом в этом направлении.

Допустим, что  $X_\Omega := (x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$  — АПСм в ПОЛВП  $H_1$  и  $T$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$ . Тогда для любого элемента  $x$  из  $H_2$  найдется в  $H_1$  элемент  $y$ , для которого  $Ty = x$ . Далее, так как  $X_\Omega$  — АПСм в  $H_1$ , то существует числовое семейство  $(c_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  из  $A_2(X_\Omega, H_1)$  такое, что семейство  $\{c_\alpha x_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$  абсолютно суммируемо к  $y$  в  $H_1$ . Но тогда, в силу непрерывности оператора  $T$ , семейство  $\{c_\alpha T x_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$  абсолютно суммируемо в  $H_2$  к  $x$ . Таким образом, справедлива

**Теорема 4.14.** Если  $T$  — эпиморфизм ПОЛВП  $H_1$  на ПОЛВП  $H_2$ , а  $X_\Omega$  — АПСм в  $H_1$ , то  $TX_\Omega := (Tx_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$  — АПСм в  $H_2$ .

**4.1.12.** По аналогии с  $A$ -представляющими системами можно ввести понятие свободных и продолжимых АПСм.

Пусть сначала, как в разделе 3.1,  $H$  — ПОЛВП над полем скаляров  $\Phi$  ( $\Phi = \mathbb{C}^p$  или  $\Phi = \mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 1$ ) и пусть  $\Omega$  — некоторое бесконечное множество индексов (уже не обязательно счетное, как это было в 3.1) из  $\mathbb{C}^p$ , где  $p \geq 1$ . Положим, как раньше,  $X_\Omega := \{x_\lambda : \lambda \in \Omega\}$  и введем пространство, уже знакомое по п. 4.1.1,  $A_2(X_\Omega, H)$  всех числовых семейств (ч. см)  $c = (c_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$  таких, что

$$\sum_{\lambda \in \Omega} |c_\lambda| p(x_\lambda) < +\infty \quad \forall p \in \mathcal{P}, \quad (4.14)$$

где  $\mathcal{P} = \{p\}$  — набор преднорм, определяющих топологию в ПОЛВП  $H$ . Условие (4.14) означает, что семейство элементов из  $H$   $\{c_\lambda x_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$  абсолютно суммируемо в  $H$  при всех  $c \in A_2(X_\Omega, H)$  и  $x \in X_\Omega$ .

Пусть  $X_\Omega$  — АПСм в  $H$ . Назовем это семейство свободным, если оно остается АПСм в  $H$  после удаления из него любого конечного

числа элементов. В частном случае, когда исходное множество индексов  $\Omega$  счетно, мы приходим к понятию свободной АПС в  $H$ , уже рассматривавшемуся в разделе 3.5.

Как раньше, будем предполагать, что  $H$  является некоторой совокупностью отображений фиксированного подмножества  $B_p$  ( $p \geq 1$ ) из  $\mathbb{C}^p$  (или  $\mathbb{R}^p$ ) в  $\mathbb{C}^p$  (или в  $\mathbb{R}^p$ ). Считаем еще, что ПОЛВП  $H$  обладает свойствами 1)–3) из п. 3.5.2. Точно так же, как в п. 3.5.2, показываем, что пространство  $A_\Omega := A_2(X_\Omega, H)$  обладает также свойствами 4), 5).

Подобно тому, как в пункте 3.5.2 была доказана теорема 3.13, устанавливается справедливость такого результата.

**Теорема 4.14.** *Если ПОЛВП  $H$  удовлетворяет условиям 1)–3), то любое АПСм в  $H$  вида  $(e_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$  является свободным.*

Примеры функциональных пространств со свойствами 1)–3) были приведены в п. 3.5.3.

**4.1.13.** Переходя к понятию продолжимости АПСм, ограничимся, как в п. 3.6.1, случаем, когда  $H_j = E(Q_j)$  при  $j = 1, 2$ , где  $E(Q_j)$  — ПОЛВП функций, определенных на некотором подмножестве  $Q_j$  из  $\mathbb{C}^p$  (или  $\mathbb{R}^p$ ). Кроме того, считаем, что  $Q_2 \subseteq Q_1$  и  $E(Q_1) \hookrightarrow E(Q_2)$ .

Пусть  $T$  — некоторый линейный непрерывный из  $H_1$  в  $H_2$  оператор и  $X_\Omega := (x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$  — совокупность его собственных элементов  $x_\lambda$  из  $H_1$ :

$$Tx_\lambda = \mu_\lambda x_\lambda \quad \forall \lambda \in \Omega.$$

Используя, как в п. 3.6.1, непрерывность оператора  $T$ , показываем, что  $\mu_\Omega := (\mu_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$  — мультипликатор пары  $A_2(X_\Omega, H_1)$ ,  $A_2(X_\Omega, H_2)$ . Далее, если  $T$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$ ,  $X_\Omega$  — АПСм в  $H_1$ , то по теореме 4.13  $TX_\Omega := (\mu_\lambda x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$  — АПСм в  $H_2$ .

Таким образом,  $X_\Omega$  — АПСм и в  $H_1$ , и в  $H_2$ . В этом случае (по аналогии с продолжимыми АПС) будем говорить, что АПСм  $X_\Omega$  продолжимо (из  $H_1$  в  $H_2$ ).

Как в п. 3.6.1, можно рассмотреть более конкретную ситуацию, когда  $Q_2 = G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $Q_1 = G + B$ , где  $B$  — выпуклый компакт, содержащий начало координат (как и выше, последнее предположение несущественно для справедливости результата, который формулируется ниже).

Используя буквально те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 3.18 (единственное различие состоит в том, что вместо

теоремы 3.1 приходится ссылаться на теорему 4.13), приходим к такому результату.

**Теорема 4.15.** *Если  $E_\Omega := (e_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$  — АПСм в  $A(G + B)$ , то  $E_\Omega$  — АПСм в  $A(G)$ .*

Иными словами, любое АПСм в  $A(G + B)$  вида  $(e_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ , где  $\Omega$  — какое-либо подмножество  $\mathbb{C}^p$  и  $e_\lambda := \exp \sum_{k=1}^p \lambda_k z_k$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ , продолжимо в пространство  $A(G)$ .

## 4.2. АПСм в пространствах Фреше

**4.2.1.** Для того чтобы общие результаты, полученные в предыдущем разделе, можно было применить к конкретным системам  $X_\Lambda$  из различных функциональных пространств  $H$ , желательно дать описание множества  $B = \ell_\Lambda(H') = \{\{\varphi(x_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda} : \varphi \in H'\}$ . По формуле (8.6.4) из [143]

$$\bar{B} = \overline{\ell_\Lambda(H')} = (L_\Lambda^{-1}(0))^0,$$

где  $L_\Lambda^{-1}(0) = \{d = (d_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in A_2 : \sum d_\alpha x_\alpha = 0\}$  и, как обычно,  $Y^0$  — поляр  $Y$ . Так как оператор  $L_\Lambda$  непрерывен из  $A_2 := A_2(X_\Lambda, H)$  в  $H$ , то множество  $J := L_\Lambda^{-1}(0)$  замкнуто; поэтому

$$\bar{B} = J^0 = \left\{ c = (c_\alpha) \in A_2 : \sum_{\alpha \in \Lambda} c_\alpha d_\alpha = 0 \ \forall d \in J \right\}.$$

Таким образом,  $B \subseteq J^0 = \bar{B}$ . По теореме 8.6.13 из [143] множество  $L_\Lambda(A_2)$  замкнуто в  $H$  тогда и только тогда, когда  $B$  слабо замкнуто в  $A'_2$ .

**Теорема 4.16.** *Для того, чтобы система  $X_\Lambda$  была АПСм в пространстве Фреше  $H$ , необходимо и достаточно, чтобы  $B = J^0$  и  $\overline{\text{span } X_\Lambda} = H$ .*

$\triangleleft$  *Достаточность.* Если  $\overline{\text{span } X_\Lambda} = H$ , то  $\overline{L_\Lambda(A_2)} = H$ , так как  $L_\Lambda(A_2) \supseteq \text{span } X_\Lambda$ . При этом множество  $\ell_\Lambda(H') = J^0$  слабо замкнуто в  $A'_2$  и по теореме 8.6.13 из [143]  $L_\Lambda(A_2)$  замкнуто в  $H$ , откуда  $L_\Lambda(A_2) = \overline{L_\Lambda(A_2)} = H$ . Следовательно,  $X_\Lambda$  — АПСм в  $H$ .

*Необходимость.* Если  $X_\Lambda$  — АПСм в  $H$ , то по теореме 4.1  $L_\Lambda(A_2) = H$ . Таким образом,  $L_\Lambda(A_2) = \overline{L_\Lambda(A_2)} = H$ . Так как  $L_\Lambda(A_2) \subseteq \overline{\text{span } X_\Lambda} \subseteq H$ , то  $\overline{\text{span } X_\Lambda} = H$ . Кроме того, из замкнутости  $L_\Lambda(A_2)$  в  $H$  следует (по все той же теореме 8.6.13 из [143]) слабая замкнутость  $\ell_\Lambda(H')$  в  $A_2$ . Отсюда  $B = \ell_\Lambda(H') = \bar{\ell}_\Lambda(H') = \bar{B} = J^0$ .  $\triangleright$



**4.2.2.** В некоторых случаях весьма сложно дать точное описание множества  $B$ , но удается найти «промежуточное» пространство  $F$  такое, что  $B \subseteq F \subseteq \widehat{A}_2$ .

В этих случаях может быть полезна

**Теорема 4.17.** Пусть  $H$  — пространство Фреше и  $F$  — подпространство  $\widehat{A}_2$ , содержащее  $B$ . Для того чтобы оператор  $\ell_\Lambda$  был топологическим изоморфизмом  $H', \lambda$  на  $F, \mu_\Lambda$ , где  $F, \mu_\Lambda = \varinjlim F_n$  и для любого  $n \geq 1$   $F_n := \{g \in F : |g|_n^\Lambda < \infty\}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $F \subseteq J^0$  и чтобы  $X_\Lambda$  являлось АПСм в  $H$ .

◁ 1. Пусть  $\ell_\Lambda$  — топологический изоморфизм  $H', \lambda$  на  $F, \mu_\Lambda$ . Так как  $\ell_\Lambda(H') =: B$ , то  $B = F$  и  $\ell_\Lambda$  — топологический изоморфизм  $H', \lambda$  на  $B, \mu_\Lambda$ . По теореме 4.7  $X_\Lambda$  — АПСм в  $H$ . Но тогда, согласно теореме 4.16,  $B = J^0$  и, следовательно,  $F = B = J^0$ .

2. Пусть теперь  $F \subseteq J^0$  и  $X_\Lambda$  — АПСм в  $H$ . По теореме 4.16  $B = J^0$  и, следовательно,  $F = J^0 = B$ . По теореме 4.7  $\ell_\Lambda$  — топологический изоморфизм  $H', \lambda$  на  $F, \mu_\Lambda$ . ▷

Анализируя доказательство теоремы 4.17, убеждаемся в справедливости следующего результата, являющегося некоторым уточнением и усилением этой теоремы.

**Следствие.** Пусть  $H$  и  $F$  — те же, что и в теореме 4.17. Тогда для того, чтобы оператор  $\ell_\Lambda$  был топологическим изоморфизмом  $H', \lambda$  на  $F, \mu_\Lambda$ , необходимо и достаточно, чтобы  $F = J^0$  и чтобы  $X_\Lambda$  являлось АПСм в  $H$ .

Отметим еще один вспомогательный результат, который будет вскоре использован.

**Лемма 4.3.** Пусть  $F$  — подпространство  $\widehat{A}_2$  такое, что для любого элемента  $g = g(t)$  ( $t \in \Lambda$ ) из  $F$  найдется ограниченная в  $(F, \mu_\Lambda)$  сеть  $\{v_\gamma\}_{\gamma \in \omega}$  из  $J^0$ , сходящаяся к  $g$  поточечно на  $\Lambda$ . Тогда  $F \subseteq J^0$ .

◁ Имеем  $F, \mu_\Lambda = \varinjlim F_n$ , где при всех  $n \geq 1$

$$F_n \subseteq A_n^\Lambda := \left\{ d \in \widehat{A}_2 : |d|_n^\Lambda := \sup_{d \in \Lambda} \frac{|d_\alpha|}{p_n(x_\alpha)} < \infty \right\}.$$

Очевидно, что  $F, \mu_\Lambda \hookrightarrow \widehat{A}_2, \delta$ , где  $\widehat{A}_2, \delta$  — регулярный внутренний индуктивный предел пространств  $A_n^\Lambda$  (см. п. 4.1.4). При этом для любого  $n \geq 1$   $F_n = F \cap A_n^\Lambda$  и  $F, \mu_\Lambda$  — также регулярный индуктивный предел. Из ограниченности в  $F, \mu_\Lambda$  сети  $v\{v_\gamma\}_{\gamma \in \omega}$  следует, что эта

сеть содержится в некотором пространстве  $F_m$  и ограничена в нем, т. е.

$$D_m := \sup_{\gamma \in \omega} \sup_{\alpha \in \Lambda} \frac{|v_{\gamma, \alpha}|}{p_m(x_\alpha)} < +\infty,$$

где  $v_\gamma = (v_{\gamma, \alpha})_{\alpha \in \Lambda}$  при любом  $\gamma \in \omega$ . Зафиксируем произвольно число  $\varepsilon > 0$  и элемент  $d(d_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  из  $J = L_\Lambda^{-1}(0) \subseteq A_2$  и выберем конечное подмножество  $\Lambda_1$  множества  $\Lambda$  так, чтобы  $2D_m \sum_{\beta \in \Lambda_2} |d_\beta| p_m(x_\beta) < \varepsilon$ , где  $\Lambda_2 := \Lambda \setminus \Lambda_1$ . Так как для любого  $\gamma \in \omega$   $\sum_{\beta \in \Lambda} d_\beta v_{\gamma, \beta} = 0$ , то для тех же  $\gamma$   $|\sum_{\beta \in \Lambda_1} d_\beta v_{\gamma, \beta}| < \varepsilon/2$ . Переходя в этом неравенстве к пределу по направлению  $\omega$ , найдем, что  $|\sum_{\beta \in \Lambda_1} d_\beta v_\beta| \leq \varepsilon/2$ . Далее, если  $\Lambda_3$  — любое конечное подмножество  $\Lambda_2$ , то  $\sum_{\beta \in \Lambda_3} |d_\beta| |v_{\gamma, \beta}| < \varepsilon/2$ . Совершая предельный переход и в этом неравенстве, получим, что  $\sum_{\beta \in \Lambda_3} |d_\beta| |v_\beta| \leq \varepsilon/2$ . Так как  $\Lambda_3$  — произвольное конечное подмножество  $\Lambda_2$ , то  $\sum_{\beta \in \Lambda_2} |d_\beta| |v_\beta| \leq \varepsilon/2$ , откуда  $\sum_{\beta \in \Lambda} |d_\beta| |v_\beta| < \infty$ , причем  $D_m |\sum_{\beta \in \Lambda} d_\beta v_\beta| \leq \varepsilon$ . Учитывая, что число  $\varepsilon > 0$  можно выбрать сколь угодно малым, заключаем, что  $\sum_{\beta \in \Lambda} d_\beta v_\beta = 0$ . Кроме того, из неравенства  $|v_{\gamma, \alpha}| \leq D_m p_m(x_\alpha)$  (при произвольно зафиксированном  $\alpha$  из  $\Lambda$ ) с помощью все того же предельного перехода получим, что

$$\sup_{\alpha \in \Lambda} \frac{|v_\alpha|}{p_m(x_\alpha)} \leq D_m$$

и  $v(d_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in A_m^\Lambda \subseteq \hat{A}_2$ . Окончательно,  $v \in J^0$  и потому  $F \subseteq J^0$ .  $\triangleright$

**4.2.3.** Применим результаты, полученные в этом разделе, к одной довольно общей ситуации. Пусть  $G$  — содержащая начало координат ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ ;  $H$  — пространство Фреше с набором преднорм  $p_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Будем считать, что  $H(\bar{G}) \hookrightarrow H \hookrightarrow A(G)$  и что выполнено условие

$$b_n := \sup_{\alpha \in \mathbb{C}^p} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{p_n(\exp(t\alpha, z)_p)}{p_n(\exp(\alpha, z)_p)} < +\infty \quad \forall n \geq 1. \quad (4.15)$$

Напомним, что  $A(G)$  — это пространство Фреше с топологией равномерной сходимости на компактах  $G$  (как уже неоднократно отмечалось,  $A(G)$  — монтелевское, а, следовательно, рефлексивное и потому правильное пространство Фреше), а  $\bar{A}(\bar{G}) = H(\bar{G})$  — пространство всех ростков локально аналитических на  $\bar{G}$  функций с обычной индуктивной топологией, являющееся  $LN^*$ -пространством. Тогда  $(A(G))' \subseteq H' \subseteq (\bar{A}(\bar{G}))'$ . Как хорошо известно, преобразование

Лапласа

$$\forall \varphi \in A(G)' \rightarrow \varphi(\exp\langle \alpha, z \rangle_p) \in A(\mathbb{C}^p)$$

осуществляет топологический изоморфизм

$$A(G)', \lambda = (A(G))'_\beta \text{ на } [1, h_G(z))_p.$$

Аналогично, оператор  $\forall \varphi \in \bar{A}(\bar{G})' \rightarrow \varphi(\exp\langle \alpha, z \rangle_p)$  является топологическим изоморфизмом  $(\bar{A}(\bar{G}))'_\beta$  на  $[1, h_G(z)]_p$ . Здесь, как выше,  $h_G(z)$  — опорная функция выпуклого компакта  $\bar{G}$ , а  $[1, h_G(z))_p$  и  $[1, h_G(z)]_p$  — пространства целых функций в  $\mathbb{C}^p$  со стандартными индуктивной и (соответственно, для второго пространства) проективной топологиями.

Будем предполагать, что функция  $\psi_n(\alpha) = p_n(\exp\langle \alpha, z \rangle_p)$  непрерывна на  $\mathbb{C}^p$  для любого  $n \geq 1$ . Положим  $\Lambda = \mathbb{C}^p$ ,  $x_\alpha = e_\alpha := \exp\langle \alpha, z \rangle_p$ . Как легко проверить, семейство  $E = E_\Lambda := \{e_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$  сепарабельно в  $H$ . Введем пространство целых функций  $F, \mu := \varinjlim_{n \rightarrow \infty} F_n$ , где для всех  $n \geq 1$

$$F_n := \left\{ y \in A(\mathbb{C}^p) : \|y\|_n := \sup_{\beta \in \mathbb{C}^p} \frac{|y(\beta)|}{p_n(e_\beta)} < +\infty \right\}.$$

Очевидно, что  $B \subseteq F$ , где, как раньше,

$$B = \ell_{\mathbb{C}^p}(H') = \left\{ (\varphi(e_\alpha))_{\alpha \in \mathbb{C}^p} : \varphi \in H' \right\}.$$

Пусть теперь  $g$  — любая функция из  $F$ . Если  $t \in (0, 1)$ , то

$$g(tz) \in [1, h_{tG}(z)]_p \subset [1, h_G(z))_p \subseteq B \subseteq J^0.$$

Пусть  $0 < t_n \uparrow 1$ . Последовательность  $\{g(t_n z)\}_{n=1}^\infty$  в силу условия (4.15) ограничена в  $F, \mu$  и поточечно сходится к  $g(z)$  в  $\mathbb{C}^p = \Lambda$ . По лемме 4.3  $B \subseteq J^0$ . Применяя теоремы 4.9, 4.17 и принимая во внимание сепарабельность  $E$  в  $H$ , делаем вывод о равносильности таких утверждений: А)  $E$  — АПСм в  $H$ ; В) в  $H$  имеется хотя бы одна АПС вида  $\{e_{\alpha_n}\}_{n=1}^\infty$ ,  $\alpha_n \in \mathbb{C}^p$ ,  $n \geq 1$ ; С) пространство  $H', \lambda$  (топологически) изоморфно  $F, \mu$ .

Отметим еще, что в случае, когда пространство Фреше  $H$  правильно, утверждение С) в литературе встречается в такой (равносильной) форме:

С<sub>0</sub>) для пары пространств  $H'_\beta$  и  $F, \mu$  справедлива теорема Пэли — Винера — Шварца, т. е. оператор  $\forall \varphi \in H' \rightarrow \varphi(e_\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}^p$ , является топологическим изоморфизмом  $H'_\beta$  на  $F, \mu$ .

Далее, привлекая результат О. В. Епифанова из [26], о котором речь шла в п. 4.1.10, находим, что утверждению В) можно придать эквивалентный, но (формально) более «сильный» вид:

$B_0$ ) в пространстве  $H$  имеется хотя бы одна АПС вида  $\{e_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ , в которой  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n|_p = \infty$ .

Теперь уже можно сформулировать полученный в итоге результат для рассмотренного класса пространств аналитических функций.

**Теорема 4.18.** Пусть  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ , содержащая начало координат, а  $H$  — пространство Фреше с топологией, заданной набором преднорм  $p_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Пусть, далее,  $\bar{A}(\bar{G}) \hookrightarrow H \hookrightarrow A(G)$ , каждая функция  $p_n(e_{\alpha})$  непрерывна в  $\mathbb{C}^p$  при  $n \geq 1$  и выполнено условие (4.15). Тогда равносильны следующие утверждения:

- I)  $E = \{e_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{C}^p}$  — АПС<sub>см</sub> в  $H$ ;
- II) в  $H$  есть хотя бы одна АПС экспонент  $\{e_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\alpha_n \in \mathbb{C}^p$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;
- III) существует по крайней мере одна АПС  $\{e_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n|_p = +\infty$ ;
- IV)  $H', \lambda$  топологически изоморфно пространству  $F, \mu$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если пространство  $H$  правильно, то утверждение IV равносильно тому, что для пары  $H'_{\beta}, F, \mu$  справедлива теорема Пэли — Винера — Шварца.

**4.2.4.** Выясним, насколько существенно для справедливости замечания к теореме 4.18 предположение о правильности пространства  $H$ . Предварительно условимся говорить, что для любой области  $T$  в  $\mathbb{C}^p$  определенная в ней функция  $h : T \rightarrow \mathbb{R}_+^0 := (0, +\infty)$  локально ограничена сверху в  $T$ , если для любого компакта  $Q$  области  $T$   $\sup\{h(w) : w \in Q\} < +\infty$ .

**Лемма 4.4.** Если вещественнозначная положительная функция  $h$ , определенная в какой-либо (не обязательно собственной) подобласти  $G$  множества  $\mathbb{C}^p$ , локально ограничена сверху в  $G$ , то линейное нормированное пространство

$$A_h(G) := \left\{ y \in A(y) : \|y\|_h^G := \sup_{z \in G} \frac{|y(z)|}{h(z)} \right\}$$

полно, т. е. является  $B$ -пространством.

◁ Пусть  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  — фундаментальная последовательность в  $A_h(G)$ . Так как  $A_h(G) \hookrightarrow A(G)$  в силу локальной ограниченности сверху весовой функции  $h$ , то  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  — последовательность Коши в полном пространстве  $A(G)$ . Следовательно, существует такое  $f \in A(G)$ , что  $f_n \rightarrow f$  в  $A(G)$  и подавно  $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$  для любого  $z \in G$ . Задав теперь произвольно малое число  $\varepsilon > 0$ , найдем по нему номер  $N \geq 1$  такой, что если  $m > n > N$ , то  $\|f_m - f_n\|_h^G < \varepsilon$ , откуда

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon h(z) \quad \forall z \in G.$$

Зафиксировав в последнем неравенстве точку  $z$  из  $G$  и номер  $n > N$  и перейдя в пределу при  $m \rightarrow +\infty$ , найдем, что  $|f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon h(z)$ .

Отсюда  $\|f - f_n\|_h^G \leq \varepsilon$ . Но тогда, во-первых,

$$\|f\|_h^G \leq \|f_n\|_h^G + \|f - f_n\|_h^G \leq \|f_n\|_h^G + \varepsilon < +\infty \quad \forall n > N.$$

Поэтому  $f \in A_h(G)$ . Во-вторых,  $\|f - f_n\|_h^G \leq \varepsilon$ , когда  $n > N = N(\varepsilon)$  и, следовательно,  $f_n \rightarrow f$  в  $A_h$ . ▷

Пусть теперь  $G$  и  $H$  удовлетворяют условиям теоремы 4.18. Так как любая непрерывная в  $\mathbb{C}^p$  вещественнозначная функция локально ограничена сверху в  $\mathbb{C}^p$ , то по лемме 4.4 при любом  $n \geq 1$   $F_n$  —  $B$ -пространство. Поэтому, если пространство  $H'_\beta$  изоморфно бочечному пространству  $F, \mu = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} F_n$ , то оно бочечно, а это и означает [143], что  $H$  правильно. Таким образом, предположение о правильности пространства  $H$  существенно для справедливости замечания к теореме 4.18. Что же касается условия  $0 \in G$ , то оно несущественно и от него можно избавиться. Наконец, существенность условия (4.15) для справедливости теоремы 4.18 неясна.

**4.2.5.** Общие результаты из пп. 4.2.1, 4.2.2 можно дополнить, рассмотрев следующую ситуацию. Пусть  $H$  — пространство Фреше с определяющим топологию набором преднорм  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$  и пусть  $Q$  — некоторая (не обязательно собственная) подобласть  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ . Предположим, что выполнены такие условия:

- 1)  $e_\alpha \in H$  для любого  $\alpha \in Q$  (как выше,  $e_\alpha = \exp\langle \alpha, z \rangle_p$ );
- 2)  $\varphi(e_\alpha) \in A(Q)$  для любого  $\varphi \in H'$ ;
- 3)  $p_n(e_\alpha) \in C(Q)$  при любом  $n \geq 1$ .

Введем линейное нормированное пространство

$$F_n := \left\{ y \in A(Q) : \|y\|_n = \sup_{z \in Q} \frac{|y(z)|}{p_n(e_z)} < +\infty \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

По лемме 4.4  $F_n$  —  $B$ -пространство. Положим  $F, \mu = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} F_n$ ;  $\Lambda = Q$ ;  $x_\alpha = e_\alpha$ . Предположим, что оператор  $\ell_Q : \forall \varphi \in H' \rightarrow \varphi(e_\alpha) \in A(Q)$  является топологическим изоморфизмом  $H', \lambda$  на  $F, \mu$ . Заметим, что в силу условия 2)  $B_n := \left\{ \varphi(e_\alpha) : \varphi \in H', \sup_{\alpha \in Q} \frac{|\varphi(e_\alpha)|}{p_n(e_\alpha)} < \infty \right\} \subseteq F_n$  для любого  $n \geq 1$  и, более того,  $B_n \hookrightarrow F_n$ .

Таким образом,  $B, \mu_Q \hookrightarrow F, \mu$ , где  $B, \mu_Q := \varinjlim_{n \rightarrow \infty} B_n$ . Но согласно сделанному предположению  $\ell_Q(H') = F$ . Кроме того, по определению множества  $B$  имеем:  $B = \{\varphi(e_\alpha) : \alpha \in H'\}$ . Следовательно,  $B = F$ . Так как  $\ell_Q$  — изоморфизм  $H', \lambda$  на  $F, \mu$ , то обратный к  $\ell_Q$  оператор  $\ell_Q^{-1}$  действует непрерывно из  $F, \mu$  в  $H', \lambda$  и подавно непрерывно из  $B, \mu_Q$  в  $H', \lambda$ . Таким образом,  $\ell_Q$  — топологический изоморфизм  $H', \lambda$  на  $B, \mu_Q$ . Но в этом случае, учитывая теорему 4.9, ее следствие и результаты п. 4.1.9, заключаем, что  $E_Q := \{e_\alpha : \alpha \in Q\}$  — АПС<sub>м</sub> в  $H$ ; кроме того, справедливо любое из двух равносильных утверждений:

- $a_1)$  в  $H$  имеется АПС экспонент  $\{e_{\alpha_n}\}_{n=1}^\infty$ ,  $\alpha_n \in Q$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;
- $a_2)$  в  $H$  имеется АПС экспонент  $\{e_{\beta_n}\}_{n=1}^\infty$ , где  $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$  — бесконечная последовательность точек из  $Q$ , дискретная в  $Q$  (т. е. не имеющая предельных точек в  $Q$ ).

Далее, если при любом  $n \geq 1$   $\gamma_n \in Q$ , то последовательность  $\{e_{\gamma_n}\}_{n=1}^\infty$  является АПС в  $H$  тогда и только тогда, когда для любого  $n \geq 1$  существует  $b < +\infty$ :

$$\sup_{z \in Q} \frac{|y(z)|}{p_n(e_z)} \leq b \sup_{k \geq 1} \frac{|y(\gamma_k)|}{p_m(e_{\gamma_k})} \quad \forall y \in F. \quad (4.16)$$

Иными словами,  $\{e_{\gamma_n}\}_{n=1}^\infty$  — АПС в  $H$  в том и только в том случае, когда  $\{\gamma_n : n = 1, 2, \dots\}$  — слабо достаточное множество для  $F, \mu$ .

В частности, если  $H$  — правильное пространство Фреше,  $Q$  — область в  $\mathbb{C}^p$ , выполняются условия 1)–3) и для пары  $H'_\beta, F, \mu$  имеет место теорема Пэли — Винера — Шварца, то  $E_Q$  — АПС<sub>м</sub> в  $H$  и справедливы утверждения  $a_1)$  и  $a_2)$ ; кроме того,  $\{e_{\gamma_n}\}_{n=1}^\infty$ , где при всех  $n \geq 1$   $\gamma_n \in Q$  — АПС в  $H$  тогда и только тогда, когда выполняется соотношение (4.16). Именно такая ситуация имела место в п. 4.1.8 в случае, когда  $Q = G$  — область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ .

Основные результаты данного раздела опубликованы в статье [57].

### 4.3. Построение одного класса АПС в пространстве $A(G)$

В этом разделе с помощью теоремы 4.7 строятся конкретные АПС экспонент в пространстве  $A(G)$  функций, аналитических в выпуклой области  $G$ . Для простоты изложения рассмотрена лишь одномерная ситуация. Приведенные ниже результаты являются частью тех, которые были опубликованы в работах [41, 43].

**4.3.1.** Пусть сначала  $0 \in G$  и  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$  с опорной функцией  $h(-\varphi)$ . Положим  $\alpha = \min_{\varphi} h(\varphi)$ ,  $\beta = \max_{\varphi} h(\varphi)$ . Ясно, что  $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$ . Зафиксируем какую-либо последовательность  $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ , для которой

$$r_k > 0; \quad \inf_k [r_{k+1} - r_k] > 0; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} = 1 \quad \forall k \geq 1, \quad (4.17)$$

а также последовательность натуральных чисел  $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ , удовлетворяющую условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(r_{n+1} - r_n)} \ln \frac{r_n}{s_n(r_{n+1} - r_n)} = -\infty. \quad (4.18)$$

Опишем вначале некоторые свойства кривой

$$C_{\rho} := \{z \in \mathbb{C} : |z|h(\arg z) = \rho\}, \quad 0 < \rho < \infty,$$

которые используются в данном разделе. Прежде всего, кривая  $C_{\rho}$  ограничивает множество  $D_{\rho} := \{z \in \mathbb{C} : |z|h(\arg z) \leq \rho\}$ , которое в силу непрерывности функции  $h(\varphi)$  замкнуто в  $\mathbb{C}$ . Кроме того, если  $z_j \in D_{\rho}$  при  $j = 1, 2$  и  $\gamma \in [0, 1]$ , то

$$\begin{aligned} \gamma|z_1|h(\arg z_1) &= \gamma|z_1|h(\arg \gamma z_1) \leq \rho\gamma; \\ (1 - \gamma)|z_2|h(\arg(1 - \gamma)z_2) &\leq \rho(1 - \gamma). \end{aligned}$$

Как известно (см., например, [25, с. 321]), при любом  $v_j \in \mathbb{C}$ ,  $j = 1, 2$ ,

$$|v_1 + v_2|h(\arg(v_1 + v_2)) \leq |v_1|h(\arg v_1) + |v_2|h(\arg v_2). \quad (4.19)$$

Отсюда

$$|\gamma z_1 + (1 - \gamma)z_2|h(\arg(\gamma z_1 + (1 - \gamma)z_2)) \leq \rho\gamma + (1 - \gamma)\rho = \rho.$$

Таким образом,  $D_\rho$  — выпуклое множество и, следовательно,  $C_\rho$  — ограниченная замкнутая выпуклая кривая, содержащая внутри себя начало координат. Далее, если  $z_j \in C_{\rho_j}$ ,  $j = 1, 2$ , и  $\rho_2 > \rho_1$ , то

$$\rho_2 - \rho_1 = |z_2| h(\arg z_2) - |z_1| h(\arg z_1) \leq |z_2 - z_1| h(\arg(z_2 - z_1)) \leq \beta |z_2 - z_1|,$$

отсюда

$$d(C_{\rho_1}, C_{\rho_2}) := \min \{|z_2 - z_1| : z_2 \in C_{\rho_2}, z_1 \in C_{\rho_1}\} \geq \frac{\rho_2 - \rho_1}{\beta}.$$

Из последней оценки следует, в частности, что если провести круг  $K_r(z)$  радиуса  $r$  с центром в произвольной точке  $z$  из  $C_\rho$ , где  $0 < \rho < \infty$ , то  $\bar{K}_r(z) \subseteq D_{\rho+\beta r}$ .

Наконец, отметим неравенство, также вытекающее из соотношения (4.19):

$$|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)| \leq \beta |e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}| \leq \beta |\varphi_1 - \varphi_2| \quad (4.20)$$

при любом  $\varphi_j \in [0, 2\pi]$ ,  $j = 1, 2$ .

**4.3.2.** Возвращаясь к последовательностям  $\{r_m\}_{m=1}^\infty$  и  $\{s_m\}_{m=1}^\infty$ , выбранным выше, выделим для каждого  $k \geq 1$  на кривой  $C_{r_k}$   $s_k$  точек  $z_{j,k}$ :

$$z_{j,k} = \frac{r_k}{h\left(\frac{2\pi j}{s_k}\right)} \exp i \frac{2\pi j}{s_k}, \quad j = 1, 2, \dots, s_k; \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

Перенумеруем полученную таким путем систему точек

$$\{z_{j,k} : j = 1, 2, \dots, s_k; \quad k = 1, 2, \dots\}$$

в виде одной последовательности  $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$ , записав вначале (в любом порядке) все точки  $z_{j,1}$  с  $j \leq s_1$ , затем все точки  $z_{j,2}$  с  $j \leq s_2$  и т. д. Тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = \infty$ . Положим  $\Lambda := \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ ,  $E_\Lambda := (\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$  и зафиксируем какое-либо  $b$  из  $(0, +\infty)$ .

Покажем с помощью теоремы 4.7, что  $E_\Lambda$  — АПС в  $A(bG)$ . Согласно этой теореме так будет, если для произвольно зафиксированной числовой последовательности  $\{q_n\}_{n=1}^\infty$  такой, что  $0 < q_n \uparrow 1$ , справедливо соотношение

$$\forall n \geq 1 \exists m \geq 1, \exists A_n \in (0, +\infty) : \forall y \in [1, bh(\theta))$$

$$\sup_{|z| < \infty} \frac{|y(z)|}{\exp[bq_m h(\arg z)|z|]} \leq A_n \sup_{k \geq 1} \frac{|y(\lambda_k)|}{\exp[bq_n h(\arg \lambda_k)|\lambda_k|]}. \quad (4.22)$$



Мы покажем, что это соотношение будет иметь место на более широком, чем  $[1, bh(\theta)]$ , классе  $[1, \infty)$  всех целых функций экспоненциального типа. Для произвольной функции  $v$  из  $[1, \infty)$  введем стандартные обозначения:  $\sigma(v) := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r, v)}{r}$ ;  $M(r, v) := \max_{|z| \leq r} |v(z)|$ ;  $M_r(v) := \max\{|v(z)| : z \in C_r\}$ . Используя условие (4.18), выберем номер  $N_0 \geq 1$  такой, что при любом  $k \geq N_0$

$$16\pi^2 \beta^2 r_k \exp b(r_{k+1} - r_k) < \alpha^2 s_k (r_{k+1} - r_k). \quad (4.23)$$

Выбрав произвольно номера  $p \geq 1$ ,  $N \geq N_0$  и функцию  $y(z)$  из  $[1, \infty)$ , оценим сверху величину  $\delta_N^p(y) := \sup_{0 \leq r \leq r_N} M_r(y) \exp(-bq_p r)$ .

Если  $0 \leq r \leq r_{N_0}$ , то

$$M_r(y) e^{-bq_p r} \leq M_{r_{N_0}}(y) e^{-bq_{p-1} r_{N_0}} \exp[bq_{p-1} r_{N_0} - bq_p r] \leq e^{br_{N_0}} \gamma_N^{N_0}(y),$$

где  $\gamma_{N,p}^{N_0}(y) := \sup_{N_0 \leq \ell \leq N} M_{r_\ell}(y) e^{-bq_{p-1} r_\ell}$ .

Если же  $r_{N_0} < r \leq r_N$ , то

$$\exists m : N_0 \leq m < N, \quad r_m < r \leq r_{m+1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} M_r(y) e^{-bq_p r} &\leq M_{r_{m+1}}(y) e^{-bq_p r_m} = \\ &= M_{r_{m+1}}(y) e^{-bq_{p-1} r_{m+1}} \exp[bq_{p-1} r_{m+1} - bq_p r_m] \leq \\ &\leq \gamma_N^{N_0}(y) \exp \sup_{s \geq 1} b(q_{p-1} r_{s+1} - q_p r_s). \end{aligned}$$

Если  $B(b, p) := \max\{\exp br_{N_0}, \sup_{s \geq 1} b(q_{p-1} r_{s+1} - q_p r_s)\}$ , то в силу (4.17)  $B(b, p) < \infty$ . Следовательно,

$$\delta_N^p(y) \leq B(b, p) \gamma_{N,p}^{N_0}(y) \quad \forall N \geq N_0, \quad \forall y \in [1, \infty).$$

**4.3.3.** Пусть по-прежнему  $y \in [1, \infty)$  и для любого  $\ell \geq 1$   $t_\ell$  — точка на кривой  $C_{r_\ell}$  такая, что  $|y(t_\ell)| = M_{r_\ell}(y) := \tilde{M}_\ell$ . Всегда найдется номер  $j_\ell \leq s_\ell$ , для которого  $|\arg t_\ell - \arg z_{j_\ell, \ell}| < 2\pi/s_\ell$ . С помощью результатов из пп. 4.3.1, 4.3.2 оценим сверху величину  $|t_\ell - z_{j_\ell, \ell}|$ . Если  $\varphi_\ell := \arg t_\ell$  и  $\psi_\ell := \arg z_{j_\ell, \ell}$ , то

$$\begin{aligned} |t_\ell - z_{j_\ell, \ell}| &= r_\ell \left| \frac{e^{i\varphi_\ell}}{h(\varphi_\ell)} - \frac{e^{i\psi_\ell}}{h(\psi_\ell)} \right| \leq \frac{r_\ell}{\alpha^2} |h(\psi_\ell) e^{i\varphi_\ell} - h(\varphi_\ell) e^{i\psi_\ell}| \leq \\ &\leq \frac{r_\ell}{\alpha^2} [\beta |e^{i\varphi_\ell} - e^{i\psi_\ell}| + |h(\psi_\ell) - h(\varphi_\ell)|] \leq \frac{2r_\ell \beta}{\alpha^2} |\varphi_\ell - \psi_\ell| < \frac{4\beta \pi r_\ell}{\alpha^2 s_\ell}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\tilde{M}_\ell - |y(z_{j_\ell, \ell})| = |y(t_\ell)| - |y(z_{j_\ell, \ell})| \leq |y(t_\ell) - y(z_{j_\ell, \ell})| = \left| \int_{t_\ell}^{z_{j_\ell, \ell}} y'(\tau) d\tau \right|.$$

В последнем интеграле интегрирование ведется по отрезку, соединяющему точки  $t_\ell$  и  $z_{j_\ell, \ell}$ . Отсюда

$$|y(t_\ell) - y(z_{j_\ell, \ell})| \leq |t_\ell - z_{j_\ell, \ell}| M_{r_\ell}(y') \leq \frac{4\beta^2 \pi r_\ell}{\alpha^2 s_\ell} M_{r_\ell}(y').$$

По интегральной формуле Коши  $y'(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_v} \frac{y(t)}{(t-v)^2} dt$  для любого  $v \in C_{r_\ell}$ , где  $\Gamma_v$  — окружность с центром в точке  $v$  и радиусом  $\frac{\tau_{\ell+1} - \tau_\ell}{\beta}$ . Но тогда

$$|y(t_\ell) - y(z_{j_\ell, \ell})| \leq \frac{4\beta^2 \pi r_\ell \tilde{M}_{\ell+1}}{\alpha^2 s_\ell (r_{\ell+1} - r_\ell)},$$

и для любого  $\ell \geq N_0$

$$\begin{aligned} \frac{M_{r_\ell}(y)}{\exp b q_{p-1} r_\ell} - \frac{|y(z_{j_\ell, \ell})|}{\exp b q_{p-1} r_\ell} &\leq \frac{4\beta^2 \pi r_\ell \tilde{M}_{\ell+1}}{\alpha^2 s_\ell (r_{\ell+1} - r_\ell) \exp b q_{p-1} r_\ell} \leq \\ &\leq \frac{4\beta^2 \pi r_\ell \tilde{M}_{\ell+1} \exp[b q_{p-1} (r_{\ell+1} - r_\ell)]}{\alpha^2 s_\ell (r_{\ell+1} - r_\ell) \exp b q_{p-1} r_{\ell+1}} < \\ &< \frac{4\beta^2 \pi r_\ell \tilde{M}_{\ell+1} \exp b (r_{\ell+1} - r_\ell)}{\alpha^2 s_\ell (r_{\ell+1} - r_\ell) \exp b q_{p-1} r_{\ell+1}} < \frac{\tilde{M}_{\ell+1}}{4 \exp b q_{p-1} r_{\ell+1}}. \end{aligned}$$

Далее, при любом  $N \geq N_0$

$$\begin{aligned} \gamma_{N,p}^{N_0}(y) &\leq \sup_{N_0 \leq \ell \leq N} \frac{|y(z_{j_\ell, \ell})|}{\exp[b q_{p-1} h(\arg z_{j_\ell, \ell}) |z_{j_\ell, \ell}|]} + \frac{1}{4} \gamma_{N+1}^{N_0}(y) = \\ &= \tau_{N,p}^{N_0}(y) + \frac{\gamma_{N+1,p}^{N_0}(y)}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда для тех же  $N > N_0$   $\gamma_N^{N_0}(y) \leq 2\tau_N^{N_0}(y)$  и (с учетом оценки, полученной в самом конце п. 4.3.2)

$$\delta_N^p(y) \leq B(b, p) \left[ \tau_{N,p}^{N_0}(y) + \frac{1}{4} \gamma_{N,p}^{N_0}(y) \right] \quad \forall N \geq N_0. \quad (4.24)$$

Так как последовательность  $\{\delta_N^p(y)\}_{N=N_0}^\infty$  не убывает, то для любого  $y \in [1, +\infty)$   $\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N^p(y) = \sup_{0 < r < \infty} M_r(y) \exp[-bq_p r]$ .

Точно также при  $N \rightarrow \infty$  существует предел (возможно, равный  $+\infty$ ) у последовательностей  $\{\tau_{N,p}^{N_0}(y)\}_{N=N_0}^\infty$  и  $\{\gamma_{N+1,p}^{N_0}(y)\}_{N=N_0}^\infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \tau_{N,p}^{N_0}(y) &= \sup_{\ell \geq N_0} \frac{|y(z_{j\ell, \ell})|}{\exp[bq_{p-1} h(\arg z_{j\ell, \ell}) |z_{j\ell, \ell}|]} \leq \\ &\leq \sup_{s \geq 1} \frac{|y(\lambda_s)|}{\exp[bq_{p-1} h(\arg \lambda_s) |\lambda_s|]}; \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_{N+1,p}^{N_0}(y) &= \sup_{N_0 \leq r < \infty} M_r(y) \exp[-bq_p r] \leq \\ &\leq \sup_{0 < r < \infty} M_r(y) \exp[-bq_p r]. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в (4.24) при  $N \rightarrow \infty$  и любых фиксированных  $p > 1$  и  $y \in [1, \infty)$ , получаем, что соотношение (4.22) справедливо при  $n \geq 1$ ,  $m = n + 1$  и  $A_n = B(b, n + 1)$  для любой функции  $y$  из класса  $[1, \infty)$  и подавно — из класса  $[1, bh(\theta))$ .

Сформулируем полученный в итоге результат.

**Теорема 4.19.** Пусть  $G$  — содержащая  $z = 0$  ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$  с опорной функцией  $h(-\varphi)$ . Пусть последовательность  $\{r_k\}_{k=1}^\infty$  удовлетворяет условию (4.17), а последовательность натуральных чисел  $\{s_k\}_{k=1}^\infty$  — условию (4.18). Пусть, наконец, система точек  $\{z_{j,k} : j = 1, \dots, s_k; k = 1, 2, \dots\}$  вида (4.20) занумерована описанным выше способом в виде последовательности  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ . Тогда  $E_\Lambda$  — АПС в любом пространстве  $A(bG)$ , где  $0 < b < +\infty$ .

Теорема 4.19 содержательна в том смысле, что для любой последовательности положительных чисел  $\{r_m\}_{m=1}^\infty$ , удовлетворяющей условию (4.17), всегда можно найти (и притом бесконечным числом способов) последовательность натуральных чисел  $\{s_k\}_{k=1}^\infty$ , для которой справедливо равенство (4.18). Например, можно положить для всех  $k \geq 1$

$$s_k = E \left( \frac{r_k \exp[\mu_k(r_{k+1} - r_k)]}{(r_{k+1} - r_k)} \right),$$

где  $E(x)$  — символ «целой части»  $x$ , а  $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$  — произвольная числовая последовательность такая, что  $0 < \mu_k \uparrow +\infty$ .

Теорема 4.19 была впервые установлена в работах [41, теорема 6; 43]. Предположение о том, что  $0 \in G$ , в ее формулировке несущественно и от него легко избавиться.

**4.3.4.** Пусть теперь  $G$  — содержащая  $z = 0$  неограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$  с опорной функцией  $h(-\varphi)$ . Зафиксируем какую-либо последовательность выпуклых компактов  $F_n$  области  $G$  с опорной функцией  $h_n(-\varphi)$  таких, что  $0 \in F_n \subset \text{int } F_{n+1} \subseteq F_{n+1} \subset G = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$  при всех  $n \geq 1$ .

Выберем также числовую последовательность  $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  и последовательность чисел  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $s_n \in \mathbb{N}$ , так, чтобы  $0 < q_n \uparrow 1$ .

Наконец, если для любого  $n \geq 1$   $\beta_n := \max_{\varphi} h_n(-\varphi)$ , то зафиксируем числовые последовательности  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{r_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ , удовлетворяющие условиям:

$$1 < k_n \uparrow \infty; \quad \inf_n (r_{k_{n+1}} - r_{k_n}) > 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{k_{n+1}}}{r_{k_n}} = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{k_n}}{\beta_n} = \infty.$$

На каждой кривой  $C_n^{r_m}$ , где  $C_n^{\rho} := \{z : |z| h_n(\arg z) = \rho\}$  для любых  $\rho > 0$  и  $n \geq 1$ , выделим при  $m = k_n, k_{n+1}, \dots$  точки  $z_{\ell}^m$  вида

$$z_{\ell,n}^m = \frac{r_m}{h_n\left(\frac{2\pi\ell}{s_m}\right)} \exp i \frac{2\pi\ell}{s_m}, \quad \ell = 1, 2, \dots, s_m.$$

Упорядочив систему точек

$$\left\{ z_{\ell,n}^m : \ell = 1, 2, \dots, s_m; m = k_n, k_{n+1}, \dots; n \in \mathbb{N} \right\}$$

по неубыванию их модуля, получим последовательность  $\mu = (\mu_s)_{s=1}^{\infty}$ , в которой  $\lim_{s \rightarrow \infty} |\mu_s| = +\infty$ . Зафиксируем произвольно номера  $p \geq 1$ ,  $n \geq 1$ , число  $b$  из  $(0, +\infty)$  и положим

$$N_0 = k_n; \quad \Lambda_n := \{\mu_k : \mu_k \in C_n^{r_m}, m \geq k_n\}.$$

Точно такими же рассуждениями, как и в пп. 4.3.1–4.3.3, получаем оценку: для любых  $b \in (0, +\infty)$  и  $p \geq 1$  существует  $B_2 = B_2(b, p)$  такое, что при всех  $y \in [1, +\infty)$

$$\sup_{|z| < \infty} \frac{|y(z)|}{\exp[bq_p |z| h_n(\arg z)]} \leq B_2 \sup_{\mu_s \in \Lambda_n} \frac{|y(\mu_s)|}{\exp[bq_{p-1} |\mu_s| h_n(z)]}.$$

Положив (при произвольно взятом  $n \geq 1$ )  $p = n + 1$  и учитывая, что  $h_{n+1}(\varphi) > h_n(\varphi)$ , находим, что подавно для любого  $y \in [1, +\infty)$

$$\sup_{|z| < \infty} \frac{|y(z)|}{\exp[bq_{n+1}h_{n+1}(\arg z)|z|]} \leq B_2 \sup \frac{|y(\mu_s)|}{\exp[bq_n|\mu_s|h_n(\arg \mu_s)]}.$$

По теореме 4.7  $E_\mu = \{\exp \mu_k z\}_{k=1}^\infty$  — АПС в  $A(bG)$ . Тем самым мы доказали (немного более коротким путем, следуя изложению в [43]) теорему 10 из [41] о построении АПС экспонент в любой неограниченной выпуклой области в  $\mathbb{C}$ .

Проведенные в настоящем разделе рассуждения достаточно полно, на наш взгляд, описывают метод построения АПС экспонент в пространствах аналитических функций, основанный на оценке «глобальных» характеристик роста целых функций (типа  $\sup_{N \geq 1} \delta_N^p(y)$ ) с помощью «дискретных» ее характеристик (типа  $\sup_{N \geq 1} \gamma_{N,p}^{N_0}(y)$ ), описывающих порядок ее роста на достаточно густом подмножестве  $\mathbb{C}$ . Результаты, полученные таким путем, имеются в ряде работ автора конца 70-х — начала 80-х гг. XX века (см., например, [41, §§ 4–7; 43; 46; 47, гл. I, § 3] и др.), а также других математиков (см., например, [1, 16] и др.). Отметим также, что значительное число «одномерных» результатов автора в этом направлении было перенесено на многомерную ситуацию В. В. Моржаковым ([120, 121] и др.). Приведем здесь лишь один результат об универсально-представляющих системах (УАПС) (см. главу III, п. 3.6.4), непосредственно вытекающий из теорем 11 и 12 обзора [47]. Пользуясь случаем, отметим затрудняющую чтение описку в формулировке теоремы 12 из [47], в которой величину  $1/\beta$  следует заменить символом  $+\infty$ . Положим, как выше,  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ ;  $C_r = \{z : |z|h(\arg z) = r\}$  и введем функцию  $D_\Lambda(r) := \max\{|z-w| : z \in C_r, w \in \Lambda\}$ ,  $0 < r < \infty$  (полагаем по-прежнему, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = \infty$ ).

**Теорема 4.20.** *Предположим, что на некоторой системе кривых  $\{C_{R_k}\}_{k=1}^\infty$ , где  $\inf_k (R_{k+1} - R_k) > 0$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_{k+1}}{R_k} = 1$ , выполняется условие*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{D_\Lambda(R_k) \exp(R_{k+1} - R_k)}{(R_{k+1} - R_k)} = 0.$$

Тогда  $E_\Lambda = (\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$  — УАПС в  $\mathbb{C}$ .

#### 4.4. АПСм экспонент в пространствах аналитических функций

Общие результаты для АПСм в пространствах Фреше, изложенные в разделах 4.1 и 4.2, можно применить и к другим функциональным пространствам, кроме модельного  $H = A(G)$ . В этом разделе в качестве примеров рассмотрены два таких пространства аналитических функций.

**4.4.1.** Для того чтобы описать первое из этих пространств, понадобятся несколько известных определений.

Функция  $\rho(r)$ , непрерывно дифференцируемая в промежутке  $[r_0, +\infty)$ , где  $r_0 > 0$ , и удовлетворяющая условиям

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho \geq 0; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r\rho'(r) \ln r = 0,$$

называется уточненным  $\rho$ -порядком по Валирону [176]. Вещественнозначная  $2\pi$ -периодическая функция  $h(\theta)$  называется  $\rho$ -тригонометрически выпуклой (при  $\rho = 1$  — просто тригонометрически выпуклой) [98], если неравенство

$$h(\theta_1) \sin \rho(\theta_2 - \theta_3) + h(\theta_2) \sin \rho(\theta_3 - \theta_1) + h(\theta_3) \sin \rho(\theta_1 - \theta_2) \leq 0$$

справедливо для всех  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  таких, что

$$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3, \quad \theta_3 - \theta_1 < \pi/\rho.$$

Обобщенный индикатор ( $\rho$ -индикатор)  $h_f(\theta)$  целой функции  $f(z)$  уточненного порядка  $\rho(r)$  определяется соотношением

$$h_f(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} \ln |f(re^{i\theta})|.$$

Как известно [98],  $h_f(\theta)$  —  $\rho$ -тригонометрически выпуклая функция.

Пусть  $\rho(r) \rightarrow \rho > 0$ ,  $\rho(r)$  — уточненный  $\rho$ -порядок, и пусть  $h(\theta)$  — положительная ограниченная  $\rho$ -тригонометрически выпуклая функция. Положим

$$[\rho(r), h(\theta)] := \left\{ y \in A(C) : |y|_q := \sup \left[ \frac{|f(re^{i\theta})|}{\exp(qr^{\rho(r)} h(\theta))} : \right. \right. \\ \left. \left. r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi] \right] < +\infty, 1 < q < \infty \right\}$$

и определим в  $[\rho(r), h(\theta)]$  топологию счетным набором норм  $|\cdot|_{q_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , где  $\infty > q_n \downarrow 1$ . Тогда  $[\rho(r), h(\theta)]$  — пространство Фреше. Нетрудно убедиться в том, что если  $q_0 > q > 0$  и  $\mathcal{E}_\rho^q := \{y \in A(\mathbb{C}) : |y|_q < \infty\}$ , то  $\mathcal{E}_\rho^q$  —  $B$ -пространство, причем  $\mathcal{E}_\rho^q$  вложено вполне непрерывно в  $\mathcal{E}_\rho^{q_0}$ . Поэтому  $[\rho(r), h(\theta)] = \varprojlim_{q_n \downarrow 1} \mathcal{E}_\rho^{q_n}$  —  $M^*$ -пространство; следовательно, оно рефлексивно и потому [143] правильно.

Очевидно, что если  $\rho > 1$  и  $\rho(r)$  — уточненный  $\rho$ -порядок, то  $e^{\lambda z} \in [\rho(r), h(\theta)]$ , если  $h(\theta) > 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Положим  $E_{\mathbb{C}} = \{\exp \lambda z : \lambda \in \mathbb{C}\}$ .

**Теорема 4.21** [54]. Пусть  $\rho(r)$  — уточненный  $\rho$ -порядок, где  $\rho > 1$ , и пусть  $h(\theta)$  — ограниченная положительная  $\rho$ -тригонометрически выпуклая  $2\pi$ -периодическая функция. Тогда, если  $|z|^\rho h(\arg z)$  не является выпуклой функцией от  $z$ , то  $E_{\mathbb{C}}$  — не АПСМ в  $[\rho(r), h(\theta)]$ .

◁ Положим  $g(z) := |z|^{\rho(r)} h(\arg z)$  и введем функцию  $g^\wedge$ , сопряженную с  $g$  по Юнгу:

$$g^\wedge(\lambda) := \sup_{z \in \mathbb{C}} (\Re \lambda z - g(z)),$$

а также функцию  $v := g^{\wedge\wedge}$ , сопряженную с  $g^\wedge$ :

$$v(z) = (g^\wedge(\lambda))^\wedge = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} [\Re \lambda z - g^\wedge(\lambda)].$$

Как известно (см., например, [126, гл. I, § 4]),  $g^\wedge(\lambda)$  и  $v(z)$  — выпуклые функции, причем  $v(z) \leq g(z)$  для любого  $z \in \mathbb{C}$ . Далее, если  $z = rz_0$ ,  $r > 0$ ,  $\lambda_0 := e^{-i \arg z_0}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ , то  $v(rz_0) \geq r|z_0| - g^\wedge(e^{-i \arg z_0})$ . Так как  $\rho > 1$ , то функции  $g^\wedge(\lambda)$  и  $v(z)$  принимают конечные значения в  $\mathbb{C}$  и равномерно ограничены на каждом компакте из  $\mathbb{C}$ . Следовательно, при любом  $z_0 \in \mathbb{C}$   $\lim_{r \rightarrow \infty} v(rz_0) = +\infty$ . Кроме того, как легко проверить непосредственно (или воспользоваться формулой (4.7) из книги [126, гл. I, § 4]),

$$(qf(z))^{\wedge\wedge} = qf^{\wedge\wedge}(z) \quad \forall q > 0, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Положим для всех  $n \geq 1$  и  $y \in A(\mathbb{C})$

$$p_n(y) := |y|_{q_n}; \quad q_n(y) := \sup_{z \in \mathbb{C}} |y(z)| \exp[-q_n v(z)].$$

Тогда для тех же  $n \geq 1$  и  $y \in A(\mathbb{C})$   $p_n(y) \leq q_n(y)$ . Поэтому, если

$$H_1 := \{f \in A(\mathbb{C}) : \forall n \geq 1 \quad q_n(f) < \infty\}, \quad H := [\rho(r), h(\theta)]$$

и топология в  $H_1$  определяется счетным набором норм  $q_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то  $H_1$  — подпространство  $H$ , непрерывно вложенное в  $H$ . При этом для любых  $n \geq 1$  и  $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} p_n(e^{\lambda z}) &= \exp \sup_{z \in \mathbb{C}} [\Re \lambda z - q_n h(\arg z) |z|^{\rho(|z|)}] = (q_n g)^\wedge(\lambda); \\ q_n(e^{\lambda z}) &= \exp \sup_{z \in \mathbb{C}} [\Re \lambda z - q_n v(z)] = \\ &= \exp \sup_{z \in \mathbb{C}} [\Re \lambda z - (q_n g)^{\wedge\wedge}] = (q_n g)^{\wedge\wedge\wedge}. \end{aligned}$$

Согласно следствию 4.1 главы I монографии [126], всегда  $g^\wedge = g^{\wedge\wedge\wedge}$ , и потому  $p_n(e^{\lambda z}) = q_n(e^{\lambda z})$  при всех  $n \geq 1$  и  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Таким образом,  $H_1$  —  $E_{\mathbb{C}}$ -подпространство  $H$  и для доказательства теоремы 4.21 осталось установить, что если  $|z|^\rho h(\arg z)$  — не выпуклая функция от  $z$ , то  $H_1$  является собственным  $E_{\mathbb{C}}$ -подпространством  $H$ .

Для любых  $r > 0$  и  $w \in \mathbb{C}$  справедливо неравенство

$$v(rw) \leq (r|w|)^{\rho(r|w|)} h(\arg w).$$

Если положить  $\psi(w) := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} v(rw)(r|w|)^{-\rho(r|w|)}$ , то

$$\psi(w) \leq h(\arg w) \quad \forall w \in \mathbb{C}.$$

Допустим сначала, что  $\psi(w) = h(\arg w)$  для всех  $w \in \mathbb{C}$ . Тогда для тех же  $w$

$$\begin{aligned} h(\arg w) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} v(rw)(r|w|)^{-\rho(r|w|)} = \\ &= \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} v(rw) \frac{(r|w|)^{-\rho(r|w|)+\rho}}{r^{\rho-\rho(r)}} |w|^{-\rho} r^{-\rho(r)} = |w|^{-\rho} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} v(rw) r^{-\rho(r)} \end{aligned}$$

(здесь использовано соотношение из [98, лемма 5, с. 48]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(rb)^{\rho-\rho(rb)}}{r^{\rho-\rho(r)}} = 1 \quad \forall b > 0).$$

Очевидно, что функция  $\lambda(w) := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} v(rw)$  выпукла. Но тогда и функция  $|w|^\rho h(\arg w) = \lambda(w)$  является выпуклой, что противоречит начальному предположению теоремы. Итак, пока показано, что существуют  $z_0 \in \mathbb{C}$  и  $\theta \in [0, 1)$ , для которых  $\psi(z_0) = \theta h(\arg z_0)$ .



Положим  $\varphi_0 := \arg z_0$  и построим целую функцию  $F(z)$  уточненного порядка  $\rho(r)$  с индикатором  $h(\varphi)$  и вполне регулярного роста на луче  $\arg z = \varphi_0$  (такую функцию всегда можно построить согласно [98]). Выберем  $q_n > 1$  настолько близко к 1, а  $\varepsilon > 0$  — к нулю так, чтобы  $q_n \theta < 1 - \varepsilon$ . Из определения функции вполне регулярного роста на луче следует [98], что найдется некоторое множество  $E_0 \subset \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$  нулевой относительной меры, не зависящее от  $\varepsilon$  и такое, что

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin E_0}} \inf \frac{|\ln(F(rz_0))|}{(r|z_0|)^{\rho(r|z_0|)}} \geq (1 - \varepsilon)h(\varphi_0).$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin E_0}} \inf \frac{\ln |F(rz_0)|}{q_n v(rz_0)} &\geq \frac{(1 - \varepsilon)h(\varphi_0)}{q_n} \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin E_0}} \inf \frac{(r|z_0|)^{\rho(r|z_0|)}}{v(rz_0)} \geq \\ &\geq \frac{(1 - \varepsilon)h(\varphi_0)}{q_n} \lim_{r \rightarrow \infty} \inf \frac{(r|z_0|)^{\rho(r|z_0|)}}{v(rz_0)} \geq \frac{(1 - \varepsilon)h(\varphi_0)}{q_n \psi(z_0)} = \frac{1 - \varepsilon}{\theta q_n} > 1. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\lim_{r \rightarrow \infty} v(r|z_0|) = +\infty$ , находим:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F(rz_0)| \exp[-q_n v(rz_0)] = +\infty.$$

Таким образом,  $F \in H \setminus H_1$  и  $H_1$  — собственное  $E_{\mathbb{C}}$ -подпространство  $H$ , чем и завершается доказательство.  $\triangleright$

**Следствие.** В предположениях теоремы 4.21 в  $[\rho(r), h(\theta)]$  нет ни одной АПС вида  $\{\exp \lambda_k z\}_{k=1}^{\infty}$ , где  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  при всех  $k \geq 1$ .

**4.4.2.** Для того чтобы получить обращение теоремы 4.21, понадобится один результат из [154], согласно которому, если  $|z|^{\rho} h(\arg z)$  — выпуклая функция в  $\mathbb{C}$ ,  $\rho(r) \rightarrow \rho > 1$ , причем  $\rho(r)$  — уточненный  $\rho$ -порядок, а  $h(\theta)$  — положительная  $2\pi$ -периодическая  $\rho$ -тригонометрически выпуклая функция, то преобразование Фурье — Бореля

$$\forall \varphi \in [\rho(r), h(\theta)]' \rightarrow \varphi(e^{\lambda z})$$

является топологическим изоморфизмом  $[\rho(r), h(\theta)]'_{\beta}$  на внутренний индуктивный предел  $F, \nu := \varinjlim F_n$ , где при всех  $n \geq 1$

$$F_n := \left\{ b(\lambda) \in A(C) : \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{|b(\lambda)|}{p_n(e^{\lambda z})} < \infty \right\}, \quad F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

При этом, если положить  $Q = \mathbb{C}$ , то выполнены условия 1)–3) из п. 4.2.5 и в силу сказанного в конце п. 4.2.5 можно утверждать, что если функция  $|z|^\rho h(\arg z)$  выпукла, то  $E_{\mathbb{C}} = \text{АПСМ}$  в  $[\rho(r), h(\theta)]$ . Сформулируем полученный в итоге результат.

**Теорема 4.22** [54]. Пусть  $\rho(r)$  и  $h(\theta)$  те же, что и в теореме 4.21. Тогда равносильны следующие утверждения:

- I)  $|z|^\rho h(\arg z)$  — выпуклая функция в  $\mathbb{C}$ ;
- II)  $E_{\mathbb{C}} := (\exp \lambda z)_{\lambda \in \mathbb{C}} = \text{АПСМ}$  в  $[\rho(r), h(\theta)]$ ;
- III) существует хотя бы одна АПС экспонент  $(\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$  в пространстве  $[\rho(r), h(\theta)]$  такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = \infty$ .

Справедливо также такое дополнение к теореме 4.22.

**Теорема 4.23.** Пусть  $\rho > 1$ ,  $\rho(r)$  и  $h(\theta)$  те же, что и в теореме 4.21, и пусть  $|z|^\rho h(\arg z)$  — выпуклая функция в  $\mathbb{C}$ . Пусть, далее,  $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$  — произвольная последовательность точек из  $\mathbb{C}$ .

Для того чтобы  $(\exp \tau_n z)_{n=1}^\infty$  была АПС в  $[\rho(r), h(\theta)]$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $q_1 \in (0, 1)$  существовали  $q_2 \in (0, 1)$  и  $d < +\infty$  такие, что

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|y(z)|}{\exp q_1 v(z)} \leq d \sup_{n \geq 1} \frac{|y(\tau_n)|}{\exp q_2 v(\tau_n)} \quad \forall y \in A(\mathbb{C}),$$

где  $v(z) = g^{\Lambda}(z)$  и  $g(\lambda) = |\lambda|^\rho h(\arg \lambda)$ .

**4.4.3.** Рассмотрим теперь, следуя [81, 84], еще одно функциональное пространство, которое является проективным пределом некоторой последовательности весовых  $B$ -пространств функций, аналитических в области  $G$  из  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ . Опишем вначале эти  $B$ -пространства.

Предположив, что отображение  $f$  области  $G \subseteq \mathbb{C}^p$  в  $\mathbb{R}$  локально ограничено сверху, определим (векторное) подпространство в  $A(G)$

$$A_f := \left\{ y \in A(\mathbb{C}) : \|y\|_f := \sup_{z \in G} \frac{|y(z)|}{\exp f(z)} < +\infty \right\}.$$

По лемме 4.4  $A_f$  —  $B$ -пространство с нормой  $\|\cdot\|_f$ ; при этом  $A_f \hookrightarrow A(G)$ . Пусть, как выше,

$$e_\alpha := \exp \langle \alpha, z \rangle_p \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}^p; \quad E := \{e_\alpha : \alpha \in \mathbb{C}^p\}.$$

Очевидно, что  $E \subseteq A_f$  тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z \in G} [\Re \langle \alpha, z \rangle_p - f(z)] < +\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}^p. \quad (4.25)$$

В свою очередь, последнее неравенство заведомо выполняется, если

$$\forall N < +\infty \exists M < +\infty : \forall z \in G \quad N|z|_p - f(z) \leq M. \quad (4.26)$$

С другой стороны,  $e_0 \in A_f$  тогда и только тогда, когда

$$\inf [f(z) : z \in G] > -\infty. \quad (4.27)$$

При этом (4.26)  $\Rightarrow$  (4.25)  $\Rightarrow$  (4.27). Таким образом, условие (4.27) необходимо, а (4.26) — достаточно для того, чтобы  $E \subseteq A_f$ .

В случае, когда область  $G$  ограничена, из (4.27) следует (4.26). Действительно, в качестве  $M = M(N)$  можно взять число  $Nd + D$ , где

$$d = \sup \{|z|_p : z \in G\}, \quad D = \sup [-f(z) : z \in G].$$

Поэтому, если  $G$  — ограниченная область в  $\mathbb{C}^p$ , то соотношение (4.27) необходимо и достаточно для того, чтобы  $E \subseteq A_f$ .

Пусть теперь  $f$  — локально ограниченное сверху отображение  $G$  в  $\mathbb{R}$ , удовлетворяющее условию (4.27), если  $G$  — ограниченная область в  $\mathbb{C}^p$ , и условию (4.26), когда множество  $G$  неограничено. Положим для любого  $\alpha \in \mathbb{C}^p$

$$f^\Lambda(\alpha) := \sup_{z \in G} \{\Re \langle \alpha, z \rangle_p - f(z)\}.$$

Если  $z_0 \in G$  и  $\alpha \in \mathbb{C}^p$ , то

$$f^\Lambda(\alpha) \geq \Re \langle \alpha, z_0 \rangle - f(z_0) > -\infty.$$

С другой стороны, из условия (4.27) (если область  $G$  ограничена в  $\mathbb{C}^p$ ) или (4.26) (когда множество  $G$  неограничено в  $\mathbb{C}^p$ ) следует, что отображение  $f^\Lambda(\alpha)$  локально ограничено сверху в  $\mathbb{C}^p$ , причем при любых  $q \in [0, 1]$ ,  $\alpha_1 \in \mathbb{C}^p$  и  $\alpha_2 \in \mathbb{C}^p$

$$\begin{aligned} f^\Lambda(q\alpha_1 + (1-q)\alpha_2) &= \sup_{z \in G} \{q\Re \langle \alpha_1, z \rangle_p + (1-q)\Re \langle \alpha_2, z \rangle_p - f(z)\} \leq \\ &\leq q \sup_{z \in G} \{\Re \langle \alpha_1, z \rangle_p - f(z)\} + (1-q) \sup_{z \in G} \{\Re \langle \alpha_2, z \rangle_p - f(z)\} = \\ &= qf^\Lambda(\alpha_1) + (1-q)f^\Lambda(\alpha_2). \end{aligned}$$

Таким образом,  $f^\Lambda$  — выпуклое отображение  $\mathbb{C}^p$  в  $\mathbb{R}$  или, в терминологии [126], собственное выпуклое отображение в  $\mathbb{C}^p$ . Но тогда, согласно [126], функция  $f^\Lambda$  непрерывна в  $\mathbb{C}^p$ .

Пусть еще  $f^{\Lambda\Lambda}(w) := \sup_{\alpha \in \mathbb{C}^p} [\Re \langle \alpha, w \rangle_p - f^\Lambda(\alpha)]$ , где  $w$  — произвольная точка из  $G$ . Как выше, показываем, что  $f^{\Lambda\Lambda}$  — выпуклое отображение  $G$  в  $\mathbb{C}^p$ . Далее, при любых  $w \in G$  и  $\alpha \in \mathbb{C}^p$

$$f^\Lambda(\alpha) \geq \Re \langle \alpha, w \rangle_p - f(w) \Leftrightarrow f(w) \geq \Re \langle \alpha, w \rangle_p - f^\Lambda(\alpha).$$

Поэтому для тех же  $w$

$$f(w) \geq \sup_{\alpha \in \mathbb{C}^p} [\Re \langle \alpha, w \rangle_p - f^\Lambda(\alpha)] = f^{\Lambda\Lambda}(w).$$

С другой стороны, для любых  $w_0$  и  $\alpha_0$  из  $\mathbb{C}^p$  имеем

$$f^{\Lambda\Lambda}(w_0) \geq \Re \langle \alpha_0, w_0 \rangle_p - f^\Lambda(\alpha_0) > -\infty.$$

Таким образом,  $f^{\Lambda\Lambda}(v) > -\infty$  для любого  $v \in \mathbb{C}^p$ , причем, если еще  $v \in G$ , то  $f^{\Lambda\Lambda}(v) \leq f(v) < +\infty$  и, более того, функция  $f^{\Lambda\Lambda}(v)$  локально ограничена сверху в  $G$ . Если еще положить

$$f^{\Lambda\Lambda\Lambda}(\alpha) := (f^{\Lambda\Lambda})^\Lambda(\alpha) = \sup_{\beta \in \mathbb{C}^p} \{\Re \langle \alpha, \beta \rangle_p - f^{\Lambda\Lambda}(\beta)\},$$

то, как известно (см., например, [126]), при всех  $\alpha \in \mathbb{C}^p$

$$f^{\Lambda\Lambda\Lambda}(\alpha) = (f^\Lambda)^{\Lambda\Lambda}(\alpha) = f^\Lambda(\alpha)$$

(эти равенства нетрудно проверить и непосредственно).

**4.4.4.** Пусть теперь  $\Phi = \{f_k\}_{k=1}^\infty$  — невозрастающая (по  $k$ ) последовательность отображений  $f_k$  из  $G$  в  $\mathbb{R}$  такая, что функция  $f_1$  локально ограничена сверху в  $G$  (очевидно, что такими же будут и функции  $f_k$  при  $k \geq 2$ ). Положим  $A_G(\Phi) := \bigcap A_{f_k}$ ,  $\tilde{A}_G(\Phi) := \varprojlim_{k \uparrow \infty} A_{f_k}$ . Тогда  $\tilde{A}_G(\Phi)$  — пространство Фреше со счетным набором норм  $p_k(\cdot) = \|\cdot\|_{f_k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Если  $\beta \in \mathbb{C}^p$ , то  $e_\beta \in A_G(\Phi)$  тогда и только тогда, когда условие (4.25) выполняется при  $\alpha = \beta$  и  $f = f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Далее, для включения  $E \subseteq A_G(\Phi)$  достаточно, чтобы

$$\forall N < \infty, \forall k \geq 1 \exists M_{N,k} : \forall z \in G \quad N|z|_p - f_k(z) \leq M_{N,k}, \quad (4.28)$$

и необходимо, чтобы

$$\inf \{f_k(z) : z \in G\} > -\infty, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.29)$$

И здесь в случае, когда  $G$  — ограниченная область в  $\mathbb{C}^p$ , условия (4.29) необходимы и достаточны для включения  $E \subseteq A_G(\Phi)$ .

Всюду далее в этом разделе будем предполагать, что при всех  $n \geq 1$  и  $z \in G$   $f_{n+1}(z) \leq f_n(z)$ , причем функция  $f_1$  локально ограничена сверху в  $G$  и выполняются соотношения (4.29), если область  $G$  ограничена в  $\mathbb{C}^p$ , и условие (4.28), когда она неограничена в  $\mathbb{C}^p$ . Если все эти предположения относительно последовательности  $\Phi = \{f_k\}_{k=1}^\infty$  имеют место, то будем говорить (ради краткости), что  $\Phi$  обладает свойством  $(\gamma)$ .

**4.4.5.** Пусть  $\Lambda$  — произвольное (не обязательно собственное) подмножество  $\mathbb{C}^p$  и  $E_\Lambda = \{e_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$  (если  $\Lambda = \mathbb{C}^p$ , то пишем, как выше,  $E$  вместо  $E_{\mathbb{C}^p}$ ). Положим для любого  $k \geq 1$

$$g_k(z) := f_k^{\Lambda\Lambda}(z), \quad z \in G; \quad \Psi = (g_k)_{k=1}^\infty; \quad A_G(\Psi) := \bigcap_{k=1}^\infty A_{g_k}.$$

Заметим, что топология в каждом  $B$ -пространстве  $A_{g_k}$  определяется нормой  $q_k(\cdot) = \|\cdot\|_{g_k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Если  $\tilde{A}_G(\Psi) := \varprojlim_{k \rightarrow \infty} A_{g_k}$ , то  $\tilde{A}_G(\Psi)$  — пространство Фреше, непрерывно вложенное в  $A_G(\Phi)$ . Так как при всех  $k \geq 1$   $g_k(z) \leq f_k(z)$ , то для любого  $y \in A(G)$   $\|y\|_{g_k} \geq \|y\|_{f_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . При этом, если  $\alpha \in \mathbb{C}^p$ , то

$$\begin{aligned} \|e_\alpha\|_{g_k} &= \exp \sup_{z \in G} [\operatorname{Re} \langle \alpha, z \rangle_p - f_k^{\Lambda\Lambda}(z)] = \\ &= \exp f_k^{\Lambda\Lambda}(\alpha) = \exp f_k^\Lambda(\alpha) = \|e_\alpha\|_{f_k}. \end{aligned}$$

Таким образом, если  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}^p$ , то  $\tilde{A}_G(\Psi)$  —  $E_\Lambda$ -подпространство пространства Фреше  $\tilde{A}_G(\Phi)$ . Если еще  $A_G(\Psi) \neq A_G(\Phi)$ , то  $\tilde{A}_G(\Psi)$  — собственное  $E_\Lambda$ -подпространство пространства Фреше  $\tilde{A}(\Phi)$  и, следовательно, последнее не будет пространством со строгой  $E_\Lambda$ -топологией. Привлекая теорему 4.3, приходим к такому результату [84].

**Теорема 4.24.** Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{C}^p$  и  $\Phi = \{f_k\}_{k=1}^\infty$  — последовательность отображений  $G$  в  $\mathbb{R}$  со свойством  $(\gamma)$ . Пусть, далее,  $A_G(\Phi) \neq A_G(\Psi)$ . Тогда, если  $\Lambda$  — произвольное подмножество  $\mathbb{C}^p$ , то  $E_\Lambda$  не будет АПСм в  $\tilde{A}_G(\Phi)$ .

**Следствие.** Пусть  $G$  и  $\Phi = \{f_k\}_{k=1}^\infty$  те же, что и в теореме 4.24, и пусть  $A_G(\Phi) \neq A_G(\Psi)$ . Тогда в  $\tilde{A}_G(\Phi)$  нет ни одной АПС вида  $\{e_{\alpha_k}\}_{k=1}^\infty$ , где  $\alpha_k \in \mathbb{C}^p$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если  $A_G(\Psi) = A_G(\Phi)$ , то оператор тождественного вложения отображает непрерывно и взаимно-однозначно одно пространство Фреше  $\tilde{A}_G(\Psi)$  на другое —  $\tilde{A}_G(\Phi)$ . По теореме Банаха об изоморфизме пространства  $\tilde{A}_G(\Psi)$  и  $\tilde{A}_G(\Phi)$  совпадают (по набору элементов и топологии).

**4.4.6.** Далее в этом разделе предполагается, что  $A_G(\Psi) = A_G(\Phi)$ , где, по-прежнему,  $\Phi = \{f_k\}_{k=1}^\infty$  — последовательность отображений  $G$  в  $\mathbb{R}$  со свойством  $(\gamma)$ , а  $G$  — область в  $\mathbb{C}^p$ . Заметим, что в рассматриваемой ситуации  $E_{\mathbb{C}^p} = E \subseteq A_G(\Phi) = A_G(\Psi)$ .

Пусть сначала  $G$  — ограниченная область в  $\mathbb{C}^p$ . Так как каждая функция  $g_k(z) = f_k^{\Lambda\Lambda}(z)$  определена и непрерывна в  $\mathbb{C}^p$ , то она ограничена на  $\bar{G}$ :  $M_k := \sup\{|g_k(z)| : z \in \bar{G}\} < +\infty$  для любого  $k \geq 1$ . Пусть  $B(G)$  — банахово пространство всех функций, аналитических и ограниченных в области  $G$ , с нормой  $|y|_\infty^G = \sup_{z \in G} |y(z)|$ . Для любой функции  $v$  из  $A(G)$  и всех  $k \geq 1$

$$\|v\|_{g_k} \exp(-M_k) \leq |v|_\infty^G \leq \|v\|_{g_k} \exp M_k.$$

Отсюда легко вывести, что пространства  $B(G)$  и  $A_G(\Psi)$  совпадают по набору элементов и топологически изоморфны. Поэтому можно считать, что  $A_G(\Psi)$  —  $B$ -пространство с нормой  $|\cdot|_\infty^G$ . Но тогда  $A_G(\Phi) = A_G(\Psi) = B(G)$ . Так как  $A_G(\Psi) \hookrightarrow A_G(\Phi)$ , то оператор тождественного вложения  $J$  отображает непрерывно и взаимно-однозначно  $B$ -пространство  $B(G)$  на пространство Фреше  $A_G(\Phi)$ . По теореме Банаха  $J$  — изоморфизм и, следовательно, можно считать, что  $A_G(\Phi)$  совпадает с  $B$ -пространством  $B(G)$  по набору элементов и по (нормированной) топологии, определяемой нормой  $|\cdot|_\infty^G$ .

Таким образом, при сделанных предположениях  $A_G(\Phi) \simeq B(G)$ . Но тогда в качестве «контрольного»  $E$ -подпространства пространства  $B(G)$  можно взять его подпространство  $AC(G)$ , состоящее из всех функций, аналитических в  $G$  и непрерывных на  $\bar{G}$ . Если в этом пространстве определить норму  $|y|_\infty^1 = \max_{z \in \bar{G}} |y(z)|$ , то, очевидно, что  $|y|_\infty^1 = |y|_\infty^G$  для любого  $y \in AC(G)$ . В частности,  $|e_\alpha|_\infty^1 = |e_\alpha|_\infty^G$  при любом  $\alpha \in \mathbb{C}^p$  и  $AC(G)$  —  $E$ -представительное подпространство  $B(G)$ . На с. 44 работы [84] показано, что если  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$ , то  $AC(G)$  — собственное подпространство  $B(G)$ . По-видимому, так же будет и в случае, если  $G$  — произвольная ограниченная область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ . Но тогда на основании изложенных в разделе 4.1.1 общих результатов можно утверждать, что если  $G$  —

ограниченная область в  $\mathbb{C}^p$  и  $AC(G)$  — собственное подпространство пространства  $B(G) = A_G(\Phi)$ , то в последнем нет ни одной АПС экспонент. Таким образом, вполне вероятным представляется

**Предположение.** Если  $G$  — ограниченная область в  $\mathbb{C}^p$  и  $\Phi = \{f_k\}_{k=1}^\infty$  — последовательность отображений  $G$  в  $\mathbb{R}$ , обладающая свойством  $(\gamma)$ , то  $E$  — не АПСм в  $A_G(\Phi)$ .

Из текста, предшествующего предположению, следует, что оно верно, во всяком случае, при  $p = 1$ .

**4.4.7.** Переходя к неограниченным в  $\mathbb{C}^p$  областям, ограничимся ради простоты изложения лишь случаем, когда  $G = \mathbb{C}^p$ .

В этой ситуации непосредственно из общих результатов, полученных в разделах 4.1 и 4.2, следуют такие утверждения.

**Теорема 4.25.** Пусть  $\Phi = \{f_k\}_{k=1}^\infty$  — последовательность выпуклых в  $\mathbb{C}^p$  вещественнозначных функций, обладающая свойством  $(\gamma)$  (при  $G = \mathbb{C}^p$ ). Тогда равносильны следующие утверждения:

1) для пары  $(A_{\mathbb{C}^p}(\Phi))', \lambda; F, \mu$  справедлива теорема типа Пэли — Винера — Шварца, т. е. оператор  $\ell_{\mathbb{C}^p} : \forall \varphi \in (A_{\mathbb{C}^p}(\Phi))' \rightarrow \varphi(e_z)$  является топологическим изоморфизмом  $(A_{\mathbb{C}^p})', \lambda$  на  $F, \mu$ , где

$$F = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} F_n,$$

$$F_n = \left\{ y \in A(\mathbb{C}^p) : \sup_{z \in \mathbb{C}^p} \frac{|y(z)|}{\exp f_n^\Lambda(z)} =: \|f\|_{f_n^\Lambda} < \infty \right\}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

2)  $E$  — АПСм в  $A_{\mathbb{C}^p}(\Phi)$ , где, как выше,  $E = E_{\mathbb{C}^p} = \{e_\alpha : \alpha \in \mathbb{C}^p\}$ ;

3) в  $A_{\mathbb{C}^p}(\Phi)$  имеется АПС вида  $\{e_{\lambda_k}\}_{k=1}^\infty$ , где при любом  $k \geq 1$   $\lambda_k \in \mathbb{C}^p$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|_p = \infty$ .

**Теорема 4.26.** Пусть  $\Phi = \{f_k\}_{k=1}^\infty$  — последовательность из теоремы 4.25 и пусть справедливо утверждение 1) этой теоремы. Тогда последовательность  $E_\Lambda$ , где  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  и  $\lambda_k \in \mathbb{C}^p$  при любом  $k \geq 1$ , является АПС в  $A_{\mathbb{C}^p}(\Phi)$  тогда и только тогда, когда  $\Lambda$  — слабо достаточное множество для пространства  $F, \mu$  или, что все равно, когда для любого  $n \geq 1$  существуют  $m \geq 1$  и  $b < +\infty$ :

$$\sup_{z \in \mathbb{C}^p} \frac{|y(z)|}{\exp f_n^\Lambda(z)} \leq b \sup_{k \geq 1} \frac{|y(\lambda_k)|}{\exp f_m^\Lambda(\lambda_k)} \quad \forall y \in F.$$

**4.4.8.** В связи с теоремами 4.25, 4.26 возникают две такие, на наш взгляд, интересные задачи для пространства  $A_{\mathbb{C}^p}(\Phi)$ , где  $\Phi = \{f_k\}$  —

последовательность вещественнозначных выпуклых в  $\mathbb{C}^p$  функций со свойством  $(\gamma)$  (при  $G = \mathbb{C}^p$ ):

1) при каких дополнительных предположениях пространство  $A_{\mathbb{C}^p}(\Phi)$  правильно (т. е.  $(A_{\mathbb{C}^p}(\Phi))'_\beta$  бочечно);

2) когда для пары  $(A_{\mathbb{C}^p}(\Phi))'_\beta; F, \mu$  справедлива теорема Пэли — Винера — Шварца.

В некоторых частных случаях ответы на эти вопросы известны, но в общей ситуации оптимальное решение (определение минимальных дополнительных условий), насколько известно автору, пока не получено.

#### 4.5. Абсолютно представляющие семейства подпространств

**4.5.1.** Пусть  $H$  — ЛВП над полем скаляров  $\Psi$  (как обычно,  $\Psi = \mathbb{C}$  или  $\Psi = \mathbb{R}$ ) с определяющим топологию набором преднорм  $\mathcal{P} = \{p\}$ . Пусть, далее,  $\Lambda$  — произвольно зафиксированное множество индексов и  $(H_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  — совокупность некоторых подпространств  $H_\alpha$  пространства  $H$  с индуцированной из  $H$  топологией. Назовем ее абсолютно представляющим семейством подпространств (АПСМП) в  $H$ , если для любого элемента  $x$  из  $H$  найдется абсолютно суммируемое к  $x$  в  $H$  семейство вида  $\{y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ , где  $y_\alpha \in H_\alpha$  для любого  $\alpha \in \Lambda$  такое, что  $x = \sum_{\alpha \in \Lambda} y_\alpha$  и  $\sum_{\alpha \in \Lambda} p(y_\alpha) < \infty$  при всех  $p \in \mathcal{P}$ .

В случае, когда  $H_\alpha = \{c_\alpha x_\alpha : c_\alpha \in \Psi\}$  для любого  $\alpha \in \Lambda$ , причем  $x_\alpha \in H$  и  $x_\alpha \neq 0$ , АПСМП совпадает с введенным в работе [54] и рассмотренным в разделах 4.1, 4.2 абсолютно представляющим семейством элементов  $X = (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ . Далее, если еще  $\Lambda = \mathbb{N}$  и все пространства  $H_\alpha$  одномерны, то мы приходим к АПС  $X = (x_k)_{k=1}^\infty$  элементов, введенной в [37, 39] и исследованной в дальнейшем в статьях [41, 45, 47] и др. В этих работах основное внимание уделялось, как правило, вопросу о том, когда последовательность обычных  $(x_k = \exp \lambda_k z)$  или обобщенных  $(x_k = E_\rho(\lambda_k z))$ , где  $E_\rho(z)$  — функция Миттаг — Леффлера) экспонент является АПС в различных пространствах аналитических функций.

**4.5.2.** Приступая к изучению АПСМП, введем пространство

$$(H_\alpha)^\Lambda := \left\{ Y = (y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} : \forall \alpha \in \Lambda \ y_\alpha \in H_\alpha; \sum_{\alpha \in \Lambda} p(y_\alpha) < \infty \ \forall p \in \mathcal{P} \right\},$$



в котором определим топологию набором преднорм

$$Q_{\mathcal{P}} = \{q_p\}_{p \in \mathcal{P}}, \quad q_p(Y) = \sum_{\alpha \in \Lambda} p(y_\alpha).$$

Опишем простейшие топологические свойства пространства  $(H_\alpha)^\Lambda$ .

Прежде всего, если  $H$  — отделимое ЛВП, то пространство  $(H_\alpha)^\Lambda$  также отделимо. Действительно, если  $\sum_{\alpha \in \Lambda} p(y_\alpha) = 0$  при любом  $p \in \mathcal{P}$ , то

$$p(y_\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \Lambda, \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Из отделимости  $(H, \mathcal{P})$  следует, что  $y_\alpha = 0$  для любого  $\alpha \in \Lambda$ , откуда

$$Y = (y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} = \{0\}.$$

Покажем, что когда при всех  $\beta \in \Lambda$   $H_\beta$  — полное ЛВП, то пространство  $(H_\alpha)^\Lambda$  также полно. Пусть  $\omega$  — некоторое вполне упорядоченное множество индексов и  $\{Y^{(\gamma)}\}_{\gamma \in \omega} = \{(x_{\alpha, \gamma})_{\alpha \in \Lambda}\}_{\gamma \in \omega}$  — какая-либо сеть Коши в  $(H_\alpha)^\Lambda$ . Тогда

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathcal{P}, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \gamma_p(\varepsilon) \in \omega : \quad \forall \gamma_1 \succ \gamma_p(\varepsilon), \quad \forall \gamma_2 \succ \gamma_p(\varepsilon) \\ \sum_{\alpha \in \Lambda} p(x_{\alpha, \gamma_1} - x_{\alpha, \gamma_2}) < \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Зафиксировав произвольный индекс  $\alpha_0$  из  $\Lambda$ , находим из (4.30), что  $(x_{\alpha_0, \gamma})_{\gamma \in \omega}$  — сеть Коши в  $H_{\alpha_0}$ . В силу полноты  $H_{\alpha_0}$  существует элемент  $x_{\alpha_0} \in H_{\alpha_0}$  такой, что  $\lim_{\gamma \in \omega} x_{\alpha_0, \gamma} = x_{\alpha_0}$ . Таким образом,

$$\forall \alpha \in \Lambda \quad \exists x_\alpha \in H_\alpha : \quad \lim_{\gamma \in \omega} x_{\alpha, \gamma} = x_\alpha. \quad (4.31)$$

Пусть теперь  $\Gamma$  — любое конечное подмножество индексов из  $\Lambda$ . Тогда из (4.31) следует, что

$$\forall p \in \mathcal{P} \quad \exists \beta_p(\Gamma) : \quad \sum_{\delta \in \Gamma} p(x_\delta - x_{\delta, \gamma}) < 1 \quad \forall \gamma \succ \beta_p(\Gamma).$$

Отсюда

$$\sum_{\delta \in \Gamma} p(x_\delta) \leq \sum_{\delta \in \Gamma} p(x_{\delta, \gamma}) + \sum_{\delta \in \Gamma} p(x_\delta - x_{\delta, \gamma}) < 1 + \sum_{\beta \in \Lambda} p(x_{\beta, \gamma}) =: a_{p, \gamma} < +\infty.$$

Зафиксировав какое-либо  $\gamma$ , для которого  $\gamma \mapsto \beta_p(\Gamma)$ , получим, что для любой преднормы  $p$  из  $\mathcal{P}$  найдется постоянная  $M_p < +\infty$  такая, что  $\sum_{\beta \in \Gamma} p(x_\beta) \leq M_p$ , каково бы ни было конечное подмножество  $\Gamma$  из  $\Lambda$ . Но тогда  $\sum_{\beta \in \Lambda} p(x_\beta) \leq M_p$  и  $(x_\beta)_{\beta \in \Lambda} \in (H_\alpha)^\Lambda$  при любом  $p \in \mathcal{P}$ .

Далее, для любого конечного подмножества  $T$  из  $\Lambda$  при любых  $\varepsilon > 0$ ,  $p \in \mathcal{P}$  и  $\gamma_j \mapsto \gamma_p(\varepsilon)$  ( $j = 1, 2$ ) имеем

$$\sum_{\alpha \in T} p(x_{\alpha, \gamma_1} - x_{\alpha, \gamma_2}) < \varepsilon. \quad (4.32)$$

Зафиксировав  $\gamma_1 \mapsto \gamma_p(\varepsilon)$  и учитывая соотношение (4.31), находим из (4.32), что  $\sum_{\alpha \in T} p(x_{\alpha, \gamma_1} - x_\alpha) \leq \varepsilon$  при  $\gamma_1 \mapsto \gamma_p(\varepsilon)$ . Отсюда

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} p(x_{\alpha, \gamma_1} - x_\alpha) \leq \varepsilon \quad \forall \gamma_1 \mapsto \gamma_p(\varepsilon),$$

и сеть  $\{(x_{\alpha, \gamma})_{\alpha \in \Lambda}\}_{\gamma \in \omega}$  сходится (в  $(H_\alpha)^\Lambda$ ) к элементу  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  (из  $(H_\alpha)^\Lambda$ ).

В частности, если  $H$  — ПОЛВП, то  $(H_\alpha)^\Lambda$  — также ПОЛВП, а если  $H$  — пространство Фреше и при любом  $\alpha \in \Lambda$   $H_\alpha$  — его замкнутое подпространство, то  $(H_\alpha)^\Lambda$  — также пространство Фреше.

**4.5.3.** Предполагая, что  $H$  — ПОЛВП, введем по аналогии с предыдущим оператор представления

$$(L)^\Lambda : \forall Y = (y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in (H_\alpha)^\Lambda \rightarrow (L)^\Lambda(Y) = \sum_{\alpha \in \Lambda} y_\alpha \in H.$$

Так же, как выше, показываем, что оператор  $L^\Lambda$  действует непрерывно из  $(H_\alpha)^\Lambda$  в  $H$  и что  $(H_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  — АПСмПП в  $H$  тогда и только тогда, когда  $(L)^\Lambda$  — эпиморфизм  $(H_\alpha)^\Lambda$  на  $H$ .

Ограничимся здесь случаем, когда  $H$  — пространство Фреше и при всех  $\alpha \in \Lambda$   $H_\alpha$  — его замкнутые подпространства (т. е. также пространства Фреше в индуцированной из  $H$  топологии). Используя общую теорию двойственности в ЛВП, можно получить, как в разделе 4.1, критерии (в различной форме) того, что семейство  $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  является АПСмПП в пространстве Фреше  $H$ .

Не останавливаясь здесь более подробно на результатах подобного рода, заметим, что по аналогии с вышеизложенным можно дать определения свободных и продолжимых АПСмПП и получить для

таких семейств результаты, подобные изложенным выше для АПС и АПСм элементов, а также исследовать линейные преобразования АПСмПП.

#### 4.6. $A$ -представляющие последовательности подпространств

**4.6.1.** Возвращаясь к ситуации, рассматривавшейся в начале п. 3.1.1, предположим, что  $H$  — ЛВП над полем скаляров  $\Psi$  с топологией, определенной набором преднорм  $\mathcal{P} = \{p\}$ . Пусть для любого  $k \in \mathbb{N}$   $H_k$  — подпространство  $H$ , являющееся ПОЛВП в индуцированной из  $H$  топологии.

Образуем пространство  $A_1 := A_1(\{H_k\}_{k=1}^\infty)$  всех последовательностей элементов  $\{y_k\}_{k=1}^\infty$  таких, что при любом  $k \geq 1$   $y_k \in H_k$  и в  $H$  существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k$ . В пространстве  $A_1(\{H_k\}_{k=1}^\infty)$  можно ввести топологию набором преднорм  $q_p^1 = \sup_{n \geq 1} p(\sum_{k=1}^n y_k)$ . Если пространство  $H$  отделимо,  $Y = (y_k)_{k=1}^\infty \in A_1(\{H_k\}_{k=1}^\infty)$  и для любого  $p \in \mathcal{P}$   $q_p^1(Y) = 0$ , то  $p(y_1) = 0$ ,  $p \in \mathcal{P}$ , откуда  $y_1 = 0$ . Продолжая эти рассуждения, находим, что  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 0$  и т. д. Таким образом,  $Y = \{0\}$  и пространство  $A_1(\{H_k\}_{k=1}^\infty)$  отделимо. Используя такие же рассуждения, как раньше, показываем, что если ЛВП  $H$  полно, то пространство  $A_1 := A_1(\{H_k\}_{k=1}^\infty)$  также полно.

**4.6.2.** Пусть теперь  $A = A(\{H_k\}_{k=1}^\infty)$  — подпространство  $A_1$  с топологией  $\tau$  такой, что  $(A, \tau) \hookrightarrow A_1$ . Назовем последовательность  $(H_k)_{k=1}^\infty$   $A$ -представляющей системой подпространств ( $A$ -ПСПП) в  $H$ , если любой элемент  $x$  из  $H$  можно представить как сумму сходящегося в  $H$  ряда  $x = \sum_{k=1}^\infty v_k$ , в котором  $v_k \in H_k$  для любого  $k \geq 1$  и  $v = (v_k)_{k=1}^\infty \in A$ .

Если, как раньше, ввести оператор представления

$$L_A^{\{H_k\}} : \forall Y(y_k)_{k=1}^\infty \in A \rightarrow L_A^{\{H_k\}} Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k,$$

то легко показать, что  $L_A^{\{H_k\}}$  — линейный непрерывный оператор из  $A$  в  $H$ , причем  $\{H_k\}_{k=1}^\infty$  —  $A$ -ПСПП в  $H$  тогда и только тогда, когда  $L_A^{\{H_k\}}$  — эпиморфизм  $A$  на  $H$ .

Наиболее важными представителями  $A$ -ПСПП являются, пожалуй, представляющие системы подпространств (ПСПП), для кото-

рых  $A = A_1$ , и абсолютно представляющие системы подпространств (АПСПП); для последних  $A = A_2 = A_2(\{H_k\}_{k=1}^\infty)$ , где

$$A_2(\{H_k\}_{k=1}^\infty) = \left\{ W = (w_k)_{k=1}^\infty : w_k \in H_k \forall k \geq 1; \sum_{k=1}^\infty p(w_k) < \infty \forall p \in \mathcal{P} \right\}.$$

Очевидно, что  $A_2 \hookrightarrow A_1$ . Понятия ПС и АПС подпространств были введены в работах автора [49, 51].

Как и выше, можно рассмотреть линейные преобразования А-ПСПП и получить аналоги теорем 3.1–3.5, а также ввести свободные и продолжимые А-ПСПП и исследовать некоторые свойства таких систем.

При изучении свободных и продолжимых А-ПСПП весьма полезным оказывается тот факт, что если  $\{H_k\}_{k=1}^\infty$  — А-ПСПП в ПОЛВП  $H_{(1)}$  и  $T$  — эпиморфизм  $H_{(1)}$  на ПОЛВП  $H_{(2)}$ , то  $\{TH_k\}_{k=1}^\infty$  — АПСПП в  $H_{(2)}$ . Этот результат можно применить к различным более конкретным ситуациям, например, к случаю, когда  $H_{(j)} = E(Q_j)$ ,  $j = 1, 2$ , — некоторое ПОЛВП функций, определенных на подмножестве  $Q_j$  из  $\mathbb{C}^p$  (или  $\mathbb{R}^p$ ),  $p \geq 1$ , причем  $Q_2 \subseteq Q_1$  и  $E(Q_1) \hookrightarrow E(Q_2)$ . Как правило (например, в [116]), до сих пор рассматривались случаи, когда при любом  $k \geq 1$   $H_k$  — линейная оболочка (span) множества, состоящего из собственного элемента  $x_k$  некоторого линейного непрерывного (из  $H_k$  в  $H_k$  и из  $H$  в  $H$ ) оператора  $T$ , отвечающего собственному значению  $\lambda_k$  этого оператора  $T$ , и присоединенных к нему элементов  $x_k^{(s)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, p_k - 1$ ,  $p_k \geq 1$ :

$$\begin{aligned} Tx_k &= \lambda_k x_k; \\ Tx_k^{(1)} &= \lambda_k x_k^{(1)} + \mu_{k,1} x_k; \dots Tx_k^{(p_k-1)} = \lambda_k x_k^{(p_k-1)} + \mu_{k,p_k-1} x_k^{(p_k-2)} \\ &(\mu_{k,0} = 0). \end{aligned}$$

**4.6.3.** Не останавливаясь на общей ситуации (ввиду ограничений на объем книги и большой аналогии с изложенными выше результатами), рассмотрим ПСПП и АПСПП экспонент и квазиэкспонент в конкретных функциональных пространствах, уделив основное внимание результатам для пространства  $A(G)$ , полученным в работе [51]. Ограничимся до конца данного раздела ради простоты изложения (как в [49, 51]) одномерной ситуацией, когда  $\Lambda = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

и  $\omega_k = (1, 2, \dots, k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $H = A(G)$  и  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}$ .

При доказательстве излагаемых ниже результатов используются два вспомогательных утверждения из статьи [51].

**Лемма 4.5** [51, лемма 1]. Пусть функция  $\gamma(r)$  непрерывна в промежутке  $[a, +\infty)$ ,  $a > 1$ , и такова, что

$$\gamma(r) \geq \frac{r}{\ln 2}, \quad \gamma(r) = (\bar{o})(r) \quad \text{при } r \rightarrow +\infty.$$

Положим

$$\nu(r) = \sup_{u \geq r} \frac{\gamma(u)}{u}, \quad a < r < +\infty; \quad \nu(r) = \nu(a), \quad 0 \leq r \leq a;$$

$$\mu(r) = 2 \int_0^r \frac{du}{u} \int_0^u \nu(t^2) dt; \quad s_n = [\mu(n)] \quad ([\mu(x)] - \text{«целая часть» } x);$$

$$\tilde{\gamma}(r) = \int_0^{\sqrt{2}} \mu(u) \ln \frac{r}{u^2} du;$$

$$U_{Q,c}^n = \{r : n^2 - c(n)^{-2Q} < r < n^2 + c(n)^{-2Q}\}, \quad c > 0, \quad Q > 1;$$

$$U_{Q,c} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{Q,c}^n; \quad L_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{n^2} \right)^{s_n} \right].$$

Тогда:

$$1. L_1(\lambda) \in [1, 0];$$

$$2. \ln |L_1(re^{i\phi})| = \tilde{\gamma}(r) + (\bar{o})(\tilde{\gamma}(r)) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \text{ и } r \notin U_{Q,c} \quad (Q > 1 \text{ и } c > 0 \text{ произвольно зафиксированы}).$$

При этом

$$\forall r \geq a \quad \tilde{\gamma}(r) \geq \gamma(r) \quad \text{и} \quad \tilde{\gamma}(r) = (\bar{o})(r) \quad \text{при } r \rightarrow +\infty.$$

**Лемма 4.6** [51, лемма 2]. Пусть  $\Lambda = (\lambda_k : k = 1, 2, \dots)$  — множество точек из  $\mathbb{C}$  такое, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|} = 0$  и

$$\exists c > 0, \exists Q > 1 : \quad \Lambda \cap U_{Q,c} = \emptyset.$$

Пусть, далее,  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  — какая-либо последовательность комплексных чисел, для которой  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln |d_n| \leq 0$ . Тогда можно так

выбрать функцию  $\gamma(r)$  со свойствами, указанными в предыдущей лемме, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|d_n|}{|L_1(\lambda_n)|} < \infty$ , где  $L_1(\lambda)$  — функция из леммы 4.5, построенная по  $\gamma(r)$ .

Доказательство леммы 4.6 и комментарии к леммам 4.5 и 4.6 можно найти на с. 742–744 работы [51].

**Теорема 4.27.** Пусть  $L(\lambda)$  — функция экспоненциального типа с индикатором  $h(\phi) > 0$  и нулями  $\lambda_n$  кратности  $p_n$ , имеющая на некоторой системе окружностей  $|\lambda| = r_n \uparrow \infty$  такую оценку снизу: для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N = N(\varepsilon)$  такой, что

$$|L(\lambda)| > \exp[h(\arg \lambda) - \varepsilon]|\lambda|, \quad |\lambda| = r_n, \quad n > N. \quad (4.33)$$

Пусть, далее, для любого  $n \geq 1$

$$H_n = \text{span} \{z^s e^{\lambda_k z} : s = 0, 1, \dots, p_k - 1, \quad r_n \leq |\lambda_k| < r_{n+1}\}$$

(полагаем  $r_1 = 0$ ). Тогда  $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$  — ПСПП в  $A(G)$ , где  $G$  — ограниченная выпуклая область с опорной функцией  $h(-\phi)$ .

⟨ Можно всегда считать, что все множества  $H_n$  непусты. Действительно, если, например,  $H_{n_0} = \emptyset$  при некотором  $n_0 \geq 1$ , то из последовательности  $(r_m)_{m=1}^{\infty}$  удалим  $r_{n_0+1}$  и положим для всех  $k \leq n_0 - 1$   $\hat{H}_k = H_k$  и  $\hat{H}_k = H_{k+1}$  при  $k \geq n_0 + 1$ . Наконец, положим  $\hat{H}_{n_0} = \{r^s e^{\lambda_k z} : s = 0, 1, \dots, p_k - 1; \quad r_{n_0} \leq |\lambda_k| < r_{n_0+2}\}$ .

Новая система подпространств  $(\hat{H}_m)_{m=1}^{\infty}$  получена из исходной удалением пустого множества  $H_{n_0}$  и потому она является ПСПП или АПСПП в  $A(G)$  одновременно с исходной.

Корни  $\lambda_k$  функции  $L(\lambda)$  пронумеруем в порядке неубывания их модуля. В этом случае  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty$  и  $r_{k+1} > |\lambda_k| > \alpha k$  при всех  $k \geq k_0$  и некотором  $\alpha > 0$ . Выберем числа  $\varepsilon_k$  так, чтобы  $\varepsilon_k \downarrow 0$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\varepsilon_k r_k} < +\infty$ . Положим

$$U_k := \{r : r_k - \exp(-\varepsilon_k r_k) \leq r \leq r_k + \exp(-\varepsilon_k r_k)\}, \quad k = 1, 2, \dots;$$

и при  $Q > 1$  и тех же  $k \geq 1$   $U_{Q,1}^k := \{r : k^2 - k^{-2Q} < r < k^2 + k^{-2Q}\}$ .

Наконец, пусть  $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{Q,1}^k$ ;  $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ . Как легко убедиться,  $U$  и  $V$  — подмножества  $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$  нулевой относительной меры. Выберем теперь АПС экспонент  $(e^{\tau_m z})_{m=1}^{\infty}$  в  $A(G)$  так, чтобы  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\tau_k} = 0$  и чтобы  $\Omega \cap (V \cup U) = \emptyset$ , где  $\Omega = \{|\tau_m| : m = 1, 2, \dots\}$ .

Такую систему можно выбрать, например, методом А. Ф. Леонтьева [100], т. е. построить целую функцию экспоненциального типа вполне регулярного роста (определение целой функции вполне регулярного роста можно найти, например, в главе III монографии [98] или на с. 99 книги [100]) с индикатором  $h(\phi)$  и простыми нулями  $\{\tau_s\}_{s=1}^\infty$  такую, что  $\Omega \cap (V \cup U) = \emptyset$  и  $\{\tau_k : k = 1, 2, \dots\}$  — регулярное множество (определение последнего см., например, в [100, с. 30] или в [98, с. 126]).

Если теперь  $f$  — любая функция из  $A(G)$ , то

$$\exists \{d_m\}_{m=1}^\infty : f(z) = \sum_{m=1}^\infty d_m e^{\tau_m z},$$

причем ряд справа сходится абсолютно в  $A(G)$ . По теореме 2.2

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\tau_m|} \ln |d_m| + h(\arg \tau_m) \right] \leq 0.$$

На втором этапе доказательства постараемся разложить любую функцию вида  $e^{\lambda z}$ , где  $\lambda \in \mathbb{C}$ , в сходящийся в  $A(G)$  ряд  $\sum_{n=1}^\infty y_n$  такой, что  $y_n \in H_n$  при всех  $n \geq 1$ .

Пусть  $\alpha = \inf_\theta h(\theta)$ ,  $q \in (0, 1)$ ,  $qG := \{t = qu, u \in G\}$ . Рассмотрим интеграл  $M_n = M_n(z, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=r_n} \frac{e^{uz} du}{L(u)(u-\lambda)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Если  $z \in qG$ , а  $|\lambda| \notin U$ , то для любого  $\varepsilon \in \left(0, \frac{(1-q)}{3\alpha}\right)$  существует номер  $N$  такой, что при всех  $n > N$

$$|M_n| \leq r_n \sup_{|u|=r_n} \exp [qh(\arg u) - h(\arg u) + \varepsilon + \varepsilon_n] |u| < e^{-\delta |r_n|},$$

где  $\delta = \frac{(1-q)}{3\alpha}$ . Отсюда

$$\sup \{|M_{n+1}(z, \lambda) - M_n(z, \lambda)| : z \in qG, \lambda \in CU\} < 2e^{-\delta r_n} \quad \forall n > N.$$

Если  $r_N > |\lambda|$ ,  $L(\lambda) \neq 0$  и  $n > N$ , то согласно теории вычетов

$$M_n = \frac{e^{\lambda z}}{L(\lambda)} - \sum_{k=1}^{\phi(n)} e^{\lambda_k z} \sum_{j=1}^{p_k} \frac{c_{j,k} z^{p_k-j}}{(\lambda_k - \lambda)^j}, \quad \phi(n) := \max\{k : |\lambda_k| < r_n\}.$$

Положим  $\Lambda_0 = \{|\lambda_k| : k = 1, 2, \dots\}$ ,  $B_0 = \Lambda_0 \cap U$ . Если  $z \in G$  и  $|\lambda| \notin B_0$ , то

$$e^{\lambda z} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=\phi(n)+1}^{\phi(n+1)} L(\lambda) e^{\lambda_k z} \sum_{j=1}^{p_k} \frac{c_{j,k} z^{p_k-j}}{(\lambda_k - \lambda)^j} = L(\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(z, \lambda). \quad (4.34)$$

При этом для любого  $q \in (0, 1)$  существуют номер  $N = N(q)$  и число  $\delta = \delta(q) > 0$  такие, что при всех  $n > N$ , всех  $z \in qG$ ,  $|\lambda| \notin B_0$

$$|\mu_n(z, \lambda)| \leq 2e^{-\delta r_n}; \quad \left| e^{\lambda z} - L(\lambda) \sum_{m=1}^n \mu_m(z, \lambda) \right| \leq |L(\lambda)| e^{-\delta r_n}; \quad (4.35)$$

$$\left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \mu_m(z, \lambda) \right| \leq e^{-\delta r_n}. \quad (4.36)$$

Возвращаясь к разложению функции  $f$  по системе  $(e^{\tau_m z})_{m=1}^{\infty}$ , положим  $\alpha_m := |d_m| [ |L(\tau_m)| + \exp h(\arg \tau_m) \cdot |\tau_m| ]$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Как легко проверить,  $\varlimsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{|\tau_m|} \ln \alpha_m \leq 0$ .

С помощью леммы 4.6 можно построить функцию

$$R(\lambda) := \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{n^2} \right)^{s_n} \right]$$

так, чтобы  $R(\lambda) \in [1, 0]$  и  $\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{\alpha_m}{R(\tau_m)} \right| < \infty$ .

Положим  $f_1(z) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m e^{\tau_m z}}{R(\tau_m)}$ . Так как

$$\left| \frac{d_m}{R(\tau_m)} \right| \leq \frac{|\alpha_m|}{|R(\tau_m)|} e^{-h(\arg \tau_m) |\tau_m|} \leq D e^{-h(\arg \tau_m) |\tau_m|},$$

то

$$\varlimsup_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\tau_m|} \ln \left| \frac{d_m}{R(\tau_m)} \right| + h(\arg \tau_m) \right] \leq 0$$

и  $f_1(z) \in A(G)$ . В силу (4.35) имеем:

$$e^{\tau_m z} = L(\tau_m) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{n,m}(z), \quad \mu_{n,m}(z) := \mu_n(z, \lambda_m) \quad \forall n, m \geq 1.$$



Отсюда при любых  $z \in G$ ,  $n \geq 1$  и  $N > n$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m L(\tau_m)}{R(\tau_m)} \left[ \sum_{n=1}^N \mu_{n,m}(z) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu_{n,m}(z) \right] = \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=\phi(n)+1}^{\phi(n+1)} e^{\lambda_k z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m L(\tau_m)}{R(\tau_m)} \cdot \sum_{j=1}^{p_k} \frac{c_{j,k}^{(m)} z^{p_k-j}}{(\lambda_k - \tau_m)^j} + R_N(z) = \\ &= \sum_{n=1}^N y_n(z) + R_N(z), \end{aligned}$$

где  $y_n \in H_n$  при  $n \geq 1$  и в силу оценки (4.35)

$$|R_N(z)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{d_m L(\tau_m)}{R(\tau_m)} \right| e^{-\delta r_N} = b \cdot e^{-\delta r_N} \quad \forall q \in (0, 1), \quad \forall z \in qG.$$

Итак,  $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(z)$ , ряд справа сходится в  $A(G)$  и  $y_n \in H_n$  для любого  $n \geq 1$ .

Пусть теперь  $R(D)$  — оператор свертки (линейный дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами) с символом  $R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k \lambda^k$ :  $(R(D)y)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k y^{(k)}(z)$ . Тогда

$$f(z) = (R(D)f_1)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (R(D)y_n)(z) \quad \forall z \in G.$$

Так как  $R(\lambda) \in [1, 0]$ , то оператор  $R(D)$  непрерывен в  $A(G)$  (см., например, [47]) и потому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (R(D)y_n)(z)$  сходится в  $A(G)$ . При этом

$$R(D)y_n = \sum_{k=\phi(n)+1}^{\phi(n+1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m L(\tau_m)}{R(\tau_m)} \cdot \sum_{j=1}^{p_k} \frac{c_{j,k}^{(m)} R(e^{\lambda_k z} z^{p_k-j})}{(\lambda_k - \tau_m)^j} = w_n \quad \forall n \geq 1,$$

где  $w_n \in H_n$ . Тем самым теорема 4.27 доказана.  $\triangleright$

Заметим, что в последней формуле для  $R(D)y_n$  исправлена погрешность в соответствующем представлении  $R(D)y_n$  в [51] (с. 747, окончание § 3).

**4.6.4.** Аналогичный результат можно установить и для АПСПП (см. [51]).

**Теорема 4.28.** Пусть справедливы все предположения теоремы 4.27 и, кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{r_n} = 0. \quad (4.37)$$

Тогда  $(H_n)_{n=1}^\infty$  — АПСПП в  $A(G)$ .

Для доказательства этой теоремы мы вначале дословно повторяем доказательство теоремы 4.27 до тех пор, пока не получим сходящееся в  $A(G)$  представление  $f_1(z) = \sum_{n=1}^\infty y_n(z)$ , где  $n \geq 1$ . Покажем, что при дополнительном условии (4.37) ряд справа в этом представлении сходится абсолютно. Имеем при всех  $z \in G$  и  $n \geq 1$

$$y_n(z) = \sum_{m=1}^\infty \mu_{n,m}(z) \frac{d_m L(\tau_m)}{R(\tau_m)}.$$

На основании первой из оценок (4.35) получаем, что для любого  $q \in (0, 1)$  существуют  $\delta > 0$ ,  $N < +\infty$  и  $\gamma \in (0, +\infty)$  такие, что

$$\sup_{z \in qG} |y_n(z)| \leq 2e^{-\delta r_n} \sum_{m=1}^\infty \left| \frac{d_m L(\tau_m)}{R(\tau_m)} \right| \leq \gamma e^{-\delta r_n} \quad \forall n > N,$$

и потому ряд  $\sum_{n=1}^\infty y_n(z)$  сходится абсолютно в  $A(G)$ . В силу непрерывности оператора свертки  $R(D)$  в  $A(G)$  замечаем, что ряд  $\sum_{k=1}^\infty (R(D)y_k)(z)$  также сходится абсолютно в  $A(G)$ , причем его сумма в  $G$  равна  $(R(D)f_1)(z) = f(z)$  и  $(R(D)y_n)(z) = w_n(z) \in H_n$  при любых  $n \geq 1$  и  $z \in G$  (это было установлено в конце доказательства теоремы 4.27).

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Предположим, что выполнены все предположения теоремы 4.28. Из последовательности  $(r_n)_{n=1}^\infty$  можно всегда извлечь достаточно редкую подпоследовательность  $(\hat{r}_k)_{k=1}^\infty = (r_{n_k})_{k=1}^\infty$  так, чтобы  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\hat{r}_k} = 0$ . Так как на окружностях  $|z| = r_n$  по предположению теоремы 4.27 справедлива оценка (4.33), то по теореме 4.28 в  $A(G)$  имеется АПСПП  $(\hat{H}_m)_{m=1}^\infty$ , где  $\hat{H}_k = \text{span} \{z^s e^{\lambda_j z} : s = 0, 1, \dots, p_j - 1; \hat{r}_k \leq |\lambda_m| < \hat{r}_{k+1}\}$ ,  $k \geq 1$ .

Таким образом, в предположениях теоремы 4.27 в  $A(G)$  всегда найдется АПСПП вида  $(\hat{H}_m)_{m=1}^\infty$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Условие  $h(\phi) > 0$  в теоремах 4.27 и 4.28 можно заменить более слабым требованием, чтобы сопряженная диаграмма функции  $L(\lambda)$  содержала хотя бы одну внутреннюю точку. Такая,

более общая, ситуация сводится к случаю, когда  $h(\phi) > 0$ , переходом от функции  $L(\lambda)$  к  $L_0(\lambda) := e^{\beta\lambda}L(\lambda)$ . Этот переход не изменяет пространств  $H_n$ , а индикатор новой функции  $L_0(\lambda)$  при подходящем выборе параметра  $\beta$  уже положителен. Отметим, что критерий наличия у сопряженной диаграммы целой функции экспоненциального типа хотя бы одной внутренней точки указан в [100, с. 97].

**4.6.5.** Приведем теперь общий пример функции  $L(\lambda)$ , для которой имеется оценка снизу (4.33) на окружностях  $|z| = r_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

**Теорема 4.29.** Пусть  $L(\lambda)$  — целая функция экспоненциального типа вполне регулярного роста такая, что внутренность  $G$  ее сопряженной диаграммы непуста. Тогда найдется последовательность  $(r_n)_{n=1}^\infty$  со следующими свойствами:

- 1)  $r_n \uparrow \infty$ ,  $r_1 = 0$ ,  $\frac{r_{n+1}}{r_n} \rightarrow 1$ ;
- 2) если  $H_n$  — подпространства  $A(G)$  из теоремы 4.27, то  $(H_n)_{n=1}^\infty$  — АПСПП в  $A(G)$ .

◁ В [100, с. 41] установлено существование последовательности окружностей  $|z| = \rho_n$ , где  $\rho_n \uparrow \infty$ ,  $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \rightarrow 1$  и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : |L(\lambda)| \geq \exp[h(\arg \lambda) - \varepsilon]|\lambda|, \quad |\lambda| = \rho_n, \quad n > N.$$

Если при этом  $\frac{\ln n}{\rho_n} \rightarrow 0$ , то теорема доказана. Если же последнее соотношение не выполняется, то из последовательности  $(\rho_n)_{n=1}^\infty$  можно извлечь подпоследовательность  $(r_k)_{k=1}^\infty = (\rho_{n_k})_{k=1}^\infty$  такую, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} = 1$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{r_k} = 0$  (довольно простой способ подобного «прореживания» последовательности  $(\rho_n)_{n=1}^\infty$  приведен на с. 749 статьи [51]). После этого остается лишь сослаться на теорему 4.28. ▷

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Теорема 4.28, изложенная с полным доказательством в статье [51], была впервые приведена автором в его докладе на Международной конференции по теории приближения функций в Киеве в 1983 г. и анонсирована в [49]. Пользуясь случаем, отметим, что в тезисах [49, с. 101] допущена одна затрудняющая чтение описка. Именно, в формуле для «координатных функций»  $y_n$  из  $H_n$  в представлении любой функции  $f$  из  $A(G)$  в виде ряда  $f = \sum_{n=1}^\infty y_n$ , абсолютно сходящегося в  $A(G)$ , верхний предел внутреннего суммирования (по  $m$ ) должен равняться  $p_k - 1$ , а не  $\infty$ , как в тексте из [49].

В связи с теоремой 4.29 напомним, что согласно [45], если  $L(\lambda)$  — целая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) с индикатором

$h(\phi)$  и простыми нулями  $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ , а  $G$  — (непустая) выпуклая область с опорной функцией  $h(-\phi)$ , то  $(e^{\lambda_k z})_{k=1}^\infty$  — АПС в  $A(G)$  тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- а)  $L(\lambda)$  — функция вполне регулярного роста (при показателе 1);
- б) в классе  $[1, 0]$  найдется отличная от тождественного нуля функция  $d(\lambda)$  такая, что  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{d(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \right| + h(\arg \lambda_n) \right] \leq 0$ .

Заметим, что эти два условия выполнены, в частности, когда множество всех нулей  $L(\lambda)$  регулярно. В то же время, имеются ц.ф.э.т. вполне регулярного роста (при показателе 1) и с простыми нулями  $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ , для которых  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{d(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \right| = +\infty$ , какова бы ни была функция  $d(\lambda)$  из класса  $[1, 0]$ , отличная от тождественного нуля. Довольно простой пример подобной функции  $L(\lambda)$  был указан А. Ф. Леонтьевым (см. по этому поводу [45, с. 1085]). Для таких функций  $L(\lambda)$  с простыми нулями  $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$   $(e^{\lambda_k z})_{k=1}^\infty$  — не АПС в  $A(G)$ . В то же время по теореме 4.28  $(H_n)_{n=1}^\infty$  — ПСПП в  $A(G)$  и  $(\hat{H}_n)_{n=1}^\infty$  — АПСПП в  $A(G)$ . Здесь при любом  $n \geq 1$

$$H_n = \text{span} (e^{\lambda_k z} : r_n \leq |\lambda_k| < r_{n+1});$$

$$\hat{H}_n = \text{span} (e^{\lambda_k z} : \hat{r}_n \leq |\lambda_k| < \hat{r}_{n+1}),$$

$$r_n \uparrow \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{r}_{n+1}}{\hat{r}_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\hat{r}_n} = 0.$$

Таким образом, если  $L(\lambda)$  — произвольная ц.ф.э.т. вполне регулярного роста при показателе 1 с простыми нулями  $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$  и индикатором  $h(\phi)$ , а  $G$  — выпуклая область с опорной функцией  $h(-\phi)$ , то не всегда любую функцию  $f$  из  $A(G)$  можно представить как сумму абсолютно сходящегося в  $A(G)$  ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{\lambda_k z}. \quad (4.38)$$

В то же время, при сделанных предположениях относительно ц.ф.э.т.  $L(\lambda)$  с простыми нулями  $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$  каждой функции  $f$  из  $A(G)$  можно поставить в соответствие ряд вида (4.38), определенная подпоследовательность  $(S_{m_l})_{l=1}^\infty$  частных сумм которого абсолютно сходится к  $f$  в  $A(G)$ , а номера  $(m_l)_{l=1}^\infty$  не зависят от  $f$  и определяются только функцией  $L(\lambda)$ .

Приведенные выше доказательства теорем 4.27–4.29 позволяют эффективно строить разложения любой функции  $f$  из  $A(G)$  в сходящийся или абсолютно сходящийся ряд вида  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ , в котором  $y_n \in H_n$  для любого  $n \geq 1$  или, соответственно,  $y_n \in \hat{H}_n$ . Но описанный выше способ определения функций  $y_n$  довольно сложен. В случае, когда  $f \in A(\bar{G}) = \varinjlim_n A(G_n)$ , где при всех  $n \geq 1$   $G_n$  — выпуклая область такая, что  $G_n \supset G_{n+1} \supset G = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$ , А. Ф. Леонтьев нашел (раньше, чем вышеприведенные результаты были получены автором книги) представление  $f$  в виде ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  с помощью введенной им интерполирующей функции [100, с. 300–307].

**4.6.6.** В обзорной статье [47] было введено понятие представительного подпространства для ПС и АПС элементов в ПОЛВП  $H$ . Действуя по аналогии и считая, что  $(H_n)_{n=1}^{\infty}$  — произвольно зафиксированная последовательность подпространств  $H$  с индуцированной из  $H$  топологией, назовем подпространство  $H_0$  пространства  $H$  (также с индуцированной из  $H$  топологией)  $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ -представительным или  $\{H_n\}$ -абсолютно представительным (коротко  $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ -ППП или АППП) для  $H$ , если из того, что  $\{H_n \cap H_0\}_{n=1}^{\infty}$  — ПСПП или АПСПП в  $H_0$ , следует, что  $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$  — ПСПП (соответственно,  $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$  — АПСПП) в  $H$ . Далее,  $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ -представительное подпространство  $H_0$  для  $H$  называется  $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ -эффективно представителем подпространством ( $\{H_n\}$ -ЭППП) для  $H$ , если из того, что известен конструктивный способ определения «координатных» функций  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  хотя бы в одном представлении произвольного элемента  $x$  из  $H_0$  в виде сходящегося в  $H$  ряда  $x = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ , в котором  $y_n \in H_n$ ,  $n \geq 1$ , следует, что можно конструктивно определить функции  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  по крайней мере в одном подобном представлении любого элемента  $v$  из  $H$ . Аналогично определяется  $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ -эффективно абсолютно представительное подпространство ( $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ -ЭАППП) для  $H$ .

Учитывая, что в общей постановке задача описания всех  $\{H_n\}$ -представительных и абсолютно представительных подпространств (также как  $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ -ЭППП и  $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ -ЭАППП) для произвольного ПОЛВП  $H$  вряд ли разрешима в ближайшем будущем, ограничимся изложением некоторых результатов в этом направлении для пространства  $H = A(G)$ , где  $G$  — ограниченная непустая выпуклая область с опорной функцией  $h(-\phi)$ . Докажем вначале простую лемму из [51].

**Лемма 4.7.** Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{C}$ ,  $H_0$  — некоторое замкнутое подпространство  $A(G)$ , инвариантное относительно дифференцирования. Тогда  $H_0$  инвариантно относительно любого оператора свертки  $M$  с символом (характеристической функцией) из класса  $[1, 0]$ .

◁ Любой оператор  $M$  свертки с символом  $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  из  $[1, 0]$  имеет вид  $(My)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$  при любых  $z \in G$  и  $y \in A(G)$  и, как уже отмечалось, непрерывен в  $A(G)$ . Следовательно, для любой функции  $y(z)$  из  $A(G)$  ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$  сходится по топологии  $A(G)$ . Так как при всех  $k \geq 0$   $a_k y^{(k)}(z) \in H_0$  и  $H_0$  — замкнутое подпространство  $H$  (в индуцированной из  $A(G)$  топологии), то  $My \in H_0$  для любого  $y \in H_0$ . ▷

Пусть  $D[1, 0]$  — (векторное) пространство всех операторов свертки с символом из  $[1, 0]$ . Назовем подпространство  $E$  пространства  $A(G)$  сверточно полным в  $A(G)$ , если сюръективен любой оператор  $T$  из  $D[1, 0] \times E$  в  $A(G)$ :

$$\forall f \in A(G) \exists y \in E, \exists M \in D[1, 0] : f(z) = (My)(z) \quad \forall z \in G,$$

где  $(My)(z) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{(k)}(z)$ .

**Теорема 4.30.** Пусть  $H_0$  — сверточно полное подпространство  $A(G)$ . Тогда  $H_0 = \{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ -ППП (и  $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ -АППП) подпространство  $A(G)$ , если при любом  $n \geq 1$   $H_n$  — замкнутое подпространство  $A(G)$ , инвариантное относительно дифференцирования.

◁ Пусть подпространства  $H_0$  и  $H_n$ ,  $n \geq 1$ , обладают свойствами, указанными в теореме. Тогда

$$\forall y \in A(G) \exists M(D) \in D[1, 0], \exists g \in H_0 : y(z) = (M(D)g)(z) \quad \forall z \in G.$$

Если  $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$  — ПСПП в  $H_0$ , то найдется сходящийся в  $A(G)$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ , в котором  $y_n \in H_n$  при  $n \geq 1$  и сумма которого равна  $g(z)$ . Отсюда

$$y(z) = \left( M(D) \sum_{n=1}^{\infty} y_n \right)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} M(D)y_n(z) \quad \forall z \in G.$$

По лемме 4.7  $W_n = M(D)y_n \in H_n$  при всех  $n \geq 1$ , а из непрерывности оператора  $M(D)$  в  $A(G)$  следует, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} W_n(z)$  сходится в топологии  $A(G)$ . При этом его сумма равна  $y(z)$ . Следовательно,

$\{H_n\}_{n=1}^\infty$  — ПСПП в  $A(G)$ . Точно так же доказывается, что  $H_0$  — АППП пространство  $A(G)$ .  $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в предположениях теоремы 4.30 для любой функции  $g$  из  $H_0$  мы умеем эффективно определять «координатные» функции  $y_n \in H_n$  из ее представления  $g(z) = \sum_{n=1}^\infty y_n(z)$  в виде сходящегося (или абсолютно сходящегося) в  $A(G)$  ряда и если для любого  $y \in A(G)$  конструктивно определяются оператор  $M(D)$  из  $E$  и функция  $g$  из  $H_0$  такие, что

$$(M(D)g)(z) = y(z) \quad \forall z \in G,$$

то  $H_0$  —  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ -ЭППП  $A(G)$  (соответственно, ЭАППП  $A(G)$ ).

**4.6.7.** Приведем примеры сверточно полных подпространств  $A(G)$ .

1. В §1 главы V монографии [100] А. Ф. Леонтьев доказал, что

$$\forall y \in A(G) \quad \exists g \in AC(G), \exists a(z) \in [1, 0] : (a(D)g)(z) = y(z) \quad \forall z \in G.$$

Здесь  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$  и, как выше,  $AC(G)$  — пространство всех функций, аналитических в  $G$  и непрерывных на  $\bar{G}$ . При этом, как показано в [100], функция  $a(z)$  зависит, вообще говоря, от функции  $y(z)$  и ее нельзя выбрать одной и той же для всех  $y(z)$  из  $A(G)$ .

Таким образом,  $H_0 = AC(G)$  — сверточно полное подпространство  $A(G)$  и к нему применима теорема 4.30.

2. Пусть теперь  $A^\infty(\bar{G})$  — пространство всех функций, аналитических в  $G$  и бесконечно дифференцируемых на  $\bar{G}$ . Если  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$ , то, как фактически установлено Ю. И. Мельником в [117],  $A^\infty(\bar{G})$  — сверточно полное подпространство  $A(G)$  (соответствующее доказательство см. в [117] или [47, с. 103–104]).

Разумеется, далеко не все подпространства  $A(G)$  сверточно полны. Например, если  $H_0$  — собственное подпространство  $A(G)$ , инвариантное относительно любого линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами и символом из  $[1, 0]$ , то, очевидно,  $H_0$  не может быть сверточно полным в  $H$ .

Пожалуй, наиболее важным таким подпространством  $A(G)$  является пространство  $A(\bar{G})$  всех функций, локально-аналитических на множестве  $\bar{G}$  (т. е.  $A(\bar{G}) = \{y \in A(G) \mid \exists G_1 = G_1(y) \supset \bar{G} : y \in A(G_1)\}$ ).

Таким образом, к пространству  $H_0 = A(\bar{G})$  теорема 4.30 уже не применима.

Используя иной подход, С. Н. Мелихов доказал [112, 116], что если  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ , и  $(H_n)_{n=1}^\infty$  — любая последовательность замкнутых подпространств  $A(G)$ , инвариантных относительно каждого частного дифференцирования  $\frac{\partial}{\partial z_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , то  $A(\bar{G}) = \{H_n\}_{n=1}^\infty$ -ППП и  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ -АППП пространства  $A(G)$ . Он же довольно детально исследовал свойства  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ -представительных подпространств пространства  $A(G)$  (см. по этому поводу [116, гл. I, п. 1.5]).

Если на подпространства  $H_n$  из  $A(G)$ , инвариантные относительно дифференцирования, наложить некоторые дополнительные ограничения, то можно указать достаточно «узкие» подпространства  $A(G)$ , являющиеся  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ -ППП или  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ -АППП пространства  $A(G)$ .

Например, если при любом  $k \geq 1$   $\lambda_k \in \mathbb{C}$ ;  $|\lambda_k| \leq |\lambda_{k+1}| \rightarrow \infty$  и

$$H_n = \text{span}\{e^{\lambda_k z} : r_n \leq |\lambda_k| < r_{n+1}\} \quad \forall n \geq 1,$$

где  $0 < r_n \uparrow +\infty$ , то, как показано в лемме 1 из обзора [47, гл. III, § 1, п. 8], если числа  $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$  попарно различны,  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$  с опорной функцией  $h(-\phi)$ , то  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ -ППП и  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ -АППП будет любое подпространство  $A(G)$ , содержащее хотя бы одну функцию вида  $P(z)e^{\lambda z}$ , где  $\lambda$  — какое-либо комплексное число, а  $P(z)$  — отличный от тождественного нуля многочлен степени  $m \geq 0$ , когда  $\lambda \neq \lambda_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и степени  $m \geq 1$ , когда  $\lambda = \lambda_{n_0}$ ,  $n_0 \geq 1$ .

**4.6.8.** До сих пор при рассмотрении конкретных функциональных пространств брались пространства аналитических и (реже) бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций. Пространство, которым мы сейчас займемся, носит несколько иной характер. Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{C}$ , которую для простоты изложения будем считать в этом разделе односвязной, и пусть  $Hr(G)$  — пространство всех (вещественнозначных) гармонических в  $G$  функций с топологией равномерной сходимости на компактах в  $G$  (как известно, в этой топологии  $Hr(G)$  — пространство Фреше). Если  $u(x, y)$  — любая функция из  $Hr(G)$  и  $v(x, y)$  — сопряженная с  $u(x, y)$  в  $G$  гармоническая функция, то будем называть пару  $u(x, y), v(x, y)$  сопряженной гармонической парой в  $G$ . Из общего курса теории функций комплексного



переменного известно, что если  $u \in Hr(G)$ , то сопряженной с  $u(x, y)$  в  $G$  будет функция  $v^0$ , определяемая по формуле

$$v^0(x, y) := \int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)} \left( -\frac{\partial u(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} d\tilde{x} + \frac{\partial u(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} d\tilde{y} \right), \quad (4.39)$$

в которой фигурирует криволинейный интеграл второго рода по любой лежащей в  $G$  спрямляемой кривой, соединяющей произвольно зафиксированную точку  $(x_1, y_1)$  в  $G$  и текущую точку  $(x, y) \in G$ . При этом значение  $v^0(x, y)$  не зависит от кривой  $\Gamma$ , соединяющей эти две точки. Как известно, если область  $G$  односвязна, то функция  $v^0(x, y)$  определена корректно, и  $u(x, y), v^0(x, y)$  — сопряженная гармоническая пара в  $G$ . В дальнейшем функция  $v^0(x, y)$ , определенная указанным образом, называется канонической сопряженной с  $u$  функцией. Заметим еще, что  $Hr(G)$  — векторное пространство над полем скаляров  $\Phi = \mathbb{R}$ .

Пусть теперь  $\{u_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$  — АПС в  $Hr(G)$ . Зафиксируем какую-либо функцию  $f(z)$  из  $A(G)$  и положим  $u(x, y) = \Re f(z)$ . Как хорошо известно,  $u(x, y) \in Hr(G)$  и, следовательно, найдется абсолютно сходящийся в  $Hr(G)$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x, y)$ , у которого  $a_k \in \mathbb{R}$  при всех  $k \geq 1$ , а сумма (в  $G$ ) равна  $u(x, y)$ . По любому номеру  $k \geq 1$  построим, пользуясь формулой (4.39), каноническую сопряженную функцию  $v_k^0$  для функции  $u_k$  (так, что  $u_k, v_k^0$  — сопряженная гармоническая пара в  $G$ ) и образуем ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k^0(x, y)$ . Пользуясь все той же формулой (4.39), находим, что этот ряд сходится абсолютно в  $Hr(G)$ , причем его сумма  $w(x, y)$  является канонической сопряженной функцией для  $u$ :  $w = v^0$ .

Если  $v(x, y) := \Im f(z)$ , то, как известно из курса теории функций комплексного переменного,  $v(x, y) = v^0(x, y) + d_f$ , где  $d_f \in \mathbb{R}$ . Отсюда для всех  $z = x + iy$  из  $G$

$$\begin{aligned} f(z) &= id_f + iv^0(x, y) + u(x, y) = \\ &= id_f + \sum_{k=1}^{\infty} a_k [u_k(x, y) + iv_k^0(x, y)] = id_f + \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k^0(z), \end{aligned}$$

где  $f_k^0(z) := u_k(x, y) + iv_k^0(x, y)$  для любого  $k \geq 1$ .

Сформулируем полученный результат.

**Теорема 4.31.** Пусть  $\{u_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$  — произвольная АПС в пространстве  $Hr(G)$  (над полем скаляров  $\mathbb{R}$ ), где  $G$  — односвязная область в  $\mathbb{C}$ . Пусть, далее, при любом  $k \geq 1$   $v_k^0(x, y)$  — каноническая сопряженная функция с  $u_k(x, y)$  в  $G$  и  $f_k^0(z) := u_k(x, y) + iv_k^0(x, y)$ . Тогда  $\{i\} \cup \{f_k^0(z) : k = 1, 2, \dots\}$  — АПС в пространстве  $A(G)$  (над полем скаляров  $\mathbb{C}$ ). При этом для любой функции  $f$  из  $A(G)$  найдется абсолютно сходящийся в  $A(G)$  ряд  $b_0 i + \sum_{k=1}^{\infty} b_k f_k^0(z)$ , сумма которого в  $G$  равна  $f(z)$ , а все коэффициенты  $b_k$ ,  $k \geq 0$ , вещественнозначны.

Совершенно аналогично доказывается

**Теорема 4.32.** Пусть  $G$  — односвязная область в  $\mathbb{C}$ ; семейство  $\{u_k(x, y)\}$  — ПС в  $Hr(G)$  и при любом  $k \geq 1$   $v_k^0(x, y)$  — каноническая сопряженная функция с  $u_k$  в  $G$ , а  $f_k^0(z) = u_k(x, y) + iv_k^0(x, y)$ . Тогда  $\{i\} \cup \{f_k^0(z) : k = 1, 2, \dots\}$  — ПС в  $A(G)$ . При этом для любой функции  $f$  из  $A(G)$  найдется сходящийся в  $A(G)$  ряд  $b_0 i + \sum_{k=1}^{\infty} b_k f_k^0(z)$ , сумма которого в  $G$  равна  $f(z)$ , а все коэффициенты  $b_k$ ,  $k \geq 0$ , вещественнозначны.

Следующий результат является в некотором смысле обращением теорем 4.31, 4.32.

**Теорема 4.33.** Пусть  $G$  — односвязная область в  $\mathbb{C}$ ; семейство  $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  — АПС (или ПС) в  $A(G)$  и  $f_k(z) = u_k(x, y) + iv_k(x, y)$ , где  $u_k, v_k$  — сопряженная гармоническая пара в  $G$ . Пусть, далее,  $\varepsilon_k = \{\alpha u_k + \beta v_k : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$  — подпространство  $Hr(G)$  (размерности 2). Тогда  $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$  — АПСПП (соответственно, ПСПП) в  $Hr(G)$ .

△ Пусть, для определенности,  $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  — ПС в  $A(G)$ . Пусть, далее,  $u(x, y)$  — произвольная функция из  $Hr(G)$ ,  $v(x, y)$  — любая функция из  $Hr(G)$ , сопряженная в  $G$  с  $u$ . Тогда  $f_0(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in A(G)$  и существует сходящийся в  $A(G)$  к  $f_0(z)$  ряд вида  $\sum_{k=1}^{\infty} d_k f_k(z)$ , в котором при любом  $k \geq 1$   $c_k = \alpha_k + i\beta_k \in \mathbb{C}$  и  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ . Отсюда при любом  $z = x + iy$  из  $G$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \Re f_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Re [c_k f_k(z)] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k u_k(x, y) - \beta_k v_k(x, y)] = \sum_{k=1}^{\infty} y_k, \end{aligned}$$

где при всех  $k \geq 1$   $y_k \in \varepsilon_k$  и ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$  сходится в  $Hr(G)$ . Следо-

вательно,  $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$  — ПСПП в  $Hr(G)$ . Так же доказывается, что если  $\{f_k(z)\}_{k=1}^\infty$  — АПС в  $A(G)$ , то  $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$  — АПСПП в  $Hr(G)$ .  $\triangleright$

**4.6.9.** Опубликованные в работе [89] теоремы 4.31–4.33, насколько известно автору, являются единственными результатами о представляющих системах и последовательностях представляющих пространств в  $Hr(G)$ . В них установлены определенные связи с аналогичными объектами в пространстве  $A(G)$ , в котором исследования А-ПС и ПСПП продвинуты достаточно далеко. Что же касается теории ПС и их обобщений непосредственно в пространстве  $Hr(G)$ , то она до сих пор практически не разработана. Одна из основных трудностей, возникающих при попытках получить даже начальные результаты такой теории, заключается в том, что хотя представление сопряженного к  $Hr(G)$  пространства было получено Тиллманом еще в 50-х гг. XX века [175], однако, оно сложнее, чем представление  $(A(G))'$ ; в частности, насколько известно автору, не существует такой реализации  $(Hr(G))'$  в виде функционального пространства, которая позволяет применить общую теорию двойственности в ЛВП (более подробно об этом см. в [89, с. 61]). Поэтому разработка каких-либо подходов к исследованию ПС и их обобщений в пространстве  $Hr(G)$ , где  $G$  — область в  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 2$  (даже в случае  $m = 2$ , не говоря уже о ситуации  $m > 2$ , являющейся пока сплошным «белым пятном»), представляет, по мнению автора, значительный интерес.

#### 4.7. О различных классах представляющих систем

В этом разделе сопоставляются рассмотренные выше классы ПС, а также кратко описываются некоторые другие типы представляющих систем, не укладывающиеся в общую схему А-ПС из раздела 3.1.

**4.7.1.** Прежде всего, очевидно, что АПС<sub>м</sub> элементов — это непосредственное обобщение АПС элементов. Пусть теперь при любом  $n \geq 1$   $\mathcal{H}_n$  — конечномерное подпространство ПОЛВП  $H$  с индуцированной из  $H$  топологией и, как в 3.1,  $\Omega = \omega_1 \cup (\bigcup_{k=1}^\infty \omega_{k+1} \setminus \omega_k)$  — счетное множество индексов, а для любого  $n \geq 1$   $\omega_n$  — конечное (состоящее из конечного числа индексов из  $\Omega$ ) подмножество  $\Omega$  такое, что  $\omega_n \subseteq \omega_{n+1}$ . Пусть еще, как раньше,  $X = (x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  — некоторая совокупность ненулевых элементов  $x_\alpha$  из  $H$ , любая конечная подсистема которой линейно независима в  $H$ . Пусть  $x_\alpha \in H_n$  при всех  $\alpha \in \omega_n$ . Положим  $m_0 = 0$ ,  $m_n = \dim H_n$  (размерность  $H_n$ ),

$n = 1, 2, \dots$ . Без ограничения общности можно считать, что при любом  $k \geq 1$   $\omega_k = \{j : 1 + \sum_{s=1}^{k-1} m_s \leq j \leq \sum_{s=1}^k m_s\}$ . Тогда введенный в п. 3.1 класс  $A_1(X, H)$ -ПС совпадает с классом  $A_1\{H_n\}$ -ПСПП (т. е. ПСПП) из пункта 4.4.2, а  $A_2(X, H)$  (см. п. 3.1.3) — с классом  $A_2\{H_n\}$ -ПСПП (т. е. АПСПП, см. п. 4.4.2). Однако, если хотя бы одно из пространств  $H_n$  бесконечномерно, то все рассмотренные в п. 4.4 классы представляющих систем подпространств  $H_n$  не укладываются в общую схему А-ПС из раздела 3.1.

Отметим еще, что в работе [5] А. В. Абанин рассмотрел более общий класс, чем  $A_2(\{H_n\}_{n=1}^\infty)$ -ПСПП. Используя соответствующие координатные пространства и действуя по описанной выше схеме, основанной на общей теории двойственности в ЛВП, он в предположении, что каждое подпространство  $H_n$  наделено определенным образом введенной топологией, мажорирующей индуцированную из  $H$  топологию, получил критерий того, что заданная последовательность  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$  подпространств  $H$  с такими топологиями принадлежит введенному им классу последовательностей абсолютно представляющих подпространств (или, в терминологии [5], является системой абсолютного разложения). Этот критерий сформулирован в [5] в форме, близкой к соотношениям (4.11)–(4.13).

**4.7.2.** Опишем коротко три класса ПС, не укладывающиеся в общую схему А-ПС из раздела 3.1. Пусть, как раньше,  $H$  — ПОЛВП над полем скаляров  $\Phi$ , где  $\Phi = \mathbb{C}$  или  $\Phi = \mathbb{R}$ , а  $\Omega = \omega_1 \cup (\bigcup_{k=1}^\infty \omega_{k+1} \setminus \omega_k)$  — счетное множество индексов такое, что при всех  $k \geq 1$   $\omega_k \subset \omega_{k+1} \subset \Omega$ . Пусть, далее,  $X(x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  — некоторая счетная совокупность ненулевых элементов из  $H$ , любая конечная подсистема которой линейно независима в  $H$ .

Назовем  $X$  слабо представляющей системой (СлПС) в  $H$ , если любому  $x$  из  $H$  можно сопоставить такой ряд  $\sum_{\alpha \in \omega_1} b_\alpha x_\alpha + \sum_{k=1}^\infty (\sum_{\alpha \in \omega_{k+1} \setminus \omega_k} b_\alpha x_\alpha)$ , что  $b_\alpha \in \Phi$  при любом  $\alpha \in \Omega$  и для всех  $\varphi \in H'$   $\varphi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m^\varphi(X)$ , где

$$S_m^\varphi(X) := \sum_{\alpha \in \omega_1} b_\alpha \varphi(x_\alpha) + \sum_{k=1}^m \left( \sum_{\alpha \in \omega_{k+1} \setminus \omega_k} b_\alpha \varphi(x_\alpha) \right), \quad m = 1, 2, \dots$$

Далее,  $X$  — слабо абсолютно представляющая система (СлАПС) в  $H$  или ослабленно абсолютно представляющая система (ОСлАПС) в  $H$ , если каждому элементу  $x$  из  $H$  можно поставить в соответствие

ряд

$$\sum_{\alpha \in \omega_1} b_\alpha x_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{\alpha \in \omega_{k+1} \setminus \omega_k} b_\alpha x_\alpha \right)$$

такой, что для любого  $\varphi \in H'$   $\varphi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m^\varphi(X)$  и

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(b) &:= \sum_{\alpha \in \omega_1} |b_\alpha| |\varphi(x_\alpha)| + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{\alpha \in \omega_{k+1} \setminus \omega_k} |b_\alpha| |\varphi(x_\alpha)| \right) = \\ &= \sum_{\alpha \in \Omega} |b_\alpha| |\varphi(x_\alpha)| < +\infty, \end{aligned} \quad (4.40)$$

или, соответственно, для любого  $\varphi \in H'$   $\varphi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m^\varphi(X)$  и

$$\tilde{\varphi}_1(b) := \left| \varphi \left( \sum_{\alpha \in \omega_1} b_\alpha x_\alpha \right) \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \varphi \left( \sum_{\alpha \in \omega_{k+1} \setminus \omega_k} b_\alpha x_\alpha \right) \right| < +\infty. \quad (4.41)$$

По аналогии с вышеизложенным введем три координатных пространства:

1)  $A_1^{\text{сл}}(X, H) := \{b(b_\alpha)_{\alpha \in \Omega} \in \Phi^\Omega : \forall \varphi \in H' \exists \lim_{m \rightarrow \infty} S_m^\varphi(X)\}$ . Топология  $\nu_{\text{сл}}$  в  $A_1^{\text{сл}}(X, H)$  задается набором преднорм  $\sup_{m \geq 1} |S_m^\varphi(X)|$ ,  $\varphi \in H'$ .

2)  $A_2^{\text{асл}}(X, H) := \{b(b_\alpha)_{\alpha \in \Omega} \in \Phi^\Omega : b \in A_1^{\text{сл}}(X, H) \text{ и справедливо соотношение (4.40)}\}$ . Топология  $\nu_{\text{асл}}$  в  $A_2^{\text{асл}}(X, H)$  определяется набором преднорм  $\tilde{\varphi}(b)$ ,  $\varphi \in H'$ .

3)  $A_2^{\text{асл}}(X, H) := \{b \in \Phi^\Omega : b \in A_1^{\text{сл}}(X, H) \text{ и выполняется неравенство (4.41)}\}$ . Топология  $\nu_{\text{асл}}$  в  $A_2^{\text{асл}}(X, H)$  вводится набором преднорм  $\tilde{\varphi}_1(b)$ ,  $\varphi \in H'$ .

Как нетрудно убедиться, все эти пространства отделимы, причем

$$A_2^{\text{асл}}(X, H) \hookrightarrow A_2^{\text{асл}}(X, H) \hookrightarrow A_1^{\text{сл}}(X, H).$$

При некоторых дополнительных предположениях на  $H$  удается обосновать включение  $A_1^{\text{сл}}(X, H) \hookrightarrow A_1(X, H)$  (и в этом случае  $A_1^{\text{сл}}(X, H) = A_1(X, H)$ ); в такой ситуации все три только что введенных типа ПС являются частными подклассами А-ПС согласно определению А-ПС из раздела 3.1. Однако, на примерах можно показать, что в общем случае непрерывное вложение  $A_1^{\text{сл}}(X, H) \hookrightarrow A_1(X, H)$

может не иметь места, и введенные классы ПС необходимо рассматривать отдельно.

**4.7.3.** Действуя по аналогии с вышеизложенным и предполагая пространство  $H$  слабо полным, вводим оператор представления  $L^{\text{сл}}(X, H)$ :

$$\forall b(b_\alpha)_{\alpha \in \Omega} \in A_1^{\text{сл}}(X, H) \rightarrow L^{\text{сл}}b := \sum_{\alpha \in \omega_1} b_\alpha x_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{\alpha \in \omega_{k+1} \setminus \omega_k} b_\alpha x_\alpha \right) \in H.$$

Этот оператор линеен и непрерывен из  $A_1^{\text{сл}}(X, H)$ ,  $\nu_{\text{сл}}$  в  $H, \sigma$ . Аналогично определяются и два остальных оператора представления.

Привлечение этих операторов дает возможность получить некоторые результаты (типа теорем 4.13–4.15) для указанных трех классов ПС и таких их разновидностей, как соответствующие свободные и продолжаемые представляющие системы.

Далее, как легко проверить, все орты  $(y_\alpha)_{\beta \in \Omega}$ , где  $(y_\alpha)_\beta = \delta_{\alpha, \beta}$  — символ Кронекера, принадлежат пространству  $A_2^{\text{сл}}(X, H)$ , а, следовательно, и остальным двум координатным пространствам. Как и раньше, этот факт позволяет найти представление операторов  $\ell$ , сопряженных к только что введенным операторам представления. Например, оператор  $\ell^{\text{сл}} := (L^{\text{сл}}(X, H))'$  ставит в соответствие каждому линейному непрерывному функционалу  $\varphi$  на  $H$  числовую совокупность  $\{\varphi(x_\alpha)\}_{\alpha \in \Omega}$  из пространства  $\hat{A}_2^{\text{сл}} := (A_2^{\text{сл}}(X, H))'$ . При этом

$$\hat{A}_2^{\text{сл}} = \left\{ d(d_\alpha)_{\alpha \in \Omega} \in \Phi^\Omega : \exists B < \infty, \exists \varphi \in H' : \forall \alpha \in \Omega \ |d_\alpha| \leq B|\varphi(x_\alpha)| \right\}.$$

Однако при попытке использовать, как выше, некоторые результаты из общей теории двойственности в ЛВП, мы сталкиваемся с рядом серьезных трудностей, связанных в первую очередь со сложными топологическими свойствами пространств, сопряженных к введенным координатным пространствам. Так, даже для, пожалуй, наиболее простого пространства  $A_2^{\text{сл}}(X, H)$  неизвестен ответ на такой вопрос: если  $H$  — рефлексивное (или даже монтелевское) пространство Фреше, то каковы топологические свойства пространства  $\hat{A}_2^{\text{сл}}$  (например, будет ли оно сильным сопряженным к рефлексивному пространству Фреше)? В связи с этими трудностями перспективы использования общей теории двойственности в ЛВП для получения, например, критерия того, что заданная совокупность  $X$  элементов из

слабо полного ОЛВП  $H$  принадлежит какому-либо из трех введенных классов ПС, остается неясной. Другие подходы к этим вопросам пока неизвестны.

Заметим еще, что если  $\Omega = \mathbb{N}$  и  $\omega_k = (1, 2, \dots, k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то понятия Сл АПС и ОСл АПС совпадают, и в этом случае мы приходим к одному из определений, использованных в [29, 156]. Именно, последовательность  $(x_n)_{n=1}^\infty$  ненулевых элементов из линейного топологического пространства  $H$  называется слабо абсолютно представляющей в  $H$ , если для любого  $x$  из  $H$  найдется ряд  $\sum_{k=1}^\infty b_k x_k$  такой, что при любом  $\varphi \in H'$   $\varphi(x) = \sum_{k=1}^\infty b_k \varphi(x_k)$  и  $\sum_{k=1}^\infty |b_k| |\varphi(x_k)| < \infty$ .

Отметим один результат из [156], согласно которому в любом бесконечномерном пространстве Фреше найдется ПС, не являющаяся Сл АПС в  $H$ . Тем самым было опровергнуто высказанное в обзоре [47] предположение автора о том, что в любом ядерном пространстве Фреше каждая ПС является АПС.

**4.7.4.** В заключение отметим, что В. Б. Шерстюков ввел понятие абсолютно приближающей системы (АПрС) элементов, являющейся обобщением абсолютно представляющей системы (АПС), и показал, что в пространстве Фреше классы АПрС и АПС совпадают [140, гл. I].

#### 4.8. $\tilde{A}$ -представляющие семейства элементов

**4.8.1.** Когда в главе 3 вводилось понятие  $A$ -ПС, то в качестве исходного («базового») пространства бралось пространство  $A_1(X_\Lambda, H)$  и предполагалось, что  $(A, \tau) \hookrightarrow A_1(X_\Lambda, H)$ . Аналогичным образом можно ввести понятие  $\tilde{A}$ -представляющего семейства ( $\tilde{A}$ -ПСм) элементов, отправляясь от пространства

$$A_2(X_\Lambda, H) := \left\{ c = (c_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \mathbb{C}^\Lambda : q_p(c) := \sum_{\alpha \in \Lambda} |c_\alpha| p(x_\alpha) < \infty \quad \forall p \in \mathcal{P} \right\},$$

где, как выше,  $\mathcal{P} = \{p\}$  — набор непрерывных преднорм, определяющих топологию в ПОЛВП  $H$ .

Пусть  $\tilde{A}(X_\Lambda, H)$  — «координатное» пространство, содержащее все орты  $e_{(\alpha)} = (\delta_{\alpha, \gamma})_{\gamma \in \Lambda}$ , где  $\alpha \in \Lambda$  и  $\delta_{\alpha, \gamma}$  — символ Кронекера.

Пусть, далее, для любого  $\alpha \in \Lambda$   $x_\alpha \in H$ ,  $x_\alpha \neq 0$  и  $X_\Lambda := (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ . (Здесь  $\Lambda$  — произвольно зафиксированное и не обязательно счетное

множество индексов.) Предположим, что в  $\tilde{A}(X_\Lambda, H)$  определена ЛВ топология  $\tau$ , причем  $\tilde{A}(X_\Lambda, H) \tau \hookrightarrow A_2(X_\Lambda, H)$ .

Назовем  $X_\Lambda$   $\tilde{A}$ -ПСм в  $H$ , если для любого элемента  $x$  из  $H$  найдется числовое семейство  $\{c_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  из  $\tilde{A}(X_\Lambda, H)$  такое, что семейство  $\{c_\alpha x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  абсолютно суммируемо к  $x$  в  $H$ .

Напомним, что  $E := (e_{(\alpha)})_{\alpha \in \Lambda}$  — абсолютный базис в  $A_2(X_\Lambda, H)$ , и предположим дополнительно, что  $E$  является АБ и в  $\tilde{A}(X_\Lambda, H)$ , т. е. что при любом  $c = (c_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \tilde{A}(X_\Lambda, H)$  семейство  $\{c_\alpha e_{(\alpha)}\}$  абсолютно суммируемо к  $c$  в  $\tilde{A}(X_\Lambda, H)$ .

Введем стандартным образом оператор представления

$$L_\Lambda: \forall c = (c_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \tilde{A}(X_\Lambda, H) \rightarrow L_\Lambda c = \sum_{\alpha \in \Lambda} c_\alpha x_\alpha \in H.$$

Так как  $L_\Lambda$  — линейный непрерывный оператор из  $A_2(X_\Lambda, H)$  в  $H$  и  $\tilde{A}(X_\Lambda, H) \tau \hookrightarrow A_2(X_\Lambda, H)$ , то  $L_\Lambda$  — линейный непрерывный оператор из  $\tilde{A}(X_\Lambda, H)$ ,  $\tau$  в  $H$ .

Если находить условия, при которых  $\tilde{A}(X_\Lambda, H)$  —  $\tilde{A}$ -ПСм в  $H$  (или, что все равно, при которых  $L_\Lambda$  — эпиморфизм  $\tilde{A}(X_\Lambda, H)$ ,  $\tau$  на  $H$ ), то, как и ранее в случае АПСм элементов, можно привлечь общую теорию двойственности в ЛВП.

**4.8.2.** Чтобы не увеличивать и без того достаточно большой объем данной книги, а также учитывая, что соответствующие рассуждения для  $\tilde{A}$ -ПСм аналогичны изложенным выше для АПСм элементов, остановимся здесь лишь на одном представителе  $\tilde{A}$ -ПСм, имеющем, как нам кажется, и определенный исторический интерес.

По-видимому, этот класс  $\tilde{A}$ -ПСм был впервые введен в начале 30-х гг. XX века Мазуром и Орличем для так называемых пространств типа  $(B_0)$ . Определение этих пространств можно найти, например, в известной монографии С. С. Банаха [10, с. 199].

Приведем определение соответствующего подкласса  $\tilde{A}$ -ПСм в случае, когда  $H$  — ПОЛВП с топологией, заданной набором преднорм  $\mathcal{P} = \{p\}$ . Пусть  $T$  — ограниченное множество в  $H$ . Назовем его представляющим семейством Мазура — Орлича (МО-ПСм) в  $H$ , если для любого элемента  $x$  из  $H$  найдутся последовательности  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  из  $\ell_1$  и  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  из  $T$  такие, что сумма ряда  $\sum_{n=1}^\infty c_n x_n$  (абсолютно сходящегося в  $H$ ) равна  $x$ .

Положим  $\ell_1(\Lambda) := \{c = (c_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \mathbb{C}^\Lambda : \sum_{\alpha \in \Lambda} |c_\alpha| < +\infty\}$ . Как известно (см., например, [123, с. 38–40]),  $\ell_1(\Lambda)$  —  $B$ -пространство с нормой  $|c|_\Lambda^1 := \sum_{\alpha \in \Lambda} |c_\alpha|$ .



Очевидно, что каждое МО-ПСм в  $H$  является  $\tilde{A}$ -ПСм в  $H$  (при  $X_\Lambda = T$  и  $\tilde{A}(X_\Lambda, H) = \ell_1(\Lambda)$ ).

Следует отметить, что наличие хотя бы одного МО-ПСм элементов возможно только в довольно узком классе ПОЛВП. Чтобы убедиться в этом, введем сначала для произвольного ограниченного множества  $T = X_\Lambda = \{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$  в  $H$  традиционный оператор представления  $L_T$ :

$$\forall c = (c_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \ell_1(\Lambda) \rightarrow L_T c = \sum_{\alpha \in \Lambda} c_\alpha x_\alpha \in H.$$

Тогда  $T$  — МО-ПСм в  $H$  в том и только том случае, когда линейный (и, очевидно, непрерывный из  $\ell_1(\Lambda)$  в  $H$ ) оператор  $L_T$  является эпиморфизмом  $\ell_1(\Lambda)$  на  $H$  или, что все равно, когда  $L_T$  — линейное взаимно однозначное и непрерывное отображение  $B$ -пространства  $\ell_1(\Lambda)/J_0$  на ПОЛВП  $H$ . Здесь  $\ell_1(\Lambda)/J_0$  — фактор-пространство  $\ell_1(\Lambda)$  с обычной (нормированной) фактор-топологией, а

$$J_0 := \left\{ d = (d_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \ell_1(\Lambda) : \sum_{\alpha \in \Lambda} d_\alpha x_\alpha = 0 \right\}.$$

Будем говорить, что для пары  $(\ell_1(\Lambda)/J_0, H)$  справедлива известная теорема Банаха об изоморфизме, если любое линейное непрерывное взаимно-однозначное отображение  $\ell_1(\Lambda)/J_0$  на  $H$  является (топологическим) изоморфизмом. Так, в частности, будет, если  $H$  — пространство Фреше или сильное сопряженное к рефлексивному пространству Фреше. Тогда, если  $T$  — МО-ПСм в  $H$ , то  $L_T$  — изоморфизм  $\ell_1(\Lambda)/J_0$  на  $H$ , и в этом случае  $H$  топологически изоморфно банаховому пространству. Поэтому, если в ПОЛВП  $H$  имеется хотя бы одно МО-ПСм  $T$ , то (в предположении, что для пары  $(\ell_1(\Lambda)/J_0, H)$  справедлива теорема Банаха об изоморфизме) можно считать, что  $H$  является банаховым пространством. При этом, если  $\|\cdot\|$  — норма в  $B$ -пространстве  $H$ , то любое семейство  $X_\Lambda := (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  каких-либо ненулевых элементов из  $H$  является АПСм в  $H$  тогда и только тогда, когда  $\left\{ \frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|} \right\}_{\alpha \in \Lambda}$  — МО-ПСм в  $H$ . Таким образом, в любом  $B$ -пространстве понятия АПСм и МО-ПСм элементов фактически равносильны. В то же время, как это следует из предыдущего, если  $H$  — небанахово пространство, являющееся или пространством Фреше, или сильным сопряженным к рефлексивному пространству Фреше, то в таком пространстве нет ни одного МО-ПСм элементов.

#### 4.9. АПСм экспонент в пространствах глобально аналитических функций

**4.9.1.** До сих пор в данной книге при рассмотрении АПСм элементов (прежде всего, экспонент) в конкретных функциональных пространствах в качестве последних брались либо пространства функций, аналитических в выпуклой области  $G$  в  $\mathbb{C}^p$  (возможно, с определенными ограничениями на рост при приближении к границе  $G$ ), либо функций, аналитических на выпуклых компактах из  $\mathbb{C}^p$ . Однако подобные АПСм имеются и в других пространствах аналитических функций.

В настоящем разделе в качестве примера кратко опишем одно из таких пространств, а именно, пространство  $H(Q)$  всех функций, глобально аналитических на некотором связном множестве  $Q$  из  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ . При любом  $m \geq 1$  символом  $D_m(Q)$  для произвольного множества  $Q$  в  $\mathbb{R}^m$  обозначим совокупность всех областей в  $\mathbb{R}^m$ , содержащих  $Q$ . Функция  $y(z)$ , определенная и однозначная на связном множестве  $Q$  из  $\mathbb{C}^p$ , называется глобально аналитической на  $Q$ , если существуют  $G \in D_{2p}(Q)$  и  $Y \in A(G)$  такие, что  $Y|_Q = y$ . Заметим, что в работе [61] функции, глобально аналитические на связном множестве  $Q$  из  $\mathbb{C}^p$ , назывались аналитическими следами на  $Q$ .

Как нетрудно проверить, для любого связного множества  $Q$   $H(Q)$  является векторным пространством (над полем  $\mathbb{C}$ ), содержащим все целые в  $\mathbb{C}^p$  функции и, в частности, все экспоненты  $e_\lambda(z) := \exp\langle \lambda, z \rangle_p$ , где, как выше,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ ,  $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$  и  $\langle \lambda, z \rangle_p = \sum_{k=1}^p \lambda_k z_k$ .

Подобные функции рассматривал еще А. Мартино [167], который назвал две функции  $y_1(z)$  и  $y_2(z)$  из  $H(Q)$  эквивалентными, если

$$\exists G_0 \in D_{2p}(Q) : y_j(z) \in A(G_0) \text{ и } y_1(z) = y_2(z) \quad \forall z \in G_0.$$

Далее Мартино вводит обычным образом векторное пространство всех классов эквивалентности и определяет в нем некоторую топологию индуктивного предела.

Ради простоты изложения не будем использовать и подробно описывать эти результаты из [167], а просто условимся называть любое семейство  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  каких-либо целых функций АПСм в  $H(Q)$ , если

$$\forall y \in H(Q) \exists G \in D_{2p}(Q), \exists Y \in A(G), \exists \{c_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \mathbb{C}^\Lambda : Y|_Q = y,$$

и семейство  $\{c_\lambda x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  абсолютно суммируемо к  $Y$  в  $A(G)$ .

Так как  $A(G)$  в описанной ранее стандартной топологии равномерной сходимости на каждом компакте из  $G$  является пространством Фреше, то согласно [123] абсолютная суммируемость семейства  $\{x_\lambda c_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  к  $Y$  в  $A(G)$ , где  $\Lambda$  — произвольное множество индексов, означает, что

$$\exists \{c_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_1}, \exists \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in \Lambda^{\mathbb{N}_1} : Y(z) = \sum_{n=1}^\infty c_n x_{\lambda_n}(z) \quad \forall z \in G,$$

причем ряд справа сходится абсолютно в  $A(G)$ .

**4.9.2.** Положим  $x_\lambda = e_\lambda$  для всех  $\lambda \in \Lambda$ ,  $E_\Lambda := (e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  и выясним, когда семейство  $E_\Lambda$  — АПСм в  $H(Q)$ . Предварительно введем некоторые необходимые для дальнейшего определения. Обозначим для любого  $m \geq 1$  символом  $W_m(Q)$  совокупность всех выпуклых областей из  $D_m(Q)$ .

Будем говорить, что  $W_m(Q)$  является базисом (или составляет базис) в  $D_m(Q)$ , если для каждой области  $G_1 \in D_m(Q)$  существует область  $G_2 \in W(Q)$  такая, что  $G_2 \subseteq G_1$ .

Обозначим еще при любом  $p \geq 1$  символом  $HD_{2p}(Q)$  совокупность всех областей  $G$  из  $D_{2p}(Q)$ , являющихся областями голоморфности в  $\mathbb{C}^p$ . Так как при  $p = 1$  любая область в  $\mathbb{C}$  является областью голоморфности в  $\mathbb{C}$ , а при  $p \geq 2$  любая выпуклая область в  $\mathbb{C}^p$  также будет областью голоморфности в  $\mathbb{C}^p$ , то  $W_{2p}(Q) \subseteq HD_{2p}(Q)$  при всех  $p \geq 1$ .

Скажем, что  $W_{2p}(Q)$  — базис в  $HD_{2p}(Q)$ , если для любого  $G_1 \in HD_{2p}(Q)$  существует  $G_2 \in W_{2p}(Q)$  такое, что  $G_2 \subseteq G_1$ .

Наконец, назовем множество  $Q$  из  $\mathbb{C}^p$  множеством единственности для  $H(Q)$ , если из того, что  $y_j(z) \in H(Q)$ ,  $j = 1, 2$ , и  $y_1(z) = y_2(z)$ ,  $z \in Q$ , для любой области  $G$  из  $D_{2p}(Q)$  такой, что  $y_j \in A(G)$ ,  $j = 1, 2$ , справедливо равенство  $y_1(z) = y_2(z)$  при всех  $z \in G$ .

**Теорема 4.34.** Пусть  $Q$  — связное множество в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 1$ . Тогда:

1) если  $W_{2p}(Q)$  составляет базис в  $HD_{2p}(Q)$ , то  $E_{\mathbb{C}^p}$  — АПСм в  $H(Q)$ ;

2) обратно, если  $E_{\mathbb{C}^p}$  — АПСм в  $H(Q)$  и  $Q$  — множество единственности для  $H(Q)$ , то  $W_{2p}(Q)$  — базис в  $HD_{2p}(Q)$ .

◁ Перед тем как доказать эту теорему, напомним, что если  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  — плотная в  $\mathbb{C}^p$  последовательность точек  $\lambda_n$  (из  $\mathbb{C}^p$ ), то  $\{e_{\lambda_n}(z)\}_{n=1}^\infty$  — УАПС в  $\mathbb{C}^p$ .

1. Пусть  $y(z) \in H(Q)$ . Тогда существуют  $G \in D_{2p}(Q)$  и  $Y \in A(G) : Y|_Q = y$ . Если  $G_Y$  — область голоморфности функции  $Y$ , то, очевидно,  $G_Y \in D_{2p}(Q)$  и, следовательно, существует область  $G_1 \in W_{2p}(Q)$  такая, что  $G_1 \subseteq G_Y$ .

Учитывая сказанное перед началом доказательства, заключаем, что существуют  $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_1}$  и  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in (\mathbb{C}^p)^{\mathbb{N}_1}$  такие, что при всех  $z \in G_1$   $Y(z) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_{\lambda_n}(z)$ , причем ряд справа сходится абсолютно в  $A(G_1)$ . При этом  $Y|_Q = y$  и, таким образом,  $E_{\mathbb{C}^p}$  — АПСм в  $H(Q)$ .

2. Пусть  $E_{\mathbb{C}^p}$  — АПСм в  $H(Q)$ , но  $W_{2p}(Q)$  — не базис в  $HD_{2p}(Q)$ . Тогда в  $HD_{2p}(Q)$  найдется область  $G_0$ , для которой не существует ни одной области  $G_2$  из  $W_{2p}(Q)$  такой, что  $G_2 \subseteq G_0$ .

Из определения области голоморфности следует, что существует такая функция  $y_0 \in A(G_0)$ , что  $G_0$  — область голоморфности  $y_0$ . Если  $y_2 := y_0|_Q$ , то  $y_2 \in H(Q)$ , и в силу предположений теоремы

$$\exists G_3 \in D_{2p}(Q) \exists y_3 \in A(G_3) : y_3|_Q = y_2,$$

$$\exists \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_1}, \exists \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in (\mathbb{C}^p)^{\mathbb{N}_1} : y_3(z) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_{\lambda_n}(z) \quad \forall z \in G_3,$$

и ряд справа сходится абсолютно в любой точке  $z$  из  $G_3$ . По теореме 1.1 он сходится абсолютно в любой точке области  $G_4 := \text{conv } G_3$  и равномерно внутри  $G_4$ . Следовательно,  $y_3(z)$  продолжается как однозначная аналитическая функция в выпуклую область  $G_4$ . При этом, так как  $Q$  — множество единственности для  $H(Q)$  и  $y_0|_Q = y_3|_Q$ , то функция  $y_0$  продолжается (как однозначная аналитическая функция) в область  $G_4$  из  $W_{2p}(Q) \subseteq HD_{2p}(Q)$ . Следовательно,  $y_0$  аналитически продолжается (однозначным образом) в область  $G_4 \cup G_0$ , содержащую область  $G_0$  и по крайней мере одну ее граничную точку, что невозможно, если  $G_0$  — область голоморфности  $y_0$ .  $\triangleright$

Учитывая, что при  $p = 1$  любая область в  $\mathbb{C}$  является областью голоморфности и потому  $D_2(Q) = HD_2(Q)$  для любого связного множества  $Q$ , непосредственно из теоремы 4.34 получаем такой результат.

Пусть  $Q$  — связное множество в  $\mathbb{C}$ . Тогда:

- 1) если  $W_2(Q)$  — базис в  $D_2(Q)$ , то  $E_{\mathbb{C}}$  — АПСм в  $H(Q)$ ;
- 2) если  $E_{\mathbb{C}}$  — АПСм в  $H(Q)$  и  $Q$  — множество единственности для  $H(Q)$ , то  $W_2(Q)$  составляет базис в  $D_2(Q)$ .

**4.9.3.** В связи с теоремой 4.34 возникает интересная, на наш взгляд, задача определения условий (топологического или геометрического характера) на связное множество  $Q$  в  $\mathbb{R}^{2m}$ ,  $m \geq 1$ , при выполнении которых  $W_{2m}(Q)$  является базисом в  $D_{2m}(Q)$ . При решении этой задачи (по крайней мере, при определении необходимых условий) может оказаться полезным понятие эквивыпуклых множеств, которое мы сейчас приведем. Именно, два связных множества  $Q_j$  ( $j = 1, 2$ ) в  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ , будем называть эквивыпуклыми, если  $W_m(Q_1) = W_m(Q_2)$ . Например, как легко проверить, любое связное множество  $Q$  из  $\mathbb{R}^m$  и его выпуклая оболочка  $\text{conv } Q$  эквивыпуклы. Менее очевидна эквивыпуклость связного множества  $Q$  и содержащего его выпуклого множества  $Q_W := \bigcap_{G \in W_m(Q)} G$ . Ясно, что  $Q \subseteq \text{conv } Q \subseteq Q_W$ , откуда  $W_m(Q_W) \subseteq W_m(\text{conv } Q) = W_m(Q)$ .

С другой стороны, из определения выпуклого множества  $Q_W$  следует, что если  $G_1 \in W_m(Q)$ , то  $G_1 \supseteq Q_W$  и, таким образом,  $G_1 \in W_m(Q_W)$ . Но тогда  $W_m(Q) \subseteq W_m(Q_W)$  и окончательно

$$W_m(Q_W) = W_m(\text{conv } Q) = W_m(Q).$$

Полезность только что введенного понятия эквивыпуклости вытекает хотя бы из таких соображений. Пусть  $Q_1$  и  $Q_2$  — эквивыпуклые связные множества в  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ , причем  $Q_1 \subseteq Q_2$  и  $Q_2$  — выпуклое множество. Допустим, что  $W_m(Q_1)$  — базис в  $D_m(Q_1)$ .

Так как  $D_m(Q_1) \supseteq D_m(Q_2)$ ,  $W_m(Q_1) = W_m(Q_2)$ , то подаловно  $W_m(Q_2)$  является базисом в  $D_m(Q_2)$ . Таким образом, при определении условий, необходимых для того, чтобы  $W_m(Q)$  составляло базис в  $D_m(Q)$ , где  $Q$  — связное множество в  $\mathbb{R}^m$ , можно без ограничения общности считать, что множество  $Q$  не только связно, но и выпукло (для этого достаточно, например, перейти от  $Q$  к  $\text{conv } Q$ ). Что же касается достаточных условий для базисности  $W_m(Q)$  в  $D_m(Q)$ , то мы ограничимся здесь лишь одним простым результатом в этом направлении.

**Теорема 4.35.** Если  $m \geq 1$  и  $Q$  — выпуклый компакт в  $\mathbb{R}^m$ , то  $W_m(Q)$  — базис в  $D_m(Q)$ .

◁ Пусть  $G \in D_m(Q)$  и  $\rho(\partial G, Q) = \min_{X \in \partial G, Y \in Q} |X - Y|_m = d$ . Так как  $Q$  — компакт области  $G$ , то  $d > 0$ . Образует множество  $Q_{d/2} := Q + \mathcal{K}_{d/2}(0)$ , где берется арифметическая сумма множеств и

$$\mathcal{K}_r(X_0) := \{X \in \mathbb{R}^m : |X - X_0|_m < r\}.$$

Тогда  $Q_{d/2} = \bigcup_{X \in \mathcal{K}_{d/2}(0)} (Q + X) = \bigcup_{Y \in Q} (\mathcal{K}_{d/2}(0) + Y)$  — открытое выпуклое множество, содержащее  $Q$ , т. е.  $Q_{d/2} \in W_m(Q)$ . При этом  $Q_{d/2}$  — собственное подмножество  $G$ , так как  $\rho_m(\bar{Q}_{d/2}, \partial G) \geq d/2 > 0$ .  $\triangleright$

Не останавливаясь здесь более подробно на этих вопросах, отметим лишь, что в общей ситуации критерии того, что  $W_m(Q)$  — базис в  $D_m(Q)$  и того, что  $W_{2p}(Q)$  — базис в  $HD_{2p}(Q)$ , по-видимому, неизвестны. Нахождение этих критериев представляется автору весьма непростым делом, в чем он убедился, решая близкие задачи в работе [65] (например, разыскивая условия, при которых в  $D_m(Q)$  имеется счетный базис областей из  $W_m(Q)$ ). Отметим, что критерий базисности  $W_{2p}(Q)$  в  $D_{2p}(Q)$  получен в [115, 147] для случая, когда  $Q$  — выпуклое локально замкнутое подмножество в  $\mathbb{C}^p$ .

## ГЛАВА 5

### ПРИМЕНЕНИЯ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ И ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ

#### 5.1. Построение частных решений линейных уравнений

В этом разделе рассматриваются примеры уравнений вида  $Ty = f$ , где  $f$  — функция из ПОЛВП  $H_2$ , а решение ищется в ПОЛВП  $H_1$ . При этом линейный оператор  $T$  определен не на всем пространстве  $H_1$ , а на некотором его подпространстве, что затрудняет применение к таким уравнениям общей теории двойственности. С помощью результатов из главы 3 для любой правой части  $f$  из  $H_2$  строится частное решение  $y$  из  $H_1$  уравнения  $Ty = f$ , зависящее от  $f$  линейно и непрерывно.

**5.1.1.** Обратимся вначале к уравнению

$$T_m y := \sum_{k=1}^m d_k y(t + \beta_k) = f(t), \quad (5.1)$$

в котором  $d_k \in \mathbb{C}$ ,  $\beta_k \in \mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Положим, как выше,

$$D_{a,b} := \{x = (x_1, \dots, x_p) : -\infty < a_k \leq x_k \leq b_k < +\infty, k = 1, \dots, p\};$$

$$e_s(t) := \exp 2\pi i \left\langle s, \frac{t}{b-a} \right\rangle_p = \exp 2\pi i \sum_{j=1}^p s_j \frac{t_j}{(b_j - a_j)} \quad \forall s \in \mathbb{N}_1^p;$$

$$\mathcal{E}_N := \{e_s(t)\}_{|s|_p \geq N}, \quad N = 0, 1, \dots; \quad |s|_p = |s_1| + |s_2| + \dots + |s_p|.$$

Если  $Q$  — выпуклый компакт, лежащий (строго) внутри  $D_{a,b}$ , то согласно теореме 3.6 (см. также п. 3.2.4)  $\mathcal{E}_N$  — ЭПА-ПС в  $L_2(Q)$  при всех  $N \geq 1$ , где

$$A = A_1(\mathcal{E}_N, L_2^N(D_{a,b})) = \left\{ c = (c_l)_{|l| \geq N} : \sum_{|l|_p \geq N} |c_l|^2 < +\infty \right\}.$$

При этом для любой функции  $x(t)$  из  $L_2(Q)$  найдется последовательность  $\{x_l\}_{|l|_p \geq N}$  из  $A = l_2^N$  такая, что существует предел (в  $L_2(Q)$ , т. е. в среднем):  $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{N \leq |l|_p \leq n} x_l e_l(t) \right)$ .

Кроме того, существуют  $B, D \in (0, +\infty)$  такие, что при любом  $x(t) \in L_2(Q)$

$$B \sum_{|l|_p \geq N} |x_l|^2 \leq \int_Q |x(t)|^2 dt \leq D \sum_{|l|_p \geq N} |x_l|^2.$$

Пусть еще  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$  и

$$e_\lambda(t) := \exp 2\pi i \left\langle \lambda, \frac{t}{b-a} \right\rangle_p = \exp 2\pi i \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{t_k}{(b_k - a_k)}.$$

Очевидно, что  $e_\lambda(t) \in L_2(H)$ , где  $H$  — любое ограниченное измеримое подмножество  $\mathbb{R}^p$ . Положим

$$d_m(\lambda) := \sum_{k=1}^m d_k e^{2\pi i \left\langle \lambda, \frac{\beta_k}{b-a} \right\rangle_p} = e^{-2\pi i \left\langle \lambda, \frac{t}{b-a} \right\rangle_p} \cdot T_m(e_\lambda(t)).$$

Предположим, что характеристическая функция  $d_m(\lambda)$  оператора  $T_m$  удовлетворяет следующему условию:

$$\lim_{|l|_p \rightarrow \infty} |d_m(l)| > 0. \quad (5.2)$$

Тогда существуют  $N_0 \geq 1$ ,  $\alpha > 0$  такие, что  $|d_m(l)| \geq \alpha > 0$  при всех  $l : |l|_p \geq N_0$ .

Положив  $N = N_0$ , составим по произвольно взятой функции  $f$  из  $L_2(Q)$  последовательность  $\left\{ \frac{f_l}{d_m(l)} \right\}_{|l|_p \geq N_0}$ , где

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty, (L_2(Q))} \left( \sum_{N_0 \leq |l|_p \leq n} f_l e_l(t) \right).$$

Имеем для любого  $n \geq N_0$ :

$$T_m \left( \sum_{N_0 \leq |l|_p \leq n} \frac{f_l e_l(t)}{d_m(l)} \right) = \sum_{N_0 \leq |l|_p \leq n} f_l e_l(t) \xrightarrow{L_2(Q)} f(t), \quad n \rightarrow \infty.$$



При этом функция  $x_f(t) = \sum_{|l|_p \geq N_0} \frac{f_l e_l(t)}{d(l)}$  принадлежит  $L_2(D_{a,b})$  и  $\sum_{|l|_p \geq N_0} |f_l|^2 \leq \frac{1}{B} \int_Q |f(t)|^2 dt < +\infty$ . Более того, функция  $x_f(t)$ , определенная почти всюду на  $D_{a,b}$ , допускает продолжение в  $\mathbb{R}^p$  до функции с периодом  $b - a := (b_1 - a_1, \dots, b_p - a_p)$ , интегрируемой с квадратом на любом ограниченном измеримом подмножестве из  $\mathbb{R}^p$ .

Так как  $E_{N_0}$  — ЭПА-ПС в  $L_2(Q)$ , то существует (и определяется эффективно) ЛНПО  $L_r^{-1}$  к оператору представления

$$L_r := \left\{ \forall c = (c_k)_{|k|_p \geq N_0} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{N_0 \leq |k|_p \leq n} c_k e_k(t) \in L_2(Q) \right\},$$

причем  $L_r^{-1}$  действует непрерывно из  $L_2(Q)$  в  $A = l_2^{N_0}$ . Задав произвольно  $f$  из  $L_2(Q)$ , найдем элемент  $c = L_r^{-1}f \in A$ . Если  $P$  — оператор умножения на  $\left\{ \frac{1}{d_m(l)} \right\}_{|l|_p \geq n_0}$ , то  $P$  — линейный непрерывный оператор из  $A$  в  $A$  (в силу условия (5.2)). Тогда

$$Pc = PL_r^{-1}f \in A,$$

$$L_r Pc = L_r PL_r^{-1}f := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{N_0 \leq |k|_p \leq n} \frac{f_k e_k(t)}{d_m(k)} = x_f \in L_2(Q).$$

Как нетрудно проверить,  $(T_m x_f)(t) = f(t)$  почти всюду на  $Q$ . Сформулируем полученный результат.

**Теорема 5.1.** Если характеристическая функция  $d_m(\lambda)$  оператора  $T_m$  удовлетворяет условию (5.2), то для любой правой части  $f$  из  $L_2(Q)$ , где  $Q$  — собственный компакт  $D_{a,b}$ , уравнение (5.1) имеет эффективно определяемое решение  $x_f(t)$  из  $L_2(D_{a,b})$ , зависящее от  $f$  линейно и непрерывно:

$$\exists \gamma \in (0, +\infty) : \|x_f\|_{L_2(D_{a,b})} \leq \gamma \|f\|_{L_2(Q)} \quad \forall f \in L_2(Q).$$

**5.1.2.** Рассмотрим теперь уравнение (5.1) в одномерном случае ( $p = 1$ ) в пространстве  $C^\infty[a, b]$ , где  $-\infty < a < b < +\infty$ . Пусть  $\theta \in (0, 1)$  и  $[a, b] \subset (-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta})$ . По теореме 3.12  $E_\theta^0$  — ЭАПС в  $C^\infty[a, b]$ . Кроме того, согласно п. 3.4.2 при любом  $N \geq 1$   $E_\theta^N := \{\exp ik\theta t\}_{|k| \geq N}$  — ЭП $\tilde{A}_N$ -ПС в  $C^\infty[a, b]$ , где

$$\tilde{A}_N = \left\{ d = (d_k)_{|k| \geq N} : \forall s \geq 0 \quad |\tilde{d}|_s := \sum_{|k| \geq N} |d_k| |k|^s < +\infty \right\}.$$

Как нетрудно проверить, если выполняется (менее жесткое, чем (5.2)) условие (в котором  $\lambda_k = ik\theta$ )

$$\lim_{|k| \rightarrow +\infty} \frac{\ln |d_m(\lambda_k)|}{\ln |k|} > -\infty, \quad (5.3)$$

то существует  $N_1 \geq 1$ :  $d_m(\lambda_k) \neq 0$  при  $|k| \geq N_1$  и  $\left\{ \frac{1}{d_m(\lambda_k)} \right\}_{|k| \geq N_1}$  — непрерывный мультипликатор пространства  $\tilde{A}_{N_1}$ .

Если  $f \in C^\infty[a, b]$  и выполнено условие (5.3), то по эффективно определенному разложению функции в абсолютно сходящийся в  $C^\infty[a, b]$  ряд по системе  $E_\theta^{N_1}$ :  $f(t) = \sum_{|k| \geq N_1} f_k e^{ik\theta t}$  можно построить функцию  $x_f(t) := \sum_{|k| \geq N_1} \frac{f_k e^{ik\theta}}{d_m(ik\theta)}$ , которая принадлежит пространству  $C^\infty[a, b]$  и, более того, пространству

$$C_0^\infty \left[ -\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta} \right] := \left\{ v(t) \in C^\infty \left[ -\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta} \right] : \right. \\ \left. v^{(j)} \left( -\frac{\pi}{\theta} \right) = v^{(j)} \left( \frac{\pi}{\theta} \right), j = 0, 1, \dots \right\}$$

(здесь  $d_m(\lambda) := \sum_{j=1}^m d_j e^{\lambda \beta_j}$ ). При этом функцию  $x_f$  можно продолжить (как сумму ряда  $\sum_{|k| \geq N_1} \frac{f_k e^{ik\theta t}}{d_m(ik\theta)}$ ) до  $\frac{2\pi}{\theta}$ -периодической функции, бесконечно дифференцируемой на  $\mathbb{R}$ .

Очевидно, что  $(T_m x_f)(t) = \sum_{|k| \geq N_1} f_k e^{ik\theta t} = f(t)$  для любого  $t \in [a, b]$  и, таким образом,  $x_f$  — эффективно определенное частное решение уравнения (5.1) (при  $p = 1$ ), зависящее от  $f$  линейно и непрерывно (последнее показывается так же, как в п. 5.1.1 в случае пространства  $L_2(Q)$  с учетом того, что  $E_\theta^{N_1}$  — ЭП $\tilde{A}_{N_1}$ -ПС в  $C_\infty[a, b]$ ).

**5.1.3.** В качестве второго примера рассмотрим одномерное дифференциально-разностное уравнение с постоянными коэффициентами

$$(P_n y)(x) := \sum_{l=1}^n \sum_{s=0}^{m_l} a_{l,s} y^{(s)}(x + \beta_l) = f(x), \quad (5.4)$$

где при  $1 \leq l \leq n$ ,  $0 \leq s \leq m_l$ ,  $\beta_l \in \mathbb{R}$ ,  $a_{l,m_l} \neq 0$ .

Как раньше,  $[a, b] \subset \left( -\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta} \right)$ , т. е.  $0 < \theta < \frac{\pi}{\min(b, -a)}$ . Положим

$$a(\lambda) := \sum_{l=1}^n e^{i\beta_l \lambda} \sum_{s=0}^{m_l} a_{l,s} \lambda^s; \quad \gamma := \max \{ m_l : l = 1, 2, \dots, n \}; \\ B_\gamma := \{ l : 1 \leq l \leq n, m_l = \gamma \}.$$

Если  $\gamma = 0$ , то мы получим уравнение (5.1) (при  $p = 1$ ), которое уже было исследовано в пп. 5.1.1, 5.1.2 при условиях (5.2) и (5.3) в пространствах  $L_2(Q)$  и  $C^\infty[a, b]$ . Рассмотрим теперь в пространстве  $C^\infty[a, b]$  уравнение (5.4) при  $\gamma \geq 1$ . Положим, как и раньше,  $\lambda_k = ik\theta$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Допустим сначала, что множество  $B_\gamma$  одноэлементно. Тогда, если  $|\lambda| \geq n_0$ , то  $|a(\lambda)| \geq \delta\lambda^\gamma - \beta\lambda^{\gamma-1} = \lambda^{\gamma-1}(\delta\lambda - \beta)$  и  $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |a(\lambda)| = \infty$ . Поэтому, когда  $|\lambda_k| \geq N_1$ , то  $|a(\lambda_k)| \geq \alpha > 0$  и  $\left\{\frac{1}{a(\lambda_k)}\right\}_{|\lambda_k| \geq N_1}$  — мультипликатор пространства  $\tilde{A}_{N_1}$ .

Пусть теперь множество  $B_\gamma$  содержит более одного элемента и пусть  $a_0(\lambda) := \sum_{l \in B_\gamma} a_{l,\gamma} e^{i\beta_l \lambda}$ . Предположим, что функция  $a_0(\lambda)$  удовлетворяет условию:

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |a_0(\lambda)\lambda| = \infty. \quad (5.5)$$

Тогда  $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |a(\lambda)| = +\infty$  и для  $a(\lambda)$  выполнено условие (5.2), откуда следует, что существует  $N_2 < \infty$  такое, что  $\left\{\frac{1}{a(\lambda_k)}\right\}_{|\lambda_k| \geq N_2}$  — мультипликатор  $\tilde{A}_{N_2}$ .

В обоих случаях для произвольной функции  $f$  из  $C^\infty[a, b]$  определяется конструктивно ее разложение в абсолютно сходящийся в  $C^\infty[a, b]$  ряд по системе  $E_\theta^{N_2}$ :  $f(t) = \sum_{|k| \geq N_2} f_k e^{ik\theta t}$ . По этому ряду строим (также эффективно) ряд  $\sum_{|k| \geq N_2} \frac{f_k e^{ik\theta t}}{a(ik\theta)}$ , который (при выполнении условия (5.3) при  $\gamma = 0$  и (5.5), когда  $\gamma \geq 1$  и множество  $B_\gamma$  содержит более одного элемента) сходится абсолютно в  $C^\infty[a, b]$  и, более того, абсолютно в  $C^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ , причем его сумма  $x_f(t)$  принадлежит не только пространству  $C^\infty[a, b]$ , но и  $C_0^\infty[-\frac{\pi}{\theta}, \frac{\pi}{\theta}]$ . Как выше, функция  $x_f(t)$  может быть продолжена на  $\mathbb{R}$  до бесконечно дифференцируемой и  $\frac{2\pi}{\theta}$ -периодической функции. При этом  $x_f(t)$  — частное решение уравнения (5.4), зависящее от  $f$  линейно и непрерывно.

Подведем итог результатам, полученным для уравнения (5.4).

**Теорема 5.2.** Пусть выполнены условия:

I) если  $\gamma = 0$ , то  $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \frac{\ln |a(\lambda_k)|}{\ln |k|} > -\infty$ , где  $a(\lambda) = \sum_{l=1}^n a_{l,0} e^{i\beta_l \lambda}$ ,

$\lambda_k = ik$ ;

II) если  $\gamma \geq 1$  и множество  $B_\gamma$  содержит более одного элемента,

то

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |\lambda a_0(\lambda)| = \infty, \quad a_0(\lambda) := \sum_{l \in B_\gamma} a_{l,\gamma} e^{i\beta_l \lambda}.$$

Тогда для любой функции  $f$  из  $C^\infty[a, b]$  можно построить (эффективно) частное решение уравнения (5.4) из  $C^\infty[a, b]$ , зависящее от  $f$  линейно и непрерывно.

Тем же методом можно строить частные решения уравнения (5.4) и в других функциональных пространствах, например в  $W_2^{r+1}[a, b]$  (соответствующие результаты можно найти в [71]).

## 5.2. Приложение рядов экспонент с мнимыми показателями к интерполяционным задачам

**5.2.1.** Пусть  $C^\infty(\mathbb{R})$  — пространство Фреше всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых на  $\mathbb{R}$  функций с топологией, заданной набором преднорм

$$|y|_n = \max \left\{ |y^{(k)}(x)| : 0 \leq k \leq n, |x| \leq n \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть, далее, при любом  $m \geq 0$   $\psi_m$  — линейный непрерывный функционал на  $C^\infty(\mathbb{R})$ , т. е.  $\psi_m \in (C^\infty(\mathbb{R}))'$ ,  $m = 0, 1, \dots$ . Представляет определенный интерес вопрос о том, когда общая задача интерполирования (этот термин взят из [28, с. 50])

$$\psi_m(y) = d_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.6)$$

для любой последовательности комплексных чисел  $(d_m)_{m=0}^\infty$  имеет решение в  $C^\infty(\mathbb{R})$ . Если это обстоятельство имеет место, то последовательность  $\Psi := (\psi_m)_{m=0}^\infty$  будем называть эйдельгайтовой в  $C^\infty(\mathbb{R})$ . Насколько известно, первый пример эйдельгайтовой последовательности  $\Psi_0 = (y^{(m)}(x_0))_{n=0}^\infty$  в  $C^\infty(\mathbb{R})$  был указан Э. Борелем [148], доказавшим, что интерполяционная задача

$$y^{(m)}(x_0) = d_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.7)$$

при произвольном  $x_0$  из  $\mathbb{R}$  имеет решение в  $C^\infty(\mathbb{R})$  для любой последовательности  $(d_m)_{m=0}^\infty$  (см. также [27, 118]).

**5.2.2.** В этом пункте приводится пример эйдельгайтовой в  $C^\infty(\mathbb{R})$  последовательности, значительно более общей, чем  $\Psi_0$ .

Именно, пусть

$$\psi_m^0(y) = \sum_{k=0}^{n_m} a_{k,m} y^{(k)}(x_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.8)$$

где

$$x_m \in \mathbb{R}, \quad a_{n_m,m} \neq 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad 0 \leq n_0 < n_1 < \dots \quad (5.9)$$

Отметим, что в данной ситуации не удалось применить методы, развитые Борелем и его последователями, а также методы работ [107, 153, 179].

**Теорема 5.3.** Последовательность  $\Psi^0 := (\psi_m^0)_{m=0}^\infty$  — эйдельгайт-това в  $C^\infty(\mathbb{R})$ , если выполнены условия (5.9).

Доказательство теоремы 5.3 использует теорему Поля о разрешимости бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (см., например, [96, гл. 2, § 2.5]). Для удобства читателя приведем здесь ее формулировку.

**Теорема 5.4.** Пусть задана бесконечная система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j} u_j = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.10)$$

где  $\{b_k\}_{k=1}^\infty$  — произвольная последовательность комплексных чисел, а коэффициенты  $(a_{k,j})$  системы удовлетворяют условиям:

I. Последовательность  $\{a_{1,j}\}_{j=1}^\infty$  содержит бесконечное число отличных от нуля чисел;

$$II. \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|a_{1,j}| + |a_{2,j}| + \dots + |a_{k-1,j}|}{|a_{k,j}|} = 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

Тогда существует бесконечное множество линейно независимых последовательностей  $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ , удовлетворяющих системе (5.10) и таких, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{k,j}| |u_j| < \infty, \quad k = 1, 2, \dots$$

Выберем произвольную последовательность попарно различных вещественных чисел  $(\alpha_k)_{k=1}^\infty$  таких, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha_k| = \infty$ , и рассмотрим ряд

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp i \alpha_k x. \quad (5.11)$$

Пусть  $BC^\infty(\mathbb{R})$  — подпространство  $C^\infty(\mathbb{R})$ , состоящее из всех бесконечно дифференцируемых на  $\mathbb{R}$  функций, ограниченных на  $\mathbb{R}$  вместе с каждой своей производной. Если ввести в  $BC^\infty(\mathbb{R})$  топологию счетным набором норм  $\|y\|_n = \sup\{|y^{(k)}(x)| : 0 \leq k \leq n, x \in \mathbb{R}\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , то  $BC^\infty(\mathbb{R})$  будет пространством Фреше, непрерывно вложенным в  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

Учитывая, что при любых  $n \geq 0$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$   $|e^{\alpha x i}|_n = \|e^{\alpha x i}\|_n = |\alpha|^n$ , без труда получаем такой результат.

**Лемма 5.1.** Для ряда (5.11) равносильны такие утверждения:

1. Ряд (5.11) сходится абсолютно в  $BC^\infty(\mathbb{R})$ .
2. Ряд (5.11) сходится абсолютно в  $C^\infty(\mathbb{R})$ .
3.  $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |\alpha_k|^s < \infty$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$

Продолжая доказательство теоремы 5.3, положим  $y_k := \exp i\alpha_k x$  для всех  $k \geq 1$ . Тогда для тех же  $k \geq 1$  имеем:

$$\psi_m^0(y_k) = \sum_{l=0}^{n_m} a_{l,m} y_k^{(l)}(x_m) = \sum_{l=0}^{n_m} a_{l,m} (i\alpha_k)^l \exp i\alpha_k x_m, \quad m = 0, 1, \dots$$

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_m^0(y_k) = d_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

Так как  $\psi_0^0(y_k) = \exp i\alpha_k x_0 \sum_{l=0}^{n_0} a_{l,0} (i\alpha_k)^l \neq 0$  при  $k > \bar{\bar{K}}_0$ , то в последовательности  $\{\psi_0^0(y_k)\}_{k=1}^{\infty}$  имеется бесчисленное множество отличных от нуля чисел. Далее, при любом фиксированном  $s \geq 0$ , как легко проверить,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^s |\psi_j^0(y_k)|}{|\psi_{s+1}^0(y_k)|} = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

(Здесь использовано соотношение

$$|\psi_m^0(y_k)| = \left| \sum_{l=0}^{n_m} a_{l,m} (i\alpha_k)^l \right| = |a_{n_m,m}| |\alpha_k|^{n_m} (1 + \varepsilon_{m,k}),$$

где  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_{m,k} = 0$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ).

Мы видим, что для системы (5.12) выполнены все предположения теоремы Поля. По этой теореме система (5.12) имеет бесконечное множество линейно независимых решений  $(c_k)_{k=1}^{\infty}$  таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |\psi_m^0(y_k)| < \infty, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

т. е.  $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |\alpha_k|^{n_m} < \infty$ ,  $m \geq 0$ . Так как  $\lim_{m \rightarrow \infty} n_m = \infty$ , то по лемме 5.1 ряд (5.11) сходится абсолютно в  $BC^{\infty}(\mathbb{R})$ , причем при любом  $m \geq 0$

$$\psi_m^0(v) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_m^0(y_k) = d_m, \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k.$$

Таким образом,  $v$  — решение задачи

$$\sum_{k=0}^{n_m} a_{k,m} y^{(k)}(x_m) = d_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.13)$$

из пространства  $BC^{\infty}(\mathbb{R})$ . При этом, так как оператор дифференцирования непрерывен в пространстве  $BC^{\infty}(\mathbb{R})$ , то ряд (5.11) можно дифференцировать почленно любое число раз, не нарушая его абсолютной сходимости в  $BC^{\infty}(\mathbb{R})$ . Таким образом, последовательность  $\{\psi_m^0\}_{m=0}^{\infty}$  — эйдеггайтова в  $BC^{\infty}(\mathbb{R})$  и подавно в  $C^{\infty}(\mathbb{R})$ .

**5.2.3.** При некоторых дополнительных предположениях относительно вспомогательных величин  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ , с помощью которых строилось решение (5.11) из  $BC^{\infty}(\mathbb{R})$  интерполяционной задачи (5.6) с  $\psi_m = \psi_m^0$ , можно показать, что различным решениям  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$  системы (5.12) при фиксированной правой части  $\{d_m\}_{m=0}^{\infty}$  из  $\mathbb{C}^{\infty}$  соответствуют различные же решения вида (5.11) интерполяционной задачи. Пусть

$$0 < \alpha_k \uparrow +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} < \infty. \quad (5.14)$$

(Заметим, что из условий (5.14) следует, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\alpha_k} = 0$ .) Пусть, далее,  $\{c_k^j\}_{k=1}^{\infty}$  ( $j = 1, 2$ ) — какие-либо два различных (линейно-независимых) решения системы (5.12) с одной и той же правой частью  $\{d_m\}_{m=0}^{\infty}$ . Положим  $k_0 = \min\{k \geq 1 : c_k^1 \neq c_k^2\}$ . Тогда  $1 \leq k_0 < +\infty$ .

Образуем оператор

$$L_0 y = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k y^{(k)}(z), \quad \beta(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k = \prod'_{k \neq k_0} \left(1 - \frac{z}{i\alpha_k}\right).$$

Из общей теории целых функций (см., например, [98]) следует, что  $\beta(z)$  принадлежит классу  $[1, 0]$  всех целых функций минимального типа при порядке 1. Тогда, как было установлено Валироном и Поля [170, 178], какова бы ни была область  $G \subset \mathbb{C}$ , оператор  $L_0$  непрерывен в пространстве Фреше  $A(G)$  всех функций, аналитических в области  $G$  с топологией равномерной сходимости на компактах  $G$ . Если при  $j = 1, 2$

$$y_j(z) := \sum_{m=1}^{\infty} c_m^j \exp i\alpha_m z, \quad \Pi^+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\},$$

то оператор  $L_0$  непрерывен в  $A(\Pi^+)$ ,  $y_j(z) \in B^\infty(\Pi^+)$ , где  $B^\infty(\Pi^+)$  — множество всех функций, аналитических в  $\Pi^+$  и бесконечно дифференцируемых на  $\overline{\Pi^+} = \Pi^+ \cup \mathbb{R}$ . Допустим, рассуждая от противного, что при любом  $x \in \mathbb{R}$   $y_1(x) = y_2(x)$ . Тогда  $y_1(z) = y_2(z)$  при всех  $z \in \Pi^+$  и, следовательно,  $(L_0 y_1)(z) = (L_0 y_2)(z)$ . Но

$$(L_0 y_1)(z) = c_{k_0}^1 \beta(i\alpha_{k_0}) \exp i\alpha_{k_0} z \neq c_{k_0}^2 \beta(i\alpha_{k_0}) \exp i\alpha_{k_0} z = (L_0 y_2)(z)$$

для любого  $z \in \Pi^+$ , и мы пришли к противоречию.

Таким образом, теорему 5.3 можно дополнить следующим утверждением.

**Теорема 5.5.** *Если выполняются условия (5.9), то интерполяционная задача (5.6) (при  $\psi_m = \psi_m^0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ) имеет бесконечное множество попарно различных решений из  $BC^\infty(\mathbb{R})$  (подавно из  $C^\infty(\mathbb{R})$ ).*

**Следствие.** *Пусть  $x_m \in \mathbb{R}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Интерполяционная задача*

$$y^{(m)}(x_m) = d_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.15)$$

*имеет бесконечное число решений из  $BC^\infty(\mathbb{R})$ .*

Заметим, что задача (5.15) является естественным обобщением классической проблемы Бореля (5.7).



**5.2.4.** Опишем структуру найденного решения (5.11) задачи (5.13) из пространства  $BC^\infty(\mathbb{R})$ , предполагая выполненными условия (5.9). Выберем какую-либо последовательность  $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ , определяющую представление решения (5.11), в котором

$$\alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha_k| = \infty, \quad \alpha_k \neq \alpha_j \text{ при } k \neq j. \quad (5.16)$$

Положим

$$N_0 = \{k \geq 1 : \alpha_k > 0\}, \quad N_1 = \{k \geq 1 : \alpha_k \leq 0\},$$

$$v_j(x) = \sum_{k \in N_j} c_k \exp i\alpha_k x, \quad j = 0, 1.$$

Очевидно, что каждый из рядов, представляющих  $v_j(x)$ ,  $j = 0, 1$ , сходится абсолютно в  $BC^\infty(\mathbb{R})$ . Положим

$$\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}; \quad \bar{\Pi}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\};$$

$$\Pi^- = \{z \in \mathbb{C} : \Im z < 0\}; \quad \bar{\Pi}^- = \{z \in \mathbb{C} : \Im z \leq 0\}.$$

Пусть, как и ранее,  $A(G)$  — пространство Фреше функций, аналитических в области  $G$ , с топологией равномерной сходимости на компактах  $G$ , а  $BC^\infty(\bar{\Pi}^+)$  — пространство Фреше бесконечно дифференцируемых в  $\bar{\Pi}^+$  функций, ограниченных на  $\bar{\Pi}^+$  вместе с каждой своей производной, с набором норм

$$\|y\|_n = \sup \left\{ |y^{(k)}(z)| : 0 \leq k \leq n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \Im z \geq 0 \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Очевидно, что функция  $v_0(z) = \sum_{k \in N_0} c_k \exp i\alpha_k z$  осуществляет аналитическое продолжение  $v_0(x)$  в область  $\Pi^+$ , причем

$$v_0(z)|_{\mathbb{R}} = v_0(x), \quad v_0(z) \in A(\Pi^+) \cap BC^\infty(\bar{\Pi}^+).$$

Аналогично, если  $v_1(z) = \sum_{k \in N_1} c_k \exp i\alpha_k z$ , то

$$v_1(z) \in A(\Pi^-) \cap BC^\infty(\bar{\Pi}^-), \quad v_1(z)|_{\mathbb{R}} = v_1(x).$$

Таким образом, получено еще одно дополнение к теореме 5.3.

**Теорема 5.6.** Пусть выполнены условия (5.9). Тогда для любой последовательности комплексных чисел  $(d_m)_{m=0}^\infty$  найдется решение  $v(x)$  задачи (5.13), представимое в виде  $v(x) = v_0(x) + v_1(x)$ , где

$$v_0(x + iy) \in A(\Pi^+) \cap BC^\infty(\bar{\Pi}^+),$$

$$v_1(x + iy) \in A(\Pi^-) \cap BC^\infty(\bar{\Pi}^-).$$

Заметим, что теорема 5.6 применима, в частности, к интерполяционной задаче (5.13) и, подавно, к проблеме Бореля (5.7).

**5.2.5.** Чтобы получить еще одно дополнение к теореме 5.3, повторим ее доказательство с той лишь разницей, что в качестве вспомогательной последовательности  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$  возьмем монотонно и неограниченно возрастающую последовательность положительных чисел. Система (5.12) останется прежней:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \sum_{l=0}^{n_m} a_{l,m} (i\alpha_k)^l \right) \exp i\alpha_k x_m = d_m, \quad (5.17)$$

$$m = 0, 1, \dots, \quad 0 < \alpha_k \uparrow +\infty.$$

Все последующие рассуждения из доказательства теоремы 5.3 останутся в силе. Используя, как и раньше, теорему Поля, находим, что интерполяционная задача (5.8), (5.9) имеет решение  $v(x)$  вида (5.11), в котором  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$  — одно из бесконечного множества линейно-независимых решений системы (5.17). При этом  $v(x) \in A(\Pi^+) \cap BC^{\infty}(\bar{\Pi}^+)$ . Более обще, если все точки  $x_m$  ( $m \geq 1$ ) при некотором  $\psi$  из  $[0, 2\pi)$  лежат на прямой  $z = \rho e^{i\psi}$ ,  $\rho \in (-\infty, +\infty)$ , то интерполяционная задача (5.8), (5.9) имеет бесконечное множество решений из класса  $A(\Gamma_{\psi}) \cap BC^{\infty}(\bar{\Gamma}_{\psi})$ , где  $\Gamma_{\psi}$  — полуплоскость  $\psi < \arg z < \psi + \pi$ .

**5.2.6.** Используемый в этом разделе метод, основанный на теореме Поля, применим и к многомерным аналогам интерполяционной задачи (5.13). Однако в этом случае изложение усложняется. Приходится накладывать дополнительные ограничения на участвующую в представлении решения вспомогательную последовательность  $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ . Рассмотрим здесь лишь двумерный аналог, пожалуй, наиболее важного частного случая общей задачи (5.13), а именно, интерполяционной задачи (5.15). Итак, по произвольно заданным комплексным числам  $d_{\alpha,\beta}$ , где  $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots$ , требуется найти функцию  $y(x_1, x_2)$  из  $C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ , удовлетворяющую соотношениям

$$\left. \frac{\partial^{\alpha+\beta} y(x_1, x_2)}{\partial x_1^{\alpha} \partial x_2^{\beta}} \right|_{x_1=x_{\alpha,\beta}^1, x_2=x_{\alpha,\beta}^2} = d_{\alpha,\beta}; \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots \quad (5.18)$$

Здесь  $x_{\alpha,\beta} := (x_{\alpha,\beta}^1, x_{\alpha,\beta}^2) \in \mathbb{R}^2$  и  $(x_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{\infty}$  — произвольно зафиксированная (двойная) последовательность точек из  $\mathbb{R}^2$ .

Решение задачи (5.18) ищем в виде ряда

$$y(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(\mu_{k,1}x_1 + \mu_{k,2}x_2)i. \quad (5.19)$$

Вспомогательные показатели  $\mu_k(\mu_{k,1}; \mu_{k,2})$  из  $\mathbb{R}^2$  выбираем так, чтобы

$$\begin{aligned} \mu_{k,1} &= \rho_k, \quad \mu_{k,2} = \tau_k \rho_k; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = +\infty; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \tau_k}{\ln \rho_k} = 0, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где  $\tau_k > 0$ ,  $\rho_k > 0$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} x_k (\mu_{k,1})^{\alpha} (\mu_{k,2})^{\beta} e^{(\mu_{k,1}x_{\alpha,\beta}^1 + \mu_{k,2}x_{\alpha,\beta}^2)i} &= d_{\alpha,\beta}; \\ \alpha, \beta &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.21)$$

Чтобы иметь возможность применить теорему Поля 5.4, которая по существу имеет одномерный характер, приходится перенумеровывать специальным образом все пары индексов  $(\alpha, \beta)$  в виде обычной (одномерной) последовательности. Именно, нумеруем эти пары в порядке возрастания величины  $\alpha + \beta$ , а в каждой группе пар с одинаковым значением  $\alpha + \beta$  — в порядке возрастания номера  $\beta$ :

$$(0, 0), (1, 0), (2, 0), (1, 1), (0, 2), \dots$$

После перенумерации система (5.21) принимает следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \nu_{k,n} = \tilde{d}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \tilde{d}_n = d_{\alpha,\beta}. \quad (5.22)$$

Используя соотношения (5.20) и то, что  $|e^{(\mu_{k,1}x_{\alpha,\beta}^1 + \mu_{k,2}x_{\alpha,\beta}^2)i}| = 1$ , легко показать, что среди коэффициентов  $\{\nu_{k,0}\}_{k=1}^{\infty}$  имеется бесконечное число отличных от нуля и, кроме того,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^{s-1} |\nu_{k,j}|}{|\nu_{k,s}|} = 0$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$

По теореме 5.4 система (5.21) имеет бесконечное множество решений  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$  таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |\mu_{k,1}|^{\alpha} |\mu_{k,2}|^{\beta} < \infty; \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots \quad (5.23)$$

Положим при  $j = 1, 2$ :

$$\begin{aligned}\Pi_j^+ &= \{z_j \in \mathbb{C} : \Im z_j > 0\}; & \bar{\Pi}_j^+ &= \{z_j \in \mathbb{C} : \Im z_j \geq 0\}; \\ \Pi_j^- &= \{z_j \in \mathbb{C} : \Im z_j < 0\}; & \bar{\Pi}_j^- &= \{z_j \in \mathbb{C} : \Im z_j \leq 0\}; \\ \Pi^+ &= \Pi_1^+ \times \Pi_2^+; & \bar{\Pi}^+ &= \bar{\Pi}_1^+ \times \bar{\Pi}_2^+; & \Pi^- &= \Pi_1^- \times \Pi_2^-; & \bar{\Pi}^- &= \bar{\Pi}_1^- \times \bar{\Pi}_2^-.\end{aligned}$$

Из соотношений (5.23) следует, что ряд (5.19) сходится абсолютно в  $BC^\infty(\bar{\Pi}^+)$ , как и ряды, полученные его почленным дифференцированием любое число раз по  $x_1$  и  $x_2$ . Очевидно, что сумма  $y(x_1, x_2)$  ряда (5.19) является решением интерполяционной задачи (5.18) из  $A(\Pi^+) \cap BC^\infty(\bar{\Pi}^+)$ .

Подведем итог проведенным рассуждениям.

**Теорема 5.7.** Для любой системы комплексных чисел  $d_{\alpha, \beta}$  ( $\alpha, \beta = 0, 1, \dots$ ) в  $A(\Pi^+) \cap BC^\infty(\bar{\Pi}^+)$  существует решение задачи (5.18), представимое в виде ряда (5.19), показатели  $\mu_{k, j}$  ( $1 \leq j \leq 2$ ) которого удовлетворяют соотношениям (5.20), а коэффициенты  $c_k$  определяются из системы (5.21) (с  $c_k = x_k$ ). Ряд (5.19) и все ряды, полученные его почленным дифференцированием любое число раз по  $x_1$  и  $x_2$ , сходятся абсолютно в  $BC^\infty(\bar{\Pi}^+)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если числа  $\mu_{k, j}$  выбрать так, чтобы

$$\begin{aligned}\mu_{k, 1} &= \rho_k, \quad \mu_{k, 2} = \tau_k \rho_k, \quad \tau_k > 0, \quad \rho_k < 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\rho_k| = +\infty; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \tau_k}{\ln |\rho_k|} = 0,\end{aligned}$$

то точно так же устанавливается существование решения задачи (5.18) в виде суммы ряда (5.19) из множества  $A(\Pi^-) \cap BC^\infty(\bar{\Pi}^-)$ . Если же

$$\tau_k < 0, \quad \rho_k < 0; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\tau_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\rho_k| = +\infty; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |\tau_k|}{\ln |\rho_k|} = 0,$$

то решение задачи (5.18) имеется в  $(A(\Pi^{-+}) \cap BC^\infty(\bar{\Pi}^{-+}))$ , где

$$\Pi^{-+} = \Pi_1^- \times \Pi_2^+; \quad \bar{\Pi}^{-+} = \bar{\Pi}_1^- \times \bar{\Pi}_2^+.$$

Читатель легко сформулирует результат в случае, когда  $\tau_k < 0$ ,  $\rho_k > 0$ .

**5.2.7.** Аналогичным образом задачу (5.15) можно исследовать в пространстве функций  $p$  переменных, где  $p \geq 3$ . Метод доказательства полученного на этом пути аналога теоремы 5.7 (и замечания к

ней) остается тем же, но доказательство становится более громоздким. Мы не будем приводить его здесь (читатель в случае нужды сможет воспроизвести его самостоятельно). Ограничимся лишь замечанием о том, что многомерный вариант задачи Бореля (5.7) исследован в работах [9, 70, 73].

**5.2.8.** Необходимые условия того, что задача (5.8), (5.9) разрешима в  $A(\Gamma_\phi) \cap BC^\infty(\bar{\Gamma}_\phi)$  для любой последовательности  $\{d_m\}_{m=0}^\infty$  из пространства  $C^\infty$  всех комплекснозначных последовательностей в общем случае, насколько известно автору, неизвестны. Приведем здесь, возможно, новые результаты, относящиеся к более частным ситуациям.

1. Пусть  $Q$  — произвольное подмножество  $\mathbb{C}$  и  $C_1^\infty(Q)$  — совокупность определенных на  $Q$  функций, у которых в каждой точке  $z_0$  из  $Q$  существуют производные всех порядков  $y^{(k)}(z_0)$ , понимаемые в каком-то смысле (например,

$$y^{(k+1)}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0, z \in Q} \frac{y^{(k)}(z) - y^{(k)}(z_0)}{z - z_0} \quad \forall k \geq 0,$$

или

$$y^{(k+1)}(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0, z \in Q, \\ 0 \leq |\arg z - \arg z_0| < \alpha}} \frac{y^{(k)}(z) - y^{(k)}(z_0)}{z - z_0}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

и т. д.).

**Теорема 5.8.** Пусть система

$$\sum_{k=0}^{n_m} a_{k,m} y^{(k)}(\tilde{z}) = d_m, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (5.24)$$

где

$$\forall m \geq 0 \quad a_{n_m, m} \neq 0, \quad 0 \leq n_m \leq n_{m+1}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} n_m = \infty, \quad \tilde{z} \in Q, \quad (5.25)$$

такова, что при любом  $m \geq 0$   $n_m = n_{m+1} = \dots = n_{m+s_m}$ ;  $s_m \geq 0$ .

Для того чтобы интерполяционная задача (5.24) (при условиях (5.25)) была разрешима в  $C^\infty$ , необходимо, чтобы

$$n_m \geq m + s_m - 1 \quad \forall m \geq 1. \quad (5.26)$$

◁ Рассуждая от противного, допустим, что

$$\exists m_0 \geq 1 : n_{m_0} < m_0 + s_{m_0} - 1. \quad (5.27)$$

Рассмотрим первые  $m_0 + s_{m_0}$  уравнений системы (5.24) как самостоятельную систему уравнений относительно неизвестных  $y^{(k)}(\tilde{z})$   $k = 0, 1, \dots, n_{m_0}$ . Ее матрица  $A$  состоит из  $n_{m_0} + 1$  столбцов и  $m_0 + s_{m_0}$  строк. В силу условия (5.27) ранг  $r$  этой матрицы не больше  $n_{m_0} + 1$ . Пусть выбранная «усеченная» система имеет решение при каких-то правых частях  $c_0, c_1, \dots, c_{m_0+s_{m_0}-1}$ . По теореме Кронекера — Капелли ранг расширенной матрицы системы равен  $r$ . Это означает, в частности, что равны нулю все миноры, полученные присоединением («окаймлением») к отличному от нуля минору  $\Delta$  порядка  $r$  матрицы  $A$  ее  $(r+1)$ -го столбца  $(d_{l_1}, d_{l_2}, \dots, d_{l_{r+1}})$  и какой-либо  $(r+1)$ -ой строки  $a_{j_1, l_{r+1}}, a_{j_2, l_{r+1}}, \dots, a_{j_{r+1}, l_{r+1}}$ :

$$d_{l_{r+1}} \cdot \Delta + \sum_{k=1}^r d_{l_k} \gamma_{k, \tau} = 0, \quad l_1 < l_2 < \dots < l_{r+1} \leq m_0 + s_{m_0}. \quad (5.28)$$

Но равенство (5.28) означает, что между правыми частями системы (5.24), в случае ее разрешимости, должна быть линейная зависимость. Следовательно, эта система не может быть разрешима при произвольной правой части из  $C^\infty$ . ▷

2. Рассмотрим в пространстве  $C^\infty(Q)$  обобщенную задачу Бореля

$$y^{(n_m)}(\tilde{z}) = d_m, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (5.29)$$

где

$$0 \leq n_0 \leq n_1 \leq \dots \quad (5.30)$$

Следующий результат почти очевиден.

**Теорема 5.9.** Пусть  $\tilde{z} \in Q$  и система (5.29) удовлетворяет условию (5.30). Для того чтобы интерполяционная задача (5.29) была разрешима в  $C^\infty(Q)$  для любой последовательности  $\{d_m\}_{m=0}^\infty$  из  $C^\infty$ , необходимо, чтобы

$$n_{m+1} > n_m \quad \forall m \geq 0. \quad (5.31)$$

◁ Действительно, если при каком-либо  $m_0 \geq 0$   $n_{m_0+1} = n_{m_0}$ , то тогда должно выполняться (в случае разрешимости системы (5.29) в  $C^\infty(Q)$ ) равенство  $d_{m_0+1} = d_{m_0}$ , и снова система (5.29) не может иметь решение в  $C^\infty(Q)$  при произвольной правой части  $(d_m)_{m=0}^\infty$ . ▷

Из теорем 5.3 (с учетом конца пункта 5.2.5) и 5.9 вытекает такое

**Следствие.** Пусть  $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ ,  $\phi \in [0, \pi)$  и выполняется условие (5.30). Для того чтобы обобщенная задача Бореля (5.29) для любой последовательности  $\{d_m\}_{m=1}^\infty$  из  $C^\infty$  была разрешима в  $A(\Gamma_\phi) \cap BC^\infty(\bar{\Gamma}_\phi)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (5.31).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Пусть  $\phi \in [0, \pi)$ , а натуральные числа  $n_m$  таковы, что  $n_m \geq 0$  при любом  $m \geq 0$ , но условие (5.30) не обязательно выполняется. Тогда можно установить, что для того, чтобы задача (5.29) была разрешима в  $A(\Gamma_\phi) \cap BC^\infty(\Gamma_\phi)$  для любой правой части  $(d_m)_{m=0}^\infty$  из  $C^\infty$ , необходимо и достаточно, чтобы все числа  $\{n_m\}_{m=0}^\infty$  были попарно различны.

### 5.3. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка

**5.3.1.** Напомним вначале хорошо известные результаты о задаче Коши для однородного дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(z) = 0, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad a_n \neq 0. \quad (5.32)$$

Для любой точки  $z_0$  из  $\mathbb{C}$  и произвольно заданной системы  $n$  комплексных чисел  $c_0, c_1, \dots, c_n$  найдется целая функция  $v(z)$ , удовлетворяющая уравнению (5.32) во всей комплексной плоскости и такая, что

$$v^{(k)}(z_0) = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.33)$$

При этом решение задачи Коши (5.32), (5.33) единственно в классе  $A\{z_0\}$  функций, аналитических в окрестности (своей для каждой функции из  $A\{z_0\}$ ) точки  $z_0$ .

Ситуация изменится, если ищется аналитическое в окрестности точки  $z_0$  решение уравнения (5.32), удовлетворяющее начальным условиям:

$$v^{(k)}(z_0) = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.34)$$

В этом случае решение задачи Коши в рассматриваемом классе  $A\{z_0\}$  существует тогда и только тогда, когда начальные данные  $c_k$

$(0 \leq k \leq n)$  уже не произвольны, а удовлетворяют линейному соотношению

$$\sum_{k=0}^n a_k c_k = 0. \quad (5.35)$$

Если последнее равенство имеет место, то решение задачи Коши существует, единственно в классе  $A\{z_0\}$  и принадлежит пространству  $A(\mathbb{C})$  всех целых функций.

Наконец, для уравнения (5.32) можно поставить и бесконечную задачу Коши, состоящую в нахождении решения из класса  $A\{z_0\}$  уравнения (5.1), удовлетворяющего бесконечному числу начальных условий:

$$y^{(m_k)}(z_0) = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq m_k \uparrow +\infty. \quad (5.36)$$

Некоторые результаты, полученные для такой задачи, приведены в [33, § 1].

**5.3.2.** Обращаясь к однородному дифференциальному уравнению бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$L_\infty y := \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z) = 0, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.37)$$

и ограничиваясь его аналитическими решениями, естественно предположить, что оператор  $L_\infty$ , стоящий в левой части этого уравнения, применим к любой функции, аналитической в какой-нибудь области из  $\mathbb{C}$ , в каждой точке ее аналитичности, т. е. (см., например, [32]), что характеристическая функция  $a(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  оператора  $L_\infty$  является целой и, более того, принадлежит пространству  $[1, 0]$  всех целых функций роста не выше, чем первого порядка и минимального типа. Как хорошо известно еще из работ Поля и Валирона [170, 178], для любой области  $G$  из  $\mathbb{C}$  оператор  $L_\infty$  с характеристической функцией (символом) из  $[1, 0]$  непрерывен в пространстве  $A(G)$ ; далее, если  $y$  — любое решение уравнения (5.37) из класса  $A\{z_0\}$ , где  $z_0$  — произвольная точка из  $\mathbb{C}$ , то функция  $y$  всюду однозначна и ее полная вейерштрассова область существования  $W(y)$  выпукла. Для уравнения (5.37) в классе  $A\{z_0\}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ , можно ставить как конечную, так и бесконечную задачу Коши (5.36). Некоторые результаты в этом направлении можно найти в [33, § 2]. Как будет показано ниже, часть этих результатов можно существенно усилить и обобщить. Итак, пусть  $a(z)$  — трансцендентная целая



функция из класса  $[1, 0]$ ,  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  — бесконечная последовательность всех ее нулей (произвольной кратности).

Пусть, далее,  $z_0 \in \mathbb{C}$  и пусть сначала  $y(z)$  — решение из  $A\{z_0\}$  «стандартной» бесконечной задачи Коши:

$$y^{(n)}(z_0) = d_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.38)$$

Очевидно, что для существования такого решения необходимо и достаточно, чтобы последовательность  $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$  удовлетворяла двум условиям

$$1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_k = 0; \quad 2) \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{|d_k|^{1/k}}{(k!)^{1/k}} < +\infty.$$

Далее, если эти два условия выполнены, то решение задачи Коши (5.37), (5.38) существует, единственно в классе  $A\{z_0\}$  и записывается в виде  $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} (z - z_0)^n$ . Аналогично, если  $G$  — произвольная выпуклая область из  $\mathbb{C}$  и  $z_0 \in G$ , то для разрешимости задачи Коши (5.37), (5.38) в  $A(G)$  необходимо и достаточно выполнение условий 1), 2) и еще такого:

3) функция  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{k!} (z - z_0)^k$ , определенная (в силу условия 2)) в окрестности точки  $z_0$ , допускает (однозначное) аналитическое продолжение в область  $G$ .

Если условия 1)–3) выполнены, то задача Коши (5.37), (5.38) разрешима в  $A(G)$ , причем ее решение единственно в  $A\{z_0\}$  (и подавно в  $A(G)$ ).

**5.3.3.** Совсем иной характер имеют результаты о разрешимости задачи Коши в случае, когда решение  $y(z)$  уравнения (5.37) аналитично в какой-либо области  $G$ , а  $z_0$  — граничная точка  $G$ .

Чтобы убедиться в этом, введем множество  $\mu_a$  всех предельных точек (бесконечной) последовательности  $\{\arg \lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  (здесь и далее в этом разделе  $\arg w$  отсчитывается против часовой стрелки от положительной полуоси  $w$ -плоскости и изменяется в промежутке  $[0, 2\pi)$ ). Пусть  $\nu \in \mu_a$  (множество  $\mu_a$  непусто, так как функция  $a(z)$  имеет бесконечное число нулей). Зафиксируем произвольную точку  $z_0$  из  $\mathbb{C}$  и обозначим символом  $D(z_0, \nu)$  полуплоскость  $\frac{\pi}{2} - \nu < \arg(z - z_0) < \frac{3}{2}\pi - \nu$  с границей  $l_{\nu}(z_0)$  — прямой, проходящей через точку  $z_0$ . Постараемся найти решение  $y(z)$  уравнения (5.37) из  $A(D(z_0, \nu))$  такое, что функция  $y(z)$  и каждая ее производная  $y^{(n)}(z)$  имеют в  $D(z_0, \nu)$  угловые граничные значения в точке  $z_0$ , которые

мы будем обозначать теми же символами  $y(z_0)$ ,  $y^{(n)}(z_0)$ ,  $n \geq 1$ , причем эти угловые граничные значения удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{k=0}^{n_m} a_{k,m} y^{(k)}(z_0) = d_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.39)$$

в которых  $(d_n)_{n=0}^\infty$  — произвольно заданная последовательность комплексных чисел, а  $\{a_{k,m} : k = 0, 1, \dots, n_m; m = 0, 1, \dots\}$  — (также произвольно) зафиксированная совокупность комплексных чисел, для которых  $n_m \uparrow +\infty$  и  $a_{n_m,m} \neq 0$ ,  $m = 0, 1, \dots$ .

С этой целью выделим подпоследовательность  $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty = \{\lambda_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  нулей функции  $a(z)$  такую, что

$$\tau_k \neq 0, \quad |\tau_k| \uparrow \infty, \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{|\tau_k|} < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \arg \tau_k = \nu.$$

Составим ряд

$$\sum_{k=1}^\infty x_k \exp \tau_k(z - z_0), \quad (5.40)$$

в котором числа  $x_k$  определяются из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^\infty x_k b_{k,s} = d_s, \quad s = 0, 1, 2, \dots; \quad b_{k,s} = \sum_{j=0}^{n_s} a_{j,s} (\tau_k)^j. \quad (5.41)$$

При этом  $\lim_{k \rightarrow \infty} |b_{k,s}| = +\infty$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{k,s}}{b_{k,s+1}} = 0$  при любом  $s \geq 0$  и по теореме 5.4 Поля, которая уже применялась в предыдущем разделе, система (5.41) имеет бесконечное число линейно-независимых решений  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  таких, что  $\sum_{k=1}^\infty |x_k| |b_{k,s}| < \infty$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$ .

Так как при любом фиксированном  $s \geq 0$  и  $k \rightarrow \infty$

$$|b_{k,s}| \sim |a_{n_s,s}| |\tau_k|^{n_s}, \quad n_s \uparrow +\infty, \quad |\tau_k| \rightarrow \infty,$$

то отсюда следует, что  $\sum_{k=0}^\infty |x_k| |\tau_k|^p < \infty$  при всех  $p \geq 0$ .

Зафиксируем какое-либо  $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Пусть

$$z \in \Gamma(z_0, \nu; \delta) := \left\{ z : z \in D(z_0, \nu), \frac{\pi}{2} - \nu + \delta \leq \arg(z - z_0) \leq \frac{3}{2}\pi - \nu - \delta \right\}.$$

Тогда при любых  $s \geq 0$  и  $k \geq N_0$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=N_0}^{\infty} |x_k| |\tau_k|^s |\exp \tau_k(z - z_0)| = \\ & = \sum_{k=N_0}^{\infty} |x_k| |\tau_k|^s \exp [|\tau_k| |z - z_0| \cos(\arg \tau_k + \arg(z - z_0))]. \end{aligned}$$

Номер  $N_0$  выберем так, чтобы  $\arg \tau_k \in (\nu - \frac{\delta}{2}, \nu + \frac{\delta}{2})$  для любого  $k \geq N_0$ . Но тогда

$$\begin{aligned} & \exists \beta > 0 : \sum_{k=N_0}^{\infty} |x_k| |\tau_k|^s |\exp \tau_k(z - z_0)| \leq \\ & \leq \sum_{k=N_0}^{\infty} |x_k| |\tau_k|^s \exp \left\{ |\tau_k| |z - z_0| \max \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} \right), \cos \left( \frac{3}{2}\pi - \frac{\delta}{2} \right) \right] \right\} = \\ & = \sum_{k=N_0}^{\infty} |x_k| |\tau_k|^s \exp(-\beta |\tau_k| |z - z_0|) \leq \sum_{k=N_0}^{\infty} |x_k| |\tau_k|^s < \infty \quad (\beta > 0). \end{aligned}$$

Следовательно, ряд (5.40) и любой ряд, полученный его почленным дифференцированием  $s$  раз ( $s = 1, 2, \dots$ ), сходятся равномерно на множестве  $\Gamma(z_0, \nu; \delta)$ . Поэтому сумма  $y(z)$  ряда бесконечно дифференцируема в любой внутренней точке  $\Gamma(z_0, \nu; \delta)$  (более того,  $y \in A(\Gamma(z_0, \nu; \delta))$ ) и при каждом  $s \geq 0$  существует предел

$$y^{(s)}(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0, \\ z \in \Gamma(z_0, \nu; \delta)}} y^{(s)}(z),$$

причем числа  $y^{(s)}(z_0)$  удовлетворяют соотношениям (5.39).

Подведем итог проведенным рассуждениям, принимая во внимание, что число  $\delta > 0$  можно взять как угодно малым.

**Теорема 5.10.** Пусть  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\nu \in \mu_a$ ,  $(d_k)_{k=0}^{\infty}$  — произвольная последовательность комплексных чисел и  $a(z)$  — трансцендентная функция из класса  $[1, 0]$ . Тогда в пространстве  $A(D(z_0, \nu))$  найдется функция  $y(z)$ , представляемая сходящимся в  $A(D(z_0, \nu))$  рядом вида (5.40) и удовлетворяющая в  $D(z_0, \nu)$  уравнению (5.37). Кроме того, при любом  $s \geq 0$  функция  $y^{(s)}(z)$ , где  $y$  — сумма ряда (5.40), имеет в  $D(z_0, \nu)$  в точке  $z_0$  угловое граничное значение:

$$y^{(s)}(z_0) := \lim_{\substack{z \rightarrow z_0, \\ z \in \Gamma(z_0, \nu; \delta)}} y^{(s)}(z) \quad \forall \delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \forall s \geq 0,$$

и функция  $y(z)$  является решением обобщенной задачи Коши (5.39).

Пусть теперь  $\{x_k^1\}_{k=1}^\infty$  и  $\{x_k^{(2)}\}_{k=1}^\infty$  — два различных решения системы (5.41) такие, что  $\sum_{k=1}^\infty |x_k^j| |\tau_k|^s < \infty$ ,  $j = 1, 2$ , где числа  $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$  выбраны, как выше в ходе доказательства теоремы 5.10. Тогда существует  $k_0 \geq 1$ :  $x_{k_0}^1 \neq x_{k_0}^2$ .

Положим  $a_{k_0}(z) = \frac{a(z)}{(z - \tau_{k_0})^{m_0}}$ , где  $m_0$  — кратность нуля  $\tau_{k_0}$  символа  $a(z)$ . Тогда  $a_{k_0}(z) \in A(\mathbb{C})$  и по теореме о категориях [98, гл. I]  $a_{k_0}(z) \in [1, 0]$ . Положим  $L_\infty^{k_0} u := a_{k_0}(D)y = \sum_{l=0}^\infty b_{l,k_0} y^{(l)}(z)$ , где

$$\sum_{l=0}^\infty b_{l,k_0} z^l = a_{k_0}(z); \quad v_j(z) := \sum_{k=1}^\infty x_k^j \exp \tau_k(z - z_0), \quad j = 1, 2.$$

Тогда для любого  $z \in D(z_0, \nu)$

$$L_\infty^{k_0}(v_1(z) - v_2(z)) = (x_{k_0}^1 - x_{k_0}^2) a_{k_0}(\tau_{k_0}) \exp \tau_{k_0}(z - z_0) \neq 0.$$

Следовательно,  $v_1$  и  $v_2$  — различные функции из  $A(D(z_0, \nu))$  и теорему 5.10 можно дополнить следующими утверждением.

**Теорема 5.11.** *В предположениях теоремы 5.10 существует бесконечное множество попарно различных решений уравнения (5.37) из класса  $A(D(z_0, \nu))$ , являющихся и решениями обобщенной задачи Коши (5.39).*

Если, в частности, положить при любом  $m \geq 0$   $n_m = m$ ,  $a_{n_m, m} = 1$ ,  $a_{k, m} = 0$ ,  $0 \leq k < n_m$ , то теорема 5.11 показывает, что в случае, когда уравнение (5.37) не вырождается в уравнение конечного порядка (т. е. когда его символ  $a(z)$  не является многочленом), (угловые) граничные задания  $y^{(m)}(z_0) = d_m$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , не определяют однозначно соответствующее голоморфное решение задачи Коши и, следовательно, для уравнения бесконечного порядка нет прямого аналога известной теоремы Брио и Букке (дополненной Пикаром и Пенлеве), справедливой для обыкновенных дифференциальных уравнений конечного порядка.

**5.3.4.** При некоторых дополнительных предположениях относительно нулей  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  символа  $a(z)$  теоремы 5.10 и 5.11 можно усилить.

**Теорема 5.12.** *Пусть  $\nu \in \mu_a$  и существует подпоследовательность  $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ ,  $t_k = \lambda_{j_k}$ ,  $j_k \uparrow \infty$ , нулей  $a(z)$  такая, что*

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\nu - \arg t_k| \cdot \frac{|t_k|}{\ln |t_k|} < +\infty. \quad (5.42)$$

Тогда для произвольной последовательности комплексных чисел  $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$  существует бесконечное множество решений уравнения (5.37), аналитических в полуплоскости  $D(z_0, \nu)$ , бесконечно дифференцируемых в каждой конечной точке ее замыкания  $\overline{D}(z_0, \nu)$  и таких, что само решение  $v(z)$  и ее любая производная  $v^{(n)}(z)$ ,  $n \geq 1$ , имеют в точке  $z_0$  предельные значения в  $D(z_0, \nu)$ , удовлетворяющие соотношениям (5.39)

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0, \\ z \in D(z_0, \nu)}} v^{(m)}(z) = v^{(m)}(z_0); \quad \sum_{k=0}^{n_m} a_{k,m} v^{(k)}(z_0) = d_m, \quad m = 0, 1, \dots$$

◁ Как и ранее, строим ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} y_k \exp t_k(z - z_0)$ , коэффициенты  $y_k$  которого определяются из бесконечной системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k b_{k,s} = d_s, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (5.43)$$

На основании все той же теоремы Поля установливаем, что система (5.43) имеет бесконечное число линейно независимых решений  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$  таких, что при всех  $s \geq 0$   $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| |t_k|^s < +\infty$ . Имеем для любого  $s \geq 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| |t_k|^s \exp t_k(z - z_0) = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| |t_k|^s \exp |t_k| |z - z_0| \cos[\arg t_k + \arg(z - z_0)]. \end{aligned}$$

Для  $k \geq 1$  на основании соотношения (5.42)

$$|\cos(\arg t_k + \arg(z - z_0)) - \cos(\nu + \arg(z - z_0))| \leq M |\arg t_k - \nu| \leq M_1 \frac{\ln |t_k|}{|t_k|}.$$

Далее, при любых  $s \geq 0$ ,  $k \geq 1$  и  $z \in \overline{D}(z_0, \nu)$

$$\begin{aligned} |y_k| |t_k|^s \exp t_k(z - z_0) & \leq |y_k| |t_k|^s \exp |t_k| |z - z_0| \cos(\nu + \arg(z - z_0)) \times \\ & \times \exp M_1 |z - z_0| \ln |t_k| \leq |y_k| |t_k|^{s+M_1|z-z_0|}. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} y_k t_k^s \exp t_k(z - z_0)$  равномерно и абсолютно сходится на любом множестве  $K_R(z_0) \cap \overline{D}(z_0, \nu)$ , где

$$K_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}, \quad 0 < R < +\infty.$$

Но тогда его сумма  $v(z)$  аналитична в  $D(z_0, \nu)$ , бесконечно дифференцируема в  $\overline{D}(z_0, \nu)$  и для любого  $n \geq 0$  в  $\overline{D}(z_0, \nu)$  существует предел

$$v^{(n)}(z_0) := \lim_{\substack{z \rightarrow z_0, \\ z \in D(z_0, \nu)}} v^{(n)}(z),$$

причем для всех  $m \geq 0$  справедливы соотношения (5.39).

Наконец, как при доказательстве теоремы 5.11, показываем, что различным решениям  $\{y_k\}_{k=1}^\infty$  системы (5.43) отвечают различные функции вида  $\sum_{k=1}^\infty y_k \exp t_k(z - z_0)$ , чем и завершается доказательство теоремы.  $\triangleright$

**Следствие.** Пусть  $\nu \in \mu_a$  и имеется подпоследовательность нулей  $\{t_k\}_{k=1}^\infty$  символа  $a(z)$  таких, что  $\arg t_k = \nu$ ,  $k \geq 1$ . Тогда справедливы все утверждения теоремы 5.12.

В частном случае, когда для любого  $m \geq 0$   $a_{n_m} = 1$ ,  $a_{k,m} = 0$  при  $0 \leq k < n_m$ , т. е. для обычной бесконечной задачи Коши (5.38), это следствие ранее получено в работе [33].

**5.3.5.** Перейдем теперь к обобщенной задаче Коши (5.39) для уравнения (5.37), считая, что ее решение ищется в пространстве  $A(G)$  функций, аналитических в выпуклой области  $G$ , и что точка  $z_0$ , в которой задаются начальные данные, принадлежит границе  $\partial G$  области  $G$ .

Пусть, как выше,  $\mu_a$  — совокупность всех предельных точек последовательности  $\{\arg \lambda_n\}_{n=1}^\infty$  и  $\{\lambda_n\}$  — попарно различные нули функции  $a(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$  из класса  $[1, 0]$ .

Как было доказано автором (см. [56, теорема 5] или [59]), для любого решения  $y(z)$  уравнения (5.37), аналитического в ограниченной выпуклой области  $G$ , существует область  $G_0 \supseteq G$ , в которую  $y(z)$  аналитически продолжается. Напомним, что по известной теореме Поля — Валирона (не путать с теоремой 5.4, также принадлежащей Полю) любое аналитическое в окрестности какой-либо точки  $z_0$  решение  $y(z)$  уравнения (5.37) с символом  $a(z)$  из  $[1, 0]$  всюду однозначно и его полная вейерштрассова область существования  $W_y$  выпукла. Кроме того, согласно [56, 59], если  $y(z)$  — решение уравнения (5.37) (по-прежнему с  $a(z) \in [1, 0]$ ) из  $A(G)$ , где  $G$  — выпуклая ограниченная область в  $\mathbb{C}$ , то

$$W_y \supseteq G_0 := \bigcap_{\nu_\alpha \in \mu_a} D(w_\alpha, \nu_\alpha),$$

где пересечение берется по всем  $\nu_\alpha$  из  $\mu_a$ , а  $w_\alpha \in \partial G$ . При этом всегда  $G \subseteq G_0$ . Как показано в [56, 59], существуют решения  $y(z)$  уравнения (5.37) из  $A(G)$  (названные в [56]  $G$ -главными), для которых  $W_y = G_0$ . Заметим, что если (всегда непустое) множество  $\mu_a$  состоит из одного элемента, то  $G_0$  — полуплоскость, ограниченная опорной прямой к  $G$ ; если  $\mu_a$  содержит два элемента, то  $G_0$  — угол или полоса, а если  $\mu_a$  состоит из  $n$  элементов, где  $3 \leq n < \infty$ , то  $G_0$  — выпуклый  $n$ -угольник, описанный вокруг  $G$ . Наконец, если множество  $\mu_a$  бесконечно, то  $G_0$  — выпуклая область, содержащая  $G$ . Если  $z_0$  — любая граничная точка  $G_0$ , то найдется полуплоскость  $D(z_0, \nu_0)$ ,  $\nu_0 \in \mu_a$ , содержащая  $G_0$  (и подавно  $G$ ). Обобщенная задача Коши (5.39) для уравнения (5.37), как было уже доказано, имеет бесконечное множество решений из  $A(D(z_0, \nu_0))$  (подавно из  $A(G)$ ).

Если же  $z_0 \in G_0 \setminus G$ , то в этом случае известны лишь результаты, указанные для «стандартной» задачи Коши (5.37), (5.38) в п. 5.3.2.

**5.3.6.** В заключение этого раздела рассмотрим обычную задачу Коши (5.38) для неоднородного уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z) = f(z), \quad (5.44)$$

считая, что  $a(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in [1, 0]$ ,  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}$ ,  $f \in A(G)$ . Решение задачи Коши (5.44), (5.38) ищется в пространстве  $A(G)$ . Как известно (см., например, [36]), для любой функции  $f$  из  $A(G)$  уравнение (5.44) имеет частное решение  $y_f(z)$  из  $A(G)$ . Перейдя к новой неизвестной функции  $v(z) = y(z) - y_f(z)$ , получим для нее однородное уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k v^{(k)}(z) = 0.$$

Если  $z_0 \in G$ , то задача Коши для новой функции  $v(z)$  принимает вид

$$v^{(n)}(z_0) = d_n - y_f^{(n)}(z_0), \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.45)$$

Очевидно, что она разрешима в  $A(G)$  тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k d_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y_f^{(k)}(z_0)$$

и когда функция

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ d_n - y_f^{(n)}(z_0) \right] \frac{(z - z_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{(z - z_0)^n}{n!} - y_f(z)$$

аналитически продолжается в  $G$  (т. е.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(z-z_0)^n}{n!} \in A(G)$ ). Если же  $z_0$  — граничная точка  $G$ , то начальные задания имеют смысл лишь в случае, если определены все величины  $y_f^{(n)}(z_0)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Так, например, будет, если  $f$  локально-аналитична в замкнутой области  $\bar{G}$  (т. е.  $f \in A(\bar{G})$ ), так как [36] всегда существует частное решение уравнения (5.44) из  $A(\bar{G})$ . Более того, даже если рассматривать задачу Коши для уравнения (5.44) по-прежнему в классе  $A(G)$  (но считая, что  $f \in A(\bar{G})$ ), то в этом случае «работает» замена переменной  $v(z) = y(z) - y_f(z)$ ,  $y_f \in A(\bar{G})$ , приводящая к задаче Коши для однородного уравнения (5.37) в классе  $A(G)$  с начальными данными (5.4).

Если же неизвестно, определены ли величины  $y_f^{(n)}(z_0)$ ,  $n \geq 0$ , то такой переход к однородному уравнению (5.37) оказывается невозможным (это обстоятельство в работе [33] не было учтено).

Таким образом, в общей ситуации даже обычная бесконечная задача Коши для неоднородного уравнения (5.44) с символом  $a(z)$  из  $[1, 0]$  и произвольной правой частью  $f$  из  $A(G)$ , где  $G$  — выпуклая область, а  $z_0 \in \partial G$ , еще ждет своего решения.

Почти не разрабатывалась и задача Коши для однородного уравнения (5.37) в случае, когда  $a(z)$  — целая функция экспоненциального типа (некоторые результаты в этом направлении приведены в § 3 работы [33] для специальной ситуации, когда  $G$  — круг  $K_R = \{z : |z| < R\}$ ).

#### 5.4. Интерполяционные задачи и нетривиальные разложения нуля

**5.4.1.** Пусть  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$  с опорной функцией  $g(-\varphi)$ ; пусть еще  $\bar{G}_1$  — какой-либо выпуклый компакт  $G$  с опорной функцией  $g_1(-\varphi)$ , а  $G_1 := \text{int } \bar{G}_1$  — его внутренность (возможно, пустая). Будем считать, что  $0 \in \bar{G}_1 \subset G$ , т. е. что

$$0 \leq g_1(\varphi) < g(\varphi) \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (5.46)$$



Рассмотрим интерполяционную задачу

$$y(\lambda_n) = d_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.47)$$

предполагая до конца данного раздела и впредь уже этого не оговаривая, что числа  $\lambda_n$  попарно различны и возрастают не слишком медленно — так, что выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0. \quad (5.48)$$

Допустим, что интерполяционная задача (5.47) имеет решение  $v(\lambda)$  в классе  $[1, g_1(\varphi)]$  всех целых функций экспоненциального типа с индикатором, не превосходящим  $g_1(\varphi)$ . Тогда, очевидно,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln |d_n| - g_1(\arg \lambda_n) \right] \leq 0. \quad (5.49)$$

Зафиксируем какую-либо последовательность комплексных чисел  $b := \{b_k\}$ , удовлетворяющую условиям

$$b_k \neq 0 \quad \forall k \geq 1; \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |b_k| + g_1(\arg \lambda_k) \right] < 0. \quad (5.50)$$

Как легко убедиться (учитывая еще соотношения (5.46) и (5.48)), тогда  $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} |d_k| |b_k| < \infty$ , ряды

$$D_b(\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k b_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad B_b(\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\lambda - \lambda_k}$$

абсолютно сходятся при всех  $\lambda \neq \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и  $D_b(\lambda)$ ,  $B_b(\lambda)$  — мероморфные функции с возможными простыми полюсами в точках  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . При этом некоторые из чисел  $d_k$  могут равняться нулю, и тогда в соответствующих точках  $\lambda_k$  функция  $D_b(\lambda)$  аналитична.

Положим  $w(\lambda) := \frac{D_b(\lambda)}{B_b(\lambda)}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \neq \lambda_k$ ,  $w(\lambda_k) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_k} \frac{D_b(\lambda)}{B_b(\lambda)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Ясно, что  $w(\lambda) \in A(\mathbb{C})$ , причем  $w(\lambda_n) = d_n$  для любого  $n \geq 1$ . Если  $w \in [1, g_1]$ , то  $w$  — решение интерполяционной задачи (5.47) из  $[1, g_1(\varphi)]$ . Таким образом, справедлива

**Теорема 5.13.** Пусть выполнены условия (5.46), (5.48)–(5.50). Пусть, далее, имеет место соотношение

$$\frac{D_b(\lambda)}{B_b(\lambda)} \in [1, g_1]. \quad (5.51)$$

Тогда задача (5.47) имеет решение  $\frac{D_b(\lambda)}{B_b(\lambda)}$  в  $[1, g_1(\varphi)]$ .

**5.4.2.** При некоторых дополнительных предположениях условие (5.51) будет и необходимым для разрешимости интерполяционной задачи (5.47) в  $[1, g_1]$ .

Чтобы убедиться в этом, предположим (и будем считать так на протяжении всего данного раздела), что в  $A(G)$  имеется нетривиальное разложение нуля (н. р. н.) по системе  $E_\Lambda := (\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$ . Как мы уже знаем, это означает, что имеется ряд вида  $\sum_{k=1}^\infty c_k e^{\lambda_k z}$ , не все коэффициенты  $c_k$  которого равны нулю и который сходится в  $A(G)$ , причем его сумма равна нулю. Учитывая условие (5.48), заключаем по теореме 2.3, что ряд  $\sum_{k=1}^\infty c_k e^{\lambda_k z}$  сходится абсолютно в  $A(G)$  и его коэффициенты  $c_k$  таковы, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln |c_n| + g(\arg \lambda_n) \right] \leq 0.$$

Зафиксируем какое-либо  $\lambda \neq \lambda_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и рассмотрим функцию (от  $z$ )  $\varphi_\lambda(z) := \sum_{n=1}^\infty \frac{c_n e^{\lambda_n z}}{\lambda - \lambda_n}$ . Очевидно, что  $\varphi_\lambda(z) \in A(G)$ , причем  $\frac{d}{dz} \varphi_\lambda(z) = \lambda \varphi_\lambda(z)$  и, следовательно,  $\varphi_\lambda(z) = \Phi(\lambda) e^{\lambda z}$ . Отсюда

$$\Phi(\lambda) = e^{-\lambda z} \sum_{n=1}^\infty \frac{c_n e^{\lambda_n z}}{\lambda - \lambda_n} \quad \forall z \in G, \quad \forall \lambda \neq \lambda_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Полагая в последнем равенстве  $z = 0$ , получим, что  $\Phi(\lambda) = \sum_{n=1}^\infty \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n}$ . Таким образом,  $\Phi$  — мероморфная в  $\mathbb{C}$  функция с (возможными, если  $c_n \neq 0$ ) простыми полюсами  $\lambda_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Предположим, что интерполяционная задача (5.47) имеет решение  $v$  в классе  $[1, g_1]$ . Тогда числа  $d_n = v(\lambda_n)$  удовлетворяют условию (5.49). Образует (по-прежнему при произвольно зафиксированном  $\lambda$ , отличном от всех чисел  $\lambda_n$ ,  $n \geq 1$ ) функцию  $M_\lambda(z) := \sum_{n=1}^\infty \frac{c_n d_n e^{\lambda_n z}}{\lambda - \lambda_n}$ .

Пусть  $G_2$  — выпуклая подобласть  $G$  с опорной функцией  $g_2(-\varphi)$  такой, что  $0 < g_2(\varphi) < g(\varphi) - g_1(\varphi)$  при любом  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Выберем число  $\eta > 0$  настолько малым, что  $g_2(\varphi) + g_1(\varphi) + 3\eta < g(\varphi)$ ,

$\varphi \in [0, 2\pi)$ . Для любого  $\delta > 0$  и для любого выпуклого множества  $Q$  будем обозначать символом  $Q^\delta$  выпуклое же множество, являющееся арифметической суммой  $Q$  и  $K_\delta$ , где  $K_\delta = \{z : |z| \leq \delta\}$ :  $Q^\delta := \{z = z_1 + z_2 : z_1 \in Q, z_2 \in K_\delta\}$ . Если  $\Gamma_\eta := \partial(G_1^\eta)$ , то  $v(\lambda_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\eta} W(t) e^{\lambda_n t} dt$  при всех  $n \geq 1$ , где  $W(t)$  — функция, ассоциированная с  $v$  по Борелю. Для любой точки  $z$  из  $G_2^\eta$  имеем:

$$\begin{aligned} M_\lambda(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n d_n e^{\lambda_n z}}{\lambda - \lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n e^{\lambda_n z}}{(\lambda - \lambda_n)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\eta} e^{\lambda_n t} W(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\eta} W(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n e^{\lambda_n(z+t)}}{\lambda - \lambda_n} dt = \Phi(\lambda) e^{\lambda z} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\eta} e^{\lambda t} W(t) dt = \\ &= \Phi(\lambda) e^{\lambda z} v(\lambda) = H(\lambda) e^{\lambda z}, \quad H(\lambda) := v(\lambda) \cdot \Phi(\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда  $\frac{H(\lambda)}{\Phi(\lambda)} = v(\lambda) \in [1, g_1]$ . При этом  $H(\lambda) = M_\lambda(0) = D_c(\lambda)$ , где  $c = \{c_k\}_{k=1}^\infty$ .

Сформулируем полученный результат.

**Теорема 5.14.** Пусть  $G$  — ограниченная выпуклая область, содержащая начало координат, с опорной функцией  $g(-\varphi)$ . Пусть, далее, в  $A(G)$  имеется н. р. н. по системе  $E_\Lambda = (e^{\lambda_k z})_{k=1}^\infty$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z} = 0, \quad z \in G.$$

Пусть, наконец,  $g_1(\varphi)$  — тригонометрически выпуклая функция такая, что  $0 \leq g_1(\varphi) < g(\varphi)$  при любом  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , а  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  — числовая последовательность, для которой выполнено условие (5.49). Тогда, если интерполяционная задача (5.47) разрешима в  $[1, g_1]$ , то имеет место соотношение  $\frac{D_c(\lambda)}{B_c(\lambda)} \in [1, g_1]$ , где

$$D_c(\lambda) = M_\lambda(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n d_n}{\lambda - \lambda_n}; \quad B_c(\lambda) = \Phi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n}.$$

Кроме того,  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \frac{D_c(\lambda)}{B_c(\lambda)} = d_n$  для любого  $n \geq 1$ .

На основании теорем 5.13 и 5.14 можно уже сформулировать критерий разрешимости интерполяционной задачи (5.47) в  $[1, g_1]$ .

**Теорема 5.15.** Пусть выполняются все исходные предположения теоремы 5.14 и пусть  $d := \{d_n\}_{n=1}^\infty$  — какая-либо последовательность из  $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ , удовлетворяющая условию (5.49).

Составим две мероморфные функции

$$D_c(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n c_n}{\lambda - \lambda_n}, \quad B_c(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n}.$$

Тогда для разрешимости задачи (5.47) в классе  $[1, g_1]$  необходимо и достаточно выполнение двух условий:

$$a) \frac{D_c(\lambda)}{B_c(\lambda)} \in [1, g_1]; \quad b) \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \frac{D_c(\lambda)}{B_c(\lambda)} = d_n \quad \forall n \geq 1.$$

◁ Необходимость условий  $a)$  и  $b)$  для разрешимости интерполяционной задачи (5.47) в  $[1, g_1]$  прямо следует из теоремы 5.14. Обратно, если условия  $a)$  и  $b)$  имеют место, то функция  $\frac{D_c(\lambda)}{B_c(\lambda)}$  является искомым решением задачи (5.47). ▷

Перед тем, как сформулировать одно важное следствие теоремы 5.15, заметим, что если  $c_k \neq 0$  для всех  $k \geq 1$ , то, как уже отмечалось в п. 5.4.1, условие  $b)$  выполняется, когда  $\frac{D_c(\lambda)}{B_c(\lambda)} \in A(G)$ . Далее, если  $\frac{D_c(\lambda)}{B_c(\lambda)} \in [1, g_1]$ , то по теореме 5.13 задача (5.47) имеет решение в классе  $[1, g_1]$ .

В связи с этим замечанием напомним одно определение из [45]. Говорят, что в  $A(G)$  имеется существенно нетривиальное разложение нуля (с. н. р. н.) по системе  $E_\Lambda$ , если существует сходящийся в  $A(G)$  ряд  $\sum_{k=1}^\infty c_k e^{\lambda_k z}$  такой, что его сумма равна нулю в  $G$ , а все коэффициенты  $c_k$  отличны от нуля.

**Следствие.** Пусть выполнены предположения теоремы 5.14 и пусть в  $A(G)$  имеется с. н. р. н. по  $E_\Lambda$ :  $\sum_{k=1}^\infty c_k e^{\lambda_k z} = 0$ ,  $z \in G$  и  $c_k \neq 0$  при любом  $k \geq 1$ . Пусть, далее, последовательность  $d = \{d_k\}_{k=1}^\infty$  комплексных чисел удовлетворяет условию (5.49).

Тогда для разрешимости в  $[1, g_1]$  интерполяционной задачи (5.47) необходимо и достаточно, чтобы  $\frac{D_c(\lambda)}{B_c(\lambda)} \in [1, g_1]$ , где, как и выше,

$$D_c(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n c_n}{\lambda - \lambda_n}, \quad B_c(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n}.$$

**5.4.3.** Критерии разрешимости задачи (5.47) в классе  $[1, g_1]$ , указанные в теореме 5.15 и ее следствии, можно выразить в другой форме, более удобной для последующего использования.

Предварительно дополним теорему 5.14 одним утверждением.

**Теорема 5.16.** Пусть  $G, \Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty, g(\varphi)$  и  $g_1(\varphi)$  те же, что и в теореме 5.14, и пусть в  $A(G)$  имеется н. р. н. по  $E_\Lambda$ .

Тогда, если интерполяционная задача (5.47) разрешима в  $[1, g_1]$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n e^{\lambda_n z} = 0 \quad \forall z \in G_2, \quad (5.52)$$

где  $G_2$  — любая выпуклая подобласть  $G$  с опорной функцией  $g_2(-\varphi)$  такой, что  $0 < g_2(-\varphi) \leq g(-\varphi) - g_1(-\varphi)$  при любом  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , а  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность коэффициентов имеющегося в  $A(G)$  н. р. н. по  $E_\Lambda$ .

◁ Допустим сначала, что  $g_2(\varphi) < g(\varphi) - g_1(\varphi)$  для любого  $\varphi \in [0, 2\pi]$  и возьмем число  $\eta > 0$  настолько малым, чтобы  $\bar{G}_1^\eta + \bar{G}_2^\eta \subset G$ .

Тогда, если  $\Gamma_\eta := \partial(\bar{G}_1^\eta)$ , а  $v(\lambda)$  — решение задачи (5.47) из  $[1, g_1]$ , то  $d_n = v(\lambda_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\eta} e^{\lambda_n t} W(t) dt$  при всех  $n \geq 1$  (как раньше,  $W(t)$  — функция из  $A_0(CG_1)$ , ассоциированная с  $v$  по Борелю). Для любой точки  $\tau$  из  $\bar{G}_2^\eta$  имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n e^{\lambda_n \tau} &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n \tau} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\eta} e^{\lambda_n t} W(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\eta} W(t) \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n(t+\tau)} dt = 0. \end{aligned}$$

Если же  $g_2(\varphi) \leq g(\varphi) - g_1(\varphi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , то  $qg_2(\varphi) < g(\varphi) - g_1(\varphi)$  при любых  $q \in (0, 1)$  и  $\varphi \in [0, 2\pi]$  и по доказанному  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n c_n e^{\lambda_n \tau} = 0$ ,  $\tau \in qG_2$ . Устремляя  $q$  к 1, приходим к равенству (5.52). ▷

Перед тем, как установить новый критерий разрешимости задачи (5.47) в классе  $[1, g_1]$ , условимся говорить, следуя [45], что выполнено условие  $A_1$ ), если класс  $M^g$  отличных от тождественного нуля функций  $h(\lambda)$  из  $[1, g(\varphi)]$  таких, что  $h(\lambda_n) = 0$  при всех  $n \geq 1$ , непуст. При этом функция  $h$  (из  $M^g$ ) может иметь и другие нули, кроме  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ , а нули  $\lambda_m$  могут быть и кратными. Заметим, что если

в  $A(G)$  имеется н. р. н. по системе  $E_\Lambda$ , то любая функция из  $M^g$  обладает определенной правильностью роста (см. по этому поводу [45, леммы 3–5]).

**Теорема 5.17.** Пусть справедливы исходные предположения теоремы 5.15, выполнено условие  $A_1$  и  $L(\lambda)$  — какая-либо функция из класса  $M^g$ . Тогда для разрешимости интерполяционной задачи (5.47) в пространстве  $[1, g_1]$  необходимо, а в случае, когда  $g_2(\varphi) := g(\varphi) - g_1(\varphi)$  — тригонометрически выпуклая функция, и достаточно, чтобы выполнялось условие (5.49) и чтобы

$$\frac{H_1(\lambda)}{\Phi_1(\lambda)} \in A(\mathbb{C}), \quad (5.53)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_m} \frac{H_1(\lambda)}{\Phi_1(\lambda)} = d_m \quad \forall m \geq 1, \quad (5.54)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n c_n e^{\lambda_n z} = 0 \quad \forall z \in G_2, \quad (5.55)$$

где  $H_1(\lambda) := D_c(\lambda)L(\lambda)$ ,  $\Phi_1(\lambda) := LB_c(\lambda)L(\lambda)$ ,  $G_2$  — выпуклая подобласть  $G$  с опорной функцией  $g_2(-\varphi)$ , а  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z} = 0$  — с. н. р. н. в  $A(G)$ .

◁ Необходимость следует непосредственно из теорем 5.14 и 5.15. Доказательство достаточности основано на одной лемме, справедливость которой будет сейчас установлена.

**Лемма 5.2.** Пусть  $G$  — ограниченная выпуклая область, содержащая начало координат, с опорной функцией  $g(-\varphi)$ , а  $G_1$  — ее выпуклая подобласть с опорной функцией  $h(-\varphi)$  такой, что  $0 < h(\varphi) \leq g(\varphi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Пусть, далее,  $L(\lambda)$  — любая целая функция такая, что  $L(\lambda_n) = 0$  при любом  $n \geq 1$ , при этом  $L(\lambda)$  может иметь и другие нули, а нули  $\lambda_n$  могут быть кратными. Пусть, наконец, в  $A(G_1)$  имеется н. р. н. по системе  $E_\Lambda$  с коэффициентами  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Тогда для всех  $\lambda$  из  $\mathbb{C}$  и  $z$  из  $G_1$  справедливо равенство

$$T_c(\lambda)e^{\lambda z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n e^{\lambda_n z} L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n},$$

в котором  $T_c(\lambda) \in A(\mathbb{C})$  и имеется оценка сверху для  $|T_c(\lambda)|$ : для любого  $\theta \in (0, 1)$  существует  $B_\theta < +\infty$  такое, что при всех  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus U$

$$|T_c(\lambda)| \leq B_\theta e^{-\theta h(\arg \lambda)|\lambda|} \cdot |L(\lambda)|. \quad (5.56)$$

При этом исключительное множество  $U$  не зависит от выбора функции  $L$  и является объединением кружков с центрами в точках  $\lambda_n$  и радиусами  $r_n$  такими, что  $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$ .

◁ Как показано в начале п. 5.4.2, справедливо соотношение

$$B_c(\lambda) = \Phi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n z} c_n e^{-\lambda z}}{\lambda - \lambda_n},$$

в котором ряд справа сходится абсолютно в  $A(G_1)$ , если  $\lambda \neq \lambda_n, n \geq 1$ . Отсюда, если  $T_c(\lambda) := L(\lambda) \cdot \Phi(\lambda)$ , то  $T_c(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n z} c_n L(\lambda) e^{-\lambda z}}{\lambda - \lambda_n}$ .

Так как  $\frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \in A(\mathbb{C})$  при всех  $n \geq 1$ , то последнее равенство справедливо для любых  $z \in G_1$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  и  $T_c(\lambda) \in A(\mathbb{C})$ . Выберем последовательность положительных чисел  $\varepsilon_n$  таких, что  $\varepsilon_n \downarrow 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon_n |\lambda_n|} =: M < \infty$ , и положим

$$U := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n, \quad U_n := \left\{ \lambda : |\lambda - \lambda_n| < e^{-\varepsilon_n |\lambda_n|} \right\} \quad \forall n \geq 1.$$

Пусть  $\theta \in (0, 1)$  и  $\lambda \notin U$ . Выберем числа  $\varepsilon_n$  так, чтобы для всех  $n \geq 1$  и для всех  $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\theta h(\varphi) + \varepsilon_n < \theta_1 h(\varphi) \quad \text{при некотором } \theta_1 \in (\theta, 1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} |T_c(\lambda)| &\leq |L(\lambda)| \inf_{z \in \theta G_1} \left[ |e^{-\lambda z}| \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k e^{\lambda_k z}}{\lambda - \lambda_k} \right| \right] \leq \\ &\leq \frac{|L(\lambda)|}{\sup_{z \in \theta G_1} \exp \operatorname{Re} \lambda z} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \exp |\lambda_k| [\theta h(\arg \lambda_k) + \varepsilon_k], \end{aligned}$$

и мы приходим к неравенству (5.56). ▷

Возвращаясь к доказательству теоремы 5.17, допустим, что справедливы все ее предположения. Тогда по лемме 5.2  $\Phi_1(\lambda) = B(\lambda)L(\lambda) = T_c(\lambda) \in [1, 0]$  (полагаем в лемме 5.2  $h(\theta) = g(\theta)$  и учитываем, что число  $\theta$  из  $(0, 1)$  можно взять как угодно близким к 1, а  $L(\lambda) \in [1, g(\theta)]$ ). Далее, так как  $\sum_{k=1}^{\infty} d_k c_k e^{\lambda_k z} = 0$  — н. р. н. по системе  $E_{\Lambda}$  в  $A(G_2)$ , то, полагая в той же лемме  $h(\varphi) = g_2(\varphi)$ , находим таким же образом, что  $H_1(\lambda) = L(\lambda)H(\lambda) \in [1, g_1]$ , где, как

выше,  $\mathcal{H}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k c_k}{\lambda - \lambda_k} (= D(\lambda))$ . Далее,  $\frac{H_1}{\Phi_1} \in A(\mathbb{C})$  и по теореме о категориях (см., например, [98, с. 37])  $R(\lambda) := \frac{H_1(\lambda)}{\Phi_1(\lambda)} \in [1, \infty)$ , причем индикаторы целых функций экспоненциального типа  $R(\lambda)$  и  $H_1(\lambda)$  совпадают. Следовательно,  $R(\lambda) \in [1, g_1]$  и остается сослаться на теорему 5.15.  $\triangleright$

**Следствие.** Пусть  $G$  — содержащая начало координат ограниченная выпуклая область с опорной функцией  $g(-\varphi)$ . Пусть, далее,  $g_1(\varphi)$  — такая тригонометрически выпуклая функция, что  $0 < g_1(\varphi) < g(\varphi)$ . Пусть, наконец, в  $A(G)$  имеется с. н. р. н. по системе  $E_\Lambda := \{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^\infty$  с коэффициентами  $c = \{c_n\}_{n=1}^\infty$ . Тогда для разрешимости задачи (5.47) при данной последовательности  $d = \{d_n\}_{n=1}^\infty$ , удовлетворяющей условию (5.49), необходимо, а в случае, когда  $g_2(\varphi) := g(\varphi) - g_1(\varphi)$  — тригонометрически выпуклая функция, и достаточно, чтобы выполнялись условия (5.53) и (5.55).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если числа  $(d_n)_{n=1}^\infty$  удовлетворяют условию (5.49), то ряд  $\sum_{n=1}^\infty c_n d_n e^{\lambda_n z}$  сходится абсолютно в  $A(G_2)$ . Поэтому в формулировке теоремы 5.17 можно потребовать, чтобы равенство (5.52) выполнялось лишь в некоторой окрестности нуля (по теореме единственности в этом случае сумма ряда  $\sum_{n=1}^\infty c_n d_n e^{\lambda_n z}$  равняется нулю в  $G_2$ ). Более того, можно заменить условие (5.55) формально более слабым условием:

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k c_k (\lambda_k)^n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**5.4.4.** Выведем теперь критерий разрешимости интерполяционной задачи (5.47) в пространстве  $[1, g(\varphi))$ .

**Теорема 5.18.** Пусть  $G$  — ограниченная выпуклая область, содержащая начало координат, с опорной функцией  $g(-\varphi)$ . Пусть, далее, выполнено условие  $A_1$ ) и в  $A(G)$  имеется с. н. р. н. по системе  $E_\Lambda$ .

Тогда задача (5.47) разрешима в  $[1, g)$  в том и только том случае, если справедливо одно из двух равносильных утверждений:

$a_1$ ) имеет место включение (5.53), равенство (5.55) выполняется в некоторой окрестности нуля и, наконец,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln |d_n| - g(\arg \lambda_n) \right] < 0; \quad (5.57)$$



$a_2$ ) справедливо неравенство (5.57) и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k d_k = 0$  для любой последовательности чисел  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$  таких, что  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\lambda_k z} = \text{с. н. р. н.}$  в  $A(G)$  по системе  $E_{\Lambda}$ .

◁ I. То, что утверждение  $a_1$ ) необходимо и достаточно для разрешимости задачи (5.47) в  $[1, g]$ , вытекает из теоремы 5.17 и замечания, сделанного после ее доказательства. Действительно, условие (5.57) (очевидно, необходимое для разрешимости задачи (5.47) в  $[1, g]$ ) равносильно тому, что существует число  $q \in (0, 1)$  такое, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln |d_n| - qg(\arg \lambda_n) \right] \leq 0.$$

Если положить  $g_1(\theta) = qg(\theta)$  и предположить, что утверждение  $a_1$ ) имеет место, то по теореме 5.17 задача (5.47) разрешима в  $[1, g_1]$  и подавно в  $[1, g]$ . С другой стороны, если задача (5.47) разрешима в  $[1, g]$ , то найдется число  $q \in (0, 1)$  такое, что решение  $v(\lambda)$  задачи (5.47) из  $[1, g]$  принадлежит классу  $[1, qg]$ . Остается вновь сослаться на теорему 5.17 и замечания к ней.

II. 1) Пусть теперь имеет место утверждение  $a_2$ ) и пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k z} = \text{с. н. р. н.}$  в  $A(G)$  по системе  $E_{\Lambda}$  (оно существует согласно исходным предположениям теоремы). Тогда в силу условия (5.57) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n e^{\lambda_n z}$  сходится в  $A(K_{\delta})$  при достаточно малом  $\delta > 0$  и его сумма равна нулю. При этом всегда можно считать (уменьшив в случае необходимости число  $\delta$ ), что  $K_{\delta} = \{z : |z| \leq \delta\} \subset G$ . Пусть  $G_1$  — выпуклая подобласть  $G$  такая, что  $G_1 + K_{\delta} \subset G$ . Положим  $\Phi_1(\lambda) = L(\lambda)\Phi(\lambda)$ ,  $\mathcal{H}_1(\lambda) = L(\lambda)H(\lambda)$ , где  $L(\lambda)$  — произвольно зафиксированная функция из  $M^g$ ,

$$\Phi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n}, \quad H(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n d_n}{\lambda - \lambda_n}.$$

Очевидно, что  $\Phi_1 \in A(\mathbb{C})$  и  $H_1 \in A(\mathbb{C})$ . Кроме того, как показано в начале п. 5.4.2,  $\Phi(\lambda) = e^{-\lambda z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n e^{\lambda_n z}}{\lambda - \lambda_n}$  при любых  $z \in G$  и  $\lambda \notin \Lambda$ . Из последнего равенства следует, что при любом фиксированном  $z$  из  $G$  функции  $\Phi(\lambda)$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n e^{\lambda_n z}}{\lambda - \lambda_n}$  имеют (как функции от  $\lambda$ ) одни и те же нули одинаковой кратности. В частности, если  $\lambda_0$  — нуль кратности  $p$  функции  $\Phi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n}$ , то  $\lambda_0$  — нуль кратности  $p$  функции  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n e^{\lambda_n z}}{\lambda - \lambda_n}$  при любом  $z$  из  $G$ , откуда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n e^{\lambda_n z}}{(\lambda_0 - \lambda_n)^s} = 0$  для всех  $s \leq p - 1$  и  $z \in G$ . Но тогда для тех же  $s \leq p - 1$   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n e^{\lambda_n z}}{(\lambda_0 - \lambda_n)^s} =$

с. н. р. н. в  $A(G)$  и в силу утверждения  $a_2)$   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n c_n}{(\lambda_0 - \lambda_n)^s} = 0$ ,  $s = 0, 1, \dots, p-1$ . Следовательно,  $\lambda_0$  — нуль кратности  $\geq p$  функции  $H(\lambda)$  и, таким образом,  $\frac{\mathcal{H}_1(\lambda)}{\Phi_1(\lambda)} = \frac{\mathcal{H}(\lambda)}{\Phi(\lambda)} \in A(\mathbb{C})$ .

По следствию теоремы 5.17 интерполяционная задача (5.47) имеет решение в пространстве  $[1, g_1(\varphi)]$ , где  $g_1(-\varphi)$  — опорная функция области  $G_1$ . Подавно эта задача разрешима в  $[1, g)$ .

2) Пусть, обратно, задача (5.47) разрешима в  $[1, g(\varphi))$ . Тогда условие (5.57), очевидно, выполняется. Пусть теперь  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n z}$  — какое-либо н. р. н. по  $E_\Lambda$  в  $A(G)$ . Выберем тригонометрически выпуклую функцию  $g_1(\varphi)$  такую, что для любого  $\varphi \in [0, 2\pi]$   $0 < g_1(\varphi) < g(\varphi)$  и  $v \in [1, g_1(\varphi)]$ , где  $v(\lambda)$  — существующее по предположению решение задачи (5.47) из  $[1, g)$ . Пусть  $W(t)$  — функция, ассоциированная с  $v(\lambda)$  по Борелю, а  $\eta > 0$  выбрано так, что  $G_1^\eta + K_{3\eta} \subset G$ . Если  $\Gamma_\eta = \partial(G_1^{2\eta})$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n b_n e^{\lambda_n z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\eta} W(t) \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n(z+t)} dt = 0,$$

когда  $z \in K_{\eta/2}$ . Полагая  $z = 0$ , получим  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n d_n = 0$ , чем и завершается доказательство теоремы.  $\triangleright$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Отметим, что попутно установлен следующий результат, который вскоре будет востребован. Пусть  $G$  — содержащая начало координат ограниченная выпуклая область с опорной функцией  $g(-\varphi)$ , класс  $M^g$  непуст и в  $A(G)$  имеется с. н. р. н. по системе  $E_\Lambda$ . Пусть, далее,  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию (5.57). Тогда интерполяционная задача (5.47) разрешима в  $[1, g(\varphi))$  в том и только том случае, если  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n b_n = 0$ , где  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n z} = 0$  — любое с. н. р. н. в  $A(G)$  по  $E_\Lambda$ .

При этом, как легко убедиться, для произвольной последовательности  $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ , удовлетворяющей условию (5.57), равносильны такие утверждения:

I)  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n b_n = 0$ , если  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n z}$  — любое с. н. р. н. по  $E_\Lambda$  в  $A(G)$ ;

II)  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n b_n = 0$ , если  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n z}$  — любое н. р. н. по  $E_\Lambda$  в  $A(G)$ .

**5.4.5.** Приведем приложение теоремы 5.18 к АПС экспонент в  $A(G)$ .

**Теорема 5.19.** Пусть  $G$  — ограниченная выпуклая область, содержащая начало координат, с опорной функцией  $g(-\varphi)$ . Пусть, далее,  $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$  — последовательность попарно различных комплексных чисел и  $E_\Lambda := (\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$ . Предположим, что в пространстве  $[1, g(\varphi)]$  имеется отличная от тождественного нуля функция  $L(\lambda)$  такая, что  $L(\lambda_n) = 0$  при любом  $n \geq 1$ .

Тогда наличие в  $A(G)$  н. р. н. по системе  $E_\Lambda$  необходимо и в случае, если выполнено условие (5.48), достаточно для того, чтобы она была АПС в  $A(G)$ .

◁ Необходимость устанавливается уже применявшимся приемом. Если  $E_\Lambda$  — АПС в  $A(G)$ , то существует абсолютно сходящееся в  $A(G)$  разложение  $z$  по системе  $E_\Lambda$ :  $z = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{\lambda_n z}$ . Дифференцируя это равенство, получим, что  $1 = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n a_n e^{\lambda_n z}$  при любом  $z \in G$ , где существует  $n_0 \geq 1$ :  $\lambda_{n_0} \cdot a_{n_0} \neq 0$ . Продифференцировав полученное равенство еще раз, придем к н. р. н. в  $A(G)$  по системе  $E_\Lambda$ :  $\sum_{n=1}^\infty (\lambda_n)^2 a_n e^{\lambda_n z} = 0$  для любого  $z \in G$ .

Пусть, обратно,  $\sum_{n=1}^\infty b_n e^{\lambda_n z} = 0$  — н. р. н. по системе  $E_\Lambda$  в  $A(G)$ . Положим  $N_1 := \{m \geq 1 : b_m \neq 0\}$ . Так как все числа  $\lambda_n$  попарно различны, то любая конечная совокупность функций  $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^N$  линейно независима в  $A(G)$  (это следует, в частности, и из рассуждений, проведенных в п. 3.1.7). Тогда  $N_1 = \{b_{m_k}\}_{k=1}^\infty$ ,  $1 \leq m_k \uparrow \infty$ . Пусть  $\mu_k := \lambda_{m_k}$ ,  $\beta_k := b_{m_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Ясно, что  $\sum_{k=1}^\infty \beta_k e^{\mu_k z} = 0$  — с. н. р. н. в  $A(G)$  по системе  $E_{\Lambda_1}$ , где  $\Lambda_1 = (\mu_k)_{k=1}^\infty$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{|\mu_k|} = 0$ .

При этом  $L(\mu_k) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и класс  $M^g$  непуст. По замечанию к теореме 5.18 интерполяционная задача

$$y(\mu_k) = \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

разрешима в  $[1, g(\varphi)]$  для любой последовательности  $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$  такой, что  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\mu_k|} \ln |\delta_k| - g(\arg \mu_k) \right] < 0$ , тогда и только тогда, когда  $\sum_{k=1}^\infty \delta_k c_k = 0$ , где  $\sum_{k=1}^\infty c_k e^{\mu_k z} = 0$  — произвольное н. р. н. в  $A(G)$  по системе  $E_{\Lambda_1}$ .

Введем, как в п. 3.9.5, пространства последовательностей

$$A_2 := A_2(E_{\Lambda_1}, A(G)) = \left\{ a = (a_k)_{k=1}^\infty : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\mu_k|} \ln |a_k| + g(\arg \mu_k) \right] \leq 0 \right\},$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &:= \hat{A}_2(E_{\Lambda_1}, A(G)) = \\ &= \left\{ b = (b_k)_{k=1}^\infty : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\mu_k|} \ln |b_k| - g(\arg \mu_k) \right] < 0 \right\}\end{aligned}$$

и установим между этими пространствами отделимую двойственность посредством билинейной формы  $\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^\infty a_k b_k$ . Пространство  $A_2$  является пространством Фреше с определяющим топологию счетным набором норм  $\|a\|_n := \sup_{k \geq 1} |a_k| e^{|\lambda_k| g(\arg \lambda_k) q_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , где  $0 < q_n \uparrow 1$  и последовательность  $\{q_n\}_{n=1}^\infty$  зафиксирована.

Оператор представления  $L_{\Lambda_1}$ :

$$\forall a \in A_2 \rightarrow L_{\Lambda_1} a = \sum_{k=1}^\infty a_k e^{\mu_k z} \in A(G),$$

как уже отмечалось выше, является линейным непрерывным оператором из  $A_2$  в  $A(G)$ , а сопряженный с ним оператор  $(L_\Lambda)'$  имеет вид:

$$(L_\Lambda)' = \ell(f) : \forall f \in [1, h) = (A(G))' \rightarrow \ell(f) = \{f(\mu_k)\}_{k=1}^\infty \in \hat{A}_2 = (A_2)'.$$

По замечанию к теореме 5.18 образ

$$\ell([1, h)) = \{(f(\mu_k))_{k=1}^\infty : f \in [1, h)\}$$

сопряженного к  $L_\Lambda$  оператора совпадает с множеством

$$\left\{ b(b_k)_{k=1}^\infty \in \hat{A}_2 : \langle a, b \rangle = 0, \text{ если } \sum_{k=1}^\infty a_k e^{\mu_k z} = 0 - \text{н. р. н. в } A(G) \text{ по системе } E_{\Lambda_1} \right\}.$$

Иначе говоря,  $\ell([1, h))$  совпадает с полярной  $(L_{\Lambda_1}^{-1}(0))^0$  ядра  $L_{\Lambda_1}^{-1}(0)$  оператора  $L_{\Lambda_1}$ . Но, как хорошо известно (см., например, [143, с. 685–686]),  $(L_{\Lambda_1}^{-1}(0))^0$  — слабо замкнутое множество в пространстве  $\hat{A}_2$ , топология в котором описана в п. 3.9.5. По теореме 3.31  $E_{\Lambda_1}$  — АПС в  $A(G)$ . Но тогда  $E_\Lambda$  — подавно АПС в  $A(G)$  и доказательство теоремы 5.19 закончено.  $\triangleright$

**Следствие.** Пусть  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}$  и пусть  $E_\Lambda := (\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$ , где  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  для любого  $k \geq 1$ . Наличие н. р. н. в  $A(G)$  по

системе  $E_\Lambda$  необходимо, а в случае, когда выполняется условие  $A_1$ ) и область  $G$  ограничена, и достаточно для того, чтобы можно было разложить в абсолютно сходящийся в  $A(G)$  ряд по системе  $E_\Lambda$  любую функцию из какого-нибудь подкласса  $F$  пространства  $A(G)$ , содержащего функцию  $z$ , и, в частности, любую функцию из таких классов: 1)  $F$  — множество всех линейных функций  $az + b$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $b \in \mathbb{C}$ ; 2)  $F = S$  — множество всех многочленов; 3)  $A(\mathbb{C})$  — класс всех целых функций; 4)  $A(\bar{G})$  — совокупность всех функций, локально-аналитических на выпуклом компакте  $\bar{G}$ ; 5)  $A_c^m(G)$  — класс всех функций из  $A(G)$ , имеющих непрерывные производные в  $G$  до порядка  $m$  включительно; 6)  $A(G)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Результаты, приведенные в следствии, можно усилить по крайней мере для некоторых подклассов  $F$  из  $A(G)$ . Например, в [45, теорема 18] установлен такой результат.

**Теорема 5.20.** Пусть  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$ . Для того чтобы любую целую функцию можно было разложить в абсолютно сходящийся в  $A(G)$  ряд по системе  $E_\Lambda$ , необходимо, а в случае, когда  $\sup_{k \geq 1} \frac{k}{|\lambda_k|} < +\infty$ , и достаточно, чтобы в  $A(G)$  имелось н. р. н по  $E_\Lambda$ .

Нетрудно показать, что в качестве  $F$  в следствии теоремы 5.19 можно взять и любое подмножество  $A(G)$ , содержащее хотя бы одну функцию вида  $\mathcal{P}(z)e^{\alpha z}$ , где  $\mathcal{P}(z)$  — произвольный многочлен и  $\alpha \neq \lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**5.4.6.** При исследовании интерполяционной задачи (5.47) в  $[1, g_1(\varphi)]$  всюду в данном разделе предполагалось, что

$$g(\varphi) > g_1(\varphi) \geq 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi],$$

т. е.  $0 \in \bar{G}_1 \subset G$ . Рассмотрим более общую ситуацию, когда  $\bar{G}_1 \subset G$ , но условие  $0 \in \bar{G}_1$  уже не обязательно. В этом случае можно подобрать такое комплексное число  $a = |a|e^{i\gamma}$ , что  $0 \in \bar{G}_1 + a \subset G + a$ . Пусть

$$g_3(-\varphi) := g_1(-\varphi) + |a| \cos(\gamma - \varphi), \quad g_4(-\varphi) := g(-\varphi) + |a| \cos(\gamma - \varphi).$$

(Как выше,  $g_1(-\varphi)$  — опорная функция области  $G_1$ , а  $g(-\varphi)$  — области  $G$ .) Тогда при любом  $\varphi \in [0, 2\pi]$   $0 \leq g_3(\varphi) < g_4(\varphi)$ . Между классами  $[1, g_1]$  и  $[1, g_3]$ , а также между классами  $[1, g]$  и  $[1, g_4]$  можно установить изоморфизм по формуле

$$y(\lambda)e^{a\lambda} = v(\lambda), \quad y \in [1, g_1], \quad v \in [1, g_3].$$

или, соответственно,

$$y(\lambda)e^{a\lambda} = v(\lambda), \quad y \in [1, g), \quad v \in [1, g_4).$$

При этом задача (5.47):  $y(\lambda_n) = d_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , разрешима в  $[1, g_1]$  или в  $[1, g)$  тогда и только тогда, когда в классе  $[1, g_3]$  (соответственно,  $[1, g_4)$ ) разрешима задача

$$v(\lambda_n) = d_n e^{a\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Последняя задача в классах  $[1, g_3]$  и  $[1, g_4]$  исследована выше. Читатель может легко получить формулировки результатов, совершенно аналогичных теоремам 5.14–5.19.

**5.4.6.** Изложенные в настоящем разделе результаты получены автором во второй половине 70-х гг. XX века. После одного его доклада на конференции в Уфе А. А. Гончар обратил внимание докладчика на работу [150]. В этой статье в предположении, что  $G$  — жорданова область в  $\mathbb{C}$ , рассматривается класс  $E(G)$  всех целых функций (экспоненциального типа)  $f(z)$ , представимых при любом  $z$  из  $\mathbb{C}$  в виде ряда  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\mu_k z}$ , в котором  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ , а  $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$  — произвольная последовательность попарно различных точек из  $G$ , не имеющая предельных точек в  $G$ . В классе  $E(G)$  вводится определенным образом топология (фактор-топология), в которой  $E(G)$  является  $B$ -пространством. В работе [150] дается структурное описание пространства  $E(G)$ , из которого, в частности, следует, что если  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$  с опорной функцией  $g(-\varphi)$ , то  $[1, g(\varphi)) \subseteq E(G) \subseteq [1, g(\varphi)]$ . Далее, в [150] фиксируется какая-либо последовательность точек  $\Lambda \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  из  $G$ , не имеющая предельных точек в  $G$ , и находится ряд критериев того, что  $E_{\Lambda} := \{\exp \lambda_k z\}_{k=1}^{\infty}$  является  $\ell_1$ -представляющей в  $E(G)$ , т. е. того, что любую функцию  $y(z)$  из  $E(G)$  можно представить в виде ряда

$$y(z) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e^{\lambda_k z}, \quad \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$$

(нетрудно показать, что в данном случае такой ряд сходится абсолютно в  $E(G)$ ). Один из этих критериев, полученных в [150], и заключается в том, что в  $E(G)$  имеется н. р. н. по системе  $E_{\Lambda} \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k z} = 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , с коэффициентами  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$  из  $\ell_1$ .

К сожалению, эта работа (на наш взгляд, весьма интересная и имеющая законченный характер) не нашла продолжения применительно к другим пространствам аналитических и бесконечно дифференцируемых функций (во всяком случае автору неизвестны какие-либо публикации в этом направлении). Кроме того, она существенно использует технику, характерную для  $B$ -пространств и неприменимую (без серьезного ее изменения) к небанаховым пространствам.

Позднее, в начале 70-х гг., связь между возможностью разложения любой аналитической функции из некоторого подкласса пространства  $A(G)$ , где  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $G$ , в сходящийся в  $A(G)$  ряд по системе  $E_\Lambda = \{\exp \lambda_k z\}_{k=1}^\infty$ ,  $\lambda_k \in \mathbb{C}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = \infty$ , с определенным образом вычисленными коэффициентами, и наличием в  $A(G)$  н. р. н. по системе  $E_\Lambda$  с коэффициентами определенного вида, была использована в цикле исследований А. Ф. Леонтьева о разложении в ряды экспонент функций, аналитических в ограниченной выпуклой области. Приведем один из основных результатов А. Ф. Леонтьева, полученных в этом направлении [100].

**Теорема 5.21** [100]. Пусть  $G$  — содержащая  $z = 0$  ограниченная выпуклая область с опорной функцией  $g(-\varphi)$ ,  $L(\lambda)$  — целая функция экспоненциального типа с индикатором  $g(\varphi)$  и простыми нулями  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ . Сопоставим каждой функции  $f$ , (локально) аналитической на  $\bar{G}$ , ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \quad f_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(t) \psi_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.58)$$

в котором  $\psi_k(t)$  — функция, ассоциированная по Борелю с функцией  $\frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)L'(\lambda_k)}$ , а  $\gamma$  — спрямляемая замкнутая жорданова кривая, содержащая внутри себя  $\bar{G}$  и лежащая в области аналитичности функции  $f$ .

Для того чтобы ряд (5.58) сходилась в области  $G$  к породившей его функции  $f$ , какова бы ни была функция  $f$  из  $\bar{A}(G)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)} = 0 \quad \forall z \in G.$$

С помощью этой теоремы А. Ф. Леонтьев получил свой важнейший в этом направлении результат о том, что любую функцию  $f$  из  $A(G)$  можно представить в виде сходящегося в  $A(G)$  ряда  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}$ , и указал способ (в общей ситуации весьма сложный) определения коэффициентов  $f_k$ .

Эти исследования, опубликованные в цикле работ А. Ф. Леонтьева и подытоженные в монографии [100], были продолжены в 70–80-х гг. XX века А. Ф. Леонтьевым, его учениками и последователями, распространены на другие пространства аналитических и целых функций, а также на ряды по обобщенным экспонентам  $\{E_\rho(\lambda_k z)\}_{k=1}^{\infty}$ , где  $E_\rho(z)$  — функция Миттаг — Леффлера  $E_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+n/\rho)}$ ,  $0 < \rho < \infty$ .

Не имея возможности описывать здесь более подробно эти результаты (значительная их часть изложена с достаточной полнотой в монографиях [100–103]), остановимся лишь на одном вопросе, а именно, на различии в методах, использованных А. Ф. Леонтьевым и автором при исследовании разложений аналитических функций в ряды экспонент. Это различие отмечал и сам А. Ф. Леонтьев (см., например, [101]). Исследования А. Ф. Леонтьева, видного представителя знаменитой российской школы теории функций и блестящего «аналиста», виртуозно владевшего техникой тонких и весьма сложных аналитических выкладок, основаны на построении целой функции экспоненциального типа со специфическими свойствами, определяемыми характером распределения ее нулей, а также на детальном изучении системы функций  $\{\psi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  из  $\tilde{A}_0(CG)$ , биортогональной к системе  $E_\Lambda = (e^{\Lambda_k z})_{k=1}^{\infty}$ . На завершающем этапе рассуждений привлекался также линейный дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами и символом (характеристической функцией) из  $[1, 0]$ . При этом А. Ф. Леонтьев применял исключительно методы «чистой» теории функций комплексного переменного и прежде всего целых функций, не используя результаты и методы функционального анализа.

Подход же Ю. Ф. Коробейника основан прежде всего на общей теории двойственности в локально выпуклых пространствах (разумеется в сочетании с теорией аналитических функций). При этом конечной целью было получение критериев разложимости любого элемента  $x$  из ПОЛВП  $H$  в ряд (не обязательно единственный) по фиксированной системе экспонент  $(e^{\lambda_k z})$  (а в последующем — по бо-



лее общим системам), сходящийся (или абсолютно сходящийся) в  $H$ . Важно отметить, что алгоритм эффективного определения коэффициентов разложения в общей ситуации не указывался, а лишь использовался сам факт наличия подобного разложения в  $H$  для любого элемента  $x$  из  $H$ .

Основные результаты, изложенные в настоящем разделе, опубликованы в статье автора [45]. В дальнейшем они были распространены на более общую ситуацию, в которой роль экспонент играли собственные элементы некоторого линейного оператора с определенными свойствами (см. по этому поводу работы Ю. Ф. Коробейника и его учеников А. В. Абанина, С. Н. Мелихова, В. Б. Шерстюкова, например, [3, гл. I; 4; 44; 47, гл. IV; 59; 60; 62; 86; 113; 140; 158]).

**5.4.8.** В настоящей книге при исследовании основных ее объектов — рядов по экспонентам и представляющих систем экспонент неоднократно встречалась (как правило, скорее в качестве вспомогательного аппарата для изучения рядов и ПС из экспонент) интерполяционная задача (5.47) в различных пространствах аналитических функций (глава 1, раздел 1.4; глава 3, раздел 3.9).

Рассмотренные выше задачи (5.47) можно в общих чертах описать следующим образом. Задается какое-то пространство  $H$  функций, определенных на некотором множестве  $Q$  из  $\mathbb{C}$ , и фиксированная последовательность точек  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  из  $Q$ , не имеющая предельных точек в  $Q$ . Далее берется пространство  $D_H$  числовых последовательностей такое, что для любого  $y \in H$   $\{y(\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty} \in D_H$ , фиксируется какое-либо его подпространство  $D_H^1$  и отыскиваются условия (по возможности, критериального характера), при которых интерполяционная задача (5.47) имеет решение  $y$  в  $H$  для любой последовательности  $\{d_m\}_{m=1}^{\infty}$  из  $D_H^1$ , или, в других терминах, условия, при которых задача  $D_H^1$ , (5.47) разрешима. Если ввести оператор интерполирования  $T : H \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall y \in H \rightarrow \{y(\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  и положить  $T(H) := \{\{y(\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty} : y \in H\}$ , то только что сказанное можно переформулировать следующим образом.

По пространству  $H$  и последовательности  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  из  $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$  определяется подпространство  $D_H$  пространства  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  такое, что  $T(H) \subseteq D_H$ , фиксируется некоторое подпространство  $D_H^1$  пространства  $D_H$  и находятся условия, при которых  $D_H^1 \subseteq T(H)$ . При этом пространства  $D_H^1$ , участвующие в различных интерполяционных задачах (5.47), рассматривавшихся в этой книге, могут довольно резко отличаться друг от друга. Прежде чем описать более точно эти различия, ве-

дем несколько определений. Именно, назовем подпространство  $D_H^1$  пространства  $D_H$  :

а) финитно полным, если  $D_H^1$  содержит множество  $\Phi$  всех финитных последовательностей  $(d_1, d_2, \dots, d_n, 0, 0, 0, \dots)$ ,  $d_k \in \mathbb{C}$  для любого  $k \geq 1$ ;  $n = 1, 2, \dots$  и, в частности, все орты  $e_{(m)} = \{\delta_{k,m}\}_{k=1}^\infty$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , где, как обычно,  $\delta_{k,m}$  — символ Кронекера, т. е.  $\delta_{k,m} = 0$ , если  $k \neq m$ , и  $\delta_{m,m} = 1$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ;

б) почти финитно полным, если  $D_H^1$  содержит все орты  $e_{(m)}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , кроме конечного их числа;

в) финитно неполным, если некоторое бесконечное семейство ортов  $\{e_{(n_k)}\}_{k=1}^\infty$ ,  $n_k \uparrow +\infty$ , не принадлежит  $D_H^1$ ;

г) почти финитно тощим, если  $D_H^1$  содержит лишь конечное число ортов  $\{e_{(m_k)}\}_{k=1}^N$ ,  $N < +\infty$ ;

д) финитно тощим, если  $D_H^1$  не содержит ни одного орта.

В ситуации, рассмотренной в пп. 1.4.3–1.4.5, можно положить

$$Q = \mathbb{C}, \quad H = [1, 0],$$

$$D_H^1 = D_H := \left\{ d = (d_k)_{k=1}^\infty : \ell_\Lambda(d) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln |d_n| = 0 \right\}.$$

В этом случае пространство  $D_H^1$  ( $= D_H$ ) финитно полно.

Если же при тех же  $Q$ ,  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ ,  $H$  и  $D_H$  в качестве  $D_H^1$  взять пространство  $D_H^{(m)} := \{d = (d_k)_{k=1}^\infty \in D_H : d_k = 0, k = 1, 2, \dots, m\}$ , где  $m$  — произвольно зафиксированное натуральное число, то  $D_H^1 = D_H^{(m)}$  почти финитно полно. При этом, если интерполяционная задача  $D_H$ , (5.47) разрешима, то при любом  $m \geq 1$  интерполяционная задача  $D_H^{(m)}$ , (5.47) также разрешима.

Точно так же, если  $Q = \mathbb{C}$ ,  $H = [1, h(\varphi)]$  или  $H = [1, h(\varphi))$ , где  $h(\varphi)$  — произвольно зафиксированная тригонометрически выпуклая функция,

$$D_H = \left\{ d = (d_k)_{k=1}^\infty : \ell_\Lambda^h(d) := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_k|} - h(\arg \lambda_k) \right] \leq 0 \right\}$$

(соответственно, в случае  $H = [1, h(\varphi))$   $D_H = \{d = (d_k)_{k=1}^\infty : \ell_\Lambda^h(d) < 0\}$ ), то пространство  $D_H^1 = D_H$  является финитно полным (задача  $D_H$ , (5.47) называется в данной ситуации в статье [19] задачей свободной интерполяции). Если же в качестве  $D_H^1$  взять  $D_H^{(m)} = \{d = (d_k)_{k=1}^\infty \in D_H : d_s = 0, 1 \leq s \leq m\}$ , то, как выше,  $D_H^{(m)}$  — почти

финитно полное пространство. И здесь из разрешимости интерполяционной задачи  $D_H$ , (5.47) следует, что задача  $D_H^{(m)}$ , (5.47) также разрешима при любом  $m \geq 1$ .

Что же касается интерполяционной задачи (5.47), рассмотренной в настоящем разделе, то она имеет несколько иной характер. Именно, для нее  $H = [1, g_1]$  или  $H = [1, g]$ , где  $g(-\varphi)$  — опорная функция содержащей начало координат ограниченной выпуклой области  $G$ , а  $g_1(-\varphi)$  — ее выпуклого компакта  $G_1$ , также содержащего начало координат. Далее,  $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$  — фиксированная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию (5.48), а

$$D_H = \{d = (d_n)_{n=1}^\infty : \ell_\Lambda^g(d) < 0\},$$

если  $H = [1, g(\varphi)]$ , и  $D_H = \{d \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \ell_\Lambda^{g_1}(d) \leq 0\}$ , когда  $H = [1, g_1(\varphi)]$ . В обоих случаях  $D_H$  — финитно полное пространство, и если положить  $D_H^1 = D_H$ , то получаем интерполяционную задачу  $D_H$ , (5.47), уже рассмотренную ранее (как задачу «свободной интерполяции»).

Но если положить

$$D_H^1 = D_H^0 := \left\{ d = (d_k)_{k=1}^\infty \mid d \in D_H \text{ и } \sum_{k=1}^\infty d_k c_k = 0 \right. \\ \left. \text{для любого н. р. н. в } A(G) : \sum_{k=1}^\infty c_k e^{\lambda_k z} = 0, z \in G \right\}$$

и принять во внимание, что любой конечный набор экспонент  $\{e^{\mu_k z}\}_{k=1}^N$  с попарно различными комплексными показателями  $\{\mu_k\}_{k=1}^N$  линейно независим в  $A(G)$ , то среди коэффициентов  $(c_k)_{k=1}^\infty$  любого н. р. н. в  $A(G)$  всегда найдется бесконечное множество отличных от нуля  $\{c_{n_\ell}\}_{\ell=1}^\infty$ ,  $n_\ell \uparrow \infty$ . Как нетрудно проверить, тогда  $e_{(n_\ell)} \notin D_H^0$  при любом  $\ell \geq 1$  и, таким образом, пространство  $D_H^0$  финитно неполно. Более того, если для любого номера  $m \geq 1$  найдется н. р. н. в  $A(G)$  по системе  $E_\Lambda \sum_{s=1}^\infty c_s e^{\lambda_s z} = 0$  такое, что  $c_m \neq 0$  (так, например, будет, если в  $A(G)$  имеется с. н. р. н. по  $E_\Lambda$ ), то  $e_{(m)} \notin D_H^0$  при всех  $m \geq 1$  и пространство  $D_H^0$  — финитно тощее.

Следовательно, пространство  $D_H^0$  финитно полно тогда и только тогда, когда в  $A(G)$  нет ни одного н. р. н. по  $E_\Lambda$ .

**5.4.9.** Напомним некоторые факты о связи рассматриваемой интерполяционной задачи с АПС экспонент в  $A(G)$ .

Пусть  $0 \in G$ ,  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$  с опорной функцией  $g(-\varphi)$ ,  $E_\Lambda = (\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$ , где  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{|\lambda_k|} = 0$ , и  $L_\Lambda$  — уже знакомый оператор представления:

$$\begin{aligned} \forall b = (b_k)_{k=1}^\infty \in A_2 &:= \left\{ b(b_k)_{k=1}^\infty : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |b_k| + g(\arg \lambda_k) \right] \leq 0 \right\} \rightarrow \\ &\longrightarrow L_\Lambda b = \sum_{k=1}^\infty b_k e^{\lambda_k z} \in A(G). \end{aligned}$$

Как было показано в п. 3.9.5 (см. также п. 5.4.5),  $L_\Lambda$  — линейный непрерывный оператор из  $A_2$  в  $A(G)$ , а сопряженный с ним оператор имеет вид

$$\begin{aligned} (L_\Lambda)' \varphi = \ell_\Lambda \varphi : \forall y \in [1, g(\varphi)) &\longrightarrow \{y(\lambda_n)\}_{n=1}^\infty \in \hat{A}_2 = \\ &= \left\{ f(f_k)_{k=1}^\infty : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |f_k| - g(\arg \lambda_k) \right] < 0 \right\}. \end{aligned}$$

Допустим, что  $E_\Lambda$  — АПС в  $(E_\Lambda; A(G))$  — замыкании  $E_\Lambda$  по топологии  $A(G)$ . Тогда  $L_\Lambda$  — эпиморфизм  $A_2$  на  $(E_\Lambda; A(G))$ . Согласно общей теории двойственности (см. раздел 3.9) это означает, что оператор  $\ell_\Lambda$  отображает  $[1, g(\varphi))$  на замкнутое подпространство  $M$  пространства  $\hat{A}_2$ . Положим  $D_H = M$  и предположим, что пространство  $M$  финитно полно. Пусть  $\Phi$  — множество всех финитных последовательностей. Тогда  $\Phi \subseteq M$  и  $\bar{\Phi} \subseteq M = M$ . Но, как нетрудно проверить, множество  $\Phi$  плотно в пространстве  $\hat{A}_2$  с соответствующей финитной топологией и потому  $\bar{\Phi} = M = \hat{A}_2$ . В этом случае, согласно все тем же результатам общей теории двойственности, оператор  $L_\Lambda = (\ell_\Lambda)'$  отображает взаимно-однозначно  $A_2$  на замкнутое подмножество  $A(G)$ , т. е. на пространство  $(E_\Lambda; A(G))$ . Следовательно,  $E_\Lambda$  — абсолютный базис в  $(E_\Lambda; A(G))$ . Поэтому, если мы ищем критерий того, что  $E_\Lambda$  — АПС, но не АБ в  $(E_\Lambda; A(G))$ , то необходимо отказаться от финитной полноты  $M$ , обеспечивающей равенство  $M = \hat{A}_2$ . Но тогда приходится предполагать, что есть по крайней мере одно абсолютно сходящееся в  $A(G)$  н. р. н. по системе  $E_\Lambda$ . Таким образом, при исследовании АПС экспонент в  $A(G)$  возникают такие интерполяционные задачи (5.47), которые были рассмотрены в данном разделе. Уже по этой причине подобные задачи, не избалованные вниманием математиков, заслуживают более обстоятельного изучения. При этом следует иметь в виду, что такие же интерполяционные задачи

появляются при исследовании абсолютно представляющих систем функций, более общих, чем обычные экспоненты (например, систем  $\{E_\rho(\lambda_k z)\}_{n=1}^\infty$  по обобщенным экспонентам) в различных функциональных пространствах.

### 5.5. О граничной гладкости решений линейных дифференциальных уравнений

В настоящем разделе, следуя [48, с. 365–366], показывается, что для любой ограниченной выпуклой области  $G \subset \mathbb{C}$  можно построить ряд экспонент вида (1.1) (с  $p = 1$ ), сумма которого аналитична, но неограничена в области  $G$ . При этом используется уже неоднократно встречающаяся теорема Поля 5.4. Этот результат применяется затем к линейным дифференциальным уравнениям бесконечного порядка с постоянными коэффициентами и символом из  $[1, 0]$ , позволяя установить качественное различие в характере граничной гладкости частных решений уравнений конечного и бесконечного порядков.

**5.5.1.** Рассмотрим вначале последовательность  $\Lambda := \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  попарно различных точек  $\lambda_k$  из  $\mathbb{C}$  таких, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\lambda_k} = 0. \quad (5.59)$$

Обозначим символом  $\Omega'$  (непустое) множество всех предельных точек последовательности  $\Omega := \{\arg \lambda_k\}_{k=1}^\infty$ . При этом считаем, что аргумент любой точки  $z$  из  $\mathbb{C}$  отсчитывается от положительной полуоси против часовой стрелки, так что всегда  $0 \leq \arg z < 2\pi$ . Поэтому  $\Omega' \subseteq [0, 2\pi]$ .

Зафиксируем любую точку  $\phi_0$  из  $\Omega'$  и выделим подпоследовательность  $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ ,  $\mu_k = \lambda_{n_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_k \uparrow +\infty$ , для которой  $\lim_{k \rightarrow \infty} \arg \mu_k = \phi_0$ .

Проведем прямую  $l$  перпендикулярно прямой, пересекающей действительную ось в начале координат под углом  $-\phi_0$  (относительно положительной полуоси). Пусть, далее,  $M$  — та полуплоскость, которая ограничена прямой  $l$  и содержит перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки прямой  $l$  в направлении, противоположном лучу  $\arg z = -\phi_0$ . Обозначим символом  $Q(z_0, \delta)$  угол в полуплоскости  $M$  раствора  $\pi - 2\delta$  ( $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ ) с вершиной в какой-либо точке  $z_0$  прямой  $l$ , содержащий перпендикуляр к  $l$  в точке  $z_0$  и симметричный относительно этого перпендикуляра. Пусть теперь  $T$  — любой

луч с началом в точке  $z_0$ , лежащий в  $Q(z_0, \delta)$ . Выберем последовательность точек  $\{z_n\}_{n=1}^\infty$  на  $T$  так, чтобы  $\rho(z_n, z_0) = |z_n - z_0| \downarrow 0$ .

Зафиксируем произвольную последовательность  $\{d_k\}_{k=1}^\infty$  комплексных чисел такую, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |d_n| = +\infty, \quad (5.60)$$

и рассмотрим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (относительно  $x_k$ ):

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \exp(\mu_k z_n) = d_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.61)$$

Для любого  $n \geq 1$  имеем

$$z_n - z_{n+1} = h_n e^{i\phi}, \quad h_n > 0, \quad \frac{\pi}{2} + \delta - \phi_0 \leq \phi \leq \frac{3}{2}\pi - \delta - \phi_0.$$

Далее, при любом  $k \geq 1$   $\mu_k = |\mu_k| e^{i\psi_k}$ ,  $\psi_k \rightarrow \phi_0$ . Но тогда

$$\Re \mu_k (z_n - z_{n+1}) = h_n |\mu_k| \cos(\psi_k + \phi),$$

откуда следует, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\exp \mu_k (z_n - z_{n+1})| = 0$  для всех  $n \geq 1$ .

Согласно теореме Поля 5.4 система (5.61) имеет хотя бы одно (на самом — бесконечное множество, что в данном случае не используется) решение  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  такое, что все ряды в левой части (5.61) абсолютно сходятся.

С учетом того, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \arg \mu_k = \phi_0$ , устанавливаем абсолютную сходимость ряда  $\sum_{k=1}^\infty x_k e^{\mu_k z}$  во всех точках полуплоскости  $M$ . При этом, если  $v(z)$  — сумма этого ряда, то  $v \in A(M)$ , но  $\lim_{n \rightarrow \infty} |v(z_n)| = \infty$  (в силу соотношений (5.61)) и потому  $v$  неограничена в  $M$ .

Нетрудно заметить, что  $l$  является границей полуплоскости  $M$  абсолютной сходимости ряда  $\sum_{k=1}^\infty x_k e^{\mu_k z}$ .

**5.5.2.** Пусть, далее,  $\phi_0 \in \Omega'$ ,  $D$  — опорная прямая к ограниченной выпуклой области  $G$ , соответствующая направлению  $-\phi_0$ , и  $z_0$  — одна из точек опоры ( $z_0 \in D \cap \bar{G}$ ). Если граница  $\partial G$  области  $G$  имеет касательную в точке  $z_0$ , то эта касательная совпадает с  $D$ , и все достаточно близкие к  $z_0$  точки перпендикуляра, проведенного в точке  $z_0$  к прямой  $D$  в направлении, противоположном  $-\phi_0$ , принадлежат  $G$ . Если же в точке  $z_0$  имеются две различные односторонние

касательные к  $\partial G$  (как известно, они всегда существуют), то угол между этими двумя (односторонними) касательными меньше, чем  $\pi$ , и снова найдется луч, проведенный из точки  $z_0$ , все точки которого, достаточно близкие к  $z_0$ , принадлежат  $G$ . В обоих случаях, если взять последовательность точек  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  (на перпендикуляре или — во втором случае — луче), стремящуюся к  $z_0$ , и построить описанным выше способом ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{\lambda_{n_k} z}$ , то его сумма  $v(z)$  аналитична, но не ограничена в  $G$  (подавно  $v \notin AC(G)$ ).

**5.5.3.** Применим полученный результат к дифференциальному уравнению бесконечного порядка

$$(L_a y)(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z) = f(z), \quad (5.62)$$

в котором  $a(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$  — трансцендентная целая функция из класса  $[1, 0]$ . Как отмечалось выше, в этом случае оператор  $L_a$  непрерывен в  $A(G)$ , какова бы ни была область  $G$  из  $\mathbb{C}$ , причем ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$  сходится абсолютно в любой точке из  $G$  и равномерно внутри  $G$ .

Пусть  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность попарно различных нулей функции  $a(\lambda)$ . Тогда, как хорошо известно (см., например, [98] или [100]), выполняется условие (5.59) и, согласно предыдущему, для любой ограниченной выпуклой области  $G$  найдется сходящийся абсолютно в  $G$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{\lambda_{n_k} z}$ , сумма  $v(z)$  которого аналитична, но не ограничена в  $G$ . При этом функция  $v$  удовлетворяет в области  $G$  уравнению  $(L_a y)(z) = 0$ , так как

$$L_a \left( \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{\lambda_{n_k} z} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k L_a (e^{\lambda_{n_k} z}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k a(\lambda_{n_k}) e^{\lambda_{n_k} z} = 0 \quad \forall z \in G.$$

С другой стороны, если функция  $f$  локально-аналитична на  $\bar{G}$ , т. е. аналитична в некоторой ограниченной выпуклой области  $G$ , содержащей  $\bar{G}$ , то согласно [34–36] найдется решение  $y_1(z)$  уравнения (5.62) из  $A(G_1)$ , удовлетворяющее ему в  $G_1$  и подавно в  $G$ . Тогда функция  $w(z) := y_1(z) + v(z)$  аналитична, но не ограничена в области  $G$  и удовлетворяет в этой области уравнению (5.62). Подавно  $w \notin AC(G)$ , хотя  $f \in AC(G)$ . Заметим, что существование такого «плохого» частного решения уравнения (5.62) при «хорошей» пра-

вой части  $f$  невозможно в случае дифференциального уравнения конечного порядка

$$\sum_{k=0}^p a_k y^{(k)}(z) = f(z), \quad a_p \neq 0, \quad 1 \leq p < +\infty, \quad (5.63)$$

в котором  $a(z) = \sum_{k=0}^p a_k z^k$  — многочлен порядка (степени)  $p$ . Как хорошо известно из курсов по теории дифференциальных уравнений, если  $0 \leq m \leq +\infty$ ,  $G$  — ограниченная выпуклая область с (бесконечно) гладкой границей и  $f \in AC^m(G)$ , то любое решение уравнения (5.63) из  $A(G)$  принадлежит пространству  $AC^{m+p}(G)$ .

В связи с изложенным естественно возникает вопрос о существовании «хороших» частных решений уравнения бесконечного порядка (5.62), т. е. решений из пространства  $A(G)$  с определенной дополнительной гладкостью на  $\partial G$  в случае, когда правая часть  $f$  является достаточно гладкой функцией в  $\bar{G}$ . Этот вопрос довольно подробно исследован в работе [48]. В частности, в этой статье установлено, что если  $G$  — ограниченная выпуклая область с гладкой границей, а символ  $a(z)$  оператора  $L_a$  обладает определенными свойствами (например, указанными в теореме В из [48]), то множество  $\mathcal{E}_f$  всех частных решений уравнения (5.62) из  $A(G)$  весьма «пестро» по отношению к своей граничной гладкости в  $G$ : если  $f \in AC(G)$ , то в  $\mathcal{E}_f$  содержатся решения, начиная с неограниченных в  $G$  и заканчивая бесконечно дифференцируемыми в  $\bar{G}$  решениями. Разумеется, для уравнений конечного порядка (5.63) такой «разброс» граничной гладкости частных решений невозможен.

## 5.6. Другие применения рядов экспонент.

### Проблемы и перспективы

Изложенный выше материал является своего рода введением в некоторые разделы теории рядов Дирихле и в теорию представляющих систем. Интерес к этим вопросам был вызван прежде всего многочисленными и разнообразными приложениями рядов экспонент и представляющих систем из обычных и обобщенных экспонент (в частности, к теории чисел, комплексному анализу и дифференциальным уравнениям). В настоящем разделе дается краткий и довольно схематичный обзор некоторых результатов, полученных в этом направлении представителями ростовской математической школы.



**5.6.1.** Предположим, что оператор свертки  $L : L(e^{\lambda z}) = a(\lambda)e^{\lambda z}$  действует непрерывно из полного отделимого локально выпуклого пространства (ПОЛВП)  $H_1$  в ПОЛВП  $H_2$ . Допустим еще, что  $\mathcal{E}_\Lambda := (e^{\lambda_k z})_{k=1}^\infty$  — абсолютно представляющая система (АПС) экспонент в  $H_2$ . Введем пространства числовых последовательностей:

$$\tilde{A}_j := A_2(\mathcal{E}_\Lambda, H_j) = \left\{ C = (C_n)_{n=1}^\infty : q_{p^{(j)}}(C) := \sum_{n=1}^\infty p^{(j)}(e^{\lambda_n z})|C_n| < \infty \forall p^{(j)} \in P_j \right\}.$$

Здесь  $\Lambda = \{\lambda_k : k \geq 1\}$ ,  $P_j = \{p^{(j)}\}$ ,  $j = 1, 2$ , — набор преднорм, определяющий топологию в ПОЛВП  $H_j$ . Пусть, наконец,  $\{\frac{1}{a(\lambda_n)}\}_{n=1}^\infty$  — мультипликатор пары пространств  $\tilde{A}_2, \tilde{A}_1$ , т. е.

$$\left\{ \frac{C_n}{a(\lambda_n)} \right\}_{n=1}^\infty \in \tilde{A}_1 \quad \forall C = (C_n)_{n=1}^\infty \in \tilde{A}_2.$$

Покажем, что тогда  $L$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$ , и укажем способ построения частного решения уравнения  $Ly = f$  из  $H_1$  для любой правой части  $f$  из  $H$ .

Так как по предположению  $\mathcal{E}_\Lambda$  — АПС в  $H_2$ , то существует абсолютно сходящееся в  $H_2$  разложение  $f$  в ряд по системе  $\mathcal{E}_\Lambda$ :  $f = \sum_{k=1}^\infty a_k e^{\lambda_k z}$ , где  $\{a_k\}_{k=1}^\infty \in \tilde{A}_2$ . Тогда  $\{\frac{a_k}{a(\lambda_k)}\} \in \tilde{A}_1$  и  $y_f := \sum_{k=1}^\infty \frac{a_k}{a(\lambda_k)} e^{\lambda_k z} \in H_1$ . При этом последний ряд сходится абсолютно в  $H_1$ , откуда

$$Ly_f = \sum_{k=1}^\infty \frac{a_k}{a(\lambda_k)} L(e^{\lambda_k z}) = \sum_{k=1}^\infty a_k e^{\lambda_k z} = f.$$

Таким образом,  $y_f$  — частное решение уравнения  $Ly = f$  из  $H_1$  при произвольно заданной правой части  $f$  из  $H_2$ .

Проиллюстрируем этот общий результат одним конкретным примером, в котором  $L$  — оператор свертки с символом  $a(z)$  из класса  $[1, \infty)$ ,  $Y$  — произвольная ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$ , содержащая начало координат, а  $B$  — сопряженная диаграмма [98] функции  $a(z)$ , т. е. наименьший выпуклый компакт, содержащий все особенности функции  $E_a(z) := \sum_{n=0}^\infty a^{(n)}(0)z^{-n-1}$ , ассоциированной с  $a(z)$  по Борелю. Как уже неоднократно отмечалось ранее,  $L$  — линейный непрерывный оператор из  $H_1 = A(Y + B)$  в  $H_2 = A(Y)$ .

Предположим, что функция  $a(z)$  имеет вполне регулярный рост при показателе 1 [98]. Тогда найдется некоторое  $C^0$ -множество  $T_0$  кружков в  $\mathbb{C}$  нулевой линейной плотности такое, что равномерно по  $\varphi \in [0, 2\pi]$  существует  $\lim_{r \rightarrow \infty, re^{i\varphi} \notin T_0} \left[ \frac{\ln |a(re^{i\varphi})|}{r} \right] = h(\varphi)$ , где  $h(\varphi)$  — индикатор  $a(z)$  (при показателе 1). Пусть  $E_\Lambda = (\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$ , где  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = \infty$  — какая-либо универсально абсолютно представляющая система (УАПС) в  $\mathbb{C}$ , и пусть  $f \in A(Y)$ . Если  $\Lambda_0 := \Lambda \cap T_0$  и  $\Lambda_1 = \Lambda \setminus \Lambda_0 = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ , то, как уже отмечалось,  $E_{\Lambda_1}$  — АПС в  $A(Y)$ . Тогда

$$\tilde{A}_2 := A_2(E_{\Lambda_1}, A(Y)) = \left\{ d = (d_n)_{n=1}^\infty : \sum_{n=1}^\infty |d_n| \exp [h_m(\arg \mu_n) |\mu_n|] =: |\alpha|_m < \infty, m = 1, 2, \dots \right\},$$

где  $\{F_m\}_{m=1}^\infty$  — последовательность выпуклых компактов в  $Y$  таких, что  $F_m \subset \text{int } F_{m+1} \subset F_{m+1} \subset Y = \bigcup_{s=1}^\infty F_s$  при любом  $m \geq 1$ , и  $h_m(-\varphi)$  — опорная функция  $F_m$ .

Аналогично,

$$\tilde{A}_1 := A_2(E_{\Lambda_1}, A(Y + B)) = \left\{ \gamma = (\gamma_n)_{n=1}^\infty : \sum_{n=1}^\infty |\gamma_n| \exp [h_m(\arg \mu_n) + b(-\arg \mu_n)] |\mu_n| < \infty, m = 1, 2, \dots \right\}$$

(здесь  $b(-\varphi)$  — опорная функция компакта  $B$ , совпадающая по известной теореме Поля [98] с функцией  $h(\varphi)$ ).

Пусть  $f(z) = \sum_{k=1}^\infty f_k \exp \mu_k z$  — какое-либо абсолютно сходящееся в  $H_2 = A(Y)$  разложение по АПС  $E_{\Lambda_1}$ . Тогда для любого  $m \geq 1$

$$\sum_{k=1}^\infty |f_k| \exp [|\mu_k| h_m(\arg \mu_k)] < \infty.$$

Составим ряд  $y(z) = \sum_{k=1}^\infty \frac{f_k}{a(\mu_k)} \exp \mu_k z$ . Так как  $\Lambda_1 \cap T_0 = \emptyset$ , то существует  $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ :  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  и  $|a(\mu_k)| = \exp [|\mu_k|(\varepsilon_k + h(\arg \mu_k))]$ .

Отсюда при всех  $m \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k|}{|a(\mu_k)|} \exp |\mu_k| [h_m(\arg \mu_k) + h(\arg \mu_k)] = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \exp [h_m(\arg \mu_k) - \varepsilon_k] |\mu_k|. \end{aligned}$$

Так как  $h_{m+1}(\varphi) - h_m(\varphi) > 0$  для любого  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , то

$$\sup_{k \geq 1} [h_m(\arg \mu_k) - \varepsilon_k - h_{m+1}(\arg \mu_k)] = D_m < \infty,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k|}{|a(\mu_k)|} \exp [h_m(\arg \mu_k) + h(\arg \mu_k)] |\mu_k| \leq e^{D_m} \cdot |f|_{m+1} < \infty$$

и  $\left\{ \frac{f_k}{a(\mu_k)} \right\}_{k=1}^{\infty} \in A_2(E_{\Lambda_1}, A(Y+B))$ , т. е.  $y \in A(Y+B) = H_1$ .

Таким образом,  $\left\{ \frac{1}{a(\mu_k)} \right\}_{k=1}^{\infty}$  — мультипликатор пары  $\tilde{A}_2, \tilde{A}_1$ , а  $y$  — эффективно построенное частное решение уравнения  $Ly = f$  из  $A(Y+B)$ . Тем самым получен результат, установленный ранее в [41, с. 353].

В последующем описанный метод построения частного решения уравнения  $Ly = f$  в случае, когда  $L$  — оператор свертки или типа свертки, использовался в других функциональных пространствах как самим автором, так и его учениками (О. В. Епифанов, В. В. Моржаков, А. В. Абанин, В. А. Савельев и др.).

**5.6.2.** Пусть  $T$  — линейный непрерывный оператор из ПОЛВП  $H_1$  в ПОЛВП  $H_2$ . Допустим, что  $T$  — эпиморфизм  $H_1$  на  $H_2$ . Возникает естественный вопрос о том, имеет ли оператор  $T$  линейный непрерывный правый обратный (ЛНПО)

$$T_1 : H_2 \rightarrow H_1, \quad TT_1 y = y \quad \forall y \in H_2.$$

Иными словами, спрашивается, при каких условиях на оператор  $T$  и пространства  $H_j$  для любой правой части  $f$  из  $H_2$  в  $H_1$  найдется частное решение уравнения  $Ty = f$ , зависящее от  $f$  непрерывно и линейно. В случае, когда оба пространства  $H_1, H_2$  являются пространствами Фреше, согласно известной теореме Майкла любой

линейный непрерывный (из  $H_1$  в  $H_2$ ) оператор, являющийся эпиморфизмом  $H_1$  на  $H_2$ , обладает непрерывным (но не обязательно линейным!) правым обратным.

Как показал автор в конце 80-х — начале 90-х гг. XX века, описанная в п. 5.6.1 методика построения частного решения уравнения свертки  $Ly = f$  позволяет (при дополнительном предположении о том, что  $\{\frac{1}{a(\lambda_k)}\}_{k=1}^\infty$  — непрерывный мультипликатор пары  $\tilde{A}_2, \tilde{A}_1$ ) построить эффективно ЛНПО для оператора свертки  $L$ . Разумеется, определение ЛНПО для  $L$  можно считать эффективным в той мере, в какой эффективно разложение  $f$  в  $H_2$  по АПС  $E_\wedge$ ; в общей ситуации этим методом удастся лишь доказать существование ЛНПО.

Отметим, что в ряде мест данной книги (теорема 1.20 из п. 1.2.4, п. 1.2.5, конец п. 2.1.5 и др.) дано представление множества всех (непрерывных) мультипликаторов некоторых пар числовых пространств. С помощью этих результатов нетрудно указать достаточные условия существования (и способ построения) ЛНПО для оператора свертки в соответствующих пространствах. Не останавливаясь на этих результатах, которые может сформулировать сам читатель, отметим лишь, что в работах автора и его учеников (А. В. Абанин, С. Н. Мелихов и др.) были получены критерии существования ЛНПО у оператора свертки и более общих линейных операторов, непрерывно действующих в функциональных пространствах определенной природы (см. по этому поводу работы [92, 116], а также главу 3 монографии [86]).

**5.6.3.** Пусть, как и в п. 5.6.1,  $L$  — оператор свертки, действующий непрерывно из ПОЛВП  $H_1$  в ПОЛВП  $H_2$ . Допустим, что в  $H_1$  имеется АПС экспонент  $E_\mu = (e^{\mu_k z})_{k=1}^\infty$ , и пусть  $y$  — какое-либо решение уравнения  $Ly = 0$  из  $H_1$ . Тогда найдется по крайней мере один абсолютно сходящийся в  $H_1$  ряд вида  $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k e^{\mu_k z}$  такой, что  $y = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k e^{\mu_k z}$ . Отсюда

$$0 = Ly = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k a(\mu_k) e^{\mu_k z}.$$

Положим  $A_2^0 = \{b = (b_l)_{l=1}^\infty \in \tilde{A}_2 : \sum_{l=1}^\infty b_l e^{\mu_l z} = 0\}$ . Тогда

$$\{\alpha_k a(\mu_k)\}_{k=1}^\infty \in A_2^0.$$

Здесь, как и выше,  $\tilde{A}_j = A_2(E_\mu, H_j)$ .

Обратно, если  $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty \in \tilde{A}_1$ ,  $\{\alpha_k a(\mu_k)\}_{k=1}^\infty \in A_2^0$ , то

$$y := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{\mu_k z} \in H_1$$

и  $y \in L^{-1}(0)$ . Таким образом, если пространства  $\tilde{A}_1$  и  $\tilde{A}_2$  известны (а они — по крайней мере теоретически — определяются по  $H_1$  и  $H_2$ ), то описание ядра  $L^{-1}(0)$  оператора  $L : H_1 \rightarrow H_2$  сводится (при условии, что  $\{\frac{1}{a(\mu_k)}\}_{k=1}^\infty$  — мультипликатор пары  $A_1, A_2$ ) к задаче описания общего вида коэффициентов всех абсолютно сходящихся в  $H_2$  рядов вида  $\sum_{k=1}^\infty c_k e^{\mu_k z}$ , сумма каждого из которых равна нулю (т. е. абсолютно сходящегося нетривиального разложения нуля в  $H_2$  по системе  $E_\mu$ ). Более подробно с этим методом описания ядра  $L^{-1}(0)$  оператора свертки  $L : H_1 \rightarrow H_2$  можно ознакомиться по работе [59]. Там же приведены приложения этого метода, основанного на описании общего вида абсолютно сходящегося нетривиального разложения нуля по системе экспонент, и к другим вопросам теории операторов свертки (разрешимость систем уравнений свертки, проблема факторизации и т. д.). В последующем этот метод был применен как самим автором, так и его учениками, к операторам обобщенной свертки ( $\rho$ -свертки) и другим операторам определенной природы. Читателю, заинтересовавшемуся этой тематикой, можно рекомендовать для вхождения в нее работы [3, 59, 60, 159].

**5.6.4.** В ряде работ автора (начиная со статьи [45]) было показано, что при определенных предположениях последовательность экспонент

$$E_\Lambda = \{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^\infty$$

является АПС в ПОЛВП  $H$  тогда и только тогда, когда в  $H$  имеется абсолютно сходящееся нетривиальное разложение нуля по системе  $E_\Lambda$ . В последующем результаты подобного характера о связи между свойством какой-либо последовательности  $\{x_\lambda\}$  быть АПС в  $H$  и наличием в  $H$  абсолютно сходящегося нетривиального разложения нуля по системе  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  были получены автором и его учениками для операторов и пространств довольно общей природы (см. например, [3, 44, 45, 62, 86, 116, 158, 159]). Об этом уже говорилось в разделе 5.4.

Во всех этих работах предполагалось, что  $x_\lambda$  — собственные элементы линейного непрерывного в  $H$  оператора  $T$  такого, что все

корневые подпространства  $(T - \lambda E)^{-1}(0)$  одномерны. Но это предположение довольно часто не выполняется, когда  $H$  — пространство функций, определенных на некотором множестве из  $\mathbb{C}^m$  или  $\mathbb{R}^m$ , уже при  $m = 2$ . В качестве примера возьмем встречавшееся в пункте 4.6.8 пространство  $Hr(G)$  всех функций  $u(x, y)$ , определенных и гармонических в области  $G \in \mathbb{R}^2$ , т. е. имеющих непрерывные производные по обоим переменным и удовлетворяющих в каждой точке из  $G$  уравнению Лапласа

$$(\Delta u)(x, y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Используя связь между гармоническими и аналитическими функциями, нетрудно показать, что каждая функция из  $Hr(G)$  имеет в  $G$  непрерывные частные производные любого порядка по обоим переменным.

Топологию в  $Hr(G)$  можно ввести с помощью возрастающей последовательности  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$  компактов в  $G$  с непустыми внутренностями  $F_n^0$ , аппроксимирующей изнутри область  $G$ :

$$G = \bigcup_{n=1}^\infty F_n; \quad F_n \subseteq F_{n+1}^0 \subset G \quad \forall n \geq 1.$$

Тогда счетная последовательность норм

$$\|U\|_n = \max \{|u(x, y)| : (x, y) \in F_n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

определяет топологию в  $Hr(G)$ , в которой последнее является пространством Фреше над полем  $\mathbb{R}$ .

Используя известное из курса теории функций комплексного переменного интегральное представление функций, гармонических в круге конечного радиуса и непрерывных в его замыкании, а затем лемму Гейне — Бореля, нетрудно показать, что в пространстве  $Hr(G)$ , где  $G$  — область в  $\mathbb{R}^2$ , непрерывен любой линейный дифференциальный оператор от двух переменных конечного порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть  $\mu \in \mathbb{R}$  и  $x_\mu := e^{\mu x} \cos \mu y$ ,  $y_\mu := e^{\mu x} \sin \mu y$ . Очевидно, что

$$x_\mu \in Hr(\mathbb{R}^2), \quad y_\mu \in Hr(\mathbb{R}^2) \quad \forall \mu \in \mathbb{R},$$

и

$$\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial x}\right)(x, y) = \mu x_\mu(x, y), \quad \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial x}\right)(x, y) = \mu y_\mu(x, y).$$

Отсюда следует, что при любом  $\mu$  из  $\mathbb{R}$  корневое подпространство

$$Hr(\mathbb{R}^2) \cap \left( \frac{\partial}{\partial x} - \mu E \right)^{-1} (0)$$

содержит двумерное множество, состоящее из собственных элементов оператора  $\frac{\partial}{\partial x}$ , любая конечная подсистема которых линейно независима в  $Hr(G)$ , где  $G$  — произвольная область в  $\mathbb{R}^2$ . Действительно,

$$\begin{aligned} x_\mu &\in Hr(\mathbb{R}^2) \cap \left( \frac{\partial}{\partial x} - \mu E \right)^{-1} (0), \\ y_\mu &\in Hr(\mathbb{R}^2) \cap \left( \frac{\partial}{\partial x} - \mu E \right)^{-1} (0), \end{aligned}$$

если  $\mu \in \mathbb{R}$ . Аналогично, пространство  $Hr(\mathbb{R}^2) \cap \left( \frac{\partial}{\partial y} - \mu E \right)^{-1} (0)$  двумерно, а пространство  $Hr(\mathbb{R}^2) \cap \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu E \right)^{-1} (0)$  четырехмерно.

Все известные автору работы о связи между АПС и абсолютно сходящимися нетривиальными разложениями нуля по системе собственных элементов  $x_\lambda$  оператора  $T$ , в которых корневые пространства

$$H \cap (T - \lambda E)^{-1} (0)$$

или пусты, или одномерны, к данной ситуации неприменимы. Было бы интересно получить здесь какие-либо новые результаты.

Не описана и связь между свойством системы (многомерных) экспонент  $\mathcal{E}_r^\Lambda := \left\{ \exp \left( \sum_{k=1}^r \lambda_k^{(n)} z_k \right) \right\}_{n=1}^\infty$ ,  $r \geq 2$ , быть АПС в  $A(G)$ , где  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}^r$ , и наличием в  $A(G)$  абсолютно сходящегося нетривиального разложения нуля по системе  $\mathcal{E}_r^\Lambda$ . Эта связь проанализирована и описана довольно подробно лишь в работе [104] для весьма частной ситуации, когда  $G = \times_{k=1}^p G_k$  и  $G_k$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{R}$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ .

Автору неизвестны аналогичные результаты для произвольной ограниченной выпуклой области в  $\mathbb{C}^p$ ,  $p \geq 2$ .

**5.6.5.** Ряды экспонент с мнимыми показателями нашли приложения (как удобный аппарат представления искомого решения) в различных задачах для аналитических и бесконечно-дифференцируемых функций (об этом уже, в частности, говорилось в конце разделов 5.1–5.3; см. по этому поводу также статьи [9, 57, 72, 75, 81] и библиографию к ним).

Наконец, ряды экспонент оказались весьма удобным аппаратом представления решений различных задач в теории дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Так, в довольно большом количестве работ автора и его учеников (А. Б. Михайлов и др.) решалась задача Коши для различных классов линейных уравнений в частных производных (см., например, статьи [76, 94]).

Необходимо также отметить, что исследование рядов экспонент, их обобщений и приложений проводились ростовскими математиками под непосредственным влиянием работ известного российского математика А. Ф. Леонтьева, подытоженных в его цикле монографий [100–103]. На протяжении ряда десятилетий представители уфимской математической школы, возглавляемой А. Ф. Леонтьевым, его многочисленные ученики (в первую очередь И. Ф. Красичков-Терновский и В. В. Напалков) и ростовские математики, группировавшиеся вокруг автора данной книги, проводили свои исследования в тесном и плодотворном контакте.

Следует заметить, что хотя все эти исследования относились к линейному комплексному анализу и, в частности, линейным уравнениям, в содержательном обзоре С. Ю. Доброхотова и академика В. П. Маслова [21] показано, что многомерные ряды Дирихле можно эффективно использовать и при построении асимптотических решений краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений.

Эту книгу, написанную местами весьма лапидарно, хотелось бы закончить цитатой из обзора [21]. «Изучение рядов (1.1) (в нашей нумерации — Ю. К.) и свойств функций, определенных этими рядами, составляет в настоящее время целый раздел теории функций». И далее, говоря о том, что «наиболее значительные результаты в этой области имели место в последнее время» (прежде всего, работы А. Ф. Леонтьева), авторы обзора [21], продолжают: «Эти достижения безусловно приведут к прогрессу в различных областях математики, в том числе и в развитии асимптотических методов решения нелинейных уравнений».

Будем надеяться, что следующее поколение российских математиков внесет существенный вклад в дальнейшее развитие теории рядов экспонент, представляющих систем и их применение к «различным областям математики».



## ЛИТЕРАТУРА

1. Абанин А. В. Некоторые представляющие системы в  $\rho$ -выпуклых областях.— М., 1979.—47 с. Деп. в ВИНТИ, № 2571-79.
2. Абанин А. В. О представлении функций рядами экспонент и универсальных классах выпуклых областей в  $\mathbb{C}^n$  // Линейные операторы в комплексном анализе.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1994.—С. 3–9.
3. Абанин А. В. Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, 1995.—268 с.
4. Абанин А. В. Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы // Мат. заметки.—1995.—Т. 57, № 4.—С. 483–497.
5. Абанин А. В. О разложении пространств в ряды из подпространств // Актуальные проблемы математического анализа.—Ростов-на-Дону: Изд-во «Гин-го», 2000.—С. 23–27.
6. Абанин А. В., Коробейник Ю. Ф. Диагональные операторы в пространствах числовых семейств. Приложения к рядам Дирихле // Актуальные вопросы математического анализа.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1978.—С. 8–17.
7. Абанин Д. А. Продолжение по Борелю — Уитни ультрадифференцируемых функций нормального типа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, 2005.—124 с.
8. Абанин Д. А. Абсолютно представляющие системы экспонент с мнимыми показателями в пространствах ультраджетов нормального типа и продолжение функций по Уитни // Владикавк. мат. журн.—2006.—Т. 7, № 1.—С. 3–15.
9. Абанин Д. А., Коробейник Ю. Ф. О построении решения многомерной проблемы Бореля с помощью кратных рядов экспонент // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2001.—№ 2.—С. 3–5.
10. Банах С. С. Курс функционального анализа.—Київ.: Радянська школа, 1948.—216 с.
11. Бари Н. К. Тригонометрические ряды.—М.: ГИФМЛ, 1961.—936 с.
12. Братищев А. В. Об интерполяционной задаче в некоторых классах целых функций // Сиб. мат. журн.—1976.—Т. 17, № 1.—С. 30–43.
13. Братищев А. В. Достаточные условия интерполяционных множеств в классах целых функций, характеризуемых индикатором // Докл. АН СССР.—1984.—Т. 279, № 5.—С. 1036–1039.
14. Братищев А. В., Коробейник Ю. Ф. Кратная интерполяционная задача в пространстве целых функций заданного уточненного порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1976.—Т. 40.—С. 1102–1127.
15. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства.—М.: ИЛ, 1959.—410 с.
16. Винницкий Б. В. Некоторые свойства рядов по системе  $\{f(\lambda_n z)\}_{n=1}^{\infty}$ : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.—М.: 1980.—10 с.
17. Габович З. Г. Теоремы типа Островского для функций нескольких переменных, представимых рядами Дирихле // Теория функций, функциональный анализ и их приложения.—Харьков, 1972.—Вып. 16.—С. 68–73.

18. Гренадер У., Сегё Г. Тёплицевы формы и их приложения.—М.: ИЛ, 1961.—307 с.
19. Гришин А. Ф., Русаковский А. М. Свободная интерполяция целыми функциями // Теория функций, функциональный анализ и их приложения.—Харьков, 1985.—Вып. 44.—С. 32–44.
20. Громов В. П. Критерии сходимости рядов экспонент в функциональных пространствах // Докл. АН СССР.—1991.—Т. 318, № 1.—С. 20–23.
21. Доброхотов С. Ю., Маслов В. П. Многомерные ряды Дирихле в задаче об асимптотике спектральных серий нелинейных эллиптических операторов // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики».—Т. 23.—С. 137–225.
22. Драгилев М. М. О продолжимых базисах аналитических функций // Мат. сб.—1961.—Т. 53, № 2.—С. 207–218.
23. Драгилев М. М., Захарюта В. П., Коробейник Ю. Ф. Двойственность между некоторыми вопросами теории базиса и интерполирования // Докл. АН СССР.—1974.—Т. 216, № 3.—С. 521–525.
24. Дьедонне Ж., Шварц Л. Двойственность в пространствах  $F$  и  $LF$  // Математика.—1958.—Т. 2, вып. 2.—С. 77–117.
25. Епифанов О. В. Дифференциальный оператор бесконечного порядка в пространствах целых функций экспоненциального типа // Сиб. мат. журн.—1974.—Т. 15, вып. 2.—С. 312–331.
26. Епифанов О. В. Вариации слабо достаточных множеств в пространствах аналитических функций // Изв. вузов. Математика.—1986.—№ 7.—С. 50–56.
27. Зобин Н. М., Крейн С. Г. Математический анализ гладких функций.—Воронеж: Изд-во Воронежского гос. ун-та, 1978.—143 с.
28. История отечественной математики. Т. 4. Книга 1, глава I.—Киев: Наукова думка, 1970.—882 с.
29. Кадец В. М., Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы в линейных топологических пространствах // Изв. СКНЦВШ. Сер. Естеств. науки.—Ростов-на-Дону, 1985.—№ 2.—С. 16–19.
30. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах.—М.: Физматгиз, 1959.—684 с.
31. Коробейник Ю. Ф. О некоторых свойствах функциональных рядов // Успехи мат. наук.—1960.—Т. XV, вып. 4 (94).—С. 149–156; поправка там же.—1960.—Т. XVI, вып. 2.—С. 267.
32. Коробейник Ю. Ф. О применимости дифференциальных операторов бесконечного порядка // Сиб. мат. журн.—1965.—Т. 10, № 3.—С. 549–564.
33. Коробейник Ю. Ф. О задаче Коши для линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка // Литовский мат. журн.—1965.—Т. V, № 3.—С. 397–420.
34. Коробейник Ю. Ф. О решениях дифференциального уравнения бесконечного порядка, аналитических в некруговых областях // Мат. сб.—1966.—Т. 71, № 4.—С. 535–544.
35. Коробейник Ю. Ф. О решениях некоторых функциональных уравнений в классах функций, аналитических в выпуклых областях // Мат. сб.—1968.—Т. 75, № 2.—С. 225–234.
36. Коробейник Ю. Ф. Существование аналитического решения дифференциального уравнения бесконечного порядка и характер его области аналитичности // Мат. сб.—1969.—Т. 80, № 1.—С. 52–76.

37. Коробейник Ю. Ф. Об одной двойственной задаче. I. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше // Мат. сб.—1975.—Т. 97, № 2.—С. 193–229.
38. Коробейник Ю. Ф. Об одной двойственной задаче. II. Приложения к  $LN^*$ -пространствам и другие вопросы // Мат. сб.—1975.—Т. 98, № 1.—С. 3–26.
39. Коробейник Ю. Ф. Об одной двойственной связи // Мат. анализ и его приложения. Т. 7.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1975.—С. 200–208.
40. Коробейник Ю. Ф. Об одном классе пространств, обладающих свойством  $(Y_0)$  // Изв. СКНЦВШ. Сер. Естеств. науки.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1977.—№ 4.—С. 64.
41. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1978.—Т. 42, № 2.—С. 325–355.
42. Коробейник Ю. Ф. Проблема моментов, интерполяция и базисность // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1978.—Т. 42, № 5.—С. 989–1020.
43. Коробейник Ю. Ф. К вопросу о представляющих системах // Актуальные вопросы математического анализа.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1978.—С. 100–111.
44. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы экспонент и нетривиальные разложения нуля // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 252, № 3.—С. 528–531.
45. Коробейник Ю. Ф. Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1980.—Т. 44, № 5.—С. 1066–1114.
46. Коробейник Ю. Ф. Абсолютно представляющие системы в счетно нормированных пространствах.—М., 1980.—23 с. Деп. в ВИНТИ, № 1813-80.
47. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, вып. 1.—С. 73–126.
48. Коробейник Ю. Ф. Граничные свойства аналитических решений дифференциальных уравнений бесконечного порядка // Мат. сб.—1981.—Т. 115, № 3.—С. 364–390.
49. Коробейник Ю. Ф. О некоторых новых результатах в теории представляющих систем // Тезисы докладов международной конференции по теории приближений функций.—Киев, 1983.—С. 101.
50. Коробейник Ю. Ф. Операторы сдвига на числовых семействах.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1983.—155 с.
51. Коробейник Ю. Ф. О представляющих системах подпространств // Мат. заметки.—1985.—Т. 38, № 5.—С. 741–755.
52. Коробейник Ю. Ф. Канонические биортогональные системы. Приложения к вопросам базисности и интерполяции // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 280, № 6.—С. 1298–1302.
53. Коробейник Ю. Ф. Проективные и индуктивные топологии. Достаточные множества и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1986.—Т. 50, № 3.—С. 539–565.
54. Коробейник Ю. Ф. Абсолютно представляющие семейства // Мат. заметки.—1987.—Т. 42, № 5.—С. 670–680.
55. Коробейник Ю. Ф. Абсолютно представляющие системы в пространствах Фреше и реализация сопряженного пространства // Тезисы докладов международной конференции по комплексному анализу и его приложениям.—Варна, 1987.—С. 110.

56. Коробейник Ю. Ф. О некоторых применениях нетривиальных разложений нуля в теории операторов свертки // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 313, № 6.—С. 1324–1328.
57. Коробейник Ю. Ф. Абсолютно представляющие семейства и реализация сопряженного пространства // Изв. вузов. Математика.—1990.—№ 2.—С. 68–76.
58. Коробейник Ю. Ф. Максимальные и  $\gamma$ -достаточные множества. Приложения к целым функциям. I, II // Теория функций, функциональный анализ и их приложения.—Харьков, 1990.—Т. 54.—С. 42–59; 1991.—Т. 55.—С. 23–34.
59. Коробейник Ю. Ф. Описание общего вида нетривиальных разложений нуля по экспонентам. Приложения к операторам свертки // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1991.—Т. 55, № 5.—С. 1049–1069.
60. Коробейник Ю. Ф. Нетривиальные разложения нуля по абсолютно представляющим системам. Приложения к операторам свертки // Мат. сб.—1991.—Т. 182, № 5.—С. 661–680.
61. Коробейник Ю. Ф. О разрешимости оператора свертки в некоторых классах аналитических функций // Мат. заметки.—1991.—Т. 49, вып. 2.—С. 74–83.
62. Коробейник Ю. Ф. Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы // Изв. вузов. Математика.—1992.—№ 7.—С. 26–35.
63. Коробейник Ю. Ф. К вопросу об аналитическом продолжении рядов Дирихле // Математичні студії.—Львів, 1995.—Вып. 4.—С. 19–28.
64. Коробейник Ю. Ф. О линейном правом обратном для операторов представления и свертки // Теория функций и приложений. Труды 7-ой Саратовской Зимней школы.—Саратов, 1995.—С. 60–74.
65. Коробейник Ю. Ф. О счетной определимости множеств // Мат. заметки.—1996.—Т. 59, вып. 3.—С. 382–395.
66. Коробейник Ю. Ф. О правом обратном для оператора свертки, действующего в пространстве ростков на связных множествах в  $\mathbb{C}$  // Мат. сб.—1996.—Т. 187, № 1.—С. 55–82.
67. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы экспонент и задача Коши для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Ч. I.—М., 1997.—39 с. Деп. в ВИНТИ 11.11.96, № 3289.В.96; Ч. II.—М., 1997.—36 с. Деп. в ВИНТИ 11.11.96, № 3290.В.96.
68. Коробейник Ю. Ф. Абсолютная сходимость многомерных рядов Дирихле // Алгебра и анализ. Материалы конференции, посвященной 100-летию Б. М. Гагаева.—Казань: Изд-во Казанского мат. общ-ва, 1997.—С. 122–126.
69. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы экспонент и задача Коши для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Изв. РАН. Сер. мат.—1997.—Т. 61, № 3.—С. 91–132; поправка к статье там же.—1998.—Т. 62, № 3.—С. 224.
70. Коробейник Ю. Ф. Об аналитических решениях многомерной проблемы Бореля // Тезисы докладов международной школы-семинара по геометрии и анализу, посвященной памяти Н. В. Ефимова.—Ростов-на-Дону, 1998.—С. 102–103.
71. Коробейник Ю. Ф. Эффективно представляющие  $\theta$ -тригонометрические системы и их приложения. Ч. I.—М., 1999.—35 с. Деп. в ВИНТИ 29.6.99, № 2132.В.29; Ч. II.—М., 1999.—35 с. Деп. в ВИНТИ 24.11.1999, № 3474.В.99.
72. Коробейник Ю. Ф. Абсолютно представляющие системы экспонент с минимальными показателями в пространствах бесконечно-дифференцируемых функций // Докл. РАН.—2000.—Т. 372, № 1.—С. 17–20.

73. Коробейник Ю. Ф. Об аналитических решениях проблемы Бореля // Мат. заметки.—2000.—Т. 67, вып. 4.—С. 525–538.
74. Коробейник Ю. Ф. Об абсциссе почти равномерной сходимости обыкновенного ряда Дирихле // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы. I. Комплексный анализ.—Уфа, 2000.—С. 80–83.
75. Коробейник Ю. Ф. Абсолютно представляющие системы экспонент с минимыми показателями в пространствах бесконечно дифференцируемых функций и продолжимость по Борелю — Уитни // Актуальные проблемы математического анализа.—Ростов-на-Дону: Изд-во «Гинго», 2000.—С. 8–22.
76. Коробейник Ю. Ф. Метод Фурье в задаче Коши и абсолютно представляющие системы экспонент. Ч. I // Дифференц. уравнения.—1999.—Т. 35, № 12.—С. 1669–1676; Ч. II.—2000.—Т. 36, № 2.—С. 251–255; Ч. III.—2000.—Т. 36, № 3.—С. 386–392.
77. Коробейник Ю. Ф. О сходимости рядов в локально выпуклых пространствах // Изв. вузов. Математика.—2001.—№ 8 (47).—С. 60–70.
78. Коробейник Ю. Ф. О некоторых классах представляющих систем и их преобразованиях. I // Труды матем. центра им. Н. И. Лобачевского.—Казань, 2002.—Т. 14.—С. 171–185.
79. Коробейник Ю. Ф. О толстых компактах в  $\mathbb{R}^p$  // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Юбилейный номер.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 2002.—С. 93–94.
80. Коробейник Ю. Ф. О некоторых общих классах бесконечно дифференцируемых функций многих вещественных переменных // Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию.—Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2004.—С. 90–140.
81. Коробейник Ю. Ф. Абсолютно представляющие системы экспонент и реализация сильного сопряженного к пространству Фреше функций, аналитических в выпуклой области с заданным ростом вблизи границы // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова.—Ростов-на-Дону, 2004.—С. 116–117.
82. Коробейник Ю. Ф. О некоторых пространствах функций, бесконечно дифференцируемых в открытом множестве из  $\mathbb{R}^p$  // Изв. вузов. Математика.—2005.—№ 3.—С. 31–41.
83. Коробейник Ю. Ф. Линейные преобразования представляющих и абсолютно представляющих систем // Изв. вузов. Математика.—2005.—№ 9.—С. 19–28.
84. Коробейник Ю. Ф. Абсолютно представляющие системы экспонент в весовых пространствах Фреше аналитических функций и аналог теоремы Пэли — Винера — Шварца // Владикавказ. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 3.—С. 38–44.
85. Коробейник Ю. Ф. Весовые пространства бесконечно дифференцируемых функций многих вещественных переменных // Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование.—Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2006.—С. 74–108.
86. Коробейник Ю. Ф. О разрешимости в комплексной области некоторых общих классов линейных операторных уравнений.—Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2006.—244 с.
87. Коробейник Ю. Ф. Ряды Дирихле. Методическое пособие.—Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2008.—122 с.

88. Коробейник Ю. Ф. Об одной интерполяционной проблеме и обобщенной задаче Коши для линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка // Исследования по математическому анализу. Т. I.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—С. 90–103.
89. Коробейник Ю. Ф. О свойствах гармонических и субгармонических функций // Исследования по современному анализу и математическому моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—С. 55–66.
90. Коробейник Ю. Ф., Леонтьев А. Ф. О свойстве внутри-продолжаемости представляющих систем экспонент // Мат. заметки.—1980.—Т. 28, вып. 2.—С. 243–254.
91. Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Реализация сопряженного пространства с помощью обобщенного преобразования Фурье — Бореля. Приложения // Комплексный анализ и математическая физика.—Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1988.—С. 62–73.
92. Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и конформные отображения // Докл. АН СССР.—1992.—Т. 323, № 5.—С. 826–829.
93. Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к оператору свертки // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 1.—С. 70–84.
94. Коробейник Ю. Ф., Михайлов А. Б. Об аналитических решениях задачи Коши // Дифференц. уравнения.—1991.—Т. 27, № 3.—С. 503–510.
95. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Мат. сб.—1972.—Т. 87, № 4.—С. 459–489.
96. Кук Р. Г. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей.—М.: Физматгиз, 1960.—471 с.
97. Лапин Г. П. Интерполирование в классе целых функций конечного порядка и конечного типа // Мат. сб.—1951.—Т. 29, № 4.—С. 565–580.
98. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.—632 с.
99. Леонтьев А. Ф. О значениях целой функции конечного порядка в заданных точках // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1958.—Т. 22.—С. 387–394.
100. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
101. Леонтьев А. Ф. Ряды и последовательности полиномов из экспонент // Труды МИАН СССР.—1987.—Т. 176.—С. 308–325.
102. Леонтьев А. Ф. Последовательности полиномов из экспонент.—М.: Наука, 1980.—384 с.
103. Леонтьев А. Ф. Обобщения рядов экспонент.—М.: Наука, 1981.—320 с.
104. Ле Хай Хой, Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы экспонент в цилиндрических областях // Мат. сб.—1983.—Т. 122 (164), № 4.—С. 458–474.
105. Лунц Г. Л. О некоторых обобщениях рядов Дирихле // Мат. сб.—1942.—Т. 10 (52), № 1–2, С. 35–50.
106. Лунц Г. Л. Об одном классе обобщенных рядов Дирихле // Успехи мат. наук.—1957.—Т. XII, вып. 3.—С. 173–179.
107. Макаров Б. М. О проблеме моментов в некоторых функциональных пространствах // Докл. АН СССР.—1959.—Т. 127, № 5.—С. 957–960.
108. Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций.—М.: Мир, 1968.—129 с.

109. Мандельбройт С. Ряды Дирихле: принципы и методы.—М.: Мир, 1973.—171 с.
110. Мелихов С. Н. Некоторые вопросы теории линейных операторов в пространствах числовых последовательностей: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, 1986.—136 с.
111. Мелихов С. Н. Об абсолютно сходящихся рядах в канонических индуктивных пределах // Мат. заметки.—1986.—Т. 39, вып. 6.—С. 877–886.
112. Мелихов С. Н. О разложении аналитических функций в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1988.—Т. 52, № 5.—С. 991–1004.
113. Мелихов С. Н. Нетривиальные разложения нуля и представительные подпространства // Изв. вузов. Математика.—1990, № 8.—С. 53–65.
114. Мелихов С. Н. Продолжение целых функций вполне регулярного роста и правый обратный для оператора представления аналитических функций рядами квазиполиномов // Мат. сб.—2000.—Т. 191, № 7.—С. 105–128.
115. Мелихов С. Н. Выпуклые конформные отображения и правые обратные к оператору представления рядами экспонент // Труды матем. центра им. Н. И. Лобачевского, Т. 14. Материалы международной научной конференции.—Казань: Казанское мат. общ-во, 2002.—С. 213–227.
116. Мелихов С. Н. Правые обратные к операторам представления рядами экспонент и свертки: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, 2003.—240 с.
117. Мельник Ю. И. К вопросу о представлении регулярных функций рядами Дирихле // Мат. заметки.—1977.—Т. 21, вып. 5.—С. 641–652.
118. Митягин Б. С. Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах // Успехи мат. наук.—1961.—Т. XVI, вып. 4.—С. 63–132.
119. Моржаков В. В. Об уравнениях свертки в пространствах функций, голоморфных в выпуклых областях и на выпуклых компактах // Мат. заметки.—1974.—Т. 16, вып. 3.—С. 431–440.
120. Моржаков В. В. О представлении голоморфных функций многих комплексных переменных рядами экспонент // Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума по теории аппроксимации функций в комплексной области.—Уфа, 1980.—С. 97–98.
121. Моржаков В. В. Абсолютно представляющие системы экспонент в пространстве аналитических функций многих переменных.—Ростов-на-Дону, 1981.—31 с. Деп. в ВИНТИ, № 245-81.
122. Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах.—М.: Наука, 1982.—240 с.
123. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства.—М.: Мир, 1967.—268 с.
124. Райков Д. А. О двух классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Труды семинара по функциональному анализу.—Воронеж, 1957.—Вып. 5.—С. 22–34.
125. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—257 с.
126. Рокафеллер Р. Выпуклый анализ.—М.: Мир, 1973.—469 с.
127. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных.—М.: Наука, 1971.—430 с.
128. Руссаковский А. М. Об интерполяции в классе целых функций, имеющих индикатор не выше данного. II // Теория функций, функциональный анализ и их приложения.—Харьков, 1984.—Вып. 41.—С. 119–122.

129. Себаштьян-и-Силва Ж. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика.—1957.—Т. I, № 1.—С. 60–70.
130. Талалян А. А. Представление измеримых функций рядами // Успехи мат. наук.—1960.—Т. 15, вып. 5.—С. 77–141.
131. Титчмарш Е. К. Теория функций.—М.—Л.: ГИТТЛ, 1951.—506 с.
132. Тищенко Е. С. Критерий продолжимости для пространств ультрадифференцируемых функций типа Берлинга, определенных на толстых компактах // Тезисы докладов Международной школы-семинара по геометрии и анализу, посвященной 90-летию Н. В. Ефимова (Абрау-Дюрсо).—Ростов-на-Дону, 2000.—С. 103–105.
133. Тищенко Е. С. Специальный класс абсолютно представляющих систем в пространствах ультрадифференцируемых функций типа Берлинга // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—Ростов-на-Дону, 2001.—№ 1.—С. 17–19.
134. Тищенко Е. С. Пространства ультрадифференцируемых функций типа Берлинга и абсолютно представляющие системы экспонент в них: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, 2002.—123 с.
135. Фирсакова О. С. Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций // Докл. АН СССР.—1958.—Т. 120, № 3.—С. 1267–1271.
136. Фукс Б. А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных.—М.: ГИФМЛ, 1962.—419 с.
137. Хавин В. П. Пространства аналитических функций // Математический анализ. 1964. (Итоги науки).—М.: ВИНТИ, 1966.—С. 76–164.
138. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье.—М.: Мир, 1986.—462 с.
139. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. II. Функции нескольких переменных.—М.: Наука, 1985.—464 с.
140. Шерстюков В. Б. Некоторые классы полных систем. Достаточные и эффективные множества: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, 2000.—96 с.
141. Шерстюков В. Б. К вопросу о  $\gamma$ -достаточных множествах // Сиб. мат. журн.—2000.—Т. 41, № 4.—С. 935–943.
142. Шерстюков В. Б. Нетривиальные разложения нуля и представление аналитических функций рядами простых дробей // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 2.—С. 458–473.
143. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1071 с.
144. Aoki T. Existence and continuation of holomorphic solutions of differential equations of infinite order // Adv. in Math.—1988.—Vol. 72.—P. 261–283.
145. Bernstein V. Lecons sur les progres recents de la theorie des séries de Dirichlet.—Paris: Gauthier-Villars, 1933.—320 p.
146. Berenstein C. A., Taylor B. A. A new look at interpolation theory for entire functions of one variable // Adv. Math.—1979.—Vol. 33, № 2.—P. 109–143.
147. Bonet J., Meise R., Melikhov S. N. Holomorphic functions on locally closed sets and projective descriptions // Bull. Belg. Math. Soc. Som on Stevin.—2003.—Vol. 10.—P. 491–503.
148. Borel E. Sur quelques points de la theorie des fonctions // Ann. Sci. Norm. Sup.—1895.—Vol. 12, № 3.—P. 9–55.



149. Braun W., Meise R., Taylor B. A. Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results in Math.—1990.—Vol. 17.—P. 206–237.
150. Brown L., Shields A., Zeller K. On absolutely convergent exponential sums // Trans. Amer. Math. Soc.—1960.—Vol. 96, № 1.—P. 162–183.
151. Ehrenpreis L. Fourier analysis in several complex variables.—New York: Wiley-Interscience publ., 1970.—506 p.
152. Ehrenpreis L., Malliavin P. Invertible operators and interpolation in AU spaces // J. Math. Pur. et Appl.—1974.—Vol. 53, № 2.—P. 165–182.
153. Eidelheit M. Zur theorie der systeme linearer Gleichungen // Studia Math.—1936.—Vol. 6.—P. 139–148.
154. Gruman L. Some precisions on the Fourier — Borel transformations and infinite order differential equations // Glasgow Math. J.—1973.—Vol. 14, № 2.—P. 161–167.
155. Hille E. Note on Dirichlet's series with complex exponents // Ann. of Math.—1924.—Vol. 25.—P. 261–278.
156. Kadets V. M., Korobeinik Yu. F. Representing and absolutely representing systems // Studia Math.—1992.—Vol. 102, № 3.—P. 217–223.
157. Korobeinik Yu. F. On shifts of sequences // Analysis Math.—1986.—Vol. 12, № 3.—P. 167–173.
158. Korobeinik Yu. F. Nontrivial expansions of zero and absolutely representing systems // Analysis Math.—1992.—Vol. 18, № 4.—P. 261–282.
159. Korobeinik Yu. F. Absolutely representing systems and convolution operators in the complex domain // Turkish J. of Math.—1996.—Vol. 20, № 2.—P. 219–225.
160. Korobeinik Yu. F. Absolutely convergent Dirichlet series and analytic continuation of its sum // Lobachevski J. of Math.—1998.—Vol. 1.—P. 15–44.—URL: <http://ljm.ksu.ru/content1.html>.
161. Korobeinik Yu. F. Representing systems of exponentials in spaces of infinitely differentiable functions // Studia Math.—2000.—Vol. 139, № 2.—P. 175–188.
162. Korobeinik Yu. F. Representing systems of exponentials in the spaces of infinitely differentiable functions and extendability in the sense of Whitney // Turkish J. of Math.—2001.—Vol. 25, № 4.—P. 503–517.
163. Kothe G. Topologische lineare Raume, Bd. I.—Berlin, 1960.—307 p.
164. Le Khai Khoi Holomorphic Dirichlet series in several variables // Math. Scand.—1995.—Vol. 77.—P. 85–107.
165. Malgrange B. Existence et approximation des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution // Ann. Inst. Fourier.—1955.—Vol. 6.—P. 271–354.
166. Martineau A. Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier — Borel // J. Anal. Math.—1963.—Vol. 9.—P. 1–163.
167. Martineau A. Sur la topologie des espaces de fonctions // Math. Ann.—1966.—Vol. 63, № 1.—P. 62–88.
168. Martineau A. Equations différentielles d'ordre infini // Bull. Soc. Math.—1968.—Vol. 95.—P. 109–154.
169. Pawlucki W., Plesniak W. Extension of  $C^\infty$  functions from sets with polynomial cusps // Studia Math.—1988.—Vol. 88, № 2.—P. 279–287.
170. Polya G. Eine Verallgemeinerung des Fabryschen Lückensatzes // Nachr. Gesellsch. Wissen. Göttingen.—1927.—P. 187–195.
171. Schneider D. Sufficient sets for some spaces of entire functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1974.—Vol. 197.—P. 161–180.

172. *Sebbar A.* Prolongement des solutions holomorphes de certain operateurs differentielles d'ordre infini a coefficients constant // *Lecture Notes in Math.*—Berlin etc.: Springer Verlag, 1980.—Vol. 822.—P. 199–220.
173. *Seeley R. T.* Extensions of  $C^\infty$  space functions defined in a half space // *Proc. Amer. Math. Soc.*—1964.—Vol. 15.—P. 625–626.
174. *Squires W. A.* Necessary conditions for universal interpolation in  $E'$  // *Canad. J. Math.*—1981.—Vol. 33, № 6.—P. 1356–1364.
175. *Tillman H. G.* Dualität in der Potenzialtheorie // *Portugal Math.*—1954.—Vol. 13.—P. 55–86.
176. *Valiron G.* Lectures on the general theory of integral functions.—Toulouse: Édouard Privat, 1923.
177. *Valiron G.* Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet // *Bull. Soc. Math. de France.*—1924.—Vol. 52.—P. 166–174.
178. *Valiron G.* Sur les solutions des équations différentielles d'ordre infini et a coefficients constant // *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*—1929.—Vol. 46 (3).—P. 25–52.
179. *Vogt D.* Kernels of Eidelheit matrices and related topics // *Proc. Intern. Symp. on Functional Analysis (Silivri, 1985).*—Doga Math., 1986.—Vol. 10, № 1.—P. 232–256.
180. *Whitney H.* Analytic extension of differentiable functions defined in closed sets // *Trans. Amer. Math. Soc.*—1934.—Vol. 36.—P. 63–89.
181. *Whitney H.* Functions differentiable on the boundaries of regions // *Ann. of Math.*—1934.—Vol. 33, № 33.—P. 482–485.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- $X_\Lambda$ -подпространство, 185
- $\theta$ -ряд Фурье, 121
- Алгоритм Р. Сили – Р. Хестенса, 122
- Векторное пространство совершенное, 78
- Голоморфное расширение области, 202, 204
- Двойственность, 181, 182
  - вторая ситуация, 173, 176
  - первая ситуация, 172, 173, 175
  - третья ситуация, 173, 176
  - четвертая ситуация, 173, 174, 176
- Задача Коши, 279, 280, 281, 287
  - — обобщенная, 283, 286
- Интерполяционная задача, 51, 268, 271, 274, 277, 278, 289
  - — Э. Бореля, 120, 122, 268
- Компакт толстый, 144
  - Уитни, 145
  - — эффективный, 151
- Метод Г. Л. Лунца, 36
- Множества эквивыпуклые, 261
- Множество  $\text{Concom}(G)$ , 22, 29
  - $D_{a,b}$ , 106, 263
  - $D_m(Q)$ , 258
  - $HD_{2p}(Q)$ , 259
  - $N_0$ , 74
  - $N_0^p$ , 74
  - $N_1$ , 107
  - $W_m(Q)$ , 259
  - $\lambda$ -достаточное, 194, 205
  - единственности, 259
  - нулевой относительной меры, 139
  - слабо достаточное, 204, 214, 231
- Нетривиальное разложение нуля (н. р. н.), 136
  - — — абсолютно сходящееся, 317
  - — — по системе  $E_\Lambda$ , 290
  - — — существенно (с. н. р. н.), 292
- Область голоморфности, 202
- Одночлены Дирихле, 50
- Оператор ЛНПО, 97
  - представления  $L^{\mathcal{E}_N}$ , 109
  - —  $L^{c\mathcal{L}}(X, H)$ , 254
  - —  $L_A^X$ , 95, 97
  - —  $L_A^{\{H_k\}}$ , 235

- —  $L_T$ , 257
- —  $L_\Lambda$ , 184, 187, 256, 308
- —  $\Pi$ , 121
- свертки, 103, 138, 241, 313
- —, описание ядра, 317
- Отображение  $f^\Lambda$ , 227
- $f^{\Lambda\Lambda}$ , 228
- $f^{\Lambda\Lambda\Lambda}$ , 228
  
- Подмножество индуктивно достаточное, 199
- Подобласть выпукло дополнимая, 139
- Подпространство  $\{H_n\}$ -абсолютно представительное (АППП), 245
- $\{H_n\}$ -представительное, 245, 248
- , допускающее спектральный синтез, 50
- инвариантное, 50
- —, имеющее простой спектр, 50
- —, имеющее спектр, 50
- нетривиальное, 50
- почти финитно полное, 306
- — — тощее, 306
- сверточно полное, 246
- — — в  $A(G)$ , 247
- финитно неполное, 306
- — полное, 306
- — тощее, 306
- эффективно представительное, 245
- Полярная оболочка области, 41
- Последовательность  $l_1$ -ядерная, 63
- абсолютно  $P$ -эффективная, 62
- лестничная по Кёте, 76
- невырожденная, 22
- подходящая, 131
- полная, 48
- почти невырожденная, 22, 29
- сильно эффективная по Полиа, 58
- слабо абсолютно представляющая, 255
- со свойством  $(\gamma)$ , 229
- соответствующая, 134
- эйдельгайтовая, 268
- эффективная по Полиа ( $P$ -эффективная), 58
- Преобразование Лапласа, 211
- Фурье – Бореля, 225
- Пространство  $(A_2(X_\Lambda, H))'$ , 191
- $A(\mathbb{C}^p)$ , 69, 70
- $A(G)$ , 131, 208, 210
- $A^\infty(\bar{G})$ , 247
- $A_1(X, H)$ , 89, 90, 92
- — отделимость, 90
- — полнота, 91
- $A_2(X, H)$ , 92
- — отделимость, 93
- — полнота, 93
- $A_2(X_\Lambda, H)$ , 183
- $A_3(X, H)$ , 94
- — отделимость, 94
- — полнота, 94
- $A_G(\Phi)$ , 228, 231
- $A_f$ , 226
- $A_h(G)$ , 212
- $\bar{A}(\bar{G})$ , 210
- $\hat{A}_2(X_\Lambda, H)$ , 186
- $\tilde{A}_G(\Phi)$ , 228

- $B^\infty(G)$ , 154
- $BC^\infty(G)$ , 154
- $BC^\infty(\mathbb{R}^p)$ , 149
- $C^\infty(G)$ , 129, 144
- $C^\infty(\mathbb{R})$ , 120
- $C^\infty[F]$ , 72
- $C^\infty[Q]$ , 144
- $C^\infty[a, b]$ , 120
- $C_0^\infty(G)$ , 147, 155
- $E_F$ -почти правильное, 85
- $E_F$ -правильное, 85, 88
- $E_F^{\mathbb{R}}$ -почти правильное, 87
- $E_F^{\mathbb{R}}$ -правильное, 87
- $E_h^\phi(G)$ , 154, 155
- $E_{h,c}^\phi(G)$ , 154, 155
- $E_{(G)}$ , 181
- $E_{(M(t)t^k)}^0(G)$ , 169
- $E_{(\phi)}^d(G)$ , 155
- $E_{(\phi)}^d[G]$ , 155
- $E_{(\phi)}^{d,c}(G)$ , 155
- $E_{(\phi)}^{d,c}[G]$ , 155
- $E_{\{M(t)t^k\}}^\infty(G)$ , 169
- $E_{\{M(t)t^k\}}^d(G)$ , 169
- $E_{\{\phi\}}^d(G)$ , 155
- $E_{\{\phi\}}^d[G]$ , 155
- $E_{\{\phi\}}^{d,c}(G)$ , 155
- $E_{\{\phi\}}^{d,c}[G]$ , 155
- $\mathcal{E}_\rho^q$ , 223
- $H(F)$ , 80
- $H\{z_0\}$ , 46
- $Hr(G)$ , 248, 250
- $IF$ , 77
- — со свойством  $(Y)$ , 77
- — со свойством  $(Y_0)$ , 77
- $IF_0$ , 77
- $LF$ , 77
- $LN^*$ , 50, 77, 80, 82, 177–180, 203, 210
- — со свойством  $(Y_0)$ , 78
- $L_p(D_{a,b})$ , 107
- $L_p(E)$ , 107
- $L_p^N(D_{a,b})$ , 109
- $M^*$ , 156
- $T(G)$ , 44
- $W_p^{n+1}[-\pi, \pi]$ , 112
- $[1, 0]$ , 47
- $[1, h(z))_p$ , 203, 205
- $[\rho, \infty)_p$ , 82
- $[\rho, \infty]_p$ , 70
- $[\rho, \sigma]_p$ , 71
- $[\rho(r), h(\theta)]$ , 223, 225, 226
- Данжуа – Карлемана, 169
- — максимального индуктивного типа, 169
- — минимального проективного типа, 169
- — нормального индуктивного типа, 169
- дуальное по Кёте, 78
- идеальное, 78
- координатное  $A_1^{\text{с.л.}}(X, H)$ , 253
- —  $A_2^{\text{а.с.л.}}(X, H)$ , 253
- —  $A_2^{\text{а.с.л.}}(X, H)$ , 253
- —  $\tilde{A}(X_\Lambda, H)$ , 255
- коэффициентов  $A_2(U; H)$ , 64
- нормальное по Кёте, 78
- с  $X_\Lambda$ -реализацией, 193, 194
- со строгой  $E_\Lambda$ -топологией, 229
- — —  $X_\Lambda$ -топологией, 186
- ядерное, 64

- Ряд, ассоциированный с рядом, 145
- Дирихле многомерный, 19
  - — —, множество  $B^{(0)}$ , 24
  - — —, множество  $B^{(2)}$ , 24
  - — —, множество  $Cn$ , 24
  - — —, множество сходимости, 22
  - — —, характеристика  $\gamma_Q$ , 29
  - — —, —  $l_\Lambda(\alpha)$ , 36
  - — —, —  $l_\Lambda(\alpha; \delta)$ , 36
- Свойство В), 132
- $V_1$ ), 135
  - «заразительности», 74, 88, 121, 170
- Семейство  $E_\Lambda$ , 211, 259
- $X_\Lambda$ , 183, 184, 186, 189, 192, 193, 197, 200, 208, 209, 257
  - $\tilde{A}$ -ПС<sub>м</sub>, 255
  - $\tilde{A}$ -представляющее, 255, 256
  - — Мазура — Орлича, 256
  - АПС<sub>м</sub>, 183
  - АС<sub>м</sub>Б, 183
  - абсолютно представляющее, 183
  - — — продолжимое, 207
  - — — свободное, 206
  - — суммирующий базис, 183
  - МО-ПС<sub>м</sub>, 256
  - подпространств абсолютно представляющее (АПС<sub>м</sub>ПП), 232
  - сепарабельное, 194
- Система  $A$ -базис, 89
- $A$ -представляющая, 89
  - — подпространств ( $A$ -ПСПП), 235
  - — продолжаемая, 137
  - — свободная, 125
  - — сильно индуктивно, 105
  - — универсальная, 142
  - — эффективно, 97
  - — — правильная, 97
  - $E_\Lambda$ , 45, 48–50, 68, 73, 129, 130, 140, 180, 181, 202, 204, 229, 290, 291
  - $E_\theta^0$ , 113, 114, 116–118, 121, 122, 128
  - $E_\theta^1$ , 114
  - $E_\theta^N$ , 114, 118, 123
  - $\mathcal{E}_1$ , 110
  - $\mathcal{E}_N$ , 107, 109–111, 263
  - $\mathcal{E}_p^{a,b}$ , 147, 149, 151, 161, 164–167
  - АПС, 94
  - абсолютно представляющая, 94
  - абсолютный базис (АБ), 94
  - ИАПС, 105
  - ИПС, 105
  - ОСлПС, 252
  - ослабленно абсолютно представляющая, 252
  - ПАПС, 97
  - ППС, 97
  - ПС, 94
  - правильная  $A$ -ПС (ПА-ПС), 97
  - СИАПС, 105
  - СлаПС, 252
  - СлПС, 252
  - слабо абсолютно представляющая, 252
  - — представляющая, 252
  - ЭА-ПС, 97
  - ЭАППС, 97
  - ЭАПС, 97

- 
- ЭПА-ПС, 97
  - ЭППС, 97
  - ЭПС, 97
  - Сопряженная гармоническая пара, 248
  - Теорема В. Бернштейна, 56
  - Поляна, 46, 269
  - Точка достижимая, 58
  
  - Уравнение дифференциально-разностное**, 266
  - свертки, построение частного решения, 316
  - Условие  $(TX)_1$ , 99
  - $(TX)_2$ , 99
  - $A_1$ ), 293
  - Уточненный  $\rho$ -порядок по Валирону, 222
  
  - Функции аналитическое продолжение**, 57, 58, 59
  - — — по цепи, 58, 61
  - класса  $M^g$ , 293
  - непосредственное продолжение, 57
  - область существования вейерштрассова (полная), 46, 54, 55, 56, 58
  - Функция весовая  $\phi$** , 154
  - — Данжуа – Карлемана, 169
  - — Жевре, 169
  - вполне регулярного роста, 139
  - глобально аналитическая, 258
  - каноническая сопряженная, 249
  - опорная, 22
  - полная аналитическая, 58, 61, 62
  - равномерно весовая, 168
  - тригонометрически выпуклая, 222
  - характеристическая оператора, 138

Научное издание  
Серия  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ  
Выпуск 1

**Коробейник Юрий Федорович**  
**ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ:**  
**ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

Ответственный редактор *Ю. А. Кирютенко*  
Редактор серии *А. Г. Кусраев*

*Утверждено к печати Ученым советом  
Южного математического института  
Владикавказского научного центра  
Российской академии наук  
и Советом факультета математики,  
механики и компьютерных наук  
Южного федерального университета*

Компьютерная верстка *М. Д. Бичкаева*

Подписано в печать 3.06.2009.  
Формат бумаги  $60 \times 84^{1/16}$ . Усл. п. л. 19,53.  
Тираж 200 экз. Заказ № 454.

Владикавказский научный центр РАН и РСО-А  
362008, г. Владикавказ, пр. Коста, 93.

Отпечатано в ИПО СОИГСИ им. В. И. Абаева  
362040, г. Владикавказ, пр. Мира, 10.

ISBN 978-5-93000-066-5

